

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

ELVIS SCHMIDT

**O ENSINO DE GEOMETRIA PROJETIVA NA EDUCAÇÃO BÁSICA:
UMA PROPOSTA PARA APREENSÃO DO CONHECIMENTO DO
MUNDO TRIDIMENSIONAL**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2015

ELVIS SCHMIDT

**O ENSINO DE GEOMETRIA PROJETIVA NA EDUCAÇÃO BÁSICA:
UMA PROPOSTA PARA APREENSÃO DO CONHECIMENTO DO
MUNDO TRIDIMENSIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientadora: Profa. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S349e Schmidt, Elvis
2015 O ensino de geometria projetiva na educação básica :
uma proposta para apreensão do conhecimento do mundo
tridimensional / Elvis Schmidt.-- 2015.
92 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica
Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2015.
Bibliografia: f. 87-90.

1. Geometria - Estudo e ensino (Ensino fundamental).
2. Geometria não-euclidiana. 3. Perspectiva. 4. Geometria
projetiva. 5. Demonstração automática de teoremas.
6. Espaço e tempo. 7. Prática de ensino. 8. Matemática
- Dissertações. I. Saito, Olga Harumi, orient. II.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
III. Título.

CDD 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Título da Dissertação No. 027

“O ensino de Geometria Projetiva na Educação Básica: uma proposta para apreensão do conhecimento do mundo tridimensional”

por

Elvis Schmidt

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 21 de agosto de 2015. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Olga Harumi Saito, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Moiseis dos Santos Cecconello, Dr.
(UFMT)

Prof. Marcio Rostirolla Adames, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Marcio Rostirolla Adames, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

AGRADECIMENTOS

- A Deus por me dar forças e perseverança.
- À minha esposa Helena, companheira, amiga e sobretudo, minha real ajudadora. Sem ela nada seria possível.
- Aos meus filhos Abigail e Joás por respeitar o papai enquanto estudava e por esperar para brincar.
- Aos meus pais Lourivaldo e Clara por tantas viagens, conversas, esperas e pelo companheirismo.
- À minha orientadora Dra. Olga Harumi Saito pelo incentivo, gentileza e, principalmente, por acreditar em mim.
- À equipe docente do DAMAT/UTFPR por propiciar um aprendizado sólido e significativo.
- Aos meus colegas de curso por compartilharem conhecimentos e experiências.
- Às escolas SENAI-Jaraguá do Sul, EMEF Waldemar Schmitz, UNIASSELVI-FAMEG e EEB Elisa Cláudio de Aguiar, meus locais de trabalho, pela compreensão e pela liberação em momentos necessários.
- À Escola Municipal de Ensino Fundamental Professora Gertrudes Steilein Milbratz por cooperar com a aplicação da oficina didática.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

SCHMIDT, Elvis. O ENSINO DE GEOMETRIA PROJETIVA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA PROPOSTA PARA APREENSÃO DO CONHECIMENTO DO MUNDO TRIDIMENSIONAL. 92 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

Na busca por uma melhor representação da realidade tridimensional, as Geometrias não-Euclidianas oferecem uma alternativa ao euclidianismo clássico e um dos destaques é a Geometria Projetiva. Assim, o objetivo deste trabalho é, através de ilustrações, contribuir para a assimilação de definições como perspectiva, projeção e o princípio da dualidade. E, a partir de resultados importantes como o Teorema de Desargues, o Teorema de Pappus e o Teorema de Pascal, queremos facilitar a compreensão e a visualização de algumas das técnicas de perspectiva que podem ser adaptadas para o uso na sala de aula pelos professores da Educação Básica. A aplicação de uma oficina de Geometria Projetiva em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental e a avaliação dos resultados revelaram que o tema pode ser desenvolvido de maneira promissora com os estudantes na Educação Básica, obtendo uma melhor compreensão do objeto real e associando-o ao conteúdo matemático envolvido.

Palavras-chave: Ensino de Geometria, Geometrias não-Euclidianas, Perspectiva, Geometria Projetiva, Teorema de Desargues, Teorema de Pascal

ABSTRACT

SCHMIDT, Elvis. THE TEACHING OF PROJECTIVE GEOMETRY IN BASIC EDUCATION: A PROPOSAL FOR ACQUISITION OF KNOWLEDGE OF THE THREE-DIMENSIONAL WORLD. 92 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

In search for a better representation of three-dimensional reality, non-Euclidean Geometries offer an alternative to the classic euclidianism and the Projective Geometry is one of the highlights. The purpose of this work is contribute to the assimilation of definitions such as perspective, projection, and the principle of duality, through illustrations. And, from important results as Desargues' Theorem, Pappus' Theorem and Pascal's Theorem, we want to facilitate understanding and viewing some of the perspective techniques that can be adapted for use in classroom by Basic Education teachers. The application of a workshop of Projective Geometry in a class of 6th grade of elementary school and the evaluation of the results revealed that the theme can be developed in a promising way with students in basic education, getting a better comprehension of the real object and associating it to the mathematical content involved.

Keywords: Geometry Teaching, Non-Euclidean Geometries, Perspective, Projective Geometry, Desargues' Theorem, Pascal's Theorem

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Santa Ceia da <i>Taula de Sant Miquel</i>	16
FIGURA 2	– A Última Ceia de Leonardo da Vinci.	17
FIGURA 3	– Pseudo-esfera de Beltrami.	20
FIGURA 4	– Globo terrestre com geodésicas e triângulo esférico.	21
FIGURA 5	– Fractal pitagórico.	22
FIGURA 6	– Representação de sólido em épura.	23
FIGURA 7	– Projecção de um sólido no plano projetivo.	24
FIGURA 8	– Sistema cônico de projecção.	25
FIGURA 9	– Sistema cilíndrico de projecção.	25
FIGURA 10	– Sólido em perspectiva.	26
FIGURA 11	– Cubo desenhado em diferentes tipos de perspectivas cilíndricas.	27
FIGURA 12	– Elementos de perspectiva.	28
FIGURA 13	– Cubos em perspectiva com um, dois e três pontos de fuga.	29
FIGURA 14	– Ilustração dos axiomas da Geometria Euclidiana.	30
FIGURA 15	– Linha férrea e o quinto postulado de Euclides: trilhos paralelos.	31
FIGURA 16	– Retas paralelas: (a) no plano euclidiano; (b) no plano projetivo.	32
FIGURA 17	– Projecção com distâncias, ângulos e paralelismo não preservados.	32
FIGURA 18	– Feixe e fileira: (a) feixes de retas com pontos de intersecção diferentes; (b) fileira de pontos.	34
FIGURA 19	– Perspectividade entre fileiras de pontos.	35
FIGURA 20	– Projetividade entre fileiras de pontos.	36
FIGURA 21	– Projetividade composta por duas perspectividades.	37
FIGURA 22	– Projetividade entre fileiras de quatro pontos.	38
FIGURA 23	– Figuras duais: fileira de pontos e feixe de retas.	41
FIGURA 24	– Figuras auto-duais: três pontos não colineares e as retas que os unem.	41
FIGURA 25	– Dual entre pontos incidentes e retas tangentes à elipse.	42
FIGURA 26	– Quadrângulo completo.	43
FIGURA 27	– Quadrilátero completo.	44
FIGURA 28	– Triângulos perspectivos no plano euclidiano.	46
FIGURA 29	– Triângulos perspectivos congruentes no plano euclidiano.	46
FIGURA 30	– Triângulos perspectivos no espaço.	47
FIGURA 31	– Triângulos perspectivos congruentes no espaço.	47
FIGURA 32	– Triângulo de referência para o Teorema de Menelau.	48
FIGURA 33	– Ilustração do Teorema de Desargues no plano.	49
FIGURA 34	– Triângulos perspectivos no espaço.	50
FIGURA 35	– Ilustração do Teorema de Pappus.	52
FIGURA 36	– Ilustração do Teorema de Pappus adaptado para demonstração.	53
FIGURA 37	– Teorema do Hexágono de Pascal na circunferência.	55
FIGURA 38	– Teorema de Pascal na elipse.	56
FIGURA 39	– Teorema de Pascal na hipérbole.	56
FIGURA 40	– Teorema do Hexágono de Pascal aplicado a diferentes seções de um cone.	57
FIGURA 41	– Teorema de Pappus pelo método das seções cônicas.	57

