UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FABIANO LUIZ DA SILVA

AS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS ATÉ O TERCEIRO GRAU

JUAZEIRO DO NORTE
2015

FABIANO LUIZ DA SILVA

AS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS ATÉ O TERCEIRO GRAU

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira

JUAZEIRO DO NORTE
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S58d Silva, Fabiano Luiz da
As diferentes estratégias de resolução das equações algébricas até o terceiro grau / Fabiano Luiz da Silva. – 2015.
69 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira

1. Equações algébricas. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Aprendizagem. I. Título.

CDD 512

FABIANO LUIZ DA SILVA

AS DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS ATÉ O TERCEIRO GRAU

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 09 / 07 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira (Orientador)
Univ. Regional do Cariri (URCA) e
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

____

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. MS. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

Dedico esse trabalho a Deus, pois sem Ele nada seria possível, aos meus pais José e Quitéria, que nunca deixaram de acreditar em mim durante toda minha vida e o tempo que durou este curso, sempre me dando coragem e mensagens de incentivo e otimismo. A Flávia, minha esposa, pela compreensão, pelo incentivo e carinho. A meus filhos: Evellyn, Emilly e Ewerton. Que nunca lhes falte saúde, paz, amor, fé e carinho. A eles meu amor.

AGRADECIMENTOS

Ao Senhor Deus, criador do universo, que por intermédio de Jesus Cristo, capacitou-me para a realização desse trabalho.

À Flávia, Evellyn, Emilly e Ewerton pela paciência que tiveram durante minha jornada.

À minha família, em particular aos meus pais, José e Quitéria, pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, Professor Mestre Mario de Assis Oliveira por ricas sugestões.

À CAPES, que contribuiu com o apoio financeiro necessário no decorrer do curso.

Aos meus colegas de curso por todos os momentos difíceis que enfrentamos e vencemos juntos e também todos os momentos de alegria que compartilhamos. Em especial aos colegas Israel, Jairo e Lucas pelos momentos que passamos juntos estudando.

Aos professores com quem convivi ao longo da graduação, pós-graduação e Mestrado: Evandro Carlos, Zélalber Gondim, Mario de Assis, Francisco Braga, Pedro, Paulo César, Junior Moreira, Silvana, enfim a todos que direta ou indiretamente contribuíram nesta carreira acadêmica.

A todos os meus professores do PROFMAT que me ajudaram a crescer profissionalmente durante todo o curso.

Aos meus colegas de trabalho que nunca deixaram de me apoiar e acreditar em mim.

A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura.

Bertrand Russell

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar explanações e estratégias de resolução das equações algébricas do primeiro, segundo e terceiro graus, uma vez que o ensino relativo à resoluções dessas equações tem se restringido praticamente a apresentação da fórmula resolutiva e as relações entre seus coeficientes e suas raízes. Desta maneira procuramos demonstrar e até mesmo justificar todas as formas apresentadas para se resolver equações até o terceiro grau através de métodos puramente algébricos ou geométricos, como também, exemplificar todos os métodos que foram exibidos no intuito de satisfazer as expectativas dos leitores, por isso, o texto foi produzido em uma linguagem simples, acessível à professores e alunos. Nesse contexto, espera-se que essa proposta de trabalho estimule os professores de Matemática do Ensino Básico a realizarem essa abordagem diferenciada das equações algébricas em questão, pois acredita-se que com essa abordagem ocorram reflexos positivos no processo de ensino e aprendizagem das equações e da Matemática.

Palavras-chave. Equação. Equação do Primeiro Grau. Equação do Segundo Grau. Equação do Terceiro Grau. Equações Algébricas.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present explanations and solving strategies of algebraic equations of the first, second and third degrees, since the relative teaching on the resolutions of these equations has been restricted practically the presentation of solving formula and the relationships between its coefficients and its roots . In this way we try to demonstrate and even justify all forms presented to solve equations to the third degree by purely algebraic or geometric methods, but also exemplify all methods that were displayed in order to meet the expectations of readers, so the text was produced in simple language, accessible to teachers and students. In this context, it is expected that this work proposal stimulate the mathematics teachers of Basic Education to perform this differentiated approach to algebraic equations in question, since it is believed that with this approach occur positive reflexes in the teaching and learning of equations and of mathematics.

Keywords. Equation. Equation of First Degree. Equation of Second Kind. Equation Third Grade. Algebraic equations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Apesar dos avanços tecnológicos que nós vivenciamos hoje, é raro ouvirmos falar de novas descobertas matemáticas, principalmente no campo da matemática pura. Contudo, é possível utilizarmos resultados importantes que contribuíram para o desenvolvimento da Álgebra.

A resolução de equações é um dos temas estudados no ensino básico. Resolver uma equação equivale a encontrar as suas raízes, isto é, encontrar um valor c para a função $f(x)$ tal que $f(c) = 0$. Essa busca de raízes normalmente é tratada de forma analítica, ou seja, são usados métodos algébricos de forma a encontrar à solução exata das equações isso não quer dizer que essa seja a única maneira de resolvê-las.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, iniciaremos nosso estudo sobre Equações Algébricas fazendo menção as equações mais simples – as equações do primeiro grau – cuja resolução é conhecida desde a antiguidade. Visando dar um maior significado a expressão $ax + b = 0$ será mostrado algumas técnicas de resolução dessas equações, de forma elementar, para que o professor do ensino básico, que venha a ler este trabalho, tenha argumentos para explicar a seus alunos, por exemplo, que cada pessoa já tem adquirido dentro de si uma perspectiva acerca do assunto e que essas divergências devem contribuir para o amadurecimento dos conhecimentos matemáticos de cada indivíduo.

No capítulo 3, falaremos sobre as equações do segundo grau mostrando, também, as diferentes formas que foram encontradas ao longo da história para resolvê-las e enfatizando, é claro, as diferentes civilizações e os vários matemáticos que contribuíram de alguma forma para a sua formalização e o seu desenvolvimento. Apresentamos problemas antigos cuja resolução recaem na equação do 2º grau, fórmulas algébricas e fórmulas geométricas de completar quadrados, bem como outros métodos de resolução da equação quadrática.

No capítulo 4, será desenvolvido um estudo sobre as equações do terceiro grau. Relatos históricos, fórmulas e exemplos que visam mostrar a utilidade do resultado obtido. Até mesmo porque vários séculos se passaram até que se conseguisse resolver as equações de grau três e essa tarefa foi realizada pelos matemáticos de Bolonha, Itália, no século 16. Contabilizando mais de três mil anos para que pudéssemos conhecer a solução das cúbicas e entre conceitos e controvérsias o mais importante sobretudo, é reconhecermos o progresso consequente desta obra ao ponto desta época ser considerada um marco importante no período moderno da Matemática.

2 A EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Estudaremos agora alguns métodos de resolução das equações do primeiro grau, mas, antes iremos definir quando uma sentença aberta representa de fato tal equação.

Definição 2.1. Toda equação, na incógnita x, que puder ser escrita na forma $ax + b = 0$, sendo a e b números reais, com a diferente de zero, representa uma equação do primeiro grau.

2.1 Relatos históricos

Acredita-se que o surgimento da Matemática bem como o seu desenvolvimento, a princípio, tenha acontecido de maneira espontânea para suprir algumas necessidades do dia a dia das pessoas. A criação de novos conceitos matemáticos, como a criação de números, por exemplo, não foi tão simples e rápida como se imagina, o homem teve problemas até mesmo para realizar pequenas contagens, sem se falar das diferentes simbologias adotadas ao longo dos tempos por cada civilização.

As primeiras descobertas no campo da Matemática conhecidas atualmente são registros feitos em blocos de barro sumérios[1], que estima-se terem sido produzidos por volta de quatro mil anos a.C., sendo que as primeiras operações que foram realizadas com números foram encontradas em blocos similares aos citados e datados de 2200 anos a.C., possivelmente, dentre os documentos matemáticos mais antigos que foram descobertos até hoje os mais famosos sejam o *Papiro de Ahmes*[2] (ou de *Rhind*[3]) e o *Papiro de Moscou*[4].

Alguns dos problemas expostos neles consistiam em resolver exercícios numéricos envolvendo um valor desconhecido, mostrando assim que naquela época estudiosos já se dedicavam à resolução de equações lineares com uma quantia desconhecida, atualmente chamada de variável ou incógnita – palavra originária do latim *incognitu*, que quer dizer coisa desconhecida.

Apesar dos egípcios não usarem os símbolos algébricos que conhecemos e utilizamos eles também conseguiam resolver equações, porém, os procedimentos utilizados se tornavam complicados e cansativos, comparados aos que usamos hoje. Os gregos, por sua vez, davam um tratamento diferente dos egípcios e resolviam equações com métodos geométricos, mas, apesar dos esforços destas civilizações foram os árabes que

[1] Sumérios: povos que habitavam a região da baixa Mesopotâmia (Asia), local onde atualmente está localizado o Iraque e áreas próximas.

[2] Papiro de Ahmes – papiro egípcio de cerca de 1600 anos a.C., contendo 85 problemas de Aritmética e Geometria – descoberto em 1858.

[3] Alexander Henry Rhind – advogado e antiquário – comprou o papiro de Ahmes, no final do séc. XIX, após sua morte o papiro foi comprado pelo Museu Britânico onde está exposto até hoje.

[4] Papiro de Moscou, contém 25 problemas de Aritmética e Geometria, é de cerca de 1850 anos a.C.

conseguiram ter um avanço mais significativo na resolução destas equações. Para se ter uma ideia, quando representavam um valor desconhecido em uma equação, eles o chamavam de "coisa"que em árabe, era pronunciada como *xay*. Com o decorrer dos anos, essa pronuncia foi sofrendo alterações, devido as traduções dos textos, até se tornar x, que é como, geralmente, a conhecemos hoje.

2.2 Método da falsa posição

Para resolver equações com um valor desconhecido os egípcios adotavam um método de resolução muito engenhoso e complicado para encontrar a resposta correta, método esse que mais tarde os europeus deram o nome de "regra da falsa posição".

O método consistia na escolha de um número arbitrário para o valor desconhecido, a partir daí fazia-se o cálculo. Em seguida, comparava-se o resultado desta operação com o que deveria ser encontrado. Para finalizar, se o valor obtido fosse diferente do esperado calculava-se um fator de correção para obter o valor correto de modo a satisfazer a expressão original.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1. Qual é o número que somado a sua terça parte resulta em 24?
Solução: Pela regra da falsa posição, fazia-se uma hipótese (estimativa) inicial a respeito do número e verificava-se o que acontecia.

Vamos imaginar, em nosso caso, que tal número fosse 9. Ora, 9 somado com sua terça parte dá $9 + 3 = 12$, exatamente a metade dos 24 que deveria dar. Portanto, o número procurado é o dobro de 9, ou seja, 18.

Se tivéssemos escolhido o número 15, por exemplo. Teríamos 15 somado com sua terça parte 5 resultando em 20, que nesse caso é $\frac{24}{20}$ vezes menor que o resultado esperado, logo, o número procurado é encontrado usando-se o fator de correção $15 \cdot \frac{24}{20}$, a partir daí, efetua-se as operações indicadas e encontra-se 18.

2.3 Método algébrico

A solução algébrica de uma equação do 1º grau baseia-se em dois axiomas devido a Euclides.[5]

- **Princípio aditivo da igualdade ou de Euclides:** Podemos somar um número real a ambos os membros de uma igualdade que ela não se altera.

Em símbolos: dados a, b e c números reais, tem-se

$$a = b \Longrightarrow a + c = b + c$$

[5] Euclides de Alexandria viveu por volta do séc. III a.C., época em que produziu *Os Elementos* – considerada sua principal obra.

- **Princípio multiplicativo da igualdade:** Podemos multiplicar ambos os membros de uma igualdade por um número real não nulo que ela não se altera.

Simbolicamente, dados a, b e c números reais, com $c \neq 0$, tem-se

$$a = b \Longrightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

Esses axiomas são a chave para encontrar a solução de equações do primeiro grau.

Para resolver a equação $ax + b = 0$, ou seja, encontrar o número que substituirá a variável x de maneira que essa sentença seja verdadeira, devemos somar o oposto de b nos dois lados da igualdade e assim obter

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b),$$

que implica

$$ax = -b$$

Em seguida, multiplicando a expressão obtida pelo inverso do número a, chega-se a

$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b)$$

que implica finalmente em

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Exemplo 2.2. Resolva a equação $6x + 10 = 28$, onde x é um número racional.
<u>**Solução:**</u> Aplicando o princípio aditivo, vamos adicionar (-10) aos dois membros da equação

$$6x + 10 = 28$$

daí,

$$6x + 10 + (-10) = 28 + (-10)$$

em seguida isolar o termo que contém a incógnita x no 1º membro.

$$6x + 10 - 10 = 28 - 10$$

$$6x = 18$$

Aplicando, agora, o princípio multiplicativo, vamos multiplicar os dois membros da equação por $\frac{1}{6}$,

$$6x \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = 18 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

que resulta finalmente em

$$x = 3$$

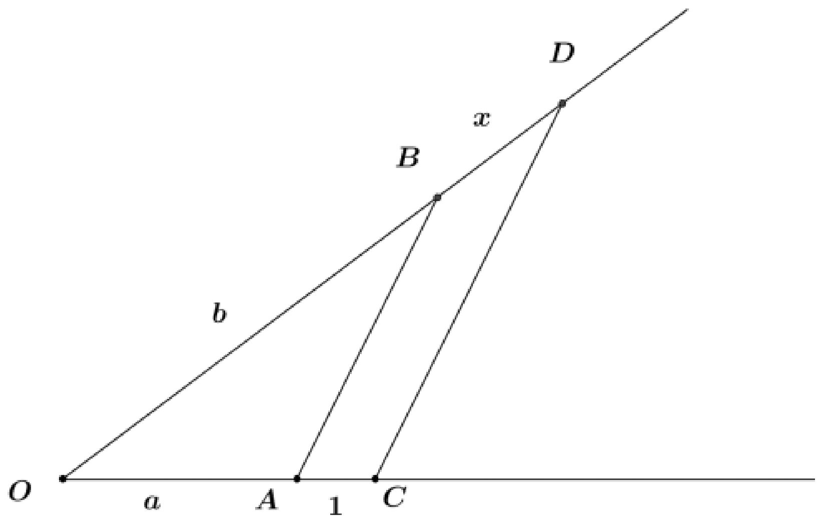
descobrindo assim o valor numérico de x.

Como $3 \in \mathbb{Q}$, temos que 3 é a solução da equação $6x + 10 = 28$.

