UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA DE REDE NACIONAL

JOAO MARINHO MALCHER

MATRIZES, DETERMINATES E SISTEMAS LINEARES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO.

BELÉM-PA

2015

JOAO MARINHO MALCHER

MATRIZES, DETERMINATES E SISTEMAS LINEARES:
UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – PPGME – UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo

BELÉM-PA

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Malcher, Joao, 1978-
Matrizes, determinates e sistemas lineares: uma abordagem para o ensino mdio. / Joao Malcher. - 2015.

Orientador: Anderson Campelo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2015.

1. Matrizes (Matemática). 2. Determinantes (Matemática). 3. Sistemas lineares. 4. Matemática-Estudo e ensino (Ensino médio). I. Título.

CDD 22. ed. 512.9434

JOAO MARINHO MALCHER

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES:
UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – PPGME – UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 02 / 07 / 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (Orientador)
Universidade Federal do Para – UFPA

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
Universidade Federal do Para – UFPA

Prof. Dr. Gesson José Mendes Lima
Universidade Federal do Para – UFPA

Aos meus pais, minha esposa Nathalya, e à toda minha família e amigos. Muito obrigado por estarem ao meu lado nesses dois longos anos.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as bênçãos que tenho recebido em minha vida.

Não tenho palavras para expressar a minha gratidão por tudo o que a minha família tem feito por mim, em especial ao meu pai João Malcher e minha mãe Fátima Marinho. Vocês sempre me deram muito mais do que eu poderia sonhar. À vocês devo toda a minha formação. Vocês são meus maiores exemplos de vida e, sem vocês para me guiar pelos caminhos tortuosos da vida, sem dúvida alguma, jamais teria chegado até aqui. Agradeço também as minhas irmãs, em especial à Josilene, ao qual tenho como exemplo de superação. Não poderia esquecer de meu tio, Antônio de Pádua, que sempre foi um irmão para mim. Agradeço também ao meu amigo Fabrício por sempre ter me dado forças e fazer eu acreditar que era possível um dia chegar até aqui e ao meu amigo Ivan, que muito me ajudou durante a minha caminhada. Agradeço também minha esposa Nathalya por ter me apoiado e me ajudado nos momentos mais difíceis ao longo destes dois anos. Agradeço à todos os meus professores pela enorme paciência, em especial ao meu orientador prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo, que me acolheu no momento mais difícil e teve muita paciência. Finalmente agradeço à CAPES por proporcionar essa oportunidade única de um professor, em regência de sala, conseguir concluir o programa de Mestrado em Matemática Aplicada.

"O homem é do tamanho dos seus sonhos"

Fernando Pessoa

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar aos alunos do ensino médio algumas aplicações de matrizes e sistemas lineares, bem como uma visão geométrica dos determinantes, visto que os livros didáticos atuais mostram determinantes apenas como um número associado a uma matriz, o que para o aluno parece apenas um número sem sentido e geralmente não mostram aplicação das matrizes inversas. Também pretendemos mostrar como os determinantes estão intimamente ligados aos sistemas lineares.

PALAVRA CHAVE: Matrizes; determinantes; sistemas lineares.

Abstract

This work aims to introduce to high school students some applications of matrices and linear systems as well as a geometric view of determinants, given that the current textbooks show determinants just as a number associated with a matrix, which for the student seems just a meaningless number and usually do not show the application of the inverse matrix. We also want to show how the determinants are closely linked to linear systems.

PALAVRA CHAVE: Matrix; determinants; linear systems.

SUMÁRIO

Introdução

Existe uma cultura generalizada de que a matemática é difícil, ciência para poucos, a maioria da população não entende e pior, acredita que pode viver muito bem sem ela. É comum ouvir de alunos das últimas séries do Ensino Fundamental, e também do Ensino Médio, “detesto Matemática”.

Testes de rendimentos aplicados pelos Governos Estadual e Federal, como SAEB, Prova Brasil e SISPAE indicam um baixo desempenho dos alunos na área de Matemática. Quando se compara o desempenho dos estudantes brasileiros com os estudantes de outros países, esse baixo rendimento fica mais evidente ainda.

Uma das formas de fazer essa comparação é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, mais conhecido como PISA (*Programme for International Student Assessment)*. O PISA é aplicado a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.

Apesar do desempenho em matemática ter melhorado nos últimos anos, de acordo com dados do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), conforme tabela abaixo, no exame do PISA realizado em 2012 o Brasil ainda ocupa a posição de número 58 de 65 possíveis no desempenho de matemática (fonte: INEP)

Quadro comparativo dos resultados do Brasil no PISA desde 2000.

	Pisa 2000	Pisa 2003	Pisa 2006	Pisa 2009	Pisa 2012
Número de alunos participantes	4.893	4.452	9.295	20.127	18.589
Leitura	396	403	393	412	410
Matemática	334	356	370	386	391
Ciências	375	390	390	405	405

Disponível em: www.portal.inep.gov.br. Acesso em: 23 jun. 2015

Frequentemente, a Matemática tem sido apontada como a disciplina que contribui significativamente para a elevação das taxas de retenção. George Polya (1887—1985), no prefácio da segunda edição de seu clássico livro “A arte de resolver problemas”, aponta os professores como grandes responsáveis por esta aversão e indiferença pela Matemática:

> [...] a Matemática tem a duvidosa honra de ser a matéria menos apreciada do curso. Os futuros professores passam pelas escolas elementares a aprender a detestar a Matemática [...] . Depois, voltam à escola elementar para ensinar uma nova geração a detestá-la (POLYA, 1986, p.viii).

Uma das dificuldades enfrentadas no ensino básico pelos alunos nos sistemas lineares é a sua resolução. Apesar dos métodos serem estritamente numéricos, os alunos têm uma grande dificuldade na aplicação de tais métodos. Pretendemos mostrar um algoritmo simples para a resolução de tais sistemas.

No que diz respeito aos determinantes, esses são apresentados tão somente como números que são encontrados mediante a algumas regras. As regras para o cálculo dos determinantes 2x2 e 3x3 apresentada pelos livros didáticos são bem aceitas pelos alunos. As fórmulas são visualmente simples, mnemônicas e os alunos a identificam e fazem cálculos com ela com facilidade, porém percebemos uma lacuna muito grande com relação à compreensão do significado geométrico da resolução de tais determinantes.

A parte mais complicada é calcular e dar sentido ao estudo das matrizes inversas. De forma geral no ensino médio é ensinada uma regra prática para a obtenção de matrizes inversas 2x2. Geralmente a inversão de matrizes 3x3 é pouco explorada, pois o método mais adotado é a inversão via resolução de sistemas, que, como já dissemos acima, é justamente onde o aluno encontra as maiores dificuldades. Pretendemos preencher essa lacuna mostrando o cálculo de matriz inversa via operações elementares sobre as linhas das matrizes, com o auxílio de algoritmos, esperando assim eliminar o fator complicador.

O objetivo desse trabalho é mostrar os conteúdos de matrizes, determinantes e sistemas lineares com interpretações geométricas de resultados algébricos tais como a resolução de sistemas 2x2 e 3x3, mostrar a aplicação das matrizes inversas na criptografia e, finalmente, mostrar como os determinantes podem ser aplicados no cálculo de áreas e volumes.

O público alvo do presente trabalho são alunos e professores, por isso tivemos o cuidado de, antes de mostrar as respectivas aplicações dos conteúdos, mostrar toda a formalização teórica dos mesmos.

A escolha do tema dessa dissertação decorre de suas inúmeras aplicações, principalmente no que diz respeito a resolução de problemas, e de sua vasta interpretação geométrica tanto em 2D quanto em 3D.

Este trabalho inicia-se com um breve histórico sobre o surgimento das matrizes. No primeiro capítulo são apresentadas as matrizes especiais, suas propriedades, operações, e métodos para os cálculos relativos à esse conteúdo. No segundo capítulo são apresentadas as operações elementares, já no terceiro capítulo apresentados os sistemas lineares, alguns métodos de resolução e sua interpretação geométrica; no capítulo seguinte apresentamos os determinantes, mostrando uma conexão com os sistemas lineares. Aqui já ocorre uma diferença básica no ensino desse conteúdo no ensino médio, pois em geral sistemas lineares são mostrados após os determinantes, que por sua vez são mostrados apenas como um número associado a uma matriz.

O último capítulo trabalha com aplicações dos conteúdos na física, química, engenharia e na própria matemática.

Capítulo 1

MATRIZES

Apresentamos neste capítulo as principais definições e resultados sobre matrizes, que serão necessárias para a compreensão dos próximos capítulos.

1.1 Aspectos Históricos

Arthur Cayley (1821-1895) foi um dos pioneiros no estudo das matrizes e, divulgou esse nome e passou a demonstrar sua aplicação (CAYLEY, 1850, pag 363-370). As matrizes, inicialmente, eram aplicadas quase que exclusivamente na resolução de sistemas lineares e apenas há pouco mais de 150 anos tiveram sua importância detectada. No entanto, o primeiro uso implícito da noção de matriz se deve a Joseph Louis Lagrange (1736-1813), em 1790. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que as chamava de “tabelas”. O nome “matriz” só veio com James Joseph Sylvester (1814-1897), em 1850. Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes.

Somente com Cayley elas passaram a ter vida própria. Em seu artigo (CAYLEY, 1858, pag 17-37), Cayley fez questão de salientar que, embora pela lógica a ideia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o inverso: de fato, os determinantes já eram usados há bastante tempo na resolução de sistemas lineares. No que se refere às matrizes, Cayley introduziu-as para tornar mais simples a notação de uma transformação linear. As definições apresentadas por Cayley para o termo matriz, nos trabalhos acima mencionados, podem ser vistas nos seguintes extratos:

> *O termo matriz pode ser usado num sentido mais geral, mas no presente trabalho estou considerando apenas matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz é para ser entendido como uma matriz quadrada; neste sentido, um conjunto de quantidades na forma de um quadrado, por exemplo*

$$\begin{matrix} (a, & b, & c) \\ \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

É chamado de matriz. A noção de matriz surge normalmente como sendo a abreviação de um conjunto de sistemas lineares, como abaixo

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz \\ Y &= a'x + b'y + c'z \\ Z &= a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

Pode ser representada por

$$(X, Y, Z) = (a, \quad b, \quad c)(x, y, z)$$
$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

(CAYLEY, 1858: 17)

Então, em lugar de

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad \text{usava} \qquad (x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(x, y)$$

Ao observar o efeito de duas transformações sucessivas Cayley concluiu que chegaria à definição de produto de matrizes. Na sequência, chegou a ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (no caso, a matriz identidade). Três anos depois, em um outro artigo, é que Cayley introduziu os conceitos de adição de matrizes e de multiplicação de matrizes por escalares, dando ênfase inclusive para as propriedades algébricas dessas operações.

Ao desenvolver tanto a teoria das matrizes, como outros assuntos, a maior preocupação de Cayley era com a forma e a estrutura em álgebra. O século XX se encarregaria de encontrar inúmeras aplicações para suas matrizes (ver em [1]).

1.2 Definição

Informalmente uma ***matriz*** é um conjunto de números reais (ou complexos) ordenados em linhas e colunas. Assim, uma matriz, que vamos denotar por uma letra maiúscula de nosso alfabeto, pode ser interpretada como uma tabela retangular de números reais (ou complexos) cujos elementos são dispostos em linhas e colunas. Podemos distribuir os elementos da matriz usando chaves, parênteses ou barras duplas. Por exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -9 \\ 25 & -16 \end{bmatrix}$ é uma matriz A do tipo 3 por 2 e indica-se A_{3x2}.

$B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$ é uma matriz B do tipo 2 por 3 e indica-se B_{2x3}.

$C = \begin{pmatrix} 53 & 96 & 37 \\ 47 & 87 & 41 \\ 60 & 92 & 36 \end{pmatrix}$ é uma matriz C do tipo 3 por 3 e indica-se C_{3x3}.

Rigorosamente falando, as tabelas acima não são matrizes, mas sim a ***representação de uma matriz.***

Matrizes são na verdade funções assim definidas:

Sejam $\Gamma_m = \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $\Gamma_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ subconjuntos de $\mathbb{N}$. Uma matriz sobre um corpo[1] F de ordem mxn é uma função

$$A : \Gamma_m \, x \, \Gamma_n \to F$$

tal que para cada par ordenado $(i, j) \in \Gamma_m \, x \, \Gamma_n$ está associada a um único escalar

$$a_{ij} = A(i, j) \in F$$

(LIMA, 2005, pag 17)

[1] ***Corpo:*** um corpo é um anel comutativo com unidade em que todo elemento diferente de 0 possui um elemento inverso com relação à multiplicação.

