Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Ricardo Guimarães de Almeida

RAZÃO E PROPORÇÃO PARA ALÉM DA SALA DE AULA

Juiz de Fora

2015

Ricardo Guimarães de Almeida

RAZÃO E PROPORÇÃO PARA ALÉM DA SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Guimarães de Almeida, Ricardo.
RAZÃO E PROPORÇÃO PARA ALÉM DA SALA DE AULA / Ricardo Guimarães de Almeida. – 2015.
58 f. : il.

Orientador: Professor Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1. Razão e Proporção. 2. Matemática Aplicada . 3. Regra de Três. I. Fernando de Oliveira Faria, Luiz, orient. II. Título.

Ricardo Guimarães de Almeida

RAZÃO E PROPORÇÃO PARA ALÉM DA SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 15/08/2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria - Orientador
Universidade Federal de Juíz de Fora

Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juíz de Fora

Professor Dr. Anderson Luis Albuquerque de Araújo
Universidade Federal de Viçosa

Dedico este trabalho aos meus familiares, amigos e professores que tanto contribuíram em minha formação e minha vida, e à todos com quem abdiquei de vivências por esta conquista, que certamente não é só minha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores da UFJF, em especial ao meu orientador Luiz Fernando de Oliveira Faria, por todo desenvolvimento que o curso me trouxe, aos colegas de turma, em especial à Renato Cruz, por não deixarem que os obstáculos fossem maiores que o desejo coletivo de concluir a caminhada, além do crescimento pessoal resultante da convivência com pessoas brilhantes, e também agradeço ao CAPES pela bolça de estudos, por ter possibilitado que as condições materiais se tornassem viáveis.

De tudo quanto se escreve, agrada-me apenas o que alguém escreve com o próprio sangue

(Friedrich Nietzsche).

RESUMO

Este estudo tem como objetivo descrever os conceitos de razão e proporção através de situações que estão presentes no cotidiano popular, buscando estabelecer relações da vida prática do leitor com a matemática ensinada nas escolas por análise e resolução de problemas. Os modelos ora apresentados podem ser utilizados por professores e aplicados em salas de aula do ensino fundamental, sendo úteis àqueles que desejam compreender esses conceitos para aplicá-los em situações matemáticas que possam ser resolvidas através do uso dessas importantes ferramentas. Foi desenvolvido um estudo detalhado, aplicado e diversificado das razões, com a finalidade de garantir ao leitor fundamentos sólidos para a compreensão e resolução dos problemas de proporções, conhecidos por Regra de Três e Porcentagem, através de métodos que utilizam análises lógicas de fácil compreensão, inclusive para os não simpatizantes da matemática

Palavras-chave: Razão e Proporção. Matemática Aplicada. Regra de Três.

ABSTRACT

This study has as its objective to describe the concepts of ration and proportion through everyday situations, seeking to establish matches in the reader's practical life with mathematics taught in schools by analysis and problem solving. The presented models can be used by teachers and applied in classes of elementary school, and also may be useful to those who wish to comprehend the concepts in order to apply them in mathematical situations which can be solved by the use of these important means. We aimed to develop a detailed study, applied and diversified, of the ratios with the objective of guaranteeing to the reader solid fundaments for its comprehension and to solve proportion problems, known as The Rule of Three and Percentage, through methods which use logical analysis of easy comprehension, even for those who are not familiar with mathematics.

Key words: Ratio and Proportion. Applied Math. Rule of Three.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
PIB	Produto Interno Bruto
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática é repleta de conceitos que possibilitam ao homem uma melhor utilização de seus recursos. Assim, buscamos mostrar como através de métodos matemáticos, é possível resolver problemas aplicados ao cotidiano, possibilitando um melhor aproveitamento de recursos das diferentes naturezas, em tempos que essa melhor utilização seria, por razões lógicas, conveniente à sociedade como um todo.

No universo da Matemática que podemos chamar de básico, os conceitos de razão e proporção merecem destaque justificado pela tamanha aplicabilidade nas mais diversas situações problemas reais, sendo assim, essas ferramentas matemáticas utilizadas diariamente pelas pessoas em suas atividades. Além da frequente incidência de questões que envolvem estes conceitos em concursos e provas públicas. Para Skovsmose [2]:

> *"A essência da matemática encontra-se em suas aplicações e, portanto, de um certo modo, fora da matemática. No processo de educação, é, então extremamente importante ilustrar as várias maneiras de a matemática ser útil."*

E também,

> *"Na Educação Crítica, é essencial que os problemas se relacionem com situações e conflitos sociais fundamentais, e é importante que os estudantes possam reconhecer os problemas como "seus próprios problemas"."*

Procuramos neste trabalho trazer uma abordagem atual e aplicada, utilizando de elementos da realidade do estudante para apresentar estes temas que já são velhos conhecidos da Matemática. Os conceitos de razão e proporção são encontrados nos livros V e VI dos Elementos de Euclides que datam aproximadamente 300 anos antes de Cristo, embora essa teoria tenha sido atribuída a Eudoxo de Cnido que nasceu no ano 408 antes de Cristo e foi discípulo de Platão, e ainda, muito antes disso, uma intrigante razão conhecida como áurea foi aplicada em grandes construções como as pirâmides do Egito e o Partenon na Grécia.

Posteriormente, a razão áurea esteve presente em trabalhos de Fibonacci, Da Vinci, e tantos outros matemáticos, pintores e arquitetos. A descoberta de que essa razão era expressa por formas encontradas na natureza deram a ela a fama de razão divina. Hoje a razão áurea é amplamente utilizada também em áreas como marketing e propaganda.

A razão áurea, assim como, as razões de uma forma geral, serão amplamente abordadas e exploradas no capítulo intitulado Razões, mostrando a aplicabilidade destes conceitos que geralmente não recebem o devido valor, pois muitas vezes nas salas de aula são abordados de uma forma abstrata para os alunos, e provavelmente, por ser considerada uma noção simples, muitos professores não dão a devida significância e importância. Embora exista muito mais por traz das razões, elas estão em muitas das coisas... Por exemplo, podemos utilizar razões para fazer escolhas do tipo quando precisamos decidir, em um mercado, entre duas ou três opções de embalagens com diferentes quantidades de um mesmo produto, uma dúvida comum na seção de papel higiênico ou de iogurtes.

No capitulo denominado Proporções, vamos mergulhar no universo das proporções, dando significado as ideias de variáveis, mais conhecidas por grandezas, afim de solucionar problemas de regras de três simples, compostas e porcentagens. As regras de três são recorrentes em diversos concursos, e também muito procuradas por alguns profissionais das mais variadas áreas. Mostraremos métodos alternativos ao tradicional "método das flechas", comumente difundido e lecionado nas escolas

As competências aqui desenvolvidas são geralmente aplicadas no sétimo ano do ensino fundamental, embora possam ser adequadas para outros momentos do ensino regular, como por exemplo, as generalizações das proporções apresentadas podem ser interessantes quando se introduz no nono ano a noção de função. As sequências de exercícios possuem resoluções apresentadas em anexo.

Acreditamos que essa leitura possa contribuir para uma nova percepção por parte dos professores e estudantes dos conceitos inerentes às razões e proporções, possibilitando uma compreensão mais concreta e significativa, e consequentemente, desenvolver habilidades para resolução de diversas situações matemáticas e também para solucionar questões do dia a dia.

2 RAZÕES

A palavra razão tem origem no latin *ratio*, que possui significado de divisão ou quociente entre dois números ou grandezas. Entende-se por grandeza como tudo aquilo que pode ser medido ou contado. Assim, temos a seguinte definição formal:

Definição 1: *A razão entre dois números é o quociente entre eles, com o divisor diferente de zero.*

A razão entre os números reais x e y é representada através da notação $\frac{x}{y}$, ou $x \div y$, ou x/y, com $y \neq 0$, onde lê-se razão de x para y ou x está para y. Logo, toda razão possui dois termos, sendo x o valor que representa o termo denominado antecedente e y o valor que representa o termo denominado consequente.

Considerando a razão em que 2 está para 5, onde 2 é o antecedente e 5 o consequente, podemos representá-la como $2 \div 5 = 0,4$, ou tomando a razão de 9 para 3, temos $9 \div 3 = 3$. É notável considerar que as razões podem produzir quocientes inteiros, racionais e também irracionais, como o famoso número *phi*, que falaremos mais adiante.

O conceito de razão é considerado elementar porém de grande abrangência, estando presente em várias situações comuns do dia a dia, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. *A quantidade de inscritos no vestibular 2015 da Universidade do Estado do Rio de Janeiro está para o número de vagas oferecidas numa razão de* $\frac{49117}{7786}$ *o que é aproximadamente igual à 6,3, significando que para cada vaga disputam cerca de 6 vestibulandos.*

Exemplo 2. *A velocidade média é uma grandeza definida por uma razão do espaço percorrido para o relativo tempo gasto. Assim, ao percorrer 20 quilômetros em 4 horas, temos a razão velocidade como* $\frac{20}{4} = 5$*, que significa que a velocidade média foi de 5 quilômetros por cada hora.*

As razões são largamente aplicadas em nossas vidas e vamos a seguir mostrar algumas razões especialmente interessantes, relacionadas à contextos históricos e também atuais.

2.1 Figuras Semelhantes e Razão de Semelhança

Figuras semelhantes podem ser definidas da seguinte forma:

Definição 2: *Duas figuras são semelhantes quando possuem a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho.*

Assim, quando tomamos uma figura e a ampliamos ou diminuímos, estamos diante de figuras semelhantes, ou seja, um retângulo de dimensões 4 cm de comprimento por 3 cm de largura ao ter suas dimensões multiplicadas por 2, resultará em novas dimensões 8 cm e 6 cm, logo, estes dois retângulos são considerados figuras semelhantes.

Na figura 1 abaixo, temos imagens de fato semelhantes, e um conceito importante a ser considerado é a razão de semelhança, que é a constante que define o quanto a figura está sendo ampliada ou reduzida, e mais, podemos utilizar dessa razão para determinar quaisquer medidas da figura gerada a partir das respectivas medidas da figura original, pois figuras semelhantes possuem a mesma razão de semelhança entre todas as medidas de segmentos correspondentes.

Figura 1 – Barcos semelhantes

A razão $s = \frac{x}{y}$ representa um número real diferente de zero, tomada do segmento x para y, onde x representa uma determinada medida na figura original e y representa a medida correspondente à x na figura semelhante. A constante s é denominada de razão de semelhança. Por isso, sendo x_1 a medida de outro segmento da figura original e y_1 a medida do segmento correspondente à x_1 na figura semelhante, temos também que $s = \frac{x_1}{y_1}$, e para todo segmento x_n e seu correspondente y_n, com $n \in \aleph$, temos $s = \frac{x_n}{y_n}$.

A razão s possibilita a classificação quanto ampliação ou redução de figuras semelhantes, e ainda quantificar essa modificação em taxas percentuais ou decimais. Para isso, podemos ajustar a razão s colocando o termo x em função de y e s, assim temos $x = s \times y$, neste formato é mais direto compreender que quando $s = 1$, temos $x = y$, logo não há deformação na figura, e quando $s > 1$, temos que x será maior que y, logo temos uma redução da figura original, e para $0 < s < 1$, temos que x é uma fração de y, logo, temos uma ampliação da figura original.

Exemplo 3. *Considerando que na figura 1, o retângulo da esquerda possua lados medindo 3 cm de comprimento por 4 cm de largura, o retângulo do centro, possua lados medindo 6 cm por 8 cm, e o retângulo da direita possua dimensões de 1,5 cm por 2 cm. As razões entre os lados correspondentes dos retângulos da esquerda para o do centro são dadas por:*

$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0,5 = s_1$

Nesse caso temos $0 < s_1 = 0,5 < 1$*, caracterizando uma ampliação, onde a interpretação do valor de* $s_1 = 0,5$ *aplicado na sentença* $x = s \times y$ *resulta* $x = 0,5 \times y$*, onde concluímos que cada dimensão no barco da esquerda possui a metade da respectiva dimensão no barco do centro.*

As razões entre os lados correspondentes dos retângulos da esquerda para o da direita são dadas por:

$\frac{3}{1{,}5} = \frac{4}{2} = 2 = s_2$

Nesse caso temos $s_2 = 2 > 0$*, caracterizando uma redução onde a interpretação do valor* $s_2 = 2$ *aplicado na sentença* $x = s \times y$ *resulta* $x = 2 \times y$*, onde concluímos que cada dimensão no barco da esquerda possui o dobro da respectiva dimensão no barco da direita.*

2.2 Escalas

O conceito de escala é muito utilizado em plantas de casas, maquetes, projetos, mapas, e pode ser compreendido como a razão do comprimento da imagem para o comprimento real. Através dessa razão é possível determinar medidas reais a partir de modelos reduzidos.