2.4 Método geométrico

Se uma equação algébrica do 1º grau tem uma raiz positiva, ela poderá ser escrita como $ax = b$, com a e b positivos. Geometricamente, o segmento de medida x forma uma proporção com os três segmentos de comprimento a, b e 1, ou seja, $a : b = 1 : x$ (de fato, essa última igualdade leva a $ax = b$), de modo que x pode ser construído com régua e compasso de forma simples, mostrada na Figura 1, onde a abertura do ângulo em O é qualquer ($0^{\circ} < O < 180^{\circ}$), $OA = a$, $OB = b$, $AC = 1$ e o ponto D é marcado de modo que CD seja paralelo a AB . Então, $BD = x$, é a solução.

Figura 1 – Solução geométrica da equação do 1º grau



Fonte: O autor

De fato, por semelhança de triângulos ou equivalentemente pelo Teorema de Tales[6] ($AB//CD$, construção), temos

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+1}{b+x},$$

donde resulta que

$$a \cdot (b + x) = b \cdot (a + 1)\,,$$

que implica

$$ax = b.$$

Exemplo 2.3. Resolver a equação 4x=12, usando régua e compasso.

<u>**Solução:**</u>

i) Utilizando uma régua construa uma semirreta de origem O, a qual chamaremos de r.

[6] Tales de Mileto, filósofo e matemático, viveu por volta do séc. VII a.C.

ii) A partir de O, construa outra semirreta (s) distinta da anterior de tal forma que a abertura (ângulo) formada entre elas esteja entre 0^o e 180^o.

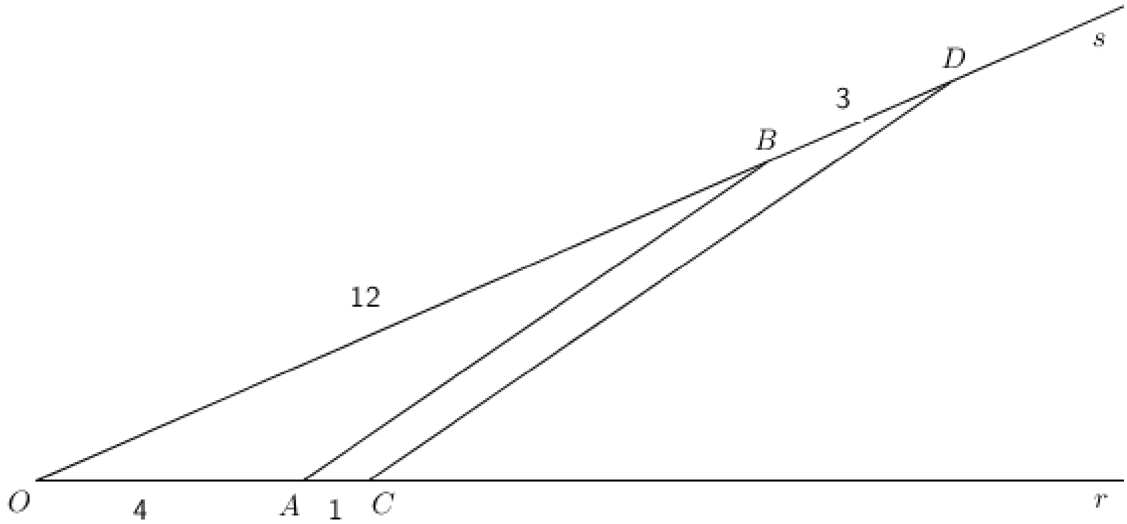
iii) Sobre r marque o ponto A que dista $4cm$ de O.

iv) Sobre s marque o ponto B que dista $12cm$ de O.

v) Sobre r, novamente, marque o ponto C, tal que $AC = 1cm$, com A entre O e C.

vi) Finalmente marque sobre s o ponto D, tal que CD seja paralelo a AB.

Figura 2 – Solução geométrica da equação $4x = 12$



Fonte: O autor

O segmento de comprimento BD é a solução procurada e mede $3cm$.

Na maioria dos casos, os alunos são ensinados a resolver esse tipo de equações por métodos formais e podem não entender o procedimento que estão utilizando, boa parte deles são ensinados a utilizar o método da transposição onde aplicam mecanicamente o fato – muda de lado, inverte a operação, ficando, muitas vezes, sem compreender o porquê desta "regra".

A resolução de uma equação do 1^o grau está ligada diretamente com noções básicas de outros conteúdos como razão, proporção e regra de três simples, os alunos que aprendem a resolvê-la terão maior facilidade em compreender outros conteúdos que estão relacionados com este, consequentemente, terão maior facilidade em prosseguir com seus estudos.

Vale ressaltar, que os alunos que utilizam outros métodos intuitivos para resolver equações do 1^o grau, às vezes, são incentivados a tentar encontrar à solução de uma dessas equações por tentativa e erro. Esse método pode trazer benefícios, como por exemplo, desenvolver no aluno uma melhor noção de equivalência entre os dois lados da equação garantindo assim, maior facilidade em aplicar métodos mais formais. Ou, algum malefício, como por exemplo, perder muito tempo procurando pela solução utilizando números inteiros para encontrá-la quando a resposta é, digamos, um racional. Cabe então ao professor, fazer o intermédio do saber do aluno e o conceito formalizado desse assunto para que o estudante não encontre dificuldade em trabalhar com questões que envolvam esse tema.

3 A EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Falaremos um pouco sobre a história das equações do segundo grau destacando algumas civilizações, como os babilônios e os gregos, que utilizavam técnicas para resolver alguns tipos de equações. Serão apresentados, também, diferentes métodos (algébricos e não algébricos) para a obtenção de raízes, como por exemplo, o método que foi criado pelo matemático hindu Sridhara – primeiro matemático a estabelecer uma fórmula resolutiva (solução por radicais) para tais equações.

3.1 Contexto histórico

O primeiro registro de equações do segundo grau que se tem notícia até hoje foi encontrado em uma tábua de argila, produzido pelos povos da Babilônia há aproximadamente, 1700 anos a.C., onde sua resolução era dada na forma de palavras, ou seja, eles não usavam uma fórmula para determinar sua solução.

Considerando que os babilônios utilizavam um sistema de numeração sexagesimal (base 60) e que o alfabeto ainda não era conhecido, os problemas envolvendo equações eram resolvidos usando uma notação diferente da utilizada hoje.

Vejamos.

Exemplo 3.1. Encontrar o lado do quadrado sabendo que sua área menos a medida do lado é igual a 14,30 (base 60).

Solução: Usando a notação em base decimal e nomeando x como sendo o lado do quadrado, podemos escrever:

$$x^2 - x = 870$$

($[14{,}30]_{60} = 14 \cdot 60^1 + 30 \cdot 60^0 = 14 \cdot 60 + 30 = 840 + 30 = [870]_{10}$). A solução apresentada, de acordo com os babilônios, seria assim: "Tome a metade de 1 (coeficiente de x) que é $0,5$ e multiplique por ela mesma ($0,5 \cdot 0,5 = 0,25$). Some isto a 870 (termo independente) e encontramos $870,25$ que é o quadrado de 29,5. Agora some 0,5 a 29,5 e o resultado é 30, o lado do quadrado procurado". Esse procedimento é utilizado até hoje e o conhecemos como método de completar quadrados.

Outro problema bastante conhecido em Matemática consiste em encontrar dois números, digamos x e y, dada sua soma s e seu produto p. Daí, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = p \end{cases}$$

Isolando y na 1ª equação, encontramos

$$y = s - x$$

substituindo o valor encontrado na 2ª equação, tem-se

$$x \cdot y = p \Longrightarrow x \cdot (s - x) = p \Longrightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Para solucionar esse tipo de equação precisavam encontrar dois números positivos cuja soma é s e o produto é p, então, usavam a seguinte regra:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto do valor encontrado e extraia a raiz quadrada dessa diferença. Em seguida, some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da metade da soma para obter o outro número.

Por não utilizarem números negativos[1] os babilônios dividiam as equações em três tipos:

$$x^2 + sx = p, \quad x^2 = sx + p \quad \text{e} \quad x^2 + p = sx.$$

Os gregos (500 a 200 anos a.C.), por sua vez, fizeram avanços na resolução desse tipo de equações com estudos ligados à Geometria, eles resolviam alguns tipos de equações do segundo grau apenas com régua e compasso, representando números como quantidades geométricas, como áreas e comprimentos.

Dos matemáticos gregos que se destacaram na história e que produziram trabalhos importantes para o desenvolvimento de equações do segundo grau podemos citar Euclides que desenvolveu técnicas de resolução de equações do segundo grau e Diophanto[2] por introduzir alguns símbolos criando outra representação para essas equações em uma época onde a solução ainda era apresentada em forma de discurso, dentre outros.

Os hindus também realizaram trabalhos nessa área. Utilizando o método de completar quadrados e métodos puramente algébricos, desenvolveram a fórmula que conhecemos hoje como fórmula de resolução das equações quadráticas ou fórmula de Bhaskara, que recebeu esse nome não por ter sido criada por ele, mas, por ter sido publicada em uma de suas obras, na realidade esse feito deve-se a outro indiano, Sridhar Acharya (870 - 930 d.C.) ou Sridhara que é como o conhecemos.

> ”O hábito de dar o nome de Bhaskara para a fórmula de resolução da equação do segundo grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de Bhaskara para essa fórmula na literatura internacional) não é adequado ... embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bhaskara não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do 2º grau.”(ZAGO et al, 1996, p.54).

1 A primeira referência histórica a números negativos ocorre num livro chinês cuja a forma mais antiga data da Dinastia Han (202 a.C. - 220).

2 Diophanto de Alexandria, foi um importante matemático grego do século II e é considerado por muitos estudiosos como o ”pai da Álgebra”.

Os árabes, por sua vez, deram uma grande contribuição para o avanço no estudo de várias áreas da Matemática e também para o estudo dessas equações traduzindo para sua língua, o árabe, manuscritos hindus e gregos como por exemplo "Os Elementos"de Euclides que trata-se de uma coleção de 13 livros escritos pelo próprio Euclides por volta de 300 anos a.C., trazendo consigo uma série de definições, postulados, proposições e demonstrações abordando várias áreas de conhecimento como a Geometria Euclidiana e a Teoria dos Números. É o segundo livro mais publicado em todo o mundo chegando a uma marca de aproximadamente mil edições, perde somente para a Bíblia.

Os chineses não ficaram para trás e também desenvolveram trabalhos à procura da solução das equações do segundo grau, a estratégia criada por eles intitulada como método fan-fan, publicado por Zhu Shijie (conhecido também por Chu Shih-Chieh) em 1303, apresentado em sua obra "Ssu-yuan yú-chien"que significa *"precioso espelho dos quatro elementos"*, baseia-se em aproximações sucessivas de raízes.

No continente europeu, a partir do século XV, muitos matemáticos expuseram trabalhos relacionados à resolução das equações quadráticas, dentre eles, podemos citar o francês François Viète (1540 - 1603) que utilizou símbolos para representar equações, onde até então, não se usava uma fórmula para obter as raízes dessas equações. A representação criada por ele era a seguinte:

$$B \text{ in } A \text{ área} + C \text{ in } A + D \text{ é igual a } 0.$$

Mais tarde, outro matemático também de nacionalidade francesa, de nome René Descartes (1596 - 1650), criou uma maneira mais prática para representar os símbolos adotados por Viète, a partir desse fato, acabamos utilizando até hoje a representação $ax^2 + bx + c = 0$ que recebemos dos europeus e a solução fornecida pelos hindus.

3.2 Tipos de equação do segundo grau

Definição 3.1. Chama-se equação do segundo grau, na incógnita x, toda equação que puder ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Observe que se tivéssemos $a = 0$, teríamos uma equação do primeiro grau da forma $bx + c = 0$, que poderia ser resolvida com um dos métodos apresentados no capítulo 2.

Classificamos, então, as equações do segundo grau em completas ou incompletas. A equação $ax^2 + bx + c = 0$ será dita completa quando b e c forem diferentes de zero. Quando essa equação apresentar seus coeficientes, $b = 0$ ou $c = 0$ ou ainda, quando ambos $b = c = 0$, diremos que ela está em sua forma incompleta.

Quando a equação tiver a forma $ax^2 = 0$ apresentará sempre raízes nulas, uma vez que, se o produto de dois números é igual a zero ($a \cdot x^2 = 0$), então: $a = 0$, $x^2 = 0$ ou $a = x^2 = 0$. Logo, podemos concluir que suas raízes serão $x' = 0$ e $x'' = 0$.

Se as equações são da forma $ax^2 + c = 0$ devemos isolar a incógnita para encontrar suas raízes, daí:

$$ax^2 + c = 0 \Longrightarrow ax^2 = -c \Longrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

esse tipo de equação possuirá duas raízes reais se $-\frac{c}{a}$ for um número positivo, nesse caso, suas raízes serão:

$$x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

e não terá raiz real caso $-\frac{c}{a}$ seja um número negativo.

Porém, se as equações tiverem a forma $ax^2 + bx = 0$ basta colocar a incógnita em evidência, que teremos

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

para o produto ser igual a zero, basta que um dos fatores o seja, assim:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax + b = 0$$

Daí, chegamos a

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}$$

que são as raízes da equação.

Exemplo 3.2. Resolver as equações do segundo grau incompletas.
a) $2x^2 + 8x = 0$
b) $3x^2 - 12 = 0$
c) $7x^2 = 0$
Solução:
a) $2x^2 + 8x = 0 \iff x \cdot (2x + 8) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 2x + 8 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -4.$

b) $3x^2 - 12 = 0 \iff 3x^2 = 12 \iff x^2 = \frac{12}{3} \iff x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{4} \iff x = \pm 2.$

c) $7x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$

A partir daqui passaremos a tratar apenas da resolução de equações do segundo grau completas.

3.3 Métodos de resolução de equações do segundo grau completas

Existem vários métodos para se encontrar as raízes de uma equação do segundo grau. Entretanto, mostraremos apenas aqueles, que por sua simplicidade e elegância, podem ser demonstrados por meio de manipulações algébricas, através de construções geométricas utilizando somente régua e compasso ou usando métodos gráficos ou ainda, por meio de técnicas de aproximação de raízes. Sendo assim, desejamos que o leitor conheça as relações existentes entre a Álgebra e a Geometria na resolução das equações do segundo grau.

3.4 Método algébrico de Sridhara

A maneira encontrada por Sridhara para resolver as equações do segundo grau é encontrar dois números x e y cuja soma seja s e cujo produto é p. Usando símbolos, podemos escrever:

$$\begin{cases} x + y = s \\ x \cdot y = p \end{cases}$$

Fazendo $x = \dfrac{s}{2} + a$ e $y = \dfrac{s}{2} - a$ com $a > 0$, temos:

$$x \cdot y = \left(\frac{s}{2} + a\right) \cdot \left(\frac{s}{2} - a\right) = \frac{s^2}{4} - a^2 = p$$

que implica

$$a^2 = \frac{s^2}{4} - p \Longrightarrow a = \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}}.$$

Logo, concluímos que os valores de x e y são:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} \quad \text{e} \quad y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}}$$

Note que se $a < 0$, os valores de x e y são permutados.

