Raul Cintra de Negreiros Ribeiro

Números Complexos: Aplicações

CAMPINAS
2015

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

RAUL CINTRA DE NEGREIROS RIBEIRO

NÚMEROS COMPLEXOS: APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO RAUL CINTRA DE NEGREIROS RIBEIRO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA.

Assinatura do Orientador

____

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

R354n Ribeiro, Raul Cintra de Negreiros, 1978-
Números complexos : aplicações / Raul Cintra de Negreiros Ribeiro. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Números complexos. 2. Polígonos. 3. Euler, Teorema de. 4. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 5. Matemática - Problemas, exercícios, etc.. I. Oliveira, Edmundo Capelas,1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Complex numbers : applications
Palavras-chave em inglês:
Complex numbers
Polygons
Euler theorem
Mathematics (High school) - Study and teaching
Mathematics - Problems, exercises, etc.
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]
Eliana Contharteze Grigoletto
Hamilton Germano Pavão
Data de defesa: 16-06-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 16 de junho de 2015

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Eliana Contharteze Grigoletto

Prof(a). Dr(a). ELIANA CONTHARTEZE GRIGOLETTO

Prof(a). Dr(a). HAMILTON GERMANO PAVÃO

Abstract

The history of complex numbers is used to arouse interest from high school students in this delicate subject in math teaching. In sequence, to demonstrate how important complex numbers are in the hole math, are presented several applications that is also possible to teach for high school students. Also, we propose a small introduction to the concept of the limit, which appears in mathematical analysis.

Keywords: Complex Numbers, Area of a Polygon, Heron's Theorem, Lagrange's Trigonometric Identity, Euler's Formula, Olympiad Mathematics

Resumo

A história dos números complexos é utilizada para despertar interesse dos alunos de ensino médio nesse assunto delicado dentro do ensino de matemática. Na sequência, para demonstrar a importância dos números complexos em toda matemática, são apresentadas diversas aplicações possíveis de serem ensinadas a alunos de ensino médio. Também propomos uma pequena introdução ao conceito de limite, que aparece em análise matemática.

Palavras-chave: Números Complexos, Área de Polígonos, Teorema de Herão, Identidades Trigonométricas de Lagrange, Fórmula de Euler, Olimpíada de Matemática.

Sumário

Introdução

Geralmente os professores apresentam os números complexos a seus alunos da última série do ensino médio. Assim, pensando em um aluno que já domina toda matemática do ensino médio, a dissertação tenta apresentar aplicações dos números complexos em diferentes campos da matemática. Tudo com o intuito de fazer o aluno perceber a importância e o alcance desses números na matemática.

Os alunos recebem com muita estranheza esse novo assunto e a razão é porque passaram muitos anos imaginando que o quadrado de qualquer número é sempre um número positivo. Muitas vezes o próprio professor diz essa frase por achar que nas séries anteriores está implícito que está falando apenas do conjunto dos números reais. Isso certamente atrapalha muito o ensino desse assunto.

Outro motivo que dificulta muito o aprendizado do aluno é a maneira como grande parte dos livros didáticos aborda a ampliação do conhecimento do aluno sobre o conjunto dos números reais para o conjunto dos números complexos. Essa abordagem sem uma prévia justificativa e contextualização histórica fica muito clara se compararmos a abordagem dada no momento da ampliação do conhecimento do aluno sobre o conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais.

É evidente, em diversos livros didáticos, o cuidado que existe ao apresentar pela primeira vez uma fração a um aluno. Não se diz apenas que trata-se de um número inteiro colocado acima de outro cujas operações seguirão as seguintes regras:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Imagine qual o entendimento que o aluno teria de frações caso assim lhe fossem apresentadas? Infelizmente essa abordagem não está muito distante da maneira que os números complexos são apresentados. Assim, a importância desta dissertação reside na possível colaboração para que os professores, uma vez conhecendo mais da história e das utilidades dos números complexos, passem a abordar o tema com um maior cuidado. Por consequência, os alunos poderiam diminuir a estranheza que lhes causa esse tópico no ensino médio.

O primeiro capítulo começa trazendo registros históricos (século I e século III) de cálculos feitos por Herão e por Diofanto de Alexandria, nos quais a raiz quadrada de um número negativo aparecia. Passa depois para uma história bastante conhecida que mostra todas as intrigas que envolveram o surgimento dos números complexos no século XVI.

Já na terceira seção do primeiro capítulo temos as contribuições de diferentes matemáticos ao longo dos séculos para que o número complexo fosse realmente aceito como tal e que sua interpretação ficasse cada vez mais clara.

Por fim, na quarta seção do primeiro capítulo, temos a lista das propriedades de números complexos conhecidas pelos alunos de ensino médio; com exceção apenas da fórmula de Euler.

No segundo capítulo são utilizadas algumas fórmulas de geometria analítica, matrizes e determinantes, apresentadas no ensino médio. Isto para chegar às fórmulas que utilizam números complexos como vértices de polígonos convexos e calculam a sua área.

No terceiro capítulo há a demonstração das identidades trigonométricas de Lagrange. Para isso, na primeira seção, tem-se a demonstração da fórmula que soma os termos de uma progressão geométrica finita. Na segunda seção tem-se a utilização da forma trigonométrica dos números complexos.

No quarto capítulo é utilizada a fórmula de Euler para fazer uma elegante demonstração do teorema de Herão, que calcula a área de um triângulo a partir das medidas de seus lados.

No quinto capítulo está a proposta de um plano de aula pensado para uma turma de terceiro ano do ensino médio. Primeiramente faz-se a demonstração do limite fundamental da trigonometria introduzindo aos alunos uma noção bastante inicial de limite. Este limite vai proporcionar aos alunos um resgate da fórmula da área de um círculo e um caminho de manipulações matemáticas que Euler utilizou no século XVIII para chegar à fórmula de Euler para os números complexos.

Ainda no quinto capítulo há uma lista de problemas que serviriam de tarefa para casa, com o intuito do estudante solidificar o conteúdo. Logo após a lista de exercícios, encontram-se a resolução dos mesmos.

No sexto capítulo são propostos quatro desafios que já apareceram em competições matemáticas internacionais e que podem ser resolvidos com a utilização de números complexos. Vale ressaltar que apenas um dos problemas é realmente uma questão de números complexos. Nos outros três problemas a teoria dos números complexos aparece para ajudar um problema proposto dentro do campo dos números reais.

Este último capítulo pode servir para o professor se desafiar, lembrando assim o gosto que marca a vida dos estudantes amantes de matemática. Também pode servir para o professor propor questões para turmas mais avançadas ou individualmente para algum aluno.

Capítulo 1

Um pouco da história dos números complexos

Neste capítulo veremos como apareceu a necessidade de utilização dos números complexos e quais foram os matemáticos responsáveis pela estruturação desse novo conjunto numérico.

Abordaremos a história dos números complexos pensando como os professores poderiam enriquecer as aulas para alunos de ensino médio, isto é, não abordaremos temas que vão além do conteúdo do ensino médio, exceto a utilização da fórmula de Euler ($e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen} x$) e uma noção inicial do conceito de limite.

Ressaltamos que estes dois temas, que excedem o conteúdo do ensino médio, podem ser vistos como um complemento acessível aos alunos, uma vez que para as demonstrações formais mencionamos uma referência.

Em particular, a noção ingênua do conceito de limite é abordado a partir de uma simples justificativa de um resultado conhecido desde a primeira série do ensino médio, associado à soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q satisfazendo a desigualdade $-1 < q < 1$.

1.1 Primeiras tentativas

Ao longo da história, muitos matemáticos encontraram raízes quadradas de números negativos ao executarem cálculos, porém nada souberam fazer com elas. Isso só foi começar a mudar no século XVI, quando alguns matemáticos começaram a fazer as primeiras operações com essas raízes.

O primeiro registro que temos de um cálculo que levou a uma raiz quadrada de número negativo foi registrado cerca de 50 d.C. em Stereometrica, de Herão de Alexandria. Ele elaborou o cálculo da altura (**h**) de um tronco de pirâmide de bases quadradas paralelas a partir das medidas do lado (**a**) do quadrado da base, do lado (**b**) do quadrado do topo e da medida (**c**) das arestas que não são lados dos quadrados; conforme a Figura 1.1. Vamos explicitar os cálculos, com a notação de hoje, conforme elaborado por Herão.

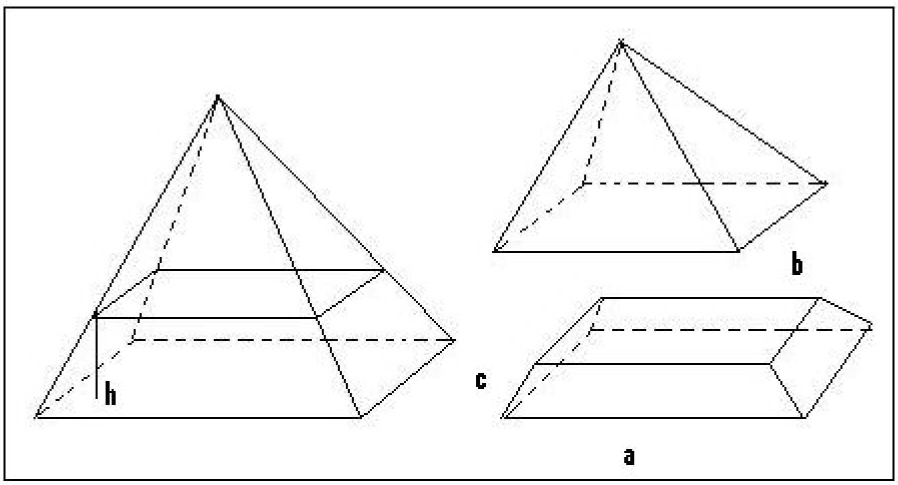

Figura 1.1: Tronco de pirâmide.

A utilidade deste cálculo se deve ao fato de **c** ser mensurável diretamente, enquanto **h** faz parte da estrutura interna do sólido, o que impede a sua mensuração direta. O cálculo é feito a partir do triângulo retângulo que possui hipotenusa **c** e uma aresta medindo **h** com outra aresta medindo a diferença entre metade da diagonal do quadrado da base e metade da diagonal do quadrado do topo.

Utilizando nossa notação matemática atual, ao contrário de Herão, e aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{b\sqrt{2}}{2} \right)^2 = c^2$$

de onde segue para a altura

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2} \right)^2}.$$

No problema que Herão resolveu [8], a base era um quadrado de lados 28, o topo era um quadrado de lados 4 e a aresta c do tronco de pirâmide valia 15. Assim, substituindo na expressão para h temos

$$h = \sqrt{15^2 - 2\left(\frac{28-4}{2}\right)^2}$$

ou ainda, simplificando, na forma

$$h = \sqrt{225 - 2 \cdot 144}$$

que pode ser reescrito

$$h = \sqrt{225 - 144 - 144}$$

e ainda, reescrevendo, na forma

$$h = \sqrt{81 - 144}.$$

Após escrever isto, não se sabe se por erro de algum copista ou por erro de Herão, o problema continua até encontrar o volume do tronco da pirâmide utilizando a expressão errada:

$$h = \sqrt{81 - 144} = \sqrt{63}.$$

Portanto Herão não só não percebeu que se tratava de uma pirâmide de construção impossível, como também não percebeu que estava diante de um novo conjunto numérico.

Outros grandes matemáticos deixaram registradas suas reações. Diofanto de Alexandria, cerca de 200 anos após Herão, deixou registrado que a equação abaixo (novamente utilizando nossa linguagem matemática atual e não a de Diofanto) não teria nenhuma solução possível nos reais, visto que o determinante é negativo.

$$336x^2 + 24 = 172x$$

que resolvida resulta em

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 2016}}{168}.$$

Mais seis séculos se passam, antes que o matemático hindu Mahaviracarya (cerca de 850 d.C.) escrevesse em seus trabalhos: "Uma quantidade negativa não é o quadrado de nenhuma outra quantidade, portanto ela não pode possuir raiz quadrada". Isto ficou como verdade por mais sete séculos.

1.2 Intrigas e descobertas

Cinco grandes matemáticos podem ser apresentados como responsáveis, na primeira metade do século XVI, pelo que serviria de base para discussão do tratamento matemático das raízes quadradas de números negativos. São eles: Scipione dal Ferro (1465-1526), Antônio Maria Fior (Antônio Maria del Fiore - primeira metade do século XVI), Niccolò Tartaglia (1499-1557), Gerolamo Cardano (1501-1576) e Ludovico Ferrari (1522-1565)[16].