Uma situação pertinente ao estudo das escalas é a utilização de fotografias de satélites, a razão entre uma medida obtida em uma fotografia pela respectiva medida real é constante para quaisquer medidas que estiverem no mesmo plano, fato justificado pela semelhança entre as figuras virtuais e reais. Considerando esse fato, denominaremos de e a razão escala, logo:

$$e = \frac{\text{medida na foto}}{\text{medida real}} = \frac{f}{r}, e \in \Re$$

Assim, ao determinar a razão escala e, do comprimento de um segmento na fotografia (f) para o respectivo comprimento na realidade (r), podemos calcular as dimensões reais de qualquer segmento coplanar ao considerado na foto fazendo uso da seguinte sentença que coloca a dimensão real em função da respectiva dimensão na foto e da razão escala:

$$e = \frac{f}{r} \Rightarrow r \times e = f \Rightarrow r = \frac{f}{e}$$

Pelo que foi apresentado em 2.1, considerando que idealmente o comprimento na foto é menor que o comprimento real, $f < r$, temos que a razão e representa um número real entre 0 e 1, $0 < e < 1$, ou seja, a escala tem sentido prático de ampliação, da figura original que é a foto, para a figura semelhante que seria a realidade. Observemos a situação exemplo a seguir:

Exemplo 4. *Considerando as seguintes dimensões de um carro popular, com o auxilio de uma régua milimetrada para aferir algumas medidas podemos fazer estimativas em relação a foto abaixo capturada por satélite.*

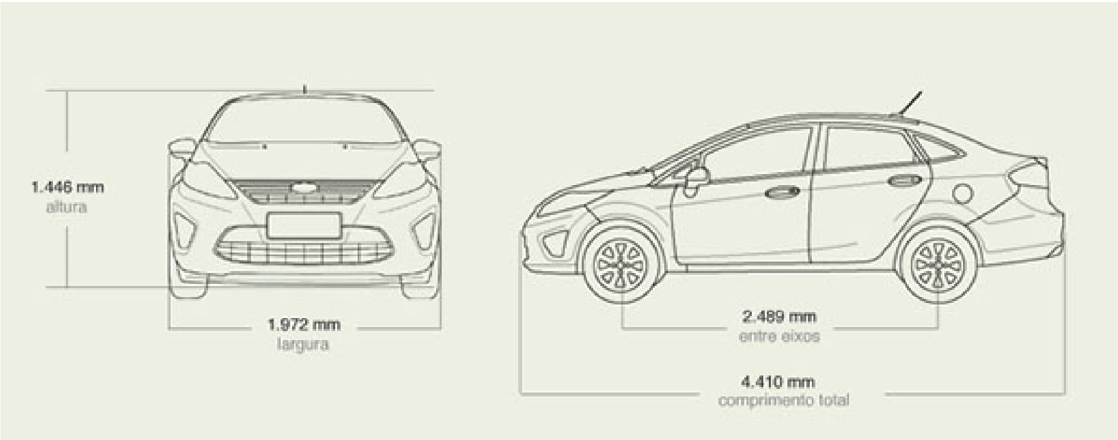

Figura 2 – Dimensões de um carro

Figura 3 – Estacionamento

Vamos determinar, por exemplo, a área aproximada do retângulo de cor clara no piso do estacionamento da Figura 3. Inicialmente devemos conhecer a escala da imagem $e = \frac{f}{r}$ *para estimar quantas vezes a realidade é maior que a foto. Utilizando uma régua milimetrada obtivemos o comprimento* f *do carro na foto medindo aproximados 3 mm, logo* $f = 3$*, e considerando a Figura 2, o comprimento real* r *de um carro é de 4410 mm, logo* $r = 4410$*. Aplicando esses valores na razão escala temos que:*

$$e = \frac{f}{r} \Rightarrow e = \frac{3}{4410}(\frac{\div 3}{\div 3}) \Longrightarrow e = \frac{1}{1430}$$

Utilizando a notação $r = \frac{f}{e}$*, substituindo o valor de e encontrado podemos obter uma fórmula geral para transformar quaisquer medidas da fotografia em medidas reais, e ainda interpretar com maior clareza a escala envolvida. Assim,*

$$r = \frac{f}{\frac{1}{1430}} \Longrightarrow r = 1430f$$

Entende-se então, que as dimensões reais são aproximadamente 1430 vezes maior que as dimensões da foto, representado uma escala propriamente dita de 1 para 1430 partes.

Através desta escala podemos determinar as dimensões reais do retângulo considerado para efetuar o cálculo de sua área. Fazendo novamente o uso da régua, o comprimento do retângulo f_1 *é de aproximados 134 mm, assim* $f_1 = 134$*, e sua largura* f_2 *é de aproximados 43 mm, assim* $f_2 = 43$*, aplicando esses valores em* $r = 1430f$ *obteremos as respectivas medidas reais aproximadas. Então, o comprimento real é dado por* $r_1 = 1430 \times 134 = 191620mm = 191,62m$ *e a largura real é dada por* $r_2 = 1430 \times 43 = 61490mm = 61,49m$*. A área do retângulo considerado será dada pelo produto* $r_1 \times r_2 = 191,62 \times 61,49 = 11782,7138m^2$*.*

Devido a falta de precisão de uma régua milimetrada, em muitas ocasiões não podemos garantir a exatidão das medidas obtidas na foto, por isso devemos considerar que as medidas reais que forem calculadas por escala são também aproximadas.

2.3 Razões no Supermercado

Na hora de ir às compras nos deparamos com alguns produtos que possuem embalagens de quantidades diversas e é comum utilizarmos de cálculos mentais para tentar perceber vantagens econômicas, porém, em muitas das vezes, os cálculos se tornam relativamente complexos para serem realizados mentalmente.

Utilizar as razões possibilita comparar situações e tomar decisões coerentes. Apresentaremos alguns métodos práticos e também situações para mostrar que aplicando corretamente as razões e com o auxilio de uma calculadora é possível decidir a melhor opção mais facilmente.

Uma estratégia que pode ser utilizada é estabelecer a razão do preço, representada por p, para a relativa quantidade, representada por q, em termos práticos essa razão determina o valor da unidade do produto e a chamaremos de u. Assim temos que:

$$u = \frac{\text{preço}}{\text{quantidade}} \Rightarrow u = \frac{p}{q}, u \in \Re$$

Em uma situação onde tenhamos ao menos duas condições distintas de preço por quantidade para um mesmo produto, ao comparar as respectivas razões u que estabelecem o preço da unidade em cada situação de quantidade diferente, conseguimos estabelecer qual a melhor condição oferecida, que será dada pelo menor valor encontrado para u.

Exemplo 5. *Como exemplo, vamos considerar uma situação hipotética onde uma embalagem com três barbeadores é vendida por R\$5,00, e outra embalagem com quinze barbeadores é vendida por R\$20,00. Qual a condição mais vantajosa para o consumidor?*

Para resolver essa questão iremos calcular o preço da unidade do barbeador em cada situação utilizando a razão $u = \frac{p}{q}$. *Na primeira condição temos o preço* p_1 *de R\$5,00 para a quantidade* q_1 *de 3 barbeadores, assim* $u_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{5}{3}$, *efetuando a razão temos aproximadamente* $u_1 = 1,67$, *que representa o valor unitário do barbeador nessa condição. Na segunda condição temos o preço* p_2 *de R\$20,00 para a quantidade* q_2 *de 15 barbeadores, assim* $u_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{20}{15}$, *efetuando a razão temos aproximadamente* $u_2 = 1,33$, *que representa o preço do produto nesta outra condição. Como o valor unitário da segunda opção é menor que o da primeira, temos então que a opção com quinze barbeadores é a condição mais econômica.*

Também podemos utilizar do conceito de razão entre grandezas de mesma natureza para realizar análises de situações como a do exemplo anterior. No caso da grandeza preço, por exemplo, podemos denominar p à razão entre os preços p_1 e p_2 de quantidades diferentes de um mesmo produto. Podemos avaliar que a razão $p = \frac{p_1}{p_2}$ irá expressar uma redução relativa de p_1 para p_2 quando p_1 for maior que p_2, assim $p > 1$ e $p \in \Re$, ou então expressará um aumento relativo de p_1 para p_2 quando p_1 for menor que p_2, assim $0 < p < 1$ e $p \in \Re$. Podemos quantificar essa variação estabelecendo p_2 em função de p_1 e p, $p_2 = \frac{p_1}{p}$.

Exemplo 6. *Analisando o exemplo anterior nessa perspectiva, vamos aplicar as razões entre dois valores de mesma natureza utilizando as grandezas preço e quantidade, então para* $p = \frac{p_1}{p_2}$ *e* $q = \frac{q_1}{q_2}$, *temos* $p = \frac{20}{5} = 4$, *a sentença onde* $p_2 = \frac{p_1}{4}$ *representa que o preço reduziu quatro vezes de* $p_1 = 20$ *para* $p_2 = 5$, *e temos* $q = \frac{15}{3} = 5$, *a sentença onde* $q_2 = \frac{q_1}{5}$ *representa que a quantidade reduziu cinco vezes de* $q_1 = 15$ *para* $q_2 = 3$. *Analisando essas razões é notável que a razão quantidade admite uma redução maior que a razão preço de uma condição para outra, fato que permite concluirmos que a condição com a maior quantidade de barbeadores é a mais vantajosa.*

É interessante perceber que em algumas situações o preço cobrado é o mesmo independentemente da quantidade. É o que acontece normalmente com os itens vendidos por quilo, ou por unidade convencional, onde multiplicamos o preço da unidade pela quantidade desejada para determinar o valor total.

2.4 Razões Equivalentes e Comparação entre Razões

Duas razões são equivalentes se representam um mesmo quociente, isto é, sejam os números racionais não nulos, a, b, c e d, e sendo a razão $\frac{a}{b} = q$, temos que a razão $\frac{c}{d}$ será equivalente a $\frac{a}{b}$ se, e somente se, $\frac{c}{d} = q$. Para representar a equivalência utilizamos o símbolo de equivalência $\equiv$, assim temos a seguinte representação para as razões equivalentes supracitadas.

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$$

Exemplo 7. *As razões $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes, pois ambas produzem o mesmo quociente 0,5, utilizando a notação representamos $\frac{1}{2} \equiv \frac{2}{4}$.*

Podemos observar no exemplo acima que os termos na segunda razão são o dobro dos respectivos termos na primeira razão, e esse fato não é uma particularidade desta equivalência, e sim uma consequência do próprio princípio de equivalência, logo na equivalência $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$, existe um número real m tal que $c = m \times a$ e $d = m \times b$.

Esse conceito é utilizado para obter razões equivalentes de forma simples, bastando multiplicar ou dividir os dois termos da razão considerada por um mesmo número. Em relação a razão $\frac{5}{3}$ é possível determinar uma infinidade de razões equivalentes, por exemplo, se multiplicarmos seus termos por 2 obtemos a equivalente $\frac{10}{6}$.

Considerando a propriedade da Tricotomia dos números reais para duas razões reais $\frac{a}{b} = q$ e $\frac{c}{d} = r$, temos que apenas uma das seguintes relações é válida: ou $q = r$ (são equivalentes), ou $q > r$, ou $q < r$. Nos casos onde as razões são diferentes ($q > r$ e $q < r$) o conceito de equivalência é utilizado para que possamos compará-las. Se q e r possuem o mesmo consequente ($b = d$), a comparação das razões se resume a comparação entre os antecedentes, porém, quando os consequentes são números distintos ($b \neq d$), a comparação das razões não se dá de maneira tão imediata, nesse caso, devemos obter razões equivalentes as dadas q e r afim de igualar seus consequentes para poder comparar seus antecedentes.

Exemplo 8. *Vamos por exemplo, comparar as razões $\frac{8}{9}$ e $\frac{5}{9}$. Sendo os consequentes iguais temos que quanto maior o antecedente maior será a razão, logo, como $8 > 5$ a razão $\frac{8}{9}$ é a maior.*

O fato dos consequentes serem iguais possibilita uma análise imediata das razões em termos comparativos. No caso de consequentes diferentes, teremos situações que necessitam de alguns ajustes utilizando equivalência, os quais mostraremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 9. *Para comparar as razões* $\frac{5}{3}$ *e* $\frac{23}{15}$ *é interessante que se obtenha uma razão equivalente a* $\frac{5}{3}$ *cujo consequente seja 15, com a finalidade de igualar os consequentes de ambas razões. Assim, multiplicamos os termos da razão* $\frac{5}{3}$ *por 5 obtendo a equivalente* $\frac{25}{15}$*. Podemos então transformar a comparação inicial em uma comparação com consequentes iguais de* $\frac{25}{15}$ *com* $\frac{23}{15}$*, onde temos que* $25 > 23$*, garantindo* $\frac{25}{15}$ *como a maior entre as razões, sendo* $\frac{25}{15} \equiv \frac{5}{3}$*, concluímos que* $\frac{5}{3}$ *é maior que* $\frac{23}{15}$*.*

No exemplo anterior o fato dos consequentes 5 e 15 serem múltiplos, possibilitou que houvesse a necessidade de transformar apenas uma das razões, quando isso não ocorre precisaremos transformar ambas razões.

