Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA
Instituto de Ciências da Educação - ICED
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Andréa Feitosa Reis

A MATEMÁTICA NOS FORMATOS DE PAPEL

Santarém-PA
2015

Andréa Feitosa Reis

A MATEMÁTICA NOS FORMATOS DE PAPEL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática-Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz.

Santarém-PA
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado Biblioteca - SIBI/UFOPA

R375m Reis, Andréa Feitosa

A matemática nos formatos de papel / Andréa Feitosa Reis. - Santarém, 2015.

90 f.; il.

Orientador Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém, 2015.

1. Matemática- Estudo e ensino. I. Diniz, Hugo Alex Carneiro orient. II. Título.

CDU 23 ed. 510.7

Bibliotecário – Documentalista: Zélia Alves Gonçalves – CRB/2 821

Andréa Feitosa Reis

A MATEMÁTICA NOS FORMATOS DE PAPEL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação *Matemática em Rede Nacional* – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Instituto de Ciências da Educação, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz
Orientador – UFOPA

Prof. Dr. Sebastián Mancuso
Examinador Interno – UFOPA

Prof. MSc. José Augusto Nunes Fernandes
Examinador Externo– UFPA

Santarém (PA)
2015

Dedico este trabalho às minhas filhas: Ana Alice e Ariele. Estas criaturas são tão pequenas e tão lindas! Foram mandadas por Jeová, Deus, e me motivam a ser uma cidadã com princípios e com sabedoria.

Agradecimentos

A Jeová, Deus, por me permitir ser uma mulher do jeito que sou: saudável e com disposição de buscar conhecimentos que contribuam com meu crescimento intelectual e espiritual.

À SBM - Sociedade Brasileira de Matemática e à esta Universidade, por oportunizar um curso, nos moldes do PROFMAT, para atender a pessoas que não tem 100% de disponibilidade, mas que almejam buscar formação docente para aprimorar seus trabalhos em Sala de Aula;

Ao corpo docente do PROFMAT na UFOPA, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz, pelas orientações claras e competentes e pelo incentivo durante a elaboração deste trabalho;

Ao Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva, da UFPA, um grande mestre na arte de ensinar a Matemática. Principal responsável por despertar em mim o saber Matemático;

Aos meus pais, minhas irmãs e meu irmão, pelo amor, pelo incentivo, pelo apoio incondicional em cuidar de mim e das minhas filhas quando mais precisei;

Ao meu esposo, Alex, pelo grande apoio e por compreender minha vontade de estudar Matemática, esta ciência que me encanta a cada dia;

Aos meus colegas de classe pelo apoio e companheirismo. Especialmente à Aldete, à Melissa e ao Benildo, que foram parceiros nos momentos de dificuldades por quais passei no decorrer do curso;

À Aline e à Karoline, da Vila Arataú, duas meninas maravilhosas que se dedicaram a cuidar da minha casa e das minhas filhas durante minha ausência para cursar as disciplinas ou elaborar este trabalho; e às minhas cunhadas, Valdelina e Núbia, pelo incentivo e pela vivência;

Aos meus colegas de trabalho da Escola Cecília Merelles que compreenderam a ausência de minhas atividades laborais, aos alunos da turma do 9º ano A de 2015, que colaboraram com a aplicação das atividades na turma e à Professora Eliane de Paula Pinto, que me auxiliou com as fotos durante estas atividades;

"O tolo despreza a instrução de seu pai,
mas o que observa a repreensão
se haverá prudentemente."

(Bíblia Sagrada, Provérbios 15: 5.)

Resumo

Trata-se de um texto destinado a professores de Matemática da Educação Básica, que fornece propostas de contextualizar o ensino da Matemática, utilizando como instrumento principal a folha de papel, principalmente a folha de papel A4 (A quatro). Este trabalho contem referências e citações sobre as normas existentes hoje que padronizam as dimensões dos papéis utilizados em desenhos técnicos, na indústria gráfica e em outras situações. Descreve as características dos formatos das folhas de papéis das séries A, B e C, deduz as medidas destas folhas e aponta os conteúdos matemáticos envolvidos nestas séries de formatos, bem como sugere atividades que podem ser aplicadas no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, explorando a regularidade existente nestas séries de formatos. Esta regularidade envolve diretamente a $\sqrt{2}$ como razão de semelhança entre estas folhas de papel. Além disso, mostra que a sequência das áreas das folhas de cada série forma uma progressão geométrica, e calcula as taxas de ampliação e de redução de um formato para outro. Por fim, o texto relata uma experiência da autora em sala de aula abordando o tema.

Palavras-chave: Formatos de Papel. Padronização. Sequência de Ensino. Ensino Básico.

Abstract

This is a text aimed at mathematics teachers of Basic Education, which provides proposals to contextualize the teaching of mathematics, using as main tool the sheet of paper, mainly A4 sheet of paper (A four). This work contains references and quotes about existing standards today that standardize the dimensions of the papers used in technical drawings in the graphic industry and in other situations. Describes the characteristics of the leaves of paper formats of the series A, B and C, deducts the measures of these leaves and points out the mathematical content involved in these series formats, and suggests activities that can be applied in elementary school and in high school, exploiting the regularity exists in this series formats. This regularity directly involves the $\sqrt{2}$ as similarity ratio between these sheets of paper. Furthermore, it shows that the sequence of the areas of the sheets of each set form a geometric progression, and calculates magnification rates and reduction one format to another. Finally, the paper reports an experience of the author in the classroom about the theme.

Key-words: Paper Sizes. Standardization. Instruction Sequence. Basic Education.

Lista de ilustrações

Lista de Quadros

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O papel [1] faz parte do cotidiano da humanidade há séculos e é um dos produtos mais consumidos no mundo. É utilizado para imprimir, para escrever e também para fazer embalagens de diversos produtos comercializáveis. Além disso, existem papéis para fins sanitários, para fins de comunicação e informação entre a maioria das pessoas; compõe livros, jornais, revistas, documentos e cartas e, assim, contribui para a transmissão do conhecimento, geração após geração, por todos os lugares do mundo.

A história da origem do papel está estreitamente ligada à história da escrita, que teve início há mais de seis mil anos. Inicialmente as palavras eram escritas em tabuleiros de pedras ou argila e, posteriormente, os egípcios inventaram o papiro. No entanto, a necessidade de se ter um material mais resistente fez surgir os pergaminhos, feitos de couro curtido de bovinos. Por fim, na época da dinastia Han Oriental, no ano 105, na China, T'sai Lun, um funcionário imperial, inventou o papel[2].

Com o passar do tempo o papel foi sendo aperfeiçoado e passou a ser utilizado em larga escala nas relações comerciais e residenciais: caixas para transporte de mercadorias, embalagens que protegem alimentos e centenas de outros produtos, etiquetas adesivas, folhas para impressão por computadores, folhas para desenhos técnicos, envelopes, etc.

Em meio a essa gama de utilidades que o papel tem e considerando o aumento do consumo de papel no mundo [14], é necessária sua produção dentro de padrões sustentáveis, visando a redução de custos, minimizando os desperdícios e tornando cada vez mais prático seu manuseio.

Embora existam variados tipos de papel com diferentes utilidades, este trabalho trata apenas dos papéis utilizados na indústria gráfica, em desenhos técnicos, em máquinas de fotocópias e impressoras. Mais especificamente, trata dos formatos desses papéis.

Existem vários formatos de papéis, como o papel A4, usado constantemente em trabalhos administrativos e escolares, os papéis A0 e A1 utilizados em desenhos técnicos, etc. Todos esses papéis, que são fabricados, comercializados e utilizados, têm suas dimensões baseadas em sistemas reconhecidos oficialmente por convenções.

Considerando justamente essas dimensões, verificando suas especificações e as regularidades existentes entre um formato e outro, propomos este trabalho que tem como objetivo principal mostrar alguns conteúdos matemáticas básicos observados nos formatos de papel das séries A, B e C. Dessa forma, estabeleceremos as relações e as regularidades matemáticas desses formatos de papéis.

[1] A palavra "papel" vem do latim "*papyrus*- nome dado a um vegetal da família "*Cepareas*".

[2] Informação retirada de `www.bracelpa.org.br`.

Estas séries de formatos de papéis são utilizadas diariamente em diferentes setores e estão relacionadas entre si por propriedades matemáticas. Foram pensadas de modo a evitar desperdícios na ampliação ou redução de fotos, fotocópias e na fabricação de livros. Além disso, esses formatos de papéis, tais como são hoje, admitem uma certa praticidade em seu manuseio, principalmente em máquinas de xérox e em desenhos técnicos.

Quando falamos a uma amiga que gostaríamos de falar sobre os formatos de papel, a amiga então perguntou: Como assim? Vocês vão fazer formas geométricas com papel? Na verdade esse tema para nós também era novo. Ficamos deslumbrados quando, folheando o livro da SBM, "A Geometria em Sala de Aula"[8], lemos o artigo intitulado "A Matemática na folha de papel A4”, escrito por José Luiz Pastore Mello. Nunca pensamos que houvesse tanta matemática envolvida numa folha de papel. Nunca havíamos nos atentado a essas séries de formatos. Então começamos a imaginar que poderíamos encontrar outras regularidades envolvidas nessas séries de formatos de papel.

Principalmente, este tema serve para contextualizar [3] conteúdos matemáticos ensinados na Educação Básica, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio: frações, áreas, perímetros e progressões geométricas são apenas alguns exemplos. Por isso, procuramos ser didáticos na abordagem dos temas.

No Capítulo 2 apresentaremos as especificações técnicas para os formatos de papéis, objeto de nosso estudo. Para este capítulo tomamos como base a ISO-216/1975 [4], a ISO-269/1985 [6] e a NBR 10068/87 [3]. Estas normas técnicas estabelecem as regras dimensionais para os formatos de papel das séries A, B e C. Veremos que estas normas sofreram, ao longo dos anos, alterações e adequações, a fim de atenderem ao progresso tecnológico dos últimos anos. Estas especificações técnicas foram baseadas em propriedades matemáticas, movidas pela necessidade de ser ter formatos de papéis cada vez mais práticos de serem utilizados.

Já no Capítulo 3, utilizaremos propriedades matemáticas para mostrar as regularidades contidas nestas séries de formatos. A partir dessas propriedades deduziremos fórmulas que mostram os padrões estabelecidos nas dimensões desses papéis. Além dessas fórmulas, mostraremos as medidas da largura e do comprimento dessas folhas, tanto em metro, como em milímetros.

Em seguida, abordaremos, no Capítulo 4, conteúdos matemáticos relacionados às dimensões das séries A, B e C, tais como semelhança, frações, progressão geométrica, média geométrica, porcentagem, etc. Provaremos a aplicação destes conteúdos nos formatos destas séries e mostraremos de que forma estes conteúdos podem ser relacionados entre si.

[3] A contextualização é sugerida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais [16]

Serão citados os conteúdos envolvidos, bem como de que forma estes conteúdos aparecem nestes formatos de papel.

No Capítulo 5 elencamos algumas atividades criadas ou adaptadas, que podem ser desenvolvidas em aulas de matemática do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio. Estas atividades servem para introduzir conteúdos matemáticos novos ou contextualizar conteúdos matemáticos já estudados. Para facilitar a aplicação destas atividades, mostraremos no início de cada uma delas os conhecimentos matemáticos que são pré-requisitos para os alunos. Além disso, em cada uma delas especificamos o objetivo principal e o conteúdo que poderá ser explorado no decorrer de sua aplicação. No entanto, queremos deixar claro que estas atividades, tais como foram propostas, revelam apenas ideias iniciais de abordar os conteúdos em questão, sendo, portanto, apenas sugestões. O(A) professor(a) que queira utilizá-las como contribuição de seu trabalho, deve sentir-se livre para adaptá-las de acordo com seu objetivo.

Por fim, no Capítulo 6 apresentamos o relato de uma atividade sobre o tema. Este relato descreve uma experiência sobre uma atividade que aplicamos numa turma da Educação Básica da escola em que trabalha. Neste capítulo elencamos os objetivos de cada atividade, os conteúdos matemáticos envolvidos, os relatos dos alunos, bem como a análise dos resultados desta aplicação.

2 Especificações técnicas para os formatos de papel

Neste Capítulo mencionaremos os sistemas de padronização existentes no Brasil, que regularizam os tamanhos de papel utilizados na indústria gráfica, nos desenhos técnicos, nos impressos caseiros, bem como em envelopes.

Para começar, mostraremos o que é normalização e qual a necessidade da padronização de produtos a nível internacional, além de apresentarmos os organismos internacionais, nacionais e regionais, que tratam da normalização dos formatos de papel. Depois situaremos estes sistemas historicamente e mostraremos que $\sqrt{2}$ é, de fato, a razão apropriada para se ter uma série de formatos de papel, tal como pensou Lichtenberg, no século XVIII, como mostra sua carta descrita no Apêndice D.

2.1 Normalização

Para a melhor compreensão das seções posteriores, abordaremos aqui o conceito de normalização e norma. Essa compreensão viabilizará o entendimento sobre a necessidade da padronização dos formatos de papel no mundo.

De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas,

> *Normalização* é a atividade que estabelece, em relação a problemas existentes ou potenciais, prescrições destinadas à utilização comum e repetitiva com vistas à obtenção do grau ótimo de ordem em um dado contexto. (ABNT, 2012a, p. 38 [2]).

Uma *norma*, por sua vez,

> é um documento estabelecido por consenso e aprovado por um organismo reconhecido, que fornece, para uso comum e repetitivo, regras, diretrizes ou características para atividades ou seus resultados, visando à obtenção de um grau ótimo de ordenação em um dado contexto (ABNT, 2012a, p. 34 [2]).

Assim, as normas existem na vida diária do cidadão, embora imperceptíveis, para aprimorar a vida social. As relações em sociedade seriam muito difíceis sem normas. Imagine o mundo sem norma para, por exemplo, padronizar produtos de construção, material elétrico ou até sem a padronização na segurança de equipamentos.

Na verdade, em geral a sociedade desconhece o papel desempenhado pelas normas. Raramente se oberva que qualquer norma é considerada uma referência adequada do mercado a que se destina. Prova disso é o uso de normas em processos de legislação, de metrologia, de certificação, de informação técnica e de relações comerciais entre clientes e fornecedores.

Como existem formatos de papel adequados para um trabalho específico, normalizar os tamanhos de papel tem suas vantagens [1]:

- Evita a produção desordenada dos tamanhos de papel e o resultado disso é economia na matéria-prima na produção;
- Melhora a comunicação entre fabricantes e consumidores, aprimorando a confiança nas relações comerciais;
- Protege o consumidor, pois tendo os tamanhos pré-definidos, o consumidor tem o direito de ter seu pedido atendido conforme solicitado;
- Aumenta o consumo e a comercialização de papel no mundo, já que elimina barreiras técnicas e comerciais entre os diversos países.

Essas vantagens parecem consistentes e têm crescido de acordo com o aumento do consumo de papel no mundo. As empresas e os consumidores de modo geral sentem cada vez mais a necessidade dessa normalização que regularizam seus produtos.

No Brasil os sistemas de normalização que definem os formatos de papel são:

- **ISO** [2] - Organização Internacional para Padronização. É uma entidade de padronização e normatização que foi criada em Genebra, na Suiça, em 1947. Para os formatos de papel, a ISO toma como referência o sistema DIN [3] - Instituto Alemão para Padronização, um instituto que regulamenta as normas de padronização na Alemanha.
- **ABNT** - Associação Brasileira de Normas Técnicas - é a representante oficial no Brasil das seguintes entidades internacionais: ISO, IEC [4](Comissão Eletrotécnica Internacional); e das entidades de normalização regional COPANT (Comissão Pan-americana de Normas Técnicas) e a AMN (Associação Mercosul de Normalização). A ABNT é responsável pela normalização técnica no Brasil, fornecendo a base necessária ao desenvolvimento tecnológico do país.

Estes sistemas são, na verdade, empresas privadas responsáveis por estabelecer normas que padronizam a utilização e a comercialização de produtos no Brasil e no mundo, inclusive sobre os formatos de folhas de papel, objeto de estudo deste trabalho.

---

1 O texto sobre as vantagens elencadas foi retirado e adaptado do Manual de Normalização 2009, do IPQ [10].

2 ISO é a sigla de *International Organization for Standardization*.

3 A sigla DIN, refere-se à *Deutsches Institut für Normung*.

4 *IEC International Eletrotechnical Comission*.

2.2 Um pouco de história

Desde a antiguidade o homem demonstra esforços em estabelecer normas para padronizar a fabricação de produtos e elementos utilizados na sua produção. Com o passar do tempo as necessidades de normas foram aumentando em todos os setores da economia. E com o aumento do consumo de papel no mundo, as normas para padronizar seus formatos passaram a ser fundamentais.

No decorrer da história da humanidade houve muitos padrões de tamanho de papel em diferentes locais e épocas [18], até se chegar no padrão que é adotado hoje. Destacaremos abaixo, cronologicamente, algumas notas históricas [5] que evidenciam essa necessidade, além de indicarem uma crescente aplicação de normas em diferentes setores da economia.

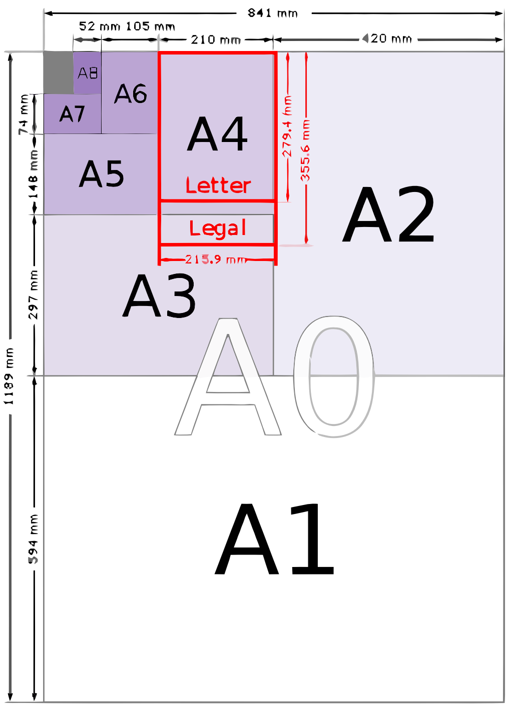
- As pedras utilizadas para erguer a pirâmide de Quéops, em 2500 a. C. tinham medidas iguais;
- Os romanos tinham normas para modelar de tijolos e retirar estacas;
- Em 1790, na França, foi aprovada a unificação do sistema de medidas. A partir de então o metro passou a ser utilizado como unidade padrão de comprimento;
- Em 1876 Mevil Dewey desenvolveu uma classificação bibliográfica decimal para facilitar a localização de livros através do assunto que estes abordam;
- Os fabricantes alemãs de papel acordaram, em 1883, na criação de um "formato normalizado de papel";
- O primeiro organismo nacional de normalização, o BESC *British Engineering Standards Committee*, é fundado em 1901;
- Surge, na Alemanha, em 1918, a primeira folha de normas "DI -Norm 1", sobre passadores cônicos;
- Em 1928 foi criada Federação Internacional das Associações Nacionais de Normalização - ISA, da qual participaram 16 países;
- No Brasil, em 1940 foi criada a Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT, que regulamenta a produção de diversos materiais e execução de vários serviços.
- Em 1947, na Genebra, Suíça, ocorre a fundação da ISO-*International Organization for Standardization.*

[5] Notas selecionadas e adaptadas do Manual de Normalização 2009, do IPQ [10].

O primeiro registro dos formatos de papel da série A, da qual faz parte o papel A4, bastante utilizado hoje no meio escolar, aparece em 1786, quando o cientista alemão Georg C. Lichtenberg (1742 - 1799) escrevia, em uma carta a um amigo, Johann Beckmann, as vantagens de se ter um formato de papel retangular no qual a relação entre seus lados fosse $\sqrt{2}$. (Ver o conteúdo da carta no Apêndice D na página 90.). Daí, a partir de 1920, o engenheiro alemão e matemático em padronização, Walter Porstmann, trabalhou na formulação de um sistema padronizado para formato de papel. Tanto que, em 1922, o DIN lança o padrão desenvolvido por Porstmann. Mais tarde, em 1975, devido a muitos países já usarem o sistema alemão, a ISO estabeleceu como padrão estes formatos.

Considerando esse decurso, podemos afirmar que hoje há basicamente dois sistemas em vigor: o sistema internacional definido pela ISO-216, de 1975, adotado na maioria dos países, e os formatos adotados nos Estados Unidos e Canadá, como o *letter*, conhecido como papel carta e tem 279,4 mm de comprimento e 215,9 mm de largura, conforme Figura 1.

Figura 1 – Papel *Letter* x Papel A4.



Fonte: `wiki.ninsaude.com`

Com predominância do formato *Letter* em vez do papel A4 como o formato padrão de papel para impressoras a *laser*, surgiram muitos problemas na troca diária de documentos internacionais na América do Norte, pois papel o formato *Letter* é mais largo e mais curto que o formato A4 que, por sua vez, tem 297 mm de comprimento e 210 mm de largura. As palavras de documentos processados em formato A4 podem ser impressas com perda de informação nos papéis de formato *Letter*. Então, para evitar esta perda é necessário que se refaça a formatação do texto. Possivelmente isso leva à modificação no número de páginas do documento.

2.3 A padronização dos formatos de papel

O Sistema ISO define os tamanhos de papel utilizados em desenhos técnicos, *posters*, cartas, revistas, formulários, catálogos, impressoras caseiras, para máquinas copiadoras, etc, baseado na norma DIN-476, como mostra o Quadro 1.

