UNICAMP

Gabriela Vicentini de Oliveira

BRAHMAGUPTA E QUADRILÁTEROS CÍCLICOS NO ENSINO MÉDIO

CAMPINAS
2015

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Gabriela Vicentini de Oliveira

BRAHMAGUPTA E QUADRILÁTEROS CÍCLICOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Gabriela Vicentini de Oliveira, e orientada pelo Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.

Assinatura do Orientador

Campinas
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Oliveira, Gabriela Vicentini de, 1990-
OL4b Brahmagupta e quadriláteros cíclicos no ensino médio / Gabriela Vicentini de Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria (Ensino médio). 2. Polígonos. 3. Educação matemática. I. Oliveira, Edmundo Capelas de,1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Brahmagupta and cyclic quadrilaterals for high school
Palavras-chave em inglês:
Geometry (High school)
Polygons
Mathematic education
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestra
Banca examinadora:
Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]
Felix Silva Costa
Denilson Gomes
Data de defesa: 16-06-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 16 de junho de 2015

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Felix Silva Costa

Prof(a). Dr(a). FELIX SILVA COSTA

Prof(a). Dr(a). DENILSON GOMES

Abstract

This work presents the Brahmagupta's formula for cyclic quadrilateral (inscribed in a circle) area and an expression for their diagonals. It is also crafted an extension to any convex quadrilateral. Heron's formula for area of triangles, a particular case of the Brahmagupta's formula, is also developed. The focus of this thesis is to apply such content in class in high school.

Keywords: Brahmagupta's formula, cyclic quadrilateral, quadrilateral inscribed in a circle, Heron's formula.

Resumo

Este trabalho apresenta a fórmula de Brahmagupta para área de quadriláteros cíclicos, ou seja, inscritíveis, além de uma expressão para suas diagonais. Também é trabalhada uma extensão para quaisquer quadriláteros convexos. A fórmula de Heron para área de triângulos, um caso particular da fórmula de Brahmagupta, também é desenvolvida. O foco desta dissertação é aplicar tais conteúdos em sala de aula no Ensino Médio.

Palavras-chave: Fórmula de Brahmagupta, quadriláteros cíclicos, quadriláteros inscritíveis, fórmula de Heron.

Sumário

Para meu querido noivo Gusta.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e à minha irmã Tata por todo suporte e incentivo que me deram ao longo da minha vida.

Ao Gusta por nunca me deixar desistir e fazer todos os dias com que eu acredite em mim mesma.

Ao meu orientador, Prof. Edmundo, pela paciência e por ser sempre tão atencioso.

Aos meus colegas de classe do Profmat pela companhia e também pela ajuda todas as vezes que precisei.

Aos meus alunos e ex-alunos, pois aprendi muito com cada um deles.

Aos meus professores de matemática, especialmente Profa. Rosangela Dias e Prof. Luiz Augusto Paiva da Mata, que tanto me inspiraram durante o Ensino Médio.

Ao Colégio Etapa, onde cresço profissionalmente cada dia mais.

A Deus por todas as oportunidades que tive, e também pelas dificuldades com as quais pude amadurecer.

Lista de Ilustrações

Introdução

Ao preparar uma aula sobre área de triângulos, todo professor de matemática opta em ensinar por último a fórmula do grego Heron, ou simplesmente comenta como um conteúdo de rodapé de livro, pois geralmente assusta os alunos pelo seu tamanho e por utilizar conceitos como raiz quadrada e semiperímetro. No entanto, pouco se fala sobre sua importância, pois conseguimos calcular a área de um triângulo qualquer utilizando apenas as medidas de seus lados, independente dos ângulos ou de sua altura.

Neste trabalho mostraremos a fórmula de Heron com demonstrações desde a mais elaborada, feita por ele, até as mais simples que podem ser trabalhadas em sala de aula para retomar conceitos importantes já vistos anteriormente pelos alunos.

Como generalização desta fórmula, temos a descoberta de Brahmagupta, matemático e astrônomo hindu, que descobriu como calcular a área de um quadrilátero cíclico, ou inscritível, em função das medidas de seus lados, principal foco desta dissertação.

Brahmagupta também calculou as medidas das diagonais do quadrilátero cíclico em função dos lados, o que também demonstraremos. Depois dele, o matemático alemão Bretschneider encontrou a fórmula de Brahmagupta generalizada para qualquer quadrilátero convexo.

Ao longo da construção desta dissertação, consultei livros didáticos de matemática para o Ensino Médio, a fim de algum deles citar a fórmula de Brahmagupta para quadriláteros cíclicos. Não encontrei nada a respeito, mas a surpresa não foi essa. Infelizmente percebi que o ensino de geometria plana tem tido um papel secundário nas aulas de matemática.

A álgebra ganha tal destaque que ofusca o porquê de estudarmos geometria. Poderíamos buscar na origem de seu nome, "medir a Terra", que já teríamos noção de sua importância. Vivemos num mundo de formas e a geometria é nossa aliada para interpretá-lo num pedaço de papel, como em mapas, para nos localizar, usando longitude e latitude, por exemplo, ou mesmo para conhecer o tamanho deste planeta, como Eratóstenes fez na Grécia Antiga.

Em [8], p.15, lê-se: *O conceito de espaço começou, naturalmente, como um conceito de lugar, a Terra. Começou com um desenvolvimento técnico que os egípcios e os babilônios chamavam "medida da terra". A palavra grega para isto é* geometria*, mas os assuntos não são totalmente iguais. Os gregos foram os primeiros a perceber que a natureza poderia ser entendida usando-se a matemática - que a sua geometria poderia ser aplicada para revelar, não apenas para descrever. Desenvolvendo a geometria a partir de descrições simples de pedra e areia, os gregos extraíram a ideia de ponto, linha e plano. Retirando a cortina que encobria a matéria, eles revelaram uma estrutura possuidora de uma beleza que a civilização nunca tinha visto antes.*

A geometria não ajuda apenas nossa geografia, basta uma caminhada pelo meio urbano e encontramos formas geométricas essenciais ao mundo moderno. Nossa publicidade do mundo capitalista, que busca logos e formas que chamem nossa atenção, consumidores. Basta um pouco de percepção para encontrar um octógono formado por *temakis*, ou triângulos equiláteros que combinados representam uma marca de automóveis.

Em nossos computadores, *tablets* e *smartphones* a geometria plana aparece novamente, só que aliada à geometria analítica, que juntas trazem formas para animações tridimensionais, como podemos ver num filme da Pixar ou jogando videogame. A geometria plana também é a base para nossos estudos da geometria espacial, que possibilita estudar os objetos ao nosso redor, e criar novos, como podemos ver em embalagens industriais ou em lindas construções, por exemplo na arquitetura refinada de Oscar Niemeyer.

Dentro desse mundo de formas, uma figura muito comum de encontrar é o círculo. E se colocarmos uma figura dentro deste círculo? E se essa figura for um quadrilátero e caso queria o de maior área possível? Teremos o quadrilátero inscritível, e para calcular sua área podemos usar como ferramenta a fórmula de Brahmagupta.

Ao final desta dissertação, mostraremos um plano de aula com a finalidade de trabalhar a fórmula de Brahmagupta em sala de aula no Ensino Médio, principal propósito deste trabalho. O professor que consultá-lo terá o suporte de um roteiro, para planejar sua aula, acompanhado de atividades, livre para adaptá-las conforme seus propósitos. No apêndice deste trabalho encontram-se as resoluções destas atividades.

No Capítulo 1 deste trabalho será apresentada a fórmula de Heron para área de triângulos e três demonstrações diferentes, além de uma breve história sobre quem foi Heron de Alexandria.

A seguir, no Capítulo 2, a generalização da fórmula de Heron para quadriláteros cíclicos, ou seja, de Brahmagupta. Esta também é demonstrada de três maneiras diferentes e, para auxiliar, também é apresentada a fórmula para as diagonais do quadrilátero inscritível. Ainda, no mesmo capítulo, é trabalhada a expressão para área de quadriláteros convexos quaisquer, também chamada por fórmula de Bretschneider.

Para finalizar, o Capítulo 3 é composto pelo plano de aula para professores que queiram desenvolver tais assuntos no Ensino Médio.

Capítulo 1

Fórmula de Heron

Dado um triângulo cujos lados medem a, b e c sua área S pode ser calculada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde p é seu semiperímetro. Tal fórmula, foco de estudo deste capítulo, garantiu fama a Heron de Alexandria. Contaremos um pouco de sua história e, em seguida, três maneiras diferentes para demonstrar sua fórmula, em que a última utiliza os mesmos caminhos escolhidos pelo próprio Heron.

1.1 Quem foi Heron?

Heron (ou Herão), de Alexandria, Figura 1.1, conquistou seu lugar nos livros de história da matemática ao demonstrar a fórmula que aqui estudaremos sobre área de triângulos. Considerado um gênio, Heron viveu na segunda metade do século I d.C. e trabalhou na Universidade de Alexandria após um período de decadência desta.

Além de matemático, foi físico, astrônomo e engenheiro, e adotava um perfil mais prático, às vezes inventor, inclusive. Isto justifica seu maior trabalho na matemática estar ligado à mensuração. É possível encontrar em seus trabalhos uma máquina de vapor primitiva, bomba d'água para apagar incêndios e até mesmo uma máquina para vender água.

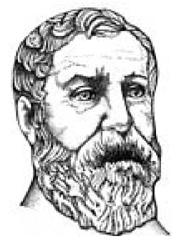


Figura 1.1: Heron de Alexandria, [14].

Na matemática, estudou problemas ligados à medida de área de algumas figuras planas e de volume de sólidos geométricos. Heron também ensina métodos, de seu perfil prático, como, por exemplo, aproximar raízes de um número inteiro. Sua principal obra foi "A Métrica" (em grego, *Metrika*), dividida em três livros, onde a demonstração da fórmula para cálculo de área de triângulo pode ser encontrada no Livro I, [4].

Embora Heron seja conhecido por esta fórmula, o árabe Abu'l Raihan Muhammad al-Biruni (973 - 1048) contestou a descoberta de Heron, alegando que o devido mérito seria de Arquimedes. Como a demonstração mais antiga conhecida por nós está em "A Métrica", nada mudou.

1.2 Primeira demonstração

Dentre todas as demonstrações da fórmula de Heron esta é a mais simples, a qual é sugerida como exercício em muitos livros do ensino básico. Pode ser trabalhada inclusive no Ensino Fundamental, quando o aluno já estudou o teorema de Pitágoras e áreas.
Esta demonstração (como a maioria apresentada nesta dissertação) é um ótimo exemplo para aplicação de fatoração, conteúdo que ao ser ensinado fica muito vaga sua importância para os alunos.
Pode ser encontrada em [3], além de ser proposta como exercício em outros livros de geometria.

1.2.1 Pré-requisitos

- Teorema de Pitágoras;
- Fatoração;
- Área de triângulo dados um lado e sua altura relativa.

1.2.2 Demonstração

Seja um triângulo qualquer ABC, tal que[1] $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Traçamos a altura relativa a um dos lados, como na Figura 1.2.

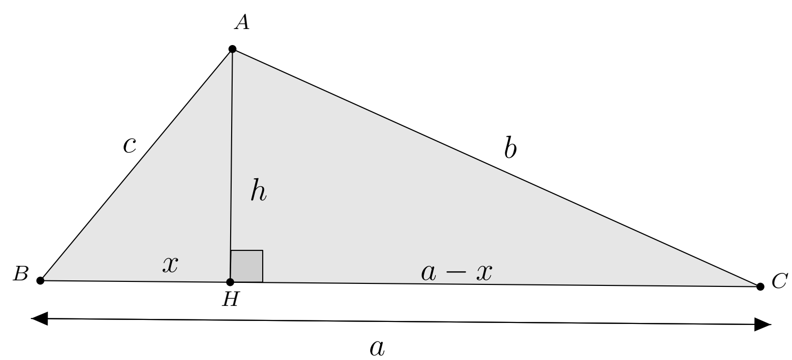


Figura 1.2: Demonstração utilizando o teorema de Pitágoras.

O lado $\overline{BC}$ foi dividido tal que $BH = x$ e $HC = a - x$. Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABH e ACH, obtemos:

$$\begin{cases} c^2 = h^2 + x^2 \\ b^2 = h^2 + (a - x)^2 \end{cases}$$

Como $x > 0$, isolando x em $c^2 = h^2 + x^2$ temos:

$$x = \sqrt{c^2 - h^2}.$$

[1]Nesta dissertação usaremos a notação $\overline{AB}$ para o segmento de reta cujos pontos A e B são extremidades, e a notação AB para sua medida.

Substituindo este valor de x na outra igualdade encontrada, podemos escrever:

$$b^2 = h^2 + (a - \sqrt{c^2 - h^2})^2 \Leftrightarrow b^2 = h^2 + a^2 - 2a\sqrt{c^2 - h^2} + (\sqrt{c^2 - h^2})^2,$$

ou ainda,

$$b^2 = h^2 + a^2 - 2a\sqrt{c^2 - h^2} + c^2 - h^2,$$

de onde segue

$$\sqrt{c^2 - h^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot$$

A partir deste momento será necessário muita atenção em relação às técnicas de fatoração utilizadas:

$$\sqrt{c^2 - h^2} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \Rightarrow c^2 - h^2 = \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2.$$

Logo, temos para h^2 a expressão:

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2.$$

Neste passo fatoramos, transformando a diferença de quadrados em produto da soma pela diferença:

$$h^2 = \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right),$$

ou ainda, na forma

$$h^2 = \left(\frac{2ac - (a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right)\left(\frac{2ac + (a^2 + c^2 - b^2)}{2a}\right).$$

Notamos o trinômio quadrado perfeito em cada fator

$$h^2 = \frac{[b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2]}{4a^2},$$

de onde podemos escrever

$$h^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2}.$$

Seja p o semiperímetro do triângulo, então:

$$p = \frac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow 2p = a+b+c. \tag{1.1}$$

Podemos expressar cada fator em função do semiperímetro p:

- $a+b+c = 2p$;
- $b+c-a = 2p-2a = 2(p-a)$;
- $a+c-b = 2p-2b = 2(p-b)$;
- $a+b-c = 2p-2c = 2(p-c)$.