Exemplo:

Considere o conjunto $\Gamma_3 = \{1, 2, 3\}$. Seja matriz real dada por $A : \Gamma_3 \times \Gamma_3 \to \mathbb{R}$ dada por $a_{ij} = A(i, j) = \dfrac{1}{i + j - 1}$, que é denominada matriz de *Hilbert*[2] de ordem 3x3.

De acordo com definição de matriz, a partir da lei de formação, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

1.3 Representação genérica de uma matriz

Os números que aparecem na matriz são chamados de elementos ou termos da matriz. Em uma matriz qualquer ***M*** do tipo *m* por *n*, cada termo é indicado por a_{ij}, onde i e j são índices que indicam, respectivamente a linha e a coluna da matriz, tais que $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, com a convenção de que as linhas são numeradas de cima pra baixo

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}.$$

Um modo simplificado de fazer essa representação é:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}; \text{ sendo } m,n \in \mathbb{N}^*.$$

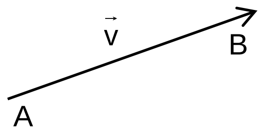
Por exemplo, na matriz anterior, a_{23} é o elemento da segunda linha com o a terceira coluna e a_{52} é o elemento da quinta linha com o da segunda coluna.

---

[2] ***David Hilbert*** *(Königsberg, 23 de janeiro de 1862 — Göttingen, 14 de fevereiro de 1943), foi um matemático alemão. É considerado um dos maiores matemáticos do século XX. Para mais informações sobre sua biografia, ver: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hilbert.html*

1.4 Vetor

Um *vetor* é uma matriz com uma única coluna e é denotado por $\vec{v}$. Os elementos de um vetor são muitas vezes identificados por um único índice, por exemplo, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Geometricamente, um vetor de *n* elementos está associado a um *ponto* no espaço *n*-dimensional



(ver em [1]).

1.5 Classificação das matrizes

Alguns tipos de matrizes apresentam uma maior utilidade, seja pelas suas propriedades ou pela frequência com que aparecem, por isso merecem um tratamento mais detalhado e uma notação mais específica. Todas elas são de grande importância e tem muitas aplicações.

1.5.1 Matriz linha

É toda matriz do tipo 1xn, ou seja, uma matriz que só possui uma linha, como no exemplo abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}_{1x4}$$

1.5.2 Matriz coluna

É toda matriz do tipo mx1, ou seja, uma matriz que só possui uma coluna, como no exemplo abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}_{3x1}$$

1.5.3 Matriz nula (0_{mxn})

É toda matriz que tem todos os seus elementos iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$$

1.5.4 Matriz quadrada

Uma matriz Q_{mxn} de elementos $\left(q_{ij}\right)_{mxn}$ será dita quadrada quando m = n, ou seja, quando o número de linhas for igual ao número de colunas. Neste caso, q_{11}, q_{22}, q_{33}, ..., q_{nn} é chamada diagonal principal e q_{ij}, com i + j = 1 + n, será chamada de diagonal secundária.

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{nxn}$$

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 0 & \pi & \sqrt{3} \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$$

Na matriz A acima, a diagonal principal é a diagonal formada pelos elementos 3 e – 1; a diagonal secundária da matriz B é formada pelos elementos 5, π e 2; $a_{11} = 3$ é elemento da diagonal principal da matriz A, pois i = j = 1; $b_{31} = 2$ é o elemento da diagonal secundária da matriz B, pois i + j = n + 1 = 3 + 1.

Denomina-se traço da matriz A, a soma $a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{nn}$ dos elementos da diagonal principal de A, o qual indicamos por tr (A). Ou seja:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Na matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, seu traço é tr (A) = 9. Já a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não possui traço, pois ela não é quadrada.

1.5.5 Matriz diagonal

Seja uma A uma matriz quadrada de ordem n. Definimos matriz diagonal $A = \left(a_{ij}\right)_{nxn}$ de elementos $\left[a_{ij}\right]$ toda matriz tal que $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$, ou seja, matriz diagonal é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ são dois exemplos de matriz diagonal.

1.5.6 Matriz identidade

A matriz diagonal de qualquer ordem na qual os elementos da sua diagonal principal são constituídos apenas pelo número 1 é chamada matriz identidade. Denota-se a matriz identidade de ordem n por I_n, ou simplesmente por I.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

São alguns exemplos de matriz identidade.

Também podemos definir matriz identidade como a ***função delta de Kronecker*** [3]

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}.$$

1.5.7 Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{mxn}$ é dita simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica. Observe que na matriz simétrica os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais.

1.5.8 Matriz Antissimétrica

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{mxn}$ é dita antissimétrica quando $a_{ij} = -a_{ji}$. Isso significa que os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são opostos. A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é antissimétrica.

[3] ***Leopold Kronecker*** *(Legnica, 7 de dezembro de 1823 — Berlim, 29 de dezembro de 1891), foi um matemático alemão. As suas principais contribuições para a matemática foram no campo da álgebra e continuidade de funções. Para mais informações sobre sua biografia, ver: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kronecker.html*

1.5.9 Matriz triangular superior

A matriz quadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$, que tem os elementos a_{ij} = 0, para i > j, é chamada de triangular superior, ou seja, quando todos elementos abaixo da diagonal principal são nulos. A matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal superior.

1.5.10 Matriz triangular Inferior

A matriz quadrada $A=\left[a_{ij}\right]_{mxn}$, que tem os elementos a_{ij} = 0, para i < j, é chamada de triangular superior, ou seja, quando todos elementos acima da diagonal principal são nulos. A matriz $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal inferior.

1.6 Operações com matrizes

1.6.1 Igualdade entre matrizes

Duas matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e $B=\left(B_{ij}\right)_{m\times n}$, de mesma ordem, são iguais quando todos os elementos correspondentes são iguais, isto é, a_{ij} = b_{ij}, para todo $i\in\{1, 2, 3, ..., m\}$ e todo $j\in\{1, 2, 3, ..., n\}$. Isto significa que para serem iguais, duas matrizes devem ser do mesmo tipo e apresentar todos os elementos correspondentes (elementos com índices iguais) iguais.

1.6.2 Adição de matrizes

A soma de duas matrizes só pode ocorrer se elas tiverem o mesmo número de linhas e colunas. Neste caso, a soma de duas matrizes A e B de ordem m x n é a matriz $C_{m\times n}$ tal que cada elemento de C é a soma dos elementos correspondentes de A e B, isto é, se $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$ e $C = \left[c_{ij}\right]$, então $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$.

Ou seja, dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, temos que matriz $C = A + B$ é dada por $C = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.6.2.1 Propriedades da adição de matrizes

A adição matricial é associativa, comutativa, tem elemento neutro e possui elemento oposto, ou seja, quaisquer que sejam as matrizes A, B e C do tipo m x n, temos que:

(i) A + (B + C) = (A + B) + C

(ii) A + B = B + A

(iii) $\exists$ M | A + M = A

(iv) $\forall A,\ \exists A' | A + A' = M$

Demonstrações

(i) Temos que A + (B + C) = $\left[a_{ij}\right] + \left(\left[b_{ij}\right] + \left[c_{ij}\right]\right)$ = $\left(\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]\right) + \left[c_{ij}\right]$ = (A + B) + C

(ii) Temos que A + B = $\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]$ = $\left[b_{ij}\right]$ + $\left[a_{ij}\right]$= B + A.

(iii) Fazendo A + M = A, temos: $a_{ij} + m_{ij} = a_{ij}$, ou seja, $m_{ij} = 0$. Ou seja, o elemento neutro da adição de matrizes é a matriz nula do tipo m x n.

(iv) Fazendo A' + A = M, temos: $a_{ij} + a'_{ij} = m_{ij}$. Como $m_{ij} = 0$, temos que $a'_{ij} = 0$. Ou seja, o elemento simétrico da adição de matrizes é a matriz oposta do tipo m x n.

Podemos fazer a diferença entre as matrizes **A** e **B** como sendo a soma de **A** com **– B**, ou seja, **A – B = A + (– B)**, onde **– B** é a matriz que se obtém trocando os sinais dos elementos da matriz B. A matriz **– B** também é chamada de ***matriz oposta*** da matriz **B**.

Por exemplo, dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, para obtermos a matriz **A – B**, primeiro encontramos a matriz **– B** = $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Vem:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 0-2 \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

1.6.3 Multiplicação de um número real por uma matriz

Dado um número real k e uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$, chama-se produto k.A à matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{mxn}$ tal que $b_{ij} = k.a_{ij}$ para todo i e todo j. Portanto, para multiplicar um número por uma matriz, basta multiplicar todos os elementos dessa matriz por esse número. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $3A = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

1.6.3.1 Propriedades do produto de um número real por uma matriz

Sejam A e B matrizes quaisquer do tipo m x n e a e b números reais quaisquer. Temos:

(i) a.(b.A) = (a.b).A

(ii) a.(A + B) = a.A + a.B

(iii) (a + b).A = a.A + b.A

(iv) 1.A = A

Demonstrações

Se a ou b são nulos, todas as propriedades são verdadeiras. Para a e b não nulos, temos:

(i) $a.(b.A) = a.\left(b.\left[a_{ij}\right]\right) = a.b.\left[a_{ij}\right] = (a.b).\left[a_{ij}\right] = (a.b).A$

(ii) $a.(A+B) = a.\left(\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right]\right) = a.\left[a_{ij}\right] + a.\left[b_{ij}\right] = a.A + a.B$

(iii) $(a+b).A = (a+b).\left[a_{ij}\right] = a.\left[a_{ij}\right] + b.\left[a_{ij}\right] = a.A + b.A$

(iv) $1.A = 1.\left[a_{ij}\right] = \left[a_{ij}\right] = A$

Podemos observar que o conjunto das matrizes de ordem nxn, munida das propriedades em 1.6.2.1, com as propriedades do produto escalar definem um ***Corpo***.

1.6.4 Produto de matrizes

Se $A = \left[a_{ij}\right]$ é uma matriz mxp e $B = \left[b_{ij}\right]$ é uma matriz pxn, então o produto de A por B, denotado por AB, é a matriz $C = \left[c_{ij}\right]$ de ordem mxn definida por:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m \ \text{ e } \ 1 \leq j \leq n).$$

A igualdade acima diz que o elemento da linha i e coluna j da matriz produto C é o produto escalar da linha i de A pela coluna j de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \boxed{\vdots} & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{in} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Note que para encontrarmos o elemento c_{ij} da matriz C = AB, temos que multiplicar, ordenadamente, os elementos da linha i de A com os elementos da coluna j de B.

$$c_{ij} = \begin{matrix} a_{i1}.b_{1j} \\ a_{i2}.b_{2j} \\ \vdots \\ a_{ip}.b_{pj} \end{matrix}$$

Desta última igualdade, podemos concluir que só é possível efetuar o produto de A por B quando o número de linhas de B é exatamente igual ao número de colunas de A, como indicado abaixo.

$$A_{mxp}.B_{pxn} = C_{mxn}$$

Sendo assim, o produto

- $A_{3x4}.B_{4x5}$ existe, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e a matriz C resultante desse produto é a matriz C_{3x5}.
- $A_{3x2}.B_{3x2}$ não existe. Veja que o fato de duas matrizes serem de mesma ordem não garante que o produto exista.
- $A_{5x3}.B_{3x2}$ existe, porém $B_{3x2}.A_{5x3}$ não existe, ou seja, o produto entre duas matrizes não é comutativo.

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$, temos que

$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, ou seja, $AB = \begin{bmatrix} 2.5 + 3.1 + 1.2 & 2.1 + 3.2 + 1.3 \\ 4.5 + 0.1 + 2.2 & 4.1 + 0.2 + 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 11 \\ 24 & 16 \end{bmatrix}_{2x2}$.

1.6.4.1 Propriedades do produto de matrizes

Sendo A, B e C matrizes com tamanhos (ordens) apropriados(as), então:

(i) Associativa: (AB)C = A(BC).

(ii) Distributividade à direita em relação à adição: (A + B)C = AC + BC.

(iii) Distributividade à esquerda em relação à adição: C(A + B) = CA + CB.

(iv) (kA)B = A(kB) = k(AB)

Demonstrações

(i) Sejam as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$, $B=\left(b_{jk}\right)_{nxp}$ e $C=\left(c_{k\ell}\right)_{pxr}$. Fazendo $D=AB=\left(d_{ik}\right)_{mxp}$, $E=(AB)C=\left(e_{i\ell}\right)_{mxr}$ e $F=BC=\left(f_{j\ell}\right)_{nxr}$, temos:

$$e_{i\ell}=\sum_{k=1}^{p}d_{ik}.c_{k\ell}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.b_{jk}\right).c_{k\ell}=\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.b_{jk}.c_{k\ell}\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.\left(\sum_{k=1}^{p}b_{jk}.c_{k\ell}\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.f_{j\ell}\ .$$

Então, (AB)C = A(BC).