Quadro 1: Exemplos de aplicações dos formatos ISO

Formatos	**Aplicações**
A0, A1	desenhos técnicos, *posters*
A1, A2	*flip charts*
A2	desenhos, diagramas, tabelas grandes
A3	desenhos, diagramas, tabelas grandes, jornais
A4	cartas, revistas, formulários, catálogos, impressos caseiros
A5	blocos de anotações, livros
A6	cartões postais, livros
A8	cartas de jogar
B4	jornais
B5, B6	livros
B7	cartões de identificação
B8	cartas de jogar
C4	envelopes para A4 não dobrada
C5	envelopes para A4 dobrado uma vez ou para folha A5 não dobrada
C6	envelopes para A4 dobrado duas vezes ou para folha A6 não dobrada

Adaptado de `http://www.cl.cam.ac.uk`

Na verdade, a diferença entre o sistema DIN e o da ISO-216 está apenas na tolerância nas dimensões da folha, conforme Tabela 1.

Tabela 1 – As tolerâncias nas aproximações decimais.

Medida	DIN- 476	ISO- 216
Até 150 mm	± 1	± 1,5
Acima de 150 mm	± 1,5	± 2
Até 600 mm	± 2	± 3

Elaborada pela autora.

Estes sistemas regularizam os tamanhos de papel das séries A, B e C, adotando o formato A0 (A zero) como formato básico, no qual se baseiam todos os demais papéis tipo An. Da mesma forma, mostram que as séries B é derivada da série A e a série C é constituída de formatos derivados dos formatos das série A e B. Isto justifica a ordem alfabética destas séries.

No Brasil existe uma norma da ABNT que define questões relacionadas aos formatos de papel. Trata-se da NBR 10068/87 [6]. Esta NBR, por sua vez, foi inspirada na norma ISO-216 de 1975, que define os tamanhos de papel que tratamos neste trabalho. Em particular, nesta NBR é definida a série A. Seu objetivo principal é normalizar os formatos de papel para desenhos técnicos.

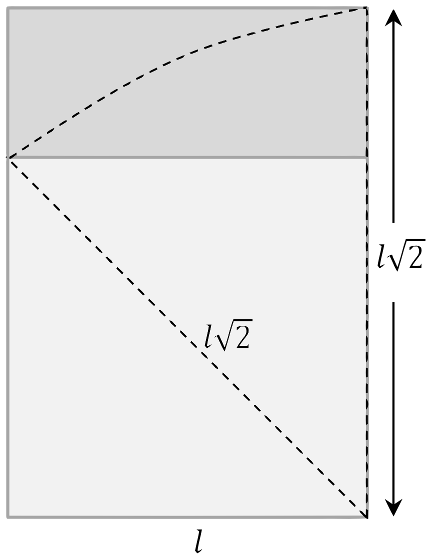
> Esta Norma padroniza as características dimensionais das folhas em branco e pré-impressas a serem aplicadas em todos os desenhos técnicos. (...) O formato básico para desenhos técnicos é o retângulo de área igual a 1 m^2 e de lados medindo 841 mm x 1189 mm, isto é, guardando entre si a mesma relação que existe entre o lado de um quadrado e sua diagonal. Deste formato básico, designado por A0 (A zero), deriva-se a série "A" pela bipartição ou pela duplicação sucessiva (ABNT, 1987 p. 1-3 [3]).

Assim, o formato de referência é o papel A0, com área medindo 1 m^2, cujos lados medem, aproximadamente, 841 mm e 1189 mm [3]. A razão entre largura e comprimento é $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Esta proporção tem a característica de que, ao duplicar o lado menor se obtém um retângulo cujos lados guardam a proporção inicial $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Em consequência, cada formato de uma série resulta de duplicar o lado menor do formato imediatamente inferior, ou de dividir pela metade o lado maior do formato imediatamente superior. Isto significa que a relação entre as áreas dos formatos consecutivos de uma série sempre vale 2 [11]. Por exemplo, a área do A0 é o dobro da área do A1, a área do A1 é o dobro da área do A2 e assim por diante. Esta regularidade pode ser visualizada na Figura 1 na página 21.

[6] NBR – Norma Brasileira aprovada pela ABNT.

Na Figura 2 podemos observar que a razão entre a altura e a largura do papel é igual $\sqrt{2}$. E assim será em qualquer tamanho de papel destas séries. Esta é a mesma razão que obtemos quando dividimos a medida da diagonal de um quadrado pela medida do seu lado. Essa razão é apropriada porque nas relações comerciais, um fabricante de papel poderá cortar um formato desses sem, no entanto, desperdiçar as sobras, pois as essas sobras ainda serão folhas de papéis comercializáveis. Ademais, pode-se fazer a redução de um impresso, ou desenho técnico, pela metade, sem haver desperdício de papel.

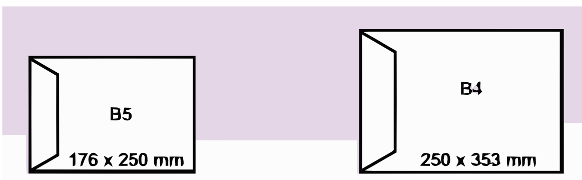
Figura 2 – A $\sqrt{2}$ nos papéis da série A.



Fonte: Elaborada pela autora.

Já a Série B é obtida a partir da série A e preserva a mesma proporção da série do qual deriva. Fazem parte desta série alguns envelopes como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Envelopes da série B.



Fonte: Adaptado de `online.officedepot.ch`

As alturas e larguras e, portanto, também as superfícies dos formatos da série B são a média geométrica dos valores para o formato correspondente e maior seguinte da série A [5]. Assim, por exemplo, B0 = $1000 \times 1414\ \mathrm{mm}^2 = \sqrt{(841 \cdot 1189)} \times \sqrt{(1189 \cdot 1682)}\ \mathrm{mm}^2$, resultante de A0 ($841 \times 1189\ \mathrm{mm}^2$) e 2A0 ($1189 \times 1682\ \mathrm{mm}^2$) formatos [13]. As deduções das dimensões das folhas papéis da série B encontram-se na Seção 3.2 deste texto.

A série C é regulamentada pela ISO-269:1985, com base na norma DIN-678 e se refere aos formatos de envelopes.

As dimensões dos papéis da série C são obtidas através da média geométrica dos formatos das série A e B, de modo que a largura do papel Cn é obtida através da média geométrica das larguras dos papéis An e Bn. Os formatos da série B são sempre maiores do que a série A e da série C encontram-se entre estes [13].

3 As dimensões das folhas de papel

Neste Capítulo usaremos propriedades matemáticas básicas para encontrarmos uma fórmula geral para cada uma das dimensões dos papéis das séries A, B e C. Esta ordem é necessária porque a série A contem os formatos básicos. Os formatos de papel da série B são obtidos a partir dos formatos da série A. A série C, por sua vez, é obtida a partir dos formatos das séries A e B, conforme padrões internacionais determinados pela ISO-216, regulamentada no Brasil pela NBR 10068/87, descritas no capítulo anterior. Depois provaremos que estas dimensões encontradas satisfazem às especificações técnicas para os formatos de papel, estabelecidas pela ISO.

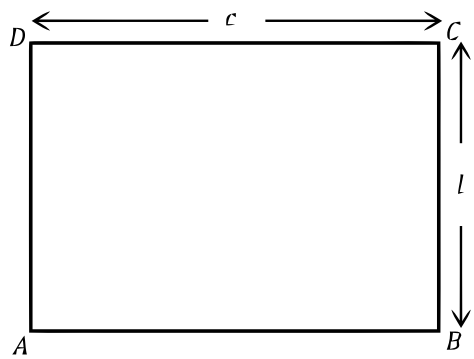
No entanto, antes de aplicar a Matemática para criar as séries, vamos usar a Matemática para entendermos o porquê de ser $\sqrt{2}$ a razão entre o maior e o menor lado de cada folha de papel em questão.

Observação 3.1 *Por formalidade, ao citar a palavra* ***largura****, estaremos nos referindo ao menor lado da folha de papel, ao passo que o maior lado chamaremos de* ***comprimento****. Adotaremos a notação l_{An} para designar a largura folha de papel An e por c_{An} para designar o seu comprimento.*

Ao pensar numa série de formatos de papel que preserva a razão entre o comprimento e a largura, Georg C. Lichtenberg, em sua carta traduzida no Apêndice D, estava preocupado em obter uma folha de papel em formato retangular, de tal forma que, dividida ao meio, os dois novos retângulos resultantes mantivessem a mesma proporção. O desafio era, portanto, encontrar a razão entre o comprimento e a largura de cada um dos dois novos retângulos obtidos.

Consideremos o retângulo $ABCD$ da Figura 4.

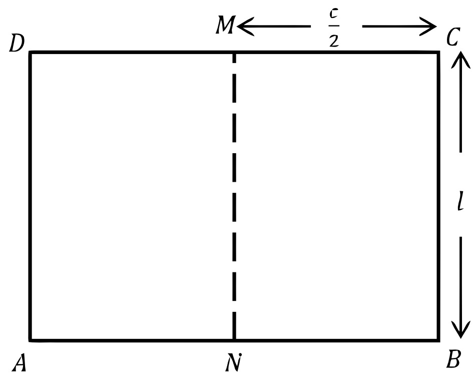
Figura 4 – O retângulo $c \times l$.



Elaborada pela autora.

Seja l a medida da largura e c a medida do comprimento. Sejam M e N os respectivos pontos médios dos lados $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$, mostrados na Figura 5.

Figura 5 – O retângulo $c \times l$ dividido ao meio.



Elaborada pela autora.

Dessa forma, o segmento $\overline{MN}$ divide o retângulo $ABCD$ exatamente ao meio, paralelamente a sua largura. Sem perda de generalidade, vamos considerar o retângulo $NBCM$. Notemos que $\overline{CM} \cong \overline{BN}$. Assim, o retângulo $NBCM$ tem largura igual a $\dfrac{c}{2}$ e comprimento l. A ideia agora é mostrar que a razão entre o comprimento e a largura de cada um dos retângulos $ANMD$ e $NBCM$ também é $\frac{c}{l}$. De fato, como por hipótese, $ABCD$ e $NBCM$ são semelhantes, temos

$$\frac{\mathtt{med}(\overline{BC})}{\mathtt{med}(\overline{DC})} = \frac{\mathtt{med}(\overline{CM})}{\mathtt{med}(\overline{BC})} \tag{3.1}$$

Decorre que

$$\frac{l}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{l} \Rightarrow \frac{l^2}{c} = \frac{c}{2} \Rightarrow l^2 = \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{l^2} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} \Rightarrow l = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{c}{l} \tag{3.2}$$

$$\therefore \frac{c}{l} \quad = \quad \sqrt{2} \tag{3.3}$$

Este resultado mostra que a razão entre o comprimento e a largura da folha de papel deve ser igual a $\sqrt{2}$. Assim, qualquer folha de papel em formato retangular que tenha essa razão poderá ser dividida ao meio, paralelamente a sua largura e ainda assim, as duas novas folhas obtidas, embora menores, preservarão essa mesma razão. Isso inspirou os órgãos de normalização para então criar e adotar uma série de formatos de papel com praticidade e economia na sua utilização.

3.1 Formatos tipo An

As folhas de papel da série A admitem os seguintes princípios:

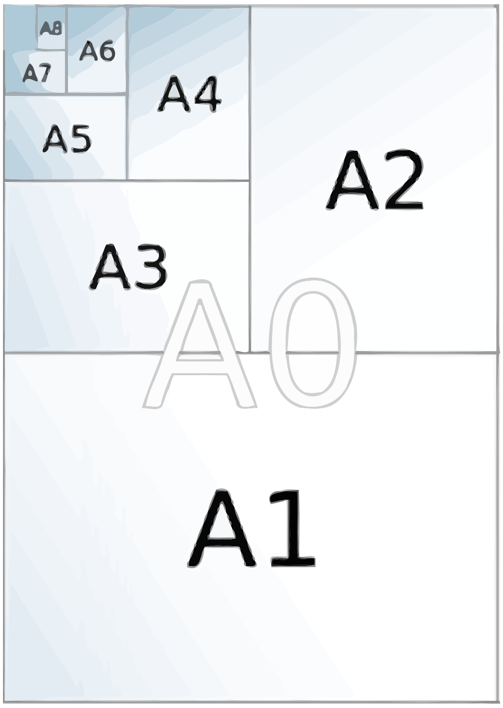
(P1) As folhas têm formas retangulares, são semelhantes entre si e a razão entre o comprimento e largura é constante e igual a $\sqrt{2}$;

(P2) O formato básico é a folha A0, que tem área igual a 1 m^2;

(P3) A folha A(n+1) é obtida dobrando-se ao meio a folha An, paralelamente à sua largura.

Estes princípios foram pensados de modo a evitar desperdício na fabricação das folhas de papel e na ampliação e/ou redução de impressos, pois um formato qualquer desta série pode ser obtido apenas dobrando um outro imediatamente superior. Note isso na Figura 6.

Figura 6 – A sequência de formatos An.



Fonte: `www.paper-sizes.com`

Vamos determinar primeiramente a largura l_{A0} e o comprimento c_{A0} da folha A_0, visto que a folha A0 é o formato básico da série A. Inicialmente sabemos que a razão entre o comprimento e a largura é $\sqrt{2}$ e que o produto da largura pelo comprimento é 1, já que a área do primeiro papel da série tipo An é igual a 1. Então devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{c_{A0}}{l_{A0}} &= \sqrt{2} \\ c_{A0} \cdot l_{A0} &= 1 \end{cases}$$

Notemos que

$$\begin{cases} \dfrac{c_{A0}}{l_{A0}} &= \sqrt{2} \\ c_{A0} \cdot l_{A0} &= 1 \end{cases} \sim \begin{cases} c_{A0} &= l_{A0} \cdot \sqrt{2} & \text{(I)} \\ c_{A0} &= \dfrac{1}{l_{A0}} & \text{(II)} \end{cases}$$

Segue de (I) e (II) que

$$l_{A0} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{l_{A0}} \tag{3.4}$$

$$(l_{A0})^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.5}$$

Mas $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$. Então

$$\left((l_{A0})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

$$l_{A0} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.7}$$

$$\therefore l_{A0} = 2^{-\frac{1}{4}} \tag{3.8}$$

Substituindo o valor de l_{A0} em (I), teremos

$$c_{A0} = 2^{-\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

$$c_{A0} = 2^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

$$\therefore c_{A0} = 2^{\frac{1}{4}} \tag{3.11}$$

Vamos agora encontrar a largura l_{An} do papel An, sendo n um número natural variando de 1 a 10. Lembrando que A_0 é o maior desta série e o A_{10} é o menor.

Para isso, vamos usar o Princípio (P1) na página 28. Este princípio afirma que as folhas têm formas retangulares e são semelhantes entre si. Tomemos $\frac{l_{A0}}{l_{An}}$, que é a razão de semelhança entre estes retângulos. Como a razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança [7], temos:

$$\left(\frac{l_{A0}}{l_{An}}\right)^2 = \frac{a_0}{a_n} \tag{3.12}$$

Em que a_n é a área da folha An.

Considerando que:

- $l_{A0} = 2^{-\frac{1}{4}}$, conforme equação (3.8);
- $a_0 = 1$, de acordo com o Princípio (P2), na página 28 no início desta seção;
- a_n forma uma progressão geométrica de razão igual a $\frac{1}{2}$, cujo primeiro termo é 1. Então a área do papel An é $\frac{1}{2^n} = 2^{-n}$.

Assim, temos:

$$\frac{\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^2}{(l_{An})^2} = \frac{1}{2^{-n}} \tag{3.13}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^2}{(l_{An})^2} &= 2^n && (3.14)\\
2^{-\frac{2}{4}} \cdot 2^{-n} &= (l_{An})^2 && (3.15)\\
\frac{2^{-\frac{2}{4}}}{2^n} &= (l_{An})^2 && (3.16)\\
\left(2^{-\frac{2}{4}} \cdot 2^{-n}\right)^{\frac{1}{2}} &= \left((l_{An})^2\right)^{\frac{1}{2}} && (3.17)\\
2^{-\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{n}{2}} &= l_{An} && (3.18)\\
l_{An} &= 2^{\frac{-1-2n}{4}} && (3.19)\\
\therefore l_{An} &= 2^{-\frac{1+2n}{4}} && (3.20)
\end{aligned}$$

Agora podemos determinar o comprimento c_{An} da folha de papel tipo An. Como $\frac{c_{An}}{l_{An}} = \sqrt{2}$, conforme Princípio (P1), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{c_{An}}{2^{-\frac{1+2n}{4}}} &= 2^{\frac{1}{2}} && (3.21)\\
c_{An} &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{-2n-1}{4}} && (3.22)\\
c_{An} &= 2^{\frac{2-2n-1}{4}} && (3.23)\\
\therefore c_{An} &= 2^{\frac{1-2n}{4}} && (3.24)
\end{aligned}$$

Como no Princípio (P1) nos diz que a área da folha A0 é 1m^2, os valores obtidos nas fórmulas descritas nas equações (3.20) e (3.24) são dados em metros. No entanto, pode-se fazer as conversões necessárias para milímetros ou centímetros.

Tabela 2 – As dimensões dos papéis tipo An.

An [1]	LARGURA (metro)	COMPRIMENTO (metro)	LARGURA (milímetro)	COMPRIMENTO (milímetro)
4A0	1,681792...	2,37841...	1682	2378
2A0	1,189207...	1,68179...	1189	1682
A0	0,840896...	1,189207...	840	1189
A1	0,594603...	0,840896...	594	840
A2	0,420448...	0,594603...	420	594
A3	0,297301...	0,420448...	297	420
A4	0,210224...	0,297301...	210	297
A5	0,148650...	0,210224...	148	210
A6	0,105112...	0,148650...	105	148
A7	0,074325...	0,105112...	74	105
A8	0,052556...	0,074325...	52	74
A9	0,037162...	0,052556...	37	52
A10	0,026278...	0,037162...	26	37

Elaborada pela autora.

Considerando essas fórmulas, podemos organizar os dados sobre a largura e o comprimento de cada folha tipo An, como mostra a Tabela 2. Nesta tabela mostramos as medidas da largura e do comprimento em metros e em milímetros.

Como podemos observar, todas as dimensões, dadas em metros ou milímetros, são números irracionais, ou seja, têm infinitas casas decimais não periódicas. Portanto, as medidas dadas na Tabela 2 foram aproximadas para milímetros inteiros, conforme determinação da ISO-216. Essas aproximações decimais obedecem às tolerâncias descritas na Tabela 1, página 23.

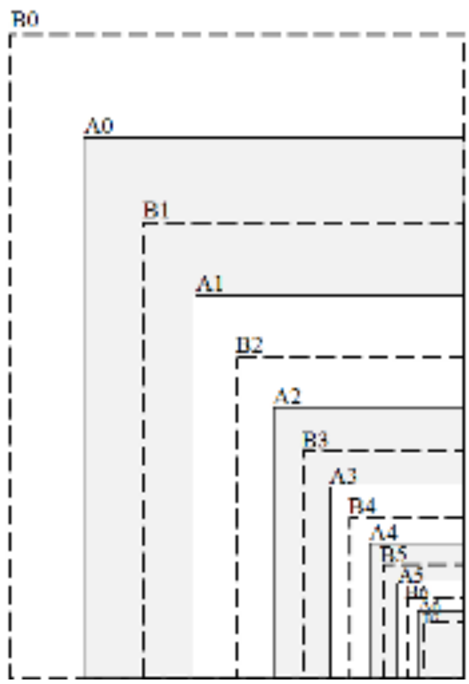
3.2 Formatos tipo Bn

As dimensões (medidas da largura e do comprimento) das folhas da série B são obtidas considerando as dimensões dos papéis da série A. Pelas normas internacionais [3], as medidas dos papéis da série B são definidas como a média geométrica entre as respectivas medidas das folhas A(n−1) e An.

A *média geométrica* entre dois números reais é obtida calculado-se a raiz quadrada do produto desses dois números [19]. Nesse caso, nossos números são as medidas das larguras (ou dos comprimentos) de dois formatos consecutivos da série A. Por exemplo, para obtermos as dimensões do papel B4, devemos considerar as dimensões dos papéis A3 e A4. Assim, os formatos desta série foram pensados de modo que seus tamanhos fossem intermediários entre dois tamanhos consecutivos da série A.

Portanto, essas folhas de papel deveriam ser maiores do que os da série A, ou seja, o Bn deveria ser maior que An, para todo n natural de 0 a 10, como mostra a Figura 7. Na verdade a ideia era encontrar novos formatos com tamanhos medianos entre a folha An e a folha A(n-1). Mas apesar de a série B ter medidas diferentes dos papéis da série A, o princípio para se obter todos os formatos de cada uma dessas séries é o mesmo: a partir do formato básico, cada folha é obtida dividindo-se ao meio o formato inferior. Este esquema de divisão é mostrado na Figura 7.

Figura 7 – Comparando os papéis An e Bn.



Elaborada pela autora.

Em suma, as condições para se obter a largura de Bn eram:

- $l_{An} < l_{Bn} < l_{A(n-1)}$;
- o fator de aumento de l_{An} para l_{Bn} fosse o mesmo de l_{Bn} para $l_{A(n-1)}$.

Conhecendo essas condições, vamos estabelecer um padrão para as medidas da folha Bn. Dessa forma iremos entender o porquê de a média geométrica ter sido escolhida.