Dal Ferro foi o primeiro a descobrir soluções parciais para equações de terceiro grau, porém manteve em segredo, contando apenas para Fior. Após a morte de dal Ferro, Fior usou essa informação para desafiar Tartaglia em um desafio público, algo comum na época. Em 22 de fevereiro de 1535, tanto Fior quanto Tartaglia depositaram 30 problemas a serem resolvidos pelo adversário num tabelião de Veneza. Marcaram a entrega das soluções para 40 ou 50 dias.

Tartaglia ganhou fama por resolver os 30 problemas em duas horas, enquanto Fior nunca entregou a solução dos 30 problemas. O erro de Fior foi fazer todos os problemas recaírem na equação de terceiro grau, pois ele acreditava que era o único possuidor da fórmula de solução. Porém Tartaglia, em 12 de fevereiro de 1535, havia descoberto essa fórmula de forma independente.

Cardano, médico e matemático muito famoso, pediu insistentemente a Tartaglia que revelasse a ele sua descoberta. Tartaglia a revelou em 1539 diante do juramento de que Cardano não a publicasse e não a ensinasse para ninguém.

Quando Cardano foi a Bolonha visitar o matemático Annibale della Nave (1500-1558), em 1542, teve acesso a um caderno velho que pertencia ao sogro de Annibale que havia morrido há 16 anos: Scipione dal Ferro. Cardano encontrou no caderno a fórmula de resolução de equações cúbicas, demonstrada da mesma maneira que Tartaglia fez, porém 20 anos antes. A seguir, recuperamos duas fórmulas relativas às equação cúbica, sem contar com o termo do segundo grau ax^2. A demonstração feita por Tartaglia encontra-se no apêndice A.

A equação

$$x^3 + bx = c$$

apresenta como solução

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}.$$

Enquanto a equação

$$x^3 = bx + c$$

admite como solução

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3} + \frac{c}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3} - \frac{c}{2}}.$$

Esse fato foi marcante para que Cardano decidisse romper o juramento e publicar em 1545 o livro *Ars Magna.* Muitos especialistas marcam esse ano como o início da matemática moderna e ainda colocam Cardano como o maior algebrista de seu tempo e um dos mais influentes matemáticos de qualquer época.

Embora Cardano tenha escrito em seu livro que tanto Tartaglia quanto Dal Ferro eram os autores da fórmula acima, Tartaglia ficou profundamente irritado e publicou em 1546 o livro *Quesiti et inventioni diverse*, no qual acusava Cardano de uma baixeza moral utilizando frases como "reconheço que esse homem é muito mais tolo do que eu imaginava".

Cardano não respondeu. No entanto Ludovico Ferrari, que foi assistido por Cardano desde 15 anos de idade, resolveu atacar Tartaglia escrevendo um folheto de desafio matemático em 10 de fevereiro de 1547. Esse folheto foi endereçado a Tartaglia e a mais 50 figuras ilustres da matemática italiana. Ele continha a defesa da honra de Cardano e um desafio para um embate público na cidade de Milão.

Tartaglia apenas aceitou em carta escrita no dia 24 de julho de 1548, após muitas outras cartas e trocas de acusações entre eles. Assim, no dia 10 de agosto de 1548, na igreja de Santa Maria do Jardim, em Milão, começou o embate que arruinaria a carreira de Tartaglia.

Enquanto Tartaglia estava acompanhado apenas de seu irmão Zuampierro, Ferrari tinha todo público de admiradores que manifestavam abertamente uma aversão a Tartaglia. Isso, além da ótima capacidade argumentativa de Ferrari, foi suficiente para fazer com que Tartaglia abandonasse o embate público e fosse considerado derrotado.

Tartaglia foi então destituído de seu emprego de docente em Brescia, voltando a ser professor de cálculo em Veneza, onde morreu pobre e solitário em 1557, aos 57 anos de idade. Já Ferrari recebeu muitas ofertas atraentes de emprego e aproveitou a fama, porém morreu em 1564, aos 40 anos de idade, possivelmente envenenado pela irmã que ficou com seus bens.

Dentro de toda essa história de desafios e intrigas, para estudo da história dos números complexos, existiu uma carta de Cardano para Tartaglia em 1539 na qual perguntava sobre a resolução da seguinte equação:

$$x^3 = 9x + 10$$

que, através da expressão para uma cúbica incompleta, nos leva a

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{3}\right)^3} + \frac{10}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{3}\right)^3} - \frac{10}{2}}.$$

que, após simplificada, fornece

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{25 - 27} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{25 - 27} - 5}.$$

Entretanto Tartaglia nada respondeu a Cardano. Em seu livro *Ars Magna*, Cardano resolve (utilizando nossa linguagem atual, não a linguagem matemática da época) da seguinte forma o problema de dividir 10 em dois número cujo produto é 40, isto é, a partir da equação

$$x(10 - x) = 40$$

ou ainda na forma

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

cujas raízes são

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 + \sqrt{-15}$$

e

$$x_2 = \frac{10 - \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 - \sqrt{-15}.$$

Cardano apenas chamou essas soluções de sofistas[1], uma vez que não conseguia ver nelas nenhum significado físico. No entanto escreveu que "deixando de lado a tortura mental envolvida" iria operar com esses números. Passou assim para a história como o primeiro matemático a operar com números complexos [3].

Precisou se passar mais 25 anos para que o matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) fosse explorar novamente esse ainda inédito conjunto numérico. Bombelli trabalha com uma equação do terceiro grau que possuía três raízes reais, porém a fórmula de resolução chegava em raízes quadradas de números negativos. A equação considerada por Bombelli

$$x^3 = 15x + 4$$

fornece, a partir da expressão para raízes, uma raiz dada por

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3} + \frac{4}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3} - \frac{4}{2}}.$$

que, simplificada, fornece

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{4 - 125} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{4 - 125} - 2}.$$

Se a equação do terceiro grau já possuía três raízes reais, a solução acima poderia apenas ser uma delas: 4 (obtido por inspeção). Bombelli trabalhou com o valor de x encontrado acima e descobriu que seu valor era exatamente 4. Abaixo temos o raciocínio semelhante ao de Bombelli que leva a essa igualdade. Admitamos que

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} = 2 + \sqrt{-v}.$$

Elevando ambos os membros ao cubo, fornece

[1]A designação de sofista tem um sentido pejorativo, caracterizado por Platão como: "um impostor, ... malabarista de argumentos, mais verossímeis do que verdadeiros, mais sedutores do que plausíveis" [5].

$$\sqrt{-121} + 2 = 8 + 12\sqrt{-v} - 6v - v\sqrt{-v}.$$

Separando em dois sistemas distintos, isto é, um com raízes quadradas de números negativos e outro sem raízes quadradas de números negativos, Bombelli pode chegar a um valor para v e depois verificar a validade.

Primeiramente analisando a parte sem raízes quadradas de números negativos, temos:

$$8 - 6v = 2$$

portanto

$$-6v = -6$$

logo

$$v = 1.$$

Agora, analisando a parte com raízes quadradas de números negativos

$$12\sqrt{-v} - v\sqrt{-v} = \sqrt{-121}$$

e substituindo $v = 1$, temos

$$12\sqrt{-1} - 1\sqrt{-1} = \sqrt{-121}$$

o que aplicando o fato de $-121 = -1 \cdot 121$ podemos escrever

$$12\sqrt{-1} - 1\sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}.$$

Analogamente pode ser demonstrado que:

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Portanto, segue

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} + \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Note que Bombelli, com esse caso particular, passou assim a ser o primeiro matemático da história a manipular raízes quadradas de números negativos. Ele utilizou que o produto de duas raízes quadradas de números negativos iguais é o próprio número negativo. Também utilizou a separação entre a parte sem raízes quadradas de números negativos e a parte com raízes quadradas de números negativos, isto é, como exemplo

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$$

1.3 Avançando na interpretação

O grande matemático René Descartes (1596-1650) fez inúmeras tentativas de dar uma interpretação física para as raízes quadradas de números negativos, no entanto apenas conseguiu associá-las a figuras de construção impossível [2].

Foi John Wallis (1616-1703) o primeiro a conseguir uma interpretação geométrica, porém sua geometria que representava os números complexos é hoje lembrada apenas por historiadores da matemática. Isso porque pouco mais de um século depois apareceu uma interpretação muito mais simples e eficaz [9].

Foi o topógrafo e cartógrafo Caspar Wessel (1745-1818) quem fez a representação geométrica que utilizamos até hoje. Infelizmente os estudos de Wessel passaram despercebidos por muitos anos, já que estavam escritos em dinamarquês e foram publicados em 1799 numa revista científica lida por poucos fora da Dinamarca. Apenas em 1895 esse trabalho foi redescoberto e Wessel foi reconhecido como o pioneiro.

A interpretação de Wessel para os números complexos era tanto, um ponto no plano complexo, quanto um vetor da origem até o ponto. Assim, o número complexo poderia ser escrito tanto na forma cartesiana $x + iy$ quanto na forma polar: $x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, onde θ é o angulo formado a partir do eixo x até o vetor, no sentido anti-horário, conforme a Figura 1.2.

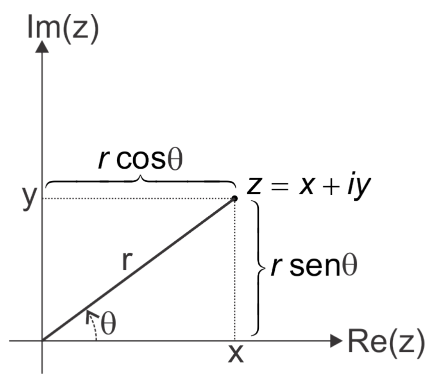

Figura 1.2: Geometria de Wessel para números complexos.

De forma independente, isto é, sem nenhum contato com o trabalho de Wessel, o livreiro parisiense e matemático amador de origem suíça Jean-Robert Argand (1768-1822) publicou em 1806 um livro com um ensaio sobre a interpretação geométrica dos números complexos. Dez anos depois, publicou novamente, porém desta vez em uma revista matemática que tornou seu trabalho realmente reconhecido. Até hoje, no mundo, a geometria dos complexos apresentada na Figura 1.2 é mais conhecida como diagrama de Argand. No Brasil, em particular, conhecemos como plano de Argand-Gauss, em consideração à contribuição do matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Gauss, considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, havia feito um estudo geométrico dos números complexos muito parecido com o que Wessel e Argand fizeram. Pelo que

[2] Da mesma forma que aconteceu com Herão, a tentativa de cálculo de arestas de sólidos de construção impossível, usualmente chegava em raízes quadradas de números negativos.

Gauss deixou escrito, seu feito aconteceu em 1796, três anos antes de Wessel e dez anos antes de Argand.

Em uma carta datada de 1812 para o matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) Gauss escreveu: “Eu tenho em meus papéis muitas coisas das quais eu talvez perca a chance de ser o primeiro a publicar, você sabe, eu prefiro deixar que as coisas amadureçam" [2].

Gauss, além de responsável pelo nome números complexos, utilizou-os para publicar em 1816 duas demonstrações do teorema fundamental da álgebra. Números complexos da forma $a+bi$ com a e b inteiros são chamados inteiros gaussianos. Depois dos trabalhos de Gauss, com sua enorme reputação, a $\sqrt{-1}$ foi aceita como um símbolo legítimo. Em 1849, na comemoração de 50 anos de seu doutorado, foi dito a ele em um discurso de agradecimento “Você tornou possível o impossível".

No entanto, ainda existiu muita resistência ao longo da história. O matemático inglês George Airy (1801-1892), que ocupou o cargo de astrônomo real de 1835 até 1881, declarou: “Eu não tenho a menor confiança em nenhum resultado que seja obtido utilizando números imaginários". O lógico inglês George Boole (1815-1864), em sua obra prima publicada em 1854, chamou $\sqrt{-1}$ de "símbolo sem possível interpretação".

Até o matemático suiço Leonhard Euler (1707-1783), considerado por muitos um dos maiores gênios da matemática, declarou o seguinte: “Todas as expressões como $\sqrt{-1}$ e $\sqrt{-2}$, etc., são consequentemente impossíveis, ou números imaginários, já que representam raízes de quantidades negativas; e sobre tais números podemos afirmar com certeza que não são zero, nem maiores que zero, nem menores que zero, o que necessariamente os torna imaginários ou impossíveis” [9].