(ii) Sejam as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{mxn}$ e $C=\left(c_{jk}\right)_{nxp}$. Fazendo $D=(A+B)C=\left(d_{ik}\right)_{mxp}$, temos:

$$d_{ik}=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}+b_{ij}\right).c_{jk}=\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}.c_{jk}+b_{ij}.c_{jk}\right)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.c_{jk}+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}.c_{jk}\ .$$

Então, (A+ B)C = AC + BC.

(iii) Sejam as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)_{mxn}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{mxn}$ e $C=\left(c_{ki}\right)_{pxm}$. Fazendo $D=C(A+B)=\left(d_{kj}\right)_{pxn}$, temos:

$$d_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}.(a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (c_{ki}.a_{ij} + c_{ki}.b_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ki}.a_{ij} + \sum_{ji=1}^{n} c_{ki}.b_{ij} \ .$$

Então, C(A+ B) = CA + CB.

(iv) Quaisquer que sejam o número k e as matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{jk})_{nxp}$, fazendo $C = kA = (c_{ij})_{mxn}$, $D = kB = (d_{jk})_{nxp}$ e $E = AB = (e_{ik})_{mxp}$, temos:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}.b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (k.a_{ij}).b_{jk} = k.\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} \quad e \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k.b_{jk}) = k.\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} \ .$$

Ou seja, (kA)B = A(kB) = k(AB).

É importante observar também que para duas matrizes quaisquer A e B é falso que AB = BA necessariamente. Também a lei do cancelamento não é válida, ou seja, AB = 0 não implica necessariamente que A = 0 ou B = 0 e AB = AC não acarreta necessariamente que B = C.

1.7 Matriz transposta

Chama-se transposta de $A = [a_{ij}]_{mxn}$ a matriz $A^t = [a'_{ji}]_{nxm}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i e para todo j, ou seja, a transposta de A é a matriz obtida de A, trocando-se “ordenadamente” suas linhas por colunas (ou, suas colunas por suas linhas). Por exemplo, Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ então a sua transposta é $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Da definição **1.4.8** de matriz simétrica, podemos concluir que toda matriz que é igual a sua transposta é uma matriz simétrica, ou seja, uma matriz é dita simétrica quando $A = A^t$. Da mesma forma, podemos dizer que uma matriz será antissimétrica quando $A = -A^t$.

1.7.1 Propriedades da matriz transposta

Quaisquer que sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{jk})_{nxp}$, temos:

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$

(ii) $(A^t)^t = A$

(iii) $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

(iv) $(AB)^t = B^t A^t$

Demonstrações

(i) Fazendo $(A^t)^t = (a''_{ij})_{mxn}$, temos então $a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$, para todos i, j.

(ii) Fazendo $A + B = C = (c_{ij})_{mxn}$ e $(A + B)^t = C^t = (c'_{ji})_{nxm}$, temos: $c'_{ji} = c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji}$, para todos i, j.

(iii) Fazendo $(kA)^t = (a''_{ji})_{nxm}$, temos então $a'_{ji} = ka_{ij} = ka'_{ji}$, para todos i, j.

(iv) Fazendo $AB = C = (c_{ik})_{mxp}$ e $(AB)^t = C^t = (c'_{ki})_{pxm}$, temos então $c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj}.a'_{ji}$.

Capítulo 2

TRANSFORMAÇÃO DE MATRIZES

O método de eliminação em sistemas de equações lineares consiste em efetuar repetidamente transformações elementares sobre um sistema de equações lineares, de modo a ir obtendo sistemas equivalentes em certo sentido, até reduzir o sistema original a um sistema de fácil resolução. Esse método é essencialmente devido a Gauss[4] e foi aperfeiçoado por Camille Jordan[5] (França, 1838 - 1922) e, por este motivo, é chamado de eliminação de Gauss-Jordan. (Hefez, 2011, p.31)

2.1 Operações elementares sobre linhas

Denomina-se operações elementares sobre linhas de uma matriz aos procedimentos descritos a seguir:

(i) Permutação de linhas;

(ii) Multiplicação de todos elementos de uma linha por um escalar não-nulo;

(iii) Substituição dos elementos de uma linha pela soma dos mesmos com os elementos correspondentes de outra linha previamente multiplicados por um escalar não-nulo.

Se A á uma matriz mxn, cujas linhas são $L_1, L_2, ..., L_m$, indica-se as operações acima com os seguintes símbolos:

1 - $L_S \leftrightarrow L_R$, que significa permutar as linhas r e s.

[4] ***Johann Carl Friedrich Gauss*** *(Braunschweig, 30 de abril de 1777 — Göttingen, 23 de fevereiro de 1855), foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. Alguns o referem como princeps mathematicorum (em latim: "o príncipe da matemática" ou "o mais notável dos matemáticos"). Para mais informações sobre sua biografia, ver: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Gauss.html*

[5] ***Camille Marie Ennemond Jordan*** *(Lyon, 5 de janeiro de 1838 — Paris, 22 de janeiro de 1922) foi um matemático francês. É conhecido pelos seus trabalhos em teoria dos grupos e análise. Para mais informações sobre sua biografia, ver: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Jordan.html*

2 - $L_R \to k.L_R$, significa que a r-ésima linha foi substituída por ela própria multiplicada pela constante real não nula k.

3 - $L_R \to L_R + k.L_S$, ou seja, a r-ésima linha foi substituída por ela mais k vezes a s-ésima linha.

Sejam A e B matrizes de ordem mxn, diz-se que matriz A é equivalente por linhas à matriz B, e representa-se por $A \sim B$, se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas.

Assim, temos que, dadas $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $A \sim B$, pois B pode ser obtida a partir de A com a operação $L_2 \leftrightarrow L_3$, que significa a permuta entre as linhas 2 e 3.

2.1.1 Propriedades das operações elementares sobre linhas

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz possuem as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva.

Demonstrações

(i) reflexiva: Basta multiplicar qualquer linha da matriz por um escalar igual a 1.

(ii) Cada operação elementar ***e*** tem uma operação elementar inversa ***e*** $^{-1}$ do mesmo tipo que desfaz o que a anterior fez. Aplicando certas operações e_1, ... , e_k na matriz A chegamos a matriz B, então aplicando-se as operações inversas e_k^{-1}, ..., e_1^{-1} à matriz B chegamos à matriz A.

(iii) Se, aplicando operações elementares e_1, ..., e_k, chegamos de A em B e aplicando as operações e_{k+1},..., e_ℓ chegamos de B em C, então aplicando-se as operações e_1, . . . , e_ℓ chegamos de A em C.

Sejam $A,B \in M_{mxn}$. Diz-se que B é linha equivalente a matriz A, quando B pode ser obtida através de uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas de A.

Note que se A é equivalente por linhas a uma matriz B, então B é equivalente por linhas à matriz A, já que toda transformação elementar sobre linhas é reversível.

2.2 Transformações Geométricas

As transformações são operações feitas nos objetos existentes, no plano bidimensional nesse caso, de forma que eles sejam modificados. Existem diversos tipos de operações, mas veremos apenas as transformações de translação, escala e rotação.

Animações, por exemplo, são produzidas pelo movimento da câmera ou dos objetos presentes na cena. Mudanças em orientação, tamanho e formato estão ligadas às transformações geométricas. Estas aplicações são aplicadas à cena para alterar a geometria dos objetos que compõem a cena sem fazer alterações topológicas. Uma transformação geométrica é uma aplicação bijectiva (ponto por ponto), entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de forma que, a partir de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual ou semelhante (Wikipedia, 2007).

Formalmente, uma transformação de um conjunto não vazio U em um conjunto não vazio V é uma correspondência T que, a cada elemento x de U, associa um único elemento y = T(x) de V: denota-se F: U $\rightarrow$ V. O conjunto de elementos y para o qual existe um x tal que T(x) = y chama-se imagem de T. O conjunto U chama-se domínio e o conjunto V chama-se contradomínio de T. Aqui trataremos de transformações (ou operações) em que U = V = R^2. Falaremos primeiramente sobre as transformações de translação, escala e rotação.

2.2.1 Translação.

Segundo os dicionários da língua portuguesa, o termo transladar significa deslocar, mudar de lugar. Seja um objeto geométrico representados por um conjunto de pontos P_i pertencentes ao R^2. Para isso, adicionamos quantidades inteiras às suas coordenadas. Chamaremos estas quantidades inteiras de d_x e d_y. Assim, seja um ponto P(x, y) sobre o qual será efetuada uma operação de translação e seja P' as

coordenadas do ponto após a translação. Podemos definir a função T como sendo $T(P) = T(x_p, y_p) = (x_p + d_x, y_p + d_y)$. Em forma matricial, temos que:

$$P' = P + T, \text{ com } T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Escala.

Para fazer um objeto parecer maior ou menor, ou seja, aumentar ou diminuir seu tamanho, em outras palavras, mudar sua escala. Para isso, multiplicamos cada ponto P_i do objeto em questão por um fator de mudança de escala na horizontal (s_x) e um fator de mudança de escala na vertical (s_y).Assim, seja um ponto P(x, y) sobre o qual será efetuada uma operação de translação e seja P' as coordenadas do ponto após a translação.

Podemos definir a função T como sendo $T(P) = T(x_p, y_p) = (x_p.s_x\ ,\ y_p.s_y\ )$. Em forma matricial, temos que:

$$P' = S.P, \text{ onde } S = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Rotação.

Para rotacionar um objeto de um certo ângulo θ com relação à origem. Assim, o ponto $T(x_p, y_p)$ é tal que:

$x_p = r.\cos\phi$;

$y_p = r.\sin\phi$;

E o ponto P'(x_p', y_p') é:

$x_p' = r.\cos(\phi+\theta) = r*\cos(\phi).\cos(\theta) - r.\sin(\phi).\sin(\theta)$

$y_p' = r.\sin(\phi+\theta) = r.\sin(\phi).\cos(\theta) + r.\sin(q).\cos(\phi)$

Podemos definir a função T como sendo T(P) = T(x_p, y_p) = ($x_p.\cos\theta - y_p \text{sen}\,\theta$, $x_p.\text{sen}\,\theta - y_p\cos\theta$). Em forma matricial, temos que:

$$P' = R.P, \text{ onde } R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2.3 Matriz linha reduzida à forma escada.

Uma matriz mxn está na forma escalonada se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de uma linha tem todos os seus outros elementos iguais a 0.

(ii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(iii) Se L_1, L_2, ... ,L_r são linhas não-nulas de M, e se o primeiro elemento não-nulo da linha L_i ocorre na coluna k_i então $k_1 < k_2 < ... < k_r$, ou seja, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não-nulo de uma linha, aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver. Essa condição impõe a forma escalonada da matriz.

Exemplos de matrizes escalonadas

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 3 & 1 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos de matrizes não escalonadas

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.1 Pivô de uma linha

Quando uma matriz está em forma de escalonada, ao primeiro elemento não nulo de cada linha chama-se pivô.

Tomando como exemplo a matriz A do exemplo anterior, temos que os ***pivôs*** são $a_{11} = -3$, $a_{22} = 4$ e $a_{33} = 1$.

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observações:

(i) numa linha nula não há nenhum pivô.

(ii) em cada coluna há no máximo um pivô.

Note que na matriz $C=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 & 3 & 1 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a linha 5 não tem pivô.

2.3.2 Algoritmo para escalonamento de matrizes (Método da eliminação de Gauss)

Passo 1: Seja k_1 a primeira coluna, da esquerda para a direita, da matriz dada com algum elemento não nulo. Troque as linhas entre si de modo que esse elemento não nulo apareça na primeira linha (**pivô)**, isto é, de modo que na nova matriz $a_{1k_1} \neq 0$.

Passo 2: Fixando a linha a, anule os elementos abaixo do pivô, ou seja, para cada i > 1, realize a transformação $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}} L_1$.

Repita os Passos 1 e 2 na matriz assim obtida, ignorando a primeira linha. Novamente, repita os Passos 1 e 2 nessa nova matriz, ignorando as duas primeiras linhas etc., até alcançar a última linha não nula.

Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Para que ela esteja na forma escalonada, devemos ter os elementos em destaque nulos.

Observe que primeiro elemento da primeira coluna (pivô) não é nulo, então podemos começar a aplicar as operações elementares, $L_3 \to L_3 - L_1$, $L_2 \to L_2 - 2L_1$, $L_3 \to L_3 - 3L_2$, obtendo assim, respectivamente, as matrizes equivalentes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz A pode ser escrita na forma escalonada como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Matriz na forma escalonada canônica (ou reduzida)

Se uma matriz está na **forma escalonada** e ainda satisfaz as seguintes características adicionais:

- O pivô de cada linha não-nula é 1.
- Cada pivô 1 é o único elemento não nulo de sua coluna.

Então essa matriz será chamada de **Matriz escalonada canônica ou matriz escalonada reduzida ou ainda matriz linha-reduzida.**

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Toda matriz $A \in M_{mxn}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida escalonada.

