FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

JULIANA CRISTINA DOS REIS BOMFIM

ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE SOFTWARES COMPUTACIONAIS

DOURADOS – MS

2013

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

JULIANA CRISTINA DOS REIS BOMFIM

ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE SOFTWARES COMPUTACIONAIS

Trabalho apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática oferecido pela Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS, sob orientação do Professor Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes como exigência para a conclusão do curso.

DOURADOS – MS

2013

B683e Bomfim, Juliana Cristina dos Reis

Estudo das funções trigonométricas com auxílio de softwares computacionais/ Juliana Cristina dos Reis Bomfim. Dourados, MS: UEMS, 2013.

60p. ; 30cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado) – PROFMAT – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2013.

Orientador: Prof. Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes.

1. Ensino-aprendizagem 2. Funções trigonométricas 3. Softwares computacionais. Título.

CDD 20.ed. 516.24

ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DE SOFTWARES COMPUTACIONAIS

BANCA EXAMINADORA

Dr. Cosme Eustáquio Rubio Mercedes

Dr. Odival Faccenda

Dr. Robert Rodrigues Jesus Reyes

Dedico esse trabalho ao Kender que me incentivou, depositando em mim toda a sua confiança, me ajudando a ultrapassar todas as dificuldades que passei durante o curso; e a minha mãe, meu pai e ao meu irmão que contribuíram de forma significativa nesta caminhada de estudos.

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (Paulo Freire)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus que me deu saúde, capacidade e força de vontade para superar os obstáculos que apareceram ao longo do curso, sem desanimar chegando até o fim.

A minha mãe que com toda simplicidade me ensinava o grande valor dos estudos para a minha vida e para o meu crescimento intelectual.

Ao meu irmão que depositou em mim confiança e incentivo sempre que eu desanimava.

Ao Kender que com todo o seu carinho e atenção me apoiou, incentivou e ajudou a superar todas as dificuldades que apareceram ao longo da caminhada, e acreditou na minha capacidade de estudar.

Ao professor orientador Cosme, que demonstrou muita paciência com minhas dificuldades, me esclarecendo de maneira clara e objetiva todas as minhas dúvidas.

Aos meus amigos que me apoiaram durante a trajetória, em especial a Odete que me fazia companhia nos momentos de estudo.

A todos os meus professores do mestrado, os quais contribuíram significativamente para a construção de conhecimento e para chegar onde cheguei.

RESUMO

Este trabalho tem como principal finalidade mostrar as reflexões de ensino-aprendizagem de matemática vinculando a transmissão de um determinado conhecimento e interpretando a relação didática como uma comunicação de informações. As situações didáticas e matemáticas visam uma organização de conhecimento a ser transmitido pelo professor com uma série de mensagens, possibilitando ao estudante adquirir as informações, construir seu próprio conhecimento e ampliar a sua aprendizagem. Apresenta um pouco da história da trigonometria, conceitos das funções trigonométricas e o uso dos softwares computacionais no estudo das mesmas, como uma ferramenta didático-pedagógica, que pode ser usada no processo ensino-aprendizagem dos estudantes, onde os mesmos são gratuitos e de fácil acesso, que desperta o interesse dos estudantes, envolve conceitos teóricos, desenvolve as habilidades de visualização e percepção, interpretação e resolução de problemas.

Palavras-chave: ensino-aprendizagem; funções trigonométricas; softwares computacionais.

ABSTRAT

This work has as main purpose to show the reflections of teaching and learning of math linking the transmission of a specific knowledge and interpreting the relationship as a didactic transmission of information. The didactic situations and math knowledge of an organization intended to be transmitted by the teacher with a series of messages, enabling students to acquire information, construct their own knowledge and extend their learning. It presents a little history of the trigonometry concepts of trigonometric functions and the use of computer software in the same study, as a didactic and pedagogic tool that can be used in the teaching-learning process of the students, where they are free and easy access that arouses students' interest, involves theoretical concepts, develop the skills of visualization and perception, interpretation and resolution of problems.

Keywords: teaching and learning; trigonometric functions; computer software.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Levando em consideração que a matemática não é uma disciplina muito fácil de ser ensinada, que os estudantes precisam ter uma motivação para adquirir o entusiasmo e a vontade de estudá-la a fim de construir o seu conhecimento, nós educadores, devemos inovar as práticas de ensino de modo que eles se interajam com mais gosto com os conteúdos matemáticos. Desta forma, as tecnologias são bem vindas ao ensino de Matemática, por meio de programas e softwares que auxiliam no entendimento dos conteúdos e na vontade de aprender matemática cada dia mais, aprender a fazer matemática.

O uso das tecnologias desde que explorado voltado para o ensino-aprendizagem e conceitos da matemática é uma forte ferramenta que ajuda criar possibilidades de ensino e é uma metodologia de fácil acesso a todos.

Neste trabalho, é descrito o uso das tecnologias no ensino das funções trigonométricas. A utilização dos softwares é uma prática inovadora e que instiga nos estudantes o interesse pela construção do conhecimento, já que o computador faz parte do cotidiano de todos. O uso do winplot e do scilab, que são gratuitos, contribui para facilitar as atividades que possui um grau de dificuldade sem a utilização dos mesmos, e além de possibilitar a realização das atividades, também é interessante e importante para aprendizagem.

Ao utilizar os softwares é observado um melhor conhecimento do conteúdo pelos estudantes, devido ser uma aula diferenciada que desperta maior interesse. As atividades realizadas com o auxílio das tecnologias é na maioria das vezes interpretadas de forma correta e ao digitar um número errado na função desejada, logo os estudantes percebem a falha, eles sabem extrair as informações do enunciado e interpretar o gráfico plotado. Esse tipo de atividade contribui tanto para o estudante quanto para o uso das tecnologias na prática pedagógica do professor.

Este trabalho organiza-se em seis capítulos, sendo que no primeiro foi discutido as reflexões de ensino-aprendizagem matemática tendo como base teórica Guy Brousseau, 2007.

O segundo capítulo apresenta um pouco da história da trigonometria e no terceiro apresenta as funções: periódicas, trigonométricas (seno, cosseno e tangente) e exemplos de funções.

O quarto capítulo descreve sobre o uso do software scilab com aplicações das funções trigonométricas, atividade resolvida e simulação de funções com auxílio do referido software.

No quinto capítulo são apresentadas as atividades envolvendo funções trigonométricas, realizadas com os estudantes tendo auxílio do winplot e o sexto capítulo traz as considerações finais.

Finalizando, tem as referências utilizadas para desenvolvimento deste trabalho.

1 . REFLEXÕES DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA.

A matemática visa desempenhar um importante papel na educação e para a prática de ensino da mesma e obtenção de maior aprendizado tem-se várias possibilidades e situações de didática para o professor, com a finalidade de proporcionar-lhe algumas técnicas específicas para o ensino de noções a serem ensinadas e utilizadas, sejam elas, na elaboração de aulas, problemas e exercícios, softwares, jogos ou outros materiais usados no processo de ensino-aprendizagem.

Afirma Brousseau:

> Denominamos *situação* o modelo de interação de um sujeito com um meio especifico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável. Algumas dessas *situações* requerem (...) todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo em um processo de gênese artificial. (2008, p. 19-20)

Na arte de ensinar, existe um único método para o ensino de todas as ciências, a saber, o método natural válido tanto nas artes quanto nas línguas. As variações que poderiam existir seriam tão insignificantes que não exigiriam um método especializado. Porém, hoje se sabe que nem a humanidade nem cada ser humano adquirem os conhecimentos nas mesmas circunstâncias ou segundo os mesmos processos: a álgebra, a geometria ou as probabilidades não tem a mesma gênese nem a mesma organização. A concepção ou o estudo de um fato didático depende do conhecimento que é objeto de ensino e exige acomodações originais e apropriadas desse conhecimento; o ensino produz nos estudantes formas de conhecimentos que variam com as condições didáticas e que diferem dos saberes de referência. A didática atual se interessa pelas condições reprodutíveis e controláveis de ensino e aprendizagem de todos os tipos e principalmente pela especificidade dessas condições de acordo com o conhecimento visado ou obtido, com base na disciplina.

Como comenta Brousseau:

> Situações como "a ampliação do quebra-cabeça" mostram que os alunos podem "construir" um saber que não lhes tenha sido ensinado e, de certa forma, podem usá-lo no jogo para resolver novos problemas. Porém, essa situação não é transferível a nenhuma outra noção matemática. (2008, p.118)

O lançamento da introdução ao estudo da teoria das situações didáticas representa sem dúvida uma grande contribuição à educação matemática brasileira, uma vez que inicia a divulgação da fecundidade da teoria das situações didáticas e sua eficácia como ferramenta para trazer resposta aos problemas que foram a origem de sua criação.

A relação didática é uma comunicação de informações, que ocorrida entre o estudante e o sistema educacional vincula a transmissão de um determinado conhecimento, concebendo o ensino.

Segundo Brousseau:

> Esse esquema é associado a uma concepção de ensino em que o professor organiza o conhecimento a ser transmitido em uma série de mensagens, das quais o aluno toma para si o que deve adquirir. Esse esquema facilita a determinação dos objetos a serem estudados, o papel dos agentes do processo e a atribuição do estudo do ensino a diferentes disciplinas. (2008, p.16)

É importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do estudante, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares, legitimando o saber escolar e que a pedagogia e a psicologia cognitiva responsabilizem pela compreensão e sistematização das aquisições e aprendizagens do estudante.

Alguns estudiosos tais como: Skinner e Piaget, dizem que o ensino passa a ser uma atividade que concilia dois processos: um de aculturação, e outro de adaptação independente. Como comenta, em Guy Brousseau, 2008, pag. 20: “A busca das condições necessárias à concretização da aprendizagem levou Brousseau a desenvolver a noção de engenharia didática como metodologia de pesquisa e como criação de situações de ensino”.

A didática objetiva-se em fazer com que o estudante cresça e exista, para sentir-se mais a par do mundo a sua volta. As situações didáticas têm vínculos com o saber matemático, onde não basta simplesmente passar a matéria, generalizar o conteúdo abordado e muito menos desconsiderar as bases de uma teoria educacional, tem-se que saber ensinar, mostrar as aplicações da Matemática em outras áreas, para que fique mais interessante. Uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, estudante e saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico.

De acordo com Brousseau as *situações didáticas* estabelecem relações pedagógicas entre professor, estudante e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem, vinculando com outros recursos didáticos e recebendo influência direta do conteúdo e facilita o entendimento através de vínculos com o saber matemático.

Salienta Brousseau:

> Na concepção mais geral de ensino, a marca de um saber é a associação de boas perguntas com boas respostas. O professor propõe um problema; se o aluno resolver, demonstra que sabe; caso contrário, fica clara a necessidade de conhecimento, que requer uma informação, um ensino. A priori, todo método que permita a memorização das associações favoráveis é aceitável. (2008, p.33)

Comenta Brousseau, 2008, pág.35: “É possível procurar, por meios matemáticos e experimentais, quais valores podem determinar as condições ótimas de transmissão de determinados conhecimentos.

Os sujeitos se adaptam às situações que surgem e, para tanto, produzem conhecimentos e saberes. Num mesmo saber matemático podem haver variantes de uma situação e podem apresentar grandes diferenças de complexidade, levando a encontrar diferentes e ótimas estratégias e maneiras de conhecer um mesmo saber.

Segundo Brousseau:

> Cada função tem um mínimo. Para os valores inferiores das abscissas, o rendimento diminui: o método de contagem é inutilmente complexo para lidar com um conjunto muito pequeno; à.concepção é por demais sofisticada; a aprendizagem muito demorada etc. No caso de uma coleção maior, a contagem fica sem fôlego; o custo de execução para o reconhecimento de um número torna-se muito alto; o rendimento da concepção cai. A aprendizagem por adaptação implica que as variáveis sejam escolhidas de modo que o conhecimento que queremos "que seja descoberto" seja significativamente mais vantajoso que qualquer outro. (2008, p.46)

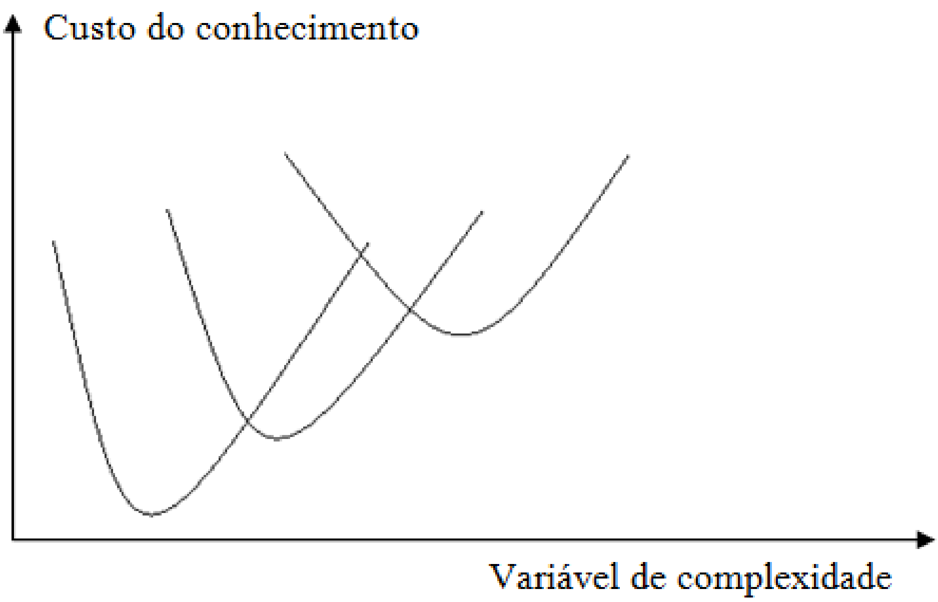


Fig. 1: Gráfico da variável de complexidade pelo custo do conhecimento, retirado de Brousseau, 2008, p. 46.

A aprendizagem não se resume a uma simples memorização, a uma justaposição do saber-fazer, o estudante constrói o seu saber a partir da sua interação com o meio e através de fases de rupturas e de equilibração faz sua adaptação decorrente da assimilação e da acomodação de conhecimento.

Uma maneira de conhecer; uma concepção característica, coerente, embora incorreta manifesta erros, ou seja, obstáculos, os quais não são ignorados com a aprendizagem de novo conhecimento.

Segundo Brousseau:

> A intervenção do professor evoca, necessariamente, em relação aos conhecimentos que ensina, um funcionamento possível em outras circunstâncias, não apenas nas "situações com fins didáticos" (exercícios ou problemas) que ele propõe. Cria, então, fictícia ou efetivamente, um outro "meio", em que o aluno atua de forma autônoma, o que nos leva a um esquema como o da figura abaixo. (2008, p.54)

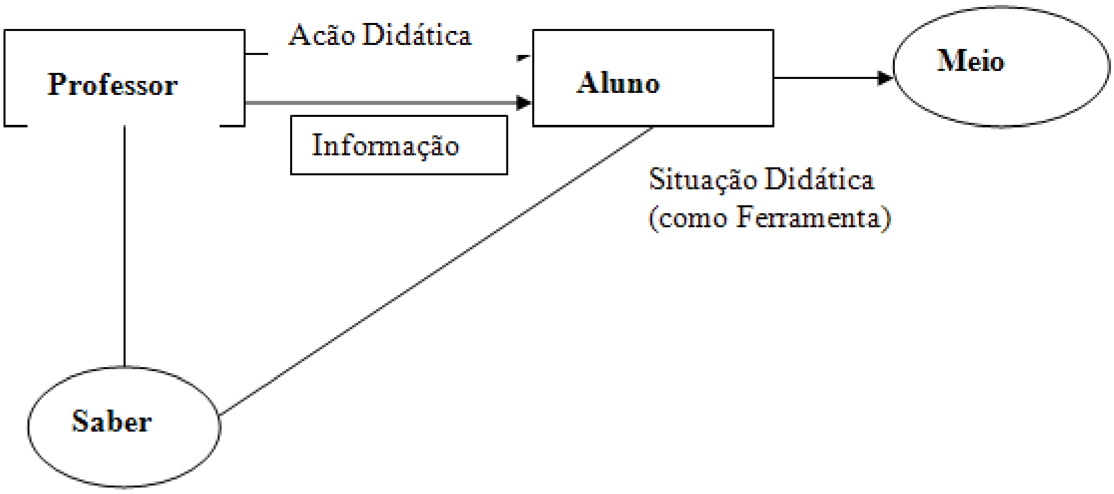


Fig. 2: Ação didática e situação didática; Fonte: Brousseau, 2008, p.54.

A Matemática pode colaborar para o desenvolvimento de novas competências, novos conhecimentos, para o desenvolvimento de diferentes tecnologias e linguagens que o mundo globalizado exige das pessoas. Assim visa-se levar o estudante a compreender e transformar o mundo à sua volta, estabelecer relações qualitativas e quantitativas, resolver situações-problema, comunicar-se matematicamente, estabelecer as intraconexões matemáticas e as interconexões com as demais áreas do conhecimento e desenvolver sua autoconfiança no seu fazer matemático.

2 . UM POUCO DA HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

A origem da trigonometria é incerta. Entretanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios. É possível encontrar problemas envolvendo a cotangente no Papiro Rhind e também uma notável tábua de secantes na tábula cuneiforme babilônica Plimpton 322.