Substituindo estas expressões obtemos:

$$h^2 = \frac{2^4 p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}.$$

Extraímos a raiz quadrada dos dois lados da igualdade:

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Seja S a área do triângulo ABC em função do lado a e sua altura relativa h:

$$S = \frac{a}{2} \cdot h \Leftrightarrow S = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

de onde segue

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

que é a expressão que fornece a área do triângulo dados os lados.

1.3 Segunda demonstração

Outra demonstração simples e inclusive menos extensa que a primeira, faz uso da trigonometria, o que restringe tal demonstração para alunos do Ensino Médio, embora alguns materiais didáticos já trabalham este conteúdo no 9º ano do Ensino Fundamental II.
Caso haja os pré-requisitos necessários, é preferível usá-la devido à fatoração ser mais simples.

1.3.1 Pré-requisitos

- Área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles;
- Lei dos cossenos;
- Relação fundamental da trigonometria;
- Fatoração.

1.3.2 Demonstração

Podemos calcular a área S do triângulo ABC, conforme Figura 1.3:

$$S = \frac{1}{2} bc \,\text{sen}\alpha \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{2S}{bc}.$$

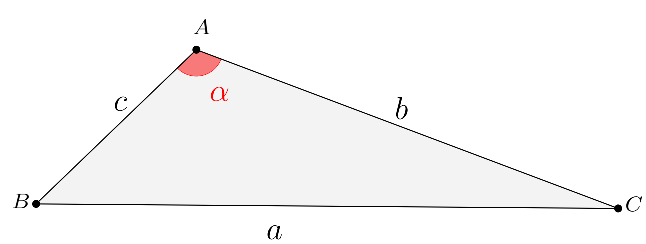


Figura 1.3: Demonstração utilizando trigonometria.

Utilizando o mesmo ângulo α na lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Pela relação fundamental da trigonometria obtemos:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2S}{bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = 1.$$

Isolamos a área S e fatoramos a expressão

$$16S^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2,$$

podemos escrever

$$16S^2 = (b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c).$$

Substituímos cada fator por uma expressão em função do semiperímetro p do triângulo, conforme Eq.(1.1):

$$16S^2 = 2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) \Leftrightarrow 16S^2 = 2^4 p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Extraímos a raiz quadrada dos dois lados da igualdade e obtemos

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

que é exatamente a expressão para a área do triângulo de lados a, b e c.

1.4 Terceira demonstração

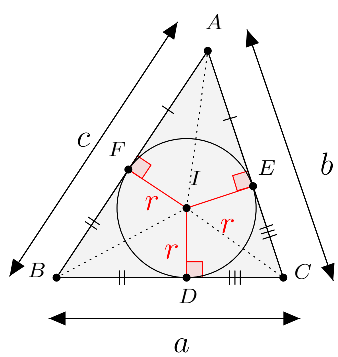
Dentre as demonstrações apresentadas neste trabalho, esta é a mais extensa e elaborada. Segundo [5] foi a prova utilizada por Heron no seu livro "A Métrica". Nesta mesma referência, Gilberto Garbi cita: *Trata-se de um belíssimo desfecho de uma longa cadeia de raciocínios em que, em alguns momentos, tem-se a sensação de que Herão está vagando sem rumo, perdido à procura de algo que não sabe o que é. Repentinamente, entretanto, a notável fórmula surge, exprimindo um dos mais belos teoremas da Geometria.* A mesma demonstração pode ser encontrada como exercício em [4], p. 222.

1.4.1 Pré-requisitos

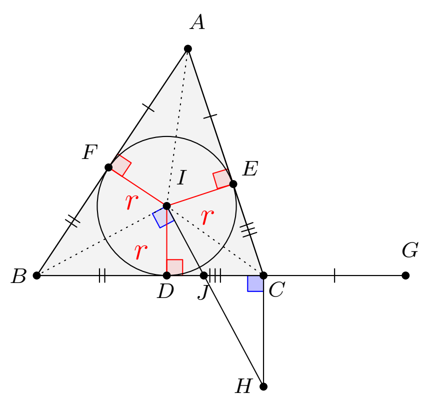
- Relações entre um triângulo e seu incírculo[2];
- Área de um triângulo dados seu semiperímetro e o raio da circunferência inscrita;
- Ângulos inscritos numa circunferência;
- Congruência de triângulos;
- Semelhança de triângulos;
- Frações equivalentes;
- Relações métricas no triângulo retângulo.

1.4.2 Demonstração

Seja o triângulo ABC tal que $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, como na Figura 1.4(a), e I o centro da circunferência inscrita ao triângulo (incentro), que o tangencia nos pontos D, E e F.



(a) Relações entre as medidas do triângulo e da circunferência.



(b) Determinando os pontos G e H.

Figura 1.4: Triângulo e sua circunferência inscrita.

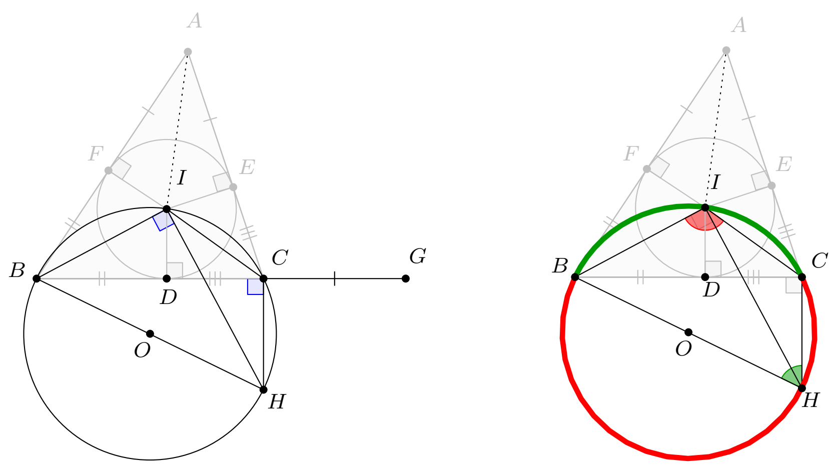
Segmentos tangentes à circunferência que se interceptam num ponto externo são congruentes, então $AE = AF$, $BD = BF$ e $CD = CE$.

---

[2]Em [4] usa-se *incírculo* para denotar o círculo inscrito na figura.

Traçamos na reta $\overleftrightarrow{BC}$ um segmento $\overline{CG}$, tal que $CG = AF$. Também encontramos o ponto H tal que seja a intersecção entre as retas perpendiculares ao segmento $\overline{BI}$ (passando por I e cortando $\overline{BC}$ em J) e ao segmento $\overline{BC}$ (passando por C), como podemos ver na Figura 1.4(b).

Notemos que os pontos B, C, I e H estão numa mesma circunferência, pois $\triangle BIH$ e $\triangle BCH$ são retângulos e inscritos na circunferência de diâmetro $\overline{BH}$.
Nesta mesma circunferência notamos que $m_a\left(\overset{\frown}{CB}\right)$[3] $+ m_a\left(\overset{\frown}{BC}\right) = 360°$.



(a) Circunferência formada pelos pontos B, I, C e H.

(b) Arcos contidos nesta circunferência.

Figura 1.5: Relacionando os ângulos $C\hat{I}B$ e $B\hat{H}C$.

Um ângulo inscrito na circunferência mede a metade da medida angular do arco o qual determina, então:

$$m\left(C\hat{I}B\right) + m\left(B\hat{H}C\right) = \frac{m_a\left(\overset{\frown}{CB}\right) + m_a\left(\overset{\frown}{BC}\right)}{2} = \frac{360°}{2} = 180°.$$

Portanto os ângulos $C\hat{I}B$ e $B\hat{H}C$ são suplementares.

[3]Nesta dissertação usaremos a notação $m_a\left(\overset{\frown}{CB}\right)$ para a medida angular do arco $\overset{\frown}{CB}$, ou seja, o arco cujas extremidades são os pontos C e B no sentido horário.

Nos pontos de tangência D, E e F o raio da circunferência inscrita é perpendicular aos lados do triângulo. Como resultado temos $\triangle BFI \cong \triangle BDI$, $\triangle CDI \cong \triangle CEI$ e $\triangle AEI \cong \triangle AFI$, então $E\hat{I}A \cong F\hat{I}A$, $E\hat{I}C \cong D\hat{I}C$ e $D\hat{I}B \cong F\hat{I}B$, conforme podemos observar na Figura 1.6(a). Concluímos que:

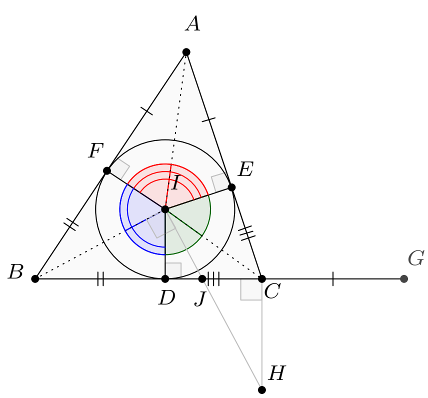
$$2.m\left(E\hat{I}A\right) + 2.m\left(D\hat{I}B\right) + 2.m\left(D\hat{I}C\right) = 360°,$$

ou ainda, simplificando,

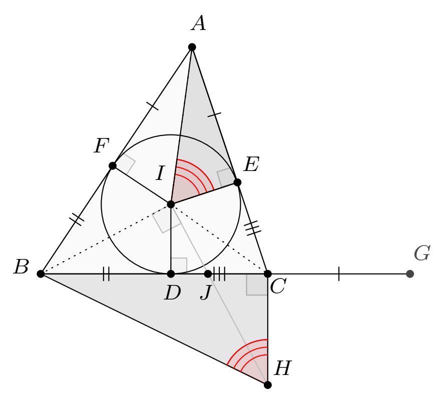
$$m\left(E\hat{I}A\right) + m\left(C\hat{I}B\right) = 180°.$$

Notemos a seguinte relação:

$$\begin{cases} m\left(C\hat{I}B\right) + m\left(B\hat{H}C\right) = 180° \\ m\left(C\hat{I}B\right) + m\left(E\hat{I}A\right) = 180° \end{cases} \Rightarrow B\hat{H}C \cong E\hat{I}A$$



(a) O incentro do triângulo.



(b) Triângulos semelhantes.

Figura 1.6: Algumas congruências e proporções.

A partir dessa igualdade concluímos que $\triangle CHB \sim \triangle EIA$, conforme a Figura 1.6(b), e encontra-se a proporção:

$$\frac{BC}{AE} = \frac{CH}{IE}.$$

Outra semelhança notável é $\triangle IDJ \sim \triangle HCJ$, pois $I\hat{J}D \cong H\hat{J}C$ (ângulos opostos pelo vértice) e $I\hat{D}J$ e $H\hat{C}J$ são retos, então

$$\frac{CH}{ID} = \frac{CJ}{JD}.$$

Como $CG = AE$ e $IE = ID = r$ então:

$$\frac{BC}{CG} = \frac{BC}{AE} = \frac{CH}{IE} = \frac{CH}{ID} = \frac{CJ}{JD}.$$

Aplicando as relações métricas do triângulo retângulo no $\triangle BIJ$ obtemos $(ID)^2 = BD.JD$, pois ID é a altura relativa à hipotenusa e BD e JD são as projeções dos catetos relativas à hipotenusa.
Estudando as proporções apresentadas temos:

$$\frac{BC}{CG} = \frac{CJ}{JD} \Leftrightarrow \frac{BC + CG}{CG} = \frac{CJ + JD}{JD} \Leftrightarrow \frac{BG}{CG} = \frac{CD}{JD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(BG)^2}{CG \cdot BG} = \frac{CD \cdot BD}{JD \cdot BD} \Leftrightarrow \frac{(BG)^2}{CG \cdot BG} = \frac{CD \cdot BD}{(ID)^2},$$

de onde segue

$$(BG \cdot ID)^2 = CG \cdot BG \cdot CD \cdot BD.$$

Podemos concluir, a partir da Figura 1.7, as seguintes relações entre as medidas trabalhadas na proporção anterior:

- $ID = r$, onde r é raio da cinfunferência inscrita;
- $BG = p$, onde p é o semiperímetro do triângulo;
- $CG = BG - BC = p - BC = p - a$;
- $BD = BG - DG = p - AC = p - b$;
- $CD = BG - (BD + CG) = p - AB = p - c$.

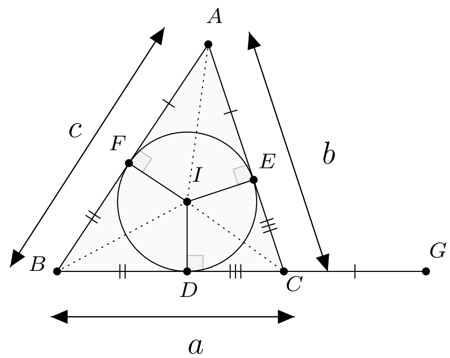


Figura 1.7: Relações entre as medidas dos lados do triângulo.

A área S do triângulo ABC pode ser calculada pela fórmula $S = r \cdot p$, portanto $S = BG \cdot ID$.
Substituindo em $(BG \cdot ID)^2 = BG \cdot CG \cdot BD \cdot CD$ encontramos:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois lados da igualdade temos

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

que, mais uma vez, é a expressão para a área do triângulo de lados a, b e c.

Capítulo 2

Fórmula de Brahmagupta

Após estudar a fórmula de Heron no capítulo anterior, agora chegamos ao objetivo desta dissertação: a fórmula de Brahmagupta. Com esta calculamos a área de um quadrilátero inscritível (ou cíclico) usando apenas as medidas de seus lados.

Dado um quadrilátero inscritível qualquer cujos lados medem a, b, c e d, sua área S pode ser calculada por $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, onde p é seu semiperímetro. Podemos interpretar a fórmula de Heron para triângulos como um caso particular, onde a medida de um dos lados do quadrilátero é nula.