Os matemáticos dessa época já sabiam que essas equações poderiam apresentar no máximo 2 raízes.

Sridhara ao enunciar a regra que originou a fórmula atual para a resolução de equações do segundo grau batizou sua descoberta como "**fórmula geral para resolução da equação polinomial do segundo grau**".

Exemplo 3.3. Determinar as dimensões de um terreno retangular de área $160m^2$ sabendo que seu perímetro é $56m$.

Solução do problema: Seja x o comprimento do terreno e y a sua largura e lembrando que o perímetro de um polígono é dado pela soma de seus lados, podemos escrever:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 56 \\ x \cdot y = 160 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + y = 28 \\ x \cdot y = 160 \end{cases}$$

Aplicando o método descrito acima, observamos que: $s = 28$ e $p = 160$, daí

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{28}{2} + \sqrt{\frac{28^2 - 4 \cdot 160}{4}} = 14 + \sqrt{\frac{784 - 640}{4}} = 14 + \sqrt{36} = 14 + 6 = 20$$

e

$$y = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} = \frac{28}{2} - \sqrt{\frac{28^2 - 4 \cdot 160}{4}} = 14 - \sqrt{\frac{784 - 640}{4}} = 14 - \sqrt{36} = 14 - 6 = 8$$

3.5 Método de resolução convencional

Outro matemático indiano que também expôs uma técnica para encontrar as raízes desse tipo de equações foi Bhaskara [3] que utilizou o método de completar quadrados usado pelos babilônios.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Se a multiplicarmos por $4a$, teremos:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Observe que só teremos um trinômio quadrado perfeito se adicionarmos um termo igual a b^2 aos dois lados da equação. Então:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$$

Reorganizando, temos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Ou seja,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Portanto,

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Daí,

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

e isolando a incógnita temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula resolutiva de equações do segundo grau.

Podemos fazer várias manipulações diferentes, da aplicada por Bhaskara, com a equação do segundo grau e encontrar uma dedução alternativa para a fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

Exemplo 3.4. Vamos encontrar a solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solução:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \text{daí} \quad x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

[3] Bhaskara foi um matemático, professor, astrólogo e astrônomo indiano do século XII.

3.6 Método da semi-soma e do produto

Dada a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ podemos usar uma manipulação diferente da que foi utilizada anteriormente e encontrar outra expressão para determinar as raízes dessa equação.

Dividindo tudo por a, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

e fazendo

$$s = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad p = \frac{c}{a}$$

uma vez que

$$s = -\frac{b}{2a} \Longrightarrow 2s = -\frac{b}{a} \Longrightarrow -2s = \frac{b}{a}.$$

podemos escrevê-la da seguinte maneira

$$x^2 - 2sx + p = 0$$

Como a solução da equação do segundo grau pode ser encontrada através da fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

temos:

$$x = \frac{-(-2s) \pm \sqrt{(-2s)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 4 \cdot p}}{2}$$

$$x = \frac{2s \pm \sqrt{4(s^2 - \cdot p)}}{2}$$

$$x = \frac{2s \pm 2\sqrt{s^2 - \cdot p}}{2}$$

finalmente chegamos a

$$x = s \pm \sqrt{s^2 - p}$$

Mostrando, assim, outro modo de se resolver uma equação do segundo grau.

Exemplo 3.5. Resolver a equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$, usando este método.
Solução: Dividindo a equação por 2 encontramos

$$x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2 \cdot \frac{7}{4}x + \frac{3}{2} = 0$$

fazendo $s = \frac{7}{4}, p = \frac{3}{2}$ e aplicando esses valores na fórmula que foi deduzida, temos:

$$x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}} \Longrightarrow x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16} - \frac{3}{2}} \Longrightarrow x = \frac{7}{4} \pm \sqrt{\frac{49-24}{16}} \Longrightarrow x = \frac{7}{4} \pm \frac{5}{4}.$$

Portanto as raízes são:

$$x' = 3 \quad \text{e} \quad x'' = \frac{1}{2}.$$

3.7 Método da soma e da diferença de quadrados

Dada a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, vamos encontrar uma expressão que determine suas raízes, digamos x' e x'' em função de seus coeficientes.

Sabemos que

$$(x' + x'')^2 = (x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2$$

e

$$(x' - x'')^2 = (x')^2 - 2x'x'' + (x'')^2$$

Subtraindo membro a membro a primeira identidade da segunda, obtemos:

$$(x' + x'')^2 - (x' - x'')^2 = 4x'x'' \Longrightarrow (x' + x'')^2 - 4x'x'' = (x' - x'')^2$$

Fazendo $x' + x'' = s$, $x' - x'' = d$ e $x' \cdot x'' = p$, podemos formar o seguinte sistema de equações do primeiro grau

$$\begin{cases} x' - x'' = d \\ x' + x'' = s \end{cases}$$

Somando as duas equações temos:

$$2x' = d + s \Longrightarrow x' = \frac{d+s}{2}$$

substituindo o valor encontrado em qualquer uma das equações acima, obtemos

$$x'' = \frac{s-d}{2}$$

Como $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$, fato que está provado no Apêndice A, temos:

$$(x' + x'')^2 - 4x'x'' = (x' - x'')^2 \Longrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = d^2 \Longrightarrow d = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$$

portanto

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo 3.6. Encontrar a solução da equação $3x^2 - 30x + 72 = 0$.

Solução: Aplicando a fórmula encontrada, temos: $a = 3$, $b = -30$ e $c = 72$. Daí,

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-30) + \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 72}}{2 \cdot 3} = \frac{30 + \sqrt{36}}{6} = 6$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-30) - \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 72}}{2 \cdot 3} = \frac{30 - \sqrt{36}}{6} = 4$$

3.8 Método alternativo

Quando resolvemos uma equação do segundo grau pelo método convencional encontramos a expressão $b^2 - 4ac$ que comumente é chamada de discriminante da equação e representada pela letra do alfabeto grego Δ (delta). De acordo com esse discriminante, temos três casos a considerar:

1º caso: Quando temos $b^2 - 4ac > 0$ a equação apresenta duas raízes reais e diferentes, assim representadas:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2º caso: Quando temos $b^2 - 4ac = 0$ a equação tem duas raízes reais e iguais.

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

3º caso: Quando $b^2 - 4ac < 0$ o valor da expressão $\sqrt{\Delta}$ não existe em $\mathbb{R}$, não existindo, portanto, raízes reais. As raízes da equação são **números complexos**[4].

Dada expressão $\Delta = b^2 - 4ac$.

Podemos reescrevê-la da seguinte maneira $b^2 - \Delta = 4ac$ e fatorando obtemos

$$\left(b \pm \sqrt{\Delta}\right) \cdot \left(b \mp \sqrt{\Delta}\right) = 2a \cdot 2c,$$

dividindo tudo por $2a \cdot \left(b \mp \sqrt{\Delta}\right)$, encontramos

$$\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2c}{b \mp \sqrt{\Delta}}$$

finalmente multiplicando essa última expressão por (-1), temos:

$$\frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{\Delta}}.$$

[4] Os números complexos foram introduzidos na Álgebra durante o século XVI por alguns matemáticos como Gerolamo Cardano e Rafaello Bombelli, quando foi assumida a existência de raízes quadradas de números negativos. Esse conjunto é representado pela letra $\mathbb{C}$ e contém o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Note que o lado esquerdo dela é a fórmula resolvente da equação $ax^2 + bx + c = 0$, daí

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{\Delta}}$$

é a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a, b e c diferentes de zero.

Se não tivéssemos o conhecimento da fórmula resolutiva da equação do segundo grau, poderíamos encontrar a fórmula acima através do método algébrico de completar quadrados.

Demonstração: Multiplicando a equação $ax^2 + bx + c = 0$ por $4c$, temos:

$$4acx^2 + 4cbx + 4c^2 = 0.$$

Adicionando e subtraindo b^2x^2 ao primeiro membro dessa equação chegamos a

$$4acx^2 + 4cbx + 4c^2 + b^2x^2 - b^2x^2 = 0.$$

Reagrupando os termos dessa equação podemos escrever

$$4acx^2 - b^2x^2 + 4cbx + 4c^2 + b^2x^2 = 0.$$

Colocando o fator $-x^2$ em evidência nos dois primeiros termos e fatorando os três últimos, encontramos

$$-x^2(b^2 - 4ac) + (bx + 2c)^2 = 0.$$

logo,

$$x^2(b^2 - 4ac) = (bx + 2c)^2.$$

extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, temos

$$\pm x\sqrt{b^2 - 4ac} = bx + 2c$$

ou

$$\pm x\sqrt{b^2 - 4ac} - bx = 2c \Longrightarrow x\left(\pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b\right) = 2c$$

Assim concluímos que a solução será:

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Exemplo 3.7. Resolver a equação $3x^2 + 7x + 4 = 0$ aplicando a fórmula encontrada.

Solução: Como $a = 3$, $b = 7$ e $c = 4$, temos que:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 49 - 48 = 1$$

daí,

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{\Delta}} = \frac{2 \cdot 4}{-7 \pm \sqrt{1}} = \frac{8}{-7 \pm 1}$$

portanto as raízes são: $x' = -\dfrac{4}{3}$ e $x'' = -1$.

Observemos que esse método não é válido para todos os tipos de equações do segundo grau, especificamente para as equações incompletas que puderem ser escritas nas formas $ax^2 + bx = 0$ ou $ax^2 = 0$.

3.9 Método de Viète

Viète[5] encontrou uma maneira diferente para resolver a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O modo baseia-se em relacionar a equação em questão com uma equação do tipo $ay^2 + p = 0$, onde p é um número que depende de a, b e c de modo que qualquer solução dessa equação determinará uma solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Podemos observar que a equação $ay^2 + p = 0$ admite duas soluções:

$$y' = \sqrt{-\frac{p}{a}} \quad \text{e} \quad y'' = -\sqrt{-\frac{p}{a}}, \quad \text{se} \quad -\frac{p}{a} \geq 0.$$

Escrevendo $x = y + m$, onde y e m são incógnitas auxiliares. A equação $ax^2 + bx + c = 0$ pode ser escrita como

$$a(y + m)^2 + b(y + m) + c = 0$$

e, desenvolvendo, encontra-se

$$a(y^2 + 2my + m^2) + b(y + m) + c = 0$$

$$ay^2 + 2amy + am^2 + by + bm + c = 0.$$

Reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita y, obtemos

$$ay^2 + (2am + b)y + am^2 + bm + c = 0.$$

Podemos transformar essa equação numa equação do 2º grau incompleta, anulando o coeficiente de y, para isso, basta escolher $m = -\dfrac{b}{2a}$ obtendo assim a equação

$$ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0.$$

Agora aplicando um dos métodos que foi mostrado na seção 3.2 temos

$$ay^2 + a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0$$

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$ay^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

$$ay^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

[5] François Viète (1540 - 1603), foi um advogado e matemático francês

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lembrando que $m = -\dfrac{b}{2a}$ e que $x = y + m$ temos que as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por:

$$x = y + m = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que é a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau.

Exemplo 3.8. Vamos encontrar as raízes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$.
Solução:

Se estamos querendo saber quais são as raízes dessa equação usando o método de Viéte devemos fazer $x = y + m$ e substituir na equação dada. Ou seja:

$$(y + m)^2 - 7(y + m) + 12 = 0$$

Desenvolvendo teremos:

$$y^2 + 2my + m^2 - 7y - 7m + 12 = 0$$

$$y^2 + (2m - 7)y + m^2 - 7m + 12 = 0$$

Fazendo $m = \dfrac{7}{2}$, para anular o coeficiente de y, temos que:

$$y^2 + \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 12 = 0 \Longrightarrow y^2 - \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{2}$$

Como $x = y + m$, vem que:

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Portanto as raízes são $x' = 4$ e $x'' = 3$.

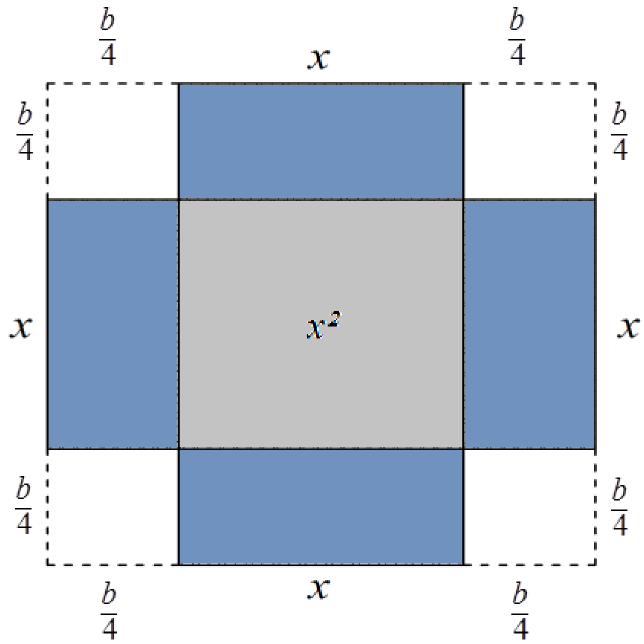
3.10 Método geométrico de completar quadrados

Considere a equação:

$$x^2 + bx = c, \text{ onde } c > 0$$

Utilizando o método geométrico de completar quadrados iremos interpretar a equação acima como um somatório de áreas. Sendo assim, x^2 representará a área de um quadrado de lado x e bx será a área de um retângulo com dimensões b e x, conforme a figura abaixo.

Figura 3 – Método geométrico de completar quadrados



Fonte: O autor

Observe que na **Figura 3** o retângulo de dimensões b e x está representado como 4 retângulos menores de dimensões $\frac{b}{4}$ e x e que a área hachurada é igual a c.

Como podemos observar, ao completarmos o quadrado maior estaremos formando quatro quadrados menores de lados $\frac{b}{4}$ e com área medindo $\left(\frac{b}{4}\right)^2$ cada um. Sendo assim, a área dos quatro quadrados menores é dada por:

$$4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = 4 \cdot \frac{b^2}{16} = \frac{b^2}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Portanto, a área total do quadrado externo será igual a $c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ e a medida de seu lado será a raiz quadrada dessa área, que é igual a:

$$\pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Como

$$\underbrace{2 \cdot \frac{b}{4} + x}_{\text{lado do quadrado externo}} = \pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

O valor procurado (x) é o lado do quadrado externo subtraído de duas vezes o lado do quadrado menor, ou seja:

$$x = \pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - 2 \cdot \frac{b}{4} \Longrightarrow x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Exemplo 3.9. Aplicando o método descrito acima encontre as raízes da equação do segundo grau $x^2 + 2x = 3$.