A palavra trigonometria é formada por três radicais gregos: tri (três), gono (ângulos) e metron (medida); significando assim "medida dos triângulos". Inicialmente considerada como uma extensão da geometria, a trigonometria já era estudada pelos babilônios, que a utilizavam para resolver problemas práticos de Astronomia, de Navegação e de Agrimensura. Aliás, foram os astrônomos como o grego Hiparco (190 aC – 125 aC), considerado o pai da Astronomia e da Trigonometria, que estabeleceu as primeiras relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

A palavra trigonometria significa medida das partes de um triângulo. Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagesimais. Mas os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

Fig. 3: Papiro Rhind, Museu de Londres.

O astrônomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., ganhou o direito de ser chamado "o pai da Trigonometria" pois, na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas. Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de Astronomia. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. As principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração de um catálogo estrelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes - duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclítica - e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios.

No século VIII com o apoio de trabalhos hindus, matemáticos árabes contribuíram notavelmente para o avanço da trigonometria. Este avanço continuou após a construção da primeira tábua trigonométrica, por um matemático alemão, nascido em Baviera, chamado Purback. Porém o primeiro trabalho matemático sobre trigonometria foi o "tratado dos triângulos", escrito pelo matemático alemão Johann Müller, também chamado Regiomontanus. Sabe-se que Regiomaontanus foi discípulo de Purback. Atualmente a trigonometria não se limita apenas a estudar triângulos.

A trigonometria é um dos mais antigos ramos da Matemática, surgida na antiguidade para medir ângulos e distâncias com o objetivo de localizar pontos sobre a superfície terrestre a fim de resolver problemas oriundos das necessidades humanas relativas - por exemplo, à comunicação e ao transporte, apresentando hoje um grande número de aplicações em setores da ciência e tecnologia. É utilizada em várias situações práticas e teóricas envolvendo não somente problemas internos da matemática, mas também de outras disciplinas científicas e tecnológicas que envolvem fenômenos periódicos como eletricidade, termodinâmica, óptica, eletrocardiogramas, entre outros. E ainda, muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico podem ser modelados com auxílio de funções trigonométricas, se estendendo para a Análise e tendo enorme aplicação em campos da ciência e da atividade humana, como acústica, astronomia, mecânica, economia, engenharia, medicina, música, topologia, engenharia civil, etc.

A Trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. Se *c* é o comprimento da corda, α é o ângulo e *r* é o raio da circunferência então $c = 2rsen(\alpha / 2)$. Esta é a origem da palavra *seno*, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo *jiba* (corda) com *jaib* (dobra, cavidade, *sinus* em latim). [Cfr. “Meu Professor de Matemática”, pág. 187.]

O objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado.

Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e do seu prolongamento que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, ao lado de *cos Â***,** o cosseno do ângulo *Â*, tem-se também *cos x*, o cosseno do número real *x*, isto é, a função *cos:* $IR \rightarrow IR$. Analogamente, têm-se as funções sen, tg, cotg, sec e cossec, complementando as *funções trigonométricas.*

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

A importância das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo $\alpha \cos nx + b\ sen\ nx$. Para que se tenha uma ideia da relevância deste fato, que deu origem à chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo o banco de dados da revista “Mathematical Reviews”, o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

O conteúdo de funções trigonométricas é muitas vezes para o estudante um tema sem contextualização e aplicação tornando-o desinteressante e de difícil compreensão. E como obter autonomia em uma Matemática meramente instrumental vinculada apenas a regras e procedimentos, sem a compreensão da escrita (representação) e dos objetos relacionados a tais procedimentos? Segundo o PCNs 1998, página 42, “... as funções da Matemática (...) e a presença da tecnologia nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência, e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático.”

Dessa forma, percebemos claramente que o caráter instrumental da Matemática não está vinculado a um uso “cego” de fórmulas para resolver problemas ou chegar a respostas desejadas em atividades ou avaliações, mas que se espera no ensino médio uma Matemática vinculada ao papel formativo e ao caráter científico, com a compreensão da representação semiótica, dos objetos e desenvolvimento dos conceitos, assim como foco no por que dos procedimentos e fórmulas em questão. Isto é, com foco nas estruturas matemáticas.

É muito importante a introdução dos conceitos de trigonometria e suas representações, devendo estas ser significativas, com conexão da trigonometria no triângulo e no círculo, pois de acordo com os PCNs 1998, página 42, para que o ensino da Matemática resulte em aprendizagem real depende de dois objetivos, primeiramente expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática e também reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

3 . FUNÇÕES

Após termos visto um pouco da história da trigonometria, vamos estudar neste capítulo as funções periódicas e trigonométricas: seno, cosseno e tangente, que é o objetivo proposto neste trabalho e também situações resolvidas com utilização delas.

3.1 Funções periódicas

No dia a dia, é comum encontrarmos diversos fenômenos que se repetem após o mesmo intervalo de tempo:

- os dias da semana repetem-se de 7 em 7 dias, de 14 em 14 dias, de 21 em 21 dias, etc.;

- os meses do ano repetem-se de 12 em 12 meses, de 24 em 24 meses, de 36 em 36 meses, etc.;

- as horas cheias, em um relógio analógico, repetem-se de 12 em 12 horas, de 24 em 24 horas, de 36 em 36 horas, etc.

O *menor* intervalo de tempo que ocorre a repetição de um determinado fato ou fenômeno é chamado de *período*.

Outros exemplos de fenômenos periódicos são as fases da Lua, a altura das marés, etc.

Na Matemática também existem funções que apresentam e modelam certos fenômenos periódicos, um exemplo delas são as funções trigonométricas.

3.2 As funções trigonométricas

As funções *cos:* $IR \to IR$ e *sen:* $IR \to IR$, chamadas *função cosseno e função seno* respectivamente, são definidas pondo-se, para cada t $\in IR$: E(t)=(cos t, sen t).

Noutras palavras, $x = cos\ t$ e $y = sen\ t$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto E(t) da circunferência unitária.

Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo t $\in IR$, a relação fundamental $\cos^2 t + sen^2 t = 1$.

Uma função f: $IR \to IR$ chama-se *periódica* quando existe um número T $\neq$ 0 tal que f(t+T) = f(t) para todo t $\in IR$. Se isto ocorre, então f(t+ k T) = f(t) para todo t $\in IR$ e todo $k \in$ Z. O menor número T > 0 tal que f(t+T) = f(t) para todo t $\in IR$ chama-se *período* da função f. As funções *seno* e *cosseno* são periódicas, de *período* 2π.

Diz-se ainda que a função f: $IR \to IR$ é *par* quando se tem f(-t) = f(t) para todo t $\in IR$. Se tem f(-t) = - f(t) para todo t $\in IR$, a função f chama-se *ímpar*.

3.2.1 Função seno

Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto a este ângulo e a hipotenusa, em um triângulo retângulo.

Seno de um ângulo é o valor numérico da medida da projeção do arco que subentende o ângulo, no eixo vertical que passa pelo centro da circunferência unitária, ou seja, é a função real de variável real que associa o comprimento de um arco ao valor do seno do ângulo (medido em radianos) que é subentendido pelo arco.

Seja x um número real, que representa um arco em radianos, e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Denominamos de *função seno* a função f: $IR \to IR$ que associa a cada número real x o número real OP_1 = sen x, veja Fig. 4, isto é, f(x) = sen x.

Observe, na Fig. 4, que f associa a cada número real x a ordenada do ponto correspondente à sua imagem no ciclo. A ordenada de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica varia entre -1 e 1, isto é, $-1 \leq senx \leq 1$.

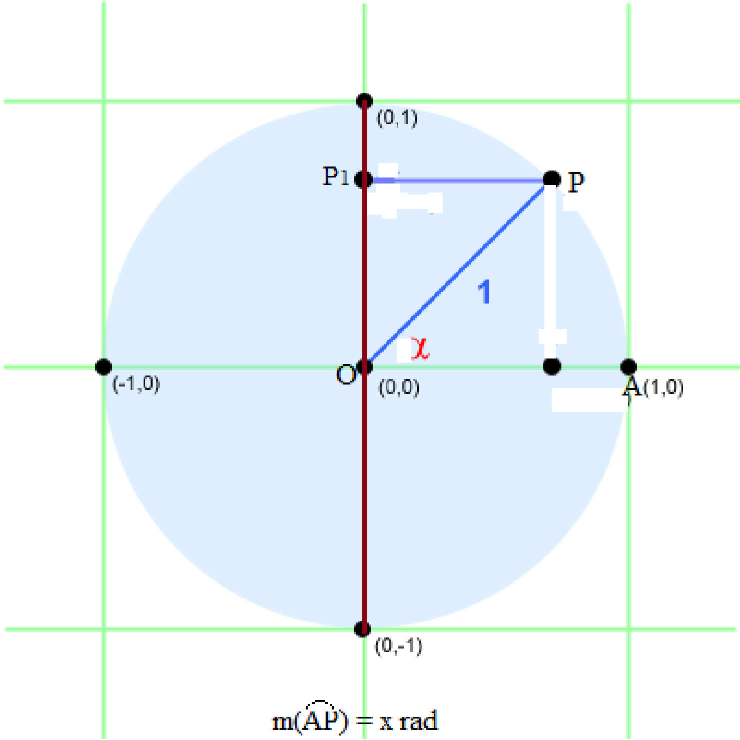


Fig. 4: m(AP) = *x* rad representando a ordenada do ponto P (sen *x*)

Utilizando valores representados no ciclo trigonométrico, na Fig 5, podemos identificar algumas propriedades da função seno:

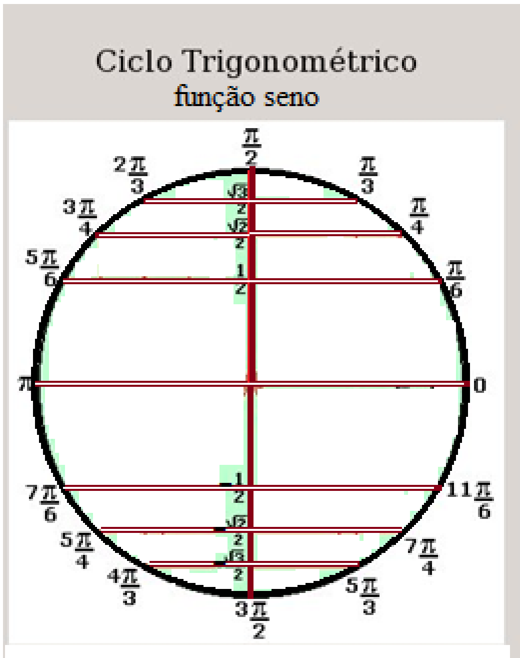


Fig. 5: Ciclo Trigonométrico: função seno

O *sinal* da função *f* dada por f(*x*) = sen *x* é positivo quando *x* pertence ao 1º e 2º quadrantes; e é negativo quando *x* pertence ao 3º e 4º quadrantes.

No primeiro quadrante, a função *f* é crescente, pois, à medida que *x* aumenta, os valores de sen *x* aumentam de 0 até 1; no 2º e 3º quadrantes, *f* é decrescente: à medida que *x* aumenta, os valores de y = sen *x* diminuem de 1 (valor máximo) até -1 (valor mínimo); no 4º quadrante, a função retoma o crescimento e seus valores aumentam de -1 a 0.

Resumindo, no 1º e 4º quadrantes *f* é *crescente* e no 2º e 3º quadrantes *f* é *decrescente.*

A função seno é *periódica* e seu período é 2π.

De fato, os números reais *x* e $x + k.2\pi$, para *k* inteiro, têm a mesma imagem no ciclo e, portanto, $senx = sen(x + k.2\pi)$, $k \in$ Z. Assim, *f* é periódica e seu período *p* corresponde ao menor valor positivo de $k.2\pi$, que é 2π.

O domínio e o contradomínio de *f* são iguais a IR. No entanto, o conjunto imagem da função seno é o intervalo real [-1,1], pois $\forall\ x \in IR$, temos que: $-1 \leq senx \leq 1$.

f é uma função *ímpar*, pois $\forall\ x \in IR$, sen (-*x*) = - sen *x*.

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, construímos o gráfico de *f*, dado por f(*x*) = sen *x*, que recebe o nome de *senóide*.

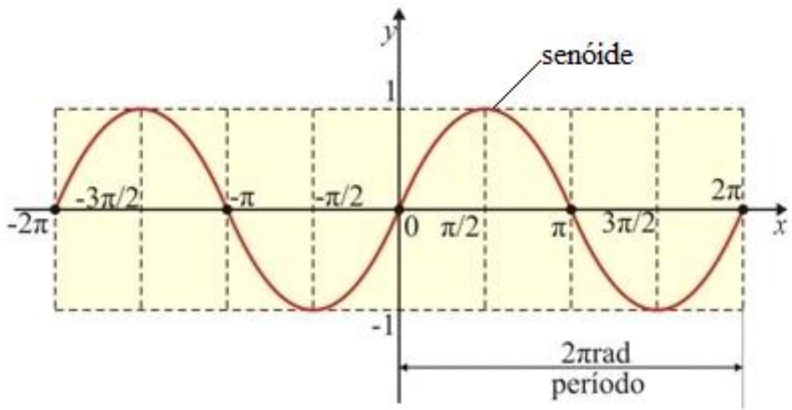


Fig. 6: Gráfico da função f(x) = sen (x), o qual é chamado de senóide e seu período

3.2.2. Função cosseno

Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente a este ângulo e a hipotenusa, em um triângulo retângulo.

Cosseno de um ângulo é o valor numérico da medida da projeção do arco que subentende o ângulo, no eixo horizontal que passa pelo centro da circunferência unitária, ou seja, é a função real de variável real que associa o comprimento de um arco ao valor do cosseno do ângulo (medido em radianos) que é subentendido pelo arco.

Seja x um número real, que representa um arco em radianos, e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Chama-se *função cosseno* a função f: $IR \to IR$ que associa a cada número real x o número real OP_2 = cos x, veja fig. 7 isto é, f(x) = cos x.

Observe, na fig. 7 que f associa a cada número real x a abscissa do ponto correspondente à sua imagem no ciclo. A abscissa de qualquer ponto pertencente à circunferência trigonométrica varia entre -1 e 1, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

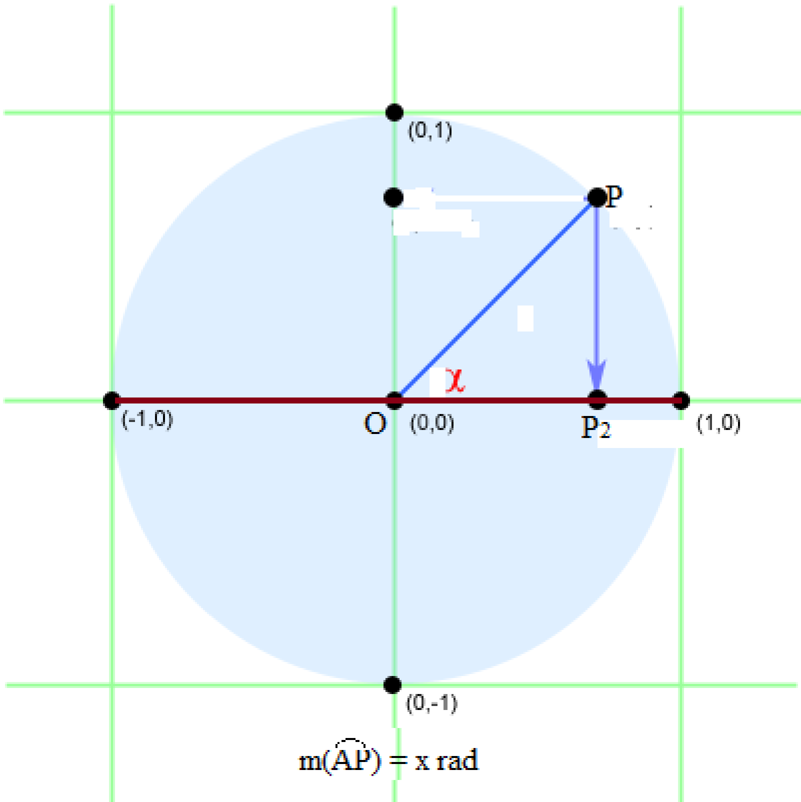


Fig. 7: m(AP) = x rad representando a abscissa do ponto P (cos x)

Utilizando valores representados no ciclo trigonométrico, na Fig. 5, podemos identificar algumas propriedades da função cosseno:

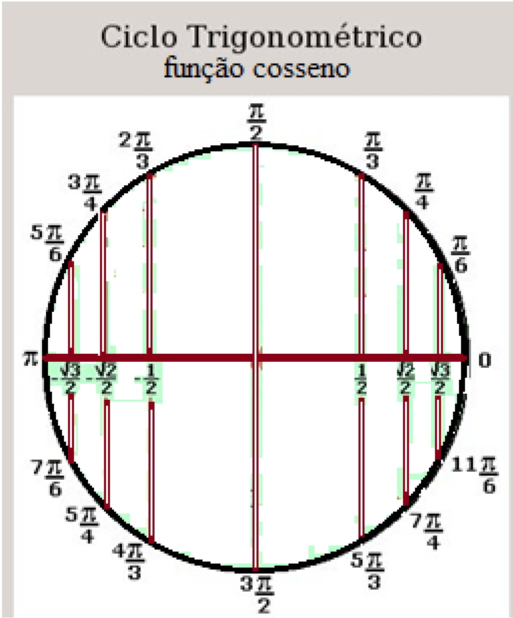


Fig. 8: Ciclo Trigonométrico: função cosseno

O *sinal* da função cosseno é positivo quando *x* pertence ao 1º e 4º quadrantes; e é negativo quando *x* pertence ao 2º e 3º quadrantes.