Exemplo 10. *Para comparar as razões* $\frac{5}{8}$ *e* $\frac{7}{10}$ *devemos obter um mesmo consequente para ambas transformando as duas razões em equivalentes. É necessário que o novo consequente dessas razões seja um múltiplo comum de 8 e 10 e preferencialmente, que seja o menor dos múltiplos comuns (MMC) de 8 e 10, dessa forma reduziremos os cálculos. Sabendo que o MMC (8,10) = 40, vamos obter as respectivas razões equivalentes com consequentes iguais a 40, para isso multiplicamos os termos de* $\frac{5}{8}$ *por 5, e os termos de* $\frac{7}{10}$ *por 4, assim temos* $\frac{25}{40} \equiv \frac{5}{8}$ *e* $\frac{28}{40} \equiv \frac{7}{10}$*, como* $\frac{28}{40} > \frac{25}{40}$*, concluímos que* $\frac{7}{10} > \frac{5}{8}$*.*

Na prática, as noções de equivalência e comparação de razões são frequentemente utilizadas quando nos deparamos com produtos que possuem embalagens com quantidades diferentes. Efetuando cálculos mentais de equivalência conseguimos equiparar as quantidades e saber em qual das embalagens o produto possui menor preço. Quando utilizamos dessa "lógica" ocorre uma comparações de razões do preço pela quantidade de cada embalagem, onde o processo de equivalência é empregado naturalmente na obtenção de consequentes (quantidades) iguais para comparar os respectivos antecedentes (preços). Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 11. *No anúncio abaixo temos as opções de embalagem com duas pilhas pelo valor R\$5,99 e com seis pilhas pelo valor de R\$9,98.*

Figura 4 – Anúncio

Não é preciso muitos cálculos para perceber que a opção com seis pilhas é a mais vantajosa, pois para comprar essa mesma quantidade em embalagens com duas unidades *será necessário comprar três, que custarão quase dezoito reais. Utilizando comparação de razões equivalentes esse processo pode ser representado da seguinte maneira:*

Seja a razão $u = \frac{p}{q}$*, onde* p *é o preço referente a uma quantidade* q *de pilhas. Temos para a primeira embalagem* $u_1 = \frac{5{,}99}{2}$*, e para a segunda* $u_2 = \frac{9{,}98}{6}$*. Afim de comparar essas razões devemos igualar os consequentes multiplicando* u_1 *por 3, obtendo* $u_1 \equiv \frac{17{,}97}{6}$*, representando que o preço relativo a seis pilhas na razão equivalente a* u_1 *é de R\$17,97.*

Também podemos avaliar que a razão preço por quantidade em u_2 *é ainda divergente do anunciado leve 6 e pague 4, pois para adquirir quatro pilhas o cliente precisaria de duas embalagens com duas unidades, o que custaria R\$11,98.*

Porém, em situações onde não exista uma multiplicidade bem definida entre as quantidades em questão, o cálculo mental de equivalência acaba não sendo uma saída conveniente, vejamos a seguinte situação:

Exemplo 12. *Comparar as ofertas:*

Figura 5 – Anúncio

Utilizar o processo de equivalência com razões do tipo $u = \frac{p}{q}$*, onde* p *é o preço referente a uma quantidade* q*, pode não ser a melhor estratégia para esta comparação. Considerando* $u_1 = \frac{7{,}49}{800}$ *para a primeira situação, e* $u_2 = \frac{9{,}99}{1350}$ *para a segunda situação, a comparação dessas razões normalmente exige que igualemos os consequentes ao mínimo múltiplo comum de 800 e 1350. Porém, uma alternativa mais aplicável seria perceber que ao multiplicarmos os termos de* u_1 *por* $1,5$ *obtemos a razão equivalente* $\frac{11{,}24}{1200}$*, onde percebemos que na comparação desta com* u_2*, temos um preço maior* $(11,24 > 9,99)$ *por uma quantidade menor do produto*$(1200 < 1350)$*, logo, concluímos que a segunda embalagem é mais econômica.*

Lembrando que como visto no item 2.3, com o auxilio de uma calculadora, efetuar as razões u_1 *e* u_2 *e compará-las é uma forma mais imediata e simples de realizar essa análise.*

A possibilidade de abrir mão do uso da vírgula para representar ou calcular razões entre números com a mesma quantidade de casas decimais é uma aplicação prática interessante do conceito de equivalência.

Exemplo 13. *A razão* $n = \frac{1{,}52}{4{,}36}$ *é equivalente a* $\frac{152}{436}$ *quando seus termos são multiplicados por 100, podendo ser calculada ou representada desta forma.*

Uma classe particular de razões, conhecida como razões unitárias, é aplicada em muitas situações comuns, pois representam quantas unidades de determinada grandeza estão para uma unidade de outra grandeza, o que possibilita uma análise mais direta da razão. As razões unitárias possuem o número 1 como consequente.

Algumas razões unitárias são bem conhecidas, como a razão velocidade, que notada em quilômetros por hora é uma razão unitária que representa a quantidade de quilômetros que são percorridos em uma hora. Outro exemplo é a razão densidade demográfica, que representa a quantidade de habitantes que residem em uma determinada unidade de área.

O fato de uma quantidade estar para 1 deixa a razão em um patamar de análise mais eficiente, onde a relação existente entre os termos da razão é mais simples de ser concebida pelo leitor. Para obter a razão unitária equivalente a uma razão dada, dividimos os termos dessa razão pelo valor do seu consequente.

Exemplo 14. *Considerando a razão* r *de meninas para meninos de uma turma composta com 30 meninas e 12 meninos, temos* $r = \frac{30}{12}$*. Para obter a razão unitária equivalente a* r *dividimos seus termos por 12, resultando a razão* $\frac{2{,}5}{1}$*, onde avaliamos que a distribuição da turma em relação ao sexo é condicionada a razão unitária de 2,5 meninas para cada menino.*

2.5 A Relação entre as Razões, as Porcentagens e os Números Decimais

As porcentagens estão presentes em diversas situações do cotidiano, por essa razão é fundamental que sejam bem trabalhadas no ensino regular.

Na razão p onde o número real x esta para 100, temos $p = \frac{x}{100}$, utilizando a notação usual $p = x\%$ (x porcento). Uma porcentagem pode ser definida como uma razão entre mesmas grandezas de consequente igual a 100, logo podemos transformar qualquer razão em uma porcentagem obtendo a equivalente cujo consequente seja 100.

Exemplo 15. *Na razão de 10 para 100 temos* 10%*, na razão de 100 por 100 temos* 100%*, e na razão de 500 para 100 temos* 500%*.*

Exemplo 16. *Em uma aula o professor de matemática calculou que* 38% *dos alunos faltaram. A interpretação imediata é que se na turma constam 100 alunos, 38 teriam* *faltado, mas também poderíamos garantir a mesma porcentagem se fossem 50 alunos e 19 faltosos, entre outras possibilidades que representem razões equivalentes à razão* $\frac{38}{100}$.

Assim como as razões, os números decimais também podem se transformar em porcentagens, bastando considerar o número decimal como uma razão de consequente unitário e obter a respectiva razão equivalente com consequente igual a 100, obviamente multiplicando os termos da razão unitária por 100.

Exemplo 17. *Efetuando a razão* $p = \frac{25}{40}$ *obtemos* $p = 0,625$*, que pode ser representado pela razão unitária* $p = \frac{0,625}{1}$*. Multiplicando por 100 os termos da razão unitária obtida temos a equivalente* $\frac{62,5}{100}$*, logo podemos representar a razão p pela porcentagem* $p = 62,5\%$*. Entende-se que o antecedente é* $62,5\%$ *do consequente.*

Ao trabalhar razões, não podemos deixar de estabelecer o seguinte ciclo (Figura 6) que inter-relaciona as três representações quantitativas, mostrando que o tipo de representação depende exclusivamente do contexto onde é melhor aplicada.

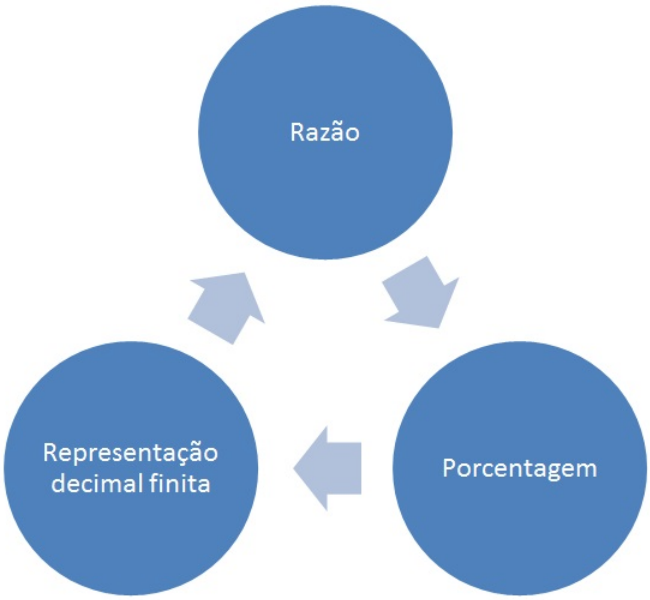

Figura 6 – Ciclo: Possibilidades de representações

Assim, o saber transformar um tipo de notação em outro é fundamental para compreender e resolver um maior número de situações problema.

As razões podem também ser utilizadas para determinar aumento ou redução percentual de alguma grandeza. Vamos considerar que uma grandeza tenha um valor inicial x_1 e se altere para um segundo valor x_2. A razão $p = \frac{x_1}{x_2}$ determina um quociente que representa a porcentagem de redução ($p > 1$) ou aumento ($0 < p < 1$) de x_1 para x_2. Para quantificar essa alteração em termos percentuais devemos escrever a situação final em função da situação inicial e do valor de p na forma $x_2 = \frac{x_1}{p}$. Vejamos dois exemplos.

Exemplo 18. *Um combustível que era vendido a R\$3,09, passou a custar R\$3,46 depois de um ajuste. Qual o percentual de ajuste? Considerando a razão p para* $x_1 = 3,09$ *e* $x_2 = 3,46$*, temos* $p = \frac{3,09}{3,46}$*, escrevendo na forma* $x_2 = \frac{x_1}{p}$ *temos que* $x_2 = \frac{x_1}{\frac{3,09}{3,46}} = x_1 \times \frac{3,46}{3,09} (\approx 1,12)$*, logo* $x_2 = 1,12 \times x_1$*, multiplicando ambos os termos por 100, temos a equivalente porcentagem* $x_2 = \frac{112}{100} \times x1 \Rightarrow x_2 = 112\% \times x_1 = 100\% \times x_1 + 12\% \times x_1$*, possibilitando a interpretação de que* x_2 *é* 12% *maior que* x_1*, onde concluímos que houve um ajuste de* 12% *neste combustível.*

Exemplo 19. *Na situação onde a conta de luz em um determinado mês foi de R\$89,24, e no mês seguinte de R\$65,49, temos uma notável redução que podemos calcular em percentual. Considerando a razão p para* $x_1 = 89,24$ *e* $x_2 = 65,49$*, temos* $p = \frac{89,24}{65,49}$*, escrevendo na forma* $x_2 = \frac{x_1}{p}$ *temos que* $x_2 = \frac{x_1}{\frac{89,42}{65,49}} = x_1 \times \frac{65,49}{89,42} (\approx 0,73)$*, logo* $x_2 = 0,73 \times x_1$*, multiplicando ambos os termos por 100, temos a equivalente porcentagem* $x_2 = \frac{73}{100} \times x_1 \Rightarrow x_2 = 73\% \times x_1 = 100\% \times x_1 - 27\% \times x_1$*, o que representa uma redução de* 27% *do primeiro para o segundo mês.*

2.6 A Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci

A razão áurea possui uma história própria dentro da matemática, porém nem sempre essa extraordinária razão é apresentada no ensino regular. O estudo da razão áurea está repleto de exemplos e aplicações encontrados nas mais diversas áreas como arquitetura antiga e moderna, arte, e também na própria natureza. Através da razão áurea podemos mostrar que a matemática pode ir além das necessidades humanas e que ela está em muitas coisas.

A razão áurea é considerada a melhor, mais estética, harmônica e perfeita razão entre dois números. Os gregos definiam que essa razão seria dada por duas medidas que estão em média e extrema razão, para isso, a medida de um dado segmento de reta com extremidades nos pontos A e B deverá ser dividida por um ponto C tal que a razão entre o segmento todo e a maior das partes é igual à razão entre a maior das partes e a menor.

Figura 7 – Razão Áurea

É possível determinar a razão áurea tomando na figura acima a medida do segmento de extremos A e C como x e a medida do segmento de extremos C e B como y, a seguinte equivalência estabelece a divisão em média e extrema razão: $\frac{x+y}{y} = \frac{y}{x}$. A razão de y para x representa o número irracional conhecido como número de ouro, que pode ser encontrado calculando a raiz positiva da equação do 2º grau obtida pela equivalência anterior quando $x = 1$, ou seja, resolvendo $y^2 - y - 1 = 0$, que admite a raiz positiva $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Assim temos $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, onde Φ (lê-se fi) representa o número irracional conhecido como número de ouro cuja aproximação decimal é 1,618. A denominação *phi* ocorre em homenagem ao arquiteto e matemático grego Phídias que projetou o templo grego Partenon fazendo uso de retângulos com dimensões cujas razões são áureas.