Ao longo deste capítulo trabalharemos com três possíveis demonstrações da fórmula de Brahmagupta, um pouco sobre a história deste matemático, sua conclusão sobre o cálculo das diagonais do quadrilátero cíclico e também uma extensão da fórmula de Brahmagupta para a área de quadriláteros quaisquer, que também pode ser chamada por fórmula de Bretschneider.

Para o estudo deste capítulo é recomendado ao leitor que se recorde que para um quadrilátero ser inscritível é necessário e suficiente que seus ângulos opostos sejam suplementares. Para maiores detalhes consulte a referência [3], p. 171.

2.1 Quem foi Brahmagupta?

Devido a uma série de invasões, o povo hindu se consolidou através de influências de vários outros povos, entre eles os arianos, persas e macedônios de Alexandre, o que contribuiu não só culturalmente, mas cientificamente também. A matemática indiana teve grande progresso enquanto o Império Romano do Ocidente caía, embora haja carência de registros e problemas sobre a ordem cronológica de seus estudos. Para a época, a Índia, Figura 2.1, era relativamente longe da Europa, seus estudos chegaram ao Ocidente através de Bagdá e da matemática árabe.

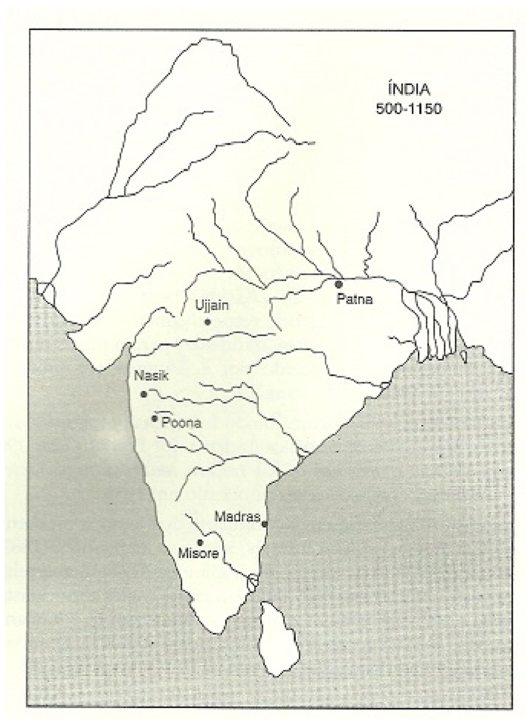


Figura 2.1: Mapa da Índia entre 500 a 1150, [4].

Os hindus consideravam-se astronômos e os estudos sobre a matemática servia como uma ferramenta. A mais famosa contribuição indiana a nossa matemática atual foi o sistema posicional de numeração na base dez, hoje usado, embora ainda haja dúvidas sobre sua origem. Muito foi contribuído para a trigonometria, embora a geometria era o principal foco de estudo devido ao interesse em construção e medidas de templos sagrados, ou seja, *era largamente empírica e em geral se ligava à mensuração*, [4]. Também havia o interesse por álgebra e combinatória.

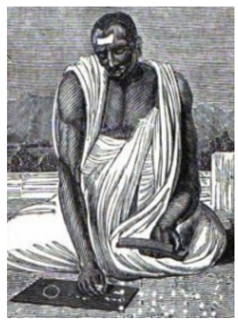


Figura 2.2: Brahmagupta, [12].

Brahmagupta, Figura 2.2, compõe a lista dos matemáticos hindus mais importantes, junto com Aryabhata e Bhaskara. Viveu no século V, sob a dinastia Gupta, Figura 2.3, nasceu em 598 d.C. e viveu até 665, no mínimo, [10]. Morava e trabalhava em Ujjain, onde também viveu Bhaskara posteriormente.

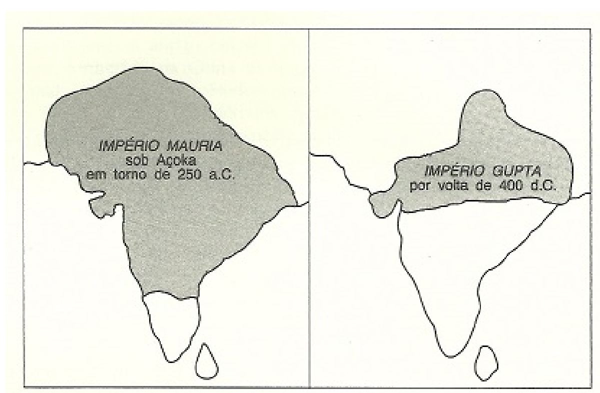


Figura 2.3: Império Gupta por volta de 400 d.C., [4].

Sua principal obra é "Brahma-Sphuta-Sidd'hanta" (*O Sistema de Brahma Revisado*), de 628 d.C., [4], sobre astronomia, onde dois dentre seus 21 capítulos trabalham matemática. Dentre os assuntos estudados por Brahmagupta destacam-se equações lineares indeterminadas e do segundo grau, método para formar ternas pitagóricas e aritmética com quantidades negativas, embora seu trabalho mais memorável, foco dessa dissertação, seja a *fórmula para área de quadriláteros cíclicos* e de suas diagonais. O equívoco de Brahmagupta foi não citar que tais fórmulas eram restritas para quadriláteros cíclicos, embora não superou o principal engano que cometeu, ao afirmar que $0 \div 0 = 0$.

2.2 Primeira demonstração

Nesta primeira prova da fórmula de Brahmagupta trabalhamos com assuntos mais básicos da matemática, como semelhança de triângulos e a fórmula de Heron, no entanto seu desenvolvimento não é trivial.
O grande truque é prolongar dois lados do quadrilátero e trabalhar as áreas dos triângulos encontrados, semelhantes entre si. O aluno pode ter dificuldade ao manipular as proporções encontradas e recordar a relação entre as áreas de triângulos semelhantes.
Esta demonstração pode ser encontrada de forma mais resumida em [7].

2.2.1 Pré-requisitos

- Semelhança de triângulos;
- Razão entre áreas de figuras semelhantes;
- Fórmula de Heron para área de triângulos;
- Fatoração;
- Razão e proporção.

2.2.2 Demonstração

Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$, Figura 2.4. Se o quadrilátero é inscritível então seus ângulos opostos são suplementares, assim se $m\left(D\hat{A}B\right) = \alpha$ então $m\left(B\hat{C}D\right) = 180° - \alpha$, e, analogamente, se $m\left(C\hat{D}A\right) = \beta$ então $m\left(A\hat{B}C\right) = 180° - \beta$.

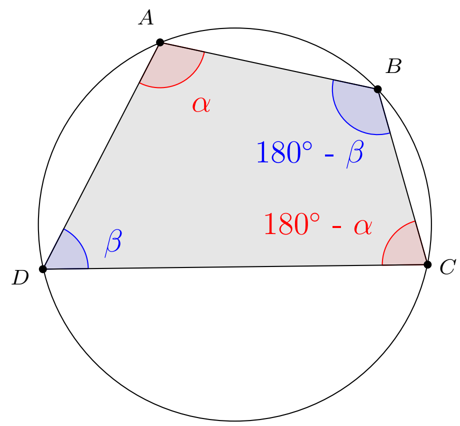


Figura 2.4: Ângulos opostos no quadrilátero inscritível.

Neste quadrilátero, prolongamos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ até que se interceptem[1] no ponto E, como na Figura 2.5. Admitamos que $AE = x$ e $DE = y$, então temos $BE = x - a$ e $CE = y - c$.

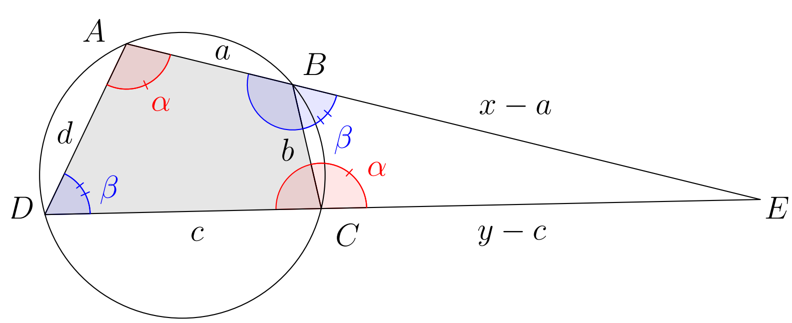


Figura 2.5: Lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ prolongados.

Notemos que $\Delta ADE \sim \Delta CBE$. Como a área do quadrilátero é a diferença entre as áreas desses triângulos, calculamos pela fórmula de Heron a área do triângulo ADE, sendo $x + y + d$ seu perímetro.

[1] Esta demonstração não é válida para o retângulo (paralelogramo inscritível).

$$S_{ADE} = \sqrt{\left(\frac{x+y+d}{2}\right)\left(\frac{x+y+d}{2}-x\right)\left(\frac{x+y+d}{2}-y\right)\left(\frac{x+y+d}{2}-d\right)},$$

ou ainda, na forma

$$S_{ADE} = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+d)\,(-x+y+d)\,(x-y+d)\,(x+y-d)}.$$

Pela semelhança de triângulos encontramos a seguinte proporção:

$$\frac{d}{b} = \frac{x}{y-c} = \frac{y}{x-a}.$$

Ao desenvolver esta dupla igualdade é possível encontrar as seguintes relações entre x e y:

- $x+y = \dfrac{d(a+c)}{d-b}$;
- $x-y = \dfrac{d(a-c)}{d+b}$.

Relacionando a medida d com essas igualdades encontradas, temos:

- $x+y+d = \dfrac{d(a+c)}{d-b} + d = d\left(\dfrac{a+c}{d-b}+1\right) = \dfrac{d(a+c+d-b)}{d-b}$;
- $-x+y+d = \dfrac{-d(a-c)}{d+b} + d = d\left(\dfrac{c-a}{d+b}+1\right) = \dfrac{d(c-a+d+b)}{d+b}$;
- $x-y+d = \dfrac{d(a-c)}{d+b} + d = d\left(\dfrac{a-c}{d+b}+1\right) = \dfrac{d(a-c+d+b)}{d+b}$;
- $x+y-d = \dfrac{d(a+c)}{d-b} - d = d\left(\dfrac{a+c}{d-b}-1\right) = \dfrac{d(a+c+b-d)}{d-b}$.

Substituímos essas expressões no cálculo da área do triângulo ADE, a qual obtivemos pela fórmula de Heron

$$S_{ADE} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{d(a+c+d-b)}{d-b}\right)\left(\frac{d(c-a+d+b)}{d+b}\right)\left(\frac{d(a-c+d+b)}{d+b}\right)\left(\frac{d(a+c+b-d)}{d-b}\right)}$$

que, após simplificação, fornece

$$S_{ADE} = \frac{1}{4}\cdot\frac{d^2}{d^2-b^2}\sqrt{(a+c+d-b)\,(c-a+d+b)\,(a-c+d+b)\,(a+c+b-d)}.$$

Da semelhança entre os triângulos ADE e CBE temos:

$$\frac{S_{CBE}}{S_{ADE}} = \frac{b^2}{d^2} \Leftrightarrow \frac{S_{ADE} - S_{ABCD}}{S_{ADE}} = \frac{b^2}{d^2} \Leftrightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{ADE}} = \frac{d^2-b^2}{d^2}.$$

Substuindo no cálculo da área do triângulo ADE, encontramos uma primeira expressão para a área do quadrilátero desejado

$$S_{ADE} = \frac{1}{4}\cdot\frac{S_{ADE}}{S_{ABCD}}\sqrt{(a+c+d-b)\,(c-a+d+b)\,(a-c+d+b)\,(a+c+b-d)}$$

ou ainda, na seguinte forma

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+c+d-b)\,(c-a+d+b)\,(a-c+d+b)\,(a+c+b-d)}.$$

Definimos p o semiperímetro do quadrilátero, onde $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Podemos manipular a expressão para a área do quadrilátero e obtemos

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\sqrt{(2p-2b)\,(2p-2a)\,(2p-2c)\,(2p-2d)},$$

ou ainda, na forma final

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)},$$

que é a fórmula de Brahmagupta.

Como foi mencionado no início deste capítulo, Brahmagupta cometeu um equívoco ao não mencionar que a fórmula para área de quadriláteros é restrita aos cíclicos, cujos ângulos internos opostos devem ser suplementares. Um exemplo simples mostra que mantendo as medidas dos lados de um quadrilátero fixas e alterando seus ângulos internos, sua área se altera também.

Ao manipular os ângulos internos de um quadrado, podemos transformá-lo num losango, tal que diferença entre as diagonais fique cada vez maior. Embora as duas figuras tenham as mesmas medidas de lados, a área do losango é claramente menor que a área do quadrado. Assim uma fórmula para a área de um quadrilátero convexo qualquer deveria conter também informação sobre os ângulos internos, como será visto mais adiante na Seção 2.6.

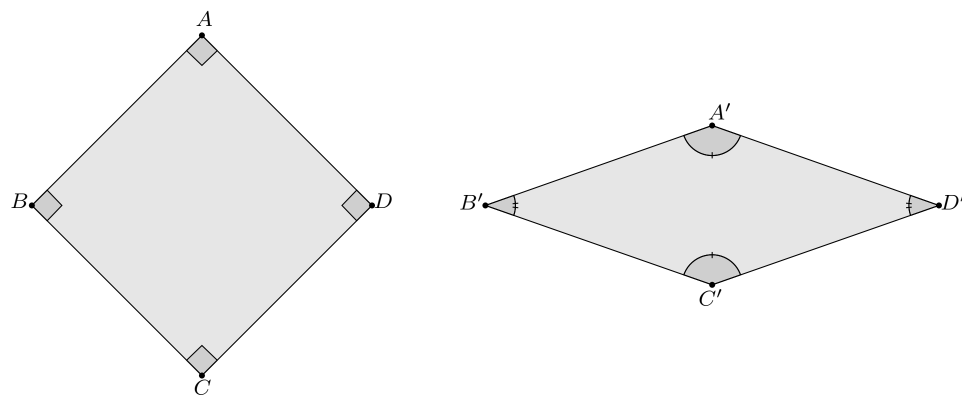


Figura 2.6: Um quadrado e um losango cujos lados têm a mesma medida.