Posteriormente, Euler foi responsável por um enorme desenvolvimento dos números complexos. Sua contribuição mais importante foi a definição da função exponencial para os números complexos, descobrindo sua relação com as funções trigonométricas. A fórmula que ficou mundialmente conhecida como fórmula de Euler é: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ para qualquer valor de x. No caso específico de $x = \pi$ temos a identidade de Euler, considerada por muitos a expressão numérica mais bonita da matemática, que é: $e^{i\pi} + 1 = 0$ [7].

O matemático e físico irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) leu em 1829, um ano após ser publicado, o livro do professor de Cambrigde Reverendo John Warren (1796-1852) chamado *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of the Negative Quantities*, no qual eram apresentados os trabalhos de Wessel e de Argand.

Hamilton rejeitou a idéia de interpretação geométrica e defendeu que apenas a interpretação algébrica fazia sentido. Ele escreveu: “Eu acredito ser insatisfatória qualquer visão que não seja dada aos imaginários através de uma clara interpretação e sentido; e eu desejo que isso seja feito sem a introdução de considerações geométricas que envolvem o conceito de ângulo". [13]

Hamilton apresentou em junho de 1835 para a Real Academia Irlandesa um trabalho com o título *Theory of Conjugate Functions or Algebric Couples: with a Preliminary Essay on Algebra as a Science of Pure Time*, no qual ele apresentava pares ordenados de números reais para os quais ele definiu a adição e a multiplicação da seguinte forma:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Perceba que trata-se do mesmo resultado que obteríamos se no lugar de pares ordenados considerássemos a e c como as partes reais de números complexos e b e d como as respectivas partes imaginárias. O que não teria grande importância se não fosse a origem do seu próximo trabalho: os quatérnions.

Era outubro de 1843 quando Hamilton caminhava em direção à Real Academia Irlandesa e passando pela ponte de Brougham a resposta que ele há algum tempo procurava, apareceu em sua mente. Assim, ele parou e esculpiu na pedra da própria ponte, algo que foi mantido até hoje em Dublin, conforme a Figura 1.3.

Figura 1.3: Placa em Dublin que diz: Aqui andou em 16 de outubro de 1843 Sir William Rowan Hamilton e em um lampejo de gênio descobriu a fórmula fundamental para a multiplicação dos quatérnions $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ e esculpiu em uma pedra da ponte.

Os quatérnions podem ser vistos como uma aplicação da construção de Cayley-Dikson para os números complexos. Essa construção leva o nome do matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895) e do matemático americano Leonard Eugene Dikson (1874-1954).

A construção de Cayley-Dikson define uma nova álgebra gerada pela soma direta de uma álgebra com ela mesma. No caso dos quatérnions existe uma correspondência entre $(a + bi, c + di)$ e (a, b, c, d).

Hamilton passaria os vinte e dois anos restantes da sua vida gastando a maior parte do seu tempo de pesquisa com o desenvolvimento dos quatérnions, uma vez que ele acreditava com isso revolucionar a física e a matemática. Após algumas décadas, o físico e matemático americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903) conseguiu um tratamento mais geral que fez com que os quatérnions passassem a ser “uma interessante peça de museu" [3].

No entanto, a grande importância de Hamilton e dos quatérnions está no fato que sua criação “libertou a álgebra de suas amarras com a aritmética dos números reais, abrindo as comportas da álgebra abstrata" [3].

1.4 Definições e propriedades

Nesta seção vamos escrever as definições e propriedades dos números complexos que serão importantes para resolvermos as questões dos capítulos seguintes. Em geral, estas definições e propriedades se constituem no fundamental sobre números complexos, e que são apresentadas na terceira série do ensino médio.

Ressalte-se que as fórmulas de de Moivre desempenham um papel fundamental, uma continuação natural do tópico envolvendo os números complexos, em particular, se constituem em ferramentas úteis em disciplinas, por exemplo, que dependem das funções analíticas [11].

Os números complexos formam o conjunto $\mathbb{C}$, no qual:

- a adição e a multiplicação são comutativas;

- a adição e a multiplicação são associativas;

- a multiplicação é distributiva em relação à adição;

- existem e são únicos os elementos neutros da adição e da multiplicação;

- existem e são únicos os elementos inversos da adição e da multiplicação;

- existe um número complexo i com $i^2 = -1$;

- todo número complexo pode ser escrito na forma algébrica de maneira única por $z = a + bi$, onde a e b são números reais;

- todo número complexo escrito na forma algébrica $z = a + bi$, possui um número complexo conjugado escrito na forma $\bar{z} = a - bi$;

- o módulo do número complexo $z = a + bi$ é dado por $|z|= \sqrt{a^2 + b^2}$;

- todo número complexo pode ser escrito na forma trigonométrica de maneira única por $z = |z|(\operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha)$, onde o argumento α é $\operatorname{arctg}(b/a)$ quando a é diferente de zero.

Para a multiplicação de dois números complexos z_1 e z_2 que escritos na forma trigonométrica são $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|[\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$

Para a divisão de dois números complexos z_1 e z_2 que escritos na forma trigonométrica são $z_1 = |z_1|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ e $z_2 = |z_2|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

Para a potenciação, em homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754), temos a fórmula que é conhecida como fórmula de de Moivre (primeira fórmula de de Moivre):

$$z^n = |z|^n[\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)].$$

Esta fórmula possui uma variante análoga para a radiciação:

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}[(\cos(\alpha + 2k\pi/n) + i\,\mathrm{sen}(\alpha + 2k\pi/n)],$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (segunda fórmula de de Moivre)

Todo número complexo, escrito na forma trigonométrica como $z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha)$, pode ser escrito segundo a fórmula de Euler como $z = |z|e^{i\alpha}$; cuja demonstração utilizada na época por Euler encontra-se no Capítulo 5.

Capítulo 2

Números complexos e áreas

Dentre várias outras aplicações dos números complexos por exemplo, associados à matriz de rotação, merece destaque a sua utilização no cálculo de áreas de figuras planas, visto que estamos preocupados com o ensino médio. Como uma aplicação, neste capítulo, discutimos o cálculo da área de um triângulo e sua generalização para o cálculo da área de um polígono convexo.

Sem dúvida nenhuma a utilização dos números complexos no dia-a-dia de um físico é fundamental. Vejamos, a procura de solução de uma equação diferencial [3] com coeficientes constantes [10] recai numa equação algébrica onde o discriminante, no caso de uma equação do segundo grau, pode ser negativo. O caso mais comum é o oscilador harmônico simples, também conhecido como sistema massa-mola.

[3]Este tema foge do escopo desta dissertação, mas pode ser mencionado em sala de aula como uma aplicação a fim de responder a pergunta recorrente, a saber: Professor, onde eu vou usar isto?

2.1 Área de polígonos regulares

Nesta seção apresentamos o caso em que o cálculo da área de um polígono regular é mais simples, fazendo sua relação com números complexos representados no plano de Argand-Gauss.

Sabemos que todo polígono regular é circunscritível. Se o raio da circunferência circunscrita for r, podemos inscrever qualquer polígono de n lados unindo, no plano de Argand-Gauss, as n raízes da equação $z^n = r$.

A Figura 2.1 representa um polígono regular de lados a, inscrito numa circunferência de raio r.

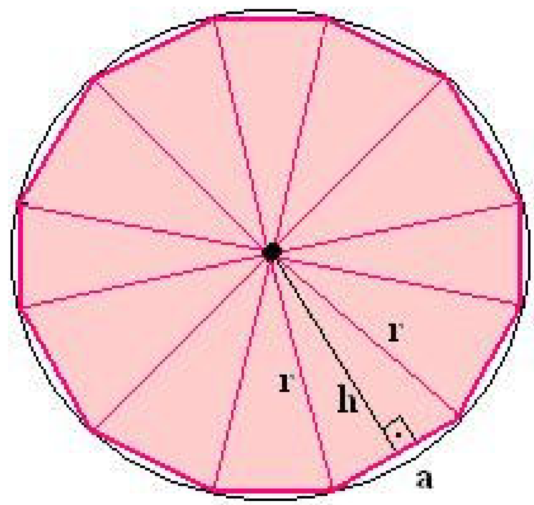

Figura 2.1: Polígono regular inscrito.

Para calcularmos a área, basta multiplicar por n a área de um triângulo formado pelo centro da circunferência e por raízes adjacentes da equação.

Esta área pode ser calculada por

$$A = \frac{r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$$

uma vez que na fórmula $A = (h \cdot a)/2$ verificamos que h é bissetriz do ângulo $\frac{2\pi}{n}$ e, portanto,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{a/2}{r}$$

de onde segue

$$a = r \cdot 2 \operatorname{sen}(\pi/n).$$

Da Figura 2.1 temos

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{r}$$

e, assim, obtemos para altura

$$h = r \cdot \cos(\pi/n).$$

Substituindo na fórmula da área temos:

$$A = \frac{r^2 \cdot 2\,\mathrm{sen}(\pi/n) \cdot \cos(\pi/n)}{2}.$$

Sabendo que $2\,\mathrm{sen}\alpha \cos\alpha = \mathrm{sen}2\alpha$, obtemos:

$$A = \frac{r^2\,\mathrm{sen}(2\pi/n)}{2}$$

e, portanto, a área total do polígono será:

$$A_n = n \cdot \frac{r^2\,\mathrm{sen}(2\pi/n)}{2}.$$

2.2 Área de triângulos

Nesta seção chegaremos a uma fórmula para calcular a área de um triângulo qualquer utilizando a representação geométrica de números complexos.

Na geometria analítica é bastante conhecida a fórmula para o cálculo da área de um triângulo com base nas abscissas e ordenadas dos seus vértices. Lembrando que o resultado do determinante da matriz deve ser colocado em valor absoluto, temos

$$S = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Essa fórmula pode ser facilmente demonstrada somando a área do trapézio ABx_2x_1 com a área do trapézio BCx_3x_2 e subtraindo a área do trapézio ACx_3x_1, conforme a Figura 2.2.

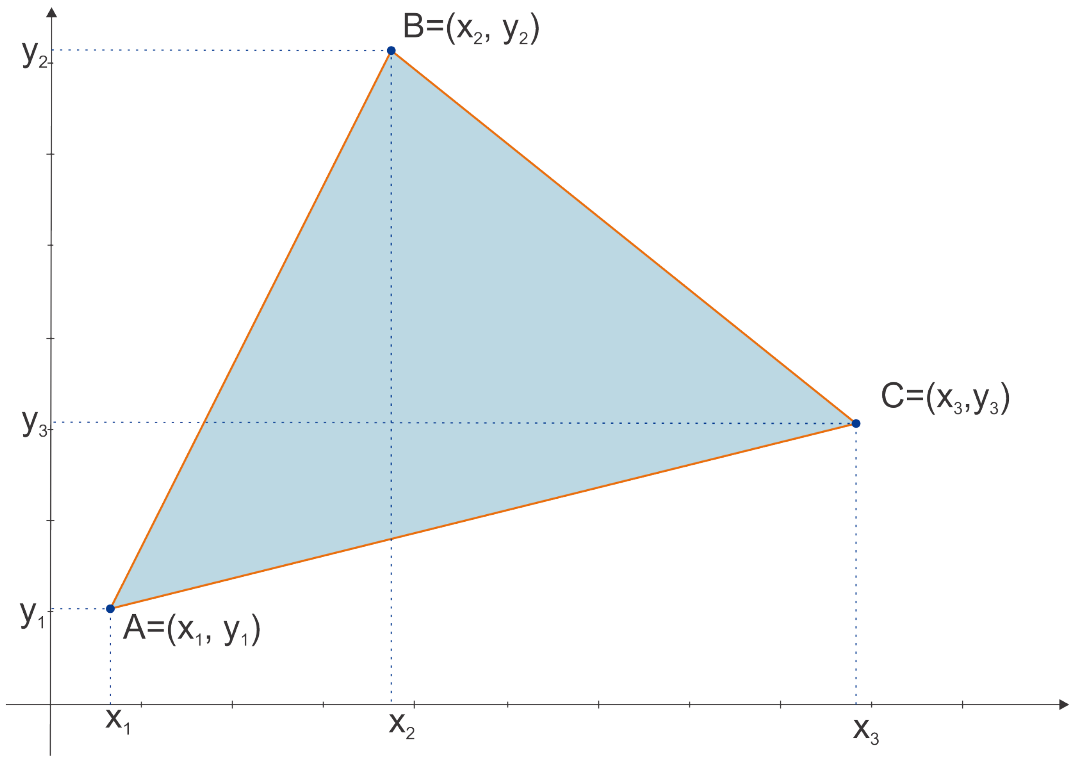

Figura 2.2: Triângulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$.