No 1º e 2º quadrantes, a função *f* é *decrescente*, pois, à medida que *x* aumenta, os valores de cos *x* diminuem de 1 até -1; no 3º e 4º quadrantes, *f* é *crescente*: à medida que *x* aumenta, os valores de y = cos *x* aumentam de -1 a 1.

A função cosseno é *periódica* e seu período é 2π.

De fato, os números reais *x* e $x + k.2\pi$, para *k* inteiro, têm a mesma imagem no ciclo e, portanto, $\cos x = \cos(x + k.2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim, *f* é periódica e seu período *p* corresponde ao menor valor positivo de $k.2\pi$, que é 2π.

O domínio e o contradomínio de *f* são iguais a IR, o conjunto imagem da função cosseno é o intervalo real [-1,1], pois $\forall\ x \in IR$, temos que: $-1 \leq \cos x \leq 1$.

f é uma função *par*, pois $\forall\ x \in IR$, cos (-*x*) = cos *x*.

Levando em consideração todas as propriedades anteriores, traçamos o gráfico de *f*, dado por f(*x*) = cos *x*, que recebe o nome de *cossenóide*.

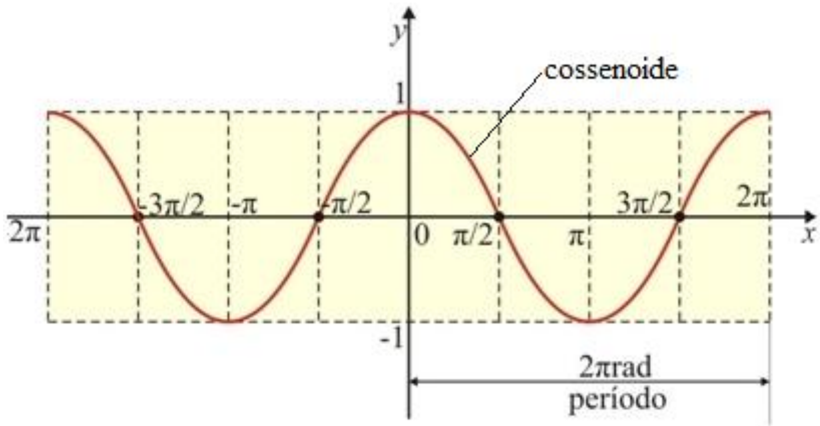


Fig. 9: Gráfico da função f(x) = cos (x), o qual é chamado de cossenóide e seu período

3.2.3. Função tangente

Seja $x \in IR$ e P sua imagem na circunferência trigonométrica.

Consideremos $D = \left\{ x \in IR \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z \right\}$.

Denominamos *função tangente* a função f: $D \rightarrow IR$ que associa a cada número real $x \in D$ o número real AT = tg x; na figura 6, isto é, f(x)= tg x.

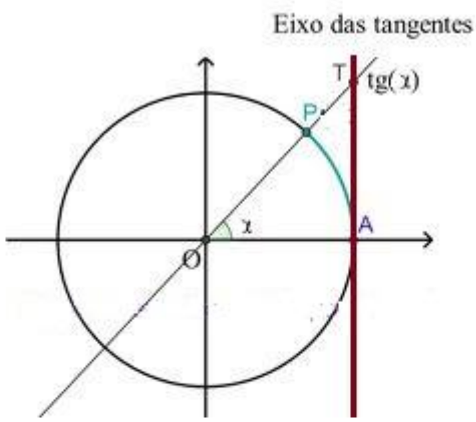


Fig. 10: valor da tg(x) na circunferência trigonométrica, onde tg x é o segmento AT

Observemos que :

O domínio de f é $\left\{ x \in IR \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z \right\}$, pois, quando $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com k

inteiro, a imagem de *x* é *B* ou *B'* e a reta $\overleftrightarrow{OP}$ é paralela ao eixo das tangentes. Desse modo, não definimos tg *x*, se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

O conjunto imagem de *f* é IR, pois, para todo $y \in IR$, existe, no eixo das tangentes, o ponto *T* tal que *AT* = *y*. A reta $\overleftrightarrow{OT}$ intercepta o ciclo em dois pontos distintos, imagens dos números reais *x* tais que tg *x* = *y*.

A função *f* definida por f(*x*) = tg *x* é sempre *crescente*:

Primeiro quadrante

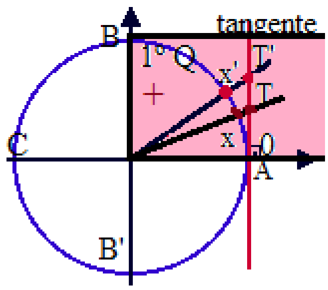


Fig. 11: tg *x*, se *x* ϵ 1º quadrante: $x' > x \Rightarrow tgx' > tgx$

A medida que *x* aumenta, tg *x* vai crescendo indefinidamente, assumindo todos os valores reais positivos, até deixar de existir em *B*.

Segundo quadrante

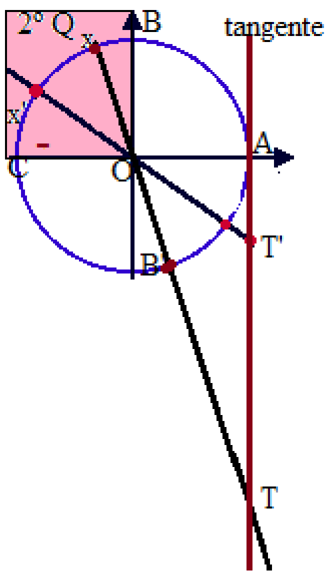


Fig. 12: tg *x*, se *x* ϵ 2º quadrante: $x' > x \Rightarrow tgx' > tgx$

A medida que x aumenta, tg x também aumenta, assumindo todos os valores reais negativos, até se anular em C.

Terceiro quadrante (análogo ao 1º)

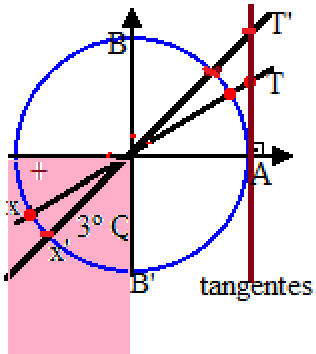


Fig. 13: tg x, se $x \in$ 3º quadrante: $x' > x \Rightarrow tgx' > tgx$

Quarto quadrante (análogo ao 2º)

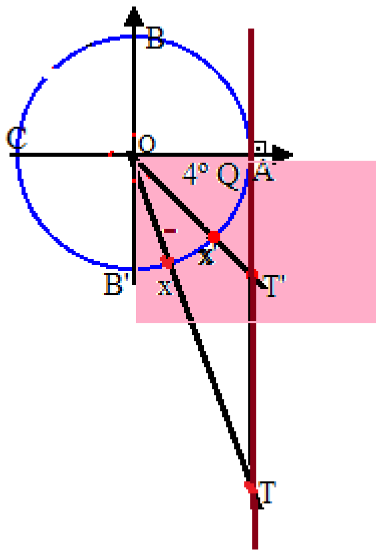


Fig. 14: tg x, se $x \in$ 4º quadrante: $x' > x \Rightarrow tgx' > tgx$

O *sinal* da função tangente é positivo no 1º e 3º quadrantes e é negativo no 2º e 4º quadrantes.

A função tangente é *periódica* e seu período é π. De fato, sendo $x \in IR$ e $k \in Z$, os números x e $x + k\pi$ têm imagens coincidentes, ou diametralmente opostas, na circunferência trigonométrica e, desse modo: $tgx = tg(x + k\pi)$; $k \in Z$.

O período *p* de *f* é o menor valor positivo de $k\pi$, que é π.

Para todo $x \in D$, tg(- *x*) = - tg *x*, a função tangente é uma função *ímpar*; observe no gráfico a seguir a simetria em relação ao ponto (0,0).

Considerando as observações anteriores e os valores conhecidos representados no ciclo, construímos o gráfico da função tangente, que recebe o nome *tangentóide*.

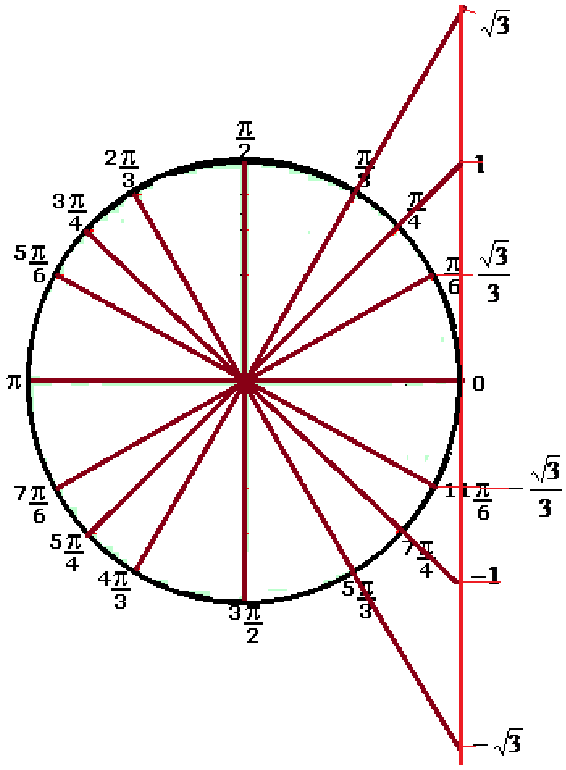


Fig. 15: Ciclo trigonométrico representando a função tangente

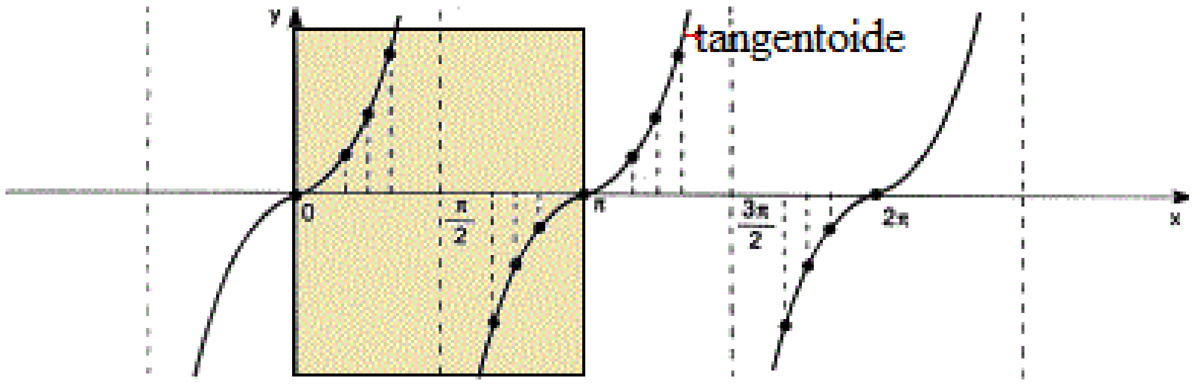


Fig. 16: Gráfico da função f(x) = tg (x), o qual é chamado de tangentóide e seu período completo destacado.

3.2.4. Exemplos de funções trigonométricas

Na medicina, um exemplo de relação que pode ser modelada por uma função trigonométrica é a variação da pressão nas paredes dos vasos sangüíneos de um certo indivíduo em função do instante de coleta dessa medida. O gráfico, Fig.17, representa uma investigação desse tipo onde se analisa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sangüíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos).

Em geral, a pressão indicada no gráfico obedece um ciclo, sendo que cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco. Note por meio do gráfico que ocorre um ciclo completo a cada 0,75 segundos, o que significa dizer que a frequência cardíaca do indivíduo avaliado é de 80 batimentos por minuto.

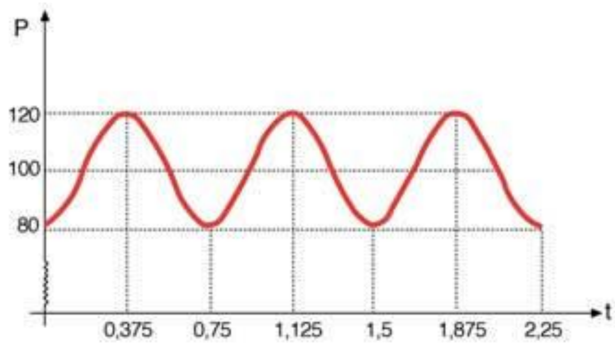


Fig. 17: Pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (mmHg) por segundo

Outro exemplo é o ciclo menstrual das mulheres, em que as diversas fases são determinadas pela quantidade de vários hormônios no corpo. A figura 18 mostra os níveis dos hormônios estrógeno e progesterona durante os ciclos, onde notamos que o nível dos hormônios em função do tempo é periódico.

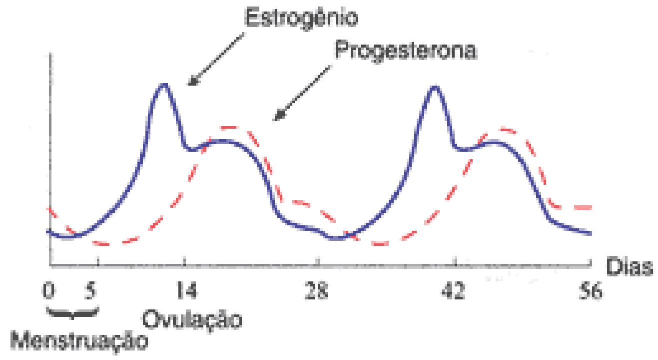


Fig. 18: Nível dos hormônios em função do tempo

4. O USO DO SOFTWARE SCILAB

Tendo em vista o ensino-aprendizagem de matemática, como algo que deve ser criativo e atrativo para os estudantes, de forma que os mesmos se interagem entre si e com o conteúdo, será proposto o scilab como ferramenta para o ensino das funções trigonométricas, devido ser gratuito e também proporcionar ao estudante uma melhor construção de seu conhecimento.

O scilab é um software científico para computação numérica fornecendo um poderoso ambiente computacional aberto para aplicações científicas e em engenharia. Desenvolvido desde 1990 pelos pesquisadores do INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) e do ENPC (École Nationale des Ponts et Chaussées), é agora mantido e desenvolvido pelo Consorcio Scilab desde sua criação em Maio de 2003 . Distribuído gratuitamente e em código aberto via Internet desde 1994, pelo site http://www.scilab.org, free software, e distribuído com o código fonte, open source software. Além da distribuição com o código fonte, existem, também, distribuições pré-compiladas do Scilab para vários sistemas operacionais, podendo ser usado no: Linux, Windows, Solaris e Unix.

O Scilab é Software livre para cálculo numérico e simulação de sistemas físicos, atualmente usado em diversos ambientes industriais e educacionais pelo mundo, nas áreas de Física, Sistemas complexos, Processamento de imagens, Controle e processamento de sinais, Automação industrial, Controle de processos, Computação gráfica, Matemática, Modelagem biológica, etc.

O Consórcio Scilab é mantido desde 2003 por diversas empresas com os objetivos de: organizar cooperação entre os desenvolvedores, obter recursos para manutenção da equipe e garantir suporte aos usuários.

As principais características desse ambiente de programação numérica extremamente flexível são:

- Ambiente poderoso para geração de gráficos bi e tridimensionais, inclusive com animações;
- Manipulações com matrizes são facilitadas por diversas funções implementadas nos toolboxes;
- Permite trabalhar com polinômios, funções de transferência, sistemas lineares e grafos;
- Define funções facilmente;
- Permite acesso a rotinas escritas em FORTRAN e C;

- Pode ser acessado por programas de computação simbólica, como o MuPad;
- Permite o desenvolvimento de toolboxes.

Além dos toolboxes desenvolvidos pelo grupo Scilab, estão disponíveis outras complementares, igualmente gratuitas, como o ANN (Artificial Neural Network), o FISLAB (Fuzzy Logic Inference) e o FRACLAB (Fractal, Multifractal and Wavelet Analisys).

Algumas funções do Scilab estão alocadas em toolboxes bem – definidas, dadas as suas especificidades. Temos como exemplo: Funções de Álgebra Linear: bibliotecas LINPACK, EISPACK, LAPACK e BLAS; Funções para solução de Equações Diferenciais: bibliotecas ODEPACK e SLATEC; Funções de Otimização: biblioteca MINPACK.