O fator de aumento de l_{An} para l_{Bn} é $\dfrac{l_{Bn} - l_{An}}{l_{An}}$ e de l_{Bn} para $l_{A(n-1)}$ é $\dfrac{l_{A(n-1)} - l_{Bn}}{l_{Bn}}$. Queremos que esses fatores sejam iguais. Logo,

$$\frac{l_{Bn} - l_{An}}{l_{An}} = \frac{l_{A(n-1)} - l_{Bn}}{l_{Bn}} \tag{3.25}$$
$$(l_{Bn})^2 - l_{An} \cdot l_{Bn} = l_{A(n-1)} \cdot l_{An} - l_{An} \cdot l_{Bn} \tag{3.26}$$
$$(l_{Bn})^2 = l_{A(n-1)} \cdot l_{An} \tag{3.27}$$
$$\therefore l_{Bn} = \sqrt{l_{A(n-1)} \cdot l_{An}} \tag{3.28}$$

Devemos então calcular a média geométrica entre a medida da largura l_{An} da folha An e a medida da largura $l_{A(n-1)}$ da folha A(n-1), para então obtermos a largura da folha Bn.

Conforme equação (3.20) na página 30, temos $l_{An} = 2^{-\frac{1+2n}{4}}$. Daí,

$$l_{A(n-1)} = 2^{-\frac{1+2(n-1)}{4}} \tag{3.29}$$
$$l_{A(n-1)} = 2^{-\frac{1+2n-2}{4}} \tag{3.30}$$
$$\therefore l_{A(n-1)} = 2^{\frac{1-2n}{4}} \tag{3.31}$$

Calcularemos a média geométrica entre l_{An} e $l_{A(n-1)}$. Assim obteremos l_{Bn}:

$$l_{Bn} = \sqrt{l_{An} \cdot l_{A(n-1)}} \tag{3.32}$$
$$l_{Bn} = \sqrt{2^{-\frac{1+2n}{4}} \cdot 2^{\frac{1-2n}{4}}} \tag{3.33}$$
$$l_{Bn} = \sqrt{2^{-\frac{4n}{4}}} \tag{3.34}$$
$$l_{Bn} = \sqrt{2^{-n}} \tag{3.35}$$
$$l_{Bn} = (2^{-n})^{\frac{1}{2}} \tag{3.36}$$

Portanto, a largura da folha de papel formato Bn é

$$l_{Bn} = 2^{-\frac{n}{2}} \tag{3.37}$$

Analogamente, para encontrar seu comprimento, deveríamos ter:

- $c_{An} < c_{Bn} < c_{A(n-1)}$;
- o fator de aumento de c_{An} para c_{Bn} fosse o mesmo de c_{Bn} para $c_{A(n-1)}$.

E, consequentemente,

$$c_{Bn} = \sqrt{c_{A(n-1)} \cdot c_{An}} \tag{3.38}$$

Então o comprimento da folha tipo Bn também é dado pela média geométrica entre os comprimentos c_{An} e $c_{A(n-1)}$.

Segue da equação (3.24) na página 30, que $c_{A(n-1)} = 2^{\frac{1-2(n-1)}{4}}$. Então,

$$c_{A(n-1)} = 2^{\frac{1-2n+2}{4}} \Rightarrow c_{A(n-1)} = 2^{\frac{3-2n}{4}} \tag{3.39}$$

Assim, a média geométrica entre c_{An} e $c_{A(n-1)}$ é o valor de c_{Bn}. Desta forma,

$$c_{Bn} = \sqrt{2^{\frac{1-2n}{4}} \cdot 2^{\frac{3-2n}{4}}} \tag{3.40}$$

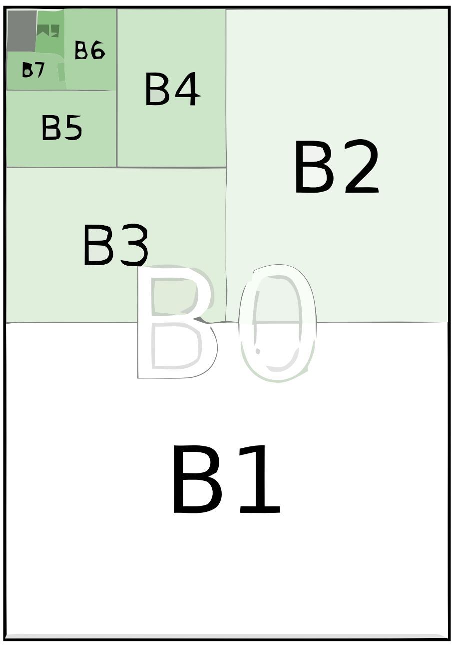
$$c_{Bn} = \sqrt{2^{\frac{4-4n}{4}}} \tag{3.41}$$

$$c_{Bn} = \sqrt{2^{1-n}} \tag{3.42}$$

$$c_{Bn} = (2^{1-n})^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

$$c_{Bn} = 2^{\frac{1-n}{2}} \tag{3.44}$$

Figura 8 – O esquema de papéis da série B.



Fonte: `www.paper-sizes.com`

Portanto, o comprimento da folha formato tipo Bn é

$$c_{Bn} = 2^{\frac{1-n}{2}} \tag{3.45}$$

A média geométrica é apropriada porque os formatos Bn tem larguras e comprimentos intermediários entre os formatos An e A(n-1), como mostra a Figura 7 (página 32). Consequentemente, sua área também é intermediária. Além disso, a média geométrica preserva a proporção entre os lados dos retângulos (Ver Figura 8).

Considerando que as dimensões de uma folha tipo Bn são $2^{-\frac{n}{2}}$ e $2^{\frac{1-n}{2}}$, (equações (3.37) e (3.45)) podemos fazer $n = 0$ para encontrarmos a medida da largura e do comprimento da folha B0, o formato inicial da série B. Sendo assim,

$$l_{B0} = 2^{-\frac{0}{2}} = 1 \text{ e } c_{B0} = 2^{\frac{1-0}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Tabela 3 – As dimensões dos formatos Bn.

Bn	LARGURA (metro)	COMPRIMENTO (metro)	LARGURA (milímetro)	COMPRIMENTO (milímetro)
B0	1	1,41421...	1000	1414
B1	0,70710...	1	707	1000
B2	0,5	0,70710...	500	707
B3	0,35355...	0,5	353	500
B4	0,25	0,35355...	250	353
B5	0,17677...	0,25	176	250
B6	0,125	0,17677...	125	176
B7	0,08838...	0,125	88	125
B8	0,0625	0,08838...	62	88
B9	0,04419...	0,0625	44	62
B10	0,03125	0,04419...	31	44

Elaborada pela autora.

A partir daí, podemos calcular as dimensões das demais folhas da série sem necessariamente usarmos as medidas da série A, tampouco a média geométrica dessas medidas. O princípios são semelhantes aos da série A, descritos na Seção 3.1:

(P4) O formato inicial, B0, é um retângulo $(1 \times \sqrt{2})$m;

(P5) O formato B(n+1) é obtido dividindo-se a folha Bn ao meio, paralelamente à sua largura, assim como mostram as Figuras 4 e 5 na página 26.

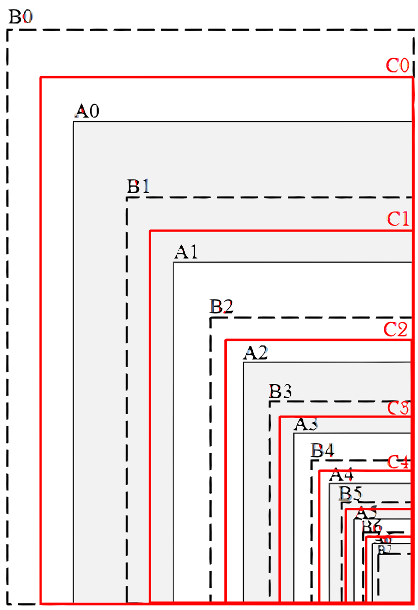
Dessa forma, a sequência das folhas Bn também é obtida do mesmo modo que se obtém a sequência das folhas An.

Para os arredondamentos considerou-se os milímetros inteiros e as aproximações utilizadas na Tabela 3 (página 35) respeitam às margens de tolerâncias descritas na Tabela 1 na página 23.

3.3 Formatos tipo Cn

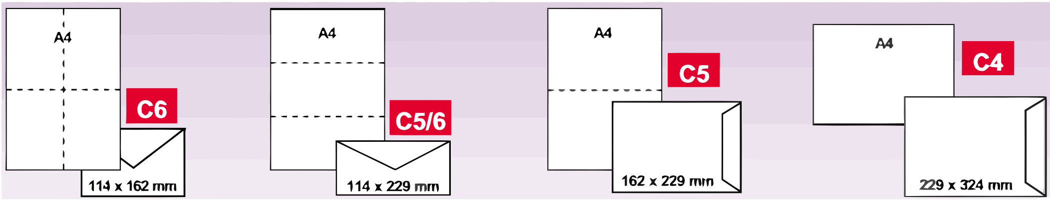
Os tamanhos dos papéis que fazem parte desse formato são utilizados como pastas, capas de documentos, *passepartout*, envelopes e algumas fichas. De modo geral, a medida de um envelope Cn é ligeiramente maior que uma folha An e ligeiramente menor que uma folha Bn. Na prática, um envelope Cn acomoda uma folha An sem dobrar, mas uma folha An dobrada ao meio cabe num envelope C(n+1) e dobrada duas vezes cabe num envelope C(n+2). Compare estas dimensões na Figura 9.

Figura 9 – Comparando os papéis An, Bn e Cn.



Elaborada pela autora.

Figura 10 – Aplicações de envelopes da série C.



Fonte: Adaptado de `online.officedepot.ch`

Observe a Figura 10.

Nesta figura vemos alguns exemplos de envelopes desta série. Notemos que as dimensões de cada envelope possibilitam que cada um seja ideal para caber uma folha de papel A4 dobrada de modo específico. Por exemplo, o envelope C6 cabe uma folha A4 dobrada duas vezes em sentidos distintos, já o C5 cabe uma folha A4 dobrada uma única vez. Notemos que o envelope C5/C6 não faz parte da sequência de formatos C0, C1, $\cdots$, C10. Trata-se de um envelope com dimensões mistas: o comprimento do C5/C6 é igual ao comprimento do envelope C5 e a largura é igual ao comprimento do envelope C6.

Os princípios para obtermos a série C são os mesmos para se obter a série B. Para esta série de formatos pensou-se em obter a folha de papel Cn intermediária às folhas An e Bn. Assim, os formatos Cn são obtidos através das médias geométricas entre os formatos An e Bn. Ou seja, a largura l_{Cn} é a média geométrica das larguras l_{An} e l_{Bn}, pois o acréscimo na largura de An para se obtermos Cn deve ser proporcional ao acréscimo de Cn para Bn. Ademais, podemos perceber que os formatos Cn, assim como os An e Bn, têm a mesma regularidade, como mostra a Figura 11.

$$\frac{l_{Cn} - l_{An}}{l_{An}} = \frac{l_{Bn} - l_{Cn}}{l_{Cn}} \tag{3.46}$$

$$(l_{Cn})^2 - l_{An} \cdot l_{Cn} = l_{An} \cdot l_{Bn} - l_{An} \cdot l_{Cn} \tag{3.47}$$

$$(l_{Cn})^2 = l_{An} \cdot l_{Bn} \tag{3.48}$$

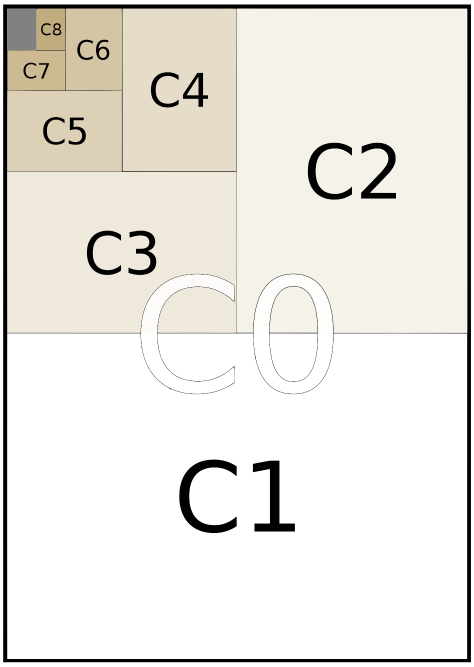
$$l_{Cn} = \sqrt{l_{An} \cdot l_{Bn}}. \tag{3.49}$$

Logo, a média geométrica para os formatos Cn também é apropriada, sendo o tamanho da folha Cn intermediário entre as folhas An e Bn. Daí, basta substituirmos os valores das larguras indicadas na equação (3.49) da página 37, pelas equações (3.20) e (3.37).

$$l_{Cn} = \sqrt{2^{-\frac{1+2n}{4}} \cdot 2^{-\frac{n}{2}}} \tag{3.50}$$

$$l_{Cn} = \sqrt{2^{\frac{-1-2n-2n}{4}}} \tag{3.51}$$

Figura 11 – A regularidade da série C.



Fonte: `www.paper-sizes.com`

$$
\begin{aligned}
l_{Cn} &= \sqrt{2^{-\frac{1+4n}{4}}} && (3.52)\\
l_{Cn} &= \left(2^{-\frac{1+4n}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} && (3.53)\\
\therefore l_{Cn} &= 2^{-\frac{1+4n}{8}} && (3.54)
\end{aligned}
$$

De modo análogo, obtemos o comprimento c_{Cn} através da média geométrica entre c_{An} e c_{Bn}:

$$
\begin{aligned}
c_{Cn} &= \sqrt{c_{An} \cdot c_{Bn}} && (3.55)\\
c_{Cn} &= \sqrt{2^{\frac{1-2n}{4}} \cdot 2^{\frac{1-n}{2}}} && (3.56)\\
c_{Cn} &= \sqrt{2^{\frac{1-2n+2-2n}{4}}} && (3.57)\\
c_{Cn} &= \sqrt{2^{\frac{3-4n}{4}}} && (3.58)\\
c_{Cn} &= \left(2^{\frac{3-4n}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} && (3.59)\\
\therefore c_{Cn} &= 2^{\frac{3-4n}{8}} && (3.60)
\end{aligned}
$$

Conhecendo as relações descritas nas equações (3.54) e (3.60), podemos encontrar as dimensões das folhas tipo Cn, mostradas na Tabela 4.

Tabela 4 – As dimensões dos formatos Cn.

Cn	LARGURA (metro)	COMPRIMENTO (metro)	LARGURA (milímetro)	COMPRIMENTO (milímetro)
C0	0,91700...	1,29683...	917	1296
C1	0,64841...	0,91700...	648	917
C2	0,45850...	0,64841...	458	648
C3	0,32420...	0,45850...	324	458
C4	0,22925...	0,32420...	229	324
C5	0,16210...	0,22925...	162	229
C6	0,11462...	0,16210...	114	162
C7	0,08105...	0,11462...	81	114
C8	0,05731...	0,08105...	57	81
C9	0,04052...	0,05731...	40	57
C10	0,02865...	0,04052...	28	40

Elaborada pela autora.

4 Alguns conteúdos matemáticos envolvidos

Apresentamos neste capítulo alguns conteúdos matemáticos que podem ser explorados na educação básica, envolvendo os formatos de papel das séries A, B e C. Além disso, faremos deduções que comprovam as propriedades matemáticas destes formatos.

4.1 As áreas: progressões geométricas

Nesta seção vamos mostrar que as áreas das folhas de papel destas séries estão em progressão geométrica.

Definição 4.1 (Progressão Geométrica) *É uma sequência de números reais (ou complexos) em que, cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o termo anterior por uma constante chamada razão [9].*

O fato de a razão entre o comprimento e a largura das folhas ser igual a $\sqrt{2}$ não permite que as duas dimensões sejam números racionais. No entanto, é possível que as áreas sejam números racionais.

Primeiramente provaremos que as áreas das folhas da série An, que denotamos por a_n, formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

De fato, de acordo com o Princípio (P3) na página 28, descrito na Seção 3.1, cada folha é obtida, dividindo-se a folha anterior ao meio. Assim, a área a_{n+1} é obtida dividindo a área a_n por 2. Ou seja, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$. Isso nos mostra que a razão entre a_{n+1} e a_n é $\frac{1}{2}$. Com efeito,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a_n}{2}}{a_n} = \frac{a_n}{2} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \tag{4.1}$$

Daí, vemos que, se a_n é o primeiro termo da sequência, então o segundo é $\frac{a_n}{2}$, o terceiro é $\frac{a_n}{4}$, o quarto é $\frac{a_n}{8}$ e assim por diante.

Conforme o Princípio (P2) na página 28, (Seção 3.1), a área do formato inicial da série A, da folha A0, é de 1m^2. Então o primeiro termo é 1, o segundo é $\frac{1}{2}$, o terceiro é $\dfrac{\frac{1}{2}}{2}$ e assim sucessivamente, obtemos a seguinte sequência, que é uma progressão geométrica, pois a razão entre dois termos consecutivos é constante:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}\right) \tag{4.2}$$

Uma outra forma de obter esta sequência é considerando as medidas da largura e do comprimento da folha An, descritas pelas equações (3.20) e (3.24). É só multiplicarmos l_{An} por c_{An} que obtemos a_n, a área da folha An:

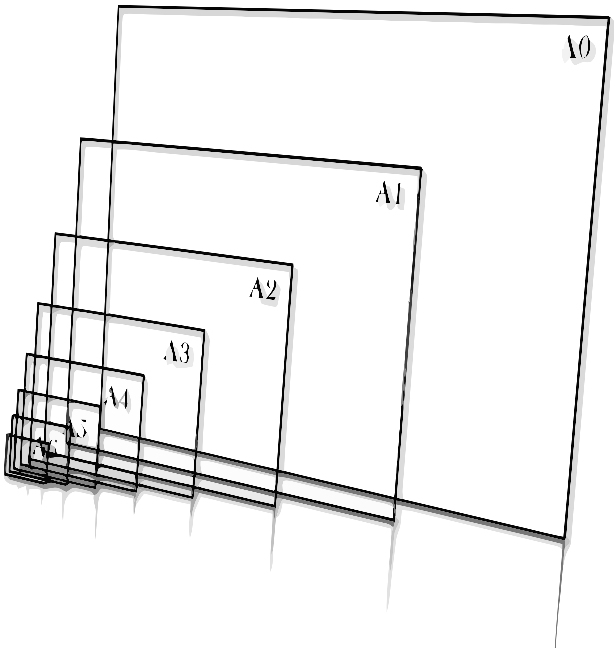
$$a_n = l_{An} \cdot c_{An} = 2^{-\frac{1+2n}{4}} \cdot \frac{2^{1-2n}}{4} = 2^{\frac{-1-2n+1-2n}{4}} = 2^{-\frac{4n}{4}} = 2^{-n} \tag{4.3}$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{2^n} \tag{4.4}$$

Esta sequência pode ser observada na Figura 12.

Figura 12 – A sequência dos papéis da série A.



Elaborada pela autora.

As áreas das folhas de papel da série B também estão em progressão geométrica.

Para provarmos isto, vamos usar a fórmula geral que nos dá as medidas da largura e do comprimento da folha formato Bn, obtidas na Seção 3.2, a saber:

$$c_{Bn} = 2^{\frac{1-n}{2}} \text{ e } l_{Bn} = 2^{-\frac{n}{2}}$$

Então, a área da folha de papel Bn, que denotamos por b_n é dada por

$$b_n = l_{Bn} \cdot c_{Bn} = 2^{-\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{1-n}{2}} = 2^{\frac{-n+1-n}{2}} 2^{\frac{-2n+1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^n} \tag{4.5}$$

$$\therefore b_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n} \tag{4.6}$$

Notemos que este termo é o termo geral de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Como

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} \tag{4.7}$$

Então

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}}{\frac{\sqrt{2}}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{2}} = 2^{n-n-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \tag{4.8}$$

Mas o quociente $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ nos fornece a razão da progressão geométrica cujo termo geral é a área da folha de papel Bn. Desta forma, a sequência das áreas dos papéis formatos Bn, $(b_n) = (b_0, b_1, \cdots, b_{10})$, definida por

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2^1}, \frac{\sqrt{2}}{2^2} \cdots, \frac{\sqrt{2}}{2^n}\right) \tag{4.9}$$

é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, com termo geral igual a $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$.

O mesmo acontece para a sequência das áreas das folhas de papel do formato Cn. Estas formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, com termo geral igual a

$$c_n = \frac{\sqrt[4]{2}}{2^n}, \tag{4.10}$$

de onde provém a sequência abaixo:

$$\left(\sqrt[4]{2}, \frac{\sqrt[4]{2}}{2^1}, \frac{\sqrt[4]{2}}{2^2} \cdots, \frac{\sqrt[4]{2}}{2^n}\right) \tag{4.11}$$

Na Tabela 5 organizamos as relações gerais para se obter a área de cada folha de papel das série A, B ou C.

Tabela 5 – As áreas das folhas das séries A, B e C.

Formato	Área
An	$\frac{1}{2^n}$
Bn	$\frac{\sqrt{2}}{2^n}$
Cn	$\frac{\sqrt[4]{2}}{2^n}$

Elaborada pela autora.

4.2 A folha A0: um tabuleiro de frações

Nesta seção faremos generalizações sobre as frações de uma folha em relação à outra. Estas generalizações facilitarão responder perguntas como:

Que fração da folha A4 é a folha A6?