Dada uma matriz A_{mxn}, seja B_{mxn} a matriz linha reduzida escalonada linha equivalente a A. Chama-se posto (ou característica) de Ao número de linhas não-nulas da matriz B e é denotado P(A).

Chamamos de nulidade (ou grau de liberdade) de uma matriz A o número N(A) = [n – P(A)], onde n é o número de colunas da matriz A.

2.4 Matrizes inversíveis (ou invertíveis)

Dizemos que uma matriz quadrada A de ordem n é invertível, se existir uma matriz B, de mesma ordem, tal que $AB = BA = I_n$. Representaremos a matriz inversa B por A^{-1}, assim, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Se a matriz A não for invertível, dizemos que ela é uma matriz singular.

2.4.1 Teorema da unicidade da matriz inversa

Se A é invertível, então B é a única matriz tal que $AB = BA = I_n$.

Demonstração

Suponhamos que exista uma outra matriz $C \neq B$ tal que $AC = CA = I_n$, então temos que $C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$ □ .

Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ é invertível e sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, pois $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.4.2 Propriedades das matrizes invertíveis

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. então:

(i) Se A é invertível, então A^{-1} também é e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Se A e B são invertíveis, então AB também é e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) Se A é invertível, então A^t também é e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Demonstrações

(i) É imediata a demonstração, pois $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

(ii) Para que a matriz $B^{-1}A^{-1}$ seja a matriz inversa da matriz AB, devemos ter $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ e $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. De fato, como A e B são invertíveis, então $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ e $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$. Vem:

- $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}B = B^{-1}\underbrace{I_nB}_{B} = B^{-1}B = I_n$.

- $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A\underbrace{BB^{-1}}_{I_n}A^{-1} = \underbrace{AI_n}_{A^{-1}}A^{-1} = A^{-1}A = I_n$

(iii) Para que a matriz $(A^{-1})^t$ seja a matriz inversa da matriz A^t, devemos ter $A^t(A^{-1})^t = I_n$ e $(A^{-1})^t A^t = I_n$. De fato.

- $A^t(A^{-1})^t = [A^{-1}A]^t = I^t = I_n$
- $(A^{-1})^t A^t = [AA^{-1}]^t = I^t = I_n$

2.4.3 Inversão de matrizes usando operações elementares

Um algoritmo simples, porém trabalhoso se a dimensão da matriz é grande, para obtenção da inversa de uma matriz consiste em justapor à matriz **A** uma matriz identidade de mesma ordem. Opera-se simultaneamente sobre as linhas das duas matrizes até que no lugar da matriz **A** apareça uma matriz identidade, ou seja, uma matriz quadrada Ade ordem n é invertível se a matriz [A | I_n] puder ser transformada, através de operações elementares em uma matriz da forma [I_n | B]. Portanto devemos realizar uma sucessão de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada [A | I_n] contendo a matriz original e a matriz identidade até que a matriz original se transforme na matriz identidade. Se isso acontecer, então B = A^{-1}.

Exemplo 1

Calcule, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Primeiro construímos a matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Agora apliquemos as operações elementares sobre as linhas como se segue abaixo:

$$L_3 \to L_3 + L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3 \to L_3 - 2.L_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_3 \to \frac{1}{4}.L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$L_2 \to L_2 - 2.L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$L_1 \to L_1 - 3.L_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Como conseguimos, por meio de operações elementares, transformar a matriz $[A \mid I_n]$ na matriz $[I_n \mid B]$, e lembrando que $B = A^{-1}$, então:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2

Calcule a inversa, se existir, da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Primeiro construímos a matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Em seguida aplicamos as operações $L_2 \to L_2 - 4.L_1$ e $L_3 \to L_3 - 7.L_1$, obtendo a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Por fim aplicamos a operação $L_3 \to L_3 - 2.L_1$, obtendo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Como não foi possível, através de operações elementares, transformar a matriz [A | I_n] em [I_n | B], então a matriz A não é invertível.

Capítulo 3

SISTEMAS LINEARES

3.1 Equações lineares

Dado $n \in \mathbb{N}$, uma equação linear de n incógnitas x_1, x_2, x_3, ..., x_n é uma equação da forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$$

Com α_i e β números reais dados, i = 1, 2, 3, ..., n. Chama-se de solução da equação à n-upla de números reais indicados por (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) tal que

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_n x_n = \beta$$

3.2 Sistemas lineares

Um sistema linear de m equações e n incógnitas (que chamaremos simplesmente um sistema m x n é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente, isto é, um sistema da forma:

$$S = \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \ldots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Com $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n)$. Uma solução do sistema S é uma n-upla (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) de números reais que é uma solução de cada uma das equações do sistema.

Por exemplo, no sistema linear

$$\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ 5x+y+3z=6 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Observe que a tripla ordenada (1, 1, 0) é solução do sistema, pois satisfaz todas as equações. Veja:

$$\begin{cases} 2.1+1+2.0=3 \\ 5.1+1+3.0=6 \\ 1+1+0=2 \end{cases}$$

Lembrando da definição de produto de matrizes, um sistema linear pode ser escrito na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}+\ldots+\alpha_{2n} \\ \alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}+\ldots+\alpha_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}+\alpha_{m2}+\alpha_{m3}+\ldots+\alpha_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

Então o sistema $\begin{cases} 2x+y+2z=3 \\ 5x+y+3z=6 \\ x+y+z=2 \end{cases}$, na forma matricial, fica $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3.3 Sistemas equivalentes

Dado um sistema S, chamamos de sistemas equivalentes à todos os sistemas obtidos a partir de S, realizando as operações elementares sobre as linhas, como visto em 2.1. Ou seja:

(i) Permuta da i-ésima linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$) das equações de S, obtendo assim o sistema S_1, onde toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

(ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Indicado por S_1 o sistema assim obtido, onde toda solução de S_1 é solução de S e vice-versa.

Devido a (i) podemos supor que a equação multiplicada seja a primeira, pois as demais equações de S e S_1 coincidem. Para comprovar, basta verificar que, sendo $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ solução de S, temos:

$$\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \alpha_{13}b_3 + ... + \alpha_{1n}b_n = \beta_1$$

Que multiplicando por λ, vem:

$$(\lambda\alpha_{11})b_1 + (\lambda\alpha_{12})b_2 + (\lambda\alpha_{13})b_3 + ... + (\lambda\alpha_{1n})b_n = \lambda\beta_1$$

O que mostra que $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ também é solução da primeira equação de S_1.

Por outro lado, se $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ é solução de S_1, então a igualdade $(\lambda\alpha_{11})b_1 + (\lambda\alpha_{12})b_2 + (\lambda\alpha_{13})b_3 + ... + (\lambda\alpha_{1n})b_n = \lambda\beta_1$ é verdadeira. Multiplicando a equação anterior por $\frac{1}{\lambda}$ obtemos $\alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \alpha_{13}b_3 + ... + \alpha_{1n}b_n = \beta_1$, logo $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ pertence ao conjunto solução de S.

(iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha somada com a j-ésima linha multiplicada por uma constante $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $(L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j)$. Dado o sistema S_1, ele admite as mesmas soluções de S ou não admite solução.

$$S_1 = \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (\alpha_{i1} + \lambda\alpha_{j1})x_1 + (\alpha_{i2} + \lambda\alpha_{j2})x_2 + (\alpha_{i3} + \lambda\alpha_{j3})x_3 + ... + (\alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn})x_n = \beta_i + \lambda\beta_j \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3 + ... + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}$$

Com efeito, se (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) satisfaz o sistema S, então satisfaz as equações de S_1 exceto a linha $L_i \leftrightarrow \lambda L_j$. Multiplicando a j-ésima linha de (S) por λ, vem:

$$(\lambda\alpha_{j1})b_1 + (\lambda\alpha_{j2})b_2 + (\lambda\alpha_{j3})b_3 + ... + (\alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn}) = \lambda\beta_j$$

Esta linha continua sendo solução de S, ao somar ela com a i-ésima linha, obtemos

$$(\alpha_{i1} + \lambda\alpha_{j1})b_1 + (\alpha_{i2} + \lambda\alpha_{j2})b_2 + (\alpha_{i3} + \lambda\alpha_{j3})b_3 + ... + (\alpha_{in} + \lambda\alpha_{jn})b_n = \beta_i + \lambda\beta_j$$

Que continua sendo solução de S, o que mostra que (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) também é solução de S_1.

Reciprocamente, se (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) for solução de S_1, então satisfaz todas as equações de S exceto a linha i-ésima. De modo análogo, multiplicando a j-ésima linha de S_1 por λ e subtraindo esta da linha $L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_j$, obtemos a linha i-ésima, logo (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) também satisfaz S.

Analogamente, se não existir uma n-upla que satisfaz o sistema S, também não vai existir uma n-upla que satisfaz S_1.

Note que somente os coeficientes do sistema são alterados através das operações elementares sobre as linhas; as variáveis permanecem inalteradas. Portanto, na hora de efetuar os cálculos, ao invés de considerar todo o sistema, podemos considerar apenas a matriz de coeficientes do sistema, chamada ***matriz aumentada***:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_m \end{array}\right].$$

Por exemplo, para o sistema $\begin{cases} x+3z=-8 \\ 2x-4y=-4 \\ 3x-2y-5z=26 \end{cases}$, a matriz de coeficientes do sistema

(ou matriz aumentada) é $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right)$.

3.4 Número de soluções de um sistema linear

Proposição: Se um sistema linear possui duas soluções distintas, então ele possui infinitas soluções.

Demonstração

Seja AX = B um sistema linear e suponha que X_1, X_2 são duas soluções distintas para este sistema. Afirmamos que

$$X_\lambda = (1-\lambda)X_1 + \lambda X_2$$

Também será uma solução para este sistema para qualquer valor real de λ. De fato,

$$\begin{aligned} AX_\lambda &= A\left[(1-\lambda)X_1 + \lambda X_2\right] \\ &= (1-\lambda)AX_1 + \lambda AX_2 \\ &= (1-\lambda)B + \lambda B \\ &= B \end{aligned}$$

Da proposição acima, podemos concluir que existem apenas três possibilidades para um sistema linear dado: ou ele não tem solução, ou ele tem uma única solução, ou ele tem infinitas soluções.

(i) Sistema *impossível* (S.I.)

Um sistema é impossível quando não existe n-upla (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) que satisfaça, simultaneamente, todas as equações.

(ii) Sistema *possível e determinado* (S.P.D.)

Um sistema é possível e determinado quando existe uma única n-upla $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ que satisfaz, simultaneamente, todas as equações.

(iii) Sistema *possível e indeterminado* (S.P.I.)

Um sistema é possível e indeterminado quando existem infinitas n-uplas $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ que satisfazem, simultaneamente, todas as equações.

3.5 Resolução de sistemas lineares

Um método para resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por um *sistema equivalente*, ou seja, aplicando as ***operações elementares*** sobre as linhas da matriz aumentada do sistema.

3.5.1 Sistemas escalonados

Consideremos o sistema linear abaixo de m equações com n incógnitas, onde em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo

$$S = \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \ldots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\ \;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \alpha_{m3}x_3 + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}.$$

Diremos que S está na forma escalonada, se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação, ou seja:

$$S = \begin{cases} \alpha_{1r_1}x_{r_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad \alpha_{2r_2}x_{r_2} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad \alpha_{kr_k}x_{r_k} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k \end{cases},$$

para $\alpha_{1r_1} \neq 0,\ \alpha_{2r_2} \neq 0,\ \alpha_{3r_3} \neq 0, \ldots, \alpha_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$.

Se tivermos $1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leq n$, dizemos que o sistema S está escalonado.

Exemplos de sistemas escalonados

$$S_1 = \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad\ \ x_2 - x_3 = 4 \\ \qquad\ \ 2x_3 = 5 \end{cases} \qquad\qquad S_3 = \begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ \qquad\qquad\quad\ 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

3.5.2 Resolução de um sistema na forma escalonada

Há dois tipos de sistemas escalonados a considerar

(i) O número de equações é igual ao número de incógnitas. Nesse caso o sistema será da forma:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases}$$

Para $\alpha_{ii} \neq 0,\ \forall i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Nesse caso, para resolver o sistema, partimos da última equação para obter x_n, em seguida substituímos esse valor na equação anterior e encontramos x_{n-1}. Repetindo esse procedimento vamos obtendo $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_3, x_2, x_1$.

Como nesse tipo de sistema sempre conseguiremos encontram uma ***única*** n-upla (b_1, b_2, b_3, ..., b_n) que satisfaça, simultaneamente, todas as equações do sistema, ele é chamado de ***sistema possível e determinado***.

Exemplo

Seja o sistema na forma escalonada $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ y-z=3 \\ z=2 \end{cases}$

Substituindo o valor de z = 2 na 2ª equação obtemos y = 5 e substituindo os valores z = 2 e y = 5 na 1ª equação obtemos x = – 8. Portando a tripla (–8, 5, 2) é a solução do sistema.