A janela de trabalho (Workspace) do Scilab. Na versão 5.3.0 se apresenta conforme formato visto na Fig. 19:

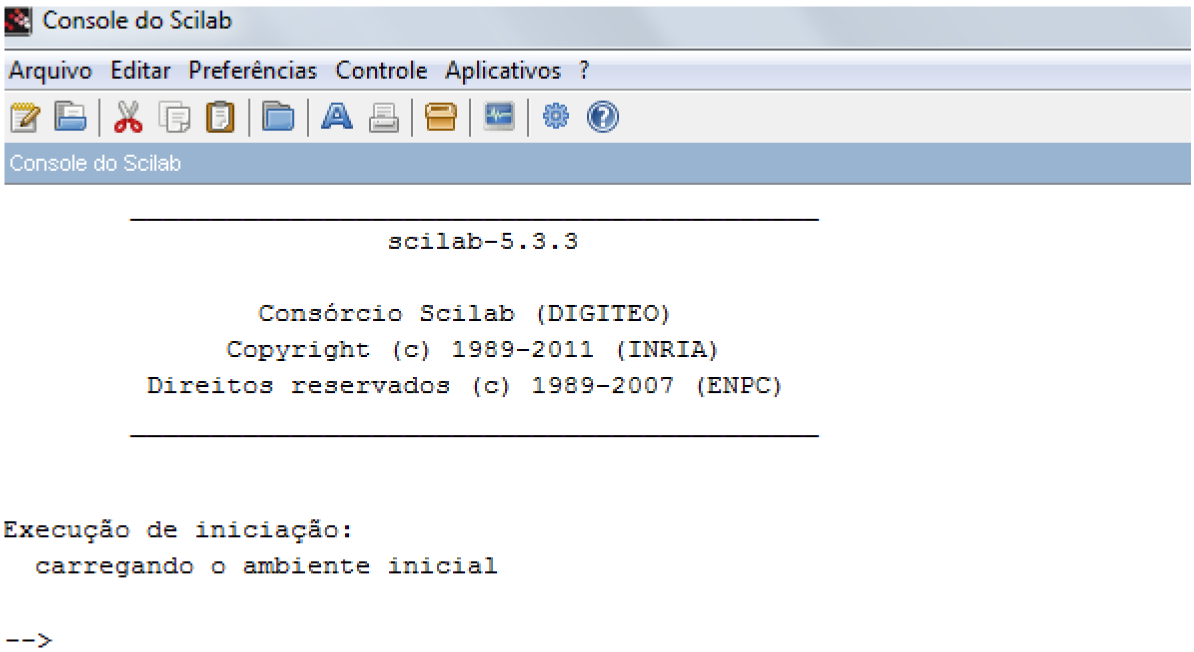


Fig. 19: Janela inicial do software computacional scilab, onde colocamos os comandos necessários para o desenvolvimento da função, ou de outras atividades e conteúdos desejados, tais como, matrizes, polinômios,...

4.1. Aplicação das funções trigonométricas com o auxílio do scilab

Esta aplicação, SOUZA, pág. 37, é sugerida como atividade para ser desenvolvida na aula, explorando os conceitos, exemplificando-os e posteriormente ser desenvolvido na sala de tecnologia com o auxílio do scilab.

4.1.1. Aplicação e atividade resolvida

No organismo humano ocorrem diversos fenômenos que se repetem periodicamente, chamados fenômenos cíclicos. Um exemplo é a respiração.

A respiração é um processo vital para os seres humanos. Por meio dela são realizadas trocas gasosas entre o indivíduo e o meio externo – captação de oxigênio e eliminação de gás carbônico - , imprescindíveis para o bom funcionamento do organismo. A entrada do ar nas vias respiratórias é denominada inspiração, e a saída, expiração.

Durante a inspiração, ocorre a contração do diafragma e dos músculos intercostais externos, o que acarreta um aumento no volume pulmonar e no tamanho da caixa torácica. Na expiração, o diafragma e os músculos intercostais externos relaxam; consequentemente há a diminuição do tamanho da caixa toráxica, e o volume pulmonar também diminui.

Enquanto bebê, o ser humano apresenta respiração lenta e profunda, padrão que deveria ser adotado ao longo de toda a vida. Contudo, com o passar dos anos, começa a incorporar movimentos respiratórios mais acelerados e, em alguns casos, em vez de usar o diafragma, utiliza mais o tórax durante a respiração, tornando-a curta e ofegante, o que pode resultar até mesmo em falta de ar ou cansaço físico.

A cada respiração normal de um adulto do sexo masculino, aproximadamente 0,5 L de ar é inspirado, e esta mesma quantidade é expirada. No entanto, em uma inspiração ou expiração muito profunda, essa quantidade pode aumentar.

Suponha que o volume de ar nos pulmões de um indivíduo adulto saudável, do sexo masculino, em repouso, a partir de um instante inicial t = 0, possa ser representado aproximadamente pela função $f(t) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$, sendo t o tempo em segundos e *f(t)* o volume de ar nos pulmões, em litros, após *t* segundos do instante inicial.

a) Determine o volume de ar nos pulmões deste indivíduo:

No instante inicial t=0

$$f(t) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}.0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(0) = 2{,}65 - 0{,}25.1$$

$$f(0) = 2{,}65 - 0{,}25$$

$$f(0) = 2{,}4$$

Após 1,25 segundos

$$f(t) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(1{,}25) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}.1{,}25 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(1{,}25) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2{,}5\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(1{,}25) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(1{,}25) = 2{,}65 - 0{,}25.sen(\pi)$$

$$f(1{,}25) = 2{,}65 - 0{,}25.0$$

$$f(1{,}25) = 2{,}65 - 0$$

$$f(1{,}25) = 2{,}65$$

Após 2,5 segundos

$$f(t) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(2{,}5) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}.2{,}5 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(2{,}5) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{5\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(2{,}5) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(2{,}5) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f(2{,}5) = 2{,}65 - 0{,}25.(-1)$$

$$f(2{,}5) = 2{,}65 + 0{,}25$$

$$f(2{,}5) = 2{,}9$$

Após 3,75 segundos

$$f(t) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(3,75) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{2\pi}{5}.3,75 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(3,75) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{7,5\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(3,75) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(3,75) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{4\pi}{2}\right)$$

$$f(3,75) = 2,65 - 0,25.sen(2\pi)$$

$$f(3,75) = 2,65 - 0,25.(0)$$

$$f(3,75) = 2,65 - 0$$

$$f(3,75) = 2,65$$

Após 5 segundos

$$f(t) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(5) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{2\pi}{5}.5 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(5) = 2,65 - 0,25.sen\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(5) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

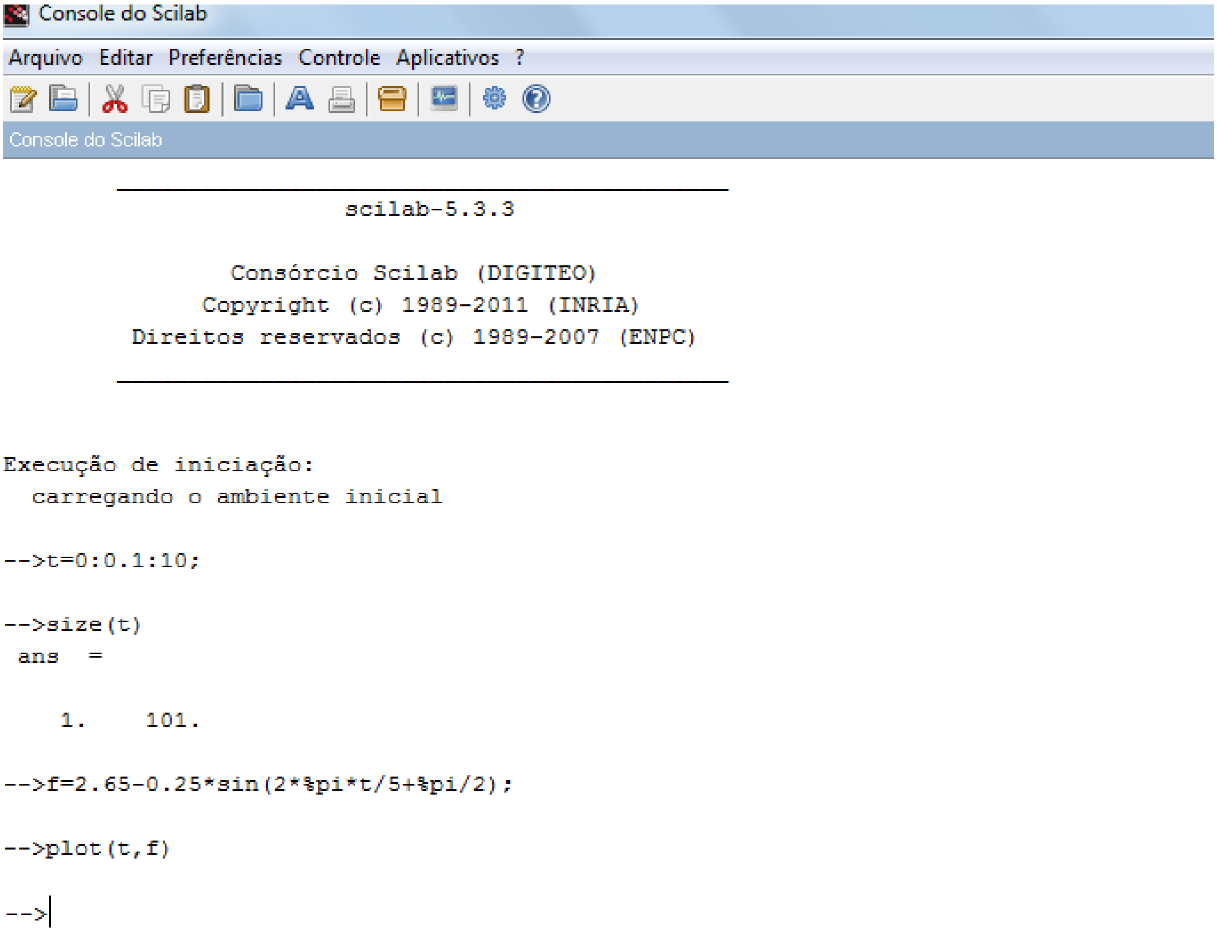
$$f(5) = 2,65 - 0,25.sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(5) = 2,65 - 0,25.(1)$$

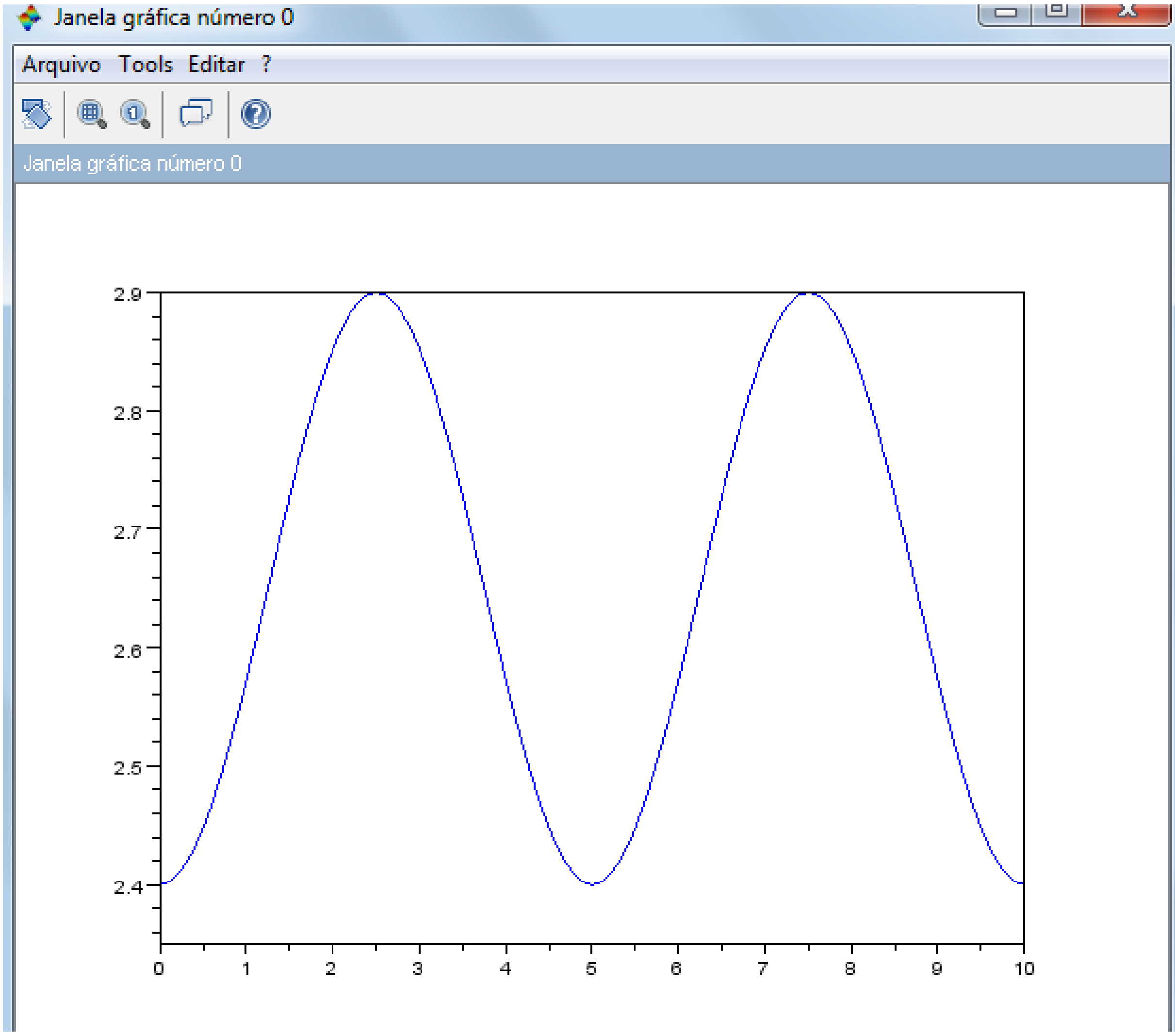
$$f(5) = 2,65 - 0,25$$

$$f(5) = 2,4$$

b) Esboce o gráfico que representa a função f para $0 \leq t \leq 10$


Console do Scilab
Arquivo Editar Preferências Controle Aplicativos ?
Console do Scilab
scilab-5.3.3
Consórcio Scilab (DIGITEO)
Copyright (c) 1989-2011 (INRIA)
Direitos reservados (c) 1989-2007 (ENPC)
Execução de iniciação:
carregando o ambiente inicial
-->t=0:0.1:10;
-->size(t)
ans =
1. 101.
-->f=2.65-0.25*sin(2*%pi*t/5+%pi/2);
-->plot(t,f)
-->

(a)



(b)

Fig. 20: (a) Janela de comando do software computacional scilab, onde colocamos a função que queremos a plotagem do gráfico $f(t) = 2{,}65 - 0{,}25.sen\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$, (b) e o seu respectivo gráfico plotado no intervalo de 0 a 10.

c) Com o auxílio do gráfico construído no item b, determine em quais instantes ocorreram a inspiração e a expiração.

Inspiração: de 0 a 2,5 segundos e de 5 a 7,5 segundos

Expiração: de 2,5 a 5 segundos e de 7,5 a 10 segundos

d) Após a expiração, existe um volume de ar que permanece nos pulmões. No caso do indivíduo em questão, qual é esse volume?

Esse volume é 2,4 L.

e) Cite um procedimento incorreto realizado durante a respiração que pode torná-la mais curta e ofegante. Que consequências esse tipo de respiração pode causar a um indivíduo?

Utilizar mais o tórax do que o diafragma durante a respiração, o que pode resultar em falta de ar ou cansaço físico.

4.2. Simulação de funções com auxílio do scilab

O scilab é um programa que tem vantagens ao construir gráficos de funções, principalmente quando tem π, pois neste programa usamos o seu valor e não uma aproximação, e quando a mesma é complexa tanto para fazer o gráfico manualmente quanto pata fazer a plotagem em programas ou software mais simples, como o utilizado na resolução de atividades mostrados no capítulo anterior.

Este programa oferece uma maneira de definição de função com escrita perfeitamente matemática, proporcionando uma fácil definição e também mostra o gráfico plotado com todo o período e toda a imagem do mesmo, não precisando fazer movimentações na janela para poder fazer a visualização completa para análise.

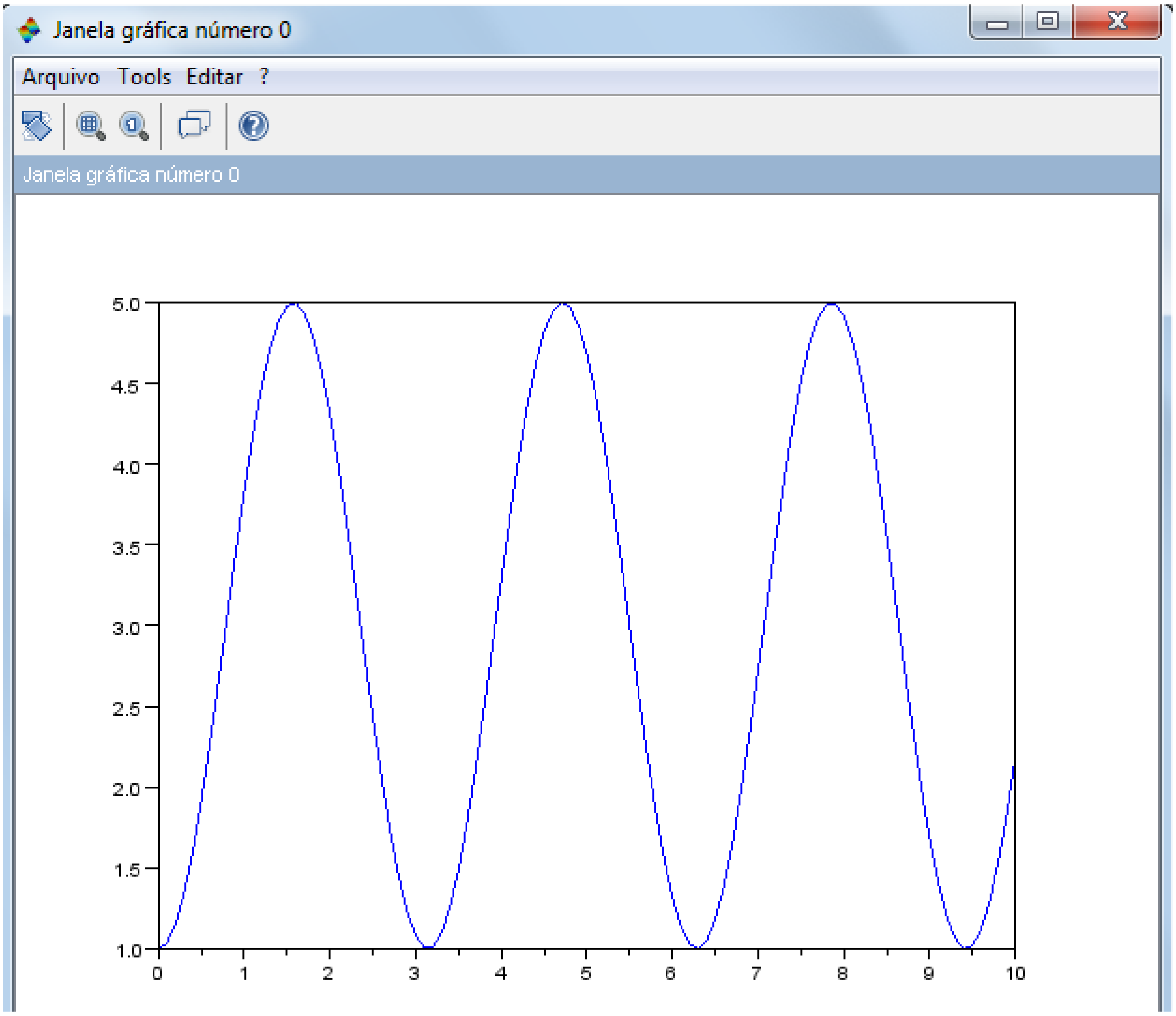
Temos como exemplo a função da atividade realizada pelos estudantes que é mais facilmente de análise no scilab do que no gráfico plotado no winplot, como visto na atividade 8, fig. 31, esta devido ter um período grande que não cabe completamente na janela do winplot.