FIGURA 42	– Teorema de Pascal adaptado para demonstração.	58
FIGURA 43	– Teorema de Pascal: uma configuração alternativa.	60
FIGURA 44	– Ilustração do Teorema de Brianchon.	61
FIGURA 45	– Perspectividade no plano: não preserva distâncias.	62
FIGURA 46	– Perspectividade no espaço: não preserva distâncias.	62
FIGURA 47	– Teorema da bi-razão de Desargues.	64
FIGURA 48	– Vizualização do cubo suspenso.	66
FIGURA 49	– Corredor da escola.	66
FIGURA 50	– Organização da sala para a atividade com os blocos lógicos.	67
FIGURA 51	– Montagem com blocos lógicos.	68
FIGURA 52	– Cubo visto de diferentes posições da sala de aula.	69
FIGURA 53	– Desenhos do cubo antes e depois da realização da oficina.	70
FIGURA 54	– Desenhos do cubo antes e depois da realização da oficina.	71
FIGURA 55	– Representação da projeção do cubo antes e depois da realização da oficina.	72
FIGURA 56	– Desenho do corredor da escola: antes da aula sobre perspectiva (acima) e após a aula (abaixo).	75
FIGURA 57	– Desenho do corredor com elementos de perspectiva.	76
FIGURA 58	– Desenho do corredor: antes da aula de perspectiva e com riqueza de detalhes (acima) e sem os detalhes (abaixo).	77
FIGURA 59	– Desenho do corredor: antes da aula de perspectiva e com poucos detalhes (acima) e com riqueza de detalhes (abaixo).	78
FIGURA 60	– Tentativa de representar o corredor da escola em perspectiva.	79
FIGURA 61	– Seleção de desenhos produzidos na atividade com blocos lógicos.	82

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Sistema de projeção e tipos de perspectiva	26
TABELA 2	– Expressões duais entre ponto e reta.	40
TABELA 3	– Axiomas da Geometria Projetiva e seus duais.	42
TABELA 4	– Atividades realizadas durante a oficina	68

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 ESCOLHA DO TEMA	11
1.2 JUSTIFICATIVA	12
1.3 OBJETIVOS	13
1.3.1 Objetivo Geral	13
1.3.2 Objetivos Específicos	13
1.4 METODOLOGIA	13
1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2 A GEOMETRIA PROJETIVA	15
2.1 SÍNTESE HISTÓRICA	15
2.2 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS	18
2.2.1 Geometria Hiperbólica	19
2.2.2 Geometria Elíptica	20
2.2.3 Geometria Fractal	21
2.2.4 Geometria Descritiva	22
2.3 PRINCIPAIS DEFINIÇÕES DA GEOMETRIA PROJETIVA	23
2.4 PERSPECTIVA CÔNICA	27
3 A PERSPECTIVA E A GEOMETRIA PROJETIVA	30
3.1 CONEXÃO ENTRE GEOMETRIA EUCLIDIANA E GEOMETRIA PROJETIVA ..	30
3.2 AXIOMAS DO PLANO PROJETIVO	33
3.3 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA GEOMETRIA PROJETIVA	36
3.4 PRINCÍPIO DA DUALIDADE	40
3.5 O TEOREMA DE DESARGUES	45
3.5.1 Aspectos históricos	45
3.5.2 O teorema dos triângulos perspectivos	45
3.6 O TEOREMA DE PAPPUS E O TEOREMA DE PASCAL	52
3.6.1 O Teorema de Pappus	52
3.6.2 O Teorema de Pascal	54
3.7 A RAZÃO CRUZADA OU BI-RAZÃO	61
4 OFICINA DE GEOMETRIA PROJETIVA	65
4.1 DESENVOLVIMENTO DA OFICINA – METODOLOGIA APLICADA	65
4.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES REALIZADAS	68
4.2.1 Análise da atividade com o cubo	69
4.2.2 Análise da atividade com o corredor da escola	74
4.2.3 Análise da atividade com os blocos lógicos	80
4.3 QUESTIONÁRIO APLICADO	83
4.3.1 Análise dos resultados do questionário aplicado	83
4.3.2 Respostas dos alunos e suas similaridades, destaques e curiosidades	83
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
REFERÊNCIAS	87
Anexo A – QUESTIONÁRIO	91

Anexo B – DADOS COLETADOS	92
--	-----------

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESCOLHA DO TEMA

Em conversas informais com professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental, as mesmas relatam com frequência a grande dificuldade dos alunos no aprendizado de conteúdos matemáticos nas mais distintas áreas, inclusive Geometria. Segundo elas, os alunos enfrentam barreiras na compreensão de espaço e forma e dificilmente elaboram desenhos que apresentam a noção de profundidade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) - 1ª a 4ª Série (BRASIL, 1997, p. 81) afirmam que o espaço geométrico conhecido pela criança é o espaço perceptivo, ou seja, aquilo que é visto e percebido, mas é justamente nesta área que se encontram as dificuldades.

Algo semelhante observou-se nas aulas do 3º ano do Ensino Médio, com os alunos achando complicado representar os sólidos geométricos. Alguns deles até possuem certa facilidade na interpretação dos enunciados dos exercícios, porém apresentam problemas para desenhá-los e há aqueles que afirmam que não conseguem resolver os problemas porque não entendem os objetos ou sólidos descritos, ou seja, não há compreensão espacial e de sua representação para esses alunos.