2.3 Segunda demonstração

Assim como a segunda demonstração da fórmula de Heron, essa também utiliza como base a trigonometria. Dentre as provas trabalhadas neste capítulo, esta é a mais simples devido às ferramentas utilizadas, pois são recursos que geralmente trabalhamos com o aluno do Ensino Médio, como lei dos cossenos e a área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles.
Esta demonstração é a mais adequada para o professor trabalhar em sala de aula, embora seja necessária muita prática por parte do aluno para acompanhar a fatoração utilizada no desenvolvimento algébrico.

2.3.1 Pré-requisitos

- Seno e cosseno de ângulos suplementares;
- Área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles;

- Lei dos cossenos;
- Relação fundamental da trigonometria;
- Fatoração.

2.3.2 Demonstração

Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ e diagonal $AC = x$. Seus ângulos opostos são suplementares, como esquematizado na Figura 2.7.

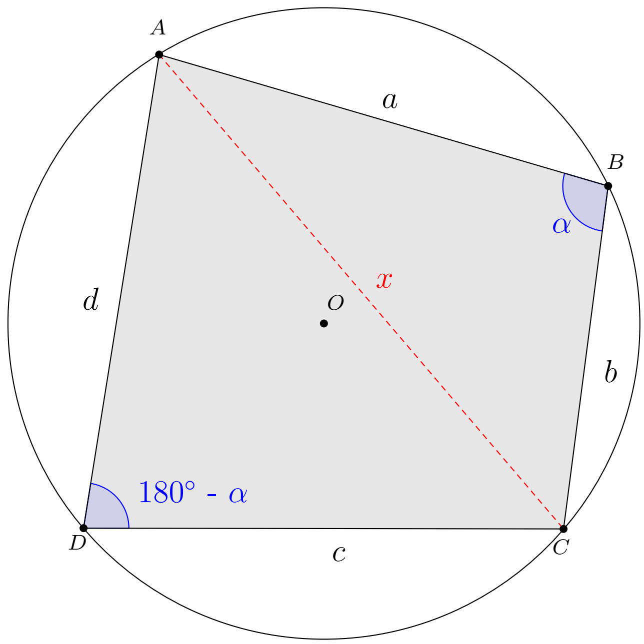


Figura 2.7: Os triângulos ABC e ACD formados pela diagonal $\overline{AC}$.

A diagonal divide o quadrilátero em dois triângulos, ABC e ACD, e a soma de suas áreas resulta na área desejada. Para a área de cada triângulo usamos um dos ângulos internos e a medida dos seus lados adjacentes ao ângulo.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{ab\,\text{sen}\alpha}{2} + \frac{cd\,\text{sen}(180° - \alpha)}{2}.$$

Da trigonometria, lembramos que $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha$ e $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Aplicando este fato e fatorando a expressão encontrada, temos:

$$S_{ABCD} = \frac{\text{sen}\alpha}{2}(ab + cd) \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{ab + cd}\cdot$$

Nos triângulos ABC e ACD aplicamos a lei dos cossenos e obtemos, respectivamente:

- $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$;
- $x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \alpha) \Leftrightarrow x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$.

Como $x > 0$ podemos igualá-las:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha + 2cd\cos\alpha\cdot$$

Fatoramos e isolamos $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\cdot$$

Usamos a relação fundamental da trigonometria para relacionar as igualdades encontradas até então, obtemos:

$$(\text{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2S_{ABCD}}{ab + cd}\right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2 = 1.$$

A partir deste ponto, desenvolvemos algebricamente a igualdade para a expressão da área do quadrilátero desejado:

$$\frac{4(S_{ABCD})^2}{(ab + cd)^2} + \frac{(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} = 1,$$

ou ainda, na forma

$$16(S_{ABCD})^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right)^2 = 4(ab + cd)^2,$$

que, após a fatoração, fornece

$$16(S_{ABCD})^2 = \left(2(ab+cd) - a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right)\left(2(ab+cd) + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\right).$$

Notemos que são formados trinômios quadrados perfeitos nos fatores, logo

$$16(S_{ABCD})^2 = [(c+d)^2 - (a-b)^2][(a+b)^2 - (c-d)^2],$$

ou ainda, na seguinte forma

$$16(S_{ABCD})^2 = (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d).$$

Seja p o semiperímetro do quadrilátero, onde $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Substituindo na expressão anterior, temos:

$$16(S_{ABCD})^2 = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)$$

que, após simplificação, fornece

$$16(S_{ABCD})^2 = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Como o valor da área é positivo concluímos:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

que é a fórmula desejada.

2.4 Diagonais de um quadrilátero inscritível, em função das medidas dos lados

Como já citado, Brahmagupta também calculou a medida das diagonais de um quadrilátero cíclico em função de seus lados. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$. Suas diagonais podem ser calculadas por:

$$AC^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$$

e

$$BD^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Em [5], p.138, lê-se: *Estas fórmulas apresentam uma simetria admirável. Dados 4 entes quaisquer a, b, c e d, existem somente três maneiras de agrupá-los em dois pares: ab e cd, ad e bc e ac e bd. Todos os três agrupamentos aparecem nas fórmulas das diagonais dos quadriláteros inscritíveis, em mais um exemplo dos belos padrões dos quais a Matemática está repleta.*
A seguir mostraremos um possível cálculo para esta conclusão a fim de usarmos para a terceira demonstração da fórmula de Brahmagupta para área do quadrilátero cíclico desta dissertação.

2.4.1 Pré-requisitos

- Cosseno de ângulos suplementares;
- Lei dos cossenos;
- Fatoração.

2.4.2 Demonstração

Neste tópico, demonstraremos a fórmula citada para a diagonal $\overline{AC}$. Suponha a medida de $\overline{AC}$ seja x.

Notemos na Figura 2.8 que a diagonal $\overline{AC}$ divide o quadrilátero nos triângulos ABC e ACD.
No triângulo ABC aplicamos o lei do cossenos:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \Leftrightarrow 2ab\cos\alpha = a^2 + b^2 - x^2 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}.$$

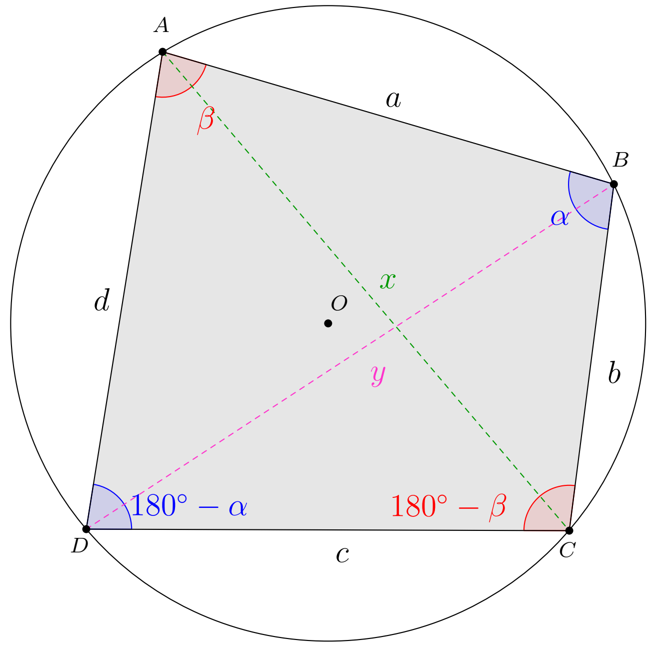


Figura 2.8: As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero $ABCD$.

No triângulo ACD também aplicamos o lei do cossenos:

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180° - \alpha) \Leftrightarrow x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$2cd\cos\alpha = x^2 - c^2 - d^2 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{x^2 - c^2 - d^2}{2cd}.$$

Igualando as duas expressões, obtemos:

$$\frac{x^2 - c^2 - d^2}{2cd} = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab}.$$

Desenvolvemos algebricamente essa igualdade para x.

$$x^2ab - c^2ab - d^2ab = a^2cd + b^2cd - x^2cd,$$

ou ainda, na forma

$$x^2(ab + cd) = ad(ac + bd) + bc(bd + ac),$$

que, após a fatoração, nos leva a

$$x^2(ab+cd) = (ad+bc)(ac+bd),$$

de onde segue

$$x^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

Demonstração análoga para a diagonal $\overline{BD}$.

2.5 Terceira Demonstração

Neste ponto apresentaremos uma demonstração da fórmula de Brahmagupta usando os resultados da seção anterior.
Esta prova tem grande importância, pois em [2] temos que a fórmula para o quadrilátero foi usada por Brahmagupta em conjunção com as fórmulas de suas diagonais, então é muito provável que é a demonstração que mais se aproxima do que foi feito por ele.
Embora seja um pouco mais extensa, a vantagem ao trabalhar com essa demonstração em sala de aula é poder mencionar e desenvolver também as fórmulas para as diagonais do quadrilátero cíclico, além de sua proximidade ao trabalho original de Brahmagupta.

2.5.1 Pré-requisitos

- Diagonais de um quadrilátero cíclico, em função das medidas dos lados;
- Área do triângulo em função dos lados e do raio R da circunferência circunscrita;
- Lei dos senos e lei dos cossenos;
- Teorema de Pitágoras;
- Fatoração.

2.5.2 Demonstração

Para esta demonstração é preciso recordar primeiramente o cálculo da área de um triângulo em função das medidas dos seus lados e do raio R da circunferência circunscrita. Interpretemos a área do quadrilátero cíclico a seguir como a soma das áreas dos triângulos ABC e ADC. Veja Figura 2.9.
Assim, temos:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{abx}{4R} + \frac{cdx}{4R} \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{x}{4R}(ab + cd).$$

Como $AC = x$ aplicamos a relação exibida na seção anterior, logo

$$S_{ABCD} = \frac{(ab + cd)}{4R}\sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}},$$

ou ainda, na seguinte forma,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4R}\sqrt{(ab + cd)(ad + bc)(ac + bd)}. \tag{2.1}$$

Para concluirmos a fórmula de Brahmagupta desejada devemos encontrar o raio R em função das medidas dos lados do quadrilátero. Focaremos no triângulo ABC, traçando sua altura relativa ao lado $\overline{BC}$, como esquematizado na Figura 2.10. Encontraremos três relações neste triângulo que nos permitirá tal conclusão.

Aplicamos o lei dos cossenos no triângulo ABC, logo:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{B} \Leftrightarrow x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\frac{BH}{a} \Leftrightarrow x^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot BH.$$

Assim a primeira relação encontrada é:

$$BH = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2b}.$$

No triângulo retângulo ABH podemos aplicar o teorema de Pitágoras, tendo assim a segunda relação:

$$a^2 = h^2 + BH^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - BH^2.$$

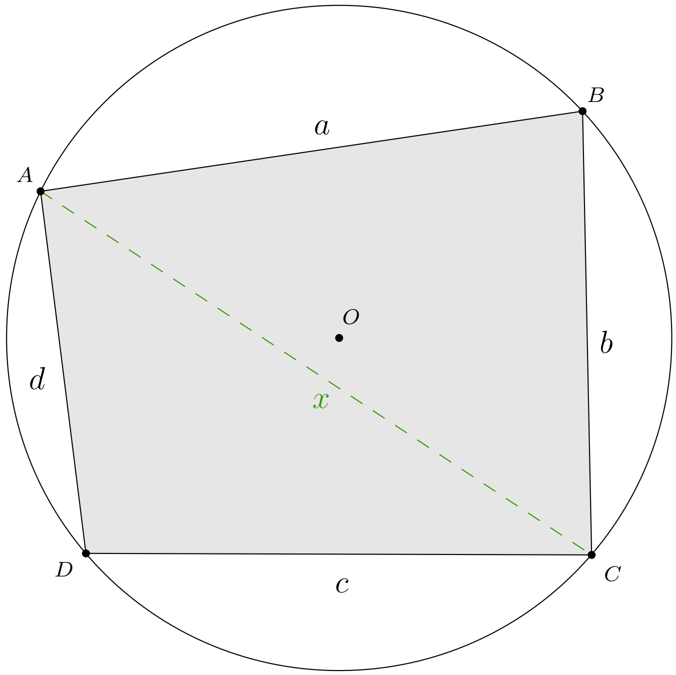


Figura 2.9: Os triângulos ABC e ACD também inscritos na circunferência.

E, por fim, a terceira relação no triângulo ABC, a qual envolve o raio R da circunferência circunscrita: lei dos senos. Aplicando-a, obtemos:

$$\frac{x}{sen\hat{B}} = 2R \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{h}{a}} = 2R \Leftrightarrow h = \frac{ax}{2R}.$$

Eliminando BH nas duas primeiras relações, encontramos:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2b}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \left(a + \frac{a^2+b^2-x^2}{2b}\right)\left(a - \frac{a^2+b^2-x^2}{2b}\right).$$

Desenvolvendo e fatorando a expressão anterior, obtemos:

$$h^2 = \frac{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]}{4b^2}.$$

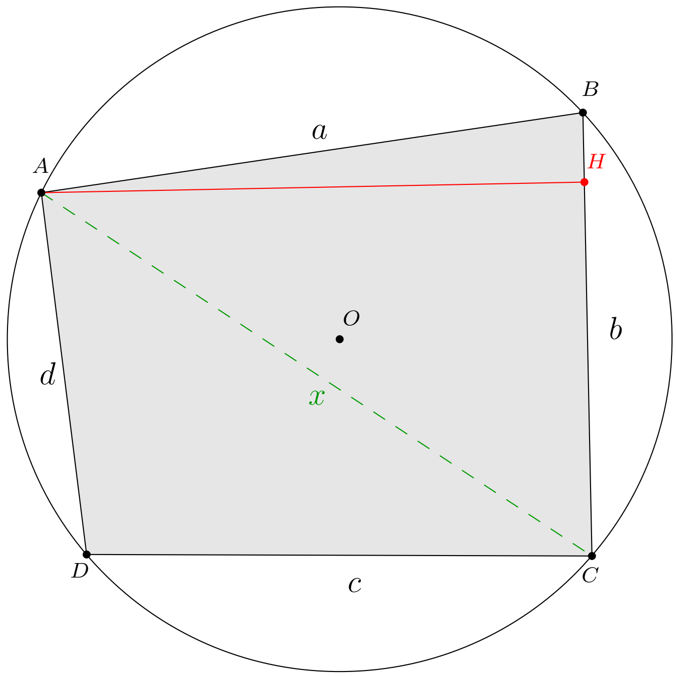


Figura 2.10: A altura $\overline{AH}$ do triângulo ABC.