(ii) O número de equações é menor que o número de incógnitas. Nesse caso o sistema será da forma:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \quad (j \geq 2) \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \alpha_{mn}x_n + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_n \quad (r > j) \end{cases}$$

Com m < n.

Para resolvermos tal sistema, podemos tomar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas *variáveis livres)* e transpô-las para o segundo membro. O novo sistema assim obtido pode ser visto como sendo um sistema contendo apenas as incógnitas do primeiro membro das equações. Nesse caso, atribuindo valores a cada uma das incógnitas do 2º membro, teremos um sistema do 1º tipo. Resolvendo-o, obteremos uma solução do sistema. Se atribuirmos outros valores às incógnitas do 2º membro, teremos outro sistema; resolvendo-o, obteremos outra solução do sistema. Como esse procedimento, de atribuir valores às incógnitas do 2° membro pode se estender indefinidamente, segue-se que podemos extrair do sistema original, um número infinito de soluções. Um tal sistema é dito, ***possível e indeterminado***. Chama-se *grau de indeterminação* o número de variáveis livres do sistema, isto é, n - m.

Exemplo

Seja o sistema na forma escalonada $\begin{cases} 2x - y + z - t = 2 \\ \qquad\quad 2z + 3t = 1 \end{cases}$. Como temos 4 incógnitas e apenas 2 equações, então o número de variáveis livres do sistema é 4 – 2 = 2. Sejam $y = \alpha$ e $t = \beta$ as variáveis livres, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Substituindo nas equações, fica:

$$\begin{cases} 2z + 3\beta = 1 \Rightarrow 2z = 1 - 3\beta \Rightarrow z = \dfrac{1-3\beta}{2} \\ 2x - \alpha + \dfrac{1-3\beta}{2} - \beta = 2 \Rightarrow 4x = 2\alpha - 1 + 3\beta + 2\beta + 4 \Rightarrow 4x = 2\alpha + 5\beta + 3 \Rightarrow x = \dfrac{2\alpha + 5\beta + 3}{4} \end{cases}$$

Logo, a solução do sistema é $\left(\dfrac{2\alpha + 5\beta + 3}{4}, \alpha, \dfrac{1-3\beta}{2}, \beta \right)$.

3.6 Escalonamento de sistemas lineares (método da eliminação de Gauss e método da eliminação de Gauss-Jordan)

O método de eliminação de Gauss é um dos métodos mais usados para resolver o sistema linear. Além de resolver o sistemas lineares, a eliminação de Gauss é usado frequentemente para diversos outros cálculos tais como determinantes, inverter matrizes, base do núcleo e da imagem de uma transformação linear, base do espaço gerado, etc.

O procedimento consiste em converter a matriz aumentada do sistema dado, numa matriz escalonada, aplicando uma sequência de operações elementares sobre as linhas ($L_S \leftrightarrow L_R$, $L_R \to k.L_R$ e/ou $L_R \to L_R + k.L_S$)

Todo de escalonamento é efetuado em etapas, escolhendo as linhas de cima para baixo. Na primeira etapa, escolhe a linha 1, na segunda etapa escolhe a linha 2 e assim por diante. A linha escolhida em cada etapa é denominada de linha pivô (chave). Após escolher a linha de pivô, um elemento especial desta linha denominado de elemento de pivô será escolhida.

Quando a linha de pivô for a primeira linha, inicialmente o primeiro elemento será considerado elemento de pivô. Quando a linha de pivô for outras linhas, o elemento de uma coluna a direita do pivô anterior (da linha imediatamente acima) é denominado de elemento de pivô. Quando o elemento de pivô e todos os elementos da linha de baixo nesta coluna forem nulas, o pivô será deslocado para a direita. Mais precisamente, um elemento da linha de pivô é denominado de elemento pivô se todas elementos das linhas dele e de baixo dele nas colunas a esquerda são nulas, mas existe pelo menos um elemento não nulo na linha ou abaixo dela na coluna dele.

O objetivo de cada etapa é anular os elementos abaixo ***(Gauss)*** ou acima e abaixo ***(Gauss-Jordan)*** do elemento pivô através dos operadores elementares usando a linha desejada e a linha pivô.

Exemplo

$$S_1 = \begin{cases} x + 3z = -8 \\ 2x - 4y = -4 \\ 3x - 2y - 5z = 26 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema é

$$[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{array}\right].$$

Vamos aplicar as operações elementares sobre as linhas. Como se segue.

(i) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 2 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -5 & 26 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & -2 & -14 & 50 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & -2 & -14 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -\frac{1}{4}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & -2 & -14 & 50 \end{pmatrix}$$

(iii) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & -2 & -14 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 44 \end{pmatrix}$$

Vemos que a matriz aumentada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 44 \end{pmatrix}$ representa o sistema na forma escalonada $\begin{cases} x + \quad 3z = -8 \\ \quad y + z = -3 \\ \quad -11z = 44 \end{cases}$, que podemos resolver por retro substituição a partir de z. De fato, sendo z = – 4, temos que y = 3 e x = 4, portanto a terna $(4, 3, -4)$ é solução do sistema.

Observe que até aqui zeramos os elementos abaixo dos pivôs ***(Gauss)***, porém para zerarmos os elementos abaixo e acima dos pivôs ***(Gauss-Jordan)***, devemos aplicar mais algumas operações sobre as linhas.

(iv) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 44 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -\frac{1}{11}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

(v) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - \frac{3}{2}L_3]{L_1 \to L_1 - 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Perceba agora que o sistema continua escalonado, porém os elementos acima dos pivôs também são nulos. Portanto a matriz aumentada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ representa o sistema $\begin{cases} x \qquad\qquad = 4 \\ \qquad y \qquad = 3 \\ \qquad\qquad z = -4 \end{cases}$, ou simplesmente $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = -4 \end{cases}$.

A grande vantagem do método de ***Gauss-Jordan*** é que não há a necessidade da retro substituição para encontrar os valores das incógnitas.

3.7 Sistemas lineares homogêneos

Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele em que o termo independente de todas as equações é igual a zero.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\ldots+\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}+\alpha_{22}+\alpha_{23}+\ldots+\alpha_{2n} \\ \alpha_{31}+\alpha_{32}+\alpha_{33}+\ldots+\alpha_{3n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \alpha_{m1}+\alpha_{m2}+\alpha_{m3}+\ldots+\alpha_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Um sistema homogêneo sempre admite, pelo menos, a n-upla (0, 0, 0, ..., 0) como solução, chamada de solução trivial ou imprópria. Caso admita, além da solução trivial, alguma outra solução, então esse sistema terá infinitas soluções, chamadas de soluções próprias.

Exemplos

Seja o sistema linear homogêneo $\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ 2x+y+4z=0 \\ x-y+2z-4t=0 \end{cases}$, sua matriz aumentada é dada por $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$. Aplicando as operações elementares, vem:

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \to \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to \frac{-1}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(v) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - \frac{2}{3}L_3]{L_1 \to L_1 + \frac{1}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A última matriz equivale ao sistema $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. Nesse sistema temos, para cada valor atribuído a *z*, a n-upla $(-2z, 0, z, 0)$ que é solução do sistema, portanto o sistema é indeterminado.

3.8 Interpretação geométrica das soluções dos sistemas lineares 2x2 e 3x3.

Geometricamente, uma equação linear em duas variáveis representa uma reta (HOWARD, 2005, pag. 10) e em três variáveis representa um plano (HOWARD, 2005, pag. 240), portanto, resolver um sistema 2x2 ou 3x3 significa interpretar as posições relativas entre duas retas ou entre três planos.

3.8.1 Posições relativas entre duas retas

Dadas duas retas de equações $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, temos três possibilidades. A saber:

(i) Retas paralelas

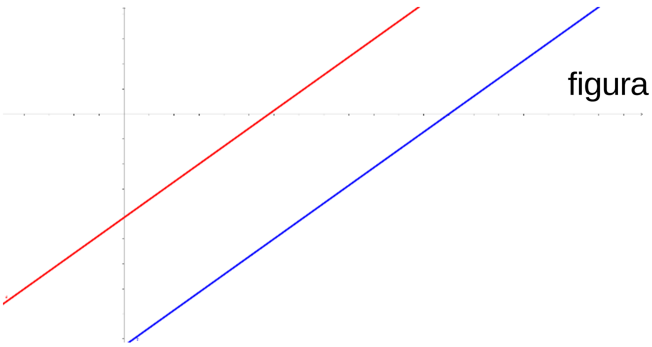


figura 3.1

fonte: elaborado pelo autor

Se duas retas são paralelas e distintas, então o sistema formado por suas equações não apresenta solução, ou seja, o sistema é ***impossível.***

(ii) Retas concorrentes

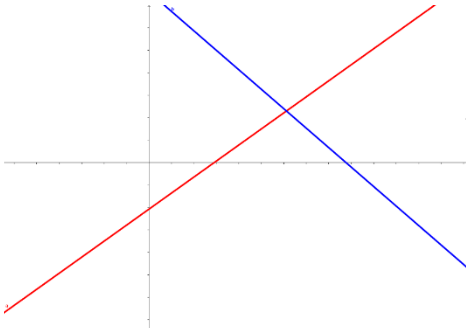


figura 3.2

fonte : elaborado pelo autor

Se duas retas são concorrentes, então o sistema formado por suas equações é um sistema ***possível e determinado*** e sua solução representa o ponto de interseção entre as duas retas.

(iii) Retas coincidentes

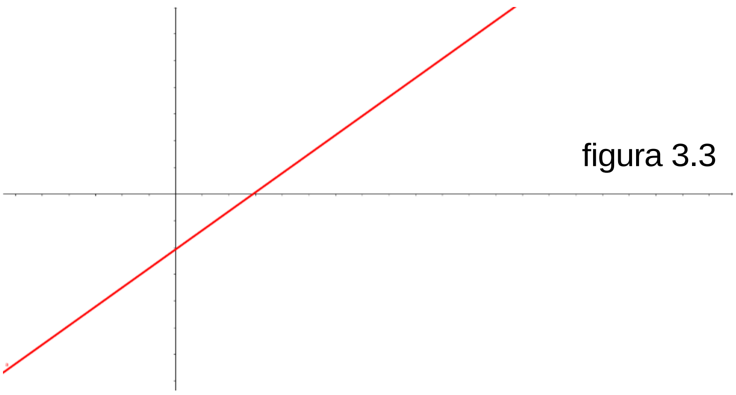


figura 3.3

fonte : elaborado pelo autor

Se duas retas são coincidentes, então o sistema formado por suas equações é um sistema ***possível e indeterminado,*** ou seja, as retas tem infinitos pontos em comum.

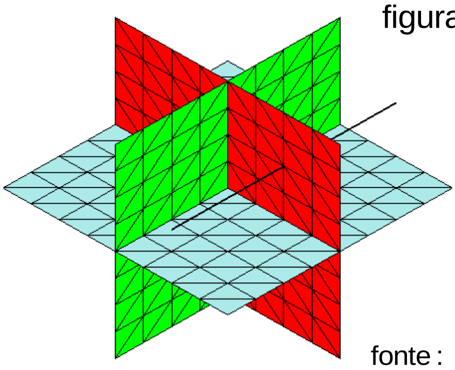
3.8.2 Posições relativas entre dois planos

Dados três planos de equações $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ e $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$, temos 8 possibilidades. A saber:

(i) Sistema possível e determinando **(S.P.D.)**

Nesse caso existe uma única possibilidade: os três planos se interceptam num único ponto.

figura 3.4

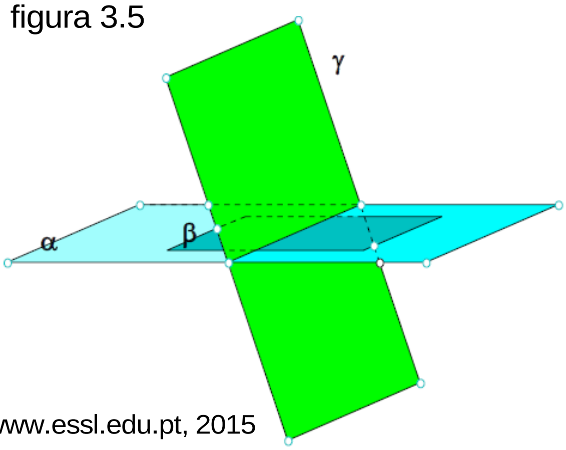


fonte : www.mat.ufmg.br, 2015

(ii) Sistema possível e indeterminando **(S.P.I.)**

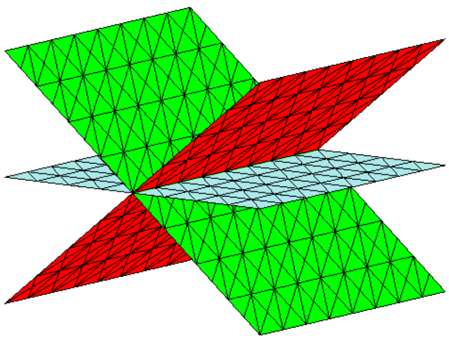
Para este caso, o sistema precisa ter solução, ou seja, geometricamente falando precisamos de uma reta comum aos três planos ou mesmo de um plano em comum.