Podemos fazer algumas operações com o determinante presente na fórmula de S, de forma que obteremos a área apenas em função dos complexos z_1, z_2 e z_3 explicitados a seguir,

$$z_1 = x_1 + iy_1,$$
$$z_2 = x_2 + iy_2,$$
$$z_3 = x_3 + iy_3.$$

Assim, consideremos S

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando uma coluna por i e deixando outro i multiplicando o resultado do determinante, de modo que o valor fica multiplicado por -1, o que não faz diferença já que tomaremos apenas o valor absoluto para quantificar a área, logo

$$S = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} x_1 & iy_1 & 1 \\ x_2 & iy_2 & 1 \\ x_3 & iy_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Somando a primeira e a segunda colunas, sem alterar o valor do determinante, temos

$$S = \frac{i}{2} \begin{vmatrix} x_1 + iy_1 & iy_1 & 1 \\ x_2 + iy_2 & iy_2 & 1 \\ x_3 + iy_3 & iy_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a segunda coluna por dois e substituindo o fator $\frac{i}{2}$ por $\frac{i}{4}$ sem que altere o resultado da área, temos

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} x_1 + iy_1 & 2iy_1 & 1 \\ x_2 + iy_2 & 2iy_2 & 1 \\ x_3 + iy_3 & 2iy_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Somando a primeira coluna com os valores da segunda coluna multiplicados por -1, o que não altera o resultado já que tomaremos apenas o valor absoluto para quantificar a área, logo

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} x_1 + iy_1 & x_1 - iy_1 & 1 \\ x_2 + iy_2 & x_2 - iy_2 & 1 \\ x_3 + iy_3 & x_3 - iy_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Introduzindo os complexos e os respectivos complexos conjugados, temos

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z_1} & 1 \\ z_2 & \bar{z_2} & 1 \\ z_3 & \bar{z_3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfim, considerando o determinante da matriz transposta sem que altere o resultado, temos

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z_1} & \bar{z_2} & \bar{z_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

e ainda podemos reescrever a área aplicando o teorema de Laplace na terceira linha, portanto:

$$S = \frac{i}{4} \left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z_1} & \bar{z_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z_2} & \bar{z_3} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z_1} & \bar{z_3} \end{vmatrix} \right)$$

2.3 Área de polígonos convexos

Nesta seção mostraremos o procedimento pelo qual é possível calcular a área de qualquer polígono convexo utilizando a representação geométrica dos números complexos.

Inicialmente vamos considerar o pentágono, sabendo que o procedimento para qualquer outro polígono convexo é análogo, com vértices em números complexos conforme a Figura 2.3.

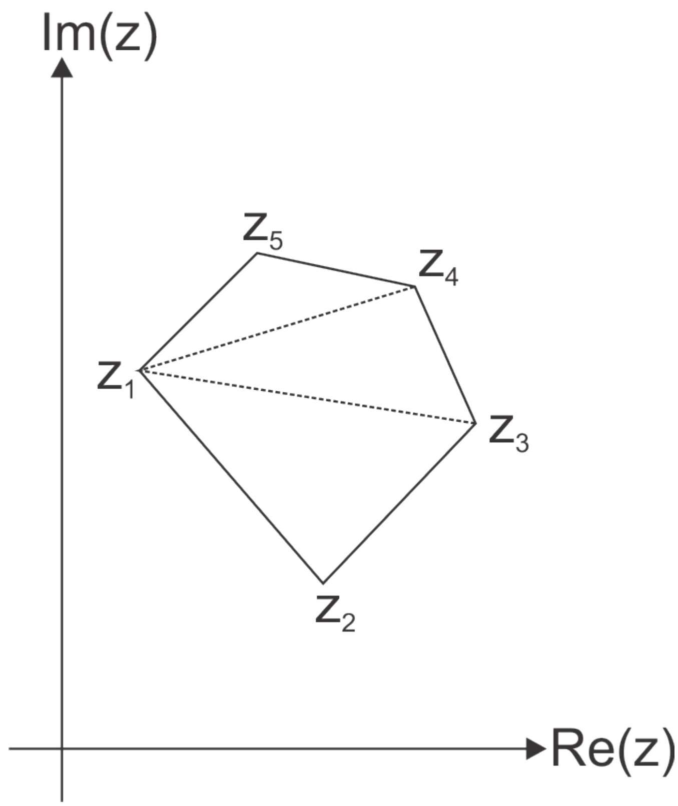

Figura 2.3: Pentágono com vértices z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5.

Podemos, por exemplo, dividí-lo em três triângulos traçando as duas diagonais que partem de z_1. Então podemos efetuar o cálculo da área de cada triângulo, conforme o resultado que obtivemos na seção anterior.

Assim, podemos escrever para a área

$$S = \frac{i}{4}(\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \right) + \frac{i}{4}\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_4 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} \right) +$$
$$\frac{i}{4}\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_4 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_5 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_4 & z_5 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_5 \end{vmatrix} \right)$$

o que pode ser simplificado e escrito na forma

$$S = \frac{i}{4}\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_4 & z_5 \\ \bar{z}_4 & \bar{z}_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_5 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_5 \end{vmatrix} \right).$$

Portanto, generalizamos para um polígono de n lados, a fórmula que expressa a área do polígono em função dos números complexos associados aos vértices será dada por:

$$S = \frac{i}{4}\left(\begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_2 & z_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_3 & z_4 \\ \bar{z}_3 & \bar{z}_4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} z_{n-1} & z_n \\ \bar{z}_{n-1} & \bar{z}_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z_1 & z_n \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_n \end{vmatrix} \right).$$

Capítulo 3

Identidades trigonométricas

Já vimos no Capítulo 2, uma aplicação dos números complexos no cálculo da área de um polígono. Aqui, como mais uma aplicação, agora utilizando um resultado onde escrevemos um número complexo em termos de sua exponencial e sua relação com as funções seno e cosseno trigonométricos de modo a mostrar as chamadas identidades de Lagrange. Estas identidades desempenham um importante papel na soma de séries envolvendo as funções trigonométricas.

Então, neste capítulo, vamos utilizar os números complexos a fim de efetuar a demonstração de duas identidades trigonométricas, conhecidas pelo nome de identidades de Lagrange.

3.1 Soma finita de progressões geométricas

Tomemos a progressão geométrica de $n+1$ termos, cujo primeiro termo é 1 e cuja razão vale z, onde $z \in \Re$. Sua soma será

$$S_{n+1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n.$$

Multiplicando todos os termos por z teremos:

$$zS_{n+1} = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1}.$$

Efetuando a diferença $zS_{n+1} - S_{n+1}$ temos:

$$zS_{n+1} - S_{n+1} = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n+1} - (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n)$$

que resulta em

$$zS_{n+1} - S_{n+1} = z^{n+1} - 1,$$

e, fatorando o primeiro membro da equação, podemos escrever

$$S_{n+1}(z-1) = z^{n+1} - 1,$$

e, supondo $z \neq 1$, podemos dividir ambos os membro por $z-1$, de onde segue

$$S_{n+1} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

3.2 Identidades de Lagrange

Vamos admitir a igualdade (a primeira delas, de Moivre com $n=1$) $z = \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha = e^{i\alpha}$, sendo $z \neq 1$. Assim aplicaremos na fórmula, demonstrada na seção anterior, da soma finita de progressões geométricas e utilizamos a fórmula de de Moivre: $z^n = \text{sen}(n\alpha) + i\cos(n\alpha) = e^{in\alpha}$. Assim, consideremos o resultado

$$1 + \cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha + \cos 2\alpha + i\,\text{sen}2\alpha + \cdots + \cos n\alpha + i\,\text{sen}n\alpha = \frac{\cos[(n+1)\alpha] + i\,\text{sen}[(n+1)\alpha] - 1}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha - 1},$$

ou, escrito de outra forma, temos

$$1 + e^{i\alpha} + e^{i2\alpha} + e^{i3\alpha} + \cdots + e^{in\alpha} = \frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1}.$$

Fatorando o lado direto da equação acima, obtemos

$$\frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = \frac{e^{i(n+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha/2}(e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2})},$$

onde aplicamos a propriedade da divisão de potências de mesma base e temos

$$\frac{e^{i(n+1)\alpha}-1}{e^{i\alpha/2}(e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2})}=\frac{e^{i(n+1/2)\alpha}-e^{-i\alpha/2}}{e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2}},$$

e escrito na forma trigonométrica fornece

$$\frac{e^{i(n+1/2)\alpha}-e^{-i\alpha/2}}{e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2}}=\frac{\cos[(n+1/2)\alpha]+i\,\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]-\cos(-\alpha/2)-i\,\mathrm{sen}(-\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)+i\,\mathrm{sen}\alpha/2-\cos(-\alpha/2)-i\,\mathrm{sen}(-\alpha/2)}.$$

Sendo $\cos x$ uma função par, isto é, $\cos x=\cos(-x)$; e sendo $\mathrm{sen}x$ uma função ímpar, isto é, $\mathrm{sen}x=-\,\mathrm{sen}(-x)$, podemos então escrever

$$\frac{\cos[(n+1/2)\alpha]+i\,\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]-\cos(-\alpha/2)-i\,\mathrm{sen}(-\alpha/2)}{2i\,\mathrm{sen}(\alpha/2)},$$

o que, multiplicado por $-i$ no numerador e no denominador, nos leva a

$$\frac{-i\{\cos[(n+1/2)\alpha]+i\,\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]-\cos(-\alpha/2)-i\,\mathrm{sen}(-\alpha/2)\}}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}.$$

Assim, podemos facilmente separar a parte real da parte imaginária, obtendo as duas identidades trigonométricas conhecidas como identidades de Lagrange.

A parte real é

$$\frac{-i(i\,\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]-i\,\mathrm{sen}(-\alpha/2))}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)},$$

que aplicando a propriedade distributiva, fornece

$$\frac{\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]-\,\mathrm{sen}(-\alpha/2)}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)},$$

e lembrando que $\mathrm{sen}x$ é uma função ímpar, obtemos

$$\frac{\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}+\frac{1}{2}.$$

Portanto, a primeira identidade trigonométrica de Lagrange é

$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}+\frac{1}{2},$$

que escrita na forma de somatório fornece

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos k\alpha=\frac{\mathrm{sen}[(n+1/2)\alpha]}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}+\frac{1}{2}}$$

Por outro lado, ao analisarmos a parte imaginária da mesma expressão, temos

$$\frac{-\cos[(n+1/2)\alpha]+\cos(-\alpha/2)}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)},$$

que ainda pode ser escrita da forma

$$-\frac{\cos[(n+1/2)\alpha]}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}+\frac{\mathrm{cotg}(\alpha/2)}{2}.$$

Assim, chegamos à segunda identidade trigonométrica de Lagrange

$$\mathrm{sen}\alpha+\ \mathrm{sen}2\alpha+\cdots+\ \mathrm{sen}n\alpha=\frac{-\cos[(n+1/2)\alpha]}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}+\frac{\mathrm{cotg}(\alpha/2)}{2},$$

que escrita na forma de somatório fornece

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{sen}k\alpha=\frac{-\cos[(n+1/2)\alpha]}{2\,\mathrm{sen}(\alpha/2)}+\frac{\mathrm{cotg}(\alpha/2)}{2}}$$

Capítulo 4

Teorema de Herão

Enfim, como mais uma aplicação dos números complexos, discutimos o teorema de Herão, que expressa a área de um triângulo em função das medidas dos lados; utilizando na fórmula a medida de cada um dos lados e a medida do semiperímetro.

Herão de Alexandria viveu provavelmente na segunda metade do século I [3] e produziu trabalhos tão variados em matemática e física que, por muitas vez, Herão é apresentado como um enciclopedista destas áreas.

A demonstração do teorema de Herão foi feita por ele de forma brilhante na sua obra de geometria mais importante: *A Métrica*. Esta obra possui três volumes e só foi descoberta em 1896, em Constantinopla, por R. Schöne.

A demonstração que apresentaremos, bastante distinta da demonstração original de Herão, tem a intenção de mostrar mais uma utilidade dos números complexos em um diferente campo da matemática: a geometria.

Na demonstração utilizaremos a fórmula de Euler para um valor específico de α, conforme faremos na primeira seção deste capítulo, de maneira a possuirmos um resultado que será utilizado na demonstração do teorema de Herão.