Da terceira relação obtemos h^2 e substituímos na expressão anterior

$$\frac{a^2x^2}{4R^2} = \frac{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]}{4b^2},$$

ou ainda, na seguinte forma

$$R^2 = \frac{(abx)^2}{[(a+b)^2 - x^2][x^2 - (a-b)^2]}.$$

Vamos estudar separadamente as expressões $x^2 - (a-b)^2$ e $(a+b)^2 - x^2$, lembrando que x é a medida da diagonal $\overline{AC}$ (omitiremos alguns desenvolvimentos, deixando a cargo do leitor):

- $x^2-(a-b)^2 = \dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} - (a-b)^2 = \dfrac{ab(c+d-a+b)(c+d+a-b)}{ab+cd}$;
- $(a+b)^2 - x^2 = (a+b)^2 - \dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} = \dfrac{ab(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{ab+cd}$.

Definimos p o semiperímetro do quadrilátero, onde $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Substituindo nas expressões anteriores, obtemos:

- $x^2 - (a+b)^2 = \dfrac{ab(2p-2a)(2p-2b)}{ab+cd}$;
- $(a+b)^2 - x^2 = \dfrac{ab(2p-2c)(2p-2d)}{ab+cd}$.

Voltamos ao cálculo de R depois de estudarmos as expressões $x^2 - (a-b)^2$ e $(a+b)^2 - x^2$ anteriores. Logo, podemos escrever

$$R^2 = \frac{(abx)^2}{\left(\frac{ab(2p-2a)(2p-2b)}{ab+cd}\right)\left(\frac{ab(2p-2c)(2p-2d)}{ab+cd}\right)},$$

ou na forma

$$R^2 = \frac{x^2(ab+cd)^2}{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Novamente usamos a expressão para a diagonal de medida x e obtemos

$$R^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)} \cdot \frac{(ab+cd)^2}{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

que nos leva à expressão

$$R^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Extraímos a raiz quadrada desta expressão e como $R > 0$ temos:

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

Agora, com a medida de R, em função das medidas dos lados do quadrilátero, voltamos ao ponto inicial, quando encontramos uma expressão para a área do quadrilátero $ABCD$. Substituímos R na Eq.(2.1):

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}}\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)},$$

ou ainda, finalmente, na seguinte forma

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

2.6 Área de quadriláteros convexos quaisquer

Ao pesquisar sobre a fórmula de Brahmagupta é comum encontrarmos uma generalização para quadriláteros convexos quaisquer, como em [2], [4], e [7], devido ao equívoco de Brahmagupta ao não mencionar que sua fórmula era restrita a quadriláteros cíclicos.
Num quadrilátero de lados a, b, c e d e com dois ângulos internos opostos entre si de medidas α e β, sua área S pode ser calculada por:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

No entanto é raro encontrar sua demonstração, o que faremos a seguir, e a relação com o matemático alemão Carl Anton Bretschneider, que a descobriu em 1842, [13].

2.6.1 Pré-requisitos

- Área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles;
- Lei dos cossenos;
- Fórmulas de adição (cosseno da soma de arcos) e multiplicação (cosseno arco duplo);
- Relação fundamental da trigonometria;
- Fatoração.

2.6.2 Demonstração

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $m\left(A\hat{B}C\right) = \alpha$, $m\left(C\hat{D}A\right) = \beta$ e sua diagonal $\overline{AC} = x$, conforme a Figura 2.11.
Para o cálculo da área focaremos nos triângulos formados pela diagonal $\overline{AC}$:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\alpha + \frac{1}{2}cd\,\text{sen}\beta.$$

Elevamos ao quadrado os dois lados desta igualdade, podemos escrever:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 = (ab\,\text{sen}\alpha)^2 + (cd\,\text{sen}\beta)^2 + 2abcd\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta.$$

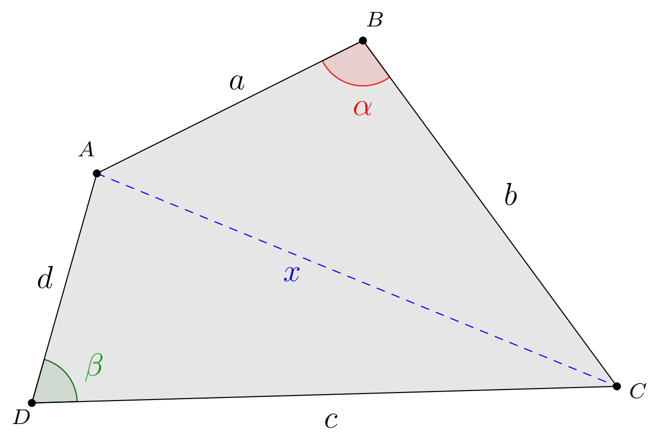


Figura 2.11: Quadrilátero qualquer e sua diagonal $\overline{AC}$.

Aplicamos o lei dos cossenos nos triângulos citados:

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \end{cases}.$$

Igualando-as, encontramos:

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos\beta \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\alpha-2cd\cos\beta.$$

Elevamos ao quadrado os dois lados desta igualdade para depois comparar com a expressão para área que já obtivemos anteriormente:

$$\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab\cos\alpha)^2 - 2abcd\cos\alpha\cos\beta + (cd\cos\beta)^2.$$

Somamos, já fatorando o que possível, esta última igualdade com a expressão encontrada até então envolvendo a área do quadrilátero $ABCD$. Ao fatorar, encontrarmos $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2$ e $(\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\beta)^2$, o que pela relação fundamental da trigonometria podemos substituir por 1. Assim temos:

$$4\,(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab)^2+(cd)^2-2abcd(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta).$$

Neste passo utilizamos a fórmula para o cosseno da soma:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab)^2 + (cd)^2 - 2abcd\cos(\alpha+\beta).$$

Para fatorarmos a soma $(ab)^2 + (cd)^2$ adicionamos $2abcd$ a fim de completarmos um trinômio quadrado perfeito e simultaneamente subtraímos a mesma expressão. Obtemos então:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab+cd)^2 - 2abcd[1+\cos(\alpha+\beta)].$$

Da fórmula do cosseno do arco duplo temos que $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, e utilizando a relação fundamental da trigonometria é equivalente a $\cos(2\theta)+1 = 2\cos^2\theta$. Para mais detalhes consulte [6].

Seja $2\theta = \alpha + \beta \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Substituindo na fórmula mencionada temos $\cos(\alpha+\beta) + 1 = 2\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$. Assim, nossa expressão para a área do quadrilátero é:

$$4\left(S_{ABCD}\right)^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = (ab+cd)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

ou ainda, na seguinte forma

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 4(ab+cd)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Desenvolvemos esta expressão, a fim de encontrar a fórmula:

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 = (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

que pode ser escrita como

$$16\left(S_{ABCD}\right)^2 = [(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2] - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Fatorando mais uma vez, encontramos:

$16\,(S_{ABCD})^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b) - 16abcd\cos^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right).$

Definimos p o semiperímetro do quadrilátero, onde $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Substituindo na expressão anterior, obtemos:

$$16\,(S_{ABCD})^2 = (2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

que pode ser escrita na forma

$$(S_{ABCD})^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Como o valor da área é positivo, concluímos:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},$$

que é a expressão desejada.

Enfim, no caso em que $\alpha+\beta = 180^\circ$ (quadrilátero inscritível) recuperamos a fórmula de Brahmagupta, pois $\cos 90^\circ = 0$.

Capítulo 3

Plano de aula

Após explorar as fórmulas de Heron e Brahmagupta, chegamos ao principal motivo desta dissertação, o plano de aula. A seguir, orientações para o professor que queira trabalhar área de quadriláteros cíclicos em sala de aula, acompanhadas de atividades para um melhor aprofundamento.

3.1 Fórmula de Brahmagupta - Um olhar para a geometria hindu

A fórmula de Brahmagupta para o cálculo da área de quadriláteros cíclicos, tema principal desta dissertação, será o assunto da aula, como já indicado no título. Nesta seção, o professor encontrará através dos objetivos uma razão para trabalhá-la com seus alunos. Com os conteúdos necessários e as séries recomendadas saberá se suas turmas estão aptas para explorar essa aula, e também encontrará um possível roteiro de como planejá-la.

3.1.1 Objetivo geral

Por meio de uma introdução sobre quem foi Brahmagupta e a matemática hindu, estudar áreas de quadriláteros inscritíveis e estender para quadriláteros convexos quaisquer.

3.1.2 Objetivo específico

Apresentar um tema mais aprofundado e pouco explorado em sala de aula, oportunidade para o professor trabalhar assuntos básicos do conteúdo programático. Por exemplo, o primeiro passo em quadriláteros inscritíveis é saber sua condição necessária e suficiente, ou seja, que seus ângulos opostos são suplementares. Neste momento pode-se retomar ângulos inscritos na circunferência, um conteúdo básico do Ensino Médio.

3.1.3 Conteúdos

Alguns conteúdos dos Ensinos Fundamental II e Médio serão exigidos como base para o aluno acompanhar a apresentação do assunto.

- **Ângulos opostos no quadrilátero inscritível**.
Os ângulos opostos num quadrilátero cíclico são suplementares, relação aprendida ao estudar sobre ângulos inscritos na circunferência;

- **Área de um triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido entre eles**.
Dado um triângulo ABC, de medidas $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, sua área S pode ser calculada por:

$$S = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\hat{C}; \qquad S = \frac{1}{2}ac\,\mathrm{sen}\hat{B}; \qquad S = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\hat{A}.$$

- **Seno e cosseno de ângulos suplementares**.

$$\mathrm{sen}\alpha = \mathrm{sen}\,(180^\circ - \alpha) \text{ e } \cos\alpha = -\cos\,(180^\circ - \alpha)$$

- **Lei dos cossenos**. Dado um triângulo ABC, de medidas $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles:

$$a^2 = b^2+c^2-2b\cos\hat{C}; \qquad b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}; \qquad c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}.$$

- **Relação fundamental da trigonometria**.
Para todo x real temos: $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

- **Fatoração**.
Fator comum: $ab + ac = a(b + c)$;
Diferença de quadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;
Trinômio quadrado perfeito: $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ e $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$.

Caso contrário, o professor pode buscar outra demonstração trabalhada nesta dissertação que não envolva algum desses assuntos. Ver [3, 6].

3.1.4 Séries

Ao estudar áreas de figuras planas, na 1ª série no Ensino Médio, o professor pode estender o estudo sobre quadriláteros, que geralmente os livros limitam-se aos quadriláteros notáveis (trapézios e seus casos particulares).

O professor também pode optar por trabalhar na 2ª série no Ensino Médio, depois que o aluno estudou a trigonometria necessária para compreender a demonstração, embora na 1ª série isto também seja possível caso o professor já queira explorar a trigonometria no triângulo retângulo que o aluno já tem estudado desde o 9º ano do Ensino Fundamental II.

3.1.5 Desenvolvimento

A seguir, uma possível ordem de etapas a serem produzidas pelo professor em sala de aula ao apresentar a fórmula de Brahmagupta aos seus alunos.

Introdução histórica

Trazer a história que existe por trás da fórmula, logo no início da aula, é essencial para despertar o interesse do aluno e este entender o contexto. Como o foco da aula não é sua parte histórica, o professor pode trazer de forma resumida, sem aprofundar.
Primeiramente, um pouco sobre o estudo da história da matemática na Índia. Enquanto o Império Romano do Ocidente caía, a matemática hindu florescia, e como na época eram relativamente muito distantes entre si, foi só depois, através da matemática árabe, que chegou ao Ocidente tais estudos. Há certa precariedade nos registros e ainda se estuda muito a respeito da história da matemática hindu.

Comente que a contribuição mais famosa dos indianos foi o sistema de numeração decimal e os algarismos, como conhecemos hoje. Dentre outros estudos dos hindus (se preferir, complemente), a geometria teve grande importância devido à mensuração, o que já nos faz entender um possível porquê da fórmula de Brahmagupta.
Brahmagupta, que viveu no século V, sob a dinastia Gupta, era astrônomo em Ujjain. A astronomia era a verdadeira paixão dos hindus e o estudo da matemática uma consequência.
Cite alguns assuntos estudados por Brahmagupta, como equações lineares indeterminadas e do segundo grau, método para formar ternas pitagóricas e aritmética com quantidades negativas, embora seu trabalho mais famoso é o estudo sobre os quadriláteros. No entanto, Brahmagupta cometeu um grande equívoco ao não citar que sua fórmula era restrita para quadriláteros inscritíveis.
Geralmente o aluno aprende a técnica para resolver equações do 2º grau como fórmula de Bhaskara, que leva erroneamente seu nome. Por ser um matemático hindu muito famoso entre os alunos, procure relacioná-lo com Brahmagupta, já que ambos viveram em Ujjain e tiveram alguns estudos em comum, como as equações de Pell (do tipo $y^2 = ax^2 + 1$, onde a não é um quadrado perfeito, [4]), porém Bhaskara viveu muito tempo depois de Brahmagupta.
Mais detalhes na Seção 2.1 desta dissertação. Para um texto didático sobre a história da matemática na Índia leia [1], p. 24-28.

Fórmula de Brahmagupta para quadriláteros inscritíveis

Com a fórmula de Brahmagupta para quadriláteros inscritíveis (ou cíclicos) podemos calcular sua área em função das medidas de seus lados.

Dado um quadrilátero inscritível qualquer cujos lados medem a, b, c e d, sua área S pode ser calculada por

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

onde p é seu semiperímetro, ou seja, $p = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Neste ponto da aula é importante retomar o que é um quadrilátero inscritível e também chamar a atenção para a notação que usamos para semiperímetro, pois os alunos podem confundir com o perímetro.