Quantas folhas A4 cabem exatamente na folha A0?

No esquema da Figura 6, na página 28, podemos observar que a folha A1 corresponde a $\frac{1}{2}$ da folha A0, que a folha A2 corresponde a $\frac{1}{2}$ da folha A1 e que, de um modo geral a folha A(n+1) corresponde a $\frac{1}{2}$ da folha An.

De fato, a área da folha A(n+1) é $\frac{1}{2^{n+1}}$ e da folha An é $\frac{1}{2^n}$. Assim,

$$\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{1} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^n \cdot 2^1} = \frac{1}{2} \tag{4.12}$$

Logo, a folha A(n+1) corresponde a $\frac{1}{2}$ da folha An.

4.2.1 Quantas folhas An (ou Bn ou Cn) cabem na folha A0 (ou B0 ou C0)?

Esta pergunta será respondida usando o resultado que obtivemos sobre a área de uma folha de papel formato An.

Notemos que o formato básico desta série tem área 1 e o formato An tem área igual a $\frac{1}{2^n}$. Portanto, em uma folha de área 1 cabem 2^n folhas do tipo An, já que $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$. Logo, na folha tipo A0 cabem 2^n folhas An, significando dizer que a folha An representa $\frac{1}{2^n}$ da folha A0, ou ainda que, numa folha A0 cabem 2^n folhas An.

Com base nessa relação podemos descobrir, por exemplo, quantas folhas de papel formato A7 cabem na folha A0, bastando substituir $n = 7$ na relação 2^n. Portanto, chegamos à conclusão que cabem $2^7 = 128$ folhas A7 na folha A0.

Seguindo o mesmo raciocínio, encontramos uma generalização para sabermos quantas folhas Bn cabem na folha B0.

Observando a sequência das áreas das folhas formatos Bn, na Seção 4.1, vemos que a área do formato básico desta série, ou seja, do papel B0, é $b_0 = \sqrt{2}$. Então o formato Bn, com área igual a $b_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ cabe 2^n vezes no formato Bn, pois $2^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^n} = \sqrt{2}$, que é a medida da área do papel B0.

Analogamente, c_n, a sequências das áreas das folhas da série Cn, descrita em 4.11 da seção 4.1 (página 42), nos fornece $c_0 = \sqrt[4]{2}$ e $\frac{\sqrt[4]{2}}{2^n}$. Logo, o formato Cn também cabe 2^n vezes no formato C0.

4.2.2 E quantas folhas An (ou Bn ou Cn) cabem na folha Am (ou Bm ou Cm) ?

Se $m = 0$, então a pergunta está respondida no item anterior;

Se, $m = n$, então caberá uma única folha An na folha Am;

Se $m > n$, então a folha Am será menor que a folha An;

Mas se, porém, $m < n$ e $m \neq 0$, teremos que fazer a seguinte análise:

A área da folha An é $\frac{1}{2^n}$ e da folha Am é $\frac{1}{2^m}$. Logo, vamos dividir a área $\frac{1}{2^m}$ em tamanhos iguais a $\frac{1}{2^n}$ para sabermos quantas vezes o tamanho de An cabe no tamanho Am. Assim, teremos:

$$\frac{1}{2^m} : \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^m}{1} = \frac{2^m}{2^n} = 2^{m-n} \tag{4.13}$$

Portanto, na folha Am cabem 2^{m-n} folhas An. Ou seja, a folha An representa $\frac{1}{2^{m-n}}$ da folha Am.

A Tabela 6 mostra quantas vezes uma folha An cabe numa folha Am, e que fração da folha Am An representa. Podemos notar que, se $n < m$, então a folha An representa uma fração da folha Am. E se $n > m$, então a folha An representa $\frac{1}{2^n}$ da folha Am.

Os mesmos valores são considerados pelas série B e C.

Tabela 6 – O papel An cabe 2^n vezes no A0.

	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
A0	2^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^{10}}$
A1	2^1	2^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^8}$	$\frac{1}{2^9}$
A2	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^7}$	$\frac{1}{2^8}$
A3	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^7}$
A4	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$
A5	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$
A6	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$
A7	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$
A8	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{2^2}$
A9	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	$\frac{1}{2^1}$
A10	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Elaborada pela autora.

4.3 Semelhança de retângulos

Mostraremos nesta seção que as folhas das séries A, B e C são semelhantes entre si. Além de que apresentaremos uma sequência de folhas de papel que também são semelhantes entre si. Mas antes, definiremos retângulos semelhantes.

Definição 4.2 (Retângulos Semelhantes) *Sejam ABCD e EFGH dois retângulos distintos, tais que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente, o comprimento e a largura de ABCD; e $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são, respectivamente, o comprimento e a largura de EFGH. Dizemos que esses dois retângulos são semelhantes se existe um número real r, tal que*

$$r = \frac{med(\overline{AB})}{med(\overline{BC})} = \frac{med(\overline{EF})}{med(\overline{FG})}$$

4.3.1 As folhas tipo An, Bn e Cn são retângulos semelhantes entre si

Mostraremos aqui que se tomarmos duas folhas quaisquer de qualquer um dos formatos An, Bn ou Cn, estas serão retângulos semelhantes.

Para generalizarmos, vamos considerar uma folha An, dividí-la ao meio. Dessa forma obteremos a folha A(n+1). Como $l_{An} = 2^{-\frac{1+2n}{4}}$ e $c_{An} = 2^{\frac{1-2n}{4}}$, de acordo com equações (3.20) e (3.24), na página 30, obtemos:

$$l_{A(n+1)} = 2^{-\frac{1+2(n+1)}{4}} \tag{4.14}$$

$$2^{-\frac{1+2n+2}{4}} = 2^{-\frac{2n+3}{4}} \tag{4.15}$$

$$c_{A(n+1)} = 2^{\frac{1-2(n+1)}{4}} \tag{4.16}$$

$$2^{\frac{1-2n-2}{4}} = 2^{-\frac{2n+1}{4}} \tag{4.17}$$

A razão entre o comprimento e a largura da folha An é dada por:

$$\frac{c_{An}}{l_{An}} = \frac{2^{\frac{1-2n}{4}}}{2^{-\frac{1+2n}{4}}} \tag{4.18}$$

$$2^{\frac{1-2n}{4}-(-\frac{1+2n}{4})} = 2^{\frac{1-2n+1+2n}{4}} \tag{4.19}$$

$$2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \tag{4.20}$$

$$\therefore \frac{c_{An}}{l_{An}} = \sqrt{2} \tag{4.21}$$

A razão entre o comprimento e a largura da folha A(n+1) é dada por:

$$\frac{c_{A(n+1)}}{l_{A(n+1)}} = \frac{2^{-\frac{2n+1}{4}}}{2^{-\frac{2n+3}{4}}} \tag{4.22}$$

$$2^{\frac{-(2n+1)-[-(2n+3)]}{4}} = 2^{\frac{-2n-1+2n+3}{4}} \tag{4.23}$$

$$2^{\frac{2}{4}} = \sqrt{2} \tag{4.24}$$

$$\therefore \frac{c_{A(n+1)}}{l_{A(n+1)}} = \sqrt{2} \tag{4.25}$$

Por (4.21) e por (4.25), temos:

$$\frac{c_{An}}{l_{An}} = \frac{c_{A(n+1)}}{l_{A(n+1)}} = \sqrt{2} \tag{4.26}$$

Concluímos assim, que as folhas da série A são semelhantes entre si.

Também são semelhantes entre si as folhas da série B, já que são obtidas a partir da série A, por meio da média geométrica. E a média geométrica preserva a proporção entre medida do comprimento e da largura.

De fato, a razão entre comprimento e largura do papel de formato Bn também é igual à constante $\sqrt{2}$, como mostraremos a seguir:

$$\frac{c_{Bn}}{l_{Bn}} = \frac{2^{\frac{1-n}{2}}}{2^{-\frac{n}{2}}} \tag{4.27}$$

$$2^{\frac{1-n}{2}-(-\frac{n}{2})} = 2^{\frac{1-n+n}{2}} \tag{4.28}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \tag{4.29}$$

$$\therefore \frac{c_{Bn}}{l_{Bn}} = \sqrt{2} \tag{4.30}$$

De modo análogo podemos mostrar que as folhas de papéis da série C também são retângulos semelhantes.

Como visto na Seção 4.3.1, temos que

$$\frac{c_{Cn}}{l_{Cn}} = \frac{2^{\frac{3-4n}{8}}}{2^{-\frac{1+4n}{8}}} \tag{4.31}$$

$$2^{\frac{3-4n}{8}-\left(-\frac{1+4n}{8}\right)} = 2^{\frac{3-4n+1+4n}{8}} \tag{4.32}$$

$$2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}} \tag{4.33}$$

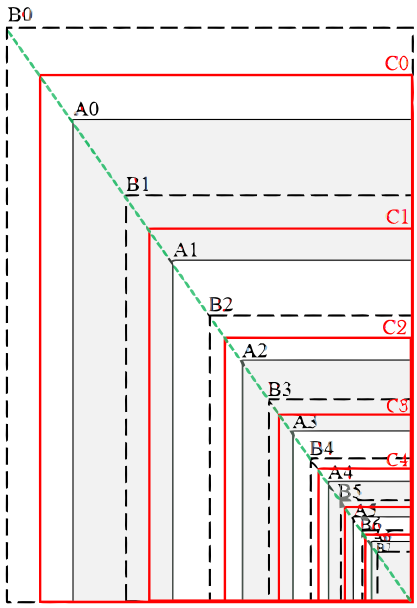
$$\therefore \frac{c_{Cn}}{l_{Cn}} = \sqrt{2} \tag{4.34}$$

Resumindo-se os resultados das equações 4.21, 4.30 e 4.34, obtemos

$$\frac{c_{An}}{l_{An}} = \frac{c_{Bn}}{l_{Bn}} = \frac{c_{Cn}}{l_{Cn}} = \sqrt{2} \tag{4.35}$$

Isto significa que as folhas An, Bn e Cn são retângulos semelhantes entre si, com razão de semelhança igual a $\sqrt{2}$. Essa semelhança pode ser visualizada na Figura 13.

Figura 13 – A semelhança entre as séries A, B e C.

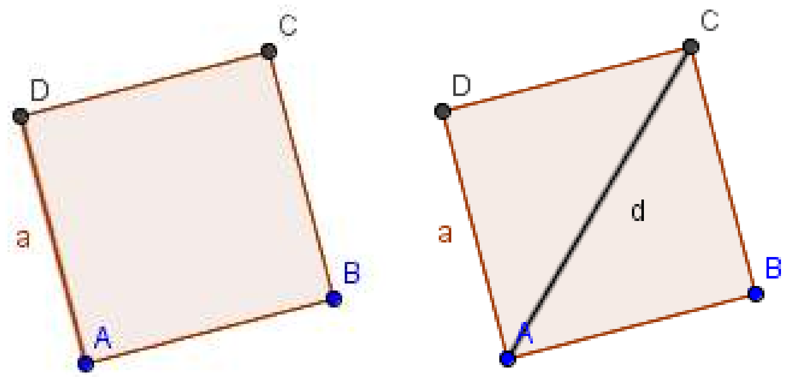


Elaborada pela autora.

4.3.2 Usando régua e compasso para obter $\sqrt{2}$

Podemos obter um retângulo com a mesma proporção descrita na seção anterior a partir de um quadrado qualquer. Um modo prático, usando régua e compasso, descreveremos a seguir. No entanto, estes passos podem ser feitos utilizando o *geogebra*[1].

Figura 14 – Execução dos passos 1 e 2.



Elaborada pela autora.

1. Desenhe um quadrado qualquer de lado a e vértices $ABCD$ (Figura 14);

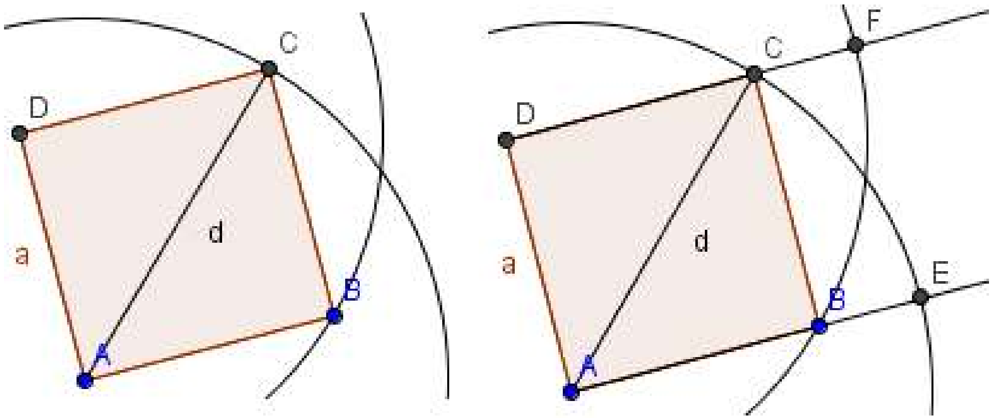
2. Trace a diagonal AC de medida d (Figura 14);

[1] O geogebra é um software matemático livre que pode ser encontrado em `http://www.geogebra.org/download`.

3. Com centro em A e raio d, trace a circunferência α passando por C e com centro em D e raio d, trace a circunferência β passando por B (Figura 15);

4. Marque os pontos E, intersecção da circunferência α com a semi-reta AB e F, intersecção da circunferência β com a semi-reta DC (Figura 15);

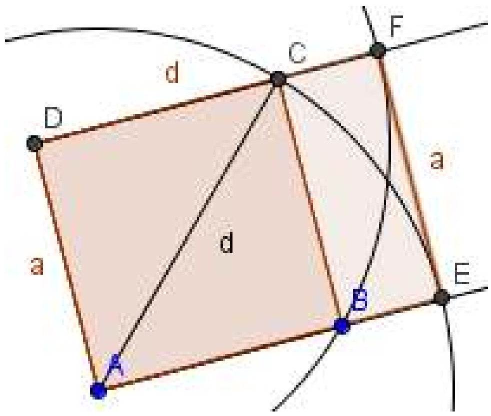
Figura 15 – Execução dos passos 3 e 4.



Elaborada pela autora.

5. O Retângulo $ABEF$ terá largura medindo a e comprimento medindo d. Qualquer que seja o valor de a (Figura 16).

Figura 16 – Execução do passo 5.



Elaborada pela autora.

Temos a garantia de que a razão $\dfrac{d}{a}$ entre os lados de medidas d e a é igual a $\sqrt{2}$ porque d é a diagonal do quadrado de lado medindo a. Assim, $d = a\sqrt{2}$. Logo,

$$\frac{d}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \tag{4.36}$$

4.3.3 E se a razão não fosse $\sqrt{2}$?

Vimos que a razão de semelhança entre as folhas destas séries de formatos é $\sqrt{2}$. Porém, se esta razão fosse diferente de $\sqrt{2}$? Veremos que, nesse caso, o quociente entre o comprimento e largura não será constante, ou seja, não haverá razão de proporcionalidade entre todas essas folhas.

Consideremos uma folha de papel retangular de comprimento c e largura l, com $c > l$. Vamos dividí-la ao meio, paralelamente à sua largura. Assim, obteremos duas novas folhas, agora com comprimento l e largura $\frac{c}{2}$. Faremos essa divisão sucessivamente e obteremos uma sequência de folhas retangulares com as dimensões descritas na Tabela 7 e indicadas na Figura 17. Nesta Tabela a coluna nomeada por "Folha" indica a quantidade de divisões da folha original.

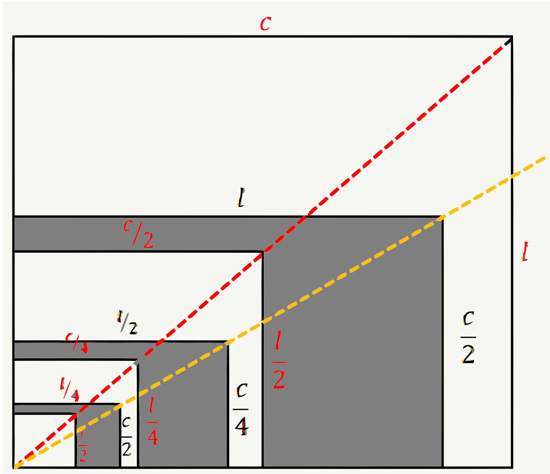
Tabela 7 – As dimensões sucessivas do retângulo $c \times l$.

Folha	Comprimento	Largura
0	c	l
1	l	$\frac{c}{2}$
2	$\frac{c}{2}$	$\frac{l}{2}$
3	$\frac{l}{2}$	$\frac{c}{4}$
4	$\frac{c}{4}$	$\frac{l}{4}$
5	$\frac{l}{4}$	$\frac{c}{8}$
6	$\frac{c}{8}$	$\frac{l}{8}$
7	$\frac{l}{8}$	$\frac{c}{16}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Elaborada pela autora.

Observando a quantidade n de divisões da folha original na Tabela 7, podemos notar a seguinte regularidade nas dimensões desta sequência de divisões:

Figura 17 – Divisões sucessivas.



Elaborada pela autora.

$$n \text{ par} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_n = \dfrac{l}{2^{\frac{n}{2}}} \\ c_n = \dfrac{c}{2^{\frac{n}{2}}} \end{cases}$$

$$n \text{ ímpar} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_n = \dfrac{c}{2^{\frac{n+1}{2}}} \\ c_n = \dfrac{l}{2^{\frac{n-1}{2}}} \end{cases}$$

Disto decorre que, se n é par, então a razão procurada será

$$\frac{l_n}{c_n} = \frac{\frac{l}{2^{\frac{n}{2}}}}{\frac{c}{2^{\frac{n}{2}}}} = \frac{c}{l} \tag{4.37}$$

Se, no entanto, n é ímpar, então

$$\frac{l_n}{c_n} = \frac{\frac{l}{2^{\frac{n-1}{2}}}}{\frac{c}{2^{\frac{n+1}{2}}}} \tag{4.38}$$

$$\frac{l}{2^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{c} = \frac{l}{c \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{-\frac{n+1}{2}}} \tag{4.39}$$

$$\frac{l}{2^{\frac{n-1-n-1}{2}}} = \frac{l}{c \cdot 2^{-1}} = \frac{2l}{c}. \tag{4.40}$$

Notemos que este resultado é para quaisquer c e l, tais que $c > l$. Em especial, se $\frac{c}{l} = \sqrt{2}$, teremos $\frac{c}{l} = \frac{2l}{c} = \sqrt{2}$, pois

$$\frac{2l}{c} = \frac{2l}{l\sqrt{2}} \tag{4.41}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \tag{4.42}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \tag{4.43}$$

Portanto, se a razão entre o comprimento e a largura de uma folha retangular $c \times l$ (com) não for igual $\sqrt{2}$, então será alternada entre $\frac{c}{l}$ e $\frac{2l}{c}$, conforme a quantidade de divisões da folha seja par ou ímpar, respectivamente.

4.3.4 E se dividirmos em n partes uma folha, qual será a razão entre comprimento e largura?

Na Seção 2.3 mostramos que $\sqrt{2}$ é a razão apropriada para uma folha de papel em formato retangular que, dividida em 2 partes iguais resulta em 2 folhas ainda semelhantes à original. No entanto, poderíamos estender essas divisões: não dividir em 2, mas em 3 partes iguais, ou em 4 partes iguais, ou em n partes iguais, sendo n um número natural maior que 2. A pergunta então é: Existe uma folha de papel em formato retangular que, dividida em n partes iguais, preserva a razão entre o comprimento e a largura? Em caso afirmativo, qual será a condição para que esta proporção aconteça?

Tomemos um retângulo de dimensões C (comprimento) e L (largura). Vamos dividir o seu comprimento em n partes iguais, sendo n um número natural maior que 2. Dessa forma obteremos n novos retângulos de dimensões $L \times \frac{C}{n}$. Queremos saber qual deverá ser a razão $\frac{C}{L}$ para que cada um dos n retângulos obtidos (menores) sejam semelhantes ao retângulo de dimensões $C \times L$.

Devemos ter

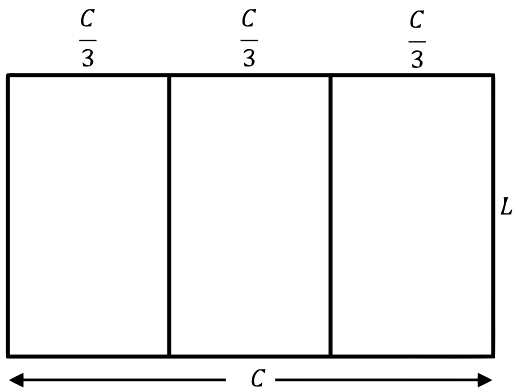
$$\frac{C}{L} = \frac{L}{\frac{C}{n}} \Rightarrow \frac{C^2}{n} = L^2 \Rightarrow \frac{C^2}{L^2} = n \Rightarrow \left(\frac{C}{L}\right)^2 = n \tag{4.44}$$

$$\therefore \frac{C}{L} = \sqrt{n} \tag{4.45}$$

Este resultado mostra que o retângulo existe desde que a razão entre o comprimento e a largura seja igual a $\sqrt{n}$. Em outros termos, dada uma dimensão da folha, a outra dependerá da primeira. Ou seja, se L é a largura, então o comprimento C deverá ser dado por $C = l\sqrt{n}$. Assim, no retângulo $C \times L$ da Figura 18, o valor de C deve ser $L\sqrt{3}$ para que cada um dos retângulos $L \times \frac{C}{3}$ sejam semelhantes ao retângulo original, $C \times L$.