Às vezes, os profissionais da área de Matemática também apresentam dificuldades quando há a necessidade de desenhar os referidos objetos no quadro negro.

Assim, é evidente a necessidade de que professores e alunos adquiram conhecimentos e desenvolvam habilidades que possibilitem e facilitem a interpretação e a elaboração de desenhos em perspectiva, além da visualização dos conceitos matemáticos envolvidos.

Ainda, surgem indagações da observação de Feiras de Ciências e de Matemática de escolas públicas, onde geralmente os trabalhos que relacionam Arte e Matemática se limitam a atividades de desenhos com a utilização de formas geométricas: A Matemática na Arte limita-se ao desenho de figuras poligonais e circulares? O lugar da Matemática na arte reduz-se às medidas e às formas?

A Geometria Projetiva certamente poderia preencher determinadas lacunas na formação escolar e responder algumas dessas perguntas. Trata-se de um importante tema, que pode

promover uma formação mais ampla e significativa aos estudantes.

Esta dissertação pretende também contribuir para responder a seguinte questão: Como inserir a Geometria Projetiva no contexto da Educação Básica de maneira apropriada a docentes e estudantes?

1.2 JUSTIFICATIVA

A abordagem escolar de algumas Geometrias não-Euclidianas, como a Geometria Projetiva, por exemplo, já foi amplamente difundida no Brasil. Segundo Zuin (2002, p. 1-7), o ensino de construções geométricas, inclusive com utilização de técnicas de perspectiva, foi gradativamente abandonado a partir da década de 1960 e muitos dos livros didáticos destinados ao assunto deixaram de ser editados e impressos.

Na década de 1990, com a elaboração dos PCNs, evidenciou-se a necessidade da retomada, ou melhor, da reconstrução do ensino das construções geométricas vinculado à disciplina de Matemática e a conseqüente necessidade de abordagem de conceitos provenientes das Geometrias não-Euclidianas, entre elas a Geometria Projetiva.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (PCNs-EF) (BRASIL, 1998, p. 51) afirmam que o estudo dos conceitos geométricos possibilitam à criança o desenvolvimento de habilidades que lhe permitem compreender, descrever e representar o mundo em que vive. Além disso, a exploração de objetos do mundo físico, pinturas, obras de arte, desenhos e esculturas, por exemplo, permite aos alunos estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. O mesmo documento ressalta ainda que o estudo da Geometria desperta o interesse de adolescentes e jovens, tornando-se propício para a aplicação de situações problema (BRASIL, 1998, p. 122).

A inclusão do ensino de Geometria Projetiva na Educação Básica apoia-se nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática do Estado do Paraná (DCEBs-PR) (PARANA, 2008, p. 55-57), que inclui o tema “geometrias não-euclidianas” no currículo da disciplina de Matemática, bem como nos PCNs-EF, que as consideram como uma quebra de paradigmas diante da multiplicidade de sistemas matemáticos possíveis (BRASIL, 1998, p.25).

Ainda, as DCEBs-PR (PARANA, 2008, p. 31) tratam continuamente da necessidade de trazer para o contexto educacional temas da atualidade e que possuam relevância para os alunos. Nesse sentido, o ensino da Geometria Projetiva constitui uma possibilidade promissora. Enquanto a Geometria Euclidiana, frequentemente a única abordada no contexto escolar, se interessa pelo mundo real no qual vivemos, a Geometria Projetiva interessa-se pelo mundo como

é visto e estuda as propriedades visuais dos objetos (WATERMANN; FRANCO, 2008, p. 3).

No contexto do PROFMAT, o trabalho de (GONCALVES, 2013) trata também da aplicação da Geometria Projetiva à Educação Básica. Porém, a presente dissertação procura fundamentar a perspectiva por meio da Geometria Projetiva com o auxílio de ilustrações que permitem aos professores uma maior compreensão dos temas e a sua vinculação com o que pode ser aplicado em sala de aula. Além disso, um estudo baseado em quadros comparativos da produção gráfica dos alunos antes e depois das aulas teóricas da Oficina (capítulo 4) propiciam a verificação da eficácia da aplicação do tema à Educação Básica.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

- Empregar a Geometria Projetiva em seu aspecto visuo-espacial como instrumento na aprendizagem de conceitos matemáticos.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar breve síntese histórica do desenvolvimento da Geometria Projetiva.
- Indicar definições da Geometria Projetiva com vistas à sua aplicação na Educação Básica.
- Sugerir demonstrações de teoremas da Geometria Projetiva, de forma ilustrativa, como base para sua compreensão.
- Aplicar, em uma oficina, uma sequência de atividades didáticas no 6º ano do Ensino Fundamental e analisar os resultados obtidos.
- Apontar possíveis aplicações da Geometria Projetiva na Educação Básica.

1.4 METODOLOGIA

A presente dissertação apresenta uma pesquisa bibliográfica sobre a história da Geometria Projetiva, bem como seus principais conceitos, definições e teoremas, apresentados de forma ilustrativa.

Com o objetivo de averiguar dificuldades e contribuir para mostrar a importância do uso da Geometria Projetiva na Educação Básica, foi aplicada uma sequência didática com os alunos

do 6º ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Professora Gertrudes Steilein Milbratz, em Jaraguá do Sul, Santa Catarina.

Um estudo comparativo entre a capacidade dos alunos em representar objetos e ambientes tridimensionais no plano foi realizado, tendo como referência as aulas sobre perspectiva.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Neste capítulo, Introdução, é apresentada a escolha do tema, com a definição dos objetivos geral e específicos, e a metodologia utilizada no desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2 é apresentado um breve histórico sobre o desenvolvimento da Geometria Projetiva, desde os antigos gregos até sua sistematização axiomática no final do século XIX; são identificadas algumas geometrias não-euclidianas como a Geometria Hiperbólica, a Geometria Elíptica, a Geometria do Fractal e a Geometria Descritiva. Então, a Geometria Projetiva, enquanto Geometria não-Euclidiana é definida por meio da estruturação dos diferentes tipos de perspectiva.

No Capítulo 3 é estabelecida a relação entre a Geometria Projetiva e a Geometria Euclidiana. Em seguida, a descrição dos axiomas do plano projetivo e definições importantes como perspectividade e projetividade são apresentadas, bem como os principais teoremas.

O Capítulo 4 descreve a oficina de Geometria Projetiva que foi aplicada na Educação Básica e a análise dos resultados obtidos.

Para finalizar o trabalho, o Capítulo 5, Considerações Finais, aponta a escassez de material sobre o assunto voltado à Educação Básica, e também a preocupação de alguns autores. Discorre ainda, sobre a importância da ilustração na demonstração de teoremas e o êxito obtido na oficina e os seus desdobramentos.