Vamos observar as plotagens a seguir, são gráficos de funções complexas para fazer manualmente e também em alguns programas é mais difícil a definição das mesmas, porém no scilab é facilmente definida:

Console do Scilab

```
-->x=0:0.1:10;

-->size(x)
 ans  =

    1.    101.

-->f=3+2*cos(2*x-%pi);

-->plot(x,f)

-->
```

(a)

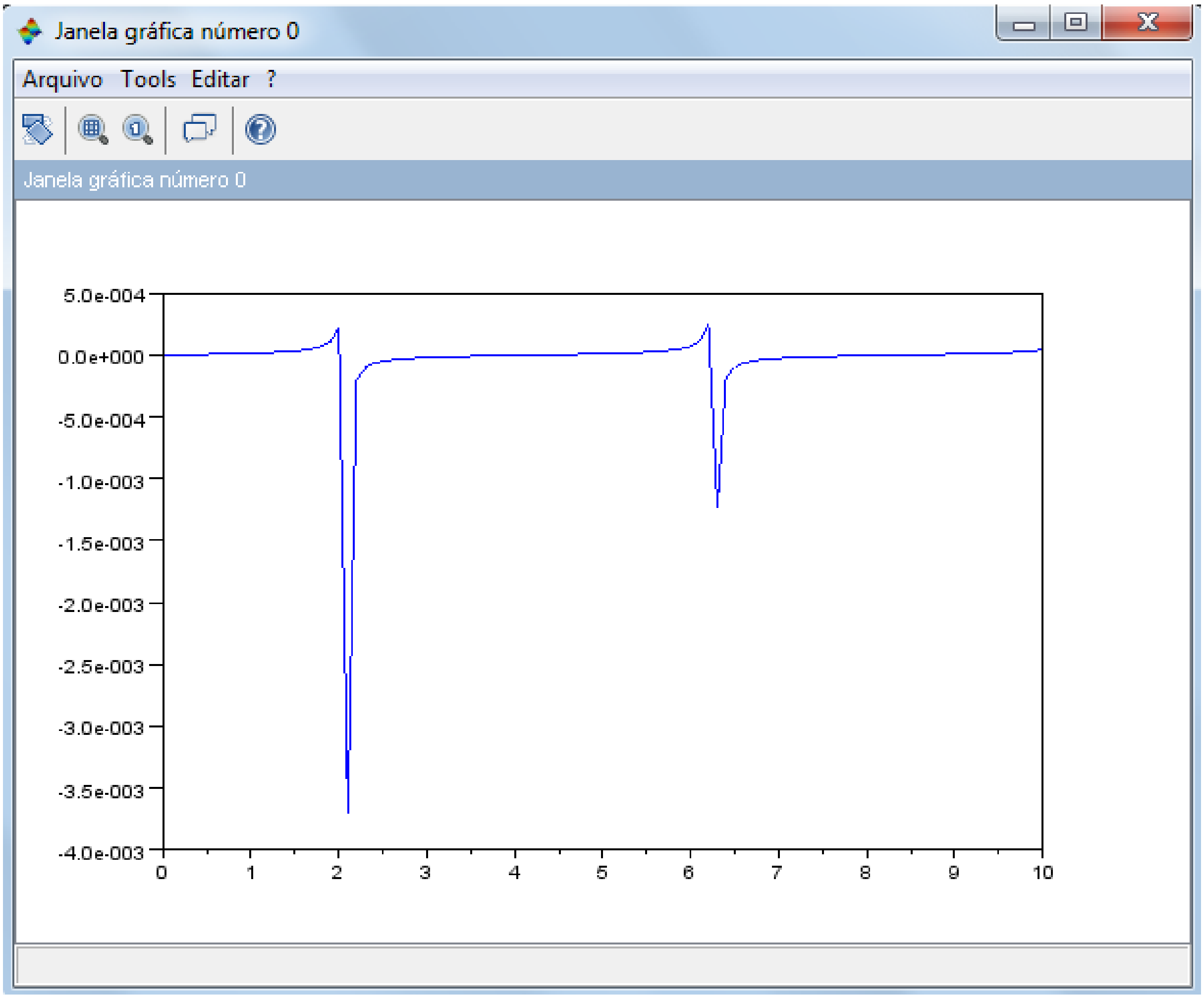


(b)

Fig. 21: (a) A janela de comando do scilab com a função definida sem precisar aproximar o valor de π para 3, usamos ele com casas decimais e a facilidade para sua definição, não esquecendo que sempre para utilizar π, deve-se colocar %pi para sua representação; (b) o gráfico da função

```
Console do Scilab

-->x=0:0.1:10;

-->size (x)
 ans  =

    1.    101.

-->f=1/tan (3*x/4);

-->plot(x,f)

-->
```

(a)



(b)

Fig. 22: (a) A janela de comando com a função definida e (b) gráfico da mesma, onde observamos que é dificílima essa construção manualmente, é um gráfico de grande complexidade para construção.

5. ATIVIDADES REALIZADAS ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM O AUXÍLIO DO WINPLOT

As atividades foram realizadas na Escola Padre João Umberto Sachet, sistema Anglo de Ensino, em Nova Andradina com os estudantes do 8º Ano do Ensino Fundamental. O conteúdo funções trigonométricas é desenvolvido no Ensino Médio, mas foi realizado nesta turma devido os estudantes já terem concluído o conteúdo da apostila e ter estudado o Teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente, e os círculos de raio unitário.

Primeiramente foi apresentado pela professora em aula expositiva com utilização do power point como recurso auxiliar, um pouco da história da trigonometria, quando surgiu, onde é utilizada, e após foi exposto o conteúdo de forma simplificada, para que os estudantes pudessem realizar apenas as atividades no winplot desenvolvendo os conceitos de período, imagem, mínimo, máximo das funções.

Posteriormente foi explicado pela professora como se usa o programa winplot, a janela de trabalho do programa e quais ferramentas iriam usar para resolver tais atividades da lista. A professora juntamente com os estudantes fez a construção de gráficos de funções e também construíram em mesma janela funções mudando alguns números para observar o que acontece com a imagem e o período de cada uma delas para melhor compreensão do conteúdo. Esse programa oferece algumas opções de animação, como por exemplo, mudar a cor do gráfico e também a espessura e os estudantes se entusiasmaram e gostaram muito de explorar esse recurso de animações, deixando a aula mais interessante.

A resolução primeiramente foi proposta sem o auxílio dos recursos computacionais, e os estudantes tiveram algumas dificuldades, principalmente na construção dos gráficos e na falta de agilidade para construí-los, a fim de observá-los para solucionar os problemas.

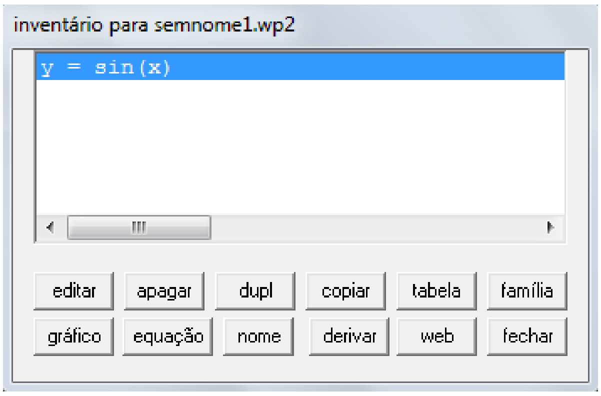
Com o auxílio do software, o winplot, eles tiveram maior interesse na aula, participaram, se envolveram e empenharam na resolução da lista de atividades discutindo os erros uns com os outros, que muitas vezes era na hora de digitar a função, e na hora de analisar o gráfico plotado percebiam que não estava correto.

Os estudantes observavam quando que o período ou a imagem das funções se alteram com relação as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Apesar dos estudantes não terem todos os pré-requisitos necessários devido esse conteúdo não ser indicado para este ano escolar, ao resolverem as atividades, observei que tiveram grande êxito na resolução da mesma e também compreenderam o conceito de forma rápida. Todos os questionamentos feitos foram respondidos pelos estudantes demonstrando entendimento sobre o conteúdo. Percebi que a aula foi bem produtiva.

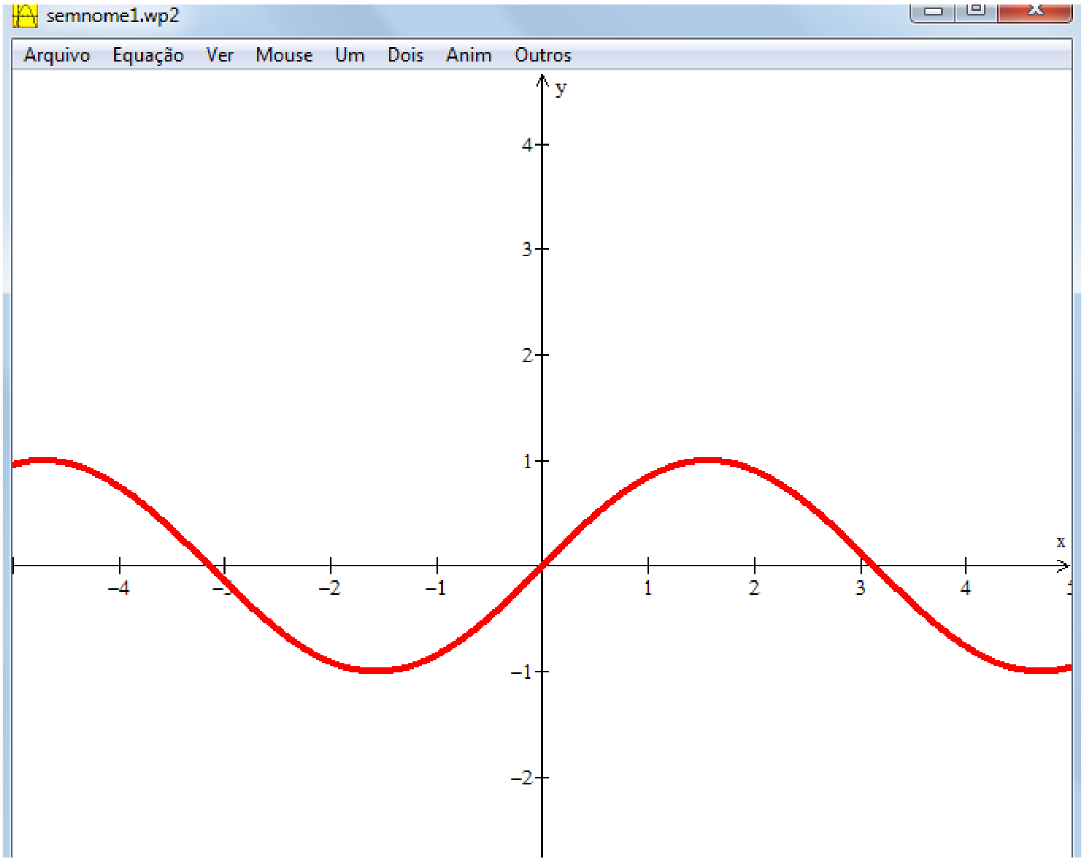
E ao concluir as atividades, os estudantes escreveram o portfólio da aula, relatando que a mesma despertou o interesse, propiciando a ampliação dos seus conhecimentos, mostrando suas estratégias e validações, ultrapassando seus obstáculos e tornando rica a investigação de resolução de problemas, contribuindo para evoluírem as suas compreensões matemáticas.

Atividade 1 - (Unifor-CE) Para x, a função definida por f(x) = sen x tem:

a) Um valor máximo para x = 0
b) Um valor mínimo para x = π
c) Somente valores positivos se $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$
d) Valores negativos se $0 < x < \frac{\pi}{2}$
e) Três raízes



(a)



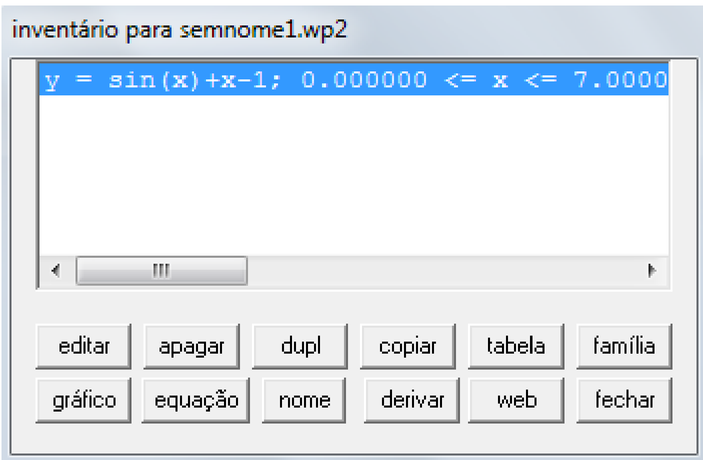
(b)

Fig. 23: (a) janela de entrada da função sen (x); (b) gráfico da função sen (x)

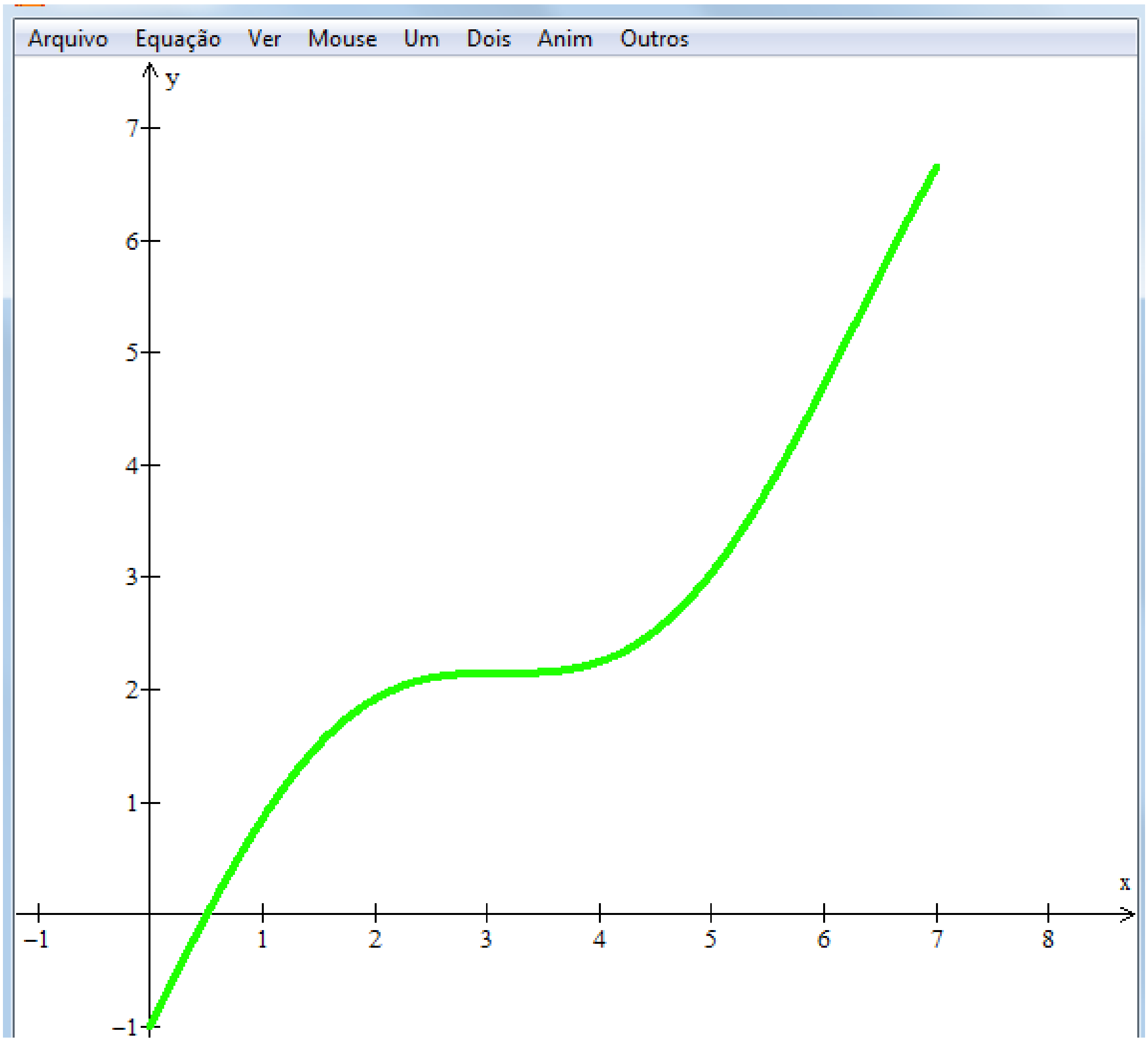
Nesta atividade os estudantes observaram que a função sen (x) tem período 2π e a mesma possui três raízes, tendo a alternativa e sendo a correta.