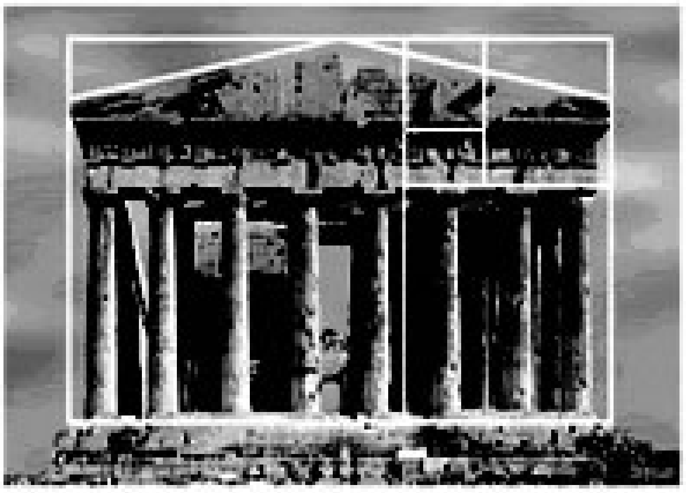

Figura 8 – Partenon

Os retângulos utilizados por Phídias há mais de 400 anos antes de Cristo são conhecidos como áureos ou retângulos de ouro. Nos dias de hoje esses retângulos são considerados fundamentais na elaboração de designs, embalagens de produtos e logotipos, como por exemplo, a logo da Sociedade Brasileira de Matemática.

SBM

SOCIEDADE BRASILEIRA
DE MATEMÁTICA

Figura 9 – Logotipo SBM

Uma pesquisa do século XIX feita pelo psicólogo e filósofo alemão Gustav Fechner, mostrou que entre diferentes tipos de retângulos a maioria das pessoas tem preferência pelos retângulos com medidas áureas ou próximas a elas. O que representa uma tendência natural de escolha entre as formas expostas, assim a pesquisa pôde fundamentar e confirmar o fato desse formato ser mais apreciado do que outros.

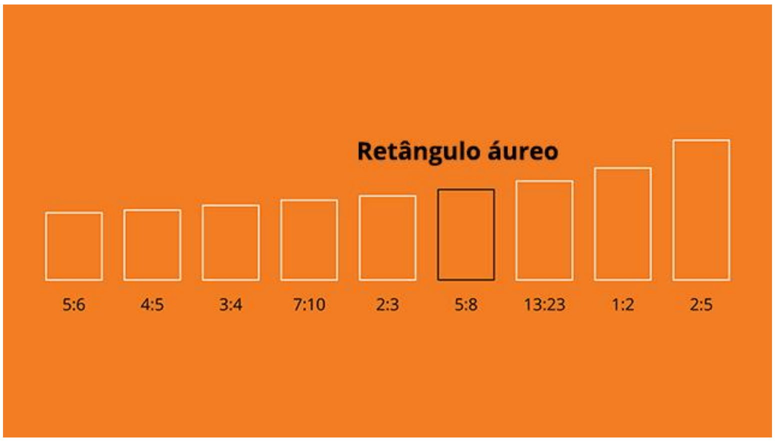

Figura 10 – Diferentes tipos de retângulos

Outra questão interessante que envolve a razão áurea é a sua relação com os números de Fibonacci. O problema dos coelhos de Fibonacci determina uma sequência numérica denominada sequência de Fibonacci, na qual cada termo é igual a soma dos dois anteriores imediatos. Vejamos o enunciado do clássico problema dos coelhos a seguir.

> *"Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a reprodução de um novo par e um par se torna produtivo quando completa dois meses de vida?"*

O quadro abaixo expressa um breve desenvolvimento para o problema dos coelhos de Fibonacci.

	Pares adultos	Pares novos	Total
1º mês	1	-	1
2º mês	1	1	2
3º mês	2	1	3
4º mês	3	2	5
5º mês	5	3	8
6º mês	8	5	13
7º mês	13	8	21
8º mês	21	13	34
9º mês	34	21	55
10º mês	55	34	89
11º mês	89	55	144
12º mês	144	89	233
Total	**233**	**144**	**377**

Figura 11 – Desenvolvimento dos coelhos de Fibonacci

Podemos observar que a quantidade de casais de coelhos em cada mês determina a seguinte sequência numérica infinita: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ..., estes são os números de Fibonacci. Um interessante arranjo geométrico de quadrados com lados medindo estes números é capaz de gerar uma sequência de retângulos áureos em que é possível traçar a forma espiral tal como na imagem seguinte.

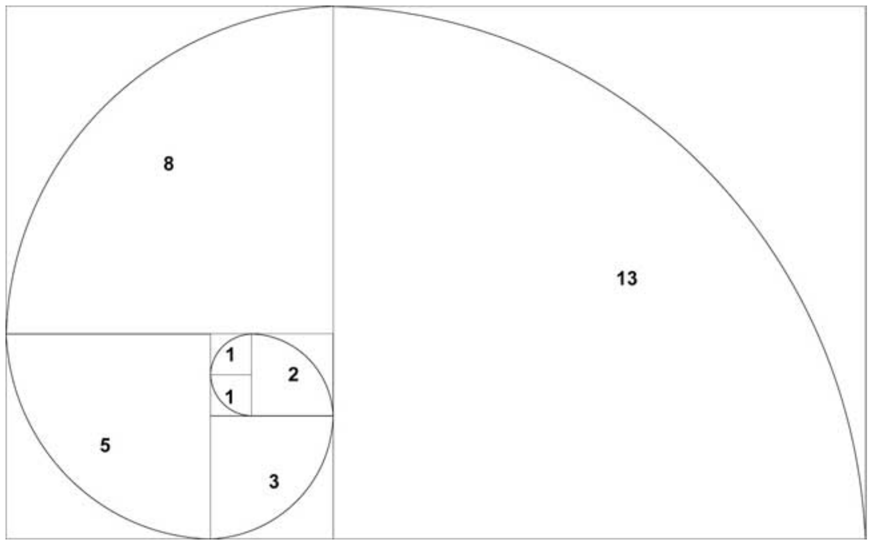

Figura 12 – Espiral

As razões tomadas entre um número dessa sequência pelo seu respectivo antecessor tendem ao número *phi*, sendo que quanto maiores forem os termos considerados da sequência para compor essa razão, maior é a aproximação de *phi*. Observe esse fato na seguinte disposição:

$$\frac{2}{1} = 1$$

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{5}{3} = 1,6666666...$$

$$\frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{13}{8} = 1,625$$

$$\frac{21}{13} = 1,6153846...$$

$$\frac{34}{21} = 1,6190476...$$

$$\frac{55}{34} = 1,6176470...$$

$$\frac{89}{55} = 1,6181818...$$

$$\frac{144}{89} = 1,6179775...$$

$$\Phi = 1,6180339$$

Também podemos perceber que na segunda razão temos uma aproximação por falta, na terceira por excesso, na quarta por falta, na quinta por excesso, e assim sucessivamente vamos tendendo ao número de ouro hora por falta hora por excesso, percorrendo uma vizinhança de *phi* cada vez menor.

2.7 Atividades do Capítulo

1. Tomando por base um professor que recebe R$15,00 por hora de aula em uma escola particular da região, resolva as seguintes questões:

   a) Utilizando razão unitária, determine quanto esse professor recebe por minuto.

   b) Determine quantos minutos esse professor precisa trabalhar para receber R$1,00.

   c) Utilizando equivalência e a razão salário por tempo, descubra quanto esse professor recebe por cada 20 minutos de aula.

   d) Utilizando equivalência e a razão salário por tempo, determine quanto esse professor recebe por mês, sabendo que ele trabalha 40 horas por semana.

2. Em qual das situações abaixo apresentadas o papel higiênico da marca Cotton apresenta o menor preço por unidade?

Figura 13 – Anúncio de papel higiênico

3. Considerando a tabela abaixo determine:

Tabela 7 - Número de empregados do setor turístico em Minas Gerais entre 2006 e 2012 (Fonte: O turismo formal em Minas Gerais – 2006 a 2012, Secretaria de Estado de Turismo, Minas Gerais, 2013)

2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
306.846	326.960	343.304	354.648	377.762	400.008	395.386

Figura 14 – Número de empregados do setor turístico em Minas Gerais

   a) Em qual ano houve o maior aumento de empregados, e calcule o relativo percentual de aumento.

b) O aumento percentual de empregados do ano 2006 para 2012.

4. Na situação apresentada no anuncio a seguir podemos notar uma boa vantagem na compra das embalagens com maior quantidade de pilhas. Considere as informações dadas e responda as seguintes questões apresentando justificativas que utilizem conceitos de razão.

Figura 15 – Anúncio de pilhas

a) Quanto deverá ser o menor valor pago por 10 pilhas AA?

b) Quanto deverá ser o menor valor pago por 12 pilhas AA?

c) Quanto deverá ser o menor valor pago por 30 pilhas AAA?

d) Quanto deverá ser o menor valor pago por 28 pilhas AAA?

5. Calcule os percentuais do aumento de hectares de florestas plantadas de cada ano para o ano seguinte. Em seguida calcule o percentual de aumento do ano 2005 para 2011, e verifique se esse valor corresponde a soma dos seis aumentos anuais.

Tabela 5 - Zonas de florestas plantadas em Minas Gerais entre 2005 e 2011 em milhares de hectares (Fonte: Florestas plantadas, um caminho para o desenvolvimento sustentável, 2012, Associação Mineira de Silvicultura)

2005	2006	2007	2008	209	2010	2011
1.269,2	1.327,4	1.361,6	1.423,2	1.440,0	1.536,3	1.522,3

Figura 16 – Milhares de hectares de florestas plantadas em Minas Gerais

6. Considerando a imagem abaixo, obtida através do software Google Earth, e utilizando uma régua e o conceito de escala, determine:

a) A distância aproximada do Estacionamento até a Piscina em metros.

b) A distância do Camping até o Banheiro em metros.

Figura 17 – Imagem aérea

7. Utilizando razões e uma calculadora verifique qual é a situação mais econômica em cada caso abaixo e descreva o processo matemático utilizado.

Figura 18 – Anúncio Sobremesa

a)

Figura 19 – Anúncio Petit Suisse

b)

8. Determine a razão utilizada para determinar os valores da última coluna na tabela abaixo e explique o processo efetuado.

Tabela 1 - Comparação entre o PIB (em milhões de reais) e o PIB per capita de Minas Gerais e do Brasil (Fonte: Secretaria de Desenvolvimento Econômico de Minas Gerais, http://www.desenvolvimento.mg.gov.br)

Ano	PIB Brasil (R$ milhões)	PIB MG (R$ milhões)	PIB per capita MG (R$)	PIB MG / PIB Brasil (%)
2002	1.477.822	127.782	6.904	8,6
2003	1.899.948	148.823	7.937	7,8
2004	1.941.498	177.325	9.336	9,1
2005	2.147.239	192.639	10.014	9,0
2006	2.369.797	214.814	11.028	9,1
2007	2.661.345	241.293	12.502	9,1
2008	3.031.864	282.522	14.233	9,3

Figura 20 – Comparação PIB

3 PROPORÇÕES

Uma consequência própria do estudo das razões é a proporcionalidade. Um conceito aplicado em uma grande diversidade de problemas e atividades do dia a dia. Também é sabido de sua inserção em diversos momentos da matemática que é aplicada no nível fundamental de ensino. Segundo os PCN's [6]:

> *"O fato de que muitas situações da vida cotidiana funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real.(...)"*

Uma proporção é garantida e também estabelecida por duas razões equivalentes. Assim na equivalência $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$, temos que os termos a, b, c e d, formam nesta ordem uma proporção. Usualmente representa-se uma proporção com a notação $a : b :: c : d$, lê-se que a está para b, assim como, c está para d. A disposição ordinal dos termos da proporção nesta notação permite classificá-los como extremos, aos termos a e d que ocupam as extremidades da notação, e como meios, aos termos b e c que ocupam o centro da notação.

Exemplo 20. *A equivalência* $\frac{2}{3} \equiv \frac{12}{18}$ *pode ser considerada uma proporção cujos meios são os valores 3 e 12, e os extremos são os valores 2 e 18.*

As proporções possuem uma série de propriedades interessantes, porém, objetivando a resolução de problemas específicos, duas dessas propriedades merecem destaque e serão aqui abordadas. São elas:

I) Propriedade Fundamental das Proporções: Os números reais a, b, c e d, com $b, d \neq 0$ representam nessa ordem uma proporção definida por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, $a \times d = c \times b$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Considerando a proporção definida pelos números reais a, b, c e d, com $b, d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, multiplicando os antecedentes a e c pelo produto $b \times d$ obtemos $\frac{a \times b \times d}{b} = \frac{c \times b \times d}{d} \Rightarrow a \times d = c \times b$.