4.1 Fórmula de Euler

Considerando na fórmula de Euler o módulo do número complexo z igual à unidade. Segue

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha.$$

Portanto, para $\alpha = \pi$, temos a expressão numérica de Euler:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi.$$

Substituindo os valores $\cos\pi = -1$ e $\mathrm{sen}\pi = 0$ teremos

$$e^{i\pi} = -1,$$

uma das mais elegantes expressões numéricas da matemática [7].

4.2 Demonstrando o teorema de Herão

Na Figura 4.1, a seguir, temos um triângulo e seu incentro. Consideremos seus três lados tais que: $a = y+z$, $b = x+z$ e $c = x+y$. Sendo assim seu perímetro, denotado por $2p$, é $2p = a+b+c$. Seu semiperímetro, denotado por p, é $p = x+y+z$.

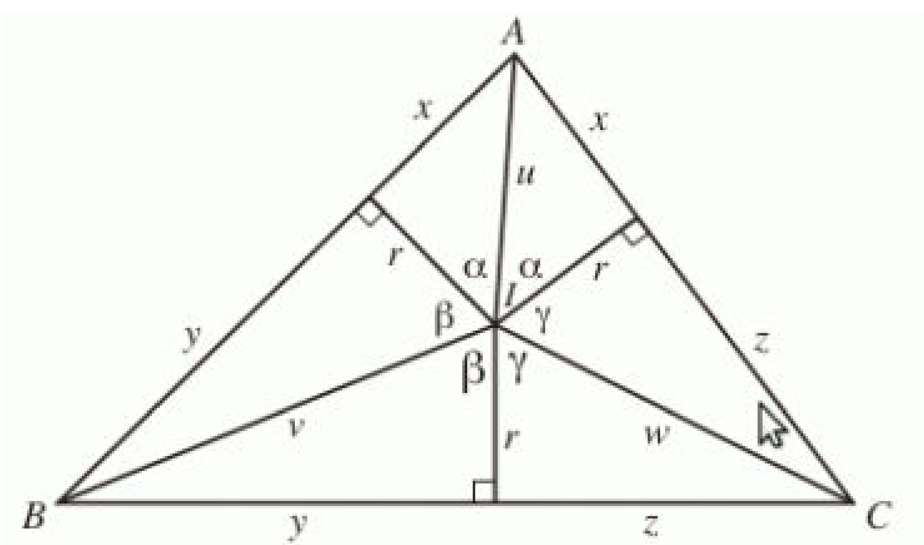

Figura 4.1: Triângulo ABC e seu incentro.

Note na Figura 4.1 que ela está dividida em três pares de triângulos congruentes. As áreas destes triângulos valem: $\frac{rx}{2}$, $\frac{ry}{2}$, $\frac{rz}{2}$. Assim, a área do triângulo ABC vale rp.

Aplicando o teorema de Pitágoras aos três triângulos da Figura 4.1 obtemos:

$$x^2 + r^2 = u^2,$$

$$y^2 + r^2 = v^2,$$

$$z^2 + r^2 = w^2.$$

Vamos calcular o produto de três números complexos cujos módulos valem, respectivamente, u, v e w:

$$(r + ix)(r + iy)(r + iz),$$

que, escritos na forma trigonométrica, fornecem

$$u(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)v(\cos\beta + i\ sin\beta)w(\cos\gamma + i\,\text{sen}\gamma).$$

Escrevendo segundo a fórmula de Euler temos

$$ue^{i\alpha}ve^{i\beta}we^{i\gamma},$$

ou ainda na forma

$$uvwe^{i(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Visto que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, obtemos o número real:

$$-uvw.$$

Assim, o produto $(r + ix)(r + iy)(r + iz)$ deve ter a parte imaginária igual a zero.

Efetuando a multiplicação dos três fatores e notando que a parte imaginária é dada por $r^2(x + y + z) - xyz$, podemos escrever

$$r^2(x + y + z) - xyz = 0.$$

Isolando o raio da circunferência inscrita, denotado por r, temos:

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}.$$

Substituindo $p = x + y + z$, $x = p - a$, $y = p - b$ e $z = p - c$, obtemos:

$$r = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)(p - c)}{p}}.$$

Como a área S do triângulo ABC vale rp, podemos escrever:

$$S = rp = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

chegando assim ao teorema de Herão.

Este raciocínio pode ser estendido para polígonos convexos de n lados dividindo-os em n pares de triângulos congruentes. Logo a área do polígono é a soma das áreas de todos os triângulos, a partir de um vértice qualquer.

No caso em que o polígono circunscritível é um quadrilátero, temos a chamada fórmula de Brahmagupta [12].

Apenas para completeza, sendo a, b, c e d os lados do quadrilátero circunscritível e p o semi-perímetro, a fórmula de Brahmagupta, que fornece a área S do quadrilátero, é

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Capítulo 5

Plano de aula

Neste Capítulo apresentamos um plano de aula no sentido de poder introduzir, mesmo que ingenuamente, o conceito de limite. Começamos o capítulo mostrando a expressão que fornece a soma dos n termos de uma progressão geométrica para, depois, considerar esta soma no caso em que o número de termos vai para o infinito, isto é, tão grande quanto se queira; ou seja, a noção de limite da soma.

Utilizando o teorema do confronto [4] prova-se o limite fundamental trigonométrico. Enfim, com este resultado associado à área de um polígono regular de n lados, discutido no Capítulo 2, vamos recuperar a fórmula da área do círculo.

Por fim, são apresentados alguns exercícios com a finalidade de solidificar o conteúdo debatido em sala de aula. Isto é, trata-se de uma tarefa para casa.

5.1 Limite da soma

Como foi apresentado no Capítulo 3, faremos novamente a demonstração da fórmula que fornece a soma de uma progressão geométrica de n termos, porém agora o primeiro termo não fica definido como 1, isto é, ele pode ter qualquer valor e é denotado por a_1.

Considere a progressão geométrica de n termos, cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão vale q, onde $q \neq 1$. Seu enésimo termo é dado por

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$

A fim de calcular a soma dos n primeiros termos desta progressão, isto é,

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Multiplicando todos os termos por q e obtemos

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + \cdots + a_1 \cdot q^n.$$

Efetuando a diferença $qS_n - S_n$ temos:

$$qS_n - S_n = a_1 q^n - a_1,$$

e, utilizando a fatoração para colocar como fator comum S_n e a_1, podemos escrever

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1),$$

e, supondo $q \neq 1$, podemos dividir ambos os membro por $q - 1$ e obtemos

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

que é a expressão para soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Seja agora a razão da progressão geométrica tal que $|q| < 1$, isto é, $-1 < q < 1$ e consideramos n tendendo ao infinito. Logo, utilizando a notação de limite, temos

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{-1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

que é a expressão que fornece o limite da soma de uma progressão geométrica com primeiro termo a_1 e razão q tal que $-1 < q < 1$.

5.2 Demonstrando o limite fundamental da trigonometria

Vamos considerar dois triângulos e um setor circular que claramente possuem áreas distintas. Para isso considere o círculo trigonométrico e considere o ângulo θ, conforme a Figura 5.1.

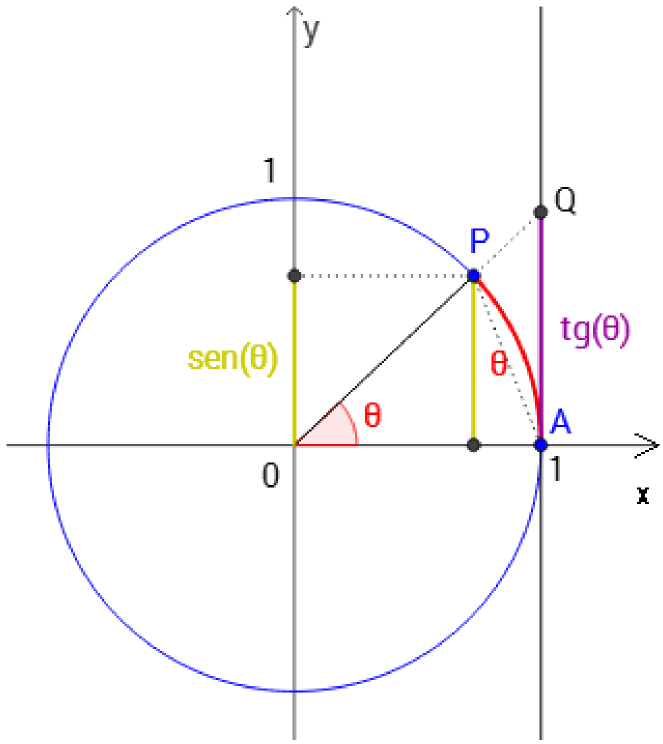

Figura 5.1: Círculo trigonométrico.

Perceba que a área do triângulo OAP é inferior à área do setor circular de ângulo θ que, por sua vez, é inferior à área do triângulo OAQ.

Calculando a área do triângulo OAP como metade do produto de sua hipotenusa unitária pela sua altura relativa de valor $\operatorname{sen}\theta$, assim

$$A_{OPA} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}.$$

Lembrando que a área de um setor circular é uma fração da área do círculo, podendo ser calculada diretamente pela razão entre o ângulo central θ e uma volta completa 2π, logo

$$A_{setor\theta} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\theta}{2}.$$

Calculando a área do triângulo OAQ como metade do produto de seus catetos, temos

$$A_{OAQ} = \frac{\operatorname{tg}\theta}{2}.$$

Portanto podemos escrever a dupla desigualdade

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\operatorname{tg}\theta}{2}.$$

Sabendo que $\text{tg}\theta = (\text{sen}\theta/\cos\theta)$ e dividindo todos os membros por $\frac{\text{sen}\theta}{2}$, que tem valor positivo no primeiro quadrante, obtemos

$$1 < \frac{\theta}{\text{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Lembrando que uma desigualdade de frações pode ter cada numerador invertido com seu denominador, contanto que os sinais da desigualdade também sejam invertidos. Dessa forma obtemos

$$1 > \frac{\text{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta.$$

Pode-se mostrar que este raciocínio é válido para o ângulo θ em qualquer outro quadrante. Note que temos sempre uma função par, isto é, $\cos\theta$ é par e $\dfrac{\text{sen}\theta}{\theta}$ é outra função par.

Tomando o limite para θ indo a zero e denotando conforme a seção anterior, podemos escrever

$$\lim_{\theta\to 0} 1 > \lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} > \lim_{\theta\to 0} \cos\theta.$$

Visto que $\cos 0 = 1$ e pelo teorema do confronto [4] podemos escrever

$$1 > \lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} > 1,$$

de onde segue que

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$$

que é o limite fundamental trigonométrico [15].

5.3 Considerações sobre outros limites

Um aluno de ensino médio, vendo apenas um exemplo de limite, pode ponderar que o fato de $\lim\limits_{\theta\to 0} \text{sen}\theta = 0$, $\lim\limits_{\theta\to 0} \theta = 0$ já seria suficiente para concluir de forma errada que $\frac{0}{0} = 1$, no lugar de perceber que trata-se de um quociente indeterminado. Então, acredito ser necessário o cuidado de dar outros exemplos que refutem fortemente a ponderação errônea. Sugeriria ao menos dois outros, como

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}5\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} 5 \cdot \frac{\text{sen}5\theta}{5\theta} = 5$$

ou ainda

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x + 1) = 2.$$

5.4 Limite fundamental e a área de um círculo

Agora, conforme efetuado no Capítulo 2 deve ser feita a demonstração da fórmula que calcula a área de um polígono regular de n lados

$$A_n = \frac{nr^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)}{2}.$$

Então, instigando nos alunos novamente um conceito bastante ingênuo de limite, proponho questioná-los o que deve acontecer à medida que a quantidade n de lados do polígono cresce muito. Assim, sugerindo que no limite de n tendendo ao infinito, teríamos ali um círculo, cuja área é A_n.

Multiplicando numerador e denominador por π/n temos

$$A_n = \frac{\pi r^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)}{(2\pi/n)}.$$

Assim, resta discutir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi r^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)}{(2\pi/n)} = \lim_{\frac{2\pi}{n}\to 0} \frac{\pi r^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)}{(2\pi/n)}$$

e, como

$$\lim_{\frac{2\pi}{n}\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2\pi/n)}{(2\pi/n)} = 1$$

temos para n tendendo ao infinito a fórmula da área do círculo

$$A = \pi r^2,$$

expressão esta conhecida desde o ensino fundamental II.

5.5 Limite fundamental e a fórmula de Euler

Aqui iremos apresentar aos alunos um exemplo típico de manipulação formal do século XVIII, utilizado por Euler, para chegar na fórmula de Euler para números complexos. Devemos deixar claro que não se trata exatamente de uma prova, embora hoje esse resultado já esteja provado. A prova rigorosa aconteceu apenas no século XIX, com o avanço da teoria das funções de uma variável complexa [10].