Atividade 2 – No intervalo $[0,2\pi]$, o número de soluções da equação sen x = 1 – x é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e)4



(a)



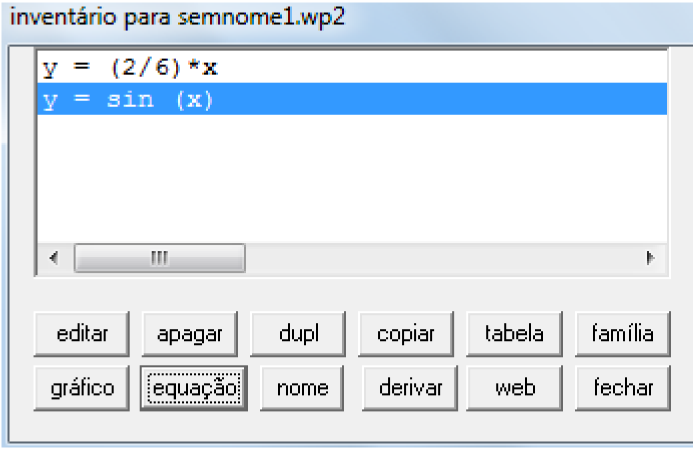
(b)

Fig. 24: (a) janela de entrada do wimplot com a função sen (x) + x - 1; (b) gráfico da respectiva função

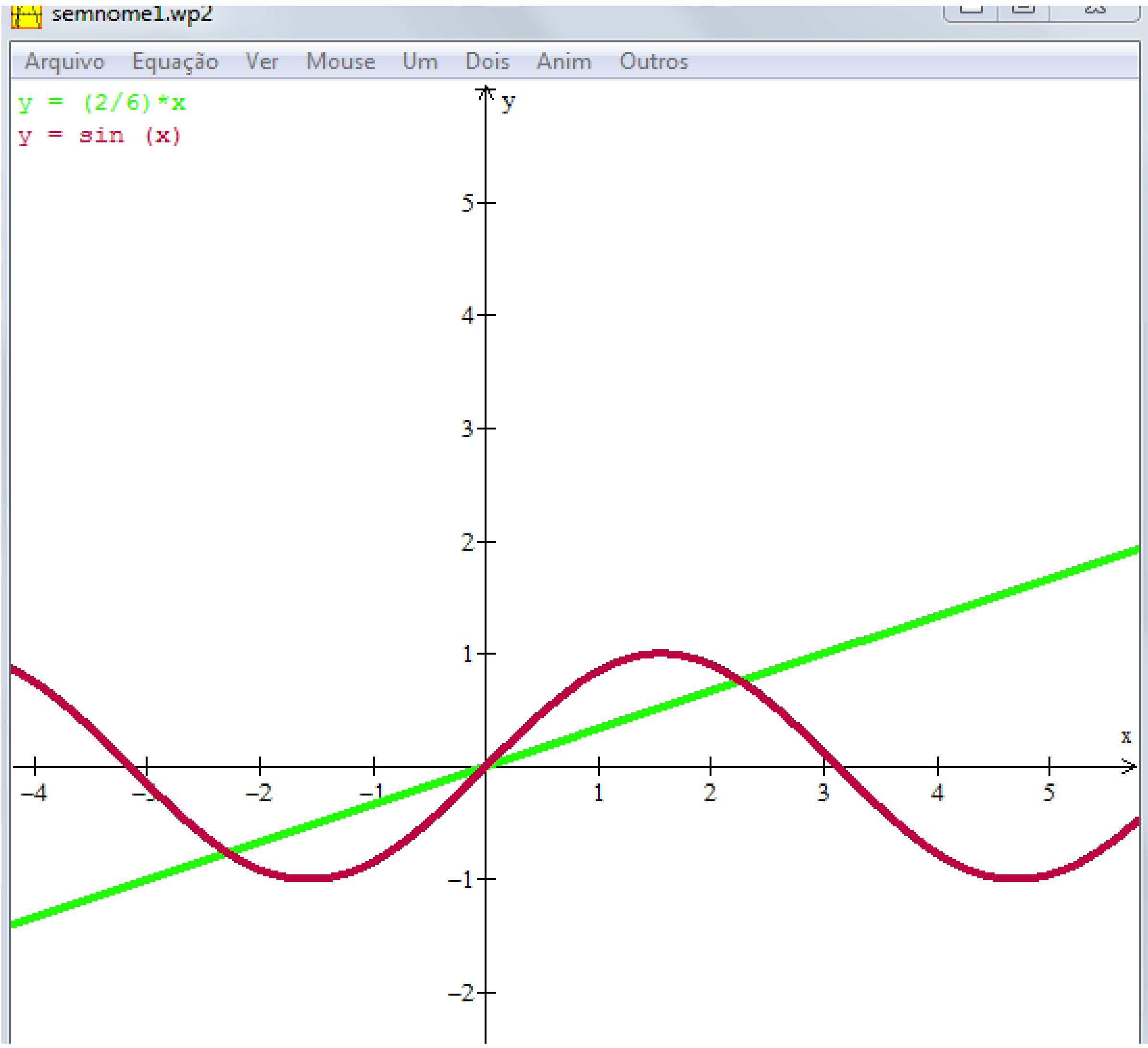
Esta atividade possui como solução o item b, pois a mesma só possui uma solução.

Atividade 3 - – (UNIFOR-CE) Os gráficos das funções f e g, de R em R, definida por $f(x) = \frac{2}{\pi}x$ e $g(x) = senx$:

a) Não tem pontos em comum
b) Interceptam-se em um único ponto
c) Interceptam-se no máximo em dois pontos
d) Tem infinitos pontos comuns
e) Tem somente três pontos comuns



(a)

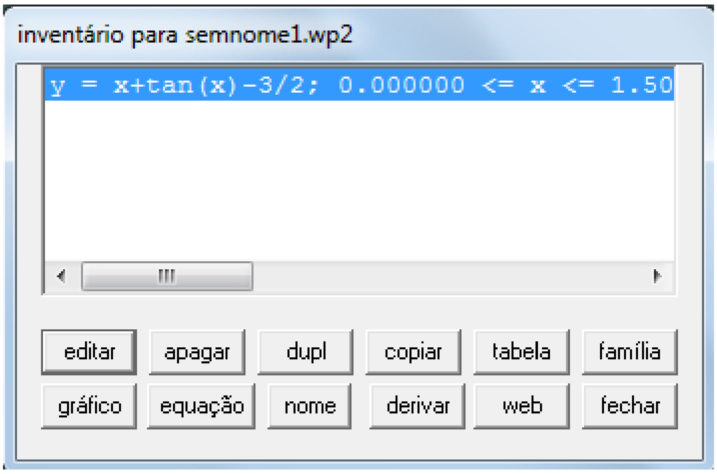


(b)

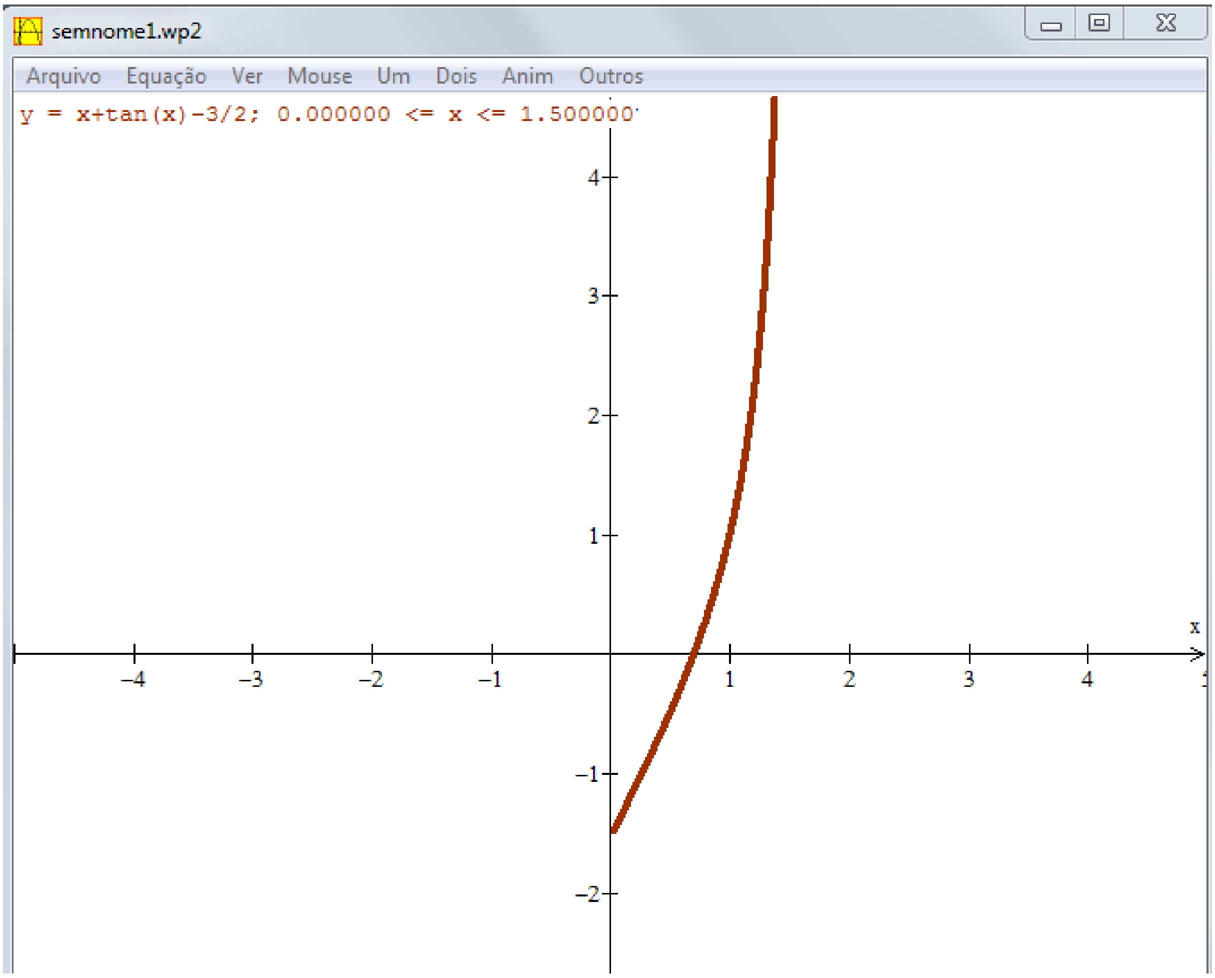
Fig. 25: (a) janela de entrada do winplot com as funções; (b) e gráficos das respectivas funções

O item e é o correto, pois as duas funções tem somente três pontos comuns, interceptam em três pontos.

Atividade 4 – No intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ quantas são as soluções da equação x + tg x - $\frac{\pi}{2} = 0$



(a)



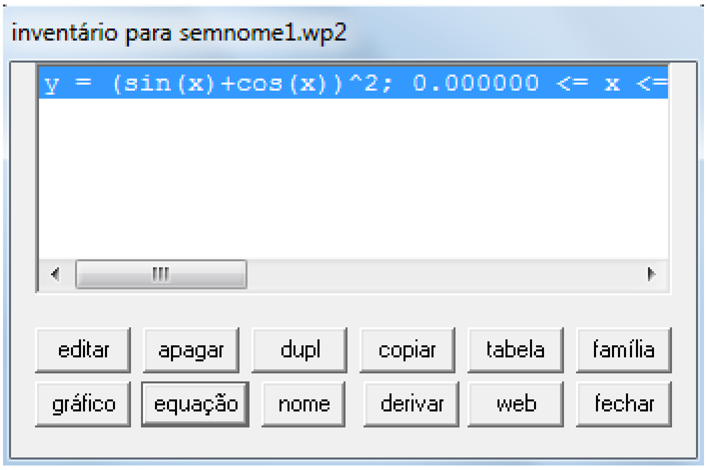
(b)

Fig. 26: (a) Janela de comando da função com valor de π aproximado para 3; (b) o gráfico da respectiva função em um determinado intervalo.

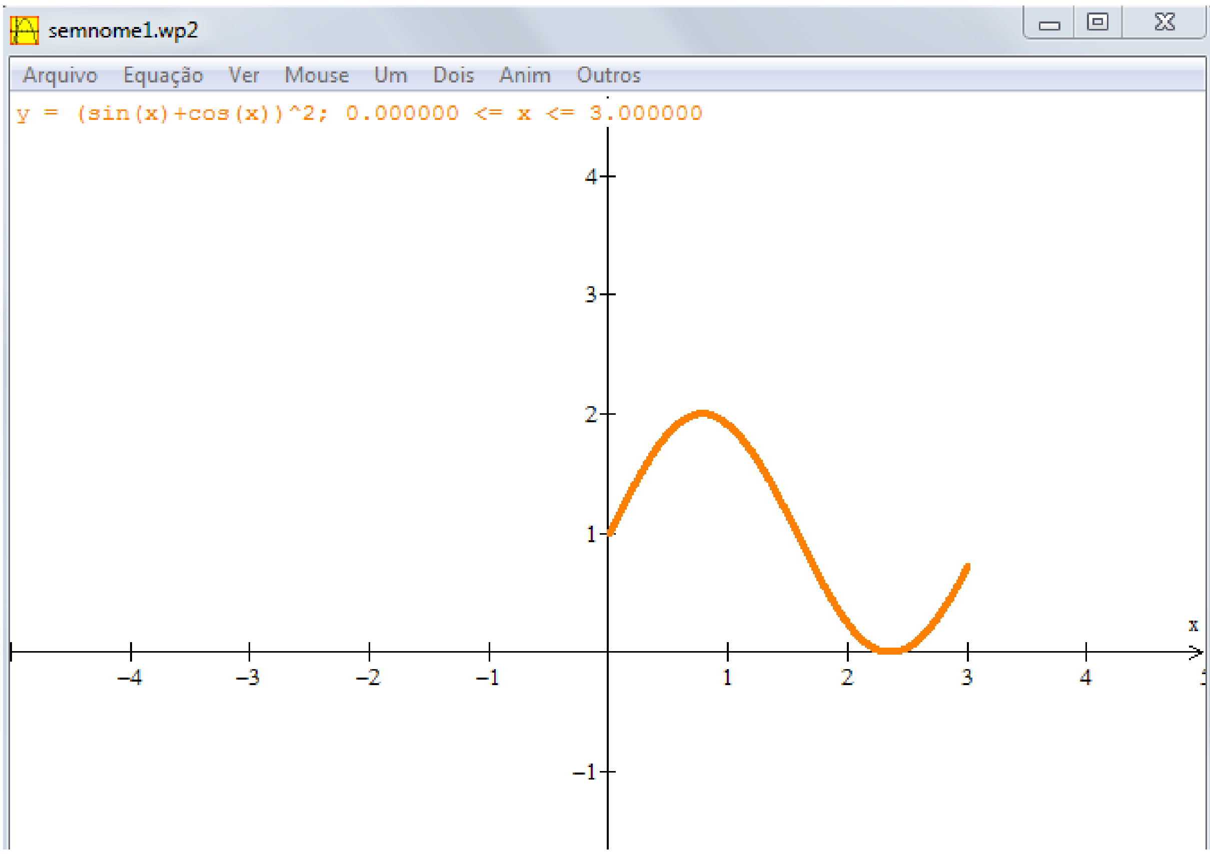
As estudantes concluíram que tem apenas uma solução.

Atividade 5 - (UFU-MG) Se f(x) = sen x + cos x, $x \in \mathrm{R}$, então os valores mínimo e máximo que a função $(f(x))^2$ assume no intervalo $[0, \pi]$ são respectivamente:

a) 1 e 1
b) 1 e 2
c) 0 e 2
d) 0 e 1



(a)



(b)

Fig. 27: (a) Comando da função em um determinado intervalo, com o valor de π aproximado para 3; (b) plotagem do gráfico da função.

O item correto é o item c, onde temos o ponto mínimo 0 e o ponto máximo 2 para a função no intervalo de 0 a π.