($\Leftarrow$) Considerando a equação onde $a \times d = c \times b$, dividindo seus membros pelo produto $b \times d$ obtemos $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com $b, d \neq 0$.

$\square$

Exemplo 21. *Seja a proporção* $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$*, verificamos pela propriedade I a igualdade entre o produto dos meios e o produto dos extremos,* $3 \times 12 = 2 \times 18 \Rightarrow 36 = 36$*. As razões* $\frac{1}{3}$ *e* $\frac{4}{7}$ *não são proporcionais pois temos que o produto dos meios é diferente do produto dos extremos,* $1 \times 7 \neq 3 \times 4$.

A propriedade fundamental é utilizada na resolução de problemas dos mais variados tipos onde o objetivo seja o de determinar algum termo desconhecido da proporção.

Exemplo 22. *Os números naturais 4, 5, 8 e x formam, nessa ordem, uma proporção. Determine o valor de x.*

Considerando a proporção dada $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$ *e aplicando a propriedade fundamental temos que* $4 \times x = 5 \times 8 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10$.

A propriedade fundamental das proporções representa o algoritmo popularmente denominado multiplicação cruzada. Na prática podemos proceder nesses casos multiplicando os termos da diagonal que não contém a incógnita, e em seguida dividir o resultado obtido pelo valor apresentado na diagonal que contém a incógnita.

II) Propriedade da soma (ou diferença) dos termos: Em uma proporção, a soma ou a diferença dos dois primeiros termos está para o primeiro, ou para o segundo termo, assim como, a soma ou a diferença dos dois últimos termos está para o terceiro, ou para o quarto termo. Considerando a proporção formada pelos números reais a, b, c e d nessa ordem, com $b, d \neq 0$, temos o seguinte:

$$\tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \Rightarrow \tfrac{a+b}{b} = \tfrac{c+d}{d} \text{ ou } \tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \Rightarrow \tfrac{a-b}{b} = \tfrac{c-d}{d}.$$

Ou,

$$\tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \Rightarrow \tfrac{a+b}{a} = \tfrac{c+d}{c} \text{ ou } \tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \Rightarrow \tfrac{a-b}{a} = \tfrac{c-d}{c}.$$

Demonstração. Seja a proporção definida pelos números reais não nulos a, b, c e d, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, igualmente descrita na proporção $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, sendo essas razões equivalentes temos para cada razão um mesmo quociente real e não nulo k. Assim:

$\frac{a}{c} = k \Rightarrow a = c \times k \ (i)$

$\frac{b}{d} = k \Rightarrow b = d \times k \ (ii)$

Somando as equações (i) e (ii) obtemos:

$a + b = c \times k + d \times k = k(c + d) \Rightarrow k = \frac{a+b}{c+d}$

Então temos que $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. E que $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$.

Efetuando a diferença entre as equações (i) e (ii) obtemos:

$a - b = c \times k - d \times k = k(c - d) \Rightarrow k = \frac{a-b}{c-d}$.

Então temos que $\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. E que $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$.

□

Exemplo 23. *Seja a proporção definida por* $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$*. Aplicando a propriedade* II *podemos ter as seguintes equivalências:* $\frac{9+3}{15+5} = \frac{12}{20} \equiv \frac{9-3}{15-5} = \frac{6}{10} \equiv \frac{3}{5} \equiv \frac{9}{15}$.

Podemos utilizar esta propriedade na resolução de problemas clássicos de proporção, fato que mostraremos nas situações a seguir.

Exemplo 24. *Em uma turma de 40 alunos, três em cada cinco afirmam gostar de matemática. Determine o número de alunos que não gostam de matemática nessa turma.*

Vamos utilizar as incógnitas x *para o número de alunos que gostam de matemática e* y *para o número de alunos que não gostam. Considerando a razão de* $\frac{3}{2}$ *dos que gostam para os que não gostam de matemática em cada cinco alunos, podemos representar as informações dadas pelo problema com as seguintes sentenças nessas variáveis:*

(i) $x + y = 40$,

(ii) $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Para utilizar a propriedade II devemos ter as variáveis da proporção ii nos antecedentes das razões, sendo garantido pela propriedade I que podemos representar ii da seguinte forma:

(ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$

Aplicando a propriedade II na qual a razão soma dos antecedentes pela soma dos consequentes é proporcional a cada razão de ii e substituindo $x + y$ *por 40, temos:*

$\frac{x+y}{3+2} = \frac{40}{5} = 8$,

Logo,

$\frac{x}{3} = 8 \Rightarrow$ *(aplicando a propriedade I)* $x = 24$,

$\frac{y}{2} = 8 \Rightarrow$ *(aplicando a propriedade I)* $y = 16$.

Concluímos que nessa turma 16 alunos não gostam de matemática e 24 gostam.

Exemplo 25. *Três amigos realizaram um determinado trabalho e receberam uma quantia de R$12000,00 pelo serviço. Eles resolveram dividir o pagamento proporcionalmente ao tempo de dedicação de cada um. Sabendo que Marcos trabalhou durante 8 dias, Roberto 10 dias, e Pablo 12 dias, quanto cada um deles deverá receber?*

Considerando as incógnitas m *para o valor devido à Marcos,* r *para o valor devido à Roberto e* p *para o valor devido à Pablo, temos que as quantias recebidas deverão ser proporcionais aos tempos de trabalho, definindo então as seguintes proporções:*

$\frac{m}{8} = \frac{r}{10} = \frac{p}{12}$

Aplicando a propriedade II *na qual a razão soma dos antecedentes pela soma dos consequentes é proporcional a cada razão e considerando que a soma* $x + y + z$ *equivale à* *quantia total recebida de R\$1200,00, temos que:*

$\frac{m+r+p}{8+10+12} = \frac{12000}{30} = 400.$

Logo,

$\frac{m}{8} = 400 \Rightarrow m = 3200,$

$\frac{r}{10} = 400 \Rightarrow r = 4000,$

$\frac{p}{12} = 400 \Rightarrow p = 4800.$

Assim, pelos serviços prestados, Marcos deverá receber R\$3200,00, Roberto R\$4000,00 e Pablo R\$4800,00.

No estudo das proporções é importante compreendermos também a não proporcionalidade. De acordo com os PCN's [6]:

> *"Para compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais – contraexemplos. O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais."*

3.1 Variáveis (ou Grandezas) Diretas e Inversas

Na tentativa de tornar os conceitos mais simples e ajudar os alunos a compreendê-los é extremamente comum que os professores de matemática utilizem das seguintes bases de definição para variáveis diretas e inversas:

"*Duas grandezas são diretamente proporcionais se aumentam ou diminuem simultaneamente. Duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma aumenta e a outra diminui*".

Esse tipo de generalização pode induzir uma assimilação inadequada dos conceitos e em alguns casos distorcer o real sentido da proporcionalidade entre variáveis. A incoerência consiste na ideia de que duas variáveis que crescem ou decrescem simultaneamente podem não necessariamente serem diretas. Por exemplo a medida do lado de um quadrado e sua respectiva área são variáveis dependentes e aumentam ou diminuem simultaneamente, porém essas variáveis não são consideradas diretamente proporcionais.

Assim, para não causar essa falha na construção dos conceitos de variáveis diretas e inversas, a estratégia mais elementar e clara para uma aprendizagem efetiva é utilizar das noções de proporcionalidade e equivalência. Logo, sendo duas variáveis proporcionais diretas, temos que multiplicando (ou dividindo) uma destas variáveis por algum número real positivo, a outra variável também será multiplicada (ou dividida) pelo mesmo número.

Exemplo 26. *As variáveis tempo e distância são consideradas diretas, pois partindo de uma condição inicial de tempo relativa ao percurso de uma determinada distância e considerando as proporções da condição inicial é razoável estimar que ao dobrarmos a distância consequentemente dobramos o tempo, e que se reduzirmos o espaço à um terço do inicial deveremos utilizar um terço do tempo inicial.*

Analogamente para variáveis inversas, também é razoável utilizar das proporções para uma melhor definição dos conceitos. Logo, sendo duas variáveis inversamente proporcionais temos que multiplicando (ou dividindo) uma destas por algum número real positivo a outra variável será dividida (ou multiplicada) por esse mesmo número.

Exemplo 27. *As variáveis velocidade e tempo são consideradas inversas, pois partindo de uma condição inicial de velocidade constante e tempo, podemos estimar que ao dobrarmos a velocidade de execução de uma determinada tarefa iremos reduzir o tempo gasto na metade, ou então, ao reduzirmos a quantidade de operários de uma obra em $\frac{1}{4}$, iremos quadruplicar o tempo da obra inicialmente previsto.*

Uma vez bem desenvolvidas as noções de variáveis diretas e inversas é fundamental a formalização matemática dessas definições, segundo Lima, et al [3]:

> "Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando existe uma correspondência $x \Rightarrow y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:
>
> 1. Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \Rightarrow y$ e $x^{'} \Rightarrow y^{'} \Rightarrow x < x^{'} \Rightarrow y < y^{'}$.
> 2. Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \Rightarrow y$ então $nx \Rightarrow ny$ para todo $n \in N$.
>
> Diz-se que duas grandezas são inversamente proporcionais quando existe uma correspondência $x \Rightarrow y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:
>
> 1. Quanto maior for x, menor será y. Em termos matemáticos: se $x \Rightarrow y$ e $x^{'} \Rightarrow y^{'} \Rightarrow x < x^{'} \Rightarrow y' < y$.
> 2. Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dividido por dois, por três, etc. Em linguagem matemática: se $x \Rightarrow y$ então $nx \Rightarrow \frac{y}{n}$, para todo $n \in N$."

É de fundamental importância ponderar sobre proporções diretas aparentes, questões que apesar de não representarem proporções parecem sê-las. Como exemplo podemos considerar que o volume de chuvas e o nível de um determinado rio afetado pelas águas dessas chuvas não são variáveis diretas, pois compreendemos que dobrando o volume de chuvas não necessariamente teremos o dobro de nível do rio.

3.2 Regra de Três Simples

A regra de três é uma aplicação em situações problemas fictícias e também reais dos conceitos: equivalência entre razões, proporção e propriedade fundamental das proporções. A denominação regra de três é justificada pelo fato dos problemas assim chamados representarem proporções onde três dos quatro termos são conhecidos e um é desconhecido e representado por uma incógnita.

Apesar dos registros históricos que confirmam a utilização desse algoritmo pelos árabes desde a idade média, quem empregou o termo 'regra de três' pela primeira vez foi Leonardo de Pisa, que denominou o processo como 'Regra de Três Números Conhecidos' em seu livro Liber Abaci (livro do Ábaco) escrito em 1202.

A resolução de uma regra de três consiste em determinar o termo desconhecido na proporção representada pelo problema utilizando da propriedade fundamental das proporções. Para grandezas diretas temos razões equivalentes, então a aplicação da propriedade fundamental das proporções pode ser imediatamente efetuada. Para grandezas inversas é necessário que haja a inversão de uma das razões antes de efetuar o produto cruzado, afim de garantir a equivalência entre as razões que são dispostas de forma inversa pela própria natureza do problema.

Vejamos um exemplo onde as variáveis são diretas.

Exemplo 28. *Uma família consome dez quilos de arroz em três meses, qual será a quantidade de arroz que essa família irá consumir em dez meses caso a proporção de consumo continue a mesma?*

Inicialmente devemos verificar se as variáveis do problema, quantidade de arroz e tempo de duração, são diretas ou inversas. Lembrando que essa análise não depende dos valores dados pelo problema e sim, exclusivamente, do comportamento proporcional entre as variáveis. Logo podemos avaliar que ao dobrar a quantidade de arroz o tempo de duração também irá dobrar, consequentemente as variáveis são diretas.

Utilizando o seguinte quadro, representaremos os dados do problema observando as correspondências definidas em cada situação.

Quantidade de Arroz (kg)	*Tempo de Duração (mês)*
10	*3*
x	*10*

Considerando a condição de variáveis diretas observada, iremos representar a proporção estabelecida no quadro, aplicar a propriedade fundamental e resolver a equação obtida. Assim,

$\frac{10}{x} = \frac{3}{10} \Rightarrow 3 \times x = 10 \times 10 \Rightarrow 3x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{3} \Rightarrow x = 33,33.$

Logo, garantindo a mesma proporção, concluímos que a quantidade de arroz necessária para os dez meses é de aproximadamente 33 quilos.

Vejamos um exemplo onde as variáveis são inversas.

Exemplo 29. *Em uma casa onde residiam cinco pessoas, uma caixa com 12 litros de leite era totalmente consumida em oito dias. Aconteceu que dois dos moradores se mudaram para uma outra residência. Considerando o mesmo consumo individual para todos cinco personagens, de quantos dias será a duração de uma caixa de leite após a saída dos dois ex-moradores da casa?*

Inicialmente verificaremos se as variáveis do problema, quantidade de pessoas e tempo de consumo do alimento, são diretas ou inversas. Podemos avaliar que ao dobrar a quantidade de pessoas o tempo para consumo da caixa de leite não irá dobrar, e muito pelo contrário, irá reduzir a metade, consequentemente temos variáveis inversas.