Iniciamos utilizando a fórmula de de Moivre para potenciação:

$$[\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha)]^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha),$$

onde substituindo α por $\frac{x}{n}$ temos:

$$\left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Agora, para um determinado valor de x, iremos verificar os limites para n tendendo ao infinito e, portanto, para $\frac{x}{n}$ tendendo a zero.

Assim, visto que

$$\lim_{\frac{x}{n}\to 0}[\cos(x/n)] = 1,$$

bem como o limite fundamental trigonométrico

$$\lim_{\frac{x}{n}\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x/n)}{(x/n)} = 1,$$

já que o limite da soma é a soma dos limites, podemos reescrever a igualdade da seguinte forma:

$$\lim_{\frac{x}{n}\to 0}\left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n = \cos x + i\operatorname{sen} x.$$

Para aplicar o limite fundamental trigonométrico utilizaremos a seguinte igualdade:

$$\operatorname{sen}(x/n) = (x/n)\left(\frac{\operatorname{sen}(x/n)}{(x/n)}\right).$$

Portanto, fazendo a substituição na expressão anterior, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = \cos x + i\operatorname{sen} x.$$

Como Euler sabia que o limite fundamental exponencial, demonstrado no apêndice B, era

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

bastou fazer a substituição de z por ix para chegar na fórmula que leva seu nome:

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x.$$

5.6 Exercícios propostos

1 – Prove que para dois números complexos z_1 e z_2 temos $|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2$.

2 – Utilizando o que foi demonstrado no primeiro exercício, demonstre o Teorema Algébrico de Brahmagupta [6]: se m e n são números naturais e cada um deles é a soma de dois quadrados perfeitos, então $m \cdot n$ também é a soma de dois quadrados perfeitos.

3 – Utilizando a fórmula de de Moivre para potenciação, demonstre a fórmula do arco duplo para a função seno e para a função cosseno, isto é $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$ em função de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

4 - Utilizando a fórmula de de Moivre para potenciação, demonstre a fórmula do arco triplo para a função seno e para a função cosseno, isto é $\operatorname{sen} 3\alpha$ e $\cos 3\alpha$ em função de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.

5– Sabendo a propriedade de multiplicação dos números complexos distintos na forma trigonométrica, demonstre a fórmula para seno e para cosseno da soma de dois arcos.

6 – Sabendo a propriedade de divisão de dos números complexos distintos na forma trigonométrica, demonstre a fórmula para seno e para cosseno da diferença de dois arcos.

7 – Sabendo a fórmula de Euler, calcule $e^{(\pi \cdot i/2)}$ e em seguida responda se i^i é um número real.

8 – Aplicando as fórmulas de arcos duplo e triplo dos exercícios 3 e 4 desta lista, resolva a equação: $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

5.7 Resolução dos exercícios

1 - Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos $|z_1|^2 = a^2 + b^2$ e $|z_2|^2 = c^2 + d^2$. Assim: $z_1 \cdot z_2 = ac - bd + i(ad + cb)$, que tem por módulo $|z_1 \cdot z_2|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + cb)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + c^2b^2$. Agora, fazendo o produto dos módulos, temos: $|z_1| \cdot |z_2| = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + c^2b^2$. Portanto são iguais.

2 - Podemos supor, sem prejuízo à demonstração do exercício 1, que a, b, c e d são números naturais. Agora considere $m = |z_1|^2$ e $n = |z_2|^2$. Teremos $m \cdot n = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$. Como foi demonstrado no exercício 1, podemos concluir que: $m \cdot n = |z_1 \cdot z_2|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + cb)^2$. Assim escrevemos o produto como a soma de dois quadrados perfeitos.

3 - Na primeira fórmula de de Moivre vamos considerar a segunda potência e também considerar $|z|= 1$, portanto temos: $z^2 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 = \cos(2\alpha) + i\,\text{sen}(2\alpha)$. Desenvolvendo o quadrado da soma obtemos: $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 2i\cos\alpha\cdot\text{sen}\alpha = \cos(2\alpha) + i\,\text{sen}(2\alpha)$. Igualando as partes reais temos a fórmula do arco duplo para a função cosseno: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$. Já igualando as partes imaginárias obtemos a fórmula do arco duplo para a função seno: $\text{sen}(2\alpha) = 2\cos\alpha\cdot\text{sen}\alpha$.

4 - Na primeira fórmula de de Moivre vamos considerar a potência 3 e também considerar $|z|= 1$, portanto temos: $z^3 = (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^3 = \cos(3\alpha) + i\,\text{sen}(3\alpha)$. Desenvolvendo o cubo da soma obtemos: $\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\cdot\text{sen}\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha - i\,\text{sen}^3\alpha = \cos(3\alpha) + i\,\text{sen}(3\alpha)$. Igualando as partes reais temos a fórmula do arco triplo para a função cosseno: $\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$. Ainda podemos aplicar a relação fundamental e reescrever da forma $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Já igualando as partes imaginárias obtemos a fórmula do arco triplo para a função seno: $\text{sen}(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\cdot\text{sen}\alpha - \text{sen}^3\alpha$. Ainda podemos aplicar a relação fundamental e reescrever da forma $\text{sen}(3\alpha) = 3\,\text{sen}\alpha - 4\,\text{sen}^3\alpha$.

5 - Considerando a fórmula para multiplicação de números complexos e tomando z_1 e z_2 com módulos iguais a 1, que escritos na forma trigonométrica são $z_1 = \cos\,\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ e $z_2 = \cos\,\beta + i\,\text{sen}\,\beta$, temos: $z_1\cdot z_2 = (\cos\,\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\,\beta + i\,\text{sen}\,\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)$. Desenvolvendo a propriedade distributiva da multiplicação obtemos: $\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta + i(\,\text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha) = \cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha+\beta)$. Igualando as partes reais temos a fórmula para o cosseno da soma de dois arcos: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$. Já igualando as partes imaginárias obtemos a fórmula para o seno da soma de dois arcos $\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$.

6 - Considerando a fórmula para divisão de números complexos e tomando z_1 e z_2 com módulos iguais a 1, que escritos na forma trigonométrica são $z_1 = \cos\,\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$ e $z_2 = \cos\,\beta + i\,\text{sen}\,\beta$,

temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos\ \alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\ \beta + i\,\text{sen}\,\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta).$$

Se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração por $\cos\beta - i\,\text{sen}\beta$ obtemos:

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta + sin\alpha\,\text{sen}\beta + i(\,\text{sen}\alpha\cos\beta -\ \text{sen}\beta\cos\alpha)}{\cos^2\beta +\ \text{sen}^2\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta).$$

Como $\cos^2\beta +\ \text{sen}^2\beta = 1$, temos:

$$\cos\alpha\cos\beta + sin\alpha\,\text{sen}\beta + i(\,\text{sen}\alpha\cos\beta -\ \text{sen}\beta\cos\alpha) = \cos(\alpha - \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha - \beta).$$

Igualando as partes reais temos a fórmula para o cosseno da diferença de dois ângulos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta +\ \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta.$$

Já igualando as partes imaginárias obtemos a fórmula para o seno da diferença de dois ângulos:

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) =\ \text{sen}\alpha\cos\beta -\ \text{sen}\beta\cos\alpha.$$

7 - A fórmula de Euler aplicada para o número complexo $e^{(\pi\cdot i/2)}$ nos fornece $z = \cos\pi/2 + i\,\text{sen}\pi/2 = i$, já que $\cos\pi/2 = 0$ e $\text{sen}\pi/2 = 1$.

Assim i^i pode ser escrito como $e^{(\pi\cdot i/2)i}$ que é igual a $e^{-\pi/2}$, que é um número real.

8 - Utilizando $\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\,\text{sen}\alpha)^2$ e $\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$ temos:

$$1 + \cos x + \cos^2 x -\ \text{sen}^2 x + \cos^3 x - 3\cos x\,\text{sen}^2 x = 0.$$

Sabemos que $1 -\ \text{sen}^2 x = \cos^2 x$, portanto obtemos:

$$\cos x + 2\cos^2 x + \cos^3 x - 3\cos x \,\mathrm{sen}^2 x = 0.$$

Como cada membro da equação possui um fator $\cos x$, obtemos a primeira solução como $\cos x = 0$, isto é, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; para qualquer k inteiro.

Para as demais soluções teremos:

$$1 + 2\cos x + \cos^2 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x = 0,$$

onde podemos substituir $\mathrm{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, obtendo assim:

$$1 + 2\cos x + \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0,$$

que leva a:

$$-2 + 2\cos x + 4\cos^2 x = 0.$$

Trata-se agora de uma equação do segundo grau cujas raízes são -1 e $1/2$. Logo, as demais soluções seriam respectivamente:

$$x = \pi + 2k\pi$$

e

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$$

onde k pode ser qualquer número inteiro.

Capítulo 6

Desafios olímpicos

Neste capítulo discutimos alguns problemas que apareceram em olimpíadas internacionais de matemática que podem ser resolvidos com a utilização dos números complexos.

Acredito que tão importante quanto o cuidado que a escola deve ter com os alunos que apresentam dificuldade em aprender determinados conteúdos; oferecendo aulas de reforço, plantões de dúvidas e recuperação; deve-se oferecer desafios aos melhores alunos. Pois eles podem deixar de se interessar caso o conteúdo lhes pareça básico ou repetitivo (repetição que pode ser muito importante aos alunos que ainda não entenderam o conteúdo).

Acredito ainda que este tipo de problema é muito importante para os professores de matemática redescobrirem a razão pela qual escolheram tal profissão: o gosto por desafios matemáticos. Seja pela falta de tempo ou pelo recebimento de problemas e resoluções em seguida, os professores acabam perdendo o saudável hábito de encarar o desafio de, pelo menos, tentar resolver problemas realmente originais, ou ainda não canônicos.

É muito importante que as olimpíadas de matemática sejam consideradas como competições saudáveis, assim como são consideradas as olimpíadas esportivas. Citando Artur Ávila, o primeiro matemático brasileiro agraciado com a medalha Fields em 2014 [14].

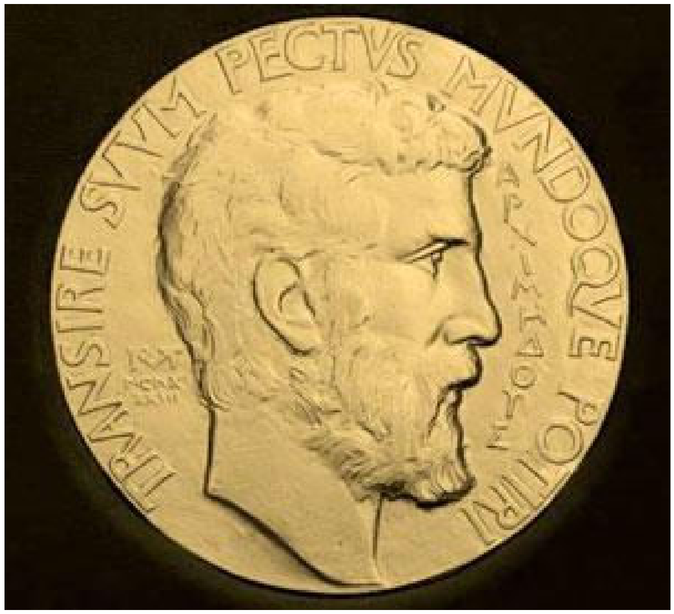

Figura 6.1: Medalha Fields na face em que tem a efígie de Arquimedes, seu nome (em grego) e a inscrição (em latim) *Transire suum pectus mundoque potiri*, que significa "Superar os limites da inteligência e conquistar o universo".

> “As olimpíadas tiveram uma importância muito grande na minha trajetória particular. Serviram para focalizar e motivar ainda mais na matemática. As olimpíadas apresentam a matemática de uma outra maneira. Apresentam problemas mais interessantes dos que são apresentados no currículo escolar. A escola trabalha mais fórmulas fechadas para serem aplicadas e o estudante tem que memorizar e aplicar de maneira mecânica. Isso não tem nada a ver como a matemática que é utilizada e feita em alto nível"

.