2 A GEOMETRIA PROJETIVA

O presente capítulo é destinado a um breve histórico sobre a Geometria Projetiva, seu desenvolvimento e sua caracterização como Geometria não-Euclidiana, com enfoque especial na perspectiva.

2.1 SÍNTESE HISTÓRICA

Por volta do século V a.C. as representações teatrais dos gregos necessitavam de cenários realísticos. Para realizar a tarefa de projetá-los, contavam com a ajuda de geômetras, que já sabiam que projeções de figuras e superfícies do espaço tridimensional no plano necessitavam de técnicas para obter os efeitos desejáveis.

Os antigos geômetras gregos baseavam-se em seus conhecimentos sobre a propagação da luz em linha reta. Estudando os fenômenos luminosos, Demócrito (460-370 a.C.) e Anaxágoras (500-428 a.C.) chegaram a publicar uma teoria da perspectiva. Até mesmo Euclides (300-? a.C.) dedicou-se ao estudo de alguns problemas ópticos, nos quais admitia que os raios de luz saíam dos olhos do observador, formando as geratrizes de um cone (SANTOS; GUEDES, 2007, p. 2).

Pappus (290-350 a. C.) já havia descoberto algumas proposições não-métricas descritas no teorema que leva seu nome, porém o desenvolvimento da Geometria Projetiva ocorreu de fato apenas durante o Renascimento. Nesse período, muitos artistas queriam produzir imagens que representassem fielmente os objetos como eles são captados pela visão humana (WU, 2006, p. 77).

Na Idade Média, as pinturas não representavam a realidade como ela é vista, não apresentavam a noção de profundidade e baseavam-se em temas e símbolos religiosos. Como pode-se perceber na Figura 1, onde a *Santa Ceia* é retratada de forma plana; não há diferença na representação do personagem que está à frente ou atrás dos demais. Também não aparecem detalhes do ambiente ou paisagem.



Figura 1: Santa Ceia da *Taula de Sant Miquel*.

(SORIGUEROLA, 2006)

A partir do século XIII, alguns pintores começaram a se preocupar em fazer pinturas mais fiéis à realidade como ela é vista. Duccio di Buoninsegna (1255-1319) e Giotto di Bondone (1266-1337), no início do século XIV, foram artistas que criaram noções de perspectiva que influenciaram outros artistas. Entre eles está Filippo Brunelleschi (1377-1446), criador de um sistema organizado de perspectiva ensinado por ele a outros pintores.

Leon Battista Alberti (1404-1472) publicou, em 1435, o livro intitulado *Della Pictura*, que tratava, dentre outros temas da perspectiva, das propriedades preservadas entre dois desenhos perspectivados diferentes. Esta obra foi aprimorada mais tarde por Piero Della Francesca (1415-1492) na obra *De prospectiva pingendi* (A perspectiva para pintura), na qual encontra-se uma rigorosa elaboração da perspectiva.

O auge do desenvolvimento das técnicas de perspectiva durante a renascença ocorreu com Leonardo da Vinci (1452-1519) e Albrecht Dürer (1471-1528). Eles escreveram tratados que relacionavam a Arte com a Matemática, enfatizando a importância desta última para a pintura (ALMEIDA, 2007, p. 3-8).

A Figura 2, retrato da *Última Ceia* de Leonardo da Vinci, comparada com a Figura 1, revela grandes diferenças na representação, com o emprego da perspectiva e com a noção de profundidade e de tridimensionalidade se destacando.



Figura 2: A Última Ceia de Leonardoo da Vinci.

(VINCI, 2014)

Dois séculos mais tarde, alguns conceitos já conhecidos desde os antigos gregos e utilizados na Renascença, como ponto de fuga e perspectiva, foram formalizados matematicamente pelo arquiteto francês Girard Desargues (1591-1661). Em 1636, ele publicou estudos sobre perspectivas e, em 1639, um tratado matemático sobre as seções cônicas, o *Broullion Projet*.

Em 1648, Abraham Bosse (1602-1676) publicou o famoso teorema de Desargues sobre os Triângulos Perspectivos: “se em um plano dois triângulos ABC e $A'B'C'$ estão situados de modo que as retas unindo vértices correspondentes sejam concorrentes em um ponto O , então, os lados correspondentes, se prolongados, se cruzarão em três pontos colineares” (COURANT; ROBBINS, 2000 apud SEARA, 2010, p. 8).

As ideias de Desargues não foram bem aceitas pelos matemáticos da época, pois não tinham a mesma direção e forma de escrever dos trabalhos tradicionais. Entretanto, dois matemáticos importantes da época se tornaram seus discípulos: Blaise Pascal (1623-1662) e De La Hire (1640-1718). Pascal publicou em 1640 um ensaio sobre cônicas, no qual consta uma série de teoremas da Geometria Projetiva, inclusive seu famoso teorema que descreve um hexágono inscrito em uma cônica, onde os três pontos de interseção dos lados opostos são colineares. De La Hire publicou um livro que abordava alguns objetos geométricos sob o ponto de vista projetivo.

Em 1759, Johann Heirich Lambert (1728-1777) publicou em Berlim o primeiro livro didático sobre perspectiva e Gaspar Monge (1746-1818) baseou-se nas sombras e na perspectiva,

associando-a à projeção, para criar a Geometria Descritiva (SANTOS; GUEDES, 2007, p. 5-6).

No início do século XIX, o francês Jean Victor Poncelet (1788-1867) resgatou as ideias de Desargues, e quando foi preso durante um confronto militar entre a França e a Rússia, desenvolveu ideias que culminaram num tratado sobre as propriedades projetivas das figuras. Esse tratado foi publicado em 1822 e lhe tornou “conhecido como a pai da Geometria Projetiva” (AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p. 9). Entretanto, foi Mario Pieri (1860-1913), em 1895, que estabeleceu um conjunto de axiomas para a Geometria Projetiva (WU, 2006, p. 78).

2.2 GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

É fato conhecido que Euclides foi o primeiro a organizar a Matemática como ciência dedutiva, de tal forma que afirmações mais complexas poderiam ser deduzidas de afirmações mais simples. Logicamente, este processo culminaria em algumas afirmações que não poderiam mais ser deduzidas, às quais chamou de **postulados**, que para Euclides seriam simples e evidentes, sendo aceitos por todos.

Antes da apresentação de uma versão dos cinco postulados é necessário atentar para o conceito de reta do próprio Euclides. Para ele, reta, ou melhor, linha é o ente geométrico que possui comprimento definido, mas não tem largura (COMMANDINO, 1944, p. 4). Assim, a ideia de Euclides para reta é muito parecido com o conceito moderno de segmento de reta. Carmo (1987, p. 25-26) apresenta os cinco postulados de Euclides da seguinte forma:

1. Dois pontos determinam uma reta.
2. A partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário.
3. É possível descrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário.
4. Todos os ângulos retos são iguais. (O ângulo reto é definido do seguinte modo: se duas retas se cortam formando quatro ângulos iguais, o ângulo comum assim determinado é chamado reto.) [...]
5. Se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de r é menor do que dois retos, então r_1 e r_2 , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r .