Utilizando o seguinte quadro, representaremos os dados do problema observando as correspondências definidas em cada situação.

Quantidade de Pessoas	*Tempo de Duração (dias)*
5	*8*
3	x

Considerando a condição de variáveis inversas observada, devemos representar a proporção invertendo uma das duas razões definidas no quadro, afim de garantir a equivalência. Por fim, aplicamos a propriedade fundamental e resolvemos a equação obtida. Assim,

$\frac{5}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow 3 \times x = 5 \times 8 \Rightarrow 3 \times x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{3} = \frac{39}{3} + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3}.$

Logo, concluímos que a duração de uma caixa de leite para os três moradores restantes na casa é de 13 dias e $\frac{1}{3}$, *que poderíamos converter para 13 dias e 8 horas.*

3.3 Porcentagem

Anteriormente no Capítulo 2 desenvolvemos a noção de porcentagem através das razões centesimais, nesta secção aplicaremos a ideia de porcentagem na resolução de problemas utilizando regra de três.

Uma porcentagem pode facilmente ser resolvida através de uma regra de três simples determinada por variáveis diretas. Em alguns problemas é necessário considerar a correspondência direta entre a porcentagem de 100% e o valor que represente o total ou o máximo de uma variável. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 30. *Em um trabalho de Matemática composto por 65 questões, um aluno acertou 80%. Quantas questões ele acertou?*

Temos no problema o total de 65 questões que iremos relacionar ao percentual de 100%, e precisamos determinar a parte desse todo que quantitativamente corresponde a 80%, para isso utilizaremos a representação no quadro abaixo:

Quantidade (questões)	*Percentual (%)*
65	*100*
x	*80*

Considerando que as variáveis em uma porcentagem são sempre diretas, temos a seguinte proporção correspondente ao problema:

$\frac{65}{x} = \frac{100}{80} \Rightarrow 100 \times x = 65 \times 80 \Rightarrow x = \frac{5200}{100} = 52$

Logo concluímos que o aluno acertou 52 das 65 questões do seu trabalho.

Exemplo 31. *Roberto, que possui um salário de R$1650,00, recebeu um reajuste salarial de R$150,00 neste ano. Sabendo que a inflação acumulada no período é de 10%, determine se nessas condições o poder de compra de Roberto aumenta ou diminui.*

O problema sugere que comparemos o índice de inflação acumulada e o percentual do reajuste salarial de Roberto. Assim, iremos calcular o percentual de reajuste relativo ao aumento de 150 em um total de 1650 utilizando a representação do quadro a seguir.

Quantidade (R$)	*Percentual (%)*
1650	*100*
150	x

Considerando que as variáveis em uma porcentagem são sempre diretas, temos a seguinte proporção correspondente ao problema:

$\frac{1650}{150} = \frac{100}{x} \Rightarrow 1650 \times x = 150 \times 100 \Rightarrow x = \frac{15000}{1650} = 9,09.$

Logo compreendemos que houve um aumento de 9,09% sobre o salário de Roberto, considerando o índice de inflação informado igual a 10%, concluímos que Roberto diminui seu poder de compra.

Exemplo 32. *Para pintar 60% de uma casa um pintor gastou 24 litros de tinta. Mantendo a mesma proporção de gasto e sabendo que uma lata contém 18 litros de tinta, quantas latas de tinta serão utilizadas em toda pintura desta casa?*

Tomando como referência a porcentagem relativa à fração da casa já coberta e a respectiva quantidade de tinta utilizada, vamos calcular a quantidade de tinta necessária para pintura de toda casa, em termos percentuais 100% da casa, utilizando a representação no quadro à baixo.

Quantidade (litros)	*Percentual (%)*
24	*60*
x	*100*

Assim temos a seguinte proporção definida pelo problema:

$\frac{24}{x} = \frac{60}{100} \Rightarrow 60 \times x = 24 \times 100 \Rightarrow x = \frac{2400}{60} \Rightarrow x = 40$

Logo seriam gastos 40 litros de tinta para pintar a casa inteira. Considerando que cada lata contém 18 litros de tinta, podemos concluir que haverá necessidade de pouco mais de duas latas.

3.4 Regra de Três Composta

A regra de três é considerada composta quando apresenta proporções que envolvam mais de duas variáveis distintas. Nas resoluções desses problemas o conhecido método das flechas é sem dúvida o mais recorrente nos livros didáticos e o mais ensinado pelos professores nas escolas. Porém é constatada uma certa dificuldade de assimilação e aprendizagem desse método por grande parte dos alunos, fato que pode ser verificado através de atividades e avaliações escolares onde constantemente observa-se confusões quanto ao sentido das flechas. Considerando Imenes e Jakubovic [7], temos que:

> *"[...]cabe ao professor decidir pelo ensino ou não da "regra das flechas". Ela não é de modo algum imprescindível, embora os alunos devam ter algum modo prático para resolver rapidamente problemas sobre regra de três composta. Caso o professor opte por apresentar a "regra das flechas", é importante que esta regra não seja vista pelos alunos como algo mágico, como uma receita ou como uma fórmula que dá certo sem que eles tenham a menor noção sobre os motivos pelos quais ela funciona."*

Buscando explorar diferentes estratégias que possam ser significativas para a aprendizagem da regra de três composta, apresentaremos dois métodos alternativos ao das flechas também utilizados nas resoluções de tais problemas.

3.4.1 Resolução por Meio de Redução à Regra de Três Simples.

O método de resolução por meio de redução à regra de três simples consultado em Imenes e Jacubovk [7], tem como estratégia transformar proporções compostas em múltiplas proporções simples, tomando convenientemente algumas variáveis como constantes. Vejamos a aplicação deste método no seguinte problema.

Exemplo 33. *Uma máquina tem capacidade de asfaltar em 4 dias, 160 metros de pista com 12 metros de largura. Utilizando essa máquina, quantos dias e fração serão necessários para asfaltar 800 metros de estrada com 16 metros de largura?*

Inicialmente iremos construir um quadro para representar as condições apresentadas no problema nas situações que denominaremos de A e B, sendo x o tempo desconhecido.

Situação	*Dias*	*Comprimento*	*Largura*
A	*4*	*160*	*12*
B	x	*800*	*16*

Consideraremos apenas a variação de duas das grandezas tornando as outras constantes, afim de transformar o problema em uma regra de três simples. No caso iremos considerar a largura constante, estabelecendo uma nova situação que denominaremos de C, onde temos um período de y dias para asfaltar 800 metros com largura fixa de 12 metros. Temos então o seguinte quadro para representar as situações A e C:

Situação	*Dias*	*Comprimento*	*Largura*
A	*4*	*160*	*12*
C	y	*800*	*12*

Considerando as variáveis dias e comprimento diretas, devemos representar a proporção simples das razões variáveis, aplicar a propriedade fundamental e resolver a equação obtida. Assim:

$$\frac{4}{y} = \frac{160}{800} \Rightarrow 160 \times y = 4 \times 800 \Rightarrow y = \frac{3200}{160} \Rightarrow y = 20$$

Representando que nas condições da situação C, a máquina levaria 20 dias para concluir o asfalto.

Determinado o valor de y, aplicamos esse resultado em um quadro contendo as situações B e C, onde podemos observar que a variável comprimento se torna constante, *reduzindo o problema à uma nova regra de três simples de variáveis também diretas, dias e largura.*

Situação	*Dias*	*Comprimento*	*Largura*
C	$y = 20$	*800*	*12*
B	x	*800*	*16*

Assim obtemos a seguinte proporção:

$\frac{20}{x} = \frac{12}{16} \Rightarrow 12 \times x = 20 \times 16 \Rightarrow 12 \times x = 320 \Rightarrow x = \frac{320}{12} \Rightarrow x = 26\frac{8}{12} = 26\frac{2}{3}$.

Logo podemos considerar que o tempo gasto para a máquina realizar a tarefa nas condições B seria de 26 dias e $\frac{2}{3}$*, ou seja, 26 dias e 16 horas.*

O próximo exemplo a ser resolvido por este método é sugerido na trama do livro 'O Diabo dos Números' [5]:

Exemplo 34. *"Se 2 padeiros fazem 444 rosquinhas em 6 horas, de quanto tempo precisarão 5 padeiros para fazer 88 rosquinhas?"*

Inicialmente representaremos no quadro a seguir as condições apresentadas no problema pelas situações que denominaremos de A e B, sendo x *o tempo a ser determinado.*

Situação	*Números de Padeiros*	*Rosquinhas*	*Tempo(h)*
A	*2*	*444*	*6*
B	*5*	*88*	x

Fixando a variável quantidade de padeiros da condição A, definimos o que chamaremos de situação C, onde temos um período y *de horas para que 2 padeiros façam 88 rosquinhas. Temos assim o seguinte quadro representativo para as situações A e C.*

Situação	*Números de Padeiros*	*Rosquinhas*	*Tempo(h)*
A	*2*	*444*	*6*
C	*2*	*88*	y

Considerando as variáveis tempo e rosquinhas diretas, devemos representar a proporção simples das razões variáveis, aplicar a propriedade fundamental e resolver a equação obtida.

$\frac{444}{88} = \frac{6}{y} \Rightarrow 444 \times y = 6 \times 88 \Rightarrow y = \frac{528}{444}$.

O valor encontrado para y *é um decimal não exato, portanto podemos trabalhar com* y *na forma fracionária ao construir o seguinte quadro onde relacionamos as situações B e C.*

Situação	*Números de Padeiros*	*Rosquinhas*	*Tempo(h)*
B	*5*	*88*	x
C	*2*	*88*	$y = \frac{528}{444}$

Podemos observar que a variável rosquinhas se torna constante, reduzindo o problema à uma nova regra de três simples. Sendo as variáveis não fixas (número de padeiros e dias) inversas, temos a seguinte proporção definida:

$\frac{2}{5} = \frac{x}{\frac{528}{444}} \Rightarrow 5 \times x = 2 \times \frac{528}{444} \Longrightarrow x = \frac{2}{5} \times \frac{528}{444} \Longrightarrow x = 0,4756756.$

Logo podemos concluir que o tempo necessário para que os padeiros realizem a tarefa nas condições B é de aproximadamente meia hora.

3.4.2 Resolução por Redução à Unidade

O método de resolução por redução à unidade consultado no livro 'Explorando o Ensino da Matemática' [4], consiste na redução de todas as variáveis de uma dada condição inicial à unidade, fazendo uso de proporções. Após estabelecer essa condição para todas as variáveis dadas, o processo se resume em transformar a sentença unitária na condição que se encontra a variável a ser determinada.

Iremos resolver os mesmos problemas apresentados na subseção 3.4.1 aplicando este método, a fim de possibilitar a comparação entre os dois algoritmos.

Exemplo 35. *Uma máquina tem capacidade de asfaltar em 4 dias, 160 metros de pista com 12 metros de largura. Utilizando essa máquina, quantos dias e fração serão necessários para asfaltar 800 metros de estrada com 16 metros de largura?*

A situação admite duas condições que vamos representar através das seguintes sentenças denominadas A e B, assim temos:

Sentença A: Uma máquina, asfalta uma pista com 160 metros de comprimento por 12 metros de largura em 4 dias.

Sentença B: Uma máquina, para asfaltar uma pista com 800 metros de comprimento por 16 metros de largura, levaria quantos dias?

Para facilitar o algoritmo devemos colocar a variável que se deseja determinar no final da sentença. Definidas as sentenças iremos reduzir cada variável da sentença A para a unidade, utilizando da seguinte linha de raciocínio lógico:

Se uma máquina asfalta uma pista com 160 metros de comprimento por 12 metros de largura em 4 dias, então:

Uma máquina asfalta uma pista com 1 metro de comprimento por 12 metros de largura em $\frac{4}{160}$ *dia, então:*

Uma máquina asfalta uma pista de 1 metro de comprimento por 1 metro de largura em $\frac{4}{160\times 12} = \frac{1}{480}$ *dia. Nessa situação temos estabelecida a condição de unidade para as variáveis da sentença A. Para concluir a resolução devemos obter novas sentenças equivalentes a unitária, objetivando equipará-la aos valores da sentença B.*

Assim, temos na sentença unitária que uma máquina asfalta uma pista com 1 metro de comprimento por 1 metro de largura em $\frac{1}{480}$ *dia, então, a mesma máquina irá asfaltar uma pista com 800 metros de comprimento por 16 metros de largura em* $800 \times 16 \times \frac{1}{480} = \frac{12800}{480} = \frac{80}{3}$ *dias, que representa um total de 26 dias e* $\frac{2}{3}$.