Por exemplo, queremos uma folha de papel com 12,5 cm de comprimento que, dividida em três novos retângulos, de modo que a razão entre o comprimento e a largura seja preservada. E decorrência da equação (4.45) na página 51, a largura será dada por

Figura 18 – Divisão do retângulo $C \times L$ em 3 novos retângulos semelhantes.



Elaborada pela autora.

$$\frac{12,5}{L} = \sqrt{3} \quad (4.46)$$

$$L = \frac{12,5}{\sqrt{3}} \quad (4.47)$$

Calculando o valor de $\sqrt{3}$ com aproximação de uma casa decimal, obtemos $\sqrt{3} = 1,7$. Daí, obtemos

$$\therefore L \approx 7,6 \quad (4.48)$$

4.4 Porcentagem

Saber as taxas de redução e de ampliação de uma folha de papel da série A é uma questão de praticidade para quem opera máquinas fotocopiadoras. Tanto que esses tipos de máquinas já vêm com comandos previamente programados para esses casos. Já vimos que o principal motivo de se criar uma série de formatos de papel era justamente porque se procurava duplicar ou reduzir pela metade uma folha de papel sem, contudo, haver desperdício de papel.

Nesta seção faremos alguns cálculos que nos levam às taxas de ampliação e às taxas de redução de uma folha de papel de uma das séries A, B ou C. Procuramos generalizar essas taxas que servem para responder questões do tipo: *Em quantos porcento devo aumentar cada dimensão de uma folha de papel A4 para se obter uma folha A3?*

Para estas generalizações consideramos os resultados obtidos no Capítulo 3, quando mencionamos as dimensões série A, bem como quando definimos as folhas Bn e Cn. Isto é fundamental para entendermos as taxas de ampliação e de redução equivalentes. Na Figura 9, página 36 é possível observar que o valor da ampliação de:

- An para A(n-1) é igual ao valor da ampliação de Bn para B(n-1) e de Cn para C(n-1) ;
- An para Bn é igual ao valor da ampliação de Bn para A(n-1);
- An para Cn é igual ao valor da ampliação de Cn para Bn.

Observação 4.1 *Afim de simplificar os cálculos para generalizarmos os resultados, usaremos as seguintes notações:*

- *Xn é o formato de folha da série X*[2]*;*
- $a_X{}^X$ *é a taxa de ampliação de um formato da série X para o formato imediatamente superior da mesma série X.*
- $a_X{}^Y$ *é a taxa de ampliação do formato Xn para o formato Yn.*
- $r_X{}^X$ *é a taxa de redução de um formato da série X para o formato imediatamente inferior da mesma série X.*
- $r_X{}^Y$ *é a taxa de redução do formato Xn para o formato Yn.*

Tanto para encontrarmos a taxa de ampliação, como para encontrarmos a taxa de redução de um formato para outro, vamos analisar a taxa de redimensionamento apenas da largura, já que o redimensionamento do comprimento é proporcional ao da largura. Portanto, as mesmas taxas de redimensionamento servem para os comprimentos.

Conhecendo essas taxas, é possível redimensionarmos uma folha qualquer de uma das séries A, B ou C, para obtermos outra folha qualquer destas mesmas séries.

4.4.1 Taxas de ampliação

Vamos encontrar, primeiramente, a porcentagem padrão de ampliação das dimensões de uma folha formato Xn para uma folha formato X(n-1), já que esta ampliação resulta em folha de papel da mesma série. Depois encontraremos as generalizações para ampliação dos formatos de séries distintas.

4.4.1.1 De Xn para X(n-1)

Do modo como foram definidas estas séries de formatos de papel, é imediato que o formato Xn é menor que o formato X(n-1). Logo, a alteração da folha Xn para se obter X(n-1) é, de fato uma ampliação.

[2] No caso deste trabalho estamos considerando as séries A, B e C.

Para encontrarmos a taxa de ampliação dos elementos (largura e comprimento) de Xn, de modo a se obter X(n-1), devemos saber o valor que devemos acrescentar na largura (e no comprimento) da folha Xn para se obter a largura da folha X(n-1).

Seja α este acréscimo.

Então

$$\alpha = l_{X(n-1)} - l_{Xn} \tag{4.49}$$

Como, nesse caso, o acréscimo é em l_{Xn}, esta taxa será dada por $\dfrac{\alpha}{l_{Xn}}$.

Daí, a taxa de ampliação de uma folha para um formato superior será:

$$\begin{aligned} {a_X}^X = \frac{\alpha}{l_{Xn}} &= \frac{l_{X(n-1)} - l_{Xn}}{l_{Xn}} && (4.50)\\ \frac{l_{X(n-1)}}{l_{Xn}} - \frac{l_{Xn}}{l_{Xn}} &= \frac{l_{X(n-1)}}{l_{Xn}} - 1 && (4.51) \end{aligned}$$

Mas já vimos na Seção 4.3.1 que a razão de semelhança entre uma folha X(n-1) e uma folha Xn é $\sqrt{2}$. Segue que

$${a_X}^X = \sqrt{2} - 1 = 0,4142\cdots \approx 0,4142 \tag{4.52}$$

Portanto, a taxa de ampliação de uma folha formato Xn para o formato superior, X(n-1) é de, aproximadamente, $41,42\%$. Isto significa que uma folha X(n-1) é aproximadamente 141% da folha Xn.

4.4.1.2 De An para Bn (ou de Bn para A(n-1))

Como a série Bn é definida como a média geométrica entre as folhas An e A(n-1) (Ver Seção 3.1), a taxa de aumento de An para Bn é a mesma de Bn para A(n-1).

$${a_A}^B = \frac{l_{Bn} - l_{An}}{l_{An}} = \frac{l_{An}}{l_{Bn}} - \frac{l_{An}}{l_{An}} = \frac{l_{Bn}}{l_{An}} - 1 \tag{4.53}$$

Como $l_{An} = 2^{-\frac{1+2n}{4}}$ e $l_{Bn} = 2^{-\frac{n}{2}}$, de acordo com a Tabela 11 do Apêndice A, segue que

$$\begin{aligned} {a_A}^B &= \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{2^{-\frac{1+2n}{4}}} - 1 && (4.54)\\ {a_A}^B &= 2^{-\frac{n}{2}+\frac{1+2n}{4}} - 1 && (4.55)\\ {a_A}^B &= 2^{\frac{-2n+1+2n}{4}} - 1 && (4.56) \end{aligned}$$

Então,

$${a_A}^B = 2^{\frac{1}{4}} - 1 = \sqrt[4]{2} - 1 = 0,1892\cdots \approx 0,1892. \tag{4.57}$$

Portanto, para ampliar uma folha An, de modo que fique com dimensões iguais às da folha Bn, devemos aumentar suas dimensões em aproximadamente $18,92\%$. Esta também é a taxa de ampliação de uma folha Bn para uma folha A(n-1).

4.4.1.3 De An para Cn (ou de Cn para Bn)

Como a folha Cn tem um tamanho intermediário entre An e Bn (Ver Seção 3.3), a taxa de ampliação de An para Cn é a mesma de Cn para Bn.

Conforme equações (3.54), e (3.20), na página 38,

$$l_{Cn} = 2^{-\frac{1+4n}{8}} \text{ e } l_{An} = 2^{-\frac{1+2n}{4}}$$

Então a taxa de ampliação de An para Cn será

$$a_A{}^C = \frac{l_{Cn} - l_{An}}{l_{An}} \tag{4.58}$$

$$a_A{}^C = \frac{l_{Cn}}{l_{An}} - 1 \tag{4.59}$$

Segue que

$$a_A{}^C = \frac{2^{-\frac{1+4n}{8}}}{2^{-\frac{1+2n}{4}}} - 1 \tag{4.60}$$

$$a_A{}^C = 2^{-\frac{1+4n}{8}+\frac{1+2n}{4}} - 1 \tag{4.61}$$

$$a_A{}^C = 2^{\frac{-1-4n+2+4n}{8}} - 1 \tag{4.62}$$

Daí,

$$a_A{}^C = 2^{\frac{1}{8}} - 1 \tag{4.63}$$

$$a_A{}^C = \sqrt[8]{2} - 1 \tag{4.64}$$

$$a_A{}^C = 0,0905\cdots \approx 0,0905 \tag{4.65}$$

Logo, a taxa de aumento nas dimensões da folha An para a folha Cn é de, aproximadamente, $9,05\%$. Do mesmo modo, a taxa de ampliação de Cn para Bn também é de, aproximadamente $9,05\%$.

Estas taxas de ampliação calculadas nesta seção estão resumidas na Tabela 8.

4.4.2 Taxas de redução

Nesta Seção calcularemos as porcentagens de redução nas dimensões de uma folha maior para uma folha menor. Como as folhas An, Bn e Cn são semelhantes entre si, generalizaremos os cálculos.

Tabela 8 – Resumo das taxas de ampliação.

De	**Para**	**Acréscimo**[3]
An	A(n-1)	41 %
Bn	B(n-1)	41 %
Cn	C(n-1)	41 %
An	Bn	19 %
Bn	A(n-1)	19%
Cn	Bn	9%
An	Cn	9%

Elaborada pela autora.

4.4.2.1 De X(n-1) para Xn

Sendo ${r_X}^X$ a taxa de redução de uma folha Xn para X(n-1),

$$ {r_X}^X = \frac{l_{X(n-1)} - l_{Xn}}{l_{X(n-1)}} = {r_X}^X = 1 - \frac{l_{Xn}}{l_{X(n-1)}} \tag{4.66} $$

Mas a razão entre l_{Xn} e $l_{X(n-1)}$ é $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Então

$$ {r_X}^X = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,2928\cdots \approx 0,2928 \tag{4.67} $$

Portanto, a diferença entre as medidas da folha X(n-1) para Xn é de, aproximadamente 29,28 %. Isto significa que cada dimensão da folha Xn é aproximadamente igual a 71% da folha X(n-1). Por fim, organizamos a Tabela 9, que mostra as taxas de redimensionamento de formatos da mesma série.

4.4.2.2 De Bn para An (ou de A(n-1) para Bn)

Agora vamos calcular a taxa de redução da folha Bn para An, que é a mesma de A(n-1) para Bn.

$$ {r_B}^A = \frac{l_{Bn} - l_{An}}{l_{Bn}} \tag{4.68} $$

$$ {r_B}^A = 1 - \frac{l_{An}}{l_{Bn}} \tag{4.69} $$

Substituindo os valores das equações (3.37) e (3.20), na página 33 na última igualdade acima, resulta em

$$r_B{}^A = 1 - \frac{2^{-\frac{1+2n}{4}}}{2^{-\frac{n}{2}}} \tag{4.70}$$

$$r_B{}^A = 1 - 2^{-\frac{1+2n}{4}+\frac{n}{2}} \tag{4.71}$$

$$r_B{}^A = 1 - 2^{\frac{-1-2n+2n}{4}} \tag{4.72}$$

Portanto,

$$r_B{}^A = 1 - 2^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0,1590\cdots \approx 0,1590. \tag{4.73}$$

4.4.2.3 De Cn para An (ou de Bn para Cn)

Achar a taxa de redução de uma folha Cn para uma folha formato An é a mesma de uma folha Bn para Cn.

$$r_C{}^A = \frac{l_{Cn} - l_{An}}{l_{Cn}} = 1 - \frac{l_{An}}{l_{Cn}} \tag{4.74}$$

Tabela 9 – Taxas de redimensionamento da série X.

$\mapsto$	**X0**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**X9**	**X10**
X0	**100%**	71%	50%	35%	25%	18%	12,50%	8,80%	6,20%	4,40%	3,10%
X1	141%	**100%**	71%	50%	35%	25%	18%	12,50%	8,80%	6,20%	4,40%
X2	200%	141%	**100%**	71%	50%	35%	25%	18%	12,50%	8,80%	6,20%
X3	283%	200%	141%	**100%**	71%	50%	35%	25%	18%	12,50%	8,80%
X4	400%	283%	200%	141%	**100%**	71%	50%	35%	25%	18%	12,50%
X5	566%	400%	283%	200%	141%	**100%**	71%	50%	35%	25%	18%
X6	800%	566%	400%	283%	200%	141%	**100%**	71%	50%	35%	25%
X7	1131%	800%	566%	400%	283%	200%	141%	**100%**	71%	50%	35%
X8	1600%	1131%	800%	566%	400%	283%	200%	141%	**100%**	71%	50%
X9	2263%	1600%	1131%	800%	566%	400%	283%	200%	141%	**100%**	71%
X10	3200%	2263%	1600%	1131%	800%	566%	400%	283%	200%	141%	**100%**

Fonte: Adaptado de `www.cl.cam.ac.uk` [11].

Substituindo os valores das equações (3.54) e (3.20) na página 38 na última igualdade acima, resulta em

$$r_C{}^A = 1 - \frac{2^{-\frac{1+2n}{4}}}{2^{-\frac{1+4n}{8}}} \tag{4.75}$$

$$r_C{}^A = 1 - 2^{-\frac{1+2n}{8} + \frac{1+4n}{8}} \tag{4.76}$$

$$r_C{}^A = 1 - 2^{\frac{-2-4n+1+4n}{8}} \tag{4.77}$$

$$r_C{}^A = 1 - 2^{-\frac{1}{8}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[8]{2}} = 0,0829\cdots \approx 0,0829 \tag{4.78}$$

Logo, a taxa de redução da folha Cn para a folha An é de, aproximadamente, 8,29%.

Estas taxas de redução que encontramos estão resumidas na Tabela 10 (Valores Aproximados).

Tabela 10 – Resumo das taxas de redução.

De	**Para**	**Redução de**
A(n-1)	An	29 %
B(n-1)	Bn	29 %
C(n-1)	Cn	29 %
Bn	An	16 %
A(n-1)	Bn	16%
Bn	Cn	8%
Cn	An	8%

Elaborada pela autora.

4.5 A sequência das dimensões das folhas e as funções exponenciais

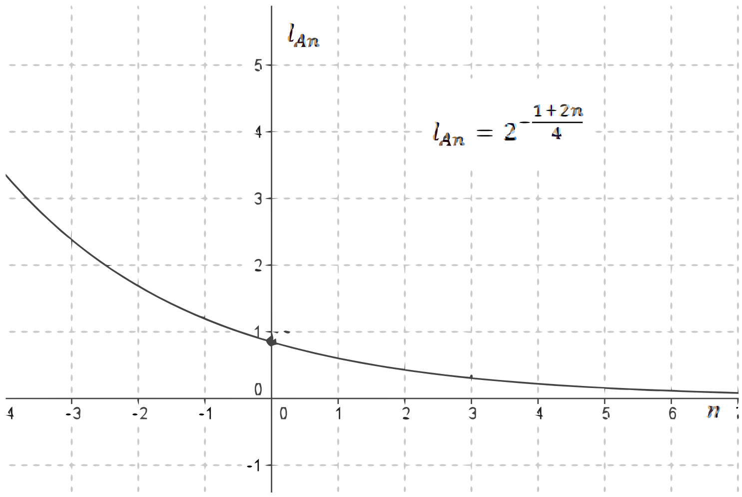
Nesta seção utilizaremos as fórmulas das dimensões deduzidas no Capítulo 3 e passaremos a encará-las como leis gerais de formação de uma função exponencial. Isto é uma consequência do fato de que essas fórmulas têm relação com a média geométrica, que nos fornece acréscimos (ou decréscimos) proporcionais nas dimensões de uma folha. No entanto, antes de prosseguirmos, vamos relembrar a definição de função exponencial.

Definição 4.3 *Chama-se função exponencial a toda função f definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que pode ser expressa pela lei de formação $f(x) = a^x$, sendo a um número real positivo e diferente de 1.[1].*

Podemos observar que as dimensões das folhas das séries A, B e C são potências de 2, conforme Tabela 11 do Apêndice A. Isto era de se esperar, já que obtemos estas sequências de folhas através de uma divisão em exatamente duas partes iguais, como vimos na Seção 3.1. Vimos também que a relação $l_{An} = 2^{-\frac{1+2n}{4}}$ nos dá a medida da largura da folha An, com n variando de 0 a 10. Nesse caso, nossa variável dependente é l_{An}, e depende diretamente do valor de n.

Por outro lado, se considerarmos que n é um número real qualquer, passamos a olhar a equação $l_{An} = 2^{-\frac{1+2n}{4}}$ como uma função exponencial de domínio real. Daí, teremos o gráfico descrito na Figura 19:

Figura 19 – Gráfico da largura do papel An em função de n.



Elaborada pela autora.

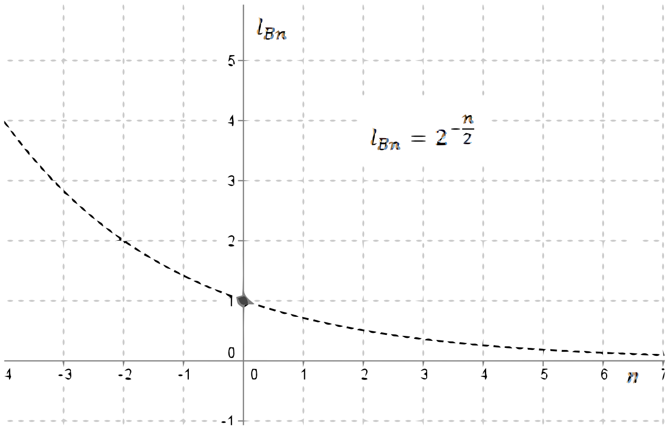
Notemos que o ponto de intersecção do gráfico de l_{An} com o eixo das ordenadas é o ponto $\left(0; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. Observemos ainda o ponto do gráfico temos a largura do papel A0, já que $n = 0$. Note ainda que o valor de l_{An} é dado em metros, conforme vimos no Capítulo 3. Assim, a medida da largura do papel A0 é aproximadamente igual a 0,841 metros, ou ainda 841 milímetros, de acordo com a Tabela 2, na página 31.

O mesmo raciocínio podemos ter com a equação do comprimento da folha An e com as dimensões dos papéis Bn e Cn, cujos gráficos da largura apresentamos a seguir.

Para o formato Bn, temos:

![h]

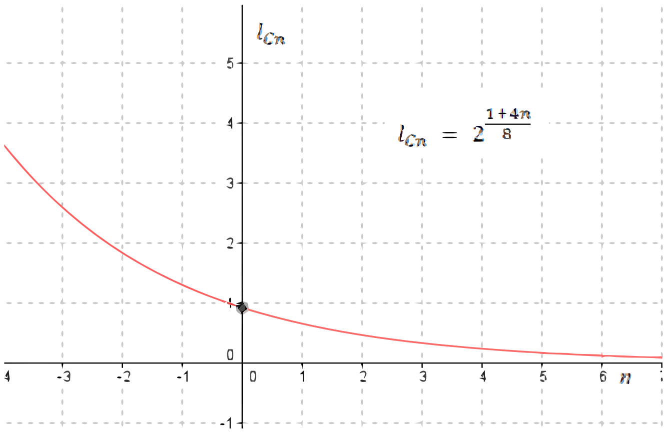
Figura 20 – Gráfico da largura Bn em função de n.



Elaborada pela autora.

E para o formato Cn,

Figura 21 – Gráfico da largura Cn em função de n.



Elaborada pela autora.

5 Atividades propostas sobre o tema

Apresentaremos aqui neste capítulo algumas atividades que podem ser aplicadas na educação básica, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio. Para facilitar o trabalho do professor, dividimos estas atividades conforme os conteúdos que podem ser explorados durante sua execução.

O(A) professor(a) deverá seguir os passos propostos em cada atividade ou, é claro, usar sua imaginação e ir muito além do que o proposto, ou ainda, adequar cada atividade às particularidades de cada turma.

5.1 Frações e área de retângulos

Público alvo: Alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.
Pré-requisitos: Noções de área.
Objetivos: Esta atividade pode servir para introduzir o conceito de fração e comparar frações. Poderá servir também para que o aluno adquira habilidade no cálculo de área de superfícies retangulares.
Instrumentos necessários: folhas de papel A4, tesoura, régua milimetrada e fita adesiva.
Procedimentos: A base para esta atividade será a folha de papel A4. O(A) professor(a) poderá seguir os passos listados a seguir, a fim de alcançar os objetivos propostos, abordando, dessa forma, conteúdos matemáticos de forma contextualizada.

Passo 1: Mostrar aos alunos as características das folhas de papel formato tipo An, apresentando uma folha de papel A4, de modo que o aluno perceba as características da série, conforme mostradas na Seção 3.1;

Passo 2: Dividir a turma em 10 grupos, de maneira que cada grupo reproduza um tamanho de papel da séria A. Note que os grupos que reproduzirão as folhas de papel A0, A1, A2 e A3 precisarão de fita adesiva para unir as folhas de papel A4 e os grupos que reproduzirão as folhas de papel A5, A6, A7, A8, A9 e A10 precisarão de tesoura para cortar a folha de papel A4;

Passo 3: Orientar que cada grupo pesquise a utilidade do papel que reproduziu e exponha para os demais grupos. (Ver Tabela 1 na página 22);

Passo 4: O(A) professor(a) deverá fazer indagações aos grupos, para que os alunos cheguem às regularidades obtidas na Seção 4.2:

1. Quantas folhas de papel A4 o grupo precisou? Alguns grupos, naturalmente, precisaram de mais de uma folha, enquanto outros grupos precisaram de

menos de uma folha. Interessante notar que os grupos que precisaram fracionar a folha A4 terão como resposta frações próprias, pois precisaram de menos de uma folha.