6.1 Problema da V-IMO

Este problema fez parte da quinta olimpíada internacional de matemática, conhecida como IMO (International Mathematical Olympiad) [1]. Ele foi o quinto problema da prova, isto é, a segunda questão do segundo dia. A prova apresentou três questões por dia para serem resolvidas em quatro horas e meia em cada dia. Esta olimpíada acontece desde 1959 e conta atualmente com a participação de mais de 100 países. O Brasil participa desde 1979 e oito brasileiros conquistaram nove medalhas de ouro, entre eles Artur Ávila, em 1995.

Problema

Prove que

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Solução

Para resolver este problema devemos considerar o número complexo

$$z = \cos\frac{\pi}{7} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{7}$$

que a partir da fórmula de de Moivre, fornece

$$z^7 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\pi$$

assim

$$z^7 = -1$$

logo

$$z^7 + 1 = 0,$$

que é uma equação algébrica do sétimo grau sendo uma das raízes $z = -1$.

Fatorando da seguinte forma

$$(z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0.$$

Assim, como não buscamos a raiz $z = -1$, teremos:

$$z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

portanto, podemos escrever

$$z^4(z^2 - z + 1) - z(z^2 - z + 1) = -1$$

ou ainda utilizando fatoração por agrupamento

$$(z^4 - z)(z^2 - z + 1) = -1$$

assim

$$z(z^3 - 1)(z^2 - z + 1) = -1.$$

A equação anterior pode ser escrita na forma

$$z(z^2 - z + 1) = \frac{-1}{z^3 - 1}$$

ou ainda na forma

$$z^3 - z^2 + z = \tfrac{1}{1-z^3}.$$

Como consideramos inicialmente $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{7}$, temos que a parte real de

$$z^3 - z^2 + z$$

é

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7},$$

uma vez que

$$z^3 - z^2 + z = \frac{1}{1-z^3},$$

a parte real de ambos deve ser a mesma.

Assim, calcularemos as partes real e imaginária de

$$\frac{1}{1-z^3} = \frac{1}{1-\cos\frac{3\pi}{7} - i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{7}}.$$

Aplicando as fórmulas de arco duplo para cosseno e seno, demonstradas na seção 5.6, temos

$$\frac{1}{1-\cos\frac{3\pi}{7} - i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{7}} = \frac{1}{1-\cos^2\frac{3\pi}{14} + \mathrm{sen}^2\frac{3\pi}{14} - 2i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}}.$$

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, temos

$$\frac{1}{1-\cos^2\frac{3\pi}{14} + \mathrm{sen}^2\frac{3\pi}{14} - 2i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2\frac{3\pi}{14} - 2i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}}.$$

Colocando em evidência no denominador, temos

$$\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2\frac{3\pi}{14} - 2i\ \mathrm{sen}\frac{3\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{14}\left(\mathrm{sen}\frac{3\pi}{14} - i\cos\frac{3\pi}{14}\right)}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo conjugado de

$$\mathrm{sen}\frac{3\pi}{14} - i\cos\frac{3\pi}{14}$$

que é

$$\mathrm{sen}\frac{3\pi}{14} + i\cos\frac{3\pi}{14}$$

temos

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{14} + i\cos\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{14}},$$

ou ainda podemos separar em

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{14}} + \frac{i\cos\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{14}}.$$

Logo, simplificando temos

$$\frac{1}{2} + \frac{i\cos\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{sen}\frac{3\pi}{14}}$$

isto é, um número cuja parte real vale $\frac{1}{2}$.

Note que isso não depende do valor do argumento, isto é, para qualquer número complexo $\frac{1}{1-z^3}$, com $z \neq 1$, teremos parte real igual a $\frac{1}{2}$.

6.2 Olimpíada de matemática do Vietnã, 1996

A olimpíada de matemática do Vietnã acontece desde 1962 e desde 1975 possui o mesmo formato da IMO, com dois dias de provas de três questões cada dia.

Esta prova é considerada a principal responsável pelo primeiro vietnamita com medalha Fields: Ngô Bàu Châu. Nascido em 1972 em Hanoi, ele participou da equipe vietnamita na IMO, sendo premiado com ouro em dois anos seguidos. Em 2004 ganhou o prêmio Clay de pesquisa; em 2007 ganhou o prêmio Oberwolfach e o prêmio Sophie Germain; desde 2007 trabalha no Instituto de Estudos Avançados de Princeton e em 2010 ganhou a medalha Fields.

Problema

Determine $x, y \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sqrt{3x}(1 + \tfrac{1}{x+y}) = 2$$

e

$$\sqrt{7y}(1 - \tfrac{1}{x+y}) = 4\sqrt{2}.$$

Solução

Começamos introduzindo as seguintes substituições: $\sqrt{x} = u$ e $\sqrt{y} = v$.
Reescrevendo as expressões, temos

$$u\left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

e

$$v\left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

Sabemos que $u^2 + v^2$ é o quadrado do módulo do número complexo $z = u + iv$. Assim, se somarmos a primeira equação com a segunda multiplicada por i, obtemos

$$u\left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right) + iv\left(1 - \frac{1}{u^2 + v^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}$$

que pode ser reescrita como

$$u + iv + \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}$$

ou ainda

$$z + \frac{\bar{z}}{|z^2|} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}.$$

Sabemos ainda que $|z^2|= z \cdot \bar{z}$. Portanto podemos reescrever como

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}.$$

Multiplicando os dois membros por z e reescrevendo a equação, temos

$$z^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}\right) z + 1 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática temos o discriminante

$$\Delta = \frac{4}{3} + \frac{16i\sqrt{2}}{\sqrt{21}} - \frac{32}{7} - 4$$

que pode ser reescrito na forma

$$\Delta = \frac{16}{21} + \frac{16i\sqrt{2}}{\sqrt{21}} - 8.$$

Ainda assim, completando quadrados tem a forma

$$\Delta = \left(\frac{4}{\sqrt{21}} + 2i\sqrt{2}\right)^2.$$

Portanto, as duas soluções da equação são

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}} + i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right).$$

Sendo assim, o sistema inicial possui as soluções

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2$$

e

$$y = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right)^2.$$

6.3 Competição matemática Putnam, 1989

A competição de matemática William Lowell Putnam acontece todo ano e é organizada pela MAA (*Mathematical Associacion of America*) desde 1938. No primeiro sábado de dezembro, mais de dois mil alunos têm o tempo de seis horas para resolver 12 problemas de matemática. Há uma premiação individual e também por equipes. Na competição por equipe a universidade de Harvard lidera com 59 vitórias, seguida pelo MIT com 44, pelo Caltech com 33 e por Princeton com 28.

Problema

Prove que: se $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$, então $|z|= 1$.

Solução

Fatorando a expressão dada, temos

$$z^9(11z + 10i) = 11 - 10iz$$

que reescrevendo, fornece

$$z^9 = \frac{11 - 10iz}{11z + 10i}.$$

Tomando o módulo de ambos os lados da equação e substituindo, apenas no lado direito, o valor $z = a + bi$, temos

$$|z^9|= \frac{|11 - 10i(a + bi)|}{|11(a + bi) + 10i|}$$

o que, efetuando as contas, leva a

$$|z^9|= \frac{|11 - 10ai + 10b|}{|11a + 11bi + 10i|}.$$

Tomando o módulo temos

$$|z^9|= \frac{\sqrt{(11 + 10b)^2 + 100a^2}}{\sqrt{121a^2 + (11b + 10)^2}}$$

que pode ser rearranjado em

$$|z^9|= \frac{\sqrt{121 + 220b + 100(a^2 + b^2)}}{\sqrt{121(a^2 + b^2) + 220b + 100}}.$$

Suponhamos agora que $|z|> 1$. Isso implicaria em $|z^9|> 1$. O que por sua vez implicaria em

$$121 + 220b + 100(a^2 + b^2) > 121(a^2 + b^2) + 220b + 100$$

que resulta em

$$21 > 21(a^2 + b^2).$$

Perceba que isso só ocorre quando $a^2 + b^2$ for menor que um, isto é, quando $|z|$ for menor que um. Contradição.

Suponhamos agora que $|z| < 1$. Isso implicaria em $|z^9| < 1$. O que por sua vez implicaria em

$$121 + 220b + 100(a^2 + b^2) < 121(a^2 + b^2) + 220b + 100$$

que resulta em

$$21 < 21(a^2 + b^2).$$

Perceba que isso só ocorre quando $a^2 + b^2$ for maior que um, isto é, quando $|z|$ for maior que um. Contradição, novamente.

Assim, podemos concluir que $|z| = 1$ *c.q.d.*

6.4 Problema e soluções com e sem números complexos

Calcule o produto $P = \cos(\pi/9) \cdot \cos(2\pi/9) \cdot \cos(4\pi/9)$.

6.4.1 A solução clássica sem utilização de números complexos.

A fórmula do arco duplo da função seno é:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

Portanto, mutiplicando P por $2\operatorname{sen}(\pi/9)$ temos

$$2\operatorname{sen}(\pi/9)P = 2\operatorname{sen}(\pi/9)\cos(\pi/9) \cdot \cos(2\pi/9) \cdot \cos(4\pi/9)$$

o que, aplicando a fórmula do arco duplo, fornece

$$2\operatorname{sen}(\pi/9)P = \operatorname{sen}(2\pi/9) \cdot \cos(2\pi/9) \cdot \cos(4\pi/9).$$

Multiplicando por dois de ambos os lados, temos

$$4\operatorname{sen}(\pi/9)P = 2\operatorname{sen}(2\pi/9) \cdot \cos(2\pi/9) \cdot \cos(4\pi/9)$$

o que, aplicando a fórmula do arco duplo novamente, nos leva a

$$4\operatorname{sen}(\pi/9)P = \operatorname{sen}(4\pi/9) \cdot \cos(4\pi/9).$$

Enfim, multiplicando por dois de ambos os lados, temos

$$8\,\text{sen}(\pi/9)P = 2\,\text{sen}(4\pi/9)\cdot\cos(4\pi/9)$$

o que, aplicando a fórmula do arco duplo, fornece

$$8\,\text{sen}(\pi/9)P = \text{sen}(8\pi/9).$$

Como $\frac{\pi}{9}$ e $\frac{8\pi}{9}$ são ângulos suplementares, o valor dos seus senos é o mesmo, assim:

$$P = \frac{1}{8}.$$

6.4.2 Solução utilizando números complexos.

Consideremos o número complexo

$$z = \cos(\pi/9) + i\,\text{sen}(\pi/9).$$

Sua parte real pode ser escrita como

$$\frac{z^2+1}{2z},$$

conforme demonstrado a seguir.

Aplicando inicialmente a fórmula de de Moivre para potenciação, temos

$$\frac{\cos(2\alpha) + i\,\text{sen}(2\alpha) + 1}{2(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)}.$$

Utilizando as fórmulas de cosseno do arco duplo e seno do arco duplo, temos

$$\frac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 2i\,\text{sen}\alpha\cos\alpha + 1}{2(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)}.$$

A partir da relação fundamental da trigonometria, podemos reescrever na forma

$$\frac{2\cos^2\alpha + 2i\,\text{sen}\alpha\cos\alpha}{2(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)}.$$

Colocando $2\cos\alpha$ em evidência, temos

$$\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)}{2(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)}.$$

Dividindo o numerador e o denomidador da fração por $2(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)$, otbemos $\cos\alpha$, isto é, a parte real de z.

Assim, para o complexo $z = \cos(\pi/9) + i\,\mathrm{sen}(\pi/9)$, temos

$$\cos(\pi/9) = \frac{z^2+1}{2z}.$$

Analogamente, podemos demonstrar que

$$\cos(2\pi/9) = \frac{z^4+1}{2z^2}$$

bem como que

$$\cos(4\pi/9) = \frac{z^8+1}{2z^4}.$$

Assim, podemos escrever para o produto

$$P = \frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{8z^7}.$$

Multiplicando numerador e denominador por (z^2-1) temos

$$P = \frac{(z^2-1)(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)}{(z^2-1)8z^7}.$$

Explicitando o produto dos dois primeiros fatores do numerador, temos

$$P = \frac{(z^4-1)(z^4+1)(z^8+1)}{(z^2-1)8z^7}.$$

Novamente efetuando o produto dos dois primeiros fatores do numerador, temos

$$P = \frac{(z^8-1)(z^8+1)}{(z^2-1)8z^7}.$$

Efetuando o produto dos dois primeiros fatores do numerador, temos

$$P = \frac{(z^{16}-1)}{(z^2-1)8z^7}.$$

Sendo $z = \cos(\pi/9) + i\,\mathrm{sen}(\pi/9)$, temos que $z^9 = -1$.