Exemplo 36. *"Se 2 padeiros fazem 444 rosquinhas em 6 horas, de quanto tempo precisarão 5 padeiros para fazer 88 rosquinhas?"*

A situação admite duas condições que vamos representar através das seguintes sentenças denominadas de A e B, assim temos:

Sentença A: 2 padeiros fazem 444 rosquinhas em 6 horas.

Sentença B: 5 padeiros fazem 88 rosquinhas em x horas.

Para reduzir todas variáveis da sentença A à unidade podemos utilizar da seguinte lógica:

Se 2 padeiros fazem 444 rosquinhas em 6 horas, então, 1 padeiros faz 444 rosquinhas em $6 \times 2 = 12$ *horas, e assim, 1 padeiro faz 1 rosquinha em* $\frac{12}{444} = \frac{1}{37}$ *hora.*

Estabelecida a condição de unidade para as variáveis da sentença A, devemos obter novas sentenças equivalentes à unitária, objetivando equipará-la aos valores da sentença B.

Assim, temos que na sentença unitária, 1 padeiro faz 1 rosquinha em $\frac{1}{37}$ *hora, então temos que 5 padeiros farão 1 rosquinhas em* $\frac{1}{37} : 5$ *hora, e ainda, que 5 padeiros fazem 88 rosquinhas em* $88 \times \frac{1}{37} : 5$ *hora, cuja aproximação decimal é de 0,475 hora, representando um tempo aproximado de meia hora.*

É importante observarmos que esse método utiliza as noções de variáveis diretas e inversas de forma intuitiva, não sendo necessário a tão recorrente análise característica dos problemas de regra de três, sobre a natureza das variáveis (diretas ou inversas).

3.5 Generalizando Proporções

Ampliando um pouco mais nossa análise das proporções, vamos considerar a situação onde para $80m^2$ de área foram gastos 16 sacos de cimento para realizar um contrapiso, e precisa-se saber quantos sacos de cimento serão necessários para uma outra área de medida qualquer.

Várias formas de resolver esse problema já foram aqui citadas e apresentadas. No entanto, supondo a necessidade de calcular regularmente essa proporção para várias situações de medidas de áreas diferentes, a utilização dos algoritmos vistos daria um pouco de trabalho. Uma solução adequada seria estabelecer uma relação proporcional fixa entre as variáveis que possibilite calcular a quantidade de cimento necessária para qualquer área que se deseje, bastando apenas efetuar o produto da área por uma constante de proporcionalidade.

Para estabelecer essa relação também chamada de fórmula, vamos representar a área coberta pelo contrapiso por y e a quantidade de sacos de cimento representaremos por x. A equivalência entre as razões numéricas e algébricas dos sacos de cimento pelo metro quadrado da área, produz a seguinte proporção $\frac{y}{x} = \frac{80}{16}$. Aplicando a propriedade fundamental das proporções temos $16 \times y = 80 \times x \Rightarrow y = \frac{80 \times y}{16} \Rightarrow y = 5x$. Estando assim bem definida a relação proporcional da área em função da quantidade de cimento como $y = 5x$. Podemos também obter o inverso, a relação proporcional da quantidade de cimento em função da área coberta, bastando isolar a variável x, logo $x = \frac{y}{5}$.

Relações proporcionais que definem uma variável em função da outra podem ser generalizadas na forma $y = kx$, onde k é uma constante real de proporcionalidade definida pela razão entre dois valores relativos dessas variáveis.

3.6 Atividades do Capítulo

1. Em um teste de Matemática com 25 questões Mauro acertou 18. Maria acertou 31 em um outro teste com 40 questões. Determine o percentual de acerto de cada aluno e verifique qual dos dois se saiu melhor nos testes?

2. Um salário de R$2.500,00 foi reajustado em 5%. Qual será o novo salário?

3. Na compra a vista de um aparelho de som, uma loja oferece um desconto de 15% que corresponde a R$66,00. Qual o valor deste aparelho a prazo?

4. Em um colégio 40% dos alunos são meninas e 720 são meninos. Quantos estudantes há nesse colégio?

5. Em uma compra a vista no dinheiro, um cliente exigiu 5% de desconto argumentando que se o valor for pago utilizando cartão de débito, a loja pagará aproximadamente 5% da compra para a operadora do cartão. Tendo ele comprado R$1.840,00, determine quanto pagou após conseguir esse desconto.

6. (ENEM 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para $900m^3$. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório com capacidade de $500m^3$, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas,

quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente. A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2 b) 4 c) 5 d) 8 e) 9

7. (ENEM 2009) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

   Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

   a) 920 kg. b) 800 kg. c) 720 kg. d) 600 kg. e) 570 kg.

8. (ENEM 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

   a) 12 kg. b) 16 kg. c) 24 kg. d) 36 kg. e) 75 kg.

4 Considerações Finais

Neste trabalho procuramos desenvolver e difundir estratégias que não costumam ser trabalhadas nas salas de aula, trazendo uma abordagem diferenciada e a nível de ensino fundamental. Tendo como principal finalidade a melhora no ensino e na aprendizagem dos conceitos de Razão e Proporção, sendo estes conteúdos indiscutivelmente encontrados em questões de grande parte dos concursos, provas e avaliações do estado (ENEM, Prova Brasil).

Desenvolvemos métodos de resolução e também interessantes discussões em diversos exemplos sobre razões, regra de três simples, composta e porcentagem, tentando explorar ao máximo as diversas condições possíveis entre variáveis proporcionais. Buscamos através de uma linguagem de fácil compreensão simplificar processos e garantir a fundamentação e o rigor matemático presentes nestes conceitos, pois entendemos assim como Freudenthal [1]:

> *Também pode ser uma questão matemática, resultados novos ou velhos, de produção própria ou de outros, que têm de ser organizados de acordo com novas ideias, para ser mais bem entendida, em um contexto mais amplo ou por uma abordagem axiomática.*

Acreditando na importância da matemática como ferramenta humana e que a maneira com que os temas foram apresentados possibilite ao leitor o desenvolvimento de análises críticas eficientes também para seu próprio dia a dia, sendo aplicáveis não somente a todos os casos apresentados mas também para uma infinidade de outros.

Logo, esse material pode ser considerado uma referência para professores que optem por uma abordagem diferenciada da tradicional, buscando desenvolver habilidades que possibilitem aos alunos que a matemática do ensino fundamental não seja feita somente para dentro, mas também para além da sala de aula.

REFERÊNCIAS

[1] FREUDENTHAL, Hans. **Perspectivas da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975. 221 p.

[2] SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia**. 3 ed. São Paulo: Papirus, 2006. 160 p. (Coleção perspectivas em educação matemática)

[3] LIMA, Elon Lages. et al. **Temas e Problemas**. 3 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. 193 p. (Coleção do professor de matemática)

[4] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Explorando o Ensino da Matemática: Atividades**. Brasília, 2004. v.2. 167 p.

[5] ENZENSBERGER, Hans Magnus. **O Diabo dos Números: Um Livro de Cabeceira para Todos Aqueles que Tem Medo de Matemática**. 6 ed. São Paulo: Cia. das Letras, 1997. 266 p.

[6] BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

[7] IMENES, Luiz Márcio P.; JAKUBOVIC, José. **Considerações sobre o Ensino da Regra de Três Composta**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n.2, p. 2-5, 1983.

[8] NIETZSCHE, Friedrick. **Assim Falava Zaratustra: Um Livro para Todos e para Ninguém**. Rio de Janeiro: Vozes, 2011. 364 p.(Vozes de bolso)

APÊNDICE A – Resoluções das Atividades Propostas

Atividades do Capítulo 1

1. a) Seja a razão $t = \frac{p}{t}$, onde p representa o pagamento recebido por um determinado tempo t de trabalho em minutos. No problema temos um pagamento de R$15,00 pelo tempo de 1 hora que equivale a 60 minutos, assim obtemos $t = \frac{15}{60}$.

   Para determinar o quanto é recebido em um minuto podemos obter a razão unitária equivalente a t, para isso dividiremos os termos de t por 60, obtendo a razão $t^{‘} = \frac{0{,}25}{1}$, representando que o professor recebe R$0,25 por minuto.

   b) Considerando a razão $t = \frac{15}{60}$ podemos obter uma equivalente cujo antecedente seja igual a 1, para isso dividiremos seus termos por 15, obtendo a razão $t^{‘‘} = \frac{1}{4}$, representando que o professor levaria 4 minutos para receber R$1,00.

   A partir do item *a* onde é sabido que o professor recebe R$0,25 por minuto, poderíamos calcular esse resultado de uma forma mais imediata.

   c) Tomando novamente a razão $t = \frac{15}{60}$ podemos obter uma equivalente cujo consequente seja igual a 20, para isso dividiremos seus termos por 3, obtendo a razão $t^{‘“} = \frac{5}{20}$, representando o recebimento de R$5,00 por 20 minutos de trabalho.

   d) Seja a razão $t = \frac{p}{t}$, onde p representa o pagamento recebido por um determinado tempo t de trabalho em horas, temos $t = \frac{15}{1}$ pela condição inicial. Sabendo que em um mês o professor deve trabalhar 40 horas por semana em aproximadas 4 semanas, resultando um total de $40 \times 4 = 160$ horas por mês, iremos obter a equivalente a t com consequente 160 multiplicando t por 160, obtendo a razão $t^{‘} = \frac{2400}{160}$, representando que o professor recebe R$2400,00 por 160 horas de trabalho em um mês.

2. Inicialmente iremos determinar a razão $u = \frac{p}{q}$ onde p representa o preço relativo a uma quantidade q do produto, tal razão dará o valor da unidade do produto em cada caso para melhor compararmos, assim:

   $u_1 = \frac{13{,}99}{16} = 0,87$

   $u_2 = \frac{11{,}20}{12} = 0,93$

   Logo, o pacote com 16 unidades apresenta o menor preço por unidade.

3. a) Iremos utilizar a razão $p = \frac{x_2}{x_1}$, onde x_1 representa o número de empregados de um determinado ano e x_2 o número de empregados do ano consecutivo a x_1. A razão p determina o percentual de aumento ou redução de empregados de um ano para outro. Assim, temos:

   $p_{06/07} = \frac{326960}{306846} \approx 1,0655 = \frac{106{,}55}{100} = 106,55\% = 100\% + 6,55\%$

   $p_{07/08} = \frac{343304}{326960} \approx 1,0499 = \frac{104{,}99}{100} = 104,99\% = 100\% + 4,99\%$

$p_{08/09} = \frac{354648}{343304} \approx 1,0330 = \frac{103,30}{100} = 103,3\% = 100\% + 3,3\%$

$p_{09/10} = \frac{377762}{354648} \approx 1,0651 = \frac{106,51}{100} = 106,51\% = 100\% + 6,51\%$

$p_{10/11} = \frac{400008}{377762} \approx 1,0588 = \frac{105,88}{100} = 105,88\% = 100\% + 5,88\%$

$p_{11/12} = \frac{395386}{400008} \approx 0,9884 = \frac{98,84}{100} = 98,84\% = 100\% - 1,16\%$

Logo, concluímos que o maior aumento percentual de empregados foi de 6,55% ocorrido no ano de 2006.

b) Utilizaremos novamente a razão p acima definida, assim temos:

$p_{06/12} = \frac{395386}{306846} \approx 1,2885 = \frac{128,85}{100} = 128,85\% = 100\% + 28,85\%.$

O que representa um aumento de 28,85% no quantitativo de empregados neste período.

4. Considerando a razão $u = \frac{p}{q}$, do preço p relativo a uma quantidade q de pilhas, iremos inicialmente determinar u para cada caso anunciado.

   $u_1 = \frac{5,99}{2} = 2,995$; $u_2 = \frac{4,99}{2} = 2,495$; $u_3 = \frac{9,98}{6} = 1,663$; $u_4 = \frac{8,98}{6} = 1,496$

   Os valores encontrados representam o valor da unidade do produto na embalagem, logo podemos perceber que estes produtos possuem valor unitário menor nas embalagens com maior quantidade, por isso nas situações a seguir devemos considerar combinações com número máximo de embalagens com 6 unidades.

   a) Na compra de 10 pilhas AA pelo menor valor, a opção seria uma cartela com seis unidades e duas cartelas com duas unidades, assim temos $2 \times 4,99 + 8,98 = 18,96$. Logo deverá ser pago R$18,96.

   b) Na compra de 12 pilhas AA pelo menor valor, a opção seria duas cartelas com seis unidades, assim temos $2 \times 8,98 = 17,96$. Logo deverá ser pago R$17,96.

   c) Na compra de 30 pilhas AAA pelo menor valor, a opção seria cinco cartelas com seis unidades, assim temos $5 \times 9,98 = 49,90$. Logo deverá ser pago R$49,90.

   d) Na compra de 28 pilhas AAA pelo menor valor, a opção seria quatro cartelas com seis unidades e duas cartelas com duas unidades, assim temos $4 \times 9,98 + 2 \times 5,99 = 51,90$. Logo deverá ser pago R$51,90.

   É interessante perceber que o valor pago por 28 pilhas no item d é maior que o valor pago por 30 pilhas no item c.