Solução :

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2$$

As raízes procuradas são, portanto, 1 e -3. Embora não faça sentido falar num quadrado de lado -3, pois, não há comprimentos negativos.

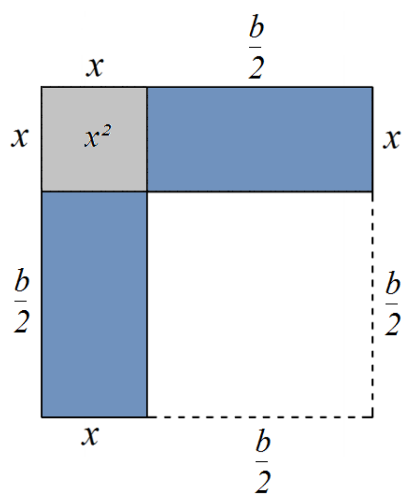
3.11 Método geométrico alternativo de completar quadrados

Considere novamente a equação:

$$x^2 + bx = c, \text{ onde } c > 0$$

O método alternativo consiste em dividir o retângulo de dimensões b e x em dois retângulos menores de dimensões $\frac{b}{2}$ e x e não mais em quatro, como foi visto anteriormente. Veja a **Figura 4** abaixo.

Figura 4 – Método geométrico alternativo de completar quadrados



Fonte: O autor

Como a área hachurada representada na **Figura 4** é igual a c. Se completarmos o quadrado maior, estaremos formando um quadrado menor de lado $\frac{b}{2}$, cuja área será igual a $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Logo, a área total do quadrado maior é igual a $c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Como podemos encontrar essa área fazendo $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2$, teremos:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Longrightarrow x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \Longrightarrow x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

que é a solução da equação do segundo grau $x^2 + bx = c$, onde $c > 0$.

3.12 Método gráfico de um sistema de equações

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Temos que:

$$x(ax + b) = -c \Longrightarrow ax + b = -\frac{c}{x}.$$

Fazendo $f(x) = ax + b$ e $g(x) = -\frac{c}{x}$ podemos construir os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo plano e verificar se existem pontos de intersecção entre os gráficos, se houver, esses pontos de intersecção representam a solução da referida equação do segundo grau, caso contrário a equação não possuirá solução.

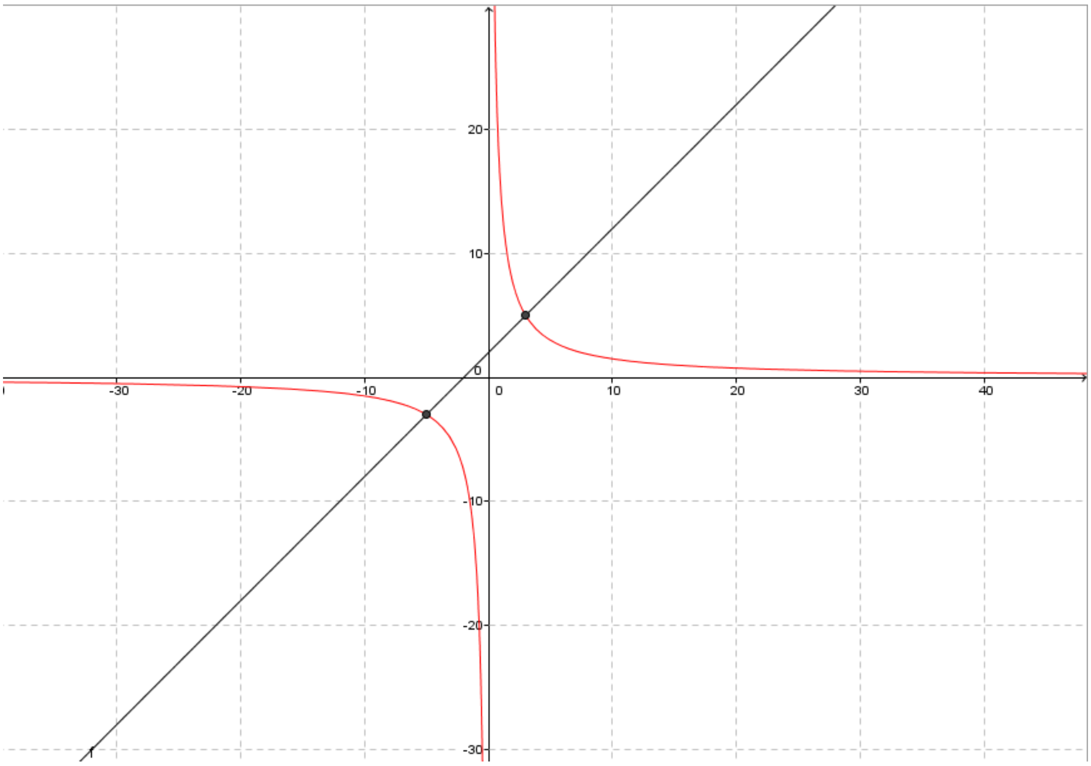
Exemplo 3.10. Vamos resolver a equação $x^2 + 2x - 15 = 0$, usando o método gráfico.
Solução: Para isso, faremos o seguinte:

$$x^2 + 2x = 15 \Longleftrightarrow x(x + 2) = 15 \Longleftrightarrow x + 2 = \frac{15}{x}$$

Sendo $f(x) = x + 2$ e $g(x) = \frac{15}{x}$, basta agora construir os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo plano e teremos a solução da equação $x^2 + 2x - 15 = 0$, onde $x' = 3$ e $x'' = -5$ são as raízes da equação. Vejamos abaixo a visualização geométrica na **Figura 5**, que pode ser feita utilizando um software de matemática dinâmica como o GeoGebra[6].

[6] GeoGebra é um aplicativo de matemática que combina conceitos de geometria, álgebra e cálculo. Ele é gratuito e foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas.

Figura 5 – Construção dos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e seus pontos de intersecção



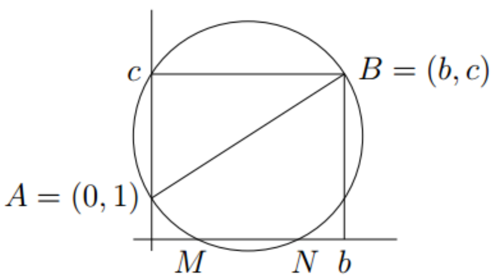
Fonte: O autor

3.13 Método de Leslie

No século XVIII o inglês Sir John Leslie (1766 - 1832), em sua obra *Elements of Geometry*, apresentou o seguinte procedimento:

Dada uma equação quadrática na forma $x^2 - bx + c = 0$, sobre um sistema de coordenadas cartesianas, marcam-se os pontos $A(0, 1)$ e $B(b, c)$. Constrói-se o círculo de diâmetro $\overline{AB}$. As abscissas dos pontos em que esse círculo cortar o eixo x (eixo horizontal), se cortar, são as raízes da equação quadrática dada.

Figura 6 – Gráfico do método de Leslie



Fonte: Revista do Professor de Matemática, n.43, p.25

Com efeito, a equação da circunferência construída é dada por:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2} - 1\right)^2$$

e quando $y = 0$, tem-se $x^2 - bx + c = 0$ ou $x = \dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - c}$.

Exemplo 3.11. Resolver a equação $x^2 - 3x + 4 = 0$, usando esse método.

Solução: Para isso, precisaremos de régua e compasso.

i) com a régua e o compasso em mãos trace um sistema de coordenadas cartesianas;

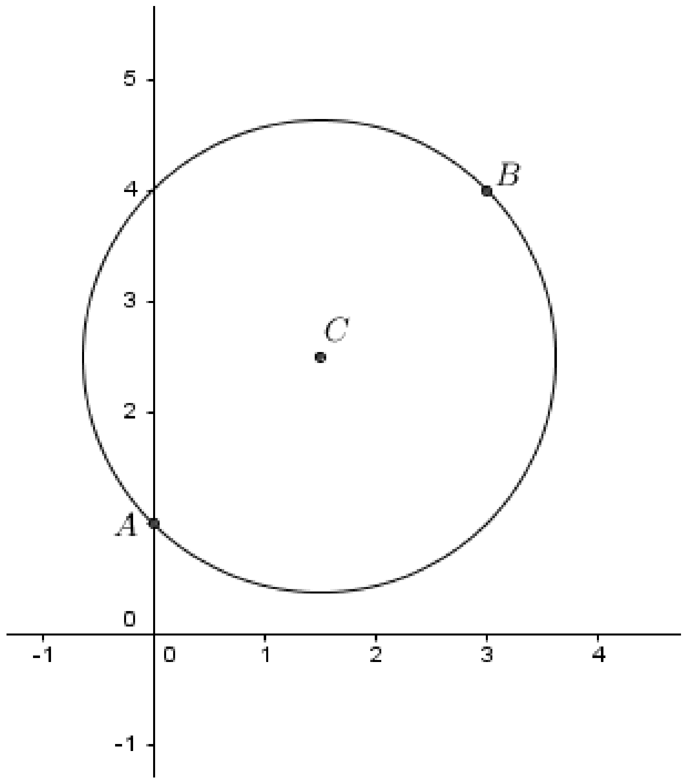
ii) marquemos os pontos $A(0, 1)$ e $B(3, 4)$;

iii) construiremos, agora, o círculo de diâmetro $\overline{AB}$. Façamos o seguinte:

– meça a distância de A até B e marque um ponto (C) em sua metade;

– com o compasso centralizado nesse novo ponto e abertura igual a metade da distância de A até B, desenhe o círculo.

Figura 7 – Gráfico do método de Leslie ($x^2 - 3x + 4 = 0$)



Fonte: O autor

Como as abscissas dos pontos em que esse círculo cortar o eixo x (eixo horizontal), se cortar, serão as raízes da equação dada, vemos que essa equação não possui raízes reais.

3.14 Método de Descartes

No ano de 1637, René Descartes (1596 - 1650) desenvolveu um método geométrico para encontrar a solução positiva de equações do segundo grau representadas nas formas:

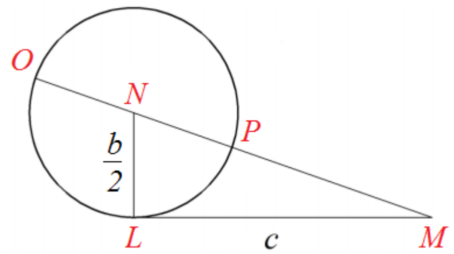
$$x^2 = bx + c^2, \quad x^2 = c^2 - bx \quad \text{e} \quad x^2 = bx - c^2$$

sempre com b e c positivos.

- Vamos encontrar a solução da equação $x^2 = bx + c^2$.

O método desenvolvido por ele para resolver esse tipo de equação consiste em traçar um segmento $\overline{LM}$ de comprimento c e em L traça-se uma perpendicular $\overline{LN}$ de comprimento $\frac{b}{2}$. Com centro em N constrói-se um círculo de raio $\overline{LN}$ e traça-se a reta passando por M e N que corta o círculo no ponto O e no ponto P (P está entre M e N). Conforme indica a **Figura 8**. O segmento $\overline{OM}$ é a solução positiva da equação.

Figura 8 – Método de Descartes ($x^2 = bx + c^2$ e $x^2 = c^2 - bx$)



Fonte: Revista do Professor de Matemática, n.43, p.24

De fato, no triângulo retângulo MLN, retângulo em L, da figura acima, temos que:

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{LN})^2 + (\overline{LM})^2$$

Como $\overline{LN} = \frac{b}{2}$, $\overline{LM} = c$ e sabendo que $\overline{LN} = \overline{ON}$ (são raios do círculo). Se $\overline{OM} = x$, temos que: $\overline{NM} = \overline{OM} - \overline{ON} = x - \frac{b}{2}$. Logo,

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{LN})^2 + (\overline{LM})^2$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

que implicará em $x^2 = bx + c^2$ ou $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$, onde a raiz positiva é dada por: $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$.

Hoje, sabe-se que a outra raiz é $-\overline{PM}$.

Com efeito, como $\overline{NM} = \overline{NP} + \overline{PM}$, se considerarmos o triângulo retângulo MLN, retângulo em L e nomearmos $\overline{PM} = x$, teremos:

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{LN})^2 + (\overline{LM})^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$$

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$$

daí, $-\overline{PM} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$ e a outra raiz será $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$, entretanto, essa raiz não foi considerada por Descartes na época por ser negativa.

Exemplo 3.12. Resolver a equação $x^2 = 3x + 4$, usando esse método.

<u>**Solução:**</u> Vamos resolver geometricamente. Precisaremos de régua e compasso.

i) com a régua e o compasso em mãos trace um segmento $\overline{LM} = 2$;

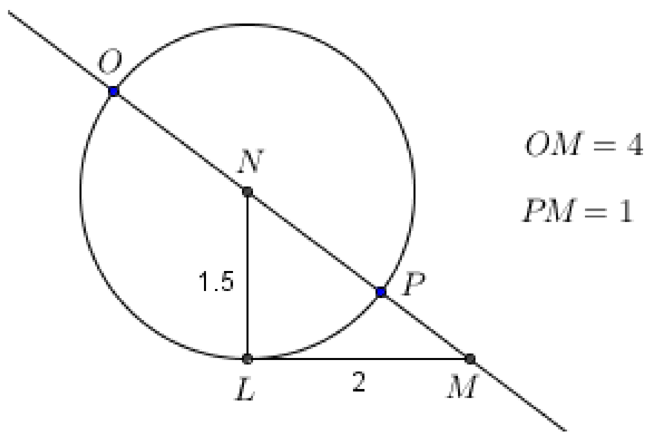
ii) em L trace uma perpendicular $\overline{LN}$ de comprimento $1,5$;

iii) com o compasso centralizado em N construa um círculo de raio $1,5$;

iv) trace agora uma reta passando por M e N, essa reta cortará o círculo em dois pontos: O e P (com P entre M e N);

v) com a régua meça os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{PM}$. As raízes serão $\overline{OM} = 4$ e $-\overline{PM} = -1$. Conforme indica a figura abaixo.

Figura 9 – Solução geométrica da equação $x^2 = 3x + 4$



Fonte: O autor

- Vamos resolver a equação da forma $x^2 = c^2 - bx$.

O método desenvolvido por ele para resolver esse tipo de equação é o mesmo utilizado para encontrar a solução da equação $x^2 = bx + c^2$. Nesse caso, continuaremos usando a **Figura 8**. O segmento $\overline{PM}$ é a solução positiva da equação.