Atividade 6 – O período da função definida por $y = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}$ é:

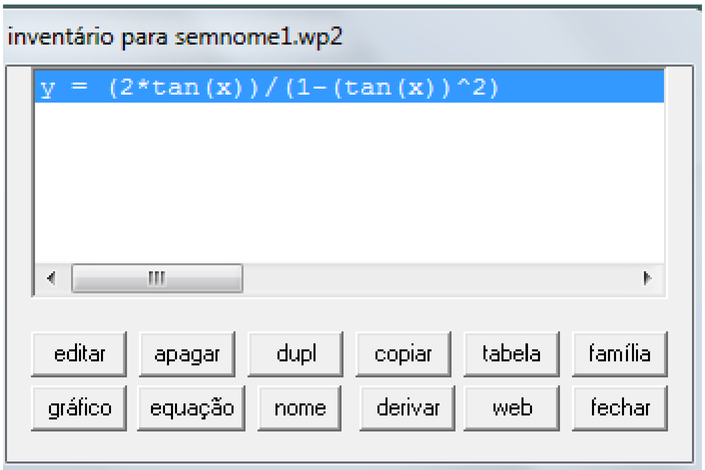
a) 2π

b) π

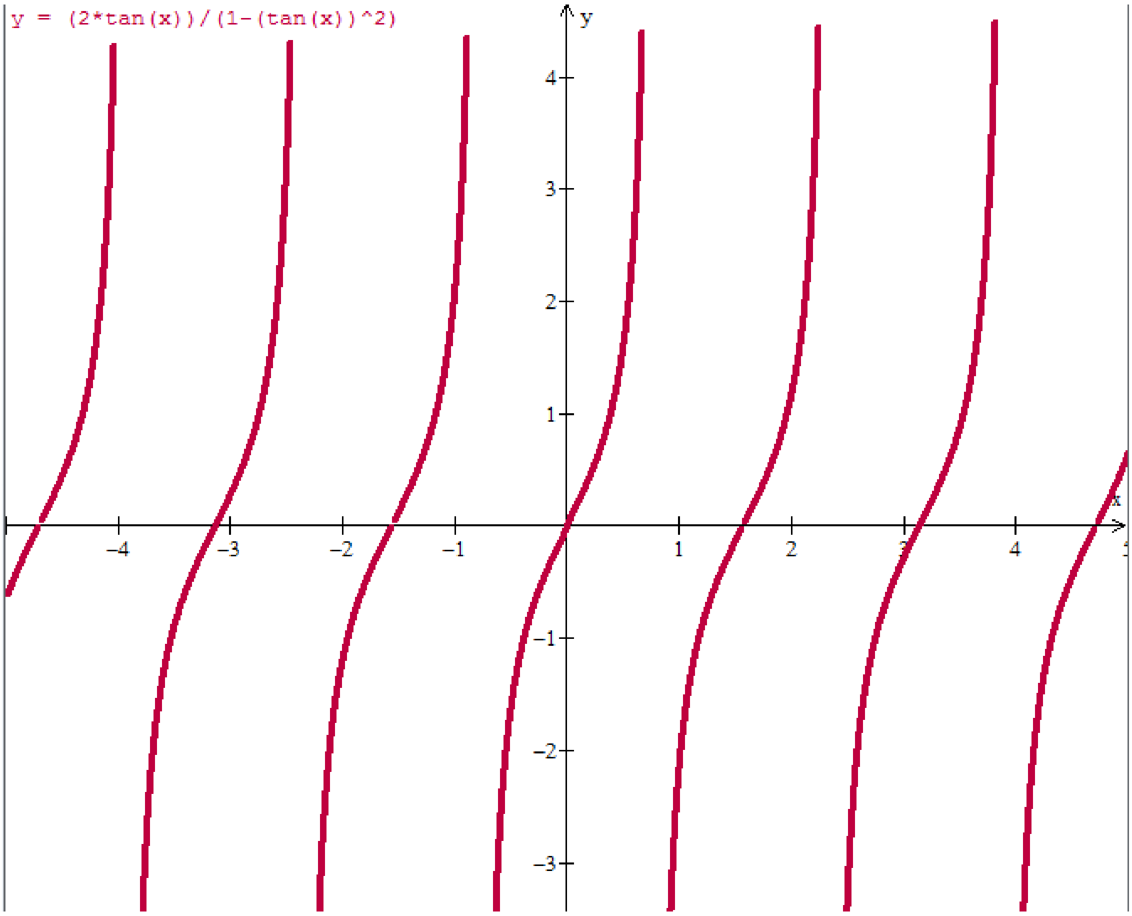
c) $\dfrac{\pi}{2}$

d) $\dfrac{\pi}{4}$

e) $\dfrac{\pi}{8}$



(a)



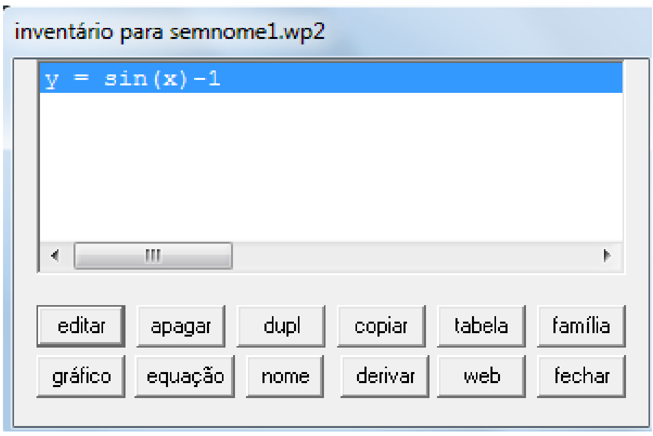
(b)

Fig. 28: (a) Janela de comando da função e (b) o gráfico da mesma

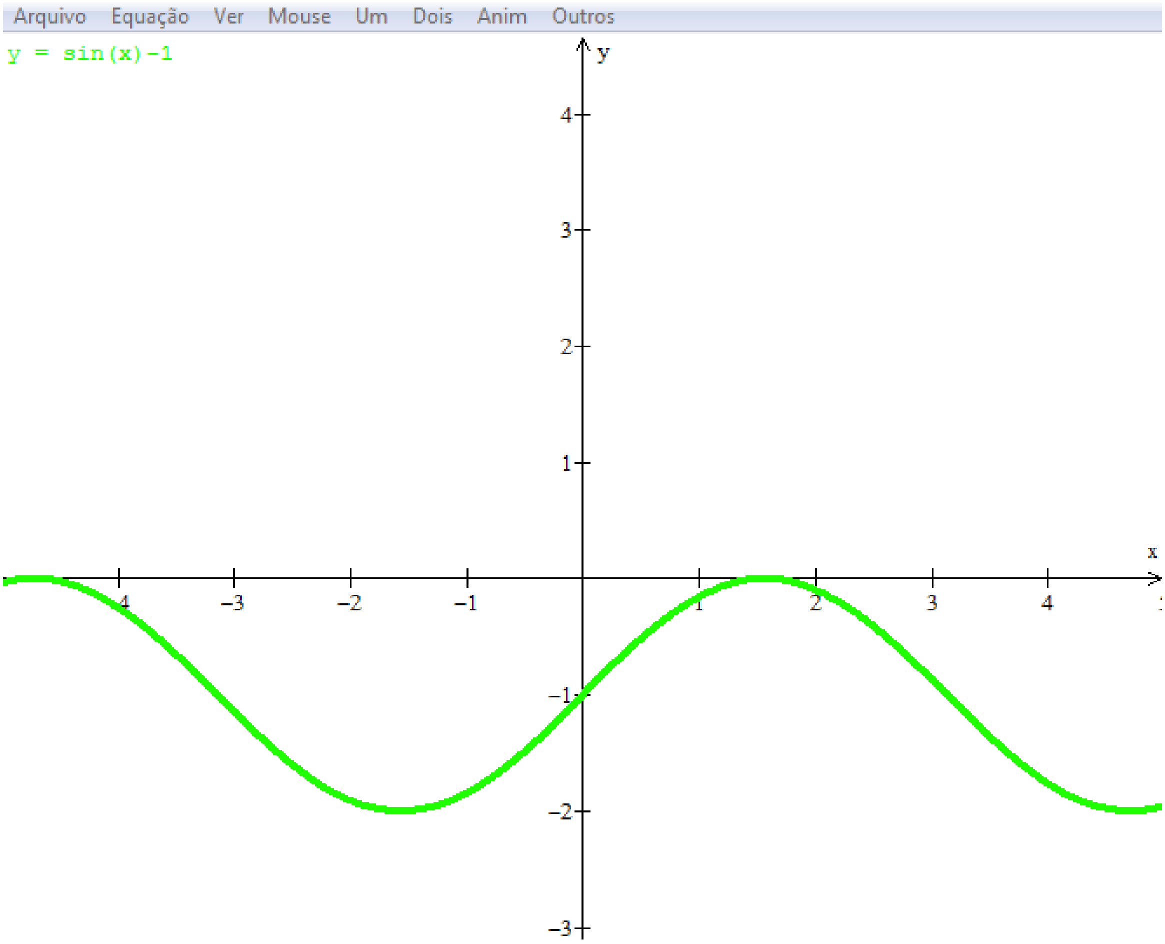
Observa-se que a resposta correta é a letra c, ou seja, $\frac{\pi}{2}$.

Atividade 7 - (PUC-RS) O conjunto imagem da função f definida por $f(x) = sen(x) + h$ é $[-2{,}0]$. O valor de h é:

a) π b) -2 c) -1 d) 0 e) 1



(a)



(b)

Fig. 29: (a) Janela de comando com a função inserida para encontrar o valor de h e (b) a plotagem do gráfico onde foi verificado o valor de h para a função ter imagem de [-2,0]

As estudantes já tinham uma noção de como observar a imagem de função, tendo em vista que a função sen(x) tem imagem [-1,1], para ter a imagem [-2,0] basta subtrair 1 do mínimo e do máximo desta imagem, tendo [-1**-1**, 1**-1**] = [-2,0], isso facilitou para descobrirem o valor de *h* nesta função. Uma das estudantes foi fazendo por tentativas, foi construindo os gráficos, colocando os diferentes valores de *h* sugeridos nas alternativas. Todos chegaram a conclusão que a alternativa correta é a letra c.

Atividade 8 - (UFES) O período e a imagem da função $f(x) = 5 - 3\cos\left(\dfrac{x-2}{\pi}\right)$, $x \in \mathrm{R}$ são respectivamente:

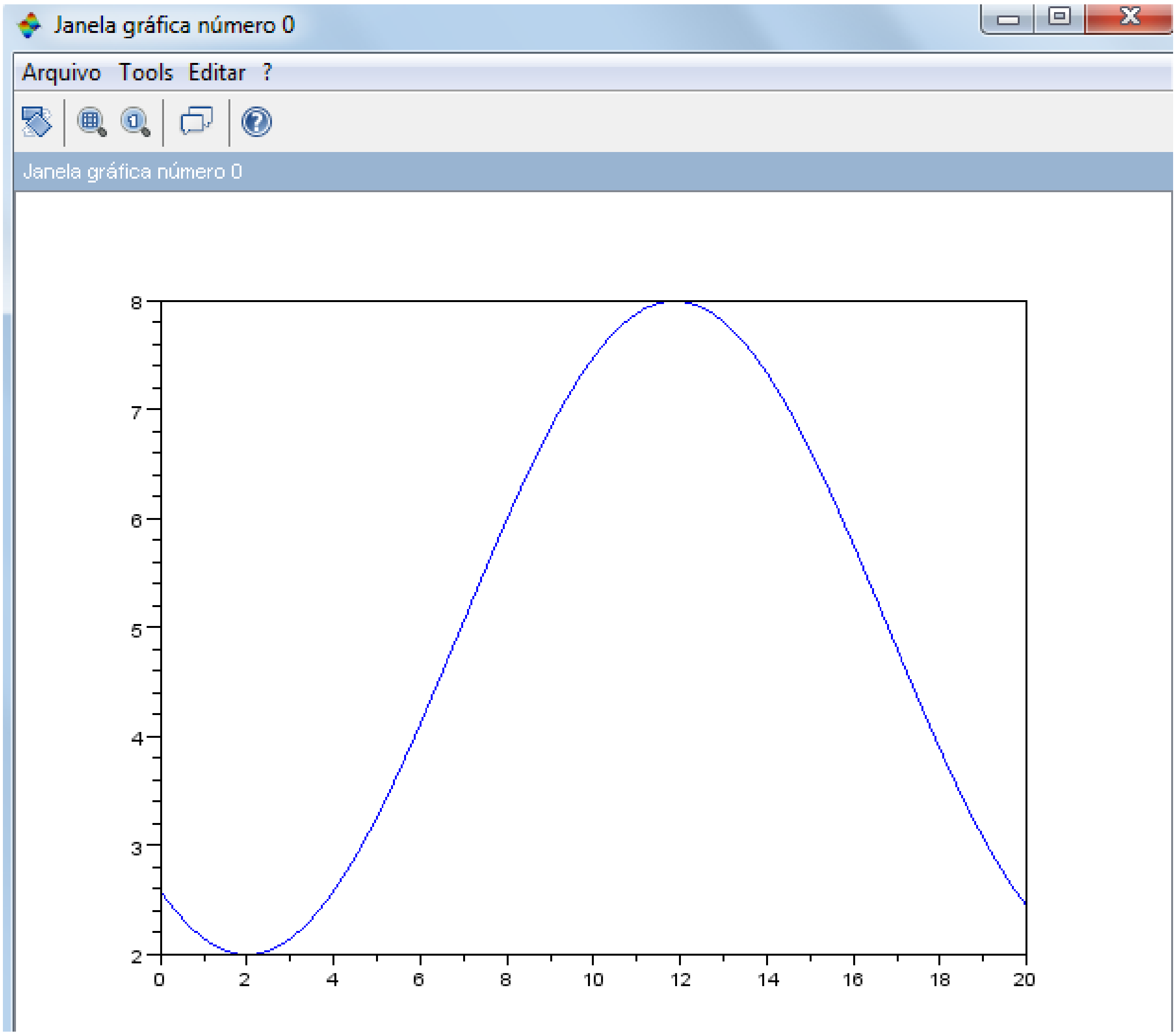
a) 2π e [-1,1]
b) 2π e [2,8]
c) $2\pi^2$ e [2,8]
d) 2π e [-3,3]

e) $2\pi^2$ e [-3,3]

Os estudantes resolveram a atividade e obtiveram como solução a letra c, mesmo não tendo uma boa plotagem deste gráfico no winplot, pois para fazer uma análise tem que ser feita uma movimentação dele tanto para direita quanto para esquerda, devido ter um grande período, desta forma é melhor fazer a plotagem no scilab como plotado a seguir.

```
                    scilab-5.3.3

             Consórcio Scilab (DIGITEO)
           Copyright (c) 1989-2011 (INRIA)
      Direitos reservados (c) 1989-2007 (ENPC)
     ___________________________________________


Execução de iniciação:
  carregando o ambiente inicial

-->x=0:0.1:20;

-->size(x)
 ans  =

    1.    201.

-->f=5-3*cos((x-2)/%pi);

-->plot(x,f)

-->
```

(a)



(b)

Fig. 30: (a)Janela de comando do scilab, com as entradas de dados necessários para graficar a função e (b) o gráfico da respectiva função

Atividade 9 - (UPE) f é a função real de variável real definida por $f(x) = 3 + 2\cos(3x)$.