2. Para os grupos 5, 6, 7, 8, 9 e 10: Quantas folhas An (para n variando de 5 a 10) cabem, sem superposição, na folha de papel A4?

3. Para os grupos 0, 1, 2, 3 e 4: Quantas folhas de papel A4 cabem na folha An (para n variando de 0 a 4)? (Ver Tabela 6 na página 44).

Passo 5: Explicar o conceito de fração utilizando as respostas dos alunos às questões feitas no Passo 4. É bom começar mostrando que as folhas A5, A6, ... A10 são frações da folha A4. Por exemplo, para obtermos a folha A5, é preciso dividir a folha A4 em duas partes iguais. Daí, cada uma dessas partes será $\frac{1}{2}$ da folha A4. Analogamente, a folha A6 é obtida dividindo-se a folha A4 em 4 partes iguais. Assim, a folha A6 é $\frac{1}{4}$ da folha A4;

Passo 6: Cada grupo deverá usar régua milimetrada para medir as dimensões (largura e comprimento) da folha que o grupo reproduziu e calcular sua área, com o objetivo de preencher o Quadro 2. Por outro lado, é bom que os alunos aprendam a escrever em forma de fração a área da folha de papel em questão. Por exemplo, o Grupo 2 precisará de 4 folhas de papel A4 para montar sua folha. Então a folha de papel A4 é $\frac{1}{4}$ da folha A2. A fim de viabilizar o andamento da atividade, o(a) professor(a) deverá reproduzir o Quadro 2 com antecedência, num tamanho apropriado para visualização da turma, e solicitar que os grupos a preencham. Note que cada grupo preencherá as informações referentes a sua folha. Importante: Antes de cada grupo preencher a tabela, o(a) professor(a) deverá constatar se a informação está correta. Caso o grupo não chegue na informação correta, o(a) professor(a) deverá fazer intervenções para que as dúvidas sejam esclarecidas.

Quadro 2: Atividade sobre frações.

AS DIMENSÕES DAS FOLHAS SÉRIE A											
DIMENSÕES	**A0**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**
LARGURA (mm)											
COMPRIMENTO (mm)											
ÁREA (mm^2)											
FRAÇÃO DA FOLHA A0											

Elaborada pela autora.

Passo 8: Após a tabela devidamente preenchida, cada grupo fará uma exposição oral sobre as características do seu papel, principalmente deverão falar das propriedades matemáticas utilizadas no decorrer da atividade, explicando, principalmente, a fração envolvida na folha de papel que os alunos montaram.

5.2 Semelhança de retângulos

Público alvo: Alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.
Pré-requisitos: Razão e proporção.
Objetivos: Trata-se de uma atividade para contextualizar o ensino sobre razão e proporção.
Instrumentos necessários: Para esta atividade os alunos irão precisar de régua e calculadora.
Procedimentos: A ideia é que o(a) professor(a) dê as seguintes orientações aos alunos, para que os alunos descubram a proporcionalidade entre as folhas da série A:

Passo 1: Distribua uma folha de papel A4 para cada aluno, fazendo perguntas que ajudem os alunos perceberem que a folha é um retângulo. Explore as características de um retângulo usando a folha de papel como exemplo;

Passo 2: Peça que estes dobrem a folha ao meio, paralelamente à sua largura, de modo a obter duas novas folhas menores e com medidas iguais a da folha original;

Passo 3: Cada aluno deverá medir a largura e o comprimento da folha A4 e do formato das novas folhas obtidas;

Passo 4: Oriente que os alunos dividam o comprimento pela largura. Isso deve ser feito para os dois tamanhos de folha. (Ver Seção 4.3.1);

Passo 5: Cada aluno mostrará o resultado obtido e fará a comparação entre os resultados dos colegas. O(A) professor(a) deverá ajudar o aluno que não chegou ao resultado correto;

Passo 6: O(A) professor(a) deverá fazer indagações aos alunos, a fim de que estes compreendam que os dois tamanhos são exemplos de retângulos semelhantes, como se um fosse ampliação (ou redução) do outro. Além disso, os alunos deverão perceber que o número encontrado é, na verdade, a razão de semelhança entre esses dois retângulos, ou ainda, que as dimensões da folha A5 podem ser obtidas multiplicando-se as dimensões da folha A4 pela razão de semelhança encontrada;

Passo 7: A atividade pode continuar e se repetir, basta dobrar ao meio a folha A5 para obter a A6, e depois dobrar a A6 para obter a A7, e assim por diante até chegar a folha A10. Dessa forma os alunos poderão obter uma sequência de retângulos semelhantes, com medidas proporcionais. (Ver Tabela 2 na página 31).

5.3 Números irracionais e raiz quadrada aproximada

Público alvo: Alunos do 8º ou 9º ano do ensino fundamental.
Pré-requisitos: Noção de números racionais e cálculo de raiz quadrada aproximada sem o uso de calculadora.
Objetivos: Contextualizar o ensino de raiz quadrada aproximada.
Instrumentos necessários: Para esta atividade os alunos irão precisar de régua milimetrada.
Procedimentos: A ideia é que o(a) professor(a) lance desafios à turma, relativos a números irracionais e raízes quadradas aproximadas:

Passo 1: Peça que os alunos criem uma folha de papel em formato retangular de modo que, dividindo esta folha em 3 novas folhas retangulares, cada uma dessas novas folhas sejam semelhantes à folha original. Espera-se que os alunos consigam encontrar $\sqrt{3}$ como razão entre o comprimento e a largura de cada folha, conforme Seção 4.3.4. Fale sobre números irracionais citando $\sqrt{3}$ como exemplo;

Passo 2: Os alunos deverão ser instigados a fornecerem as dimensões dessas folhas sem usar calculadora. Eles deverão perceber que uma das dimensões será arbitrária, mas a outra será calculada, pois dependerá da primeira. Comente com os alunos que, nesse caso, isso acontece porque as medidas dessas dimensões devem ser proporcionais. Este é o momento ideal para relembrar o conceito e o significado prático de proporcionalidade;

Passo 3: Conhecendo as medidas da largura e do comprimento da folha criada, estimule os alunos a reproduzirem esta folha usando uma folha qualquer de papel, com tamanhos adequados para esta reprodução. O fato de a largura ou o comprimento dessa folha dependerem de $\sqrt{3}$ será um empecilho para essa reprodução, já que $\sqrt{3}$ é um número irracional, portanto, com infinitas casas decimais. Mas o caso se resolve quando calculamos a raiz quadrada aproximada;

Passo 4: Mostre como calcular raiz quadrada aproximada de um número natural, sem o uso da calculadora. [15, 17];

Passo 5: Peça que os alunos criem novas folhas com as mesmas características, mas que sejam divididas em 4, 5, 6, ... novas folhas. Espera-se que os alunos cheguem à regularidade descrita na Seção 4.3.4.

5.4 Progressão geométrica

Público alvo: Alunos do 3º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Cálculo de áreas e noções de progressão geométrica.

Objetivos: Contextualizar o ensino sobre progressão geométrica.
Procedimentos: A Proposta desta atividade é que o aluno prove, através de propriedades matemáticas adequadas, que as áreas das folhas de papel da série A formam uma progressão geométrica e calcule sua razão, tal como foi feito na Seção 4.1. No entanto, antes de propor a atividade escrita aos alunos, o(a) professor(a) deverá apresentar os formatos de papéis da série A de acordo com as regularidades que esta série apresenta, como mostra a Seção 3.1.

Passo 1: Apresentar aos alunos as regularidades dos formatos de papel da série A abordadas na Seção 3.1;

Passo 2: Após o entendimento dos alunos acerca das regularidades desses formatos de papéis, o(a) professor(a) deverá lançar-lhes as seguintes questões escritas:

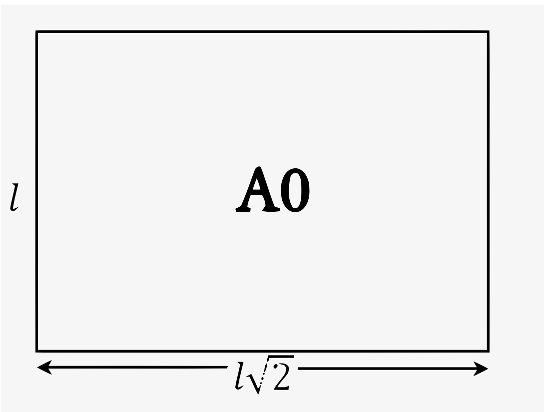
Os formatos de papel da série A obedecem aos seguintes princípios, de acordo com as normas técnicas estabelecidas por convenções (Capítulo 2):

1. *As folhas têm formas retangulares, são semelhantes entre si e a razão entre o comprimento e largura é constante e igual a* $\sqrt{2}$*;*
2. *O formato básico é a folha A0, que tem área igual a 1* m^2*;*
3. *A folha A(n+1) é obtida dobrando-se ao meio a folha An, paralelamente à sua largura. Por exemplo, a folha A1 é obtida dobrando-se a folha A0 ao meio; a folha A2 é obtida dobrando-se a folha A1 ao meio, e assim por diante.*

Com base nessas informações, responda às seguintes questões:

Questão 1: *Calcule a largura e o comprimento do papel A0, considerando as dimensões indicadas na Figura 22 na página 65.*

Figura 22 – A folha A0.



Elaborada pela autora.

Questão 2: *Escreva uma sequência formada pelas áreas das folhas A0, A1, $\cdots$, A10.*

Questão 3: *Escreva o termo geral para a sequência definida na questão 2.*

Questão 4: *Prove que esta sequência é uma progressão geométrica e calcule sua razão.*

Questão 5: *Qual a área da união, sem sobreposição, das folhas A1, A2, A3 e A4?*

Questão 6: *Para unir, sem sobreposição, uma folha de cada formato da série A (folhas A1, A2, $\cdots$, A10), qual seria a área ocupada?*

Questão 7: *Escreva a sequência das áreas das folhas da série B, sabendo que a área da folha B0 é $b_0 = \sqrt{2}$ e a da folha Bn é $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$. (Conforme equação (4.6) na página 41).*

Questão 8: *Com base no raciocínio da questão anterior, encontre uma fórmula para a área da união, sem sobreposição, das folhas An e Bn.*

Passo 3: Após os alunos responderem, individual ou coletivamente, o(a) professor(a) deverá trazer a discussão pra turma e pedir que os alunos justifiquem suas respostas.

Note que as questões 5 e 6 podem ser rapidamente respondidas se for usada a fórmula da soma de uma progressão geométrica.

5.5 Perímetros e áreas de retângulos

Esta atividade foi traduzida e adaptada do Grupo Acadêmico "*Mathematics & Mathematics Education* [1]". As alterações foram feitas de modo a se adequar ao objetivo deste trabalho.

Público alvo: Alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos: Cálculo de áreas e de perímetros.

Objetivos: Usar as regularidades das folhas de papel tipo An para despertar o espírito investigativo acerca de perímetros e áreas de retângulos.

Instrumentos necessários: tesouras, uma folha de papel A3 (branca) [2], duas folha de papel A4 (azul), uma folha de papel A4 (verde), uma folha de papel A5 (amarelo), uma folha de papel A6 (cor-de-rosa), fita adesiva para colocar papéis no quadro ou na parede, régua e calculadora.

Observação 5.1 *As folhas A3, A5, e A6 poderão ser obtidas a partir de diferentes folhas de papel A4. Para isso, observe o esquema na Figura 6 na página 28.*

Procedimentos: Sugerimos uma atividade em grupo de, no máximo, quatro componentes. As seguintes orientações devem ser dadas aos alunos e estes deverão ter a ajuda do(a) professor(a) para fazer as descobertas que objetivamos com esta atividade.

[1] Econtrada no link: `math.nie.edu.sg/bwjyeo/resources/PaperSize.doc`.

[2] As diferentes cores de papéis servem para ajudar na identificação das folhas.

Para o suporte do(a) professor(a) nesta atividade, sugerimos consultar a Seção 3.1 deste trabalho.

Passo 1: Pegue uma folha de papel A3 (branca) e uma folha de papel A4 (azul). Tente descobrir e anote as relações matemáticas existentes entre esses dois formatos. (Espera-se que o aluno conclua que os retângulos são semelhantes e que a medida da largura do papel A4 é exatamente metade da medida do comprimento do formato A3).

Passo 2: Meça o comprimento e a largura das folhas A3 e A4 e registre suas observações na Tabela 3 que segue. Calcule e registre a relação entre comprimento e largura para estes formatos de papel. Escreva as medidas com aproximações de 1 casa decimal. (Objetivamos que os alunos cheguem às medidas descritas no Quadro 2 na página 31).

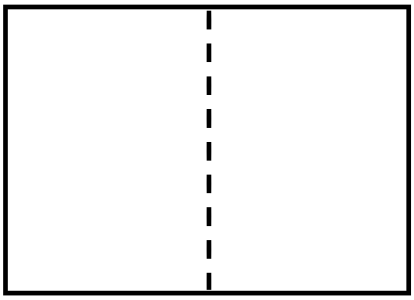
Quadro 3: A série A: comprimento x largura.

Papel	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Área (cm^2)	Perímetro (cm)
A1				
A2				
A3				
A4				
A5				
A6				
A7				
A8				
A9				
A10				

Elaborada pela autora.

Passo 3 : Pegue outra folha de papel A4 (verde), dobre-a em duas metades iguais ao longo da linha pontilhada, como mostrado na Figura 23 que segue. Corte na linha pontilhada. Cada metade é chamada de papel A5. Meça o comprimento e a largura do papel A5 e calcule sua área e seu perímetro com aproximação de 4 casas decimais. Registre suas observações no Quadro 3 na página 67.

Figura 23 – Divisão de uma folha ao meio.

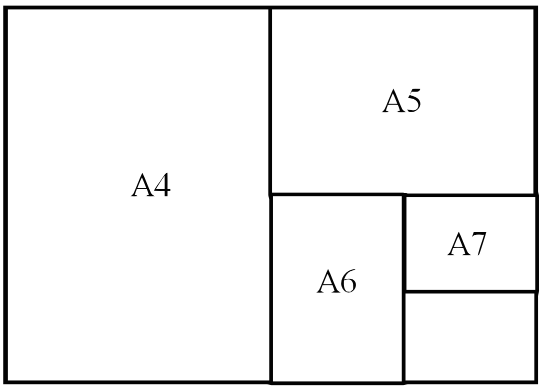


Elaborada pela autora.

Passo 4 Use a folha de papel A5 (amarelo), dobre-a em duas metades iguais ao longo da linha pontilhada, como mostrado na Figura 23. Corte na linha pontilhada. Cada metade é chamada de papel A6. Repita as mesmas medições, cálculos e registros solicitado no item anterior.

Passo 5 : Considerando a folha de papel A6 (cor-de-rosa), corte fora uma folha A7 e repita as mesmas medições, cálculos e registros. 6. Organize os formatos A4, A5, A6 e A7 no papel A3, de acordo com o diagrama abaixo (Figura 24). O maior retângulo ilustrado no diagrama é o papel A3.

Figura 24 – A folha A3.

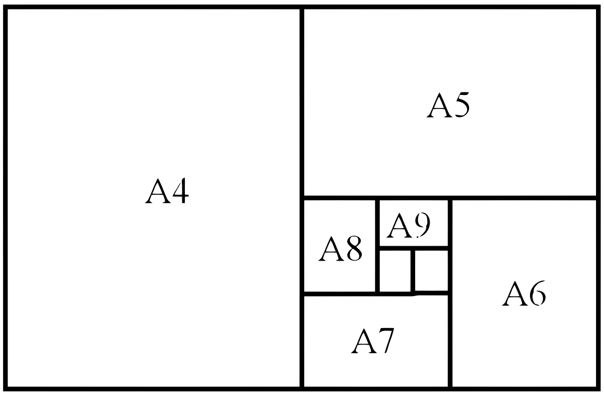


Elaborada pela autora.

Passo 6: Usando o restante papel A5 (verde), A6 papel (amarelo) e um papel A7 (cor-de-rosa), corte fora uma folha A8 (verde), uma A9 (amarelo) e uma A10 (cor-de-rosa). Repita as mesmas medições, cálculos e registros no Quadro 3 na página 67.

Passo 7: Organize as folhas de papel A8, A9 e A10 no mesmo padrão como o diagrama da Figura 25.

Figura 25 – Da folha A3 até a folha A10.



Elaborada pela autora.

Passo 8: Há outras maneiras de organizar os papéis. Você pode organizá-las "em espiral" para dentro? Caso afirmativo, desenhe abaixo esse modo.

Passo 9: Observe as áreas no quadro acima (Quadro 3). O que você percebe?

Passo 10: Observe os perímetros no quadro acima (Quadro 3). O que você percebe?

Passo 11: Vamos olhar para o problema de outro ângulo. O grande retângulo ilustrado no diagrama é A4, e cada metade é A5. A questão é: por que motivo é o comprimento do papel A4 duas vezes a largura do papel A5?

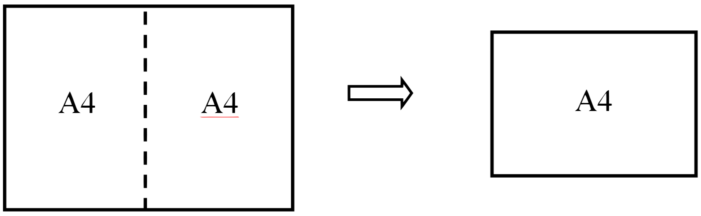
Passo 12: Use uma calculadora, complete o restante do Quadro 3.

5.6 Porcentagem

Público alvo: Alunos do 7º ou do 8º ano do Ensino Fundamental ou do 2º ano do Ensino Médio.
Pré-requisitos: Cálculo de taxas percentuais.
Objetivos: Contextualizar o ensino de porcentagem calculando taxas percentuais.
Instrumentos necessários: Régua milimetrada e calculadora.
Procedimentos: A atividade consiste de uma lista de problemas contextualizados envolvendo taxas percentuais das ampliações e das reduções das dimensões das folhas de papel da série A.

Questão 1: A fim de economizar papel em fotocopiadora, às vezes a gente pode fotocopiar duas páginas A4 a uma única página A4, como mostra a Figura 26. Qual é a percentagem de redução que você precisa para configurar a máquina de xerox? Note que a percentagem de redução refere-se à redução do comprimento ou largura, não da área.

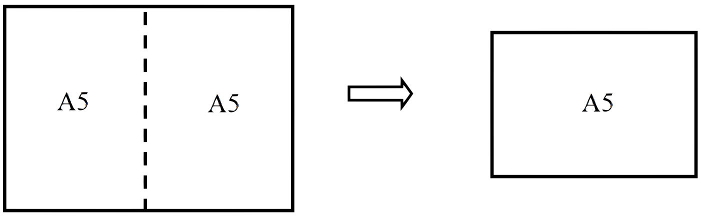
Figura 26 – A redução do A3 a duas folhas A4.



Elaborada pela autora.

Questão 2: Pode-se ampliar um tamanho A4 para uma folha de tamanho A3. Para fazer isso numa máquina copiadora, qual é a percentagem da ampliação, que você precisa para configurar esta máquina?

Figura 27 – Divisão da folha A4.



Elaborada pela autora.

Questão 3: Considere as dimensões de uma folha de papel A4. Dobre esta folha ao meio, paralelamente ao seu menor lado, conforme indica a Figura 27. Desta forma você obtém duas folhas de papel formato A5. Repita o mesmo procedimento com a folha A5 e obtenha a folha A6. Use uma régua e meça a largura da folha A6. Quantos porcento a largura da folha A6 é menor que a largura da folha A4? E o comprimento? Compare as duas taxas percentuais obtidas.

6 Relato de uma experiência envolvendo o tema

Neste capítulo faremos o relato de uma sequência de ensino que apresentamos em sala de aula, numa turma do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental Cecília Merelles, na Vila Arataú, no Município de Pacajá-PA. Na verdade esta sequência é uma união adaptada das atividades descritas nas Seções 5.1, 5.2 e 5.5 deste trabalho.

Conteúdos Abordados: Frações, Perímetro, Área, Semelhança e Proporcionalidade em Geometria.

Objetivos: Evidenciar a Matemática nas folhas de papel A4.

Instrumentos utilizados: Folhas de Papel A4, Data show [1], fita adesiva, tesoura, régua milimetrada e calculadora.

Condições da Turma: A turma é formada por 18 alunos provenientes do 8º ano e 1 aluna repetente do 9º ano. Esta foi a primeira aula de Matemática dos alunos este ano e foi numa sala improvisada pois a comunidade escolar espera a construção de salas de aulas definitivas.

Duração da aula: A aula ocorreu no dia 10 de fevereiro de 2015. Neste dia esta turma teve somente esta aula, com duração de, aproximadamente, cinco horas, incluindo intervalo para recreio.

6.1 Descrição da atividade

Nesta atividade a professora aplicadora fez uma aula dialogada e investigativa, com apresentação de *slides* (Disponíveis no Apêndice B.) e os alunos realizaram uma atividade prática orientada pela professora. A seguir descreveremos os passos desenvolvidos na sala de aula durante a aplicação da atividade:

Passo 1: A professora mostrou uma folha de papel A4 e indagou sobre o nome do papel A4. As repostas foram: Chamequinho, Chamex, Ofício, Papel sem pauta. A professora mostrou então a embalagem de uma resma do papel que foi dada à turma (Ver Figura 28). Alguns insistiram que era chamex, mas um aluno respondeu que o nome do papel era A4. Após dialogar um pouco sobre a utilidade desse papel, a professora indagou sobre o significado do "A" e o do "4" no nome desse papel. Obviamente, como se esperava, ninguém sabia responder. Mas a resposta não lhes foi dada neste momento.