Porém, para o próprio Euclides o quinto postulado não era tão evidente. Ele procurou evitar seu uso ao máximo. Diante desta falta de evidência do quinto postulado houve vários matemáticos que tentaram prová-lo ao longo dos tempos, entre eles: Proclo (412-485), Wallis (1616-1703), Lambert (1728-1777) e Legendre (1752-1833). Entretanto, todas as tentativas acabavam em fatos equivalentes ao quinto postulado ou que não podiam ser demonstrados usando apenas os outros quatro postulados.

O padre italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) tentou provar o quinto postulado por meio da técnica de negar a negação para chegar ao resultado desejado. A partir dessa técnica, a hipótese da soma dos ângulos internos de um triângulo ser igual a 180° – consequência do quinto postulado – seria negada, ou seja, admitiria-se que pode ser maior ou menor que 180° . Entretanto, Saccheri nunca conseguiu chegar à contradição da hipótese da soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° (CARMO, 1987, p. 29).

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em sua tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides, admitiu a possibilidade de uma “geometria separada, totalmente diferente de nossa geometria (euclidiana)”, em suas próprias palavras. Ele chegou às suas conclusões admitindo a hipótese da soma dos ângulos internos de um triângulo ser menor que 180° . Mais tarde, o russo Nikolai Lobachewski (1792-1856) e o húngaro János Bolyai (1802-1860) desenvolveram as ideias de Gauss e publicaram obras contendo uma análise sistemática da Geometria admitindo essa hipótese. Hoje, essa geometria é chamada de Geometria Hiperbólica.

Estava lançada a base para o surgimento de outras geometrias não-euclidianas. A independência do quinto postulado de Euclides em relação aos outros quatro permitiu que o espírito crítico dos matemáticos, a partir do final do século XIX, guiados pelo método axiomático, agisse com certa liberdade de criação.

As geometrias não-euclidianas permitem o desenvolvimento de habilidades a serem desenvolvidas na escola e que são postostas pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCNs+) (BRASIL, 2002, p. 125): “Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos”. Para possibilitar o desenvolvimento dessas e outras habilidades, surgem aplicações escolares de algumas destas geometrias. Além da Geometria Euclidiana plana e espacial, podem ser trabalhadas na Educação Básica as geometrias: hiperbólica, elíptica, fractal, descritiva, projetiva e outras.

2.2.1 GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Nesta geometria o quinto postulado de Euclides é substituído pelo Postulado de Lobachewsky: “Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas que não encontram a reta dada” (WOLFE, 1945 apud ANTUNES, 2009, p. 28-31).

Uma hipótese importante, usada por Gauss no desenvolvimento da Geometria Hiperbólica, é que a soma dos ângulos internos de um triângulo no espaço hiperbólico é menor que

180°.

Na Geometria Euclidiana um modelo de representação, no qual seu sistema axiomático é válido, é o plano. Já na Geometria Hiperbólica o modelo de representação, proposto por Eugenio Beltrami (1835-1899), é a superfície chamada de pseudo-esfera, Figura 3.

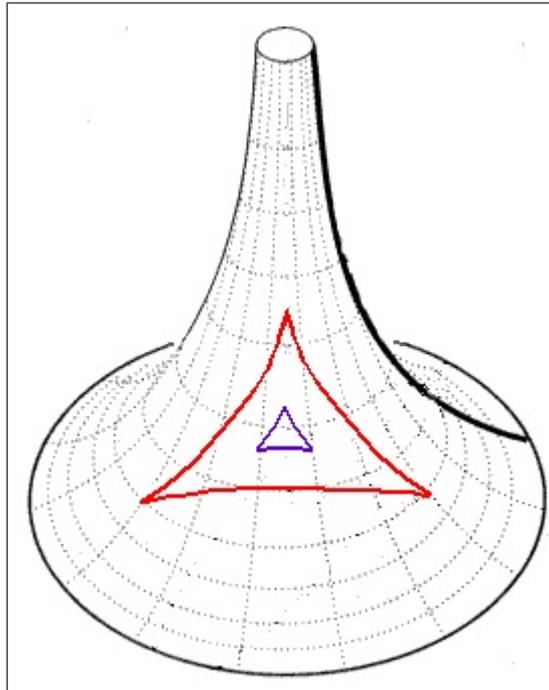


Figura 3: Pseudo-esfera de Beltrami.

(SEARA, 2013)

2.2.2 GEOMETRIA ELÍPTICA

Na Geometria Elíptica, o postulado de Riemann substitui o quinto postulado de Euclides: “Não existem paralelas a uma reta dada” (COUTINHO, 2001 apud ANTUNES, 2009, p. 33).

Um modelo de representação proposto para a Geometria Elíptica é a superfície esférica. Devido a este fato, esta geometria é frequentemente chamada de Geometria Esférica. As retas, então, formam os círculos máximos ao redor da superfície, chamados de geodésicas. Nesta geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°, e este triângulo é denominado de triângulo esférico, Figura 4.

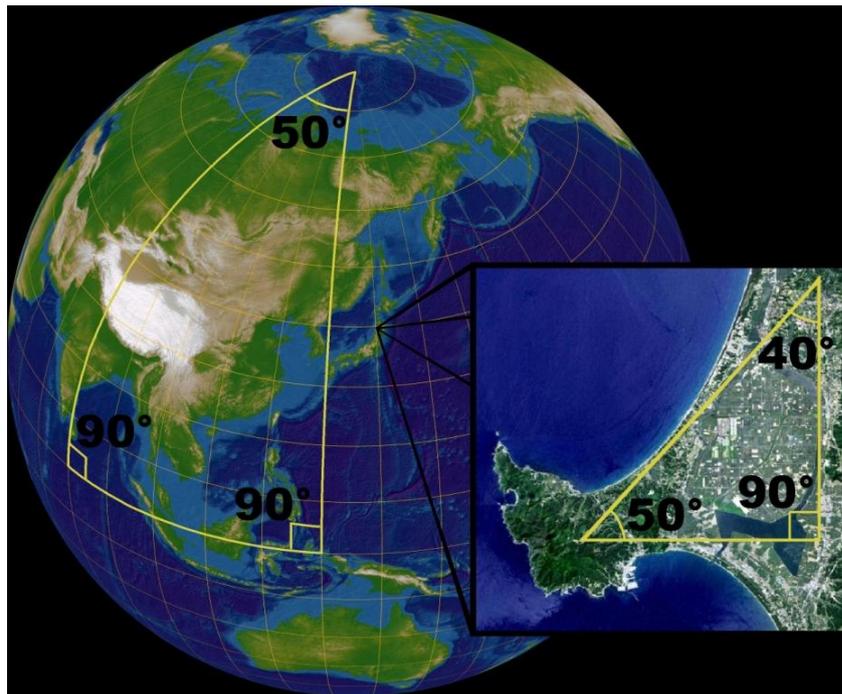


Figura 4: Globo terrestre com geodésicas e triângulo esférico.