5. Iremos utilizar a razão $p = \frac{x_2}{x_1}$, onde x_1 representa os milhares de hectares de florestas plantadas em um determinado ano e x_2 os milhares de hectares de florestas plantadas no ano consecutivo a x_1. A razão p determina o percentual de aumento ou redução de hectares plantados de um ano para outro. Assim, temos:

   $p_{05/06} = \frac{1327,4}{1269,2} \approx 1,0458 = \frac{104,58}{100} = 104,58\% = 100\% + 4,58\%$

$p_{06/07} = \frac{1361,6}{1327,4} \approx 1,0257 = \frac{102,57}{100} = 102,57\% = 100\% + 2,57\%$

$p_{07/08} = \frac{1423,2}{1361,6} \approx 1,0452 = \frac{104,52}{100} = 104,52\% = 100\% + 4,52\%$

$p_{08/09} = \frac{1440,0}{1423,2} \approx 1,0118 = \frac{101,18}{100} = 101,18\% = 100\% + 1,18\%$

$p_{09/10} = \frac{1536,3}{1440,0} \approx 1,0668 = \frac{106,68}{100} = 106,68\% = 100\% + 6,68\%$

$p_{10/11} = \frac{1522,3}{1536,3} \approx 0,9908 = \frac{99,08}{100} = 99,08\% = 100\% - 0,92\%$

$p_{05/11} = \frac{1522,3}{1269,2} \approx 1,1994 = \frac{119,94}{100} = 119,94\% = 100\% + 19,94\%$

Temos que a soma dos seis aumentos anuais é dada por:

$p_{05/06} + p_{06/07} + p_{07/08} + p_{08/09} + p_{09/10} + p_{10/11} = 18,61\%$

Comparando esta soma com o aumento percentual em $p_{05/11}$, concluímos que a soma dos percentuais de aumento anuais não corresponde ao percentual de aumento do período total.

6. Utilizando a razão escala $e = \frac{f}{r}$ podemos obter uma medida real r através da respectiva medida na fotografia f, com auxilio de uma régua milimetrada obtivemos a medida de 4,2 cm para o segmento na foto, que segundo a escala dada, na realidade representaria 50 metros, temos assim $e = \frac{4,2}{50} = 0,084$.

   Aplicando o valor de e na razão obtemos a seguinte sentença: $0,084 = \frac{f}{r} \Rightarrow r = \frac{f}{0,084}$.

   a)Obtivemos a medida na foto de 8,5 cm para segmento de reta com extremos nos pontos indicativos de estacionamento e de piscina, sendo $f = 8,5$ e $r = \frac{f}{0,084}$, então $r = \frac{8,5}{0,084} = 101,19$. O que representa uma distância aproximada de 100 metros entre os pontos.

   b) Obtivemos a medida na foto de 1,3 cm para o segmento de reta com extremos nos pontos indicativos de camping e de banheiros, sendo $f = 1,3$ e $r = \frac{f}{0,084}$, então $r = \frac{1,3}{0,084} = 15,47$. O que representa uma distância aproximada de 15 metros entre os pontos.

7. Aplicando a razão $u = \frac{p}{q}$, onde temos o preço p relativo a uma quantidade q do produto, iremos obter o valor unitário para cada caso.

   a) $u_1 = \frac{4,99}{360} = 0,0138$; $u_2 = \frac{7,99}{720} = 0,0110$

   Assim, temos o preço do grama do produto em cada caso e como $u_1 > u_2$ a opção com 720 gramas é a mais econômica.

   b) $u_1 = \frac{4,89}{360} = 0,0135$; $u_2 = \frac{6,79}{540} = 0,0125$

   Assim, temos o preço do grama do produto em cada caso e como $u_1 > u_2$ a opção com 540 gramas é a mais econômica.

8. A última coluna é correspondente a razão do PIB de Minas Gerais para o PIB do Brasil, podemos calculá-la dividindo, na mesma linha, os valores da terceira coluna

pelos valores da segunda. Em termos percentuais essa coluna representa a razão centesimal do PIB mineiro em relação ao todo (100%) que seria o PIB nacional.

Atividades do Capítulo 2

1. O percentual de acertos dos alunos pode ser determinado através de uma proporção simples, que representaremos nos quadros seguintes, onde o total de questões é relativo ao percentual 100%, o percentual x representa o número de acertos de Mauro e o percentual y representa o número de acertos de Maria.

Quantidade (questões)	Percentual (%)
25	100
18	x

Quantidade (questões)	Percentual (%)
40	100
32	y

Considerando que as variáveis em uma porcentagem são sempre diretas, temos a seguinte proporção:

$\frac{25}{18} = \frac{100}{x} \Rightarrow 25 \times x = 18 \times 100 \Rightarrow x = \frac{1800}{25} = 72$

$\frac{40}{31} = \frac{100}{y} \Rightarrow 40 \times y = 31 \times 100 \Rightarrow y = \frac{3100}{40} = 77,5$

Logo, Mauro acertou 72% e Maria acertou 77,5% das questões de seus respectivos testes, o que indica que Maria se saiu relativamente melhor.

2. Considerando o salário total relativo ao percentual de 100%, iremos determinar o valor x que é relativo aos 5% de aumento através da proporção retirada do esquema abaixo representado.

Salário (R$)	Percentual (%)
2500	100
x	5

$\frac{2500}{x} = \frac{100}{5} \Rightarrow 100 \times x = 2500 \times 5 \Rightarrow y = \frac{12500}{100} = 125$

Logo, com o aumento de R$125,00, o novo salário será de R$2650,00.

3. Temos que o desconto de 15% representa a quantia de R$66,00, vamos considerar o valor total do produto x relativo a 100%. assim temos o seguinte quadro representativo da situação.

Salário (R$)	Percentual (%)
66	15
x	100

Resultando a proporção:

$\frac{66}{x} = \frac{15}{100} \Rightarrow 15 \times x = 66 \times 100 \Rightarrow x = \frac{6600}{15} = 440$

Logo, o valor desse aparelho a prazo é de R$440,00.

4. Sendo 40% dos alunos meninas, temos os 720 meninos determinam um percentual de 60%. Iremos determinar o total x de alunos relativo a 100%, utilizando a proporção a partir do seguinte quadro.

Quantidade (Alunos)	Percentual (%)
720	60
x	100

Resultando a proporção:

$\frac{60}{100} = \frac{720}{x} \Rightarrow 60 \times x = 72 \times 100 \Rightarrow x = \frac{72000}{60} = 1200$

Logo, temos 1200 alunos nesta escola.

5. Considerando o valor total de R$1840,00 relativo a 100%, iremos determinar o valor x que representa o desconto de 5% conforme o quadro a seguir:

Valor (R$)	Percentual (%)
1840	100
x	5

Resultando a proporção:

$\frac{1840}{x} = \frac{100}{5} \Rightarrow 100 \times x = 1840 \times 5 \Rightarrow x = \frac{9200}{100} = 92$

Logo, temos um desconto de R$92,00 e o cliente irá pagar (1840 - 92) R$1748,00 em sua compra.

6. Vamos utilizar o método de redução da sentença a unidade neste caso, assim temos duas condições que vamos representar através das seguintes sentenças denominadas A e B, assim temos:

Sentença A: 900 m^3 de água são escoados em 6 horas por 6 ralos.

Sentença B: 500 m^3 de água são escoados em 6 horas por quantos ralos?

Vamos reduzir a sentença A a unidade utilizando a seguinte lógica:

Se 900 m^3 são escoados em 6 horas por 6 ralos, então 1 m^3 será escoado em 6 horas por $6 : 900 \Rightarrow \frac{1}{150}$ do ralo, e 1 m^3 será escoado em 1 hora por $6 \times \frac{1}{150} \Rightarrow \frac{1}{25}$ do ralo.

Em seguida vamos transformar a sentença unitária na equivalente a sentença B, assim:

Se 1 m^3 será escoado em 1 hora por $6 \times \frac{1}{150} \Rightarrow \frac{1}{25}$ do ralo, então 500 m^3 serão escoados em 4 horas por $\frac{1}{25} : 4 \times 500 \Rightarrow 5$ ralos.

7. Iremos resolver esse problema pelo método de redução a proporções simples, para isso utilizaremos do seguinte quadro para representar as condições apresentadas no problema nas situações A e B. Afim de facilitar o processo, vamos determinar a quantidade x de alimento pelo período de 1 dia nas situações.

Situação	Alunos	Dias	Horas por dia	Alimentos (kg)
A	20	1	3	12
B	50	1	4	x

Considerando o número de alunos constante, estabelecemos uma outra situação que denominaremos de C, onde temos uma quantidade y de alimentos arrecadados. Temos então, o seguinte quadro para as situações A e C:

Situação	Alunos	Dias	Horas por dia	Alimentos (kg)
A	20	1	3	12
C	20	1	4	y

Considerando as variáveis diretas, horas por dia e alimentos, devemos representar a proporção simples das razões variáveis, aplicar a propriedade fundamental e resolver a equação obtida. Assim:

$\frac{3}{4} = \frac{12}{y} \Rightarrow 3 \times y = 4 \times 12 \Rightarrow y = \frac{48}{3} \Rightarrow y = 16$

Determinado o valor de y, aplicamos esse resultado em um quadro contendo as situações B e C, onde podemos observar que a variável horas por dia se torna constante, reduzindo o problema a uma nova regra de três simples de variáveis diretas.

Situação	Alunos	Dias	Horas por dia	Alimentos (kg)
C	20	1	4	16
B	50	1	4	x

Logo, temos a seguinte proporção simples: $\frac{20}{50} = \frac{16}{x} \Rightarrow 20 \times x = 50 \times 16 \Rightarrow x = \frac{600}{20} \Rightarrow x = 40$

Por fim, vamos levar em consideração os 30 dias de arrecadação, nos quais em 10 arrecadou-se 12 kg por dia, um total de 120 kg, e nos outros 20 dias arrecadou-se 40 quilos por dia, um total de 800 kg, assim, temos um total de 960 quilos arrecadados.

8. Sendo o tempo constante para as duas situações expostas pelo problema, temos uma proporção simples e com variáveis diretas, podemos organizar os dados através do seguinte quadro:

Número de gotas	massa corporal (kg)
5	2
30	x

Resultando a proporção:

$\frac{5}{30} = \frac{2}{x} \Rightarrow 5 \times x = 30 \times 2 \Rightarrow x = \frac{60}{5} = 12$

Logo, temos que a massa corporal do menino será de 12 quilos.

APÊNDICE B – Resolução Utilizando o Método das Flechas

Para resolver uma situação utilizando o método das flechas devemos representar o problema em uma tabela ou quadro estabelecendo as relações dadas entre as variáveis. A princípio, iremos considerar a variável na qual encontra-se a incógnita e direcionaremos uma flecha com inicio no termo numérico da razão e término no termo algébrico, para orientar as flechas relativas às outras variáveis devemos considerar o seguinte:

i Se a variável for diretamente proporcional à variável que possuí incógnita então suas flechas têm mesmos sentidos:

$$\uparrow\uparrow \text{ ou } \downarrow\downarrow$$

ii Se a variável for inversamente proporcional à variável que possuí incógnita então suas flechas têm sentidos opostos:

$$\downarrow\uparrow \text{ ou } \uparrow\downarrow$$

Após orientar as flechas para todas variáveis do problema podemos considerar que o valor da incógnita será dado pelo produto do valor correspondentes ao inicio da flecha que possui término na incógnita, por cada razão estabelecida pelas outras variáveis, considerando que os termos antecedentes deverão ser os valores relativos aos términos das flechas e os termos consequentes deverão ser os valores relativos aos inícios das flechas.

Exemplo 37. *"Se 2 padeiros fazem 444 rosquinhas em 6 horas, de quanto tempo precisarão 5 padeiros para fazer 88 rosquinhas?"*

Inicialmente representaremos no quadro a seguir, as condições apresentadas no problema pelas situações que denominaremos de A e B, onde x é o tempo desconhecido.

A flecha da variável Tempo deve ser fixada com inicio no termo numérico e término na incógnita. Para orientar as demais flechas devemos considerar que a variável Tempo é diretamente proporcional à variável Rosquinhas, logo suas flechas têm mesmos sentidos, e também, que a variável Tempo é inversamente proporcional à variável Números de Padeiros, logo suas flechas têm sentidos opostos. Assim:

Situação	*Números de Padeiros*↑	*Rosquinhas*↓	*Tempo(h)*↓
A	*2*	*444*	*6*
B	*5*	*88*	x

O valor de x será determinado multiplicando o valor correspondente ao inicio da flecha que possui término na incógnita por cada razão nas quais os antecedentes serão os *valores relativos aos términos das flechas e os consequentes serão os valores relativos aos inícios das flechas. Então:*

$x = 6 \times \frac{2}{5} \times \frac{88}{444} \Rightarrow x = 0,4756756.$

Logo, concluímos que o tempo necessário para que os padeiros realizem a tarefa, nas condições B, é de aproximadamente meia hora.