Exemplo

Logo após a apresentação da fórmula é essencial para a aula um exemplo numérico para que o aluno saiba aplicá-la e não tenha dúvidas sobre o que significa cada letra que usamos como notação. Uma sugestão é mudar os nomes dos pontos do quadrilátero para que o aluno interprete melhor.

a) Seja $PQRS$ um quadrilátero cíclico tal que $PQ = 2$, $QR = 6$, $RS = 9$ e $SP = 7$. Usando a fórmula de Brahmagupta, calcule sua área.

Resolução: Calculamos seu semiperímetro p, então $p = \frac{2+6+9+7}{2} = \frac{24}{2} = 12$. Substituindo na fórmula, temos:

$$S = \sqrt{(12-2)\,(12-6)\,(12-9)\,(12-7)} \Leftrightarrow S = \sqrt{10 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5}$$

Neste passo é essencial incentivar os alunos a não usar a calculadora. Mostre que ao decompormos os números este cálculo torna-se bastante simples:

$$S = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} \Leftrightarrow S = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$$

Ao extrair da raiz quadrada obtemos

$$S = 2.3.5 \Leftrightarrow S = 30$$

unidades de área.

Demonstração

Como já mencionado anteriormente, optamos por expor em sala de aula a demonstração para a fórmula de Brahmagupta trabalhada na Seção 2.3, no entanto o professor é livre para substituí-la conforme seus propósitos.

Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ e diagonal $AC = x$, como na Figura 3.1. Relembramos com os alunos que seus ângulos opostos são suplementares, uma condição necessária e suficiente para que o quadrilátero seja inscritível, conforme aprendido em ângulos inscritos na circunferência.

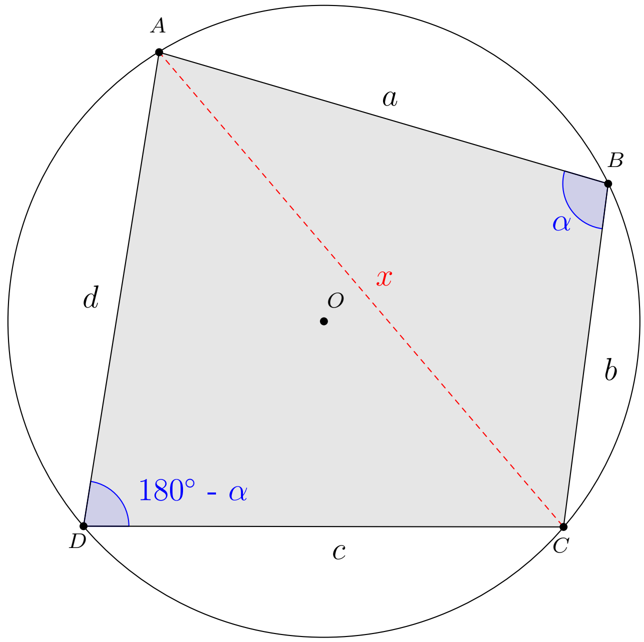


Figura 3.1: Os triângulos ABC e ACD formados pela diagonal $\overline{AC}$.

Como o quadrilátero não é notável devemos recorrer a outras figuras que sabemos calcular áreas, no caso ao triângulo. A diagonal $\overline{AC}$ divide o quadrilátero em dois triângulos, ABC e ACD, e a soma de suas áreas resulta na área desejada. Neste momento é possível discutir com os alunos as maneiras para o cálculo da área de triângulo e qual forma é conveniente conforme os dados que estamos trabalhando. Desta maneira, temos:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{ab\,\text{sen}\alpha}{2} + \frac{cd\,\text{sen}(180° - \alpha)}{2}.$$

Retomamos os resultados: $\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\alpha$ e $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Caso o ciclo trigonométrico não tenha sido aprendido ainda, cite esta consequência para ângulos suplementares e que será aprofundada mais tarde.

Substituímos $\text{sen}(180° - \alpha)$ por $\text{sen}\alpha$ e fatoramos a expressão:

$$S_{ABCD} = \frac{\text{sen}\alpha}{2}\,(ab + cd)\,.$$

Aponte para os alunos que a fórmula de Brahmagupta envolve as medidas dos lados, mas não dos ângulos internos e chegar a uma estratégia para a área não ficar em função do seno de algum ângulo. No caso, a estratégia é trabalhar com o cosseno do mesmo ângulo, pela lei dos cossenos.
Nos triângulos ABC e ACD aplicamos a lei dos cossenos e obtemos, respectivamente:

- $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$;
- $x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \alpha) \Leftrightarrow x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$.

Como $x > 0$ podemos igualá-las:

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2+2cd\cos\alpha \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2-d^2 = 2ab\cos\alpha+2cd\cos\alpha.$$

Ao buscar maneiras de relacionar seno e cosseno chegamos à relação fundamental da trigonometria, ou seja, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Esta pode ser incluída no conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo, no 9º ano do Ensino Fundamental II, utilizando o teorema de Pitágoras para demonstrá-la.
Para isto, fatoramos e isolamos $\text{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ em cada uma das expressões já encontradas:

- $\text{sen}\alpha = \dfrac{2S_{ABCD}}{ab+cd}$;
- $\cos\alpha = \dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$.

Substituindo na relação fundamental da trigonometria obtemos:

$$\left(\frac{2S_{ABCD}}{ab+cd}\right)^2 + \left[\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right]^2 = 1.$$

A partir deste ponto o aluno deve ficar atento à fatoração utilizada. Se preciso, retome este conteúdo antes.

Encontramos $4(ab+cd)^2$ como denominador comum e simplificamos:

$$16(S_{ABCD})^2 + \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2 = 4(ab+cd)^2$$

Subtraímos $(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ dos dois lados da igualdade a fim de obter uma diferença de quadrados:

$$16(S_{ABCD})^2 = 4(ab+cd)^2 - \left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2$$

Fatoramos usando a diferença de quadrados:

$$16.(S_{ABCD})^2 = [2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2][2(ab+cd)+a^2+b^2-c^2-d^2].$$

Notemos que são formados trinômios quadrados perfeitos nos fatores. Procure relembrar com os alunos os quadrados da soma e da diferença para evitar possíveis dificuldades:

$$16(S_{ABCD})^2 = [(c+d)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2].$$

Fatoramos novamente usando a diferença de quadrados:

$$16(S_{ABCD})^2 = (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d).$$

Seja p o semiperímetro do quadrilátero, onde $p = \frac{a+b+c+d}{2}$. Substituindo, temos:

$$16(S_{ABCD})^2 = (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d),$$

ou ainda, na forma

$$16(S_{ABCD})^2 = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Como o valor da área é positivo concluímos a fórmula de Brahmagupta:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Fórmula de Heron para triângulos

Para complementar a aula, é interessante trazer a fórmula de Heron para triângulos, a qual os alunos já aprenderam quando estudaram as diferentes maneiras para calcular a área de um triângulo.

Dado um triângulo cujos lados medem a, b e c sua área S pode ser calculada através da expressão

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$, ou seja, seu semiperímetro.

Mostre para seus alunos que esta conclusão de Heron é um caso particular da fórmula de Brahmagupta em que um dos lados do quadrilátero tem medida igual a zero.

Se o professor preferir, pode explorar com seus alunos a demonstração da fórmula de Brahmagupta da Seção 2.2 que utiliza a fórmula de Heron.

3.2 Atividades

A seguir propomos cinco atividades que envolvem a fórmula de Brahmagupta e a complementam. Primeiramente os *trapézios de Brahmagupta*, caso particular de quadriláteros inscritíveis, depois o *teorema de Ptolomeu*, uma relação para os quadriláteros cíclicos que Brahmagupta conhecia e que precisaremos para a próxima atividade, *diagonais do quadrilátero inscritível*, em que o aluno conclui a mesma relação para diagonais em função das medidas dos lados que Brahmagupta apresentou, *área de quadriláteros convexos quaisquer*, uma fórmula de Brahmagupta adaptada para quadriláteros que não sejam necessariamente inscritíveis e, por fim, *usando o GeoGebra para aplicar a fórmula de Brahmagupta*, uma atividade para verificar a fórmula aprendida independente do quadrilátero inscritível.

3.2.1 Trapézios de Brahmagupta

Brahmagupta também estudou um caso particular de quadriláteros cíclicos, os *trapézios de Brahmagupta*, [4]. Dados inteiros positivos a, b, c, A, B e C

tais que $a^2 + b^2 = c^2$ e $A^2 + B^2 = C^2$, ou seja, dois ternos pitagóricos, o quadrilátero inscritível de lados consecutivos aC, cB, bC e cA tem as medidas da área e de suas diagonais números racionais. Nesta atividade, adaptada de [4], não provaremos este fato, mas ao longo dos itens mostraremos que suas diagonais são perpendiculares, uma outra consequência importante dos trapézios de Brahmagupta.

a) Mostre que a área de um quadrilátero inscritível e circunscritível, simultaneamente, é igual à raiz quadrada do produto de seus lados.

b) Mostre que as diagonais de um quadrilátero convexo são perpendiculares se, e somente se, a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados do outro par de lados opostos.

c) Prove que as diagonais de um *trapézio de Brahmagupta* são perpendiculares, usando o item anterior.

d) Determine os lados, as diagonais, o diâmetro do círculo circunscrito e a área do *trapézio de Brahmagupta* determinado pelos dois ternos pitagóricos $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$.

3.2.2 Teorema de Ptolomeu

Brahmagupta conhecia o *teorema de Ptolomeu* e ao longo de seus trabalhos utilizou-o para algumas demonstrações. Neste tópico exploraremos este teorema para usá-lo no desenvolvimento da próxima atividade, e também por sua importância no estudo de quadriláteros inscritíveis.

Tal teorema afirma que para um quadrilátero cíclico $ABCD$ o produto das diagonais é igual a soma dos produtos dos lados opostos, ou seja, a relação:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Este fato foi fundamental para Ptolomeu desenvolver a trigonometria, principalmente na construção da tabela de cordas (ou seja, de senos), [9].

a) Prove o *teorema de Ptolomeu*.
Sugestão: Escolha um ponto M sobre a diagonal $\overline{BD}$ tal que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ seja igual à medida do ângulo $M\hat{C}D$, [9].

3.2.3 Diagonais do quadrilátero inscritível

No capítulo anterior trabalhamos na Seção 2.4 sobre as diagonais do quadrilátero cíclico, também objeto de estudo de Brahmagupta. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$. Suas diagonais podem ser calculadas por:

$$AC^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$$

e

$$BD^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Nesta atividade, adaptada de [4], vamos propor que o aluno demonstre uma série de itens até que chegue nessas relações, de forma diferente do que foi feito no capítulo anterior. O professor pode optar por substituí-la pela demonstração já trabalhada nesta dissertação.

a) Prove que o produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto da altura relativa ao terceiro lado pelo diâmetro da circunferência circunscrita.

b) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$, com diagonais $AC = x$ e $BD = y$ e cuja circunferência circunscrita tem raio R. Denote a medida do ângulo entre uma das diagonais e a perpendicular à outra por θ, como na Figura 3.2.

Mostre que $2Rx\cos\theta = ad + bc$ e $2Ry\cos\theta = ab + cd$.

c) A partir do item anterior, mostre que:

$$x^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$$

e

$$y^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

d) Mostre que se as diagonais do quadrilátero inscritível são perperdiculares então:

$$4R^2 = \frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}.$$

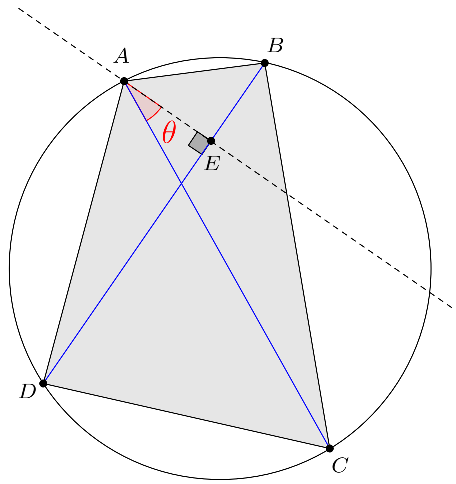


Figura 3.2: O ângulo de medida θ formado entre uma diagonal e a perpendicular à outra.

3.2.4 Área de quadriláteros convexos quaisquer

Um grande equívoco de Brahmagupta foi não mencionar que sua fórmula, para calcular áreas de quadriláteros, era exclusiva para os cíclicos, [2]. A fórmula correta para a área S de quadriláteros convexos quaisquer é

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},$$

em que a, b, c e d são as medidas de seus lados e α e β as medidas de dois ângulos internos opostos entre si.
Nesta atividade temos como objetivo demonstrar esta fórmula, também conhecida como *fórmula de Bretschneider*.

a) Mostre que $\cos(\alpha+\beta) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

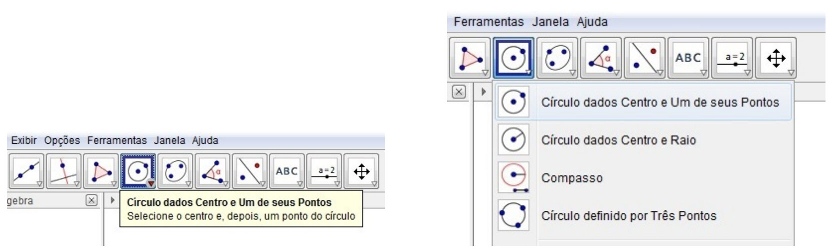
b) Demonstre a *fórmula de Bretschneider*.
Sugestão: Divida um quadrilátero convexo em dois triângulos usando uma de suas diagonais e some suas áreas.

c) Mostre que dado quatro segmentos quaisquer o quadrilátero formado[1] de maior área possível é o cíclico.

3.2.5 Usando o GeoGebra para aplicar a fórmula de Brahmagupta

Além do exemplo numérico, uma outra opção para o aluno aplicar a fórmula de Brahmagupta é usando o GeoGebra[2]. Com este *software* educativo, o aluno pode construir um quadrilátero inscritível qualquer e explicitar as medidas dos seus lados e de sua área. Para cada quadrilátero diferente que encontrar, aplica a fórmula da área para verificar sua veracidade.
Cada item a seguir corresponde a uma etapa para o professor construir a atividade no Geogebra em sala de aula.

a) Ao abrir o GeoGebra, a barra de ferramentas fica exposta na parte superior da tela. Cada ícone da barra é autoexplicativo, pois ao passar o *mouse* aparece sua função. Dentre as opções, escolhemos a construção de um círculo[3]. No exemplo da Figura 3.3(b) foi escolhida a construção *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, mas as outras opções são válidas também.