(ROHWEDDER, 2007)

2.2.3 GEOMETRIA FRACTAL

A Geometria Fractal ou Geometria dos Fractais teve seu primeiro impulso no final do século XIX e início do século XX, quando matemáticos como Georg Cantor (1845-1918), Helge von Koch (1870-1924), Waław Sierpiński (1882-1969), Giuseppe Peano (1858-1932) e David Hilbert (1862-1943) investigaram, geometricamente, figuras e objetos cujo processo de formação era iterativo. Os objetos investigados por eles eram conhecidos como “monstros matemáticos” (NUNES, 2006, p. 15).

As figuras fractais podem ser obtidas através de processos computacionais recursivos, nos quais determinadas equações são inseridas e retornam os efeitos desejados. Elas são frequentemente encontradas em formas da natureza como nuvens, contorno de montanhas, galhos e folhas de vegetais, superfície interna dos pulmões, formação do sistema vascular, trajeto de uma gota de chuva ao penetrar no solo e outras. São também utilizadas na elaboração de obras de arte e pinturas contemporâneas.

A Figura 5 apresenta dois fractais pitagóricos, na parte superior um fractal simétrico e na parte inferior, uma assimétrico; também são conhecidos como *árvores pitagóricas*, no qual cada lado de um triângulo retângulo é também o lado de um novo quadrado.

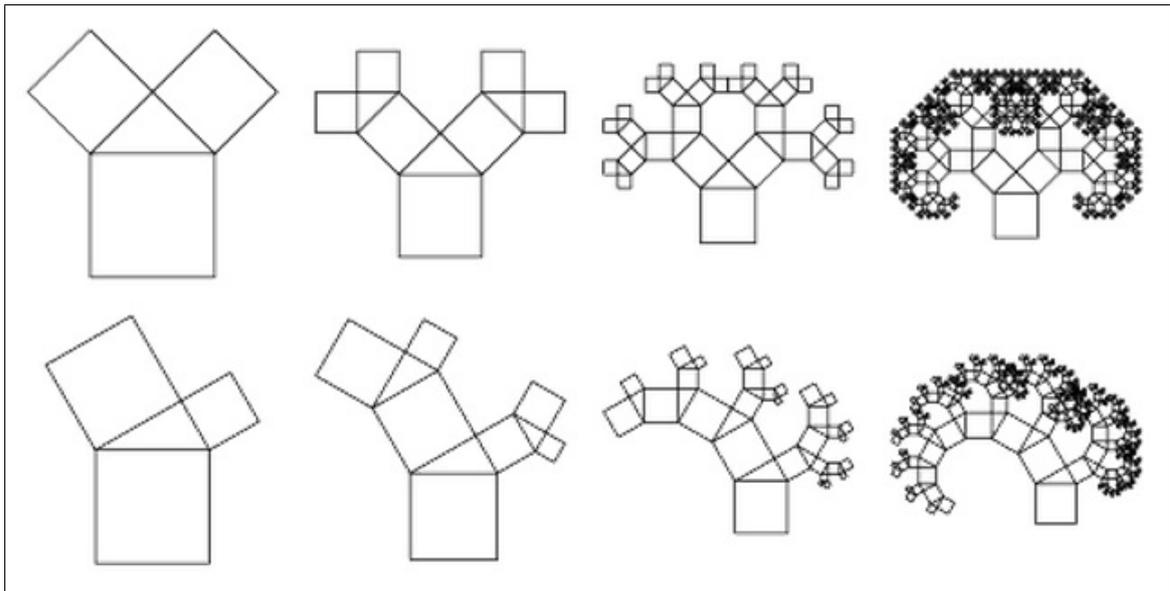


Figura 5: Fractal pitagórico.

(LUZ, 2015)

Segundo Nunes (2006, p. 29), dentre as principais características dos fractais está o fato de que sua dimensão não precisa ser um número inteiro. Tal característica foi definida pelo matemático franco-polonês Benoît Mandelbrot (1924-2010), que é o responsável pela denominação e definição de fractal para objetos cuja dimensão pode ser um número fracionário, embora não exista uma definição amplamente aceita. Essa é a principal diferença da Geometria Fractal em relação à Geometria Euclidiana, onde a dimensão possível de um objeto é 0 para o ponto, 1 para as retas e curvas, 2 para o plano e 3 para os sólidos, ainda podendo ser ampliada por indução até n dimensões.

2.2.4 GEOMETRIA DESCRITIVA

A Geometria Descritiva estuda a forma das figuras geométricas por meio de suas projeções ortogonais. Foi idealizada pelo matemático francês Gaspard Monge (1746-1818), no final do século XVIII, utilizando originlmente dois planos perpendiculares de projeção. Neste método, após serem realizadas as projeções, um dos planos gira em torno da linha comum aos dois planos projetivos, ficando toda a projeção situada no mesmo plano. Assim, objetos tridimensionais podem ser representados bidimensionalmente. Esta técnica de representação denomina-se *épura*. Na Figura 6 foi adotado um sistema com três planos perpendiculares entre si – plano horizontal, plano vertical e plano de perfil – esse último utilizado em alguns casos quando necessário.

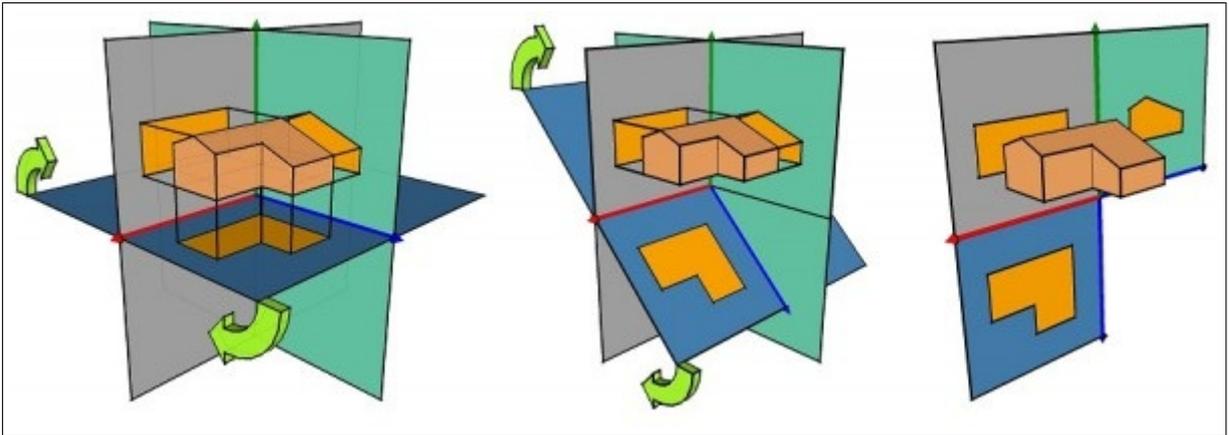


Figura 6: Representação de sólido em épura.