Assim, reorganizando os fatores, podemos escrever

$$P = \frac{(z^9 z^7 - 1)}{(z^9 - z^7)8}$$

o que substituindo o valor de z^9 por -1, gera

$$P = \frac{(-z^7 - 1)}{(-1 - z^7)8}$$

e portanto,

$$P = \frac{1}{8},$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente.

Considerações finais

O entendimento de como foi o trabalho de diversos matemáticos, até que os números complexos estivessem com a teoria consolidada que é apresentada no ensino médio, serve não apenas como motivação para os alunos encararem este assunto de delicada abstração, mas também para o aluno ter uma ideia de como o conhecimento matemático é construído ao longo da história.

A posterior aplicação da teoria dos números complexos em diferentes áreas da matemática, não deixa nenhuma dúvida de sua importância e traz uma saudável ligação entre diferentes campos. Além de ser extremamente útil como revisão de tópicos que foram ensinados com diferença de alguns meses ou até anos.

Enfim, a utilização de números complexos desafios de grandes competições de matemática tem como objetivo chamar atenção não apenas para os números complexos, mas também para as competições em si. Divulgando as competições e mostrando a beleza de seus desafios, podemos tentar que cada vez mais alunos participem, aumentando a chance de descobrimento de talentos. No entanto, vale ressaltar que descobrir talento não é o único objetivo de uma competição matemática, uma vez que todos seus participantes saem ganhando ao terem se envolvido numa atividade tão saudável e intelectualmente enriquecedora.

Espero que a dissertação ajude a enriquecer as aulas de colegas professores de matemática de ensino médio tanto quanto ela ajudou a enriquecer as minhas próprias aulas. Lembrando sempre que o encantamento que o professor sente pelo assunto é inevitavelmente sentido pelo aluno. Assim, na nossa profissão, devemos sempre conhecer mais sobre o que ensinamos, pois só assim podemos nos manter permanentemente encantados pelas próprias aulas.

Termino o texto com uma canção sobre números complexos apresentada anualmente para estudantes de física do primeiro ano na Royal Holloway University de Londres:

“Meus olhos viram a glória do diagrama de Argand-Gauss,
Eles têm visto nos i’s e tetas do poderoso plano de De Moivre,
Agora eu posso encontrar as raízes complexas
Com a raiz de menos um.

Os números complexos são tão fáceis;
Os números complexos são tão fáceis;
Os números complexos são tão fáceis;
Com a raiz de menos um.

Em coordenadas cartesianas do plano complexo é bom,
Mas a grandiosidade da forma polar sua beleza vai ofuscar.
Você estar elevando i + 40 à potência de 99,
Com a raiz de menos um.

Você vai perceber que o seu entendimento era apenas a segunda parte,
Quando você vir o poder e a magia do complexo conjugado.
Desenho vetores correspondentes às raízes de menos oito,
Com a raiz de menos um.”

Apêndice A

Demonstração de Tartaglia

Tartaglia criou um poema que descreveria os passos de sua demonstração. Coloco abaixo sua tradução para o português [16] e depois faremos a interpretação algébrica.

“Quando o cubo somado com as coisas
Se iguala a algum número discreto
Encontra nele outros dois diferentes.

Depois verás, num procedimento usual,
que o produto deles é sempre igual
Ao terceiro cubo das coisas exato,

O resíduo, então, geral
de suas raízes cúbicas subtraídas
Será o valor da tua coisa principal.

No segundo desses atos
Quando cubo fica sozinho
Aplicarás esses outros contratos,

Do número farás duas partes, de modo
que, multiplicando uma pela outra, surja exato
O terceiro cubo das coisas em conjunto.

Delas, depois, com procedimento usual,
Somarás as raízes cúbicas
E esse total será o resultado final.

A terceira dessas nossas contas
Resolve-se por meio da segunda, se olhares bem,
porque por natureza são parentes.

Achei esses, e não com passos lerdos
Em mil quinhentos, quatro e trinta
Com fundamentos bem sólidos e robustos

Na cidade circundada pelo mar."

A primeira estrofe do poema conta que ele resolverá a equação cúbica incompleta $x^3 + bx = c$ utilizando $c = u - v$.

Já a segunda estrofe do poema conta que ele descobrirá valores de u e v que também satisfaçam $u \cdot v = (b/3)^3$.

Por fim, na terceira estrofe, o poema revela o valor de x da forma $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$.

Perceba que, ao escrevermos x, b e c em função de u e v na equação cúbica incompleta, obtemos:

$$(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + 3\sqrt[3]{u \cdot v}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) = u - v,$$

que, desenvolvendo a expressão, temos:

$$u - 3\sqrt[3]{u^2}\sqrt[3]{v} + 3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v^2} - v + 3\sqrt[3]{u \cdot v}\sqrt[3]{u} - 3\sqrt[3]{u \cdot v}\sqrt[3]{v} = u - v,$$

resultando na igualdade $u - v = u - v$ e validando o método de Tartaglia.

Assim, para a resolução da equação cúbica incompleta, bastaria encontrar os valores de u e v. Isso pode ser feito resolvendo a equação do segundo grau que resulta da substituição de $u = v + c$ na equação $u \cdot v = (b/3)^3$, conforme faremos abaixo.

Temos que

$$(v + c) \cdot v = (b/3)^3,$$

que, deixada na forma que usualmente deixamos para resolução da equação quadrática, resulta em

$$v^2 + cv - (b/3)^3 = 0,$$

que possui uma das raízes igual a

$$v = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4(b/3)^3}}{2},$$

que pode ser escrito da forma

$$v = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Como $u = v + c$, temos

$$u = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Assim, sendo $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, chegamos à formula que dá uma das raízes de uma equação cúbica incompleta:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Analogamente, nas estrofes 4, 5 e 6, o poema descreve como chegar a uma raiz da equação incompleta de terceiro grau da forma $x^3 = bx + c$. Basta considerar agora que devemos encontrar u e v que satisfaçam $u + v = c$ e $u \cdot v = (b/3)^3$. Desta forma teremos a raiz $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

Fazendo as mesmas substituições, encontramos a equação do segundo grau:

$$-v^2 + cv - (b/3)^3 = 0,$$

que uma das raízes é igual a

$$v = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4(b/3)^3}}{-2},$$

que pode ser escrito da forma

$$v = \frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Como $u = c - v$, temos

$$u = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}.$$

Assim, sendo $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$, chegamos à formula que dá uma das raízes de uma equação cúbica incompleta:

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}}.$$

Já na sétima estrofe do poema, Tartaglia diz que, pelo mesmo método já descrito para encontrar uma raiz nas estrofes anteriores, pode-se facilmente encontrar a raiz da equação $x^3 + c = bx$.

Por fim, nos últimos versos do poema, Tartaglia afirma que encontrou as raízes da equação incompleta do terceiro grau de maneira rápida e bem fundamentada, no ano de 1534 na cidade de Veneza.

É interessante ressaltar que nesta época o calendário sa República Vêneta tinha a passagem do ano marcada para o dia primeiro de março. Assim, quando Tartaglia se refere a 22 de fevereiro de 1534, trata-se na verdade de 22 de fevereiro de 1535.

Apêndice B

Limite fundamental exponencial

Para definimos através do conceito de área o logaritmo natural de um número real x precisaremos ter $x > 1$. Isto é, tomaremos um valor t, onde t é um número real positivo, para o qual $x = 1 + t$.

Então, o valor numérico de lnx (ou $ln(1+t)$) como a área delimitada horizontalmente pelo eixo x e pela hipérbole $y = 1/x$ e delimitada verticalmente pelas retas $x = 1$ e $x = 1 + t$.

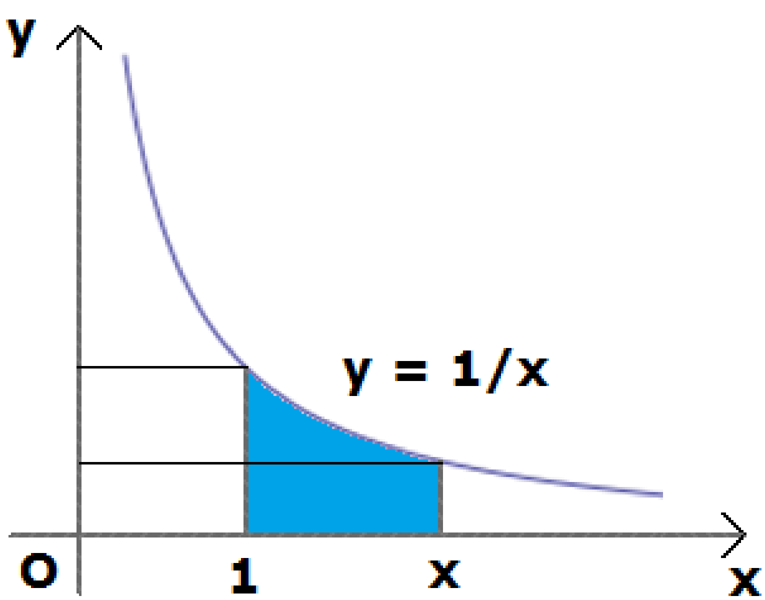

Figura B.1: Hipérbole $y = 1/x$

Na figura B.1 podemos perceber que a área que corresponde ao valor numérico de $ln(1 + t)$ é certamente maior que o valor da área do retângulo de base t e altura $1/x$ ou $1/(1 + t)$. Também é fácil notar que o valor numérico de $ln(1 + t)$ é certamente menor que o valor da área do retângulo de base t e altura 1.

Assim, podemos escrever a seguinte desigualdade:

$$\frac{t}{1+t} < ln(1+t) < t,$$

que dividindo por t, obtemos

$$\frac{1}{1+t} < \frac{ln(1+t)}{t} < 1.$$

Considerando $t = 1/n$, podemos escrever

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} < 1,$$

que pode ser escrito como

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < n \cdot ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1.$$

Utilizando a propriedade das funções logarítmicas que fornece $n \cdot \log_b x = \log_b (x)^n$, podemos escrever

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

Considerando cada membro da desigualdade como expoente de uma base igual a e, obtemos a seguinte desigualdade

$$e^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Ao tomarmos o limite de n tendendo ao infinito, obtemos, pelo teorema do confronto,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

De maneira análoga, é possível demonstrar que

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Referências Bibliográficas

[1] ANDREESCU, Tito, ANDRICA, Dorin, *Números Complexos de A a ... Z*, 1ª edição, Vest-Seller, Fortaleza, 2013.

[2] BOTTAZZINI, Umberto, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, 1ª edição, Springer-Verlag, Nova York, 1968.

[3] EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática*, 3ª edição, Editora da Unicamp, Campinas, 2002.

[4] GUIDORIZZI, Hamilton L., *Um Curso de Cálculo*, 2ª edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 1987.

[5] GUTHRIE, William K. C., *The Sophists*, 1ª edição, Cambridge University Press, Cambrigde, 1991.

[6] LIMA, Elon L., CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto C., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 3*, 4ª edição, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2004.

[7] MAOR, Eli, *e:A História de um Número*, 1ª edição, Editora Record, Rio de Janeiro, 2003.

[8] NAHIN, Paul J., *An imaginary tale: the story of* $\sqrt{-1}$, 1ª edição, Princeton University Press, Princeton, 1998.

[9] NAHIN, Paul J., *Dr. Euler's Fabulous Formula*, 1ª edição, Princeton University Press, Princeton, 2006.

[10] OLIVEIRA, Edmundo C., *Funções Especiais com Aplicações*, 2ª edição, Livraria da Física, São Paulo, 2011.

[11] OLIVEIRA, Edmundo C., RODRIGUES Jr., Waldyr A., *Funções Analíticas com Aplicações*, 1ª edição, Livraria da Física, São Paulo, 2006.

[12] OLIVEIRA, Gabriela V., *Brahmagupta e Quadriláteros Cíclicos no Ensino Médio*, Dissertação de Mestrado, IMECC-Unicamp, 2015.

[13] O'NEILL, John, *Formalism, Hamilton and Complex Numbers*, 1ª edição, Princeton University Press, Princeton, 1986.

[14] SALLES, João M., *Artur Tem um Problema*. Piauí, Rio de Janeiro, v.40, p. 7-10, Editora Alvinegra, dez. 2013.

[15] TEIXEIRA, Bárbara de H. M., OLIVEIRA, Edmundo C., *Cálculo - Exercícios Resolvidos para Cursos de Exatas e Tecnológicas*, 1ª edição, Editora da Unicamp, Campinas, 2014.

[16] TOSCANO, Fabio, *A Fórmula Secreta*, 1ª edição, Editora da Unicamp, Campinas, 2012.