Analise as afirmativas:

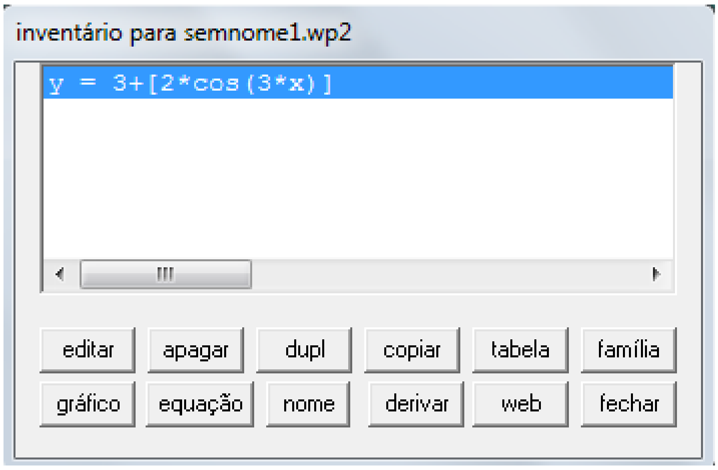
( ) A imagem de f é {-3,3}

( ) O período de f é igual a $\frac{2\pi}{3}$

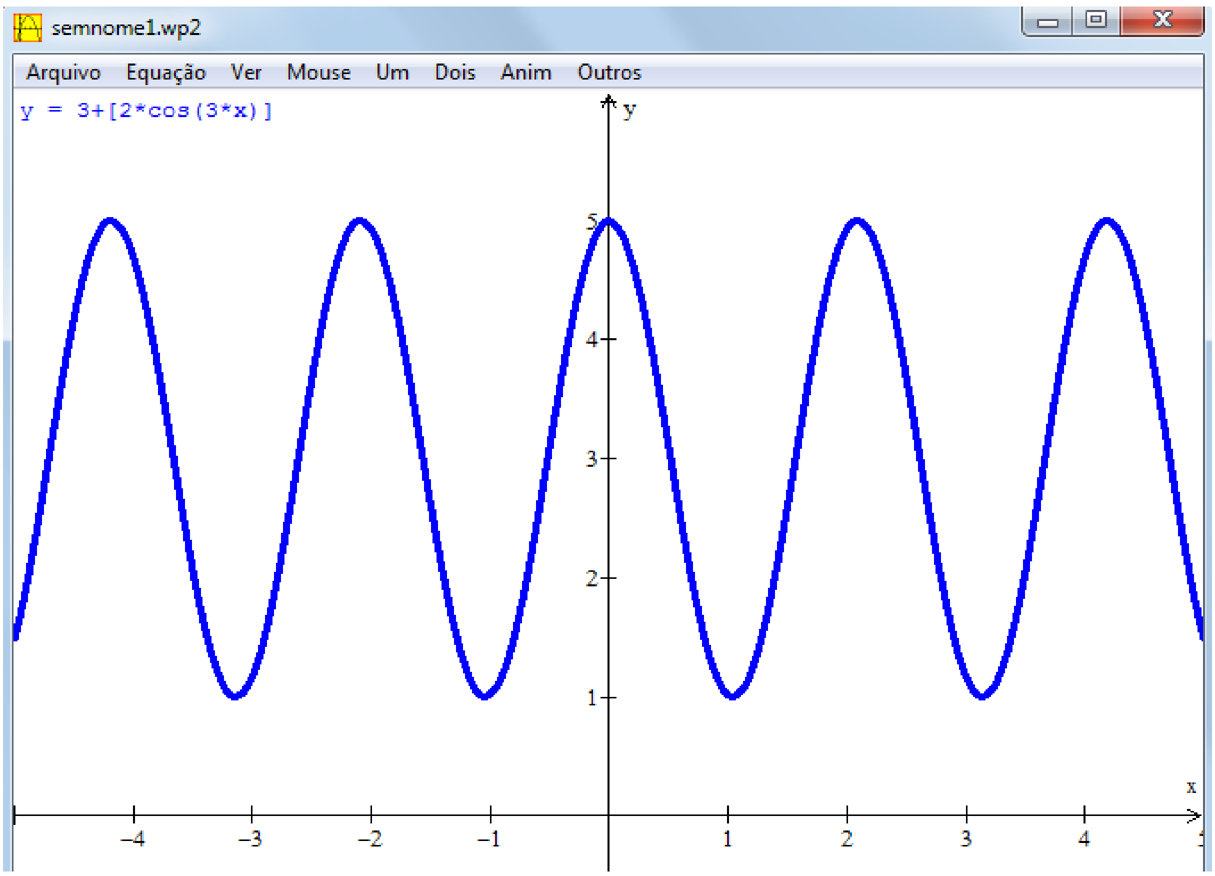
( ) No intervalo]0,2p[, a equação f(x) = 0 apresenta três soluções

( ) f (x) > 0 para todo x real

( ) f(x) < 0 se x pertence ao segundo e ao terceiro quadrantes



(a)



(b)

Fig. 31: (a) janela de comando do winplot com a função e (b) seu respectivo gráfico

A solução correta é: F, V, F, V, F, pois:

a imagem de f é {1,5} e não de {-3,3} (falsa);

o período de f é igual a $\frac{2\pi}{3}$, como observado no gráfico (verdadeira);

no intervalo]0,2p[, a equação f(x) = 0 não apresenta solução como observado no gráfico e não apresenta três soluções (falsa);

f (x) > 0 para todo x real (verdadeira);

f (x) > 0 para todo valor de x e não f(x) < 0 se x pertence ao segundo e ao terceiro quadrantes (falsa)

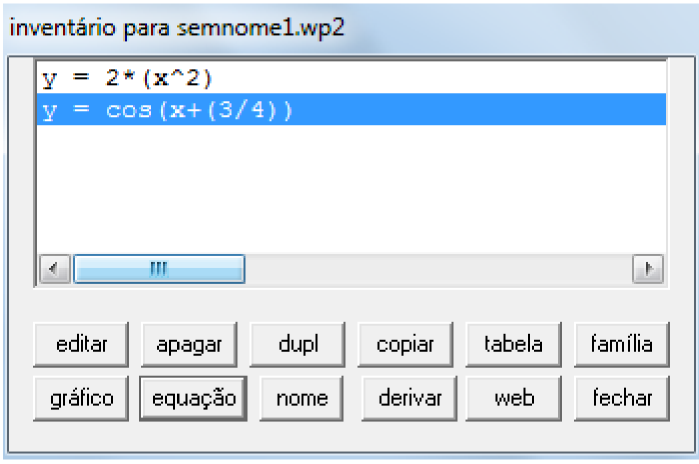
Atividade 10 - (Inatel-MG) Dadas as curvas $y = 2x^2$ e $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, assinale, dentre as afirmações a seguir, a verdadeira.

a) Elas não se interceptam.

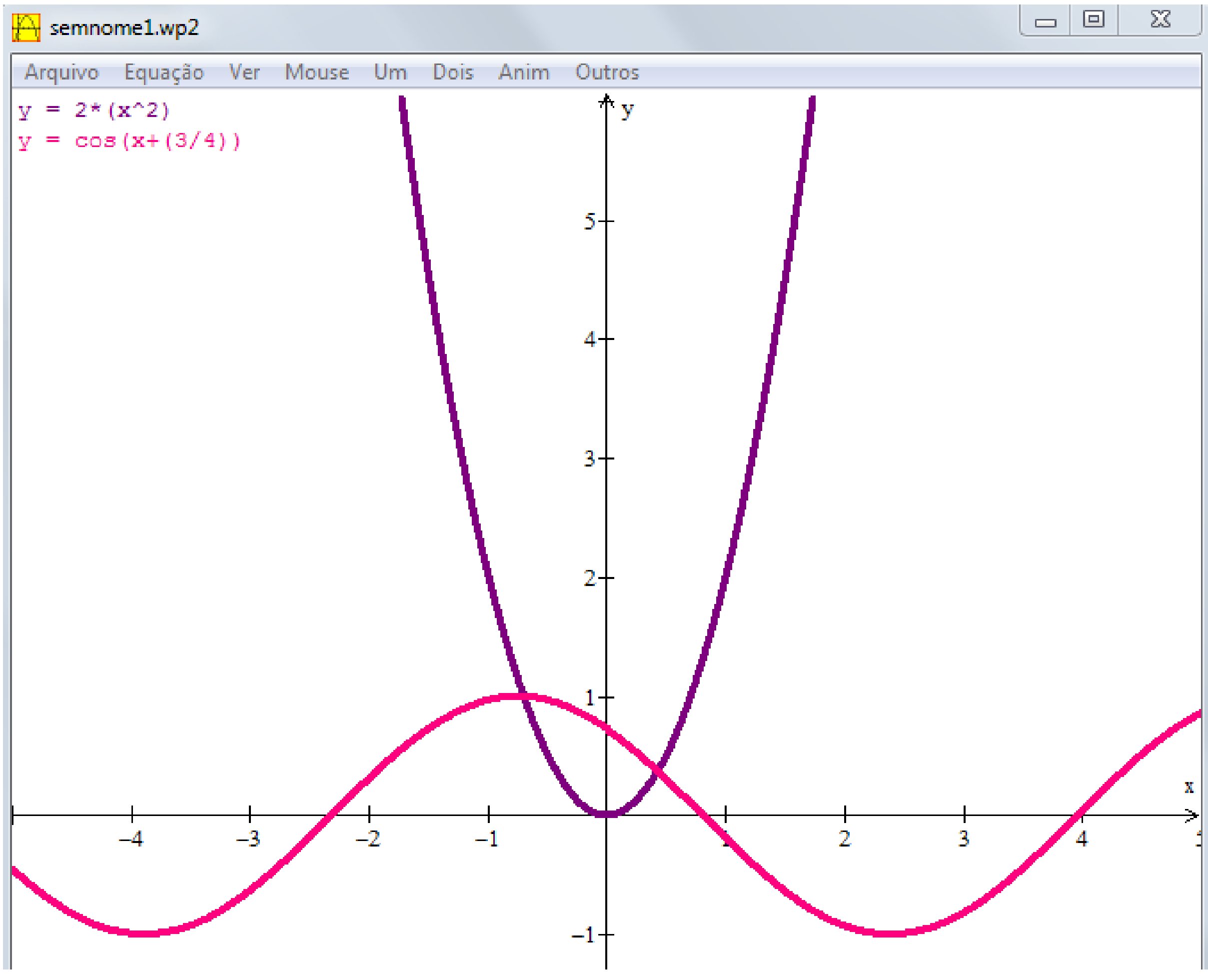
b) Elas se interceptam numa infinidade de pontos

c) Elas se interceptam em dois pontos

d) Elas se interceptam em um único ponto



(a)



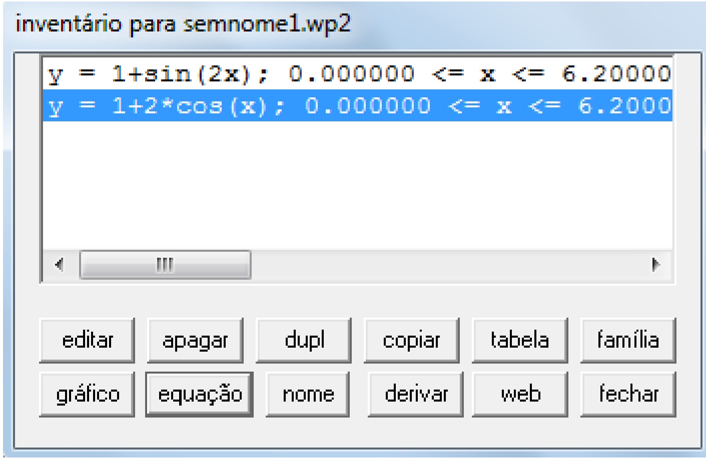
(b)

Fig. 32: (a) Janela de comando com as duas funções e (b) o gráfico das duas funções.

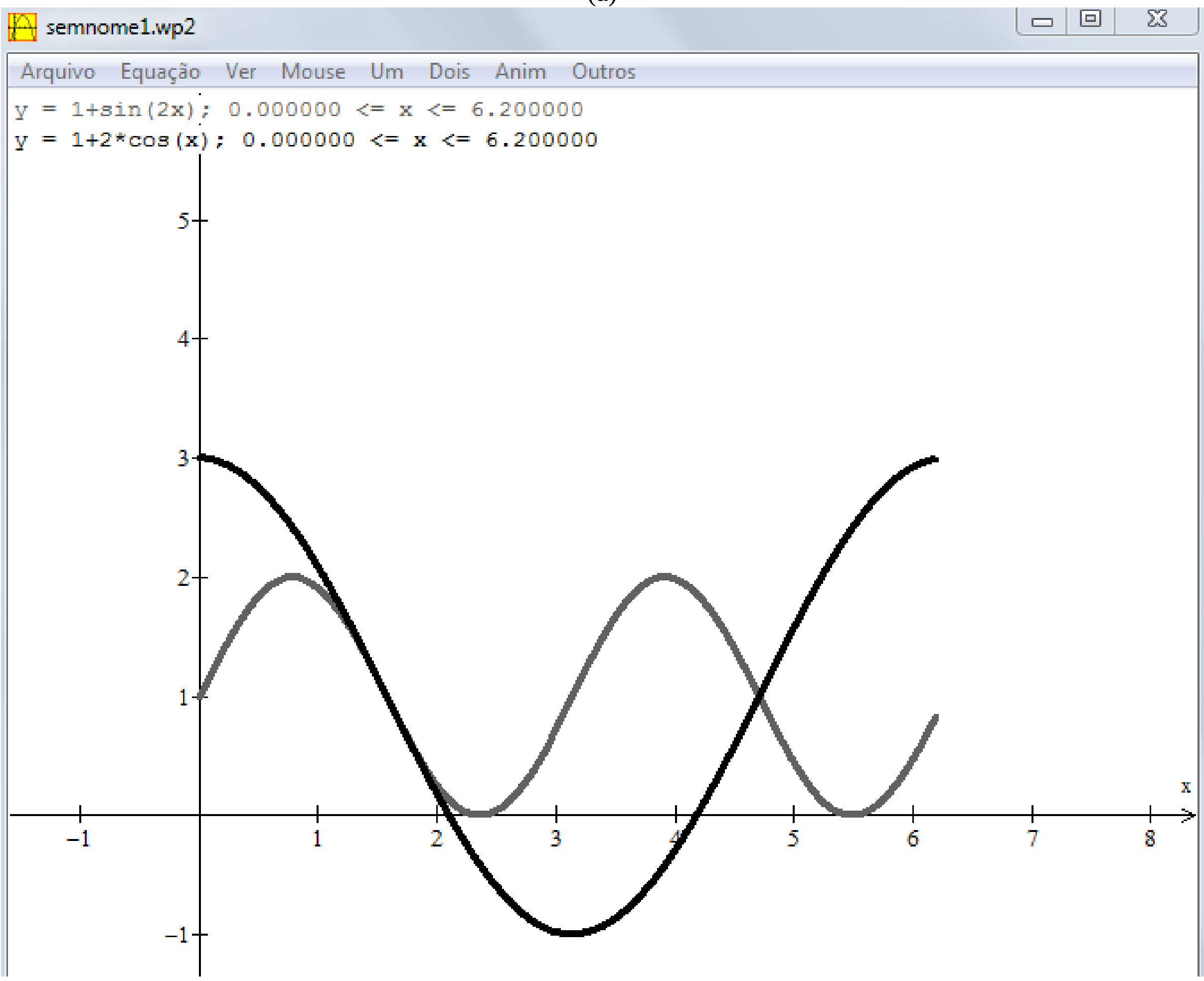
Ao construir os gráficos as estudantes observaram que as funções se interceptam em dois pontos e concluíram que a alternativa correta é a c.

Atividade 11 - (UFU-MG) Considere que f e g são as funções reais de variável real dadas, respectivamente, por $f(x) = 1 + sen(2x)$ e $g(x) = 1 + 2\cos(x)$. Desse modo, podemos afirmar que, para $x \in (0, 2\pi)$, os gráficos de f e g cruzam-se em:

a) 1 ponto
b) 2 pontos
c) 3 pontos
d) Nenhum ponto



(a)



(b)

Fig. 33: (a) Janela de comando com as duas funções e (b) o gráfico das duas funções.

Como analisado no gráfico possui dois pontos em comum, então a alternativa correta é a b.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As teorias das situações didáticas representam um avanço no ensino e no aprendizado da matemática. Entre muitas teorias surgidas no fim da década de 70 pra cá, ela adquiriu o caracter de instrumento científico ao associar as contribuições de outras disciplinas, propiciando o aperfeiçoamento do ensino de matemática. Com esse estudo, as possibilidades de contribuição da didática da matemática para um professor, são imensas. Espero ter ajudado, com este trabalho, para a prática do ensino e um maior aprendizado da matemática.

A Matemática pode colaborar para o desenvolvimento de novas competências, novos conhecimentos, para o desenvolvimento de diferentes tecnologias e linguagens que o mundo globalizado exige das pessoas. Assim visa-se levar o estudante a compreender e transformar o mundo à sua volta, estabelecer relações qualitativas e quantitativas, resolver situações-problema, comunicar-se matematicamente, estabelecer as intraconexões matemáticas e as interconexões com as demais áreas do conhecimento e desenvolver sua autoconfiança no seu fazer matemático.

As funções trigonométricas possui grande importância nos dias atuais, tem grande aplicabilidade e pode ser explorado para a construção do conhecimento com a utilização de software, que é um recurso computacional interessante para ser usado no processo ensino aprendizagem dos estudantes.

Ficou evidente durante o desenvolvimento das resoluções dos problemas que os estudantes foram se tornando mais autoconfiantes em seus pensamentos e autônomos nas suas conclusões, validando suas próprias trajetórias e expondo a seus colegas. Assim conclui-se que esse tipo de atividade é muito importante, onde os estudantes ultrapassam seus obstáculos e tornam mais rica a investigação de resoluções de problemas, contribuindo para evoluir as suas compreensões matemáticas.

O trabalho realizado com o auxílio do software tornou a aula envolvente, devido ser um recurso pouco utilizado, muito importante e acessível aos estudantes, propiciando a ampliação dos seus conhecimentos, mostrando suas estratégias e validações, e principalmente por construírem sua aprendizagem.

Referências

BROUSSEAU, Guy. Conteúdos e métodos de ensino. ***Introdução ao Estudo das Situações Didáticas***. Editora ática, 2007.

LIMA, Elon Lages e outros. ***A matemática do ensino médio.*** Vol. 2, 6. Ed.: Rio de Janeiro, SBM, 2006.

IEZZI, Gelson e outros. ***Matemática: ciência e aplicações.*** 6. Ed. São Paulo; Saraiva, 2010.

SOUZA, Joamir Roberto de. ***Novo olhar matemática.*** 1. Ed. São Paulo: FTD, 2010.

http://www.alunosonline.com.br/matematica/aplicacoes-da-trigonometria.html, Aplicações da trigonometria, acessado em novembro de 2012.

http://www.profgarcia.xpg.com.br/Aplicacoes_praticas_da_Trigonometria.htm, acessado em novembro de 2012.

http://matematica.com.br/site/aplicacoes-da-matematica/82-formula-trigonometrica-na-economia.html, acessado em novembro de 2012.

http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/aplicacoes-trigonometria.htm, acessado em novembro de 2012.

https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:xiOWCMSzilEJ:www2.icmc.usp.br/~francisco/modelagem/aulas/Introducao.ppt+programa+scilab, acessado em novembro de 2012.