figura 3.5



fonte : www.essl.edu.pt, 2015

figura 3.6

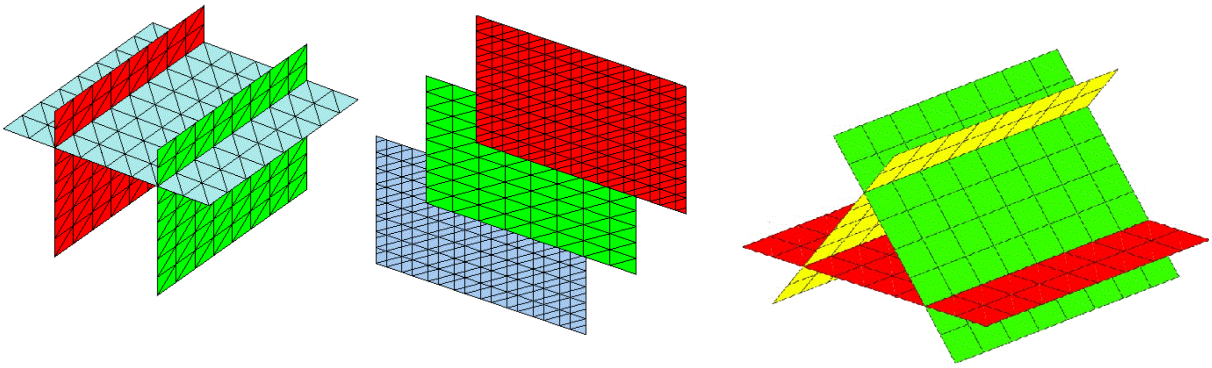


fonte : www.mat.ufmg.br, 2015

(iii) Sistema impossível **(S.I.)**

Se um sistema é impossível, então não existe elemento geométrico (ponto, reta ou plano) que seja comum aos três planos.

figura 3.7



fonte : www.mat.ufmg.br, 2015

Capítulo 4

DETERMINANTES

4.1 Aspectos Históricos

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação — que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a.C.

A teoria dos determinantes foi desenvolvida simultaneamente na Alemanha e no Japão. Foi desenvolvida por dois matemáticos, Leibniz (1646-1716) e Seki Shinsuke Kowa (1642-1708), ao solucionarem problemas de eliminações (escalonamento) necessárias à resolução de um sistema de m equações lineares e n incógnitas (BOYER, 1988). (ver em [1]).

4.2 O Determinante de ordem 2

O determinante tem origem na resolução de sistemas de equações lineares. Tomemos como exemplo o seguinte sistema de equações nas variáveis x e y.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, eliminamos as variáveis x ou y. Multiplicando cada equação acima, primeiramente, por b_2 e b_1, respectivamente, e depois, por a_2 e a_1, respectivamente, chegamos ao sistema

$$\begin{cases}(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1\\(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2\end{cases}$$

Em ambas as equações, temos o mesmo fator $a_1b_2 - a_2b_1$. Se este fator é diferente de zero, então o sistema tem uma única solução dada por:

$$\begin{cases}x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\\[2ex] y = \dfrac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\end{cases}$$

Podemos ver que x e y satisfazem o sistema. Para isso, basta substituir no sistema. O denominador comum, $a_1b_2 - a_2b_1$, é denominado de o ***determinante do sistema***, e é denotado por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Podemos também escrever os numeradores na forma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \ \textbf{e} \ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Portanto, podemos escrever o sistema sob a forma de quociente de determinantes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

4.3 Permutações

Chamamos permutação de um conjunto finito a toda função bijetora desse conjunto em si mesmo. Assim, dada a função p: {1, 2, 3} → {1, 2, 3}, temos que p_1 = {(1,2); (2,3); (3,1)} é uma permutação de {1, 2, 3}.

Indicamos $p_u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ para uma permutação de {1, 2, 3, ..., n}. Sendo assim, a permutação p_1 = {(1,2); (2,3); (3,1)}, pode ser indicada por p_1 = (2, 3, 1). É fácil ver que as permutações possíveis em {1, 2, 3, ..., n} são n!.

Se p_u e p_w são permutações de, então $p_u \circ p_w$ também é uma permutação. A aplicação idêntica (indicada por id) é obviamente uma permutação. Além disso, a inversa de uma permutação também é uma permutação (CALLIOLI, 1990, p. 197)

4.3.1.1 Inversão

Seja um conjunto finito A com n elementos, do qual escolheremos uma das n! permutações p de A e a chamaremos de permutação fundamental p_f. Diremos que ocorre uma inversão em uma permutação p de A em relação à permutação fundamental p_f se, e somente se, a posição de um elemento de A que aparece em p for diferente da que o mesmo aparece em p_f.

4.3.1.2 Permutação par e ímpar

Dado um conjunto finito A e uma permutação fundamental p_f desse conjunto, dizemos que uma permutação p é par, ou de classe par, se, e somente se, o número de inversões de p em relação à p_f é par. A mesma é ímpar, ou de classe ímpar, se o número de inversões p em relação à p_f é ímpar (CALLIOLI, 1990, p. 198).

4.4 Definição de determinantes

Seja uma matriz A, n x n, sobre um corpo C. Definimos determinante de A e indicamos det(A) ou |A|, ao elemento de C que satisfaz a equação:

$$\det(A) = \sum_{p_i} (-1)^{\sigma} . a_{1j_1} . a_{2j_2} . (...) . a_{nj_n}$$

Onde σ é o número de inversões da permutação $p_i = (j_1, j_2, j_3, ..., j_n)$ em relação à permutação (1, 2, 3, ..., n) escolhida como fundamental e o intervalo p_1 à p_n indica que a soma é sobre todas as n! permutações p_u de {1, 2, 3, ..., n} (ANTON, 2005, p.172).

4.5 O Determinante de ordem 3

Usando a definição calcularemos também o det(A) para $A = (a_{ij})_{3x3}$. Inicialmente escreveremos todas as permutações (j_1, j_2, j_3) de {1, 2, 3} e o número de inversões que cada permutação apresenta em relação à fundamental (1, 2, 3).

$p_1 = (j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 3)$ ni = 0

$p_2 = (j_1, j_2, j_3) = (1, 3, 2)$ ni = 1

$p_3 = (j_1, j_2, j_3) = (2, 1, 3)$ ni = 1

$p_4 = (j_1, j_2, j_3) = (2, 3, 1)$ ni = 2

$p_5 = (j_1, j_2, j_3) = (3, 1, 2)$ ni = 2

$p_6 = (j_1, j_2, j_3) = (3, 2, 1)$ ni = 3

Que aplicando a definição, $\det(A) = \sum_{p_1}^{p_n} (-1)^{ni} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$, vem:

$$\det(A) = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$$

Que colocando os sinais de + e – agrupados, fica:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

4.5.1 A regra de Sarrus

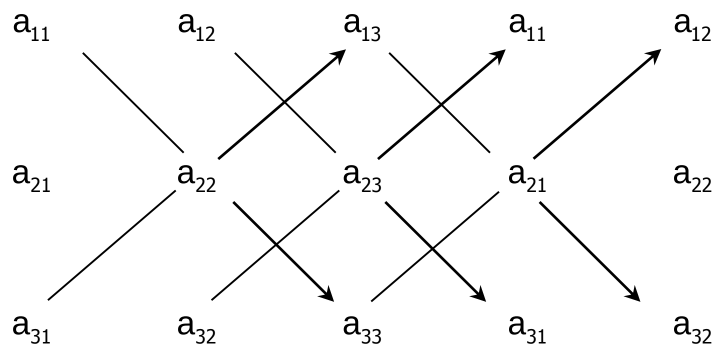
Pierre Frédéric Sarrus (1798 - 1861) foi um matemático francês conhecido por desenvolver uma regra para o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 3.

Sarrus foi professor na Universidade de Estrasburgo, na França (1826-1856) e membro da Académie des Sciences, em Paris (1842). Ele é autor de vários tratados, entre eles também descobriu uma regra mnemônica para solucionar o determinante de uma matriz 3x3, chamada Regra de Sarrus, o qual desempenha um método fácil para a resolução de uma matriz 3x3.

Sabemos, da definição de determinantes, que para uma matriz de ordem 3, o determinante é dado pela expressão

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Que pode ser resumido pelo seguinte quadro



Que exprime a seguinte regra:

(i) repita as duas primeiras colunas à direita da matriz, preservando a ordem;

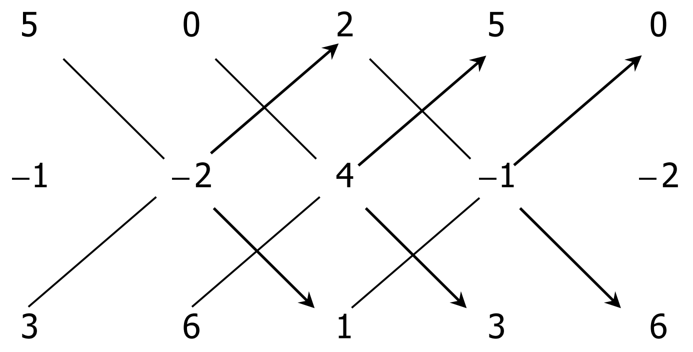
(ii) multiplique diagonalmente os fatores descendentes, conservando o mesmo sinal do produto;

(iii) multiplique diagonalmente os fatores ascendentes, trocando o sinal do produto.

Esse algoritmo é conhecido, e ensinado, no ensino médio como a regra de Sarrus.

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, usando o quadro acima, fica:



det (A) = 5.(–2).1 + 0.4.3 + 2.(–1).6 – 3.(–2).2 – 6.4.5 – 1.(–1).0

det (A) = – 10 + 0 – 12 + 12 – 120 – 0 = – 130

O cálculo de determinantes de ordem n ≥ 4 pela definição é muito trabalhoso e a regra de Sarrus só se aplica a determinantes de 3ª ordem. É por este motivo que vamos tratar de um método que nos fornecerá um meio muito mais prático para o cálculo de determinantes.

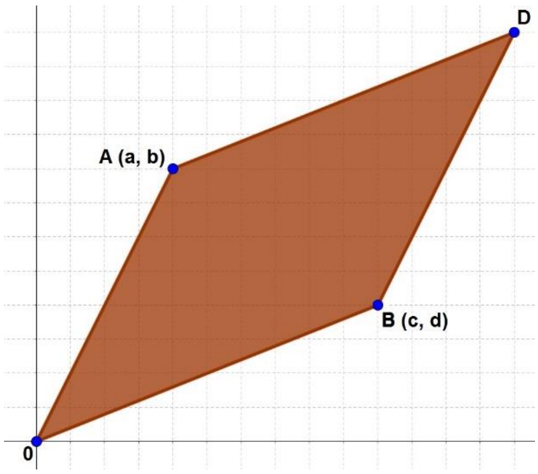
Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n onde n ≥ 2, definimos o menor complementar D_{ij} do elemento a_{ij} como sendo o determinante da matriz obtida de A retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna. Sendo assim, dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, temos que D_{32} é o determinante obtida da matriz suprimindo a terceira linha e a segunda coluna, ou seja, $D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6.1 - 5.0 = 6$.

Chamamos de cofator a_{ij}, e denotamos por A_{ij}, ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, onde D_{ij} é o menor complementar do elemento a_{ij}.

4.6 Interpretação geométrica do determinante de segunda ordem

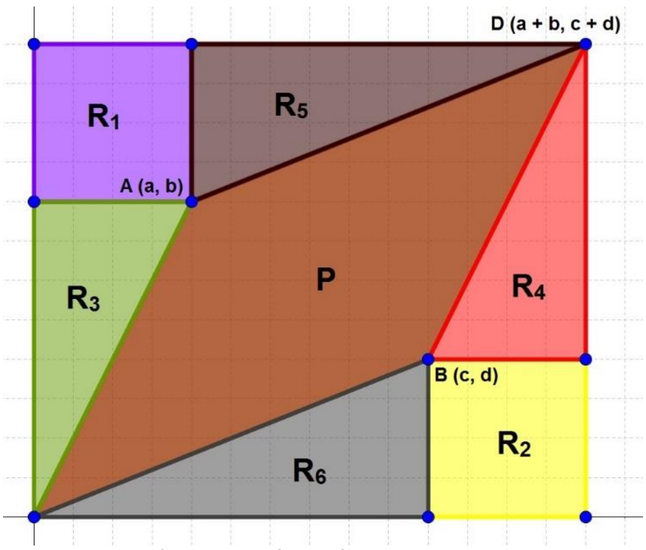
Dada uma matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ não nula, então as linhas dessa matriz definem as coordenadas dos pontos A = (a, b) e B = (c, d) do plano cartesiano.