(a) Ícone da barra de ferramentas para construção de círculo.

(b) Opções para construir círculo.

Figura 3.3: Construindo um círculo.

[1] Desde que seja possível a construção do quadrilátero. Suponha segmentos de medidas a, b, c e d para serem lados de um quadrilátero, nesta ordem. Ao traçar uma diagonal encontramos dois triângulos e aplicamos a desigualdade triangular. Assim, temos que $|a - b| < c + d$.

[2] Pode ser baixado gratuitamente em `https://www.geogebra.org/download`.

[3] Mesma nomenclatura utilizada pelo GeoGebra, embora, por definição, seja construída uma circunferência.

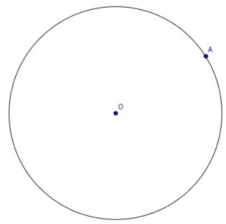
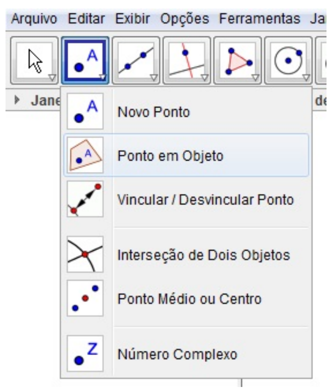
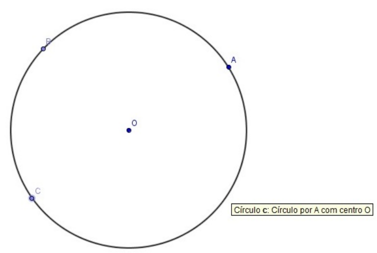


Figura 3.4: Círculo construído a partir do seu centro e um ponto.

b) Após o círculo, construiremos o quadrilátero. Para facilitar a construção inscrita na circunferência, dentre as opções no ícone de *Novo Ponto* clicamos em *Ponto em Objeto*, como na Figura 3.5(a). Em seguida, clicamos sobre a circunferência para três novos pontos.



(a) Ícone da barra de ferramentas para novo ponto.



(b) Escolhendo outros três pontos da circunferência.

Figura 3.5: Ponto da circunferência para construir um quadrilátero.

Com os quatro pontos em evidência no círculo, podemos construir o quadrilátero. Na barra de ferramentas, clicamos no ícone *Polígono* e escolhemos pelo primeiro item, como na Figura 3.6.

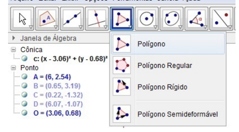
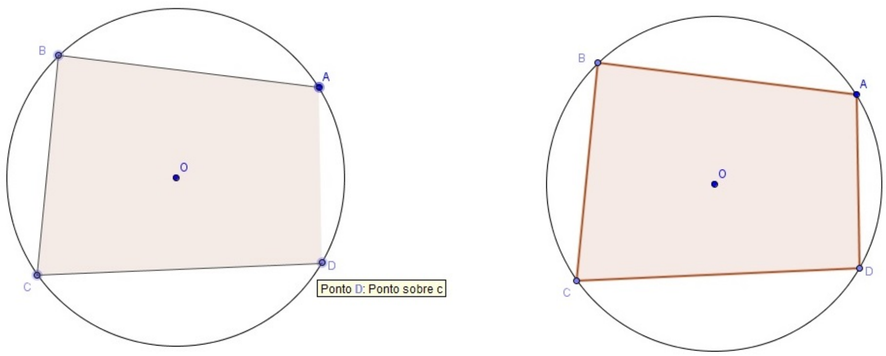


Figura 3.6: Ícone para construção de polígonos.

Clicamos nos quatro pontos, os quais serão nossos vértices do quadrilátero, no sentido horário ou anti-horário.

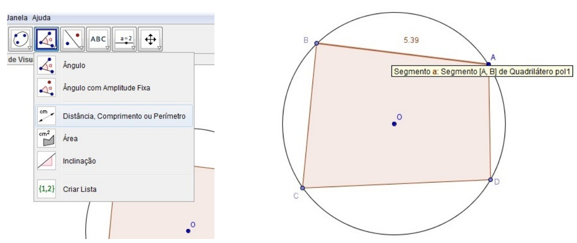


(a) Clicando nos pontos da circunferência para a construção do polígono.

(b) Terminamos o quadrilátero ao clicar no primeiro ponto novamente.

Figura 3.7: Construindo um quadrilátero inscritível.

c) Com o quadrilátero construído, deixaremos explícitas as medidas dos seus lados e de sua área. Na barra de ferramentas, essa opção encontra-se no ícone de *Ângulo*, como na Figura 3.8(a). Após escolher por *Distância, Comprimento ou Perímetro*, clicamos nos lados do quadrilátero, assim como na Figura 3.8(b).

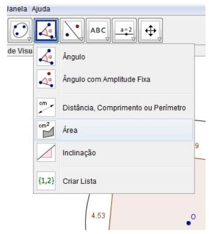


(a) Opção para calcular comprimentos.

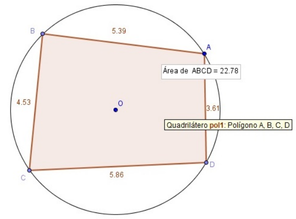
(b) Clicando sobre os lados do quadrilátero.

Figura 3.8: Obtendo as medidas dos lados do quadrilátero.

Ainda no mesmo ícone de *Ângulo* temos a opção *Área*. Ao escolhê-la, clicamos sobre o quadrilátero construído para obter a medida de sua área, como na Figura 3.9(b).



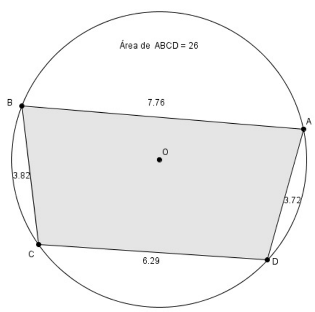
(a) Opção para calcular áreas.



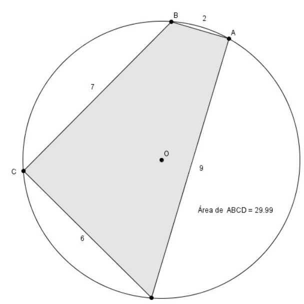
(b) Clicando sobre o quasrilátero.

Figura 3.9: Obtendo a medida da área do quadrilátero.

d) Após a construção, o professor e os alunos podem manipular o quadrilátero e a circunferência para encontrar diversas formas e medidas diferentes. Com as medidas dos lados do quadrilátero, podemos utilizar a fórmula de Brahmagupta para calcular a área e, ao encontrar o resultado, comparar com o número dado pelo GeoGebra. Vale ressaltar que o *software* trabalha diversas vezes com medidas aproximadas e o resultado pode não ser exatamente igual.



(a) Exemplo qualquer que pode ser encontrado ao manipular o quadrilátero.



(b) O exemplo numérico da aula que o Geogebra calcula a área aproximada, pois o raio da circunferência é um número irracional.

Figura 3.10: Exemplos de situações que podem ser encontradas.

Conclusões

No início, este trabalho apresenta a fórmula de Heron para áreas de triângulos, expressão que depende apenas das medidas dos lados do triângulo. Essa fórmula é mais comum de ser citada nas aulas do Ensino Médio, no entanto os professores e livros didáticos evitam aprofundá-la. A partir de uma introdução histórica sobre Heron segue-se três possíveis demonstrações de sua fórmula, com comentários sobre seus níveis de dificuldade.

Em seguida, foi possível explorar a fórmula de Brahmagupta para áreas de quadriláteros cíclicos, foco desta dissertação. Após uma introdução sobre quem foi o hindu Brahmagupta, desenvolve-se duas demonstrações da fórmula que leva seu nome. Neste mesmo capítulo, foi apresentada as diagonais do quadrilátero cíclico em função das medidas de seus lados, também trabalho de Brahmagupta, e utiliza-se tal conclusão das diagonais numa terceira demonstração para a fórmula da área. Para finalizar, apresenta-se uma generalização para área de quadriláteros convexos quaisquer, que também pode ser chamada por fórmula de Bretschneider.

No terceiro capítulo, após explorar as fórmulas de Heron e Brahmagupta, este trabalho traz um plano de aula para o professor que queira trabalhar a fórmula para quadriláteros cíclicos em sala de aula, principal razão desta dissertação. O professor, leitor desta, teve acesso aos objetivos para trabalhar esse tema, para quais séries isto é possível e os conteúdos necessários, além de um roteiro de como desenvolvê-la, que contém introdução histórica, apresentação da fórmula de Brahmagupta com exemplo numérico, esboço de uma demonstração mais apropriada em sala de aula e a fórmula de Heron para triângulos como complemento.

Neste mesmo capítulo, após o plano de aula, cinco propostas de atividades que exploraram trapézios de Brahmagupta, teorema de Ptolomeu, diagonais do quadrilátero cíclico em função das medidas dos seus lados, a fórmula para área de quadriláteros convexos quaisquer e, por fim, o *software* GeoGebra para verificar a fórmula de Brahmagupta em sala de aula. Alguns desses conteúdos já haviam sido trabalhados no capítulo anterior, porém não com a finalidade didática.

Caso haja dúvidas relacionadas às atividades, há o apêndice após esta conclusão, onde o professor pode consultar as resoluções das atividades propostas.

Outro estudo de Brahmagupta são as equações de Pell. Para o leitor desta dissertação, um desafio. Em [10], p. 77, há o seguinte exemplo: $x^2 - 92y^2 = 1$. Esta equação é interessante, pois é o primeiro exemplo de Brahmagupta e ele diz que *uma pessoa que resolve este problema dentro de um ano é um matemático.* Nesta mesma referência encontra-se uma solução para este problema.

Outra citação famosa de Brahmagupta, que é possível encontrar em [11]: *Assim como o sol ofusca as estrelas por seu brilho, o homem de conhecimento irá ofuscar a fama dos outros em assembleias do povo se ele propuser problemas algébricos, e ainda mais se ele resolvê-los.*

Enfim, convém ressaltar que se desejarmos calcular a área de um polígono com o número de lados maior que quatro devemos proceder através de somas, isto é, por exemplo, para um heptágono deve-se somar a área de um triângulo com as áreas de dois quadriláteros ou, alternativamente, cinco triângulos. Em geral, um polígono de n lados, com $n \geq 5$, devemos obter a soma de $(n-2)$ triângulos ou uma combinação de triângulos e quadriláteros.

Referências Bibliográficas

[1] BERLINGHOFF, William P., GOUVÊA, Fernando Q., *A Matemática Através dos Tempos*, 2ª edição, Blucher, São Paulo, 2010.

[2] BOYER, Carl B., MERZBACH, Uta C., *História da Matemática*, Blucher, São Paulo, 2012.

[3] DOLCE, Osvaldo, POMPEO, José Nicolau, *Fundamentos de Matemática Elementar - vol. 9*, 7ª edição, Atual Editora LTDA, São Paulo, 1993.

[4] EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática*, Editora Unicamp, Campinas, 2004.

[5] GARBI, Gilberto G., *A Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática*, 3ª edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, 2009.

[6] IEZZI, Gelson, *Fundamentos de Matemática Elementar - vol. 3*, 7ª edição, Atual Editora LTDA, São Paulo, 1993.

[7] JOHNSON, Roger A., *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2007.

[8] MLODINOW, Leonard, *A Janela de Euclides*, 6ª edição, Geração Editorial, São Paulo, 2010.

[9] ROQUE, Tatiana, CARVALHO, João Bosco P. de, *Tópicos de História da Matemática* (*Coleção PROFMAT*), 1ª edição, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[10] STILLWELL, John, *Mathematics and its History*, Third Edition, Springer, New York, 2010.

[11] The MacTutor History of Mathematics archive - Quotations by Brahmagupta. Disponível em: `http://www-history.mcs.`

st-and.ac.uk/Quotations/Brahmagupta.html. Acesso em 20 de Janeiro de 2015.

[12] The Story of Mathematics, Indian Mathematics - Brahmagupta. Disponível em: http://www.storyofmathematics.com/indian_brahmagupta.html. Acesso em 30 de Dezembro de 2014.

[13] WIKIPEDIA - The Free Encyclopedia, Bretschneider's formula. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Bretschneider%27s_formula. Acesso em 30 de Dezembro de 2014.

[14] WIKIPEDIA - The Free Encyclopedia, Hero of Alexandria. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Hero_of_Alexandria. Acesso em 30 de Dezembro de 2014.

Apêndice A

Resoluções das atividades

Este apêndice é destinado às resoluções das atividades propostas na Seção 3.2 desta dissertação.

A.1 Trapézios de Brahmagupta

a) Seja um quadrilátero com lados de medidas a, b, c e d, nesta ordem. Como o quadrilátero é inscritível podemos usar a fórmula de Brahmagupta para calcular sua área, ou seja, $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, em que p é seu semiperímetro.
No entanto o quadrilátero também é circunscritível, e a condição necessária e suficiente é que a soma das medidas de dois lados opostos seja igual à soma dos outros dois lados, ou seja, $a + c = b + d$.
Seu semiperímetro p pode ser calculado por

$$p = \frac{a+b+c+d}{2} = a + c = b + d.$$

Substituindo na fórmula de Brahmagupta p por $a + c$ ou por $b + d$, conforme conveniência, temos:

$$S = \sqrt{(a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d)} \Leftrightarrow S = \sqrt{c \cdot d \cdot a \cdot b}$$

que é a raiz quadrada do produto de seus lados, como queríamos demonstrar.

b) ($\Rightarrow$) Primeiramente provemos que se as diagonais são perpendiculares então a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados de outro par de lados opostos.

Observe a Figura A.1.