[1] O Data Show serviu para a professora apresentar os *slides* mostrados no Apêndice B.

Figura 28 – Embalagem do papel A4.

Fonte: Eliane de Paula.

Passo 2: A professora distribuiu uma folha de papel A4 a cada um dos alunos (Ver Figura 29). As perguntas agora eram sobre a forma da folha. Os alunos não hesitaram em responder "quadrada" ou "retangular". Esta foi uma ótima oportunidade para esclarecer sobre as semelhanças e **diferenças entre um quadrado e um retângulo**, pois a professora fez os alunos refletirem **sobre as características de um retângulo e de um quadrado**, revisando conteúdo já trabalhado pela professora no ano anterior. Passaram então a refletir agora sobre as vantagens desta forma. A questão foi: "Quais as vantagens de se ter uma folha em forma de um retângulo?". Os alunos falaram de beleza, de costume e de facilidade para cortar a folha.

Passo 3: A professora pediu pra cada aluno **medir as dimensões da folha A4**, usando régua milimetrada. Alguns tiveram dificuldades e outros rapidamente falaram a resposta em centímetros. A professora pediu então que fizessem as conversões para milímetros. Um aluno percebeu que, com a régua não daria para medir exatamente. Foi a oportunidade que a professora teve para **falar de números racionais e irracionais**. Ali os alunos viram na prática uma medida não-exata. Essas medidas são inexatas porque são números irracionais[2]. A professora comentou que falaria sobre as propriedades do número obtido mais à frente, pois o momento era para calcularem a área e o perímetro da folha. A confusão de se multiplicar largura pelo comprimento ou somar o contorno reaparece [3]. A

[2] Note que nem toda medida não-exata corresponde a um número irracional, mas é certeza que todo número irracional corresponde a uma medida não-exata.

[3] A professora se depara frequentemente com esta dúvida dos alunos: ”Pra calcular área, soma ou multiplica?”

Figura 29 – Distribuição do papel A4.

Fonte: Eliane de Paula.

professora tenta esclarecer (novamente) essa confusão.

Passo 4: As indagações continuaram: "**Por que este valor é aproximado e não exato? Porque esta folha tem este tamanho? Como surgiu a folha de papel A4?**" Esta é a hora de falar da série A, da qual pertence o papel A4, da sua origem e dos sistemas de padronização sobre estes formatos de papel, da qual faz parte a ISO e a ABNT. (Ver Capítulo 2).

Passo 5: Atividade Prática: A professora dividiu a turma de modo que cada aluno fosse responsável para **reproduzir um formato da série A**. Como havia apenas 16 alunos neste dia, teve aluno que ficou só e outros formaram duplas. Sob orientação da professora, cada "dupla" reproduziu um formato de papel (Ver Figura 30). Os que reproduziram as folhas menores que a folha A4 (A5, A6, ..., A10) apenas dobram e cortaram; já os que reproduziram as folhas maiores que a A4 (A3, A2, A1 e A0) precisaram de fita adesiva para unir as folhas de papel A4. Durante este passo foram surgindo especulações de quantas folhas seria preciso para reproduzir o A0. Os palpites eram diversos: 8, 10, 16, 24. Uns só imaginavam, alguns contavam e outros faziam desenhos. Somente após a reprodução da folha A1 os alunos conseguiram perceber que numa folha A0 cabem, sem sobreposição, 16 folhas A4. Após a reprodução de todas as folhas, desde a folha A10 até a folha A0, afixamos sequencialmente estas folhas numa parere do lado de fora da sala de aula[4], conforme Figura 31 na página 75, de modo que os alunos percebessem a regularidade destes formatos.

[4] A sala de aula era improvisada e não havia parede livre para fazer isso do lado de dentro, mas isso não comprometeu a continuação dos trabalhos.

Figura 30 – Reprodução das folhas de papel pelos alunos.

Fonte: Eliane de Paula.

Passo 6: Agora chegou o momento de **explorar os conteúdos matemáticos contidos na série A**, como mostra a Figura 32. O Primeiro conteúdo abordado foi **frações**. A professora indagou: "De quantas folhas de papel A4 você precisa para obter a folha A3? Então que fração da folha A3 é a folha A4" E que fração da folha A7 é a folha A8? Que fração da folha A2 é a folha A4? E assim, os alunos observavam as perguntas, contavam as folhas A4 contidas em cada formato para respondê-las. E assim, a professora foi fazendo diversas perguntas reflexivas desse tipo e mostrou aos alunos que eles estavam comparando as áreas destas folhas.

Passo 7: A professora solicitou que cada "dupla"descobrisse **as dimensões da folha reproduzida** e anotasse o resultado. Todos queriam usar régua para medir, mas a professora fez os alunos compreenderem que, a partir das medidas da folha A4, era possível encontrar as dimensões de todas as folhas da série. Alguns entenderam e outros não. Preferiram usar a régua. Após encontrar as dimensões os alunos calcularam a **área** e o **perímetro** de cada folha, utilizando as medidas em milímetros.

Figura 31 – A sequência das folhas reproduzidas pelos alunos.

Fonte: Eliane de Paula.

Passo 8: É hora de trabalhar com **razão** e **proporcionalidade em geometria**. "Lembram o que é uma razão?" Foi unanimidade os alunos responderem que não. A professora então explicou, tendo êxito no resultado. "Agora calculem a razão entre o comprimento e largura de cada folha. Podem usar a calculadora". Uns encontraram 1,4142..., outros encontraram 1,4182... Perceberam que eles são valores aproximados? A professora explicou que os valores obtidos nas divisões deveriam ser todos iguais a 1,4142... O erro nas aproximações fica por conta dos arredondamentos ao se medir as dimensões das folhas. Os números obtidos são **racionais ou irracionais**? Usando a calculadora os alunos calcularam $\sqrt{2}$ e perceberam que tratava-se da mesma constante real. "Sabem o que isso significa?" Foi o momento de falar da proporcionalidade entre retângulos, da $\sqrt{2}$, como **razão de semelhança entre os retângulos** que estão sendo estudados. A professora mostrou a Figura 2 na página 24 para explicar que podemos obter esta razão em qualquer retângulo se o comprimento for a medida da largura multiplicada por $\sqrt{2}$. Esta é um razão que ficou definda quando se pensou nos formatos destas folhas de papel.

6.2 O relato de cada aluno

Ao final da aula, a professora pediu que cada aluno fizesse uma exposição, por escrito, do que aprendeu. Infelizmente os relatos não são totalmente claros, visto que os alunos apresentaram dificuldades em expressar suas idéias por escrito. Ainda assim transcreveremos tais relatos a seguir:

Aluno 1 "A professora Andréa Feitosa apresentou uma aula para a turma do 9º ano

Figura 32 – Mostrando a Matemática nas folhas de papel.

Fonte: Eliane de Paula.

sobre os tipos e as dimensões dos papéis da série A, que vão do A0 ao A10. Aprendemos que existem vários tamanhos de papel. Na série A a folha A0 é a maior de todas e a folha A10 é a menor. Em cada uma dessas folhas, se estudarmos suas medidas, encontramos frações, multiplicações e até mesmo radiciação. Aprendemos que a raiz quadrada de dois é igual à divisão do comprimento pela largura nos papéis da série A, que a folha A0 pode ser formada com 16 folhas A4. Também podemos formar a folha A0 com duas folhas A1. Além das folhas de papel da série A, também existem outras séries de folhas, como a série B e a série C que são bastante usadas na produção de envelopes de todos os tamanhos, para caber as folhas das outras séries."

Aluno 2 "Aprendi que, além da folha A4, existem várias outras formas, como a folha A5, A10 e outras. Com a folha A4 podemos fazer outras. Com uma folha A4 podemos fazer outras, como a folha A5 até A10. Para formar o A0 precisamos de 16 folhas A4, conhecidas como chamex. A professora explicou que a folha A4, dividida ao meio forma o A5, e a A5 forma a A6 e assim sucessivamente. Medimos também a altura e o comprimento, dividimos ele e multiplicamos. Na divisão da folha A4 deu 1,4142..., que é raiz quadrada de dois. Depois colocamos tudo na parede da escola. Além da série A4 existe a série B4, C4 e outras."

Aluno 3 "O trabalho foi sobre folha. Eu pude observar uma técnica muito importante que eu não sabia. A professora explicou da folha A0. E na série A tem A0, A1, ... A10. E então que pude observar que se a gente pegar uma folha A0, dividir ao meio, eu vou obter a folha A1 e assim se você faz com todas elas, vai obter sempre a metade da folha anterior. E também tem uma forma interessante: se a gente pegar a altura e dividir pela largura, sempre vai obter o valor da $\sqrt{2}$."

Aluno 4 "A aula de hoje foi falando sobre as folhas da série A. Vimos como produzir essas folhas e como são divididas por tamanhos: Ex.: A1, A2, ..., A10. O que eu aprendi foi como descobrir sua largura e comprimento em milímetros e centímetros e que a folha do modelo A0 é maior que as outras folhas da série A. A folha A0 é dobrada em uma vez ao meio para formar a folha A1; e a folha A1 é dobrada ao meio para formar a A2 e assim sucessivamente."

Aluno 5 "A aula de hoje foi falando sobre as folhas que são retângulos. A professora explicou sobre a série A. Os tipos são A0, A1, ... A10. Eu também aprendi que começa com o A0 e vai até o A10. Vai formando uma escada. O A0 é o maior. E também eu pude ver que cada um é a metade do outro. Olhando pra cada uma delas a gente forma uma fração. Também tem outras série: série B, C e assim vai. E eu pude ver também que até nas folhas tem matemática e também é uma raiz quadrada de 2 $\sqrt{2}$."

Aluno 6 "Aprendi que de um tipo de folha só, a gente pode fazer várias outras; que a matemática é muito importante para nós. Tudo é matemática. Eu achava que a folha A10 era maior que a A0, mas o A0 é maior que A10 e também que existe várias formas de se fazer. Aprendi também que a folha mais usada é a folha A4, da série A, e tudo vira matemática. Aprendi a tirar as medidas das folhas, e também o tamanho de cada folha."

Aluno 7 "O papel sulfite A4 é um papel muito utilizado em quase todo o mundo, menos nos Estados Unidos e Canadá. Além do papel A4 também tem vários tipos como A0, A1, ..., A10. Tem o papel A0 e os outros tipos de papel. O A1 é metade do A0 e assim etc... e muitas outras coisas. Nós também aprendemos a série A5, A6, etc."

Aluno 8 "Eu aprendi muitas coisas que eu nem imaginava que as folhas tivessem uma grande coisas para se aprender. Sobre papel da série A, principalmente da folha A4. Sobre $\sqrt{2}$, 1,4142..., que dá para fazer. Várias formas de se fazer A0, A1, ..., A10. É isso que aprendi."

Aluno 9 "Nós estudamos sobre as formas da folhas série A e entre elas tem A0, A1, ..., A10. A folhas A0 é maior do que todas as outras folhas do A1 até A10. E o A0 é o dobro do A1, o A1 é o dobro do A2 e assim sucessivamente, e que todas elas são semelhantes."

Aluno 10 "Hoje nós estudamos sobre as formas das folhas. Muito bom nós aprendermos sobre as formas das folhas que são a A4, que é a folha normal da série A.

Entre ela tem A0, A1, ..., A10. A maior de todas é a A0 e a menor é a A10. Nós pensávamos que a A10 era maior, pois o número é maior, mas estávamos errados, pois A0 é maior e em seguida vem forma decrescente. A0 é o dobro da A1, a A1 é o dobro da A2, ..., A10 é metade da A9. Entre a série A tem a série B, a C e etc. Enfim, a aula foi muito boa. A professora Andréa Feitosa está de parabéns e que ela seja feliz com o trabalho dela."

Aluno 11 "A professora veio ensinar um pouco sobre folhas de papel. Eu entendi que nós usamos o tipo de folha que é retangular, a folha A4, que é formada da folha A3, a A3 é formada da folha A2, que com as folhas nós trabalhamos matemática. Podemos saber a largura e a altura de uma folha. Também podemos saber que tem porcentagem no meio, que A5 é a metade do A4, que também A4 é uma fração do A0, que também a raiz quadrada de 2 é 1,4142, ..."

Aluno 12 "A professora Andréa explicou sobre as proporções da folha A4. Para formar a folha A0 foi preciso 16 folhas A4, para formar a A1 foi preciso 8 folhas A4 e assim por diante. Eu aprendi que essas folhas são usadas em todos os países, menos nos Estados Unidos e Canadá, por usar uma folha menor do que a A4, e também tem outra forma, a B0, etc., como C0, etc. A folha A4 é uma das folhas mais utilizadas no mundo."

Aluno 13 "Eu aprendi com a aula de hoje a encontrar o valor de uma folha A0 e também de uma folha A10. E também como se encontra a medida das áreas de cada folha. Aprendemos a encontrar a medida da largura e do comprimento, tanto por centímetros (cm), como por milímetros. A nossa professora Andréa, ela nos mostrou várias folhas de vários tamanhos na nossa aula. Nós usamos os papéis da série A. Aprendemos a dividir a largura pelo comprimento para encontrarmos a $\sqrt{2}$, que é um número irracional."

Aluno 14 "A aula foi super interessante, pois aprendi muitas coisas de matemática. Aprendi sobre A0, A1, ..., A10. A professora Andréa explicou tudo como se faz e falou sobre as folhas e explicou como é cada uma da série A. O A0 é maior que o A10 e também que existe várias formas de se fazer a folha. Eu aprendi também que a folha A4 é a mais usada e tudo vira matemática. Aprendi tirar as medidas também."

Aluno 15 "Eu aprendi sobre papel A4. Ele tem várias formas de fazer. Fizemos uma escada começando com o A10. Aprendi como se dobra pra dar o formato de uma carta, de um jornal e de uma carta. A folha A2 é um jornal. Falou da divisão do comprimento pela largura, que é igual a raiz quadrada de 2. Com a folha A5, A7 e também juntando 16 folhas A4, tem como fazer A0 e assim tem como fazer uma escada diferente de cada um. As séries de B4 e C4 também fazem parte desta lista e podemos manuseá-las normalmente como fizemos com a série A4."

Aluno 16 "Nesta aula nós aprendemos sobre os papéis da série A. Foi falado da folha A0, da folha A4 e outras. Aprendi que a folha A0 é maior do que a folha A10, pois a folha A10 é menor. Existe várias formas de medir os mm em cm de cada folha."

6.3 Análise dos resultados

Durante a aplicação da atividade observamos a profunda atenção dos alunos, a admiração por ver a aplicação da Matemática de modo nunca antes visto. Nos comentários, na expressão facial e na atitude dos alunos em participarem e colaborarem, vimos que o tema despertou muito o interesse. No relatório final, 31% dos alunos comentaram a ideia de que nas folhas de papéis há muita matemática para ser explorada. Todos comentaram sobre, pelo menos, um conteúdo matemático que lhes chamou a atenção: Comparação de áreas, unidades de medidas, fração, radiciação,cálculo de áreas, divisibilidade, multiplicidade, razão, proporção, porcentagem e geometria.

Os conteúdos foram apresentados, mas não aprofundados. No entanto, podemos notar que o contexto no qual foram apresentados levou à maior fixação destes conteúdos. Embora não tenha sido o primeiro contato dos alunos com o valor da $\sqrt{2}$ e o cálculo de áreas, notou-se naquela aula que os alunos viam uma razão para se saber tais conteúdos.

Perguntas do tipo "Pra calcular a área, soma ou multiplica?" São comuns nas aulas de matemática, de acordo com a experiência da professora aplicadora. No entanto, o cálculo da área de cada formato de papel da série A serviu para que os alunos treinassem mais este cálculo. Isso foi um ponto positivo até a professora pedir que se calculasse o perímetro (no qual há a soma das medidas dos lados, e não a multiplicação).

O ponto negativo se deu porque os conteúdos que causavam confusão (área e perímetro) se misturaram novamente. Portanto, pensamos que devemos criar estratégias para sanar essa confusão. Uma ideia seria que, quando usar as folhas de papel para trabalhar um conteúdo, não trabalhar o outro. Com isso, esperamos que os alunos lembrem do conteúdo associado ao uso das folhas. Mas diante de várias tentativas, a professora pensa que esta é uma questão cognitiva dos alunos, falta de treino pessoal e não é nosso objetivo falar sobre este ponto.

O uso da régua milimetrada para medir a largura e o comprimento dos papéis era previsto, mas não se esperava a reação, tal como do **Aluno 14**: "*Aprendi tirar as medidas também"*. Durante a aula, vimos a ignorância no assunto. Tanto que a professora se sentiu fracassada por não ter feito isso no ano anterior, por pensar que todos já teriam aprendido isso.

Outro ponto inesperado é o fato do **Aluno 9** mencionar a ideia de **dobro**: "o A0 é o dobro do A1, o A1 é o dobro do A2...". De fato, é visível que a área da folha A(n-1) é o dobro da área da folha An. A surpresa está no uso da palavra, pois a construção da série A foi feita por divisão e não por multiplicação, como mostra o princípio (P3), descrito na página 28. A noção de dobro tem a ver com multiplicidade. Daí surge a ideia de propor aos professores das séries iniciais a usarem folhas de papel ou qualquer material concreto que envolva, não apenas quantidade, mas dimensões, ao abordarem a noção de dobro, ou mesmo explorar as folhas de papel no ensino de divisibilidade, que é conteúdo do 6º ano do fundamental.

Já a ideia de proporção quase não foi comentada. Apenas o **Aluno 12** citou: "A professora Andréa explicou sobre as proporções da folha A4". Isso se justifica porque o assunto não foi aprofundado. Proporção é conteúdo introduzido, em geral, no 7º ano e aprofundado dentro da geometria no 9º ano, antes de abordar o Teorema de Tales. Portanto, os alunos terão oportunidade de ter este assunto mais detalhado, usando folhas de papel.

No que se refere ao estudo de frações, 50% dos alunos mencionaram algo que envolve este conteúdo. O **Aluno 1** comentou: *"Em cada uma dessas folhas, se estudarmos suas medidas, encontramos frações."*.

O estudo de frações é aprofundado geralmente no 6º ano. Logo, o aluno do 9º ano já deveria conhecer tal conteúdo. Mas sabemos que, por um motivo ou outro, isso raramente acontece, por isso, foi relevante mostrar as frações envolvidas nas folhas de papel. Nesse momento os alunos viram frações e mais frações em todas as folhas, como citou o **Aluno 11**: "*A5 é a metade do A4, que também A4 é uma fração do A0*". Assim, o conteúdo foi relembrado e os alunos foram mencionando várias frações das folhas que estavam na parede da escola, como mostra a Figura 31 na página 75. A grande participação dos alunos revela a compreensão do conteúdo inserido no tema.

Tendo em vista que o objetivo principal era mostrar a Matemática envolvida nas folhas de papel, percebendo a atenção e a participação dos alunos durante a execução desta atividade e, ainda, tendo em vista o quê os alunos escreveram no relatório final, consideramos o resultado foi satisfatório. No entanto, reconhecemos que poderia ser melhor. A Professora poderia ter dado uma atividade individual para melhor avaliar a desempenho dos alunos. Outra melhoria que pudemos observar é o retorno e o diálogo sobre os itens que não ficaram muito claro para os alunos, como a diferença entre um formato e uma série de formatos. Isto pode-ser observado no cometário do **Aluno 15**, por exemplo. Portanto, deixamos aqui nossa sugestão.

Considerações finais

Este trabalho mostrou que existe muita Matemática básica envolvida nos formatos de papel. Seu conteúdo pode ser explorado em aulas de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, de modo a dinamizar e contextualizar o ensino desta ciência.

Razão e semelhança foram os conteúdos primordiais na origem dos formatos de papel da série A. A progressão geométrica, vista na organização desta sequência, a divisão de uma folha de papel ao meio, para se obter outra, as taxas de redimensionamento das folhas, são fatores que mostram as relações matemáticas inseridas nas folhas de papel das séries A, B e C.

Não podemos negar que o tema, embora singelo, é rico em conteúdos perfeitamente possíveis de se compreender na Educação Básica. Isso é mostrado na atividade aplicada, relatada no Capítulo 6.

Com esta atividade aprendemos que a escolha do tema de uma aula é um fator importante para que o professor possa ter a atenção dos alunos. Esse tema deve envolver algo da vivência dos alunos. Isto ajuda na motivação tanto do aluno, quanto do professor.

Também aprendemos que não é necessário explorarmos conteúdos de forma isolada, até mesmo porque, na vida prática, isso não existe. Mesclar o ensino de áreas com o estudo de frações é estratégico, pois, visivelmente é mais fácil compreender o conceito de fração utilizando algo concreto, palpável, do que somente mostrar a representação de uma fração através de desenhos ou símbolos.

Abordando as dimensões das folhas de papel, não tem como deixar de usar as unidades de medidas de comprimento, tais como milímetros e centímetros, por exemplo. Somente percebemos isso na aplicação da atividade, quando analisamos as dúvidas e as inseguranças dos alunos ao medir o comprimento e a largura das folhas.