Considere a origem O = (0, 0) e seja D um ponto tal que $\overline{OB} \| \overline{AC}$ e $\overline{OA} \| \overline{BC}$. Então os segmentos $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$ determinam um paralelogramo tal que as coordenadas do ponto D são (a + c, b + d).



fonte: elaborado pelo autor

Sejam as regiões R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 e P conforme figura a seguir



fonte: elaborado pelo autor

Temos que a reunião das regiões R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 e P formam um retângulo de dimensões (a + c) e (b + d). Seja S_P a área do paralelogramo P; S_1 e S_2 as áreas, respectivamente, dos retângulos R_1 e R_2; S_3, S_4, S_5 e S_6 as áreas, respectivamente, dos triângulos retângulos R_3, R_4, R_5 e R_6 de modo que $S_P + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = (a+c).(b+d)$. Temos que $S_1 = S_2 = b.c$, $S_3 = S_4 = \frac{c.d}{2}$ e $S_5 = S_6 = \frac{a.b}{2}$. Substituindo, vem

$$S_P + b.c + b.c + \frac{c.d}{2} + \frac{c.d}{2} + \frac{a.b}{2} + \frac{a.b}{2} = (a+c).(b+d).$$

Que resolvendo, fica $S_P + 2bc + cd + ab = ab + ad + bc + cd$, ou então $S_P = ad - bc$, que é o mesmo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ Ou seja, o valor de um determinante de segunda é numericamente igual a área de um paralelogramo.

4.7 Vetores

Para a compreensão do significado geométrico do determinante de terceira ordem, é necessário que se defina vetores no espaço e que se utilize alguns de seus teoremas, pois segundo (STEINBRUCH, 1987, p. 82):

> *Geometricamente, o produto misto $\vec{u} \times (\vec{v} \, x \, \vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.*

Estas informações não são apresentadas nos livros didáticos atuais, pois o assunto “vetores” não faz parte do programa de matemática do Ensino Médio, portanto o aluno não tem o conhecimento da associação dos determinantes de terceira ordem a volumes, somente aceitando tal fórmula proposta como se fosse um postulado.

4.7.1 Definição de vetores

Vetor no plano ($\mathbb{R}^2$) é um par ordenado (x, y) de números reais representado por $\vec{v} = (x, y)$, que é chamada expressão analítica de $\vec{v}$.

De modo análogo, um vetor no espaço ($\mathbb{R}^3$) é uma terna (x, y, z) de números reais representado por $\vec{v} = (x, y, z)$.

Obs: Também podemos representar um vetor na forma $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (ver em [3]).

4.7.2 Módulo de um vetor

Dado um vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, seu módulo (ou norma) é o número real não negativo representado por $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Caso o vetor esteja no $\mathbb{R}^2$, sua norma se reduz para $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.7.3 Produto escalar

Chama-se produto escalar entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (e representa-se por $\vec{u} \cdot \vec{v}$), ao número real que é calculado pela soma dos produtos das componentes correspondentes dos vetores. Ou seja, se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ e se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

4.7.4 Ângulo entre vetores

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles ($0 \le \theta \le 180º$), então $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$. Note que podemos escrever $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$, ou seja, o produto escalar também pode definido como sendo o produto dos módulos dos vetores pelo cosseno do ângulo formado por eles. (ver: [3])

4.7.5 Produto vetorial

Dados dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, chama-se produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, nesta ordem, ao vetor representado por $\vec{u} \times \vec{v}$ e calculado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

O produto vetorial não está definido no $\mathbb{R}^2$.

4.7.5.1 Propriedades do produto vetorial

a) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

c) $\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

d) $\alpha\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \left(\alpha\vec{u}\right) \times \vec{v} + \vec{u} \times \left(\alpha\vec{v}\right)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$

e) $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou os dois são colineares.

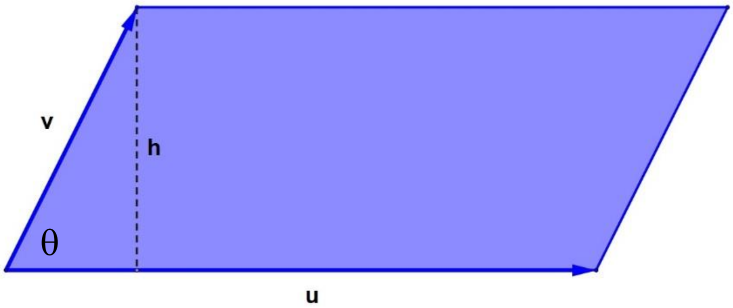
f) $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela "regra da mão direita" ou pela "regra do saca rolhas".

g) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| . |\vec{v}| .\text{sen}\theta$, sendo $0 \leq \theta \leq 180º$ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(ver: [3])

4.7.5.2 Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

O módulo do produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a área do paralelogramo cujos lados são determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



fonte: elaborado pelo autor

Demonstração

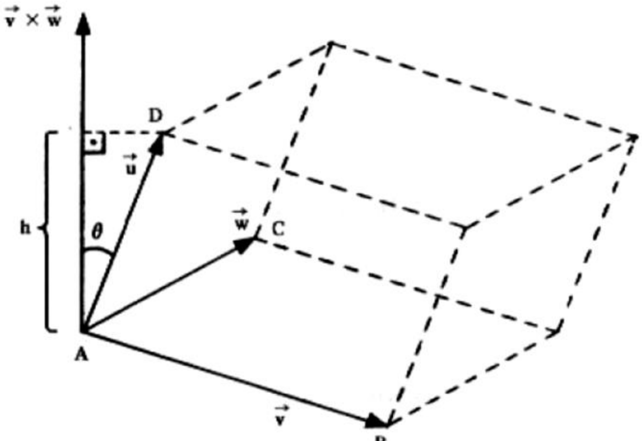
Sabemos da geometria plana que a área de um paralelogramo é o produto do comprimento da base pelo comprimento da altura. Seja $|\vec{u}|$ o comprimento da base e $h = |\vec{v}|.\text{sen}\theta$ a sua altura, então a área do paralelogramo pode ser calculada por $A = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\text{sen}\theta$. Porém, sabemos de 4.7.3.1 (g) que $|\vec{u}|.|\vec{v}|.\text{sen}\theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$, ou seja, $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

4.7.6 Produto misto

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, chama-se produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, nesta ordem, ao número real representado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ou $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ e calculado por $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Note que o produto misto é o produto escalar pelo produto vetorial. O produto misto também não está definido no $\mathbb{R}^2$.

4.7.6.1 Interpretação geométrica do produto misto

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores. Sabe-se que o volume de um paralelepípedo é V = (área da base)x(altura).



fonte : STEINBRUCH, 1987, p. 82

De 4.7.3.2, temos que a área da base é dada por $S_b = |\vec{v} \times \vec{w}|$ e de 4.7.3.1 (f) sabemos que $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal ao plano que contém $\vec{v}$ e $\vec{w}$, portanto a altura pode ser dada por $h = |\vec{u}|.|\cos\theta|$. (o módulo em $\cos\theta$ se faz necessário, pois θ pode ser obtuso). Temos então que o volume pode ser dado por $V = |\vec{u}|.|\vec{v} \times \vec{w}|.|\cos\theta|$. Seja $\vec{a} = \vec{v} \times \vec{w}$, temos então $V = |\vec{u}|.|\vec{a}|.|\cos\theta|$, que por 4.7.4, fica $V = |\vec{u}.\vec{a}|$, ou seja,

$$V = |\vec{u}.\left(\vec{v} \times \vec{w}\right)|$$

Portanto, ao se calcular um determinante, estamos calculando, em módulo, o volume de um paralelepípedo.

4.8 O teorema de Laplace

O determinante de uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)$ quadrada de ordem n ≥ 2, é a soma dos produtos, efetuados termo a termo, dos elementos de uma fila qualquer pelos seus respectivos cofatores, ou seja:

$$\det\left(A\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} \text{ ou } \det\left(A\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.A_{ij}$$

Exemplo.

Calcular o determinante de $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$. Começamos escolhendo ou uma linha ou uma coluna. Tomando a primeira linha como referência, temos:

- $D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48$, portanto $A_{11} = \left(-1\right)^{1+1}.48 = 48$.
- $D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$, portanto $A_{12} = \left(-1\right)^{1+2}.0 = 0$.
- $D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -60$, portanto $A_{13} = \left(-1\right)^{1+3}.\left(-60\right) = -60$.
- $D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, portanto $A_{14} = \left(-1\right)^{1+4}.0 = 0$.

Portanto

$$\det\left(A\right) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = 2.48 + 3.0 + 1.\left(-60\right) + 0.0 = 36$$

4.9 Regra de Cramer

A regra de Cramer consiste num método para se resolver um sistema linear.

Seja o sistema: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + .. + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$

Vamos determinar a matriz A dos coeficientes das incógnitas, chamada de matriz incompleta do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ ... & & & \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vamos determinar agora a matriz A_{x_1}, que se obtém a partir da matriz A, substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_1 pela coluna dos termos independentes.

$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ ... & & & \\ ... & & & \\ b_n & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer: $x_1 = \dfrac{\det A_{x_1}}{\det A}$

De maneira análoga podemos determinar os valores das demais incógnitas:

$$A_{x_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ ... & & & \\ ... & & & \\ a_{m1} & b_n & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\det A_{x_2}}{\det A}$$

$$A_{x_n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ ... & & & \\ ... & & & \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & b_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_n = \frac{\det A_{x_n}}{\det A}$$

Generalizando, num sistema linear o valor da incógnita x_1 é dado pela expressão:

$$x_i = \frac{det\ A_i}{det\ A}$$

Onde A é a matriz incompleta do sistema e A_i é a matriz obtida de A substituindo-se as colunas dos coeficientes de x_i pela coluna dos termos independentes.

Exemplos

(i) Resolver o sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$.

 # Resolução

Seja a matriz incompleta do sistema $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Temos que $\det A = 11$. Sejam as matrizes A_{x_1} e A_{x_2} que se obtém substituindo, respectivamente, as colunas x_1 e x_2 pelos termos independentes. Vem:

$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_{x_1} = 33, \text{ logo: } x = \frac{\det A_{x_1}}{\det A} = \frac{33}{11} = 3$$

$$A_{x_2} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_{x_2} = -11, \text{ logo: } y = \frac{\det A_{x_2}}{\det A} = \frac{-11}{11} = -1$$

Portanto, o conjunto verdade do sistema é o par $\{(3, -1)\}$.

(ii) Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$.

 # Resolução

Seja a matriz incompleta do sistema $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Temos que $\det A = 0$. Caso não haja ambiguidades, podemos chamar A_{x_1} simplesmente de A_x e A_{x_2} de A_y. Fica:

$$A_x = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_x = -7$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_y = 7$$

$x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{-7}{0}$ e $y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{7}{0}$. Logo, o sistema é impossível e seu conjunto verdade é o conjunto vazio.

(iii) Resolver o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$.

Resolução

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz incompleta, temos que det A = – 12

Sejam A_x, A_y e A_z as matrizes associadas as variáveis x, y e z que se obtém substituindo, respectivamente, as colunas x_1, x_2 e x_3 pelos termos independentes e sejam det A_x, det A_y e det A_z seus determinantes. Vem:

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_x = 0 + 10 - 10 - 4 + 0 - 20 = -24$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_y = 10 + 0 - 3 + 10 - 5 + 0 = 12$$

$$A_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_z = -4 + 20 + 0 + 0 - 10 - 6 = 0$$

Aplicando $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, temos:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{12}{-12} = -1$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{0}{-12} = 0$$

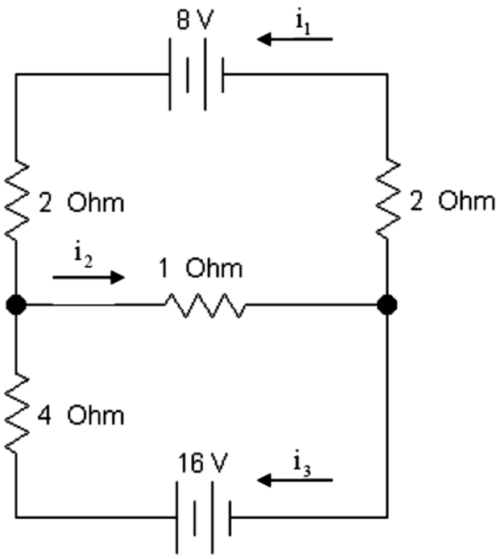
Portanto, o conjunto verdade do sistema é a terna $\{(2, -1, 0)\}$

Capítulo 5

APLICAÇÕES

5.1 Circuitos elétricos

Para tratar de circuitos elétricos faz-se necessário definir a Lei de Ohm, em que a força elétrica é o produto da resistência pela corrente elétrica, descrita pela equação $E = R \cdot i$ e as Leis de Kirchhoff em que tem-se a Lei dos Nós, onde a soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele, e a Lei das Malhas, onde a soma das quedas de tensão ao longo de qualquer circuito é igual à tensão total em torno do circuito (fornecida pelas baterias). Numericamente, pode-se analisar o caso abaixo onde deseja-se determinar as correntes do circuito elétrico.



fonte : www.abenge.org.br, 2015

No circuito com duas baterias e quatro resistores, tem-se as seguintes equações para os nós:

- $i_1 - i_2 + i_3 = 0$
- $4i_1 + i_2 = 8$
- $i_2 + 4i_3 = 16$

Assim, a solução do sistema linear $\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 4i_1 + i_2 = 8 \\ i_2 + 4i_3 = 16 \end{cases}$ determina cada uma das correntes.