De fato, no triângulo retângulo MLN, retângulo em L, temos:

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{LN})^2 + (\overline{LM})^2$$

Como $\overline{LN} = \dfrac{b}{2}$, $\overline{LM} = c$ e sabendo que $\overline{LN} = \overline{NP}$ (são raios do círculo). Se $\overline{PM} = x$, temos que: $\overline{NM} = \overline{NP} + \overline{PM} = x + \dfrac{b}{2}$. Logo,

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{LN})^2 + (\overline{LM})^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

que implicará em $x^2 = c^2 - bx$ ou $x = -\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + c^2}$, onde $x = -\dfrac{b}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + c^2}$ é a raiz positiva da equação dada.

A outra raiz é $-\overline{OM}$.

Com efeito, como $\overline{NM} = \overline{OM} - \overline{ON}$ e $\overline{ON} = \dfrac{b}{2}$, se considerarmos o triângulo retângulo MLN, retângulo em L e nomearmos $\overline{OM} = x$, teremos:

$$(\overline{NM})^2 = (\overline{LN})^2 + (\overline{LM})^2$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

$$x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2}$$

daí, $-\overline{OM} = -\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + c^2}$ e a outra raiz será $x = -\dfrac{b}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + c^2}$.

Exemplo 3.13. Resolver a equação $x^2 = 16 - 6x$, usando esse método.

Solução: Vamos resolver geometricamente. Precisaremos de régua e compasso.

i) com a régua e o compasso em mãos trace um segmento $\overline{LM} = 4$;

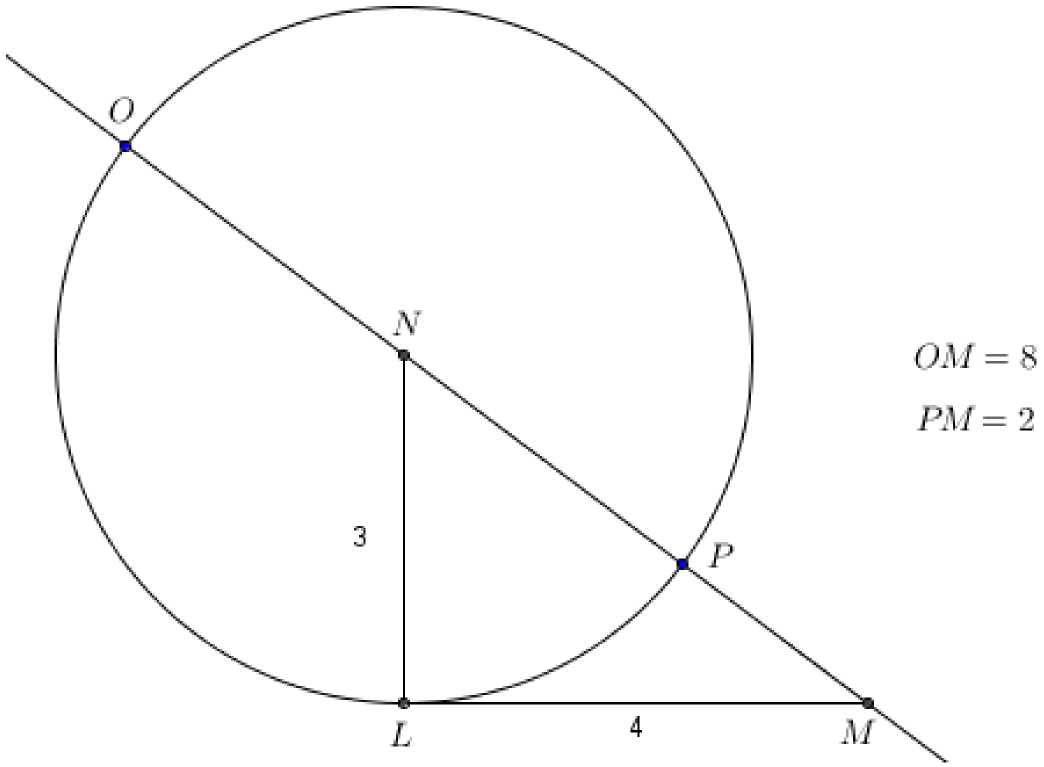
ii) em L trace uma perpendicular $\overline{LN}$ de comprimento 3;

iii) com o compasso centralizado em N construa um círculo de raio 3;

iv) trace agora uma reta passando por M e N, essa reta cortará o círculo em dois pontos:

O e P (com P entre M e N);
v) com a régua meça os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{PM}$. As raízes serão $-\overline{OM} = -8$ e $\overline{PM} = 2$. Conforme indica a figura abaixo.

Figura 10 – Solução geométrica da equação $x^2 = 16 - 6x$



Fonte: O autor

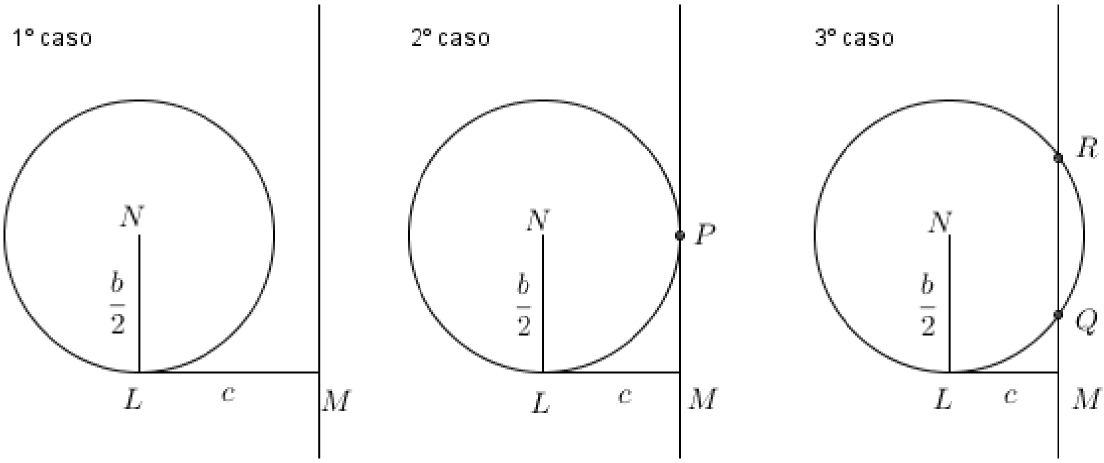
- Vamos resolver agora a equação $x^2 = bx - c^2$.

A estratégia desenvolvida por ele para resolver esse tipo de equação seria a seguinte: construímos um segmento $\overline{LM}$ de medida c, em L traçamos uma perpendicular $\overline{LN}$ de medida $\frac{b}{2}$ e em M traçamos uma reta paralela a $\overline{LN}$. Com centro em N e raio $\overline{LN}$ constrói-se um círculo. Se houver intersecção desse círculo com a reta paralela a $\overline{LN}$ a distância de cada ponto de intersecção ao ponto M representa uma solução da equação $x^2 = bx - c^2$.

Pode ocorrer três casos, como indica a figura abaixo.

1º caso: a equação $x^2 = bx - c^2$ não possui raiz real.
2º caso: a equação $x^2 = bx - c^2$ possui apenas uma raiz real (raiz dupla).
3º caso: a equação $x^2 = bx - c^2$ possui duas raízes reais e distintas.

Figura 11 – Método de Descartes ($x^2 = bx - c^2$)



Fonte: O autor

Vamos analisar cada um deles.

1º caso: Nada a demonstrar.

2º caso: Observe inicialmente que $\overline{NP} = \overline{LM}$, ou seja, $c = \dfrac{b}{2}$. Como o segmento $\overline{PM} = x$ é solução, temos:

$$\frac{b}{2} = c$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2$$

$$\frac{b^2}{4} = c^2$$

$$-\frac{b^2}{4} = -c^2$$

$$\frac{b^2 - 2b^2}{4} = -c^2$$

$$\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} = -c^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b \cdot b}{2} - c^2$$

Por construção temos $\overline{PM} = \dfrac{b}{2}$, pois, $\overline{PM}$ é tangente ao círculo e paralelo a $\overline{LN}$ logo,

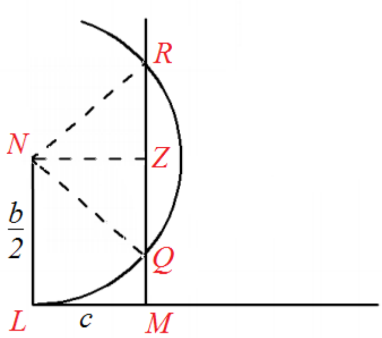
$$x^2 = bx - c^2$$

3º caso: Vejamos porque o valor da raiz pode ser a medida do segmento $\overline{MQ}$ ou a medida do segmento $\overline{MR}$.

i) Vamos analisar o segmento $\overline{MR}$ primeiro.

Marcaremos sobre o segmento $\overline{MR}$ o ponto Z talque $\overline{NZ}$ seja paralelo a $\overline{LM}$. Dessa forma, teremos $\overline{NZ} = \overline{LM} = c$ e $\overline{LN} = \overline{MZ} = \dfrac{b}{2}$.

Figura 12 – Método de Descartes ($x^2 = bx - c^2$)



Fonte: O autor

Observando a figura acima, temos: $\overline{NR} = \dfrac{b}{2}$ (raio) e $\overline{ZR} = \overline{MR} - \overline{MZ}$.

Se considerarmos $\overline{MR} = x$, como o triângulo RZN é retângulo em Z, usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(\overline{NR})^2 = (\overline{NZ})^2 + (\overline{ZR})^2$$

$$(\overline{NR})^2 = (\overline{NZ})^2 + (\overline{MR} - \overline{MZ})^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2$$

que implicará em $x^2 = bx - c^2$ ou $x = \dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - c^2}$.

ii) Para a outra raiz ser $\overline{MQ}$, observemos o seguinte:

$$\overline{QZ} = \overline{MZ} - \overline{MQ}.$$

Vamos usar novamente o Teorema de Pitágoras, dessa vez no triângulo NZQ, retângulo em Z. Observe que $\overline{NQ} = \dfrac{b}{2}$ (raio). Se considerarmos agora $\overline{MQ} = x$, teremos:

$$(\overline{NQ})^2 = (\overline{NZ})^2 + (\overline{QZ})^2$$

$$(\overline{NQ})^2 = (\overline{NZ})^2 + (\overline{MZ} - \overline{MQ})^2$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2$$

$$\left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2$$

que implicará em $x^2 = bx - c^2$ ou $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$.

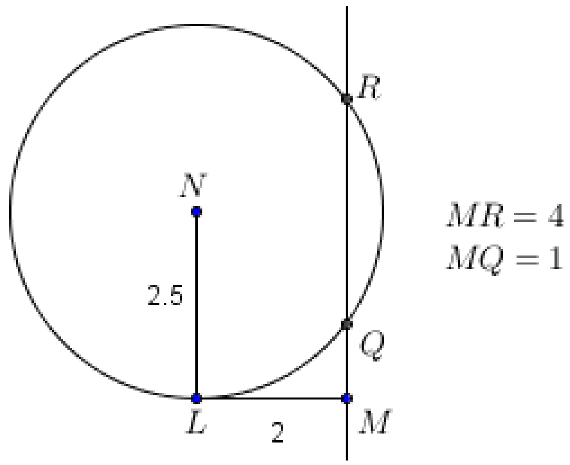
Por construção vemos que $\overline{MR} > \overline{MQ}$, logo:

$$\overline{MR} = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2} \quad \text{e} \quad \overline{MQ} = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}$$

Descartes forneceu as duas raízes porque são positivas.

Exemplo 3.14. Resolver a equação $x^2 = 5x - 4$, usando esse método.
Solução: Vamos resolver geometricamente. Precisaremos de régua e compasso.
i) com a régua e o compasso em mãos trace um segmento $\overline{LM} = 2$;
ii) em L trace uma perpendicular $\overline{LN}$ de comprimento $2,5$;
iii) com o compasso centralizado em N construa um círculo de raio $2,5$;
iv) trace agora uma reta passando por M que seja paralela a $\overline{LN}$;

Figura 13 – Solução geométrica da equação $x^2 = 5x - 4$



Fonte: O autor

v) com a régua meça os segmentos $\overline{MR}$ e $\overline{MQ}$. As raízes serão $\overline{MR} = 4$ e $\overline{MQ} = 1$. Conforme indica a figura acima.

3.15 Método geométrico de Nelson Tunala

Em 1988, o professor Nelson Tunala do Centro Tecnológico do Exército, do Instituto Militar de Engenharia e do Departamento de Matemática da Faculdade Moacyr Bastos, todos no Rio de Janeiro, apresentou um método geométrico para resolver equações do segundo grau do tipo $x^2 + bx + c = 0$ usando apenas régua e compasso.

Suporemos $c \neq 0$. Caso contrário, se $c = 0$, as raízes da equação seriam 0 e $-b$.

Ele dividiu suas soluções em dois casos:

1º caso: $c > 0$

Neste caso, as raízes x' e x'' da equação do segundo grau têm o mesmo sinal e

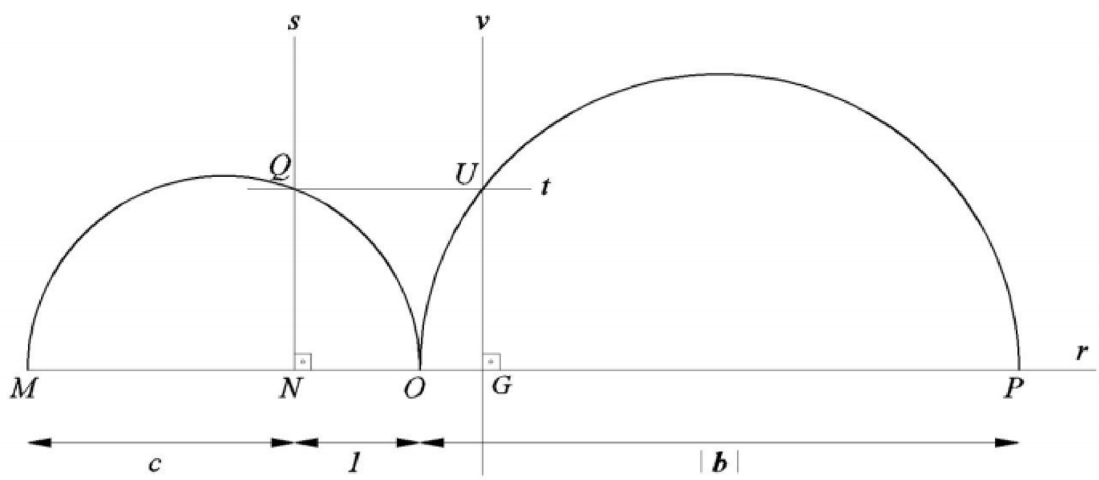
$$|x'| + |x''| = |b|$$

$$|x'| \cdot |x''| = c$$

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma seja $|b|$ e cujo produto seja c.