(DESENHO, 2015)

Esta geometria pode ser considerada não-Euclidiana pelo fato de basear-se na idéia de projeção a partir de um ponto cuja localização está no infinito (RABELLO, 2005, p. 18). Este ponto, chamado de ponto impróprio, é o ponto de intersecção das retas ditas paralelas, o que contraria a noção euclidiana de paralelismo. O conceito de projeção é fundamental para a compreensão da Geometria Projetiva e será abordado no Capítulo 3.

Utilizada como ferramenta para o estudo do desenho técnico, a Geometria Descritiva pode utilizar até seis planos projetivos. Neste caso, o objeto projetado situa-se, hipoteticamente, no interior de um cubo cujas faces são os planos projetivos (RABELLO, 2005, p. 22-23).

2.3 PRINCIPAIS DEFINIÇÕES DA GEOMETRIA PROJETIVA

Quando um objeto ou sólido geométrico qualquer é observado, projeta-se de cada um dos seus pontos visíveis ou vértices um raio a partir dos olhos do observador. Cada uma das linhas formadas é denominada linha de projeção. Ao interceptar as linhas de projeção por um plano imaginário, obtém-se sobre este plano uma imagem correspondente à imagem do objeto original.

Na Figura 7, tem-se a representação da projeção (imagem) e o plano que a contém, denominado plano de projeção (SANTOS; GUEDES, 2007, p. 3). Note que a projeção do cubo sobre o plano de projeção pode ser um polígono de 6 lados, devido à vista que se obtém a partir do ponto de observação. O plano de projeção, que neste caso está entre o ponto de observação e o objeto, poderia ainda ser posicionado depois do objeto, gerando outra projeção do mesmo.

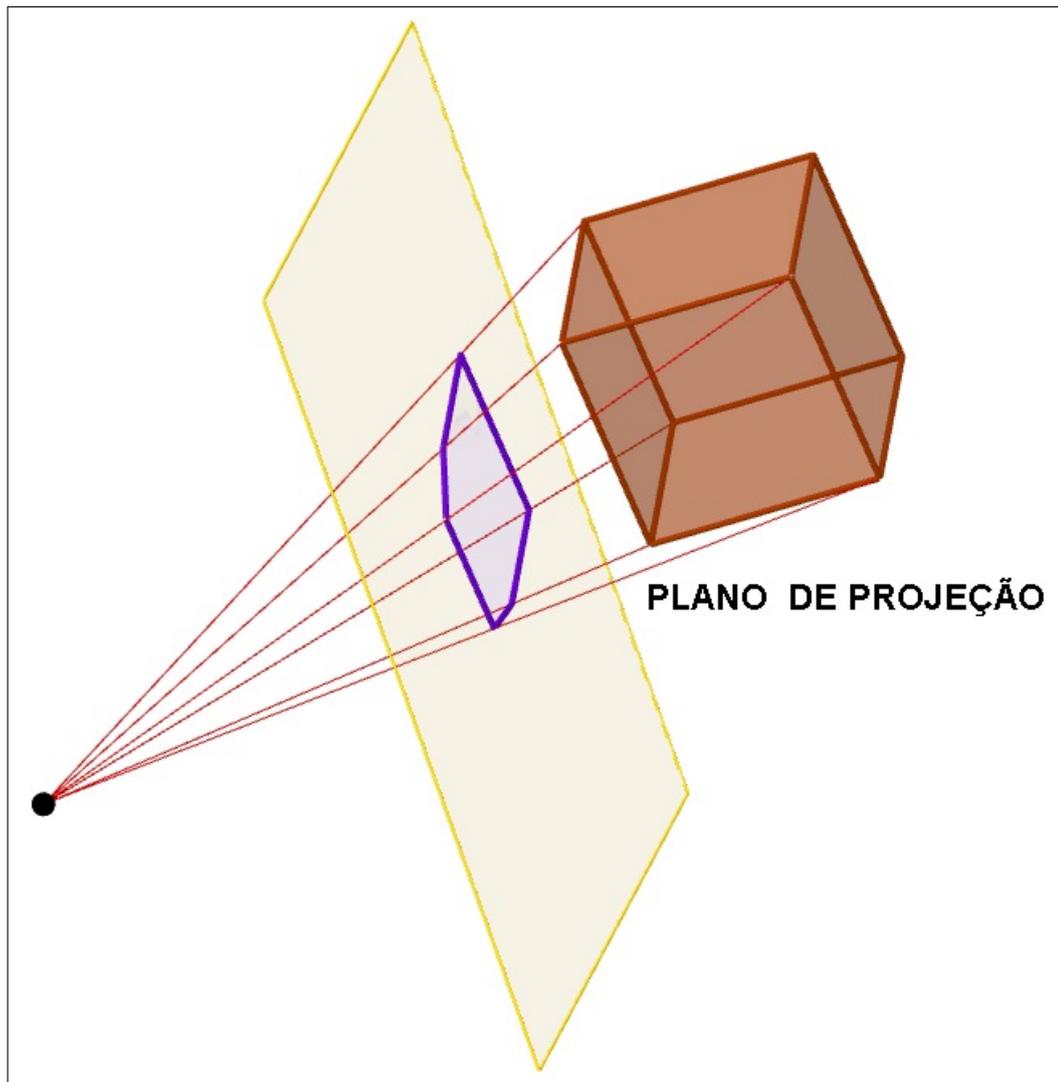


Figura 7: Projeção de um sólido no plano projetivo.

Segundo Ferreira (2013, p. 5), existem dois tipos de projeção que são definidos de acordo com o lugar de onde partem as linhas de projeção. Este lugar é denominado centro de projeção e pode localizar-se no finito ou no infinito.

Quando o centro de projeção localiza-se num ponto específico (finito), as linhas de projeção são divergentes e originam o Sistema Cônico de Projeção, Figura 8.