Resolução

Seja $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right]$ a matriz aumentada do sistema, temos:

- Fazendo $L_2 = L_2 - 4L_1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right]$

- Trocando L_2 com L_3: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -4 & 8 \end{array}\right]$

- Fazendo $L_3 = L_3 - 5L_2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 5 & -4 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & -24 & -72 \end{array}\right]$

A última matriz nos mostra que $\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ \quad i_2 + 4i_3 = 16 \\ \quad -24i_3 = -72 \end{cases}$. Fazendo a retro substituição, temos que $i_1 = 1$; $i_2 = 4$ e $i_3 = 3$.

5.2 Balanceamento de equações químicas

Uma equação química balanceada é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagentes e produtos na reação e tem o mesmo número de átomos de cada tipo do lado esquerdo e direito. Mantêm reagentes à esquerda e produtos à direita. Tem-se que $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ é uma equação balanceada. Duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água. Ainda, $6H_2 + 3O_2 \rightarrow 6H_2O$ também é uma equação balanceada.

No caso abaixo, a combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Uma nova aplicação de sistemas lineares se dá quando quer-se encontrar uma equação química balanceada para a reação seguinte:

$$wNH_3 + xO_2 \rightarrow yN_2 + zH_2O$$

Temos as seguintes correspondências:

- $w = 2y$
- $3w = 2z$
- $2x = z$

Assim, a solução do sistema linear $\begin{cases} w - 2y = 0 \\ 3w - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ determina a quantidade de cada substância necessária para equilibrar a equação.

Note que podemos escrever o sistema acima na forma $\begin{cases} 0x - 2y + 0z + w = 0 \\ 0x + 0y - 2z + 3w = 0 \\ 2x + 0y - z + 0w = 0 \end{cases}$, Cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Como o sistema representa o balanceamento de uma equação química, então ele admite soluções próprias

Resolvendo o sistema, vem:

- Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_1$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

- Fazendo $L_3 \leftrightarrow L_2$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

- Fazendo $L_1 = \frac{1}{2}L_1$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

- Fazendo $L_2 = -\frac{1}{2}L_2$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

- Fazendo $L_3 = -\frac{1}{2}L_3$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 \end{array}\right]$.

- Fazendo $L_1 = L_1 + \frac{1}{2}L_3$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 \end{array}\right]$.

Como temos 3 equações e 4 incógnitas, então temos uma variável livre. Seja w essa variável. Isolando w, vem $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right]$. Portanto temos $x = \frac{3}{4}w$, $y = \frac{1}{2}w$ e $z = \frac{3}{2}w$, logo o conjunto verdade será $\left(\frac{3}{4}w, \frac{1}{2}w, \frac{3}{2}w, 1w\right)$. Como as quantidades são sempre números inteiros, podemos tomar w = 4k, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Fica $(3k, 2k, 6k, 4k)$

Isso significa que existem infinitas formas de se equilibrar a equação química.

5.3 Criptografia

Existem muitas técnicas para codificar e decodificar mensagens. Aqui descrevemos um método bastante simples que envolve apenas um par de matrizes inversas, *A e B=A*$^{-1}$, cujos elementos são todos *inteiros*.

Dada uma mensagem para ser codificada, o primeiro passo é convertê-la da forma alfabética para a forma numérica. Para isso usamos a seguinte correspondência entre letras e números.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	,	#
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Qualquer outra numeração dos 29 símbolos tipográficos também seria possível, mas o remetente e o destinatário teriam que combinar uma específica. Para maior clareza usamos o símbolo #, indicando um *espaço* entre as palavras (ou em outros lugares). Suponha que "O PLANO ESTÁ EM AÇÃO", é a mensagem a ser codificada e transmitida. Para convertê-la para forma numérica, usamos o pareamento exibido acima. Fica:

O	#	P	L	A	N	O	#	E	S	T	A	#	E	M	#	A	C	A	O
15	29	16	12	1	14	15	29	5	19	20	1	29	5	13	29	1	3	1	15

O próximo passo é definir a matriz que será usada para codificar e a sua inversa, que será usada para decodificar. Caso seja escolhida uma matriz 2x2 para a codificação, então teremos que arrumar a matriz formada pelos números associados às letras numa matriz do tipo 2xn. Caso a matriz codificadora seja uma 3x3 então arrumaremos a nossa matriz da forma 3xn e assim por diante.

Tomemos a matriz codificadora $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, então temos que arrumar a matriz formada pelos números associados às letras numa matriz da forma $P=\begin{bmatrix} 15 & 29 & 16 & 12 & 1 & 14 & 15 \\ 29 & 5 & 19 & 20 & 1 & 29 & 5 \\ 13 & 29 & 1 & 3 & 1 & 15 & 29 \end{bmatrix}$. Veja que o último elemento (a_{37}) não possuía letra associada, então preenchemos com o símbolo #, para não descaracterizar a mensagem.

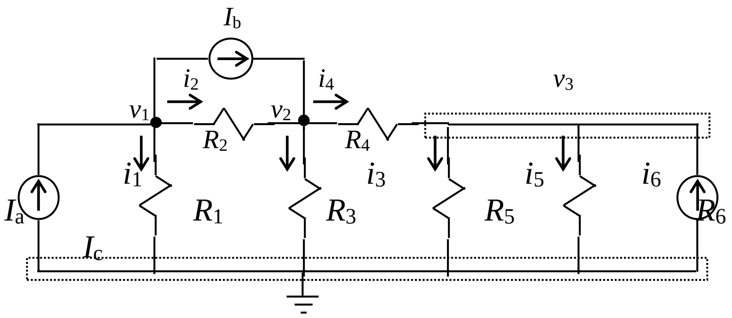
Sendo assim, a matriz codificada a ser enviada será a matriz **AP**.

Sabemos das operações entre matrizes que $\mathbf{A^{-1}AP = P}$, logo, para recuperar a matriz dos números associados às letras, basta multiplicar à esquerda a matriz codificada pela inversa da matriz codificadora, que obviamente é conhecida do receptor mensagem.

5.4 Análise Nodal

A análise nodal consiste em um método de análise de circuitos nos quais tensões são as incógnitas a serem determinadas. Desde que uma tensão é definida como existindo entre dois nós, é conveniente escolher um nó na rede para ser o “nó de referência” e então associar uma tensão ou um potencial como cada um dos outros nós. Frequentemente o nó de referência é escolhido como aquele onde está conectado o maior número de ramos, e chamado como terra. O nó de referência está, então, no potencial do terra ou no potencial zero e os outros nós podem ser considerados como um potencial acima de zero.

Como exemplo, será mostrado uma análise para o circuito abaixo:



$I_a = 7\text{A}$; $R_1 = \frac{1}{3}\Omega$;

$I_b = 5\text{A}$; $R_2 = 1\Omega$;

$I_c = 17\text{A}$; $R_3 = \frac{1}{3}\Omega$;

$R_4 = \frac{1}{2}\Omega$;

$R_5 = 1\Omega$;

nó 1: $I_a - i_1 - i_2 - I_b = 0$

nó 2: $I_b + i_2 - i_3 - i_4 = 0$ $\qquad R_6 = \frac{1}{4}\Omega$

nó 3: $i_4 - i_3 - i_6 + I_c = 0$

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = v_1 G_1 \qquad i_4 = \frac{v_2 - v_3}{R_4} = (v_2 - v_3)G_4$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_2} = (v_1 - v_2)G_2 \qquad i_5 = \frac{v_3}{R_5} = v_3 G_5$$

$$i_3 = \frac{v_2}{R_3} = v_2 G_3 \qquad i_6 = \frac{v_3}{R_6} = v_3 G_6$$

$$\begin{cases} I_a = v_1 G_1 + (v_1 - v_2)G_2 + I_b \\ I_b = v_2 G_3 + (v_2 - v_3)G_4 - (v_1 - v_2)G_2 \\ I_c = v_3 G_6 + v_3 G_5 - (v_2 - v_3)G_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_a - I_b = v_1(G_1 + G_2) - v_2 G_2 \\ I_b = -v_1 G_2 + v_2(G_3 + G_4 + G_2) - v_3 G_4 \\ I_c = -v_2 G_4 + v_3(G_6 + G_5 + G_4) \end{cases}$$

Aplicando a regra de Cramer, vem:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & -G_2 & 0 \\ -G_2 & (G_2 + G_3 + G_4) & -G_4 \\ 0 & -G_4 & (G_4 + G_5 + G_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad \text{Determinante de coef.: } \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145$$

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ 17 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{145}{145} \qquad v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{290}{145} \qquad v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 17 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{435}{145}$$

Logo, temos que $v_1 = 1V$; $v_2 = 2V$ e $v_3 = 3V$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tradicionalmente os livros didáticos focam na apresentação de definições, propriedades e algoritmos de resolução, onde os exercícios propostos tratam de casos numéricos ou de aplicações para os outros ramos da própria matemática.

Ao apresentar aplicações em outras áreas de conhecimento, pretendemos mostrar a importância desses conteúdos no ensino médio, bem como sua interdisciplinaridade. Acreditamos que ao mostrar tais aplicações, respondemos a famosa pergunta dos alunos: “pra que serve?”.

Uma outra lacuna que tentamos preencher é a dos determinantes. É muito comum nos atuais materiais didáticos do ensino médio a apresentação dos determinantes como sendo um número associado a uma matriz. Mostrando a visualização geométrica imaginamos dar um sentido mais aceitável e concreto ao leitor.

Acreditamos que se conseguirmos levar aos alunos um sentido e um objetivo ao que eles estudam, bem como mostrar aplicações, conseguiremos leva-los a construir e fixar melhor os conceitos aprendidos, conseguindo assim uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

[1] CALLIOLI, Carlos Alberto, DOMINGUES, Hygino H. COSTA, Roberto C. F. – Álgebra linear e Aplicações – Ed. Atual – 1990 – São Paulo – 6 Edição.

[2] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, H.G. Álgebra linear. 3a edição. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[3] STEINBRUCH, A., WINTERLE,P. Geometria Analítica. São Paulo: MAKRON Books do Brasil Editora Ldta, 1987.

[4] LIMA, E. L.; *Álgebra Linear*, 6ª Edição. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2003.

[5] ANTON, H.; *Álgebra Linear com Aplicações*. 8a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[6] HALLIDAY, D. , RESNICK, R., WALKER, J. Fundamentos de Física Vol. 4, 6ª edição, Editora LTC, 2002

[7] GOLDSTEIN, Hebert; Classical Mechanics - Second Edition; Addison-Wesley Publishing Company; 1922

[8] PERUZZO, F. M., CANTO, E. L. Química na abordagem do cotidiano. 4ª edição. São Paulo: Moderna, 2006.

[9] BOYER, Carl B. *História da matemática*. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

[10] ALEXANDER, Charles K; SADIKU, Matthew N. O.; Fundamentos de Circuitos Elétricos. 1ed. Rio de Janeiro: Bookman Companhia Editora, 2003.

[11] NILSSON, J. W.; Riedel, S. A. Circuitos Elétricos. ed. 6, p. 658, LTC, 2003.

[12] ROSEN, K. H., Elementary number theory and its applications, Addison-Wesley,1984.

[13] KOBLITZ, N. A course in number theory and criptography, Graduate Texts in Mathematics 97, Springer-Verlag, 1987.

[14] Orientações curriculares para o ensino médio; ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (volume 2)/ Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Brasília: 2006.

[15] Hefez A., Fernandes C. S. Introdução à álgebra linear. Profmat.2012.

[16] Iezzi G., Hassan S. Fundamentos de Matemática Elementar. 6 ed. São Paulo: Atual, 1993.

[17] Howard Anton and Chris Rorres, Elementary Linear Algebra with Applications (9th Edition), John Wiley & Sons, 2005.