Sendo assim, tracemos uma reta r e, sobre ela, marquemos os segmentos $\overline{MN} = c$, $\overline{NO} = 1$ (com N entre M e O) e $\overline{OP} = |b|$ tal que $\overline{OP}$ seja adjacente a $\overline{NO}$. Agora tracemos dois semicírculos de diâmetros $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$. Por N levantamos uma reta s perpendicular a r, determinando um ponto Q no semicírculo de diâmetro $\overline{MO}$. Desse modo, no triângulo MQO, retângulo em Q, temos $(\overline{NQ})^2 = \overline{MN} \cdot \overline{NO} = c \cdot 1 = c$ assim $\overline{NQ} = \sqrt{c}$. Pelo ponto Q tracemos a reta t, paralela a r, determinando um ponto U no semicírculo de diâmetro $\overline{OP}$. Finalmente por U, tracemos a reta v, perpendicular a r, determinando um ponto G em r. Como indica a figura abaixo.

Figura 14 – Método de Nelson Tunala ($c > 0$)



Fonte: Revista do Professor de Matemática, n.12, p.33

Os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ representam os valores absolutos das raízes da equação do segundo grau $x^2 + bx + c = 0$, com $c > 0$.

De fato, $\overline{GU} = \overline{NQ} = \sqrt{c}$ e $(\overline{GU})^2 = \overline{OG} \cdot \overline{GP}$. Temos $\overline{OG} \cdot \overline{GP} = c$ (produto das raízes) e, além disso, por construção, $|b| = \overline{OG} + \overline{GP}$.

Então, $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$ são dois segmentos cuja soma é $|b|$ e cujo produto é c.

Se $b < 0$, $x' = \overline{OG}$ e $x'' = \overline{GP}$ são as raízes.

Se $b > 0$, $x' = -\overline{OG}$ e $x'' = -\overline{GP}$ são as raízes.

Observação: Se a reta t, suporte de $\overline{QU}$, não intersectar o semicírculo de diâmetro $\overline{OP}$, isto é, se $\sqrt{c} > \frac{1}{2}|b|$, as raízes são imaginárias e a construção não permite determiná-las. O mesmo ocorre, em particular, no caso degenerado $b = 0$ (com $c > 0$).

2º caso: $c < 0$.

Nesse caso, as raízes tem sinais contrários e sendo x' a raiz de maior valor absoluto, devemos ter

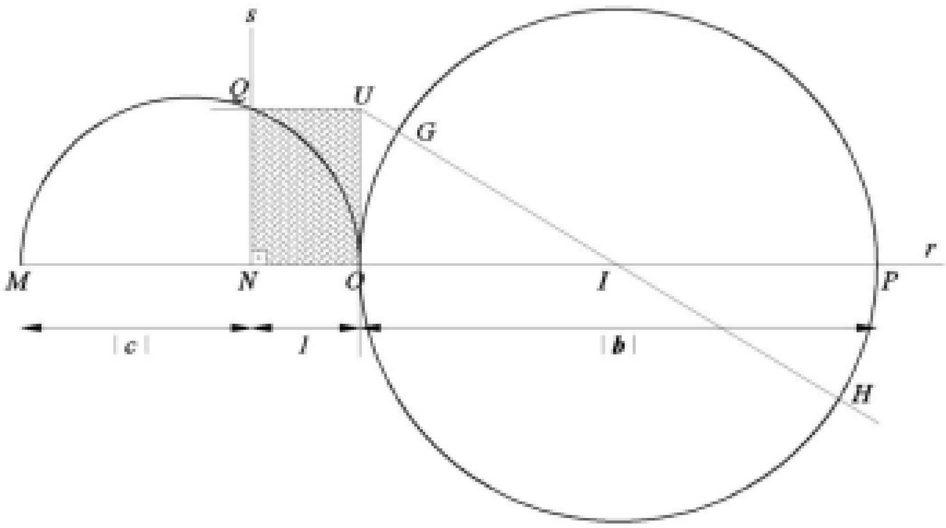
$$|x'| - |x''| = |b|$$

$$|x'| \cdot |x''| = |c|$$

O problema consiste em encontrar dois segmentos de reta, cuja diferença seja $|b|$ e cujo produto seja $|c|$.

De modo análogo, na construção acima, determinaremos os pontos M, N, O e P numa reta r e o ponto Q. Temos como antes $\overline{NQ} = \sqrt{c}$. Translademos o segmento $\overline{NQ}$ numa direção paralela a s até o ponto O obtendo o segmento $\overline{OU}$. Tracemos uma reta passando por U e I (centro do círculo determinado pelo diâmetro $\overline{OP}$), encontrando outro diâmetro $\overline{GH}$ no mesmo círculo.

Figura 15 – Método de Nelson Tunala ($c < 0$)



Fonte: Revista do Professor de Matemática, n.12, p.35

Os segmentos $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ representam as raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, com $c > 0$. Com efeito, $\overline{UH} - \overline{UG} = |b|$ (diâmetro).

Por outro lado, sendo $\overline{OU}$ tangente e $\overline{UH}$ secante ao círculo de diâmetro $\overline{OP}$, temos:

$$(\overline{OU})^2 = (\overline{NQ})^2 = |c| = \overline{UH} \cdot \overline{UG}$$

Então, $\overline{UH}$ e $\overline{UG}$ são dois segmentos cuja diferença é $|b|$ e cujo produto é $|c|$.

Se $b < 0$, $x' = \overline{UH}$ e $x'' = -\overline{UG}$.

Se $b > 0$, $x' = -\overline{UH}$ e $x'' = \overline{UG}$.

Observação: Neste caso, o problema sempre tem solução. Se $b = 0$, temos o caso degenerado em que $I = O = G = H$ (o centro do círculo de raio I é zero) e as raízes serão $\overline{OU}$ e $-\overline{OU}$.

Exemplo 3.15. Resolver a equação $x^2 + 6x + 5 = 0$, usando esse método.

Solução: Vamos resolver geometricamente. Precisaremos de régua e compasso.

i) com a régua e o compasso em mãos desenhe uma reta r;

ii) sobre r trace os segmentos $\overline{MN} = 5$, $\overline{NO} = 1$ (com N entre M e O) e $\overline{OP} = 6$ tal que $\overline{OP}$ seja adjacente a $\overline{NO}$;

iii) com a ajuda da régua divida os segmentos $\overline{MO}$ e $\overline{OP}$ ao meio e com o compasso centralizado nesses pontos desenhe dois semicírculos no mesmo semiplano;

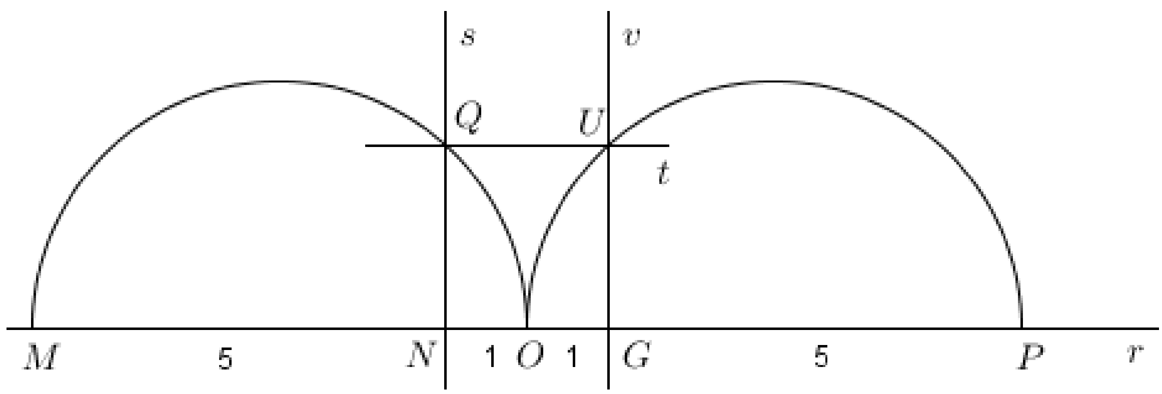
iv) por N trace uma reta s perpendicular a r, determinando o ponto Q no semicírculo de diâmetro $\overline{MO}$;

v) por Q trace uma reta t, paralela a r, determinando o ponto U no semicírculo de diâmetro $\overline{OP}$;

vi) por U trace a reta v, perpendicular a r, determinando o ponto G em r;

vii) com a régua meça os segmentos $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$. As raízes serão $-\overline{OG} = -1$ e $-\overline{GP} = -5$. Conforme indica a figura abaixo.

Figura 16 – Solução geométrica da equação $x^2 + 6x + 5 = 0$



Fonte: O autor

Todos esses métodos de resolução de equação do segundo grau usando régua e compasso apresentados aqui podem servir para motivar os alunos nas aulas de geometria, desenho geométrico e também serem usadas como curiosidade em aulas de matemática de modo geral. Depois, pode-se pedir aos alunos que encontrem uma justificativa algébrica para cada uma das soluções dadas de maneira que aproximará a Álgebra da Geometria ajudando a despertar o interesse deles por Matemática.

4 A EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Antes de iniciarmos esse estudo sobre equações do terceiro grau falaremos um pouco sobre os Babilônios que, novamente, deram sua contribuição para o desenvolvimento desse tema. Faremos um resumo sobre a história das equações do terceiro grau dando ênfase ao grande mistério que envolveu a descoberta e a divulgação de sua fórmula resolutiva, destacaremos para isso os esforços realizados por alguns matemáticos da época que se empenharam a fim de encontrar tal solução. De antemão, definiremos quando uma sentença aberta representa uma equação do terceiro grau.

Definição 4.1. Chama-se equação do terceiro grau, na incógnita x, toda equação que puder ser escrita na forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$.

Observe que se tivéssemos $a = 0$, teríamos uma equação do segundo grau da forma $bx^2 + cx + d = 0$, que poderia ser resolvida com um dos métodos apresentados no capítulo anterior.

4.1 Uma breve história das equações do terceiro grau

Os babilônios, entre 1800 e 1600 anos a.C., também foram capazes de desenvolver trabalhos à procura da solução de equações do terceiro grau. Em seus estudos acabaram construindo um método de resolução para equações do tipo $ax^3 + bx^2 = c$. A estratégia usada por eles consistia em fazer a multiplicação dessa equação por $\frac{a^2}{b^3}$ obtendo, assim, a equação

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{a^2c}{b^3}$$

em seguida, procuravam os valores que satisfaziam aquela equação em uma tabela de quadrados e cubos de números naturais (n) com uma coluna para os valores de $n^2 + n^3$.

Para exemplificar esse procedimento vamos resolver a equação $2x^3 + 3x^2 = 81$. O fator multiplicativo será $\frac{a^2}{b^3} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$, que transforma a equação acima em

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 = 12$$

Observando o valor de n, que satisfaz essa condição, na tabela abaixo, concluímos que

$$\frac{2x}{3} = 2 \Longrightarrow 2x = 6 \Longrightarrow x = 3$$

é a solução da equação $2x^3 + 3x^2 = 81$.

Tabela 1 – Valores de n^2, n^3 e $n^2 + n^3$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq 30$

n	n^2	n^3	$n^2 + n^3$
1	1	1	2
2	4	8	12
3	9	27	36
4	16	64	80
5	25	125	150
6	36	216	252
7	49	343	392
8	64	512	576
9	81	729	810
10	100	1000	1100
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	900	27000	27900

Fonte: O autor.

Por volta do século XV, o frei Luca Pacioli – renomado professor universitário de matemática – teria afirmado que não podia haver regra geral para a solução de problemas do tipo "cubo e coisas igual ao número", ou seja, $x^3 + px = q$ e muitos matemáticos daquela época, dentre eles Cardano, acreditavam nessa afirmação. Pois bem, após todo o trabalho árduo de se encontrar uma fórmula resolutiva para as equações quadráticas chegava a hora de descobrir "se existia"uma fórmula que resolvesse as cúbicas.

Entre os matemáticos daquela época, Scipione del Ferro (1465 – 1526) que foi professor da Universidade de Bolônia e cuja vida pouco se sabe, se mostrou contrário ao pensamento do frei, conseguindo obter o método de resolução dessas equações que claramente não corresponde ao caso mais geral, mas, como explicaremos a diante, pode-se transformar qualquer cúbica geral numa que tenha o formato daquela de del Ferro, de modo que podemos reduzir o problema original, difícil, a um outro mais simples, que sabemos resolver. Del Ferro, nunca publicou seu método de resolução, no entanto, antes de morrer, ensinou a dois dos seus discípulos: Annibale dela Nave e Antonio Maria Fior.

Naquele tempo era comum as chamadas "Disputas Matemáticas"que normalmente tinham o seguinte formato: cada um dos duelantes propunha uma série de problemas ao adversário, que deveriam ser resolvidos num prazo previamente acordado, ao fim do qual seria declarado vencedor aquele que mais problemas conseguisse resolver corretamente. Essas "batalhas"eram travadas, geralmente , em praças públicas, igrejas ou na corte de algum nobre ou príncipe apreciador do conhecimento, fato esse que justifica o porquê de algumas descobertas importantes não serem publicadas de imediato. E no ano de 1535, Fior desafia Nicollò Fontana (1500 – 1557).

> "Em 1512 os franceses saquearam Brescia, sua cidade natal. Sua mãe buscou refúgio para seu filho na igreja, mas os soldados também invadiram o santuário, e a criança foi ferida no rosto. O ferimento lhe causou uma gagueira permanente, que lhe valeu o apelido de **Tartaglia** (gago, em italiano), pelo qual se tornou conhecido."(MILIES: 1994, p.15).

Nesse confronto, cada um deles elaborou uma lista com trinta problemas para seu oponente e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Fior, em posse do segredo que recebera de Scipione del Ferro, baseou seus problemas envolvendo, de uma forma ou de outra, equações cúbicas. Tartaglia, no entanto, fez sua lista bem mais diversificada. Dias antes do encontro final, precisamente na noite de 12 para 13 de fevereiro, ocorreu a Tartaglia, como deduzir a fórmula para a Equação do Terceiro Grau, que lhe foi de grande utilidade para vencer este duelo.

Chegada a data da decisão, Tartaglia havia resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto este, não tinha conseguido resolver a maioria das questões enunciadas por Tartaglia.

Notícias da vitória de Tartaglia chega aos ouvidos de Girolamo Cardano (1501 – 1576), personagem principal desta história, já que a fórmula para resolver Equações Cúbicas leva seu nome.