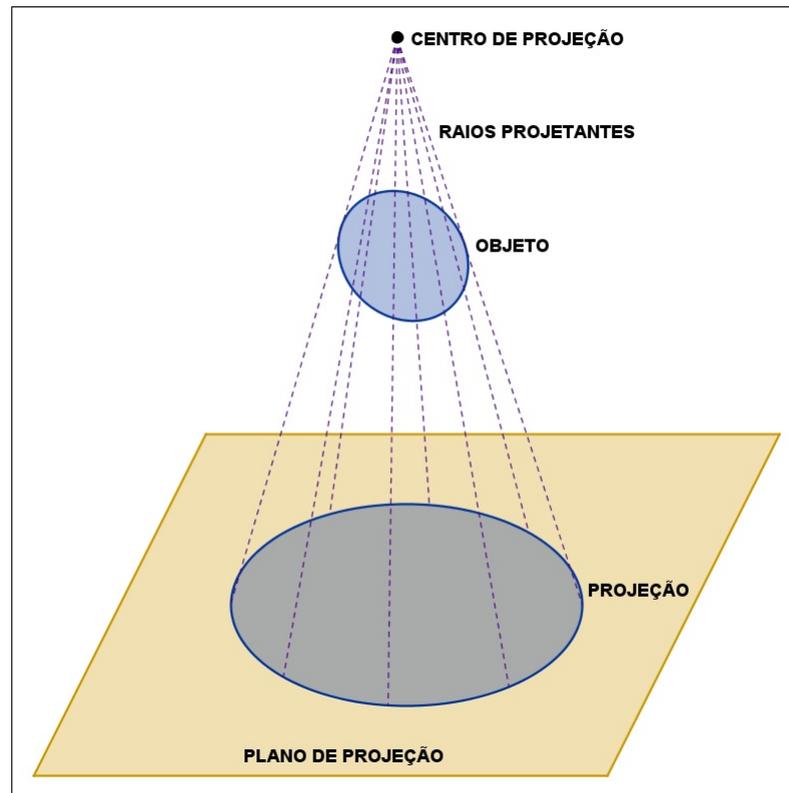


Figura 8: Sistema cônico de projeção.

Se o centro de projeção estiver situado no infinito, as linhas de projeção são paralelas e todas incidem sobre o plano projetivo com a mesma inclinação. Este é o Sistema Cilíndrico de Projeção, que pode ser oblíquo ou ortogonal, Figura 9.

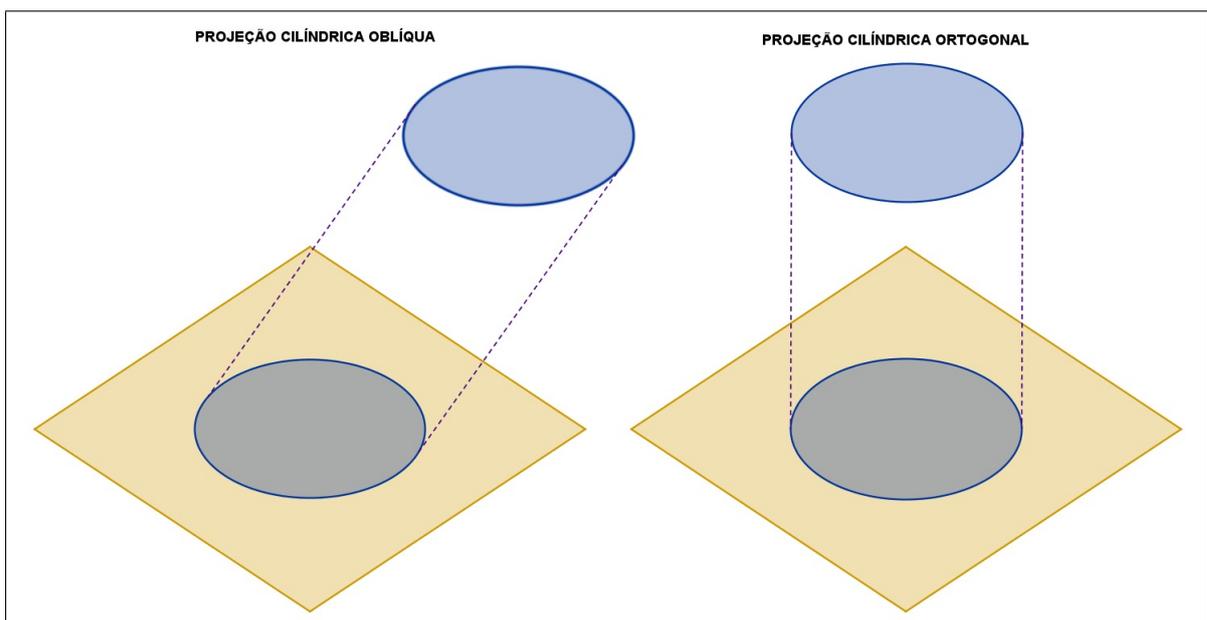


Figura 9: Sistema cilíndrico de projeção.

A perspectiva, adotando um desses sistemas de projeção, consiste em associar à imagem projetada as linhas de projeção de forma conveniente, representando a projeção juntamente com as faces dos triedros formados (RABELLO, 2005, p. 22); para limitar a extensão da imagem projetada, são seccionadas as faces dos triedros. Na Figura 10, as partes dos triedros que não fazem parte da representação em perspectiva final são representadas com linhas tracejadas. Estas partes podem ser excluídas posteriormente.

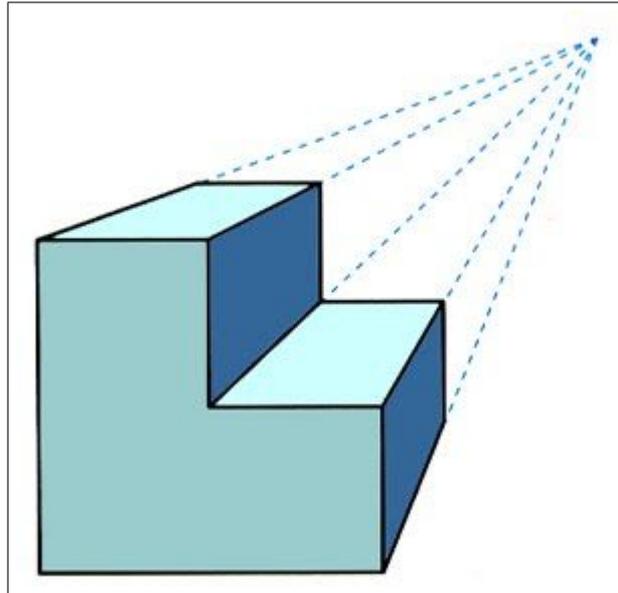


Figura 10: Sólido em perspectiva.

Os diferentes tipos de perspectiva são definidos de acordo com o sistema de projeção adotado, conforme Tabela 1.

Tabela 1: Sistema de projeção e tipos de perspectiva

Cilíndrica	Axonométrica Ortogonal	Isométrica
		Dimétrica
		Trimétrica
	Axonométrica Oblíqua (Cavaleira)	
Cônica	Com um ponto de fuga	
	Com dois pontos de fuga	
	Com três pontos de fuga	

Para a Educação Básica, espera-se que os estudantes consigam representar adequadamente os objetos e cenas tridimensionais no plano. Para isto, apenas as perspectivas cônicas serão abordadas de maneira mais abrangente; as perspectivas cilíndricas são frequentemente

aplicadas no desenho técnico. Na Figura 11 pode-se visualizar