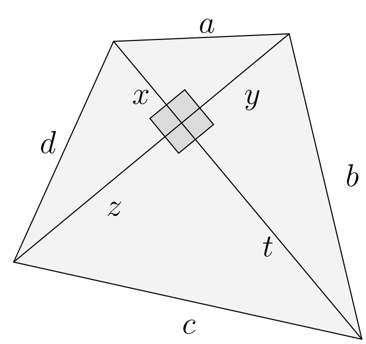


Figura A.1: Quadrilátero convexo qualquer e suas diagonais perpendiculares.

Pelo teorema de Pitágoras concluímos as seguintes relações:

- $a^2 = x^2 + y^2$;
- $b^2 = y^2 + t^2$;
- $c^2 = t^2 + z^2$;
- $d^2 = x^2 + z^2$.

Ao somarmos a^2 e c^2, obtemos:

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + t^2 + z^2.$$

Da mesma maneira, somamos b^2 e d^2:

$$b^2 + d^2 = y^2 + t^2 + x^2 + z^2.$$

Portanto, concluímos que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

($\Leftarrow$) Após provar a ida, provemos a volta, ou seja, se a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados de outro par de lados opostos então as diagonais são perpendiculares.

Observe a Figura A.2.

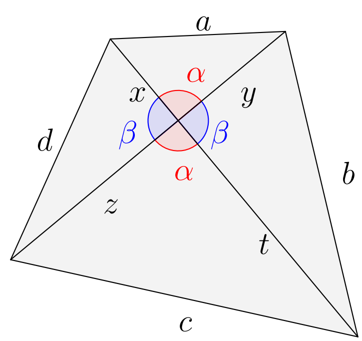


Figura A.2: Os ângulos α e β formados pelas diagonais.

Aplicamos lei dos cossenos nos triângulos formados pelas diagonais e os lados do quadrilátero:

- $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$;
- $b^2 = y^2 + t^2 - 2yt\cos\beta$;
- $c^2 = t^2 + z^2 - 2tz\cos\alpha$;
- $d^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\beta$.

Trabalhemos com a hipótese $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Substituindo as relações encontradas nessa expressão e desenvolvendo-a, encontramos:

$$x^2+y^2+t^2+z^2-2(xy+tz)\cos\alpha = y^2+t^2+x^2+z^2-2(yt+xz)\cos\beta \Leftrightarrow$$

$$(xy + tz)\cos\alpha = (yt + xz)\cos\beta.$$

No entanto, α e β são ângulos suplementares, portanto $\cos\alpha = -\cos\beta$. Então, na expressão anterior, temos:

$$(xy + tz)\cos\alpha = -(yt + xz)\cos\alpha.$$

Desta igualdade, encontramos duas possibilidades:

$$\cos\alpha = 0 \text{ ou } xy + tz = -(yt + xz).$$

Como x, y, z e t são medidas, é absurda a última afirmação.

Portanto $\cos\alpha = 0$, e como α é um ângulo menor que 180° então $\alpha = 90^\circ$, ou seja, as diagonais são perpendiculares.

c) Pelo item anterior, sabemos que as diagonais são perpendiculares se, e somente se, a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados do outro par de lados opostos. Como o quadrilátero tem lados consecutivos aC, cB, bC e cA, testamos os pares de lados opostos.

Para o par aC e bC, temos

$$(aC)^2 + (bC)^2 = C^2(a^2 + b^2),$$

no entanto, por hipótese temos que $a^2 + b^2 = c^2$, então

$$(aC)^2 + (bC)^2 = C^2c^2.$$

Para o outro par, cB e cA, temos

$$(cB)^2 + (cA)^2 = c^2(A^2 + B^2),$$

da mesma forma, por hipótese temos que $A^2 + B^2 = C^2$, então

$$(cB)^2 + (cA)^2 = C^2c^2.$$

Portanto $(aC)^2 + (bC)^2 = (cB)^2 + (cA)^2$ e assim provamos que as diagonais são perpendiculares.

d) Para calcular as medidas dos lados, usamos o item anterior, ou seja, seus lados medem aC, cB, bC e cA, tal que $a^2 + b^2 = c^2$ e $A^2 + B^2 = C^2$.

Os lados deste trapézio de Brahmagupta têm medidas 39, 60, 52 e 25, mesmo permutando os ternos pitagóricos entre as possíveis letras, o resultado é o mesmo.

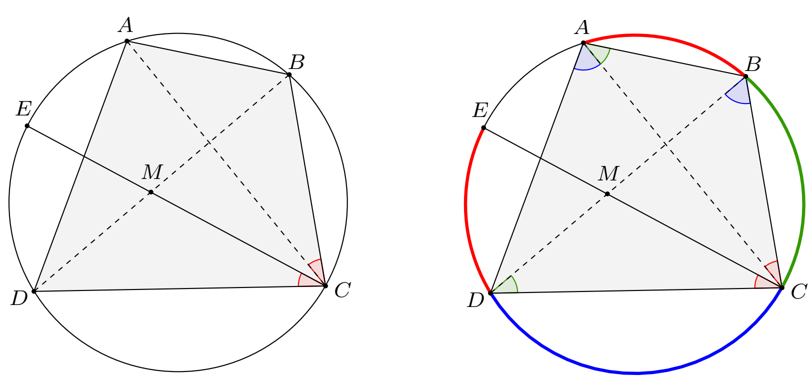
As diagonais medem 56 e 63, as quais podem ser calculadas pelo teorema de Pitágoras, neste caso, ou usando as fórmulas para diagonais do quadrilátero cíclico que serão exploradas na terceira atividade.

O diâmetro do círculo circunscrito pode ser calculado a partir da expressão para área de triângulos em função de seus lados e do raio da circunferência, ao separar o quadrilátero em dois triângulos usando uma de suas diagonais. Outra maneira, mais simples, é usar a fórmula apresentada no item (d) da terceira atividade. Sua medida é 65.

Sua área, calculada pela fórmula de Brahmagupta, é 1764.

A.2 Teorema de Ptolomeu

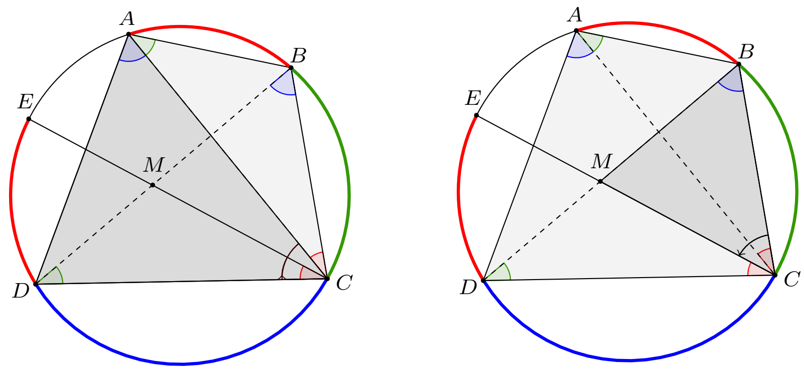
a) Conforme a sugestão, escolhemos um ponto M sobre a diagonal $\overline{BD}$ tal que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ seja igual à medida do ângulo $M\hat{C}D$, como na Figura A.3(a). Observemos os ângulos congruentes, inscritos na circunferência, conforme a Figura A.3(b).



(a) Ponto M, conforme sugestão. (b) Ângulos inscritos congruentes.

Figura A.3: Quadrilátero inscritível e seus ângulos inscritos congruentes.

Notemos que $\Delta ACD \sim \Delta BCM$. Veja Figura A.4(a).



(a) Triângulo ACD. (b) Triângulo BCM.

Figura A.4: Triângulos ACD e BCM semelhantes.

A partir desta semelhança, chegamos à seguinte proporção:

$$AD \cdot BC = AC \cdot MB. \tag{A.1}$$

Também encontramos semelhança entre os triângulos DCM e ACB, como na Figura A.5. Concluímos que:

$$AB \cdot DC = AC \cdot DM. \tag{A.2}$$

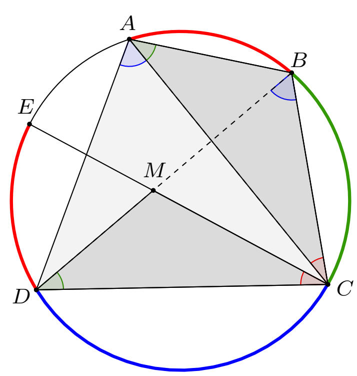


Figura A.5: Triângulos DCM e ACB semelhantes.

Somamos Eq.(A.1) e Eq.(A.2) e obtemos:

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot MB + AC \cdot DM \Leftrightarrow$$

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC(MB + DM).$$

No entanto, $MB + DM = BM$. Substituindo, temos

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot BD,$$

que é o teorema de Ptolomeu.

A.3 Diagonais do quadrilátero inscritível

a) Considere um triângulo com lados de medidas a, b e c inscrito numa circunferência, conforme a Figura A.6. Considere h a medida da altura relativa ao lado c e α o ângulo compreendido entre os lados b e c.

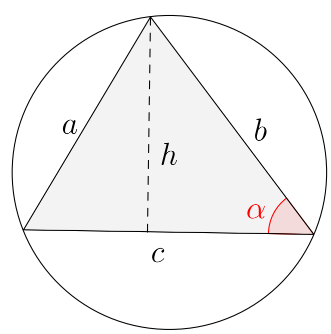


Figura A.6: Triângulo inscrito na circunferência.

Aplicamos a lei dos senos no triângulo e obtemos

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = 2R \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{a}{2R}\cdot$$

sendo R o raio da circunferência circunscrita.

No triângulo retângulo formado pela altura h e o lado b, temos:

$$\text{sen}\alpha = \frac{h}{b}.$$

Igualando as duas expressões concluímos

$$\frac{a}{2R} = \frac{h}{b},$$

ou ainda, na forma

$$ab = h2R$$

como queríamos provar.

b) Traçamos a perpendicular à mesma diagonal, porém passando pelo vértice oposto, como na Figura A.7.

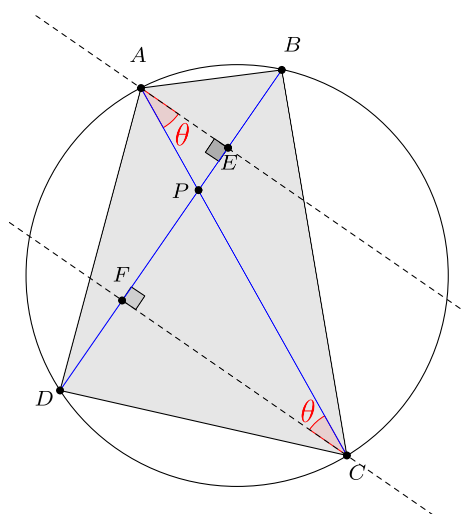


Figura A.7: Retas perpendiculares à diagonal $\overline{BD}$.

Notemos que $m(P\hat{C}F) = \theta$ também. Conforme o enunciado da atividade, temos $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$, com diagonais $AC = x$ e $BD = y$.

Usamos a relação do item anterior no triângulo ABD, o qual está inscrito na mesma circunferência de raio R que o quadrilátero. Assim, temos

$$a \cdot d = AE \cdot 2R,$$

em que AE é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BD}$.

No triângulo APE, para relacionar a medida AE, encontramos:

$$\cos\theta = \frac{AE}{AP} \Leftrightarrow AE = AP \cdot \cos\theta.$$

Substituímos na expressão anterior, obtemos:

$$a \cdot d = AP \cdot 2R\cos\theta \Leftrightarrow AP = \frac{a \cdot d}{2R\cos\theta}.$$

Analogamente, nos triângulos BCD e CPF, encontramos:

$$b \cdot c = CP \cdot 2R\cos\theta \Leftrightarrow CP = \frac{b \cdot c}{2R\cos\theta}.$$

No entanto, $AP + CP = AC$. Substituindo, temos:

$$AC = \frac{a \cdot d}{2R\cos\theta} + \frac{b \cdot c}{2R\cos\theta}.$$

Como $AC = x$, concluímos

$$2Rx\cos\theta = ad + bc$$

como queríamos mostrar.

Analogamente, mostramos para a diagonal $\overline{BD}$ e concluímos a expressão $2Ry\cos\theta = ab + cd$.

c) Usamos o teorema de Ptolomeu no mesmo quadrilátero do item anterior:

$$ac + bd = xy.$$

Substituímos y pela relação encontrada:

$$ac + bd = x \cdot \frac{ab + cd}{2R\cos\theta}\cdot$$

Do item anterior também temos:

$$2R\cos\theta = \frac{ad + bc}{x}\cdot$$

Usando-a na expressão anterior, encontramos

$$ac + bd = x(ab + cd)\frac{x}{ad + bc},$$

ou, finalmente,

$$x^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}\cdot$$

d) Se as diagonais são perpendiculares entre si então $\theta = 0°$, Figura A.7, ou seja, $\cos\theta = \cos 0° = 1$.

Substituindo nas relações encontradas no item **(b)** temos:

$$x = \frac{ad + bc}{2R} \text{ e } y = \frac{ab + cd}{2R}.$$

Pelo teorema de Ptolomeu, encontramos

$$\left(\frac{ad + bc}{2R}\right)\left(\frac{ab + cd}{2R}\right) = ac + bd$$

ou ainda, como procuramos

$$4R^2 = \frac{(ab + cd)(ad + bc)}{ac + bd}\cdot$$

A.4 Área de quadriláteros convexos quaisquer

a) Da fórmula do cosseno do arco duplo temos $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$.

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \Leftrightarrow \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1.$$

Seja $2\theta = \alpha + \beta \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Substituímos na fórmula mencionada e encontramos

$$\cos(\alpha + \beta) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

como queríamos mostrar.

b) Consulte a Seção 2.6 desta dissertação.

c) Para o cálculo da área do quadrilátero de lados a, b, c e d utilizamos a fórmula trabalhada nesta atividade:

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Para que seja a maior área possível então $abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$. Como $abcd \neq 0$ concluímos que $\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, ou seja, $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$. Como $\frac{\alpha+\beta}{2} < 180°$, então:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 180°.$$

Portanto o quadrilátero é inscritível, já que seus ângulos opostos são suplementares.

Para provar a existência do quadrilátero cíclico, consulte [7].