Cardano por várias vezes tentou adquirir a fórmula descoberta por Tartaglia e esse por sua vez sempre se recusou a entregá-la. Foi então que ele teve a ideia de convidá-lo a sua casa com o pretexto de apresentá-lo ao vice-rei e comandante-chefe espanhol em Milão, Afonso D'Avalos, já que Tartaglia tinha feito algumas descobertas sobre o tiro e fortificações. Logo em seguida Cardano lhe persuadiu a revelar o segredo da solução das Equações Cúbicas. Tartaglia consentiu em lhe ensinar a regra de resolução, embora de maneira enigmática e sob forma de versos, em troca do juramento solene de que, Cardano jamais publicaria esse segredo.

De posse da "Receita"que conduziria a Solução da Equação, já que lhe fora revelado por versos, Cardano, após alguns esforços, conseguiu demonstrar a valide da regra para resolver a equação $x^3 + px = q$. Motivado por esse conhecimento, Cardano incentivou seu fiel discípulo, Ludovico Ferrari (1522 – 1565), a trabalhar com a mesma ideia na solução das Equações Quárticas, o qual conseguiu demonstrá-la.

> Os estudos de Girolamo Cardano e Ludovico Ferrari, proporcionaram grandes avanços na Teoria das Equações, como reconhecimento das raízes múltiplas, relação entre coeficientes e raízes, aceitação de raízes negativas, irracionais e imaginárias. Tais progressos na área eram motivos suficientes para publicação de um livro sobre o assunto. No entanto, o juramento feito a Tartaglia impediu essa realização (LIMA: 1991, p.14)

De acordo com o relato histórico, em 1544, Cardano e Ferrari resolveram fazer uma visita a Anniballe della Nave, conseguindo dela uma permissão para examinar os manuscritos deixados por Scipione del Ferro, no qual registrava, entre outras, a Solução da Equação Cúbica. Cardano então, se sentiu desobrigado do juramento feito a Tartaglia, pois entendeu que a fórmula já existia há trinta anos. Então, em 1545, publicou *"ARS Magna"*, sua notável obra, de grande significado e repercussão.

A obra de Cardano, *"ARS Magna"* foi aprovada pelos entendidos, mas provocou uma indignação em Tartaglia, que era esperado. O fato é que em 1546, Tartaglia publica *"Quesiti e Inventioni Diverse"*, obra na qual ele faz questão de contar suas relações com Cardano, acusando-o asperamente, sobre a quebra do solene juramento.

Intrigas e controvérsias a parte, o importante diante de tudo isto, é que estes homens foram fundamentais, com suas genialidades, para a progressão matemática. A fórmula da solução para a Equação do Terceiro Grau, conhecida como "Fórmula de Cardano"pode também ser chamada de Fórmula de Scipione – Tartaglia – Cardano.

4.2 A fórmula de Cardano

Como mencionado antes, mostraremos que qualquer equação cúbica pode ser expressa na forma $x^3 + px + q = 0$ mediante uma mudança de variável conveniente.

Consideremos a equação geral da cúbica:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Fazendo $x = y + \delta$, com δ a ser determinado, segue que $a(y+\delta)^3 + b(y+\delta)^2 + c(y+\delta) + d = 0$. Expandindo cada parcela e reagrupando os termos comuns, encontramos

$$ay^3 + \underbrace{(3a\delta + b)}_{b'}y^2 + \underbrace{(3a\delta^2 + 2b\delta + c)}_{c'}y + \underbrace{a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d}_{d'} = 0.$$

Vamos impor que $3a\delta + b = 0$. Para tanto, tomemos $\delta = -\dfrac{b}{3a}$. Assim,

$$c' = 3a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + 2b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = -\frac{b^2}{3a} + c$$

e

$$d' = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Portanto, para $\delta = -\dfrac{b}{3a}$, transformamos a cúbica na equação

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0.$$

Finalmente, multiplicando toda a equação por $\dfrac{1}{a}$, obtemos a forma reduzida:

$$y^3 + py + q = 0,$$

em que

$$p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{d}{a}.$$

Exemplo 4.1. Vamos eliminar o termo quadrático da equação $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$.
Solução:

Fazendo $x = y + \delta$, segue que $(y+\delta)^3 - 3(y+\delta)^2 + 6(y+\delta) - 8 = 0$.

Expandindo cada parcela e reagrupando os termos comuns, encontramos

$$y^3 + \underbrace{(3\delta - 3)}_{b'}y^2 + \underbrace{(3\delta^2 - 6\delta + 6)}_{c'}y + \underbrace{\delta^3 - 3\delta^2 + 6\delta - 8}_{d'} = 0.$$

Vamos impor que $3\delta - 3 = 0$. Logo, basta tomar $\delta = 1$.

Assim, $c' = 3$ e $d' = -4$.

Portanto, para $\delta = 1$, transformamos a cúbica $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$ na equação

$$y^3 + 3y - 4 = 0.$$

4.3 Solução de Cardano para $y^3 + py = q \quad (p, q > 0)$

Veremos agora a ideia de Cardano para determinar uma solução para a equação

$$y^3 + py = q, \ \text{com} \ p, q > 0. \tag{4.1}$$

Notemos o cuidado de Cardano ao manejar os termos de modo que os resultados intermediários sejam sempre quantidades positivas.

Consideremos a identidade $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b > 0$, que pode ser escrita na forma

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3.$$

Comparando esta última sentença com a equação (4.1), encontraremos uma solução se acharmos a e b tais que

$$\begin{cases} p = 3ab \\ q = a^3 - b^3 \end{cases}.$$

Neste caso, $y = a - b$ será uma solução de (4.1). Ora, de $p = 3ab$ segue que $p^3 = 27a^3b^3$ e, consequentemente,

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27}. \tag{4.2}$$

Por outro lado, de $q = a^3 - b^3$, temos que $q^2 = (a^3 - b^3)^2$ e daí

$$a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2. \tag{4.3}$$

Somando as equações (4.2) e (4.3), obtemos:

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27} \quad \text{donde segue que} \quad a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}.$$

Logo, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}.$$

cuja solução é

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad b = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Portanto, uma solução da equação cúbica na forma reduzida (4.1) é

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Exemplo 4.2. Vamos aplicar a fórmula de Cardano para resolver a equação do terceiro grau $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$.

Solução:

Como vimos, após a mudança de variável $x = y + 1$, transformamos a equação $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$ na sua forma reduzida $y^3 + 3y - 4 = 0$.

Aplicando a fórmula de Cardano à equação $y^3 + 3y = 4$, em que $p = 3$ e $q = 4$, encontramos:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$$ [1]

Como a solução procurada é dada por $x = y + 1$, temos que $x = 2$ é solução da cúbica $x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = 0$.

Para determinarmos as outras raízes, lembremos que

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{e} \quad -\frac{d}{a} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Logo, $x_2 + x_3 = 1$ e $x_2 \cdot x_3 = 4$.

Portanto, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^2 - x + 4 = 0$ cujas soluções são os números complexos $x_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$ e $x_3 = \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}$.

[1] Nota: provaremos essa igualdade no apêndice B

4.4 Solução de Cardano para $y^3 = py + q \quad (p, q > 0)$

Esta seção é muito semelhante à anterior. Aqui, Cardano lança mão de outra identidade, a fim de garantir quantidades positivas ao longo de todo o caminho que leva à solução.

Consideraremos agora a equação:

$$y^3 = py + q, \quad \text{com} \quad p, q > 0. \tag{4.4}$$

Dessa vez faremos uso da identidade $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b > 0$, que pode ser expressa na forma

$$(a+b)^3 = 3ab(a+b) + a^3 + b^3$$

Comparando esta última sentença com a equação (4.4), vemos que uma solução de (4.4) será $y = a + b$, em que a e b são tais que

$$\begin{cases} p = 3ab \\ q = a^3 + b^3 \end{cases}.$$

Agindo de modo análogo, segue de $p = 3ab$ que $p^3 = 27a^3b^3$ e, em consequência,

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27}. \tag{4.5}$$

Por outro lado, de $q = a^3 + b^3$, obtemos

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 \tag{4.6}$$

Subtraindo a equação (4.5) da equação (4.6), temos que

$$a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2 - \frac{4p^3}{27} \quad \text{daí} \quad a^3 - b^3 = \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}}.$$

Logo, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ a^3 - b^3 = \sqrt{q^2 - \dfrac{4p^3}{27}} \end{cases}$$

cuja solução é

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Assim, como $y = a + b$, segue que

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Exemplo 4.3. Vamos aplicar a fórmula de Cardano para resolver a equação do terceiro grau $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$.

Solução:

Fazendo a mudança de variável $x = y + 2$, transformaremos a equação da cúbica $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$ na sua forma reduzida $y^3 - 2y - 4 = 0$.

Aplicando a fórmula de Cardano à equação $y^3 = 2y + 4$, em que $p = 2$ e $q = 4$, encontramos:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}} = 2$$

Como a solução procurada é dada por $x = y + 2$, temos que $x = 4$ é solução da equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$.

Para determinarmos as outras raízes, lembremos que

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{e} \quad -\frac{d}{a} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Logo, $x_2 + x_3 = 2$ e $x_2 \cdot x_3 = 2$.

Portanto, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$ cujas soluções são os números complexos $x_2 = 1 + i$ e $x_3 = 1 - i$.

4.5 Solução da equação $y^3 + py + q = 0$, com $p, q \in \mathbb{R}$

Nesta seção buscaremos uma solução para a cúbica reduzida cujos coeficientes p e q são números reais quaisquer.

Seja a equação

$$y^3 + py + q = 0, \quad \text{com} \quad p, q \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

Seguindo o modus operandi das seções anteriores, tomemos a mesma identidade $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Reescrevendo-a na forma

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) - (a^3 + b^3) = 0,$$

e comparando com a equação (4.7), observamos que $y = a + b$ será uma solução desde que sejam satisfeitas as equações

$$p = -3ab \quad \text{e} \quad q = -(a^3 + b^3).$$

Dessas relações segue o sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = -q \\ a^3b^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Os números a^3 e b^3, sob as condições do sistema acima, são as raízes da equação do segundo grau $u^2 - (-q)u + \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Assim,

$$u = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3\right)} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Portanto,

$$a^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad b^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Consequentemente,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

é a solução que procurávamos.

A partir desse ponto, denotaremos por D o discriminante $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ na expressão acima.

Exemplo 4.4. Aplicando a fórmula de Cardano vamos resolver a equação do terceiro grau $x^3 + 4x^2 - 91x - 490 = 0$.

Solução:

Nesse caso, temos:

$\delta = -\frac{b}{3a} = -\frac{4}{3}$,

$p = -\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \cdot 4^2 - 91 = -\frac{289}{3}$,

$q = \frac{2}{27}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{d}{a} = \frac{2}{27} \cdot 4^3 - \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (-91) - 490 = -\frac{9826}{27}$ e

$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(-\frac{4913}{27}\right)^2 + \left(-\frac{289}{9}\right)^3 = 0.$

Assim, fazendo a mudança de variável $x = y - \frac{4}{3}$, obtemos a equação reduzida

$$y^3 - \frac{289}{3}y - \frac{9826}{27} = 0.$$

Aplicando a fórmula de Cardano, encontramos:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{4913}{27} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{\frac{4913}{27} - \sqrt{0}} = \frac{34}{3}$$

Como a solução procurada é dada por $x = y - \frac{4}{3}$, temos que $x = 10$ é solução da equação $x^3 + 4x^2 - 91x - 490 = 0$.

Para determinarmos as outras raízes, lembremos que

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 \quad \text{e} \quad -\frac{d}{a} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Logo, $x_2 + x_3 = -14$ e $x_2 \cdot x_3 = 49$.

Portanto, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^2 + 14x + 49 = 0$ cujas soluções são os números $x_2 = x_3 = 7$.

4.6 Critério para classificação das raízes da cúbica

Assim como na equação do 2º grau, o valor do discriminante $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ da fórmula de Cardano está diretamente relacionado com o número de raízes reais da equação do terceiro grau.

Estudaremos agora a relação entre o sinal desse discriminante e os tipos de raízes da equação

$$y^3 + py + q = 0, \quad \text{com } p, q \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

1º caso: Três raízes reais e distintas.

Sejam y_1, y_2 e y_3 as raízes dessa equação. Das relações de Girard, temos que:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -\frac{b}{a} \Longrightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{c}{a} \Longrightarrow y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p \quad \text{e}$$

$$y_1y_2y_3 = -\frac{d}{a} \Longrightarrow y_1y_2y_3 = -q.$$

Da primeira relação obtemos que $y_3 = -(y_1 + y_2)$. Usando isto na segunda e na terceira relação encontramos

$$p = y_1y_2 - (y_1 + y_2)^2 \quad \text{e} \quad q = y_1y_2(y_1 + y_2).$$

Assim, $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left[\frac{y_1y_2(y_1 + y_2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{y_1y_2 - (y_1 + y_2)^2}{3}\right]^3.$

Expandindo cada parcela e reagrupando os termos comuns, encontramos

$$D = -\frac{(y_1 - y_2)^2(2y_1 + y_2)^2(y_1 + 2y_2)^2}{108} \Longrightarrow D < 0.$$

Portanto, se $D < 0$, a cúbica (4.8) possuíra 3 raízes reais e distintas.

2º caso: Três raízes reais, onde pelo menos duas são iguais.

Vamos supor que $y_1 = y_2$. Então,

$$D = -\frac{(y_1 - y_2)^2(2y_1 + y_2)^2(y_1 + 2y_2)^2}{108} = 0.$$

Suponhamos agora que $y_1 = y_3$. Da primeira relação de Girard $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ decorre que $y_2 = -2y_1$ e então

$$D = -\frac{(y_1 - y_2)^2(2y_1 + y_2)^2(y_1 + 2y_2)^2}{108} = 0$$

Finalmente, suponhamos que $y_2 = y_3$. Como $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ segue que $y_1 = -2y_2$. Logo,

$$D = -\frac{(y_1 - y_2)^2(2y_1 + y_2)^2(y_1 + 2y_2)^2}{108} = 0.$$

Portanto, se $D = 0$, a cúbica (4.8) possuíra 3 raízes reais com pelo menos duas delas idênticas.

3ºcaso: Uma raiz real e duas raízes complexas.

Sejam $y_1 = m + ni$, $y_2 = m - ni$ e $y_3 = k$ as raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ com $m, k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}^*$. Notemos que se um número complexo w é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então seu conjugado, $\overline{w}$, também o é.