Por fim, tendo em vista a abrangência do tema no ensino básico, a facilidade na aceitação dos alunos e a beleza nas regularidades matemáticas envolvidas nestas sequências de papéis, que foram pensadas para atender a necessidades da indústria gráfica, sentimo-nos impelidos a continuar buscando mais sobre o assunto e a aplicar, posteriormente, as sequências de ensino sugeridas no Capítulo 5 deste trabalho.

Referências

[1] ALVES, Cícero dos Santos. **As Funções Exponencial e Logarítmica: Uma abordagem para o professor do Ensino Básico.** Juazeiro do Norte: PROFMAT, 2014. Citado na página 59.

[2] ABNT. Associação Brasileira de Normas Técnicas. **Guia de termos e expressões utilizados na Normalização**. Rio de Janeiro: ABNT, 2012. Disponível em `http://www.abnt.org.br/m3.asp?co$d$_pagina=931`. Acesso em 8 ago 2015. Citado na página 18.

[3] ABNT. Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 10068/1987:Folha de Desenho - Leiaute e Dimensões**. Rio de Janeiro: ABNT, 1987. Citado nas páginas 16, 23 e 32.

[4] AENOR. Associación Española de Normalización y Certificación. **Papel de escritura y ciertos tipos de impresos Formatos acabados - series A y B**. Genebra: AENOR, 2002. Citado na página 16.

[5] CRATO, Nuno. **A Geometria do Papel A4**. Disponível em `http://pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/A4_Expresso_20030607.htm`. Acesso em 12 dez 2014. Citado na página 24.

[6] ISO. International Organization for Standardization. **ISO 269/1985: Enveloppes et polchettes postales - Désignation et Formats**. Genebra: AENOR, 2002. Disponíel em `http://www.nen.nl/pdfpreview/preview_70487.pdf`. Acesso em 12 dez 2014. Citado na página 16.

[7] DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar, volume 9**. São Paulo: Atual, 1993. Citado na página 29.

[8] HELLMEISTER, Ana Catarina. **A Geometria em Sala de Aula**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 16.

[9] IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar - 4**. São Paulo: Atual, 1977. Citado na página 40.

[10] INSTITUTO PORTUGUÊS DA QUALIDADE. **Manual de Normalização 2009**. Portugal: Ministério da Economia e da Renovação, 2009. Disponível em `http://www1.ipq.pt/PT/Normalizacao/Pages/Normalizacao.aspx`. Acesso em 8 jan 2015. Citado nas páginas 19 e 20.

[11] KUHN, Markus. **International Standard Paper Sizes**. Disponível em http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/iso-paper.html. Acesso em 25 fev 2015. Citado nas páginas 23 e 57.

[12] LICHTENBERG, Georg Christoph. **Correspondência Volume III (1785-1792)**. Verlag CH Beck:1990. Disponível em http://books.google.de/books. Citado na página 90.

[13] MARTI, Jorge Sérgio. **Los Formatos de Papel**. Recompilado por Jorge Sergio Marti. Disponível em http://www.periciascaligraficas.com/v2.0/resultados.php?contenidosID=260. Acesso em 27 dez 2014. Citado nas páginas 24 e 25.

[14] PACHECO, Maximo. **O Crescimento do Consumo de Papel**. São Paulo: International Paper Brasil, 2008. Citado na página 15.

[15] ROCHA, Daniela dos Santos. **Resgatando Métodos para o Cálculo de Raízes Quadradas e Raízes Cúbicas**. Rio de Janeiro: UFF, 1997. Citado na página 64.

[16] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Citado na página 16.

[17] SILVA, Andreilson Oliveira da. **O Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos.** João Pessoa: PROFMAT, 2013. Disponível em http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/722. Acesso em 13 jan 2015. Citado na página 64.

[18] TSCHICHOLD, Jan. **A forma do livro: ensaios sobre tipografia e estética do livro.** Ateliê Editorial: Cotia, São Paulo, 2007. Disponível em https://pt.scribd.com/doc/103926186/A-Forma-Do-Livro-Jan-Tschichold-Parte-08-BY-ALANA-BRAUN. Acesso em 14 dez 2014. Citado na página 20.

[19] WANDER, André. **Padrões Internacionais de Tamanhos de Papel**. Universidade Cândido Mendes. Disponível em https://fauufpa.files.wordpress.com/2012/11/padrc3b5esinternacionaisdetamanhosdepapelatuaizado.pdf. Acesso em 12 dez 2014. Citado na página 32.

Sites Consultados

http://www.sindirepa-sp.org.br. Acesso em 08 jan 2015.

http://www.cl.cam.ac.uk. Acesso em 12 dez 2014.

http://pt.wikipedia.org/wiki/ISO_216. Acesso em 12 dez 2014.

`https://fauufpa.files.wordpress.com`. Acesso em 12 dez 2014.

`https://pt.scribd.com`. Acesso em 14 dez 2014.

`http://www.periciascaligraficas.com`. Acesso em 27 dez 2014.

`http://books.google.de/books?id`. Acesso em 8 jan 2015.

`http://www.abnt.org.br`. Acesso em 8 ago 2014.

`http://www.nen.nl`. Acesso em 12 dez 2014.

APÊNDICE A – Tabela das dimensões dos formatos An, Bn e Cn.

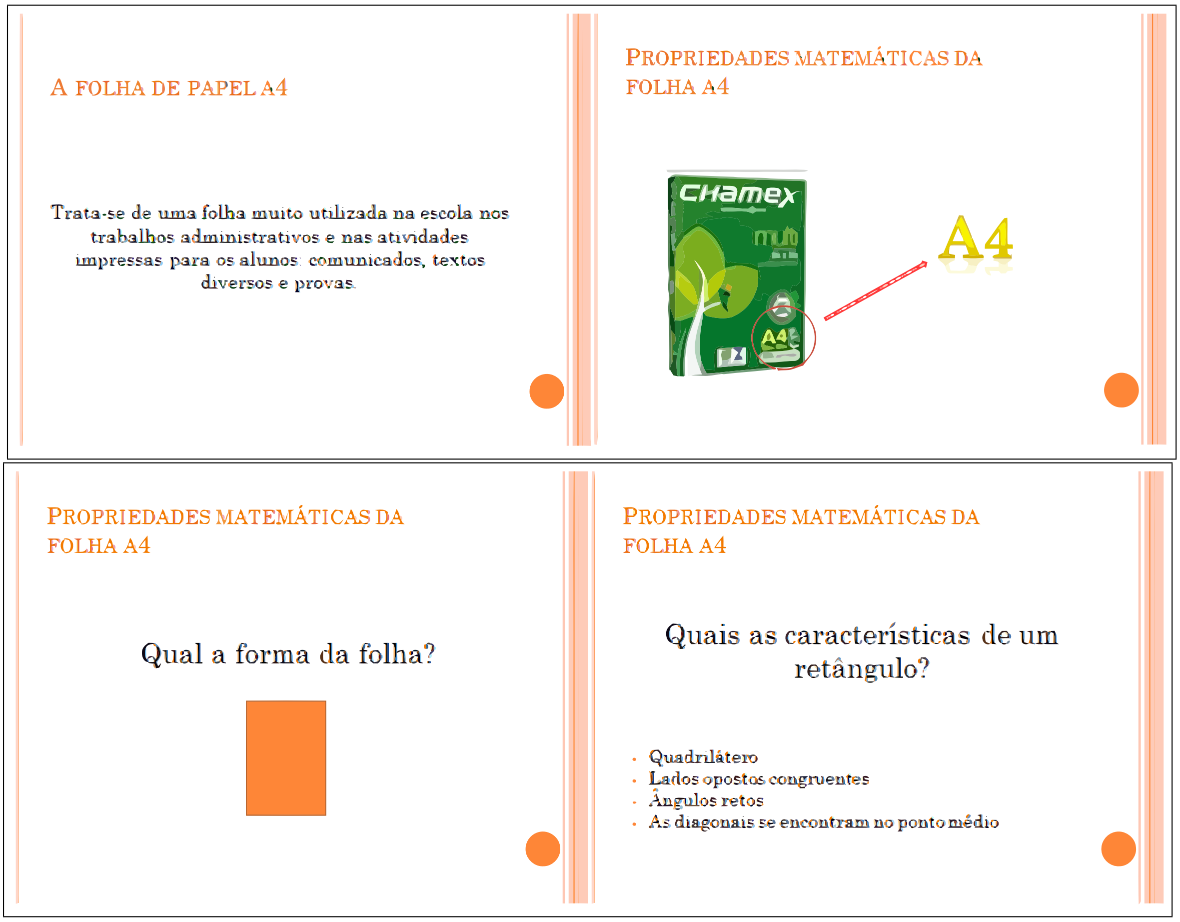
Tabela 11 – Fórmulas Gerais das Dimensões

Série	Formato	Largura (Notação)	Medida	Comprimento (Notação)	Medida
A	A(n-1)	$l_{A(n-1)}$	$2^{\frac{1-2n}{4}}$	$c_{A(n-1)}$	$2^{\frac{3-2n}{4}}$
	An	l_{An}	$2^{-\frac{1+2n}{4}}$	c_{An}	$2^{\frac{1-2n}{4}}$
	A(n+1)	$l_{A(n+1)}$	$2^{\frac{3+2n}{4}}$	$c_{A(n+1)}$	$2^{\frac{1+2n}{4}}$
B	B(n-1)	$l_{B(n-1)}$	$2^{\frac{1-n}{2}}$	$c_{B(n-1)}$	$2^{\frac{2-n}{2}}$
	Bn	l_{Bn}	$2^{-\frac{n}{2}}$	c_{Bn}	$2^{\frac{1-n}{2}}$
	B(n+1)	$l_{B(n+1)}$	$2^{-\frac{n+1}{2}}$	$c_{B(n+1)}$	$2^{-\frac{n}{2}}$
C	C(n-1)	$l_{C(n-1)}$	$2^{\frac{3-4n}{8}}$	$c_{C(n-1)}$	$2^{\frac{7-4n}{8}}$
	Cn	l_{Cn}	$2^{-\frac{1+4n}{8}}$	c_{Cn}	$2^{\frac{3-4n}{8}}$
	C(n+1)	$l_{C(n+1)}$	$2^{\frac{5+4n}{8}}$	$c_{C(n+1)}$	$2^{-\frac{1+4n}{8}}$

Elaborada pela autora.

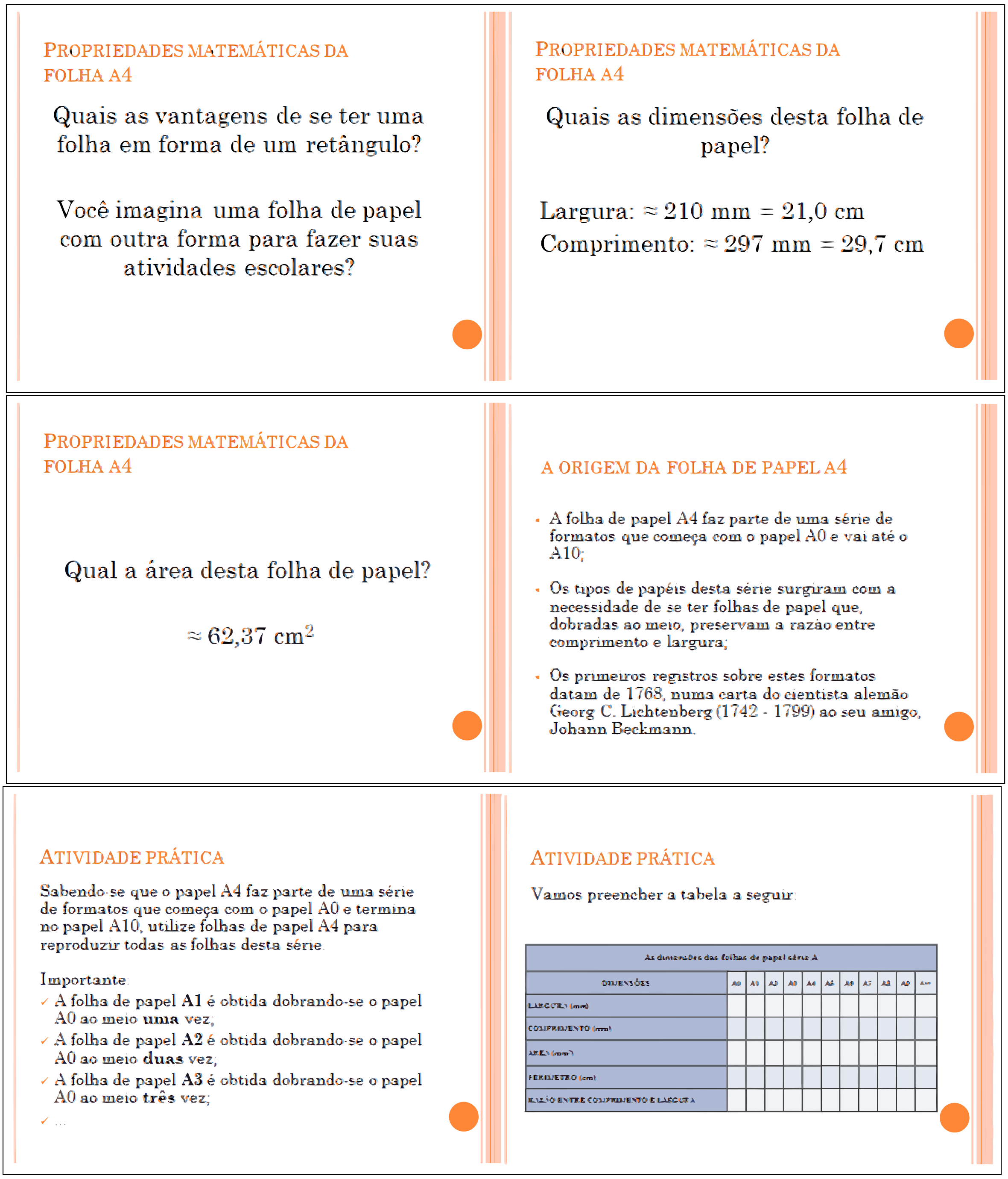
APÊNDICE B – Slides da atividade aplicada

Figura 33 – *Slides* de 1 a 4.



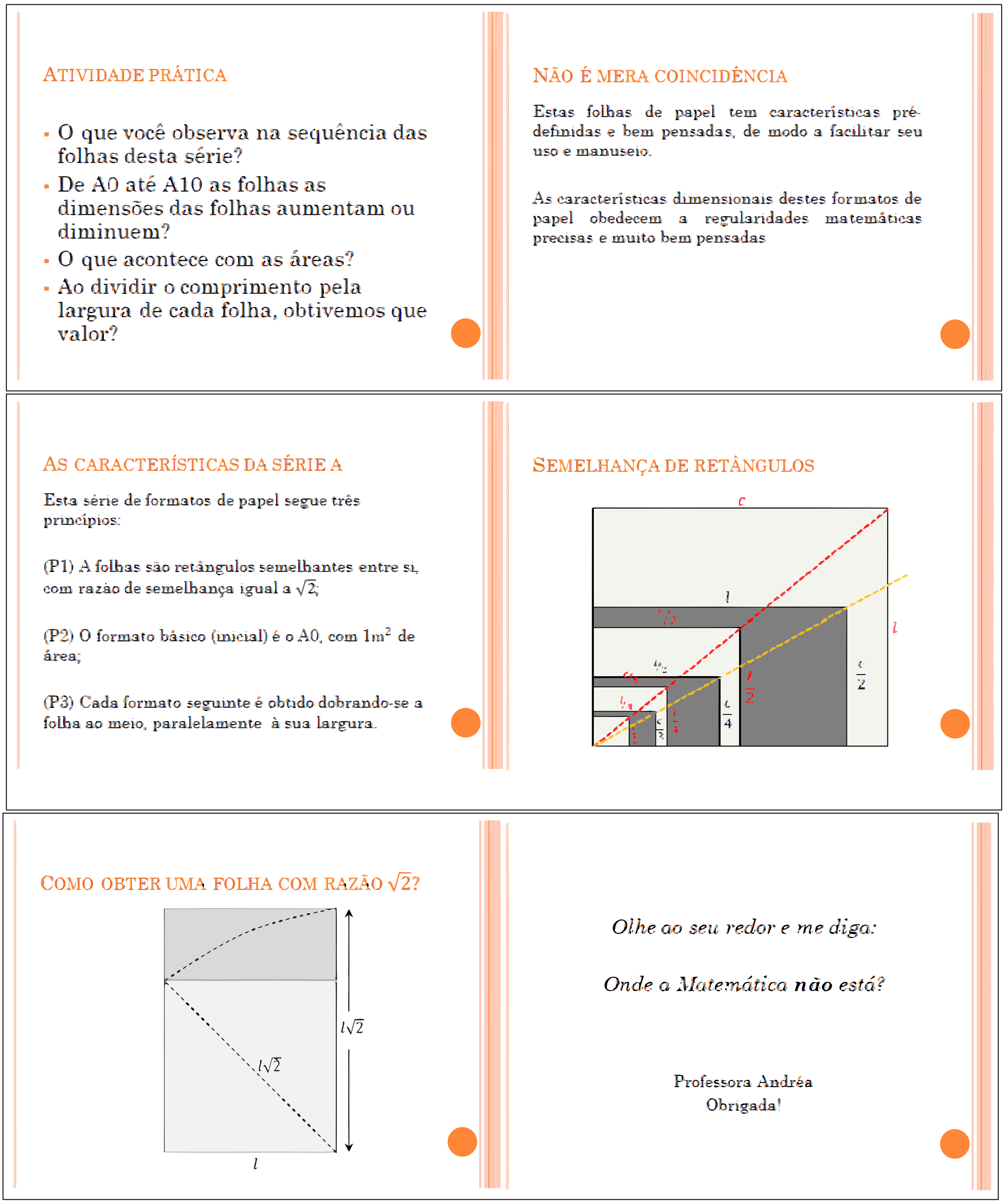
Elaborada pela autora.

Figura 34 – *Slides* de 5 a 12



Elaborada pela autora.

Figura 35 – *Slides* de 11 a 16.



Elaborada pela autora.

APÊNDICE C – Termo de autorização de uso das fotos e participação na pesquisa-MODELO

Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA
Instituto de Ciências da Educação - ICED
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Neste ato, ______________________________, nacionalidade ____________, estado civil ______________, portador da Cédula de identidade RG nº ____________, inscrito no CPF sob nº ______________, residente à Av/Rua ____________________ ________, nº __________, município de Pacajá/Pará. AUTORIZO o uso das fotos do menor ____________________________, aluno da Escola Municipal de Ensino Fundamental Cecília Merelles, bem como AUTORIZO a participação deste menor na pesquisa. A presente autorização é concedida a título gratuito, abrangendo o uso da imagem acima mencionada e da pesquisa referente ao Trabalho de Conclusão do Curso de **Andréa Feitosa Reis**, aluna da Universidade Federal do Oeste do Pará. O trabalho tem como título **A Matemática nos Formatos de Papel** e será entregue à biblioteca desta instituição. É um pré-requisito para a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT. Por esta ser a expressão da minha vontade declaro que autorizo o uso acima descrito sem que nada haja a ser reclamado a título de direitos conexos à imagem do menor acima citado, ou a qualquer outro, e assino a presente autorização em 02 vias de igual teor e forma.

Vila Arataú-Pacajá/PA, ____ de fevereiro de 2015.

Nome da criança: ____
Por seu Responsável Legal: ______________________________________
Telefone p/ contato: ____________

____

Assinatura do Responsável Legal

APÊNDICE D – Carta de Lichtenberg a Johann Beckmann

A carta a seguir[1], escrita na Alemanha, em 1786 pelo professor de física Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799), da Universidade de Göttingen, para Johann Beckmann, parece ser a mais antiga referência escrita preservada para a idéia de usar $\sqrt{2}$, como uma relação de aspecto de formatos de papel, como é feito hoje para o papel A4.

Para Johann Beckmann

Vossa Senhoria

Posso agora lhe informar com certeza (por ter ouvido eu mesmo de HE. Deluc) que Londres está coberta parcialmente em basalto e parcialmente em granito. O primeiro vem da Escócia, mas o último vem das ilhas de Jersey e Guernsey.
Pode V.Sa. dizer-me onde são produzidos os formatos utilizados por nossos fabricantes de papel, ou se eles, o que eu duvido, produzem os seus próprios? Espero que o motivo deste questionamento não seja desconfortável para V.Sa. Uma vez dei um exercício para um jovem inglês, a quem eu ensinei Álgebra, para encontrar uma folha de papel, para a qual todos os formatos "forma patens", "folio", "4to", "8", "16", fossem semelhantes uns com os outros. Tendo encontrado tal razão, eu quis aplicá-la, com o auxílio de tesouras, em um papel comum de escrita, mas descobri com prazer, que o papel já tinha tal razão.
É este papel no qual escrevo esta carta, mas por ter sido cortado e seu formato original ter sido perdido, eu inclui um original não cortado. O lado menor do retângulo deve estar para o lado maior assim como 1 está para $\sqrt{2}$, ou como o lado de um quadrado está para sua diagonal.
Este formato tem algo de agradável e distinto comparado ao formato comum. Estas regras foram dadas aos fabricantes de papel ou têm sido difundidas por tradição? De onde vem este formato, que parece não surgir por acidente?
Perdoe-me V.Sa. por esta liberdade.
Göttingen, 25 de outubro de 1786.
GCLichtenberg

Fonte: `http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/lichtenberg-letter.html` ***(tradução nossa).***

[1] Pode ser encontrada, no idioma original no livro "Correspondência" [12], nas páginas 274 e 275.