Mais uma vez, usando as relações de Girard, temos que

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \Longrightarrow k = -2m,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p \Longrightarrow m^2 + n^2 + 2mk = p \quad \text{e}$$

$$y_1y_2y_3 = -q \Longrightarrow k(m^2 + n^2) = -q.$$

Substituindo o valor de k nas duas últimas equações, obtemos $p = n^2 - 3m^2$ e $q = 2m \cdot (m^2 + n^2)$ que substituídos em D nos dá

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left[\frac{2m \cdot (m^2 + n^2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{n^2 - 3m^2}{3}\right]^3$$

Expandindo cada parcela e reagrupando os termos comuns, encontramos

$$D = \frac{81m^4n^2 + 18m^2n^4 + n^6}{27} \Longrightarrow D > 0.$$

Portanto, se $D > 0$, a cúbica (4.8) possuíra uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

4.7 A solução algébrica de Viète

Exibiremos agora as ideias de Viète para solucionar a cúbica reduzida.

Consideremos a equação:

$$y^3 + py + q = 0, \quad \text{em que } p, q \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

e façamos $y = z - \dfrac{p}{3z}$, com $z \neq 0$.

Então, de $\left(z - \dfrac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \dfrac{p}{3z}\right) + q = 0$, obtemos $(z^3)^2 + qz^3 - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Agora, tomando $z^3 = \sigma$ (sigma), obtemos a equação do 2º grau $\sigma^2 + q\sigma - \dfrac{p^3}{27} = 0$, donde $\sigma = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}$. Em consequência, $z = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$.

Portanto,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}$$

Essa fórmula equivale àquela descoberta por del Ferro. Vejamos por quê.

Suponhamos que, antes da raiz quadrada, usemos o sinal negativo, ou seja,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}.$$

Olhando apenas para o termo fracionário, multiplicamos tanto o numerador quanto o denominador por $\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$.

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
-\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} &= -\frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}} \\
&= -\frac{p\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right]^2}}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{p \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3\sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Assim, $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, que é a mesma fórmula obtida por del Ferro.

Obviamente, obteríamos o mesmo resultado se escolhêssemos o sinal positivo antes da raiz quadrada.

4.8 A solução trigonométrica de Viète

Nesta seção, mostraremos a solução desenvolvida por Viète para calcular as três raízes reais da cúbica $y^3 + py + q = 0$ no caso em que a fórmula de Cardano falha, isto é, no caso em que o discriminante D é negativo, por meio da Trigonometria.

Consideremos a equação

$$y^3 + py + q = 0, \text{ com } p, q \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

Neste método, iremos procurar soluções reais da forma $y = k \cdot cos\ \theta$, com $k > 0$.

Note que o caso $k = 0$ ocorre quando $y = 0$ é uma solução da cúbica (4.10), daí $q = 0$. As outras duas raízes são as soluções da equação $y^2 = -p$.

Fazendo a substituição $y = k \cdot cos\ \theta$, com $k \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} (k \cdot cos\ \theta)^3 + p(k \cdot cos\ \theta) + q &= 0 \\ k^3 \cdot cos^3\ \theta + pk \cdot cos\ \theta + q &= 0 \\ cos^3\ \theta + \frac{p}{k^2} \cdot cos\ \theta + \frac{q}{k^3} &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ora, como $cos\ (3\theta) = 4cos^3\ \theta - 3cos\ \theta$ segue que

$$cos^3\ \theta - \frac{3}{4}cos\ \theta - \frac{cos\ (3\theta)}{4} = 0. \tag{4.12}$$

As equações (4.11) e (4.12) têm a mesma estrutura. Logo, podemos fazer as seguintes identificações:

$$\frac{p}{k^2} = -\frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{q}{k^3} = -\frac{cos\ (3\theta)}{4}.$$

Daí, $k^2 = -\frac{4p}{3}$ e $cos\ (3\theta) = -\frac{4q}{k^3}$.

Estas duas últimas equações (em k e θ) terão solução real se, e somente se, tivermos

$$p < 0 \quad \text{e} \quad \left| -\frac{4q}{k^3} \right| \leq 1$$

ou, equivalentemente

$$p < 0 \quad \text{e} \quad \frac{16q^2}{k^6} \leq 1$$

De $k^2 = -\dfrac{4p}{3}$ e $\dfrac{16q^2}{k^6} \leq 1$ concluímos que $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \leq 0$.

Como visto, na seção 4.6, sendo $D \leq 0$, a cúbica (4.10) possuíra três raízes reais.

Sendo assim, primeiro calculamos $k = \sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$. Em seguida procuramos os valores de θ compreendidos entre 0º e 360º satisfazendo $cos\ (3\theta) = -\dfrac{4q}{k^3}$.

Sendo eles θ_1, θ_2 e θ_3, teremos as três soluções da cúbica (4.10), dadas por

$$y_1 = k \cdot cos\ \theta_1, \quad y_2 = k \cdot cos\ \theta_2 \quad \text{e} \quad y_3 = k \cdot cos\ \theta_3$$

No cálculo dos valores de θ, podemos tomar $\theta_1 = \dfrac{1}{3} \cdot arccos\left(-\dfrac{4q}{k^3}\right)$ donde segue que $\theta_2 = \theta_1 + 120^{\circ}$ e $\theta_3 = \theta_1 + 240^{\circ}$.

Como p e q são conhecidos, podemos calcular os valores de k e θ.

Exemplo 4.5. Vamos resolver a equação $y^3 - 6y + 4 = 0$ pelo método trigonométrico de Viète.

Solução: Vamos calcular o valor do discriminante D para verificar se a equação acima possui apenas raízes reais.

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(-\frac{6}{3}\right)^3 = 4 - 8 = -4 < 0$$

Observando a equação $y^3 - 6y + 4 = 0$ temos que $p = -6 < 0$ e $q = 4$, daí

$$k = \sqrt{-\frac{4p}{3}} = 2\sqrt{2}$$

Em seguida procuramos os valores de θ compreendidos entre 0º e 360º satisfazendo

$$cos\ (3\theta) = -\frac{4q}{k^3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Daí, $3\theta = 135^{\circ}$ ou $3\theta = 225^{\circ}$. Podemos utilizar qualquer um desses valores, para facilitar os cálculos usaremos o primeiro. Logo, $\theta = 45^{\circ}$.

Então, $y_1 = k \cdot cos\ \theta_1 = 2\sqrt{2} \cdot cos\ 45^{\circ} = 2$ é uma solução real da equação $y^3 - 6y + 4 = 0$. As outras raízes são:

$$y_2 = 2\sqrt{2} \cdot cos\ 165^{\circ} \approx -2{,}732050807 \quad \text{e} \quad y_3 = 2\sqrt{2} \cdot cos\ 285^{\circ} \approx 0{,}732050807.$$

4.9 Uma solução das equações do 3º grau

Esta solução foi desenvolvida por Carlos Gustavo Moreira, mestre e doutor em Matemática pelo IMPA, mas que, na época, contava com apenas 14 anos de idade. Ela foi publicada na RPM (Revista do Professor de Matemática) nº 25, em 1994.

Consideremos a sentença

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ e, portanto satisfazem as condições $x_1 + x_2 = S$ e $x_1 x_2 = P$.

Elevando ambos os membros à terceira potência, vem:

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}\right)}_{y}$$

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2} \cdot y$$

$$y^3 - 3\sqrt[3]{P}y - S = 0$$

Comparando esta equação com a cúbica reduzida $y^3 + py + q = 0$, percebemos que elas têm a mesma estrutura. Logo, podemos fazer as seguintes identificações:

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad \text{e} \quad q = -S$$

de forma que temos o sistema

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{p^3}{27} \\ x_1 + x_2 = -q \end{cases}$$

Os números x_1 e x_2, sob as condições acima, são as raízes da equação

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

isto é,

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Como $y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$, segue que

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Embora seja a mesma fórmula encontrada por del Ferro, a maneira como foi deduzida delineia um roteiro bem simples para se resolver uma equação cúbica geral:

1. Transformar a cúbica geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ na sua forma reduzida:

$$y^3 + py + q = 0;$$

2. Resolver a equação quadrática associada $\sigma^2 + q\sigma - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$;

3. Escrever a solução da cúbica reduzida: $y = \sqrt[3]{\sigma_1} + \sqrt[3]{\sigma_2}$, em que σ_1 e σ_2 são as raízes da equação quadrática associada;

4. Calcular as raízes da cúbica original: $x = y - \dfrac{b}{3a}$.

Exemplo 4.6. Vamos resolver a equação $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$ usando esse método.

Solução:

Nesse caso, temos:

$\delta = -\dfrac{b}{3a} = 1$,

$p = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{3} \cdot (-3)^2 - 3 = -6$,

$q = \dfrac{2}{27}\left(\dfrac{b}{a}\right)^3 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{c}{a}\right) + \dfrac{d}{a} = \dfrac{2}{27} \cdot (-3)^3 - \dfrac{1}{3} \cdot (-3) \cdot (-3) + 9 = 4$ e

$D = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3 = 2^2 + (-2)^3 = -4$.

Assim, fazendo a mudança de variável $x = y + 1$, obtemos a equação reduzida

$$y^3 - 6y + 4 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática associada $\sigma^2 + 4\sigma + 8 = 0$, encontramos

$$\sigma_1 = -2 + \sqrt{-4} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = -2 - \sqrt{-4}$$

Logo, uma solução da cúbica reduzida é dada por:

$$y = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{-4}} = 2$$

Portanto, uma raiz da cúbica $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$ é $x_1 = 3$.

Para determinarmos as outras raízes da equação $y^3 - 6y + 4 = 0$, lembremos que

$$-\frac{b}{a} = y_1 + y_2 + y_3 \quad \text{e} \quad -\frac{d}{a} = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3$$

Logo, $y_2 + y_3 = -2$ e $y_2 \cdot y_3 = -2$.

Portanto, y_2 e y_3 são as raízes da equação $y^2 + 2y - 2 = 0$ cujas soluções são os números $y_2 = -1 + \sqrt{3}$ e $y_3 = -1 - \sqrt{3}$.

Sendo assim, temos que $x_2 = \sqrt{3}$ e $x_3 = -\sqrt{3}$ são as outras raízes da equação $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos alguns métodos de resolução de equações algébricas que foram desenvolvidos ao longo dos tempos.

As fórmulas das equações de primeiro e segundo grau foram mais fáceis de serem encontradas, pois, vários povos já trabalhavam com essas equações. Para as equações de grau três, apenas nos séculos XVI e XVII, foram encontradas as fórmulas para resolvê-las por radicais. Em alguns momentos usamos recursos computacionais, pois entendemos que assim o ensino fica mais ilustrativo e dinâmico. Embora sejamos favoráveis ao uso das tecnologias no ensino de matemática, ressaltamos que é importante ter o conhecimento matemático até mesmo para termos condições de analisar criticamente os resultados obtidos. As tecnologias devem ser utilizadas como recurso para agilizar os cálculos, mas elas não podem ser encaradas como o objeto central do ensino. Os conceitos matemáticos continuam tendo e merecendo grande importância.

Finalizamos o trabalho na concepção de que as equações algébricas do primeiro, segundo e terceiro graus são de fácil compreensão, especialmente para estudantes do Ensino Médio. Entretanto, não entendemos a razão da omissão do estudo sobre as equações do terceiro grau. Reconhecemos a eficácia das novas técnicas que solucionam tais equações, mas, não devemos negar a elegância de uma resolução alternativa para essas equações.

Esperamos que este trabalho sirva como material de pesquisa ou estudo para o professor do ensino básico interessado em incrementar suas aulas com tópicos alternativos dentro da matemática.

REFERÊNCIAS

1 BOYER, CARL. B. *História da matemática*, tradução: Elza F. Gomide, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

2 EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

3 SANTOS, Sérgio Ricardo dos. *As Equações Polinomiais do 3º e 4º graus: sua história e suas soluções*. São Cristóvão, 2013.

4 POLYA, Georg. *A arte de resolver problemas*. 2. ed. São Paulo: Hermann, 1995.

5 LIMA, Elon Lages *et al*. *A matemática do ensino médio*. vol. 1, 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

6 ————. *A matemática do ensino médio*. vol. 2, 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

7 ————. *Temas e problemas elementares*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

8 LIMA, Elon Lages. A equação do 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 13, p. 21 - 33, 1988.

9 ————. A equação do terceiro grau. *Matemática Universitária*, São Paulo, n. 5, p. 9 - 23, 1987.

10 PASTOR, Antonio Leonardo. P. Equação do 2º grau: completando quadrados. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 6, p. 36 - 38, 1985.

11 KNUDSEN, Carlos Alberto. P. A teoria das equações algébricas. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 7, p. 26 - 31, 1985.

12 TUNALA, Nelson. Resolução geométrica da equação do 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 12, p. 33 - 35, 1988.

13 AMARAL, João Tomas do. Método de Viète para resolução de equações do 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 13, p. 18 - 20, 1988.

14 GUELLI, Oscar. A regra da falsa posição. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 15, p. 18 - 23, 1989.

15 WAGNER, Eduardo. Um pouco sobre Descartes. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 19, p. 9 - 14, 1991.

16 MILIES, César Polcino. A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 25, p. 15 - 22, 1994.

17 MOREIRA, Carlos Gustavo Tamn de Araujo. Uma solução das equações do 3º e do 4º graus. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 25, p. 23 - 28, 1994.

18 ZAGO, Glaciete Jardim *et al*. Funções: 1º grau. 2º grau. Modular. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 39, p. 53 - 54, 1999.

19 FRAGOSO, Wagner da Cunha. Uma abordagem histórica da equação do 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 43, p. 20 - 25, 2000.

20 HERMES, Antônio Pedroso. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista Eletrônica de Matemática*, São Paulo, n. 2, 2010.

21 WAGNER, E. (1991). *Um pouco sobre Descartes*,p.9-14. Revista do professor de matemática, nº 19.

22 PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana. *Tópicos de História da Matemática*. [material didático do PROFMAT, 2011, no prelo].

23 PONTES, Ronaldo da Silva. *Equações polinomiais: Soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas*, dissertação de mestrado. João Pessoa, 2013.

SITES:

http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/WellingtonJoseFerreira.pdf (acessado dia 18/02/2015)

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/cardano.htm

http://en.wikipedia.org/wiki/Ars_Magna_(Gerolamo_Cardano)

http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/05/o-metodo-de-viete-para-equacoes-cubicas.html

http://demonstrations.wolfram.com/CubicEquation/

APÊNDICE A – RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES E AS RAÍZES DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Vamos demonstrar agora que a soma (S) das raízes de uma equação do segundo grau é $-\frac{b}{a}$ e seu produto (P) é igual a $\frac{c}{a}$, resultado que foi utilizado para demonstrar o Método da soma e da diferença de quadrados.

Vimos que as raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ são $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação.

Temos o seguinte:

$$S = x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = x' \cdot x'' = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

como queríamos demonstrar.

APÊNDICE B – $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$?

Vamos mostrar que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$.

Observando que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8}=\frac{16+8\sqrt{5}}{8}=2+\sqrt{5}$$

tem-se $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e, analogamente, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

Somando membro a membro as duas igualdades acima, obtém-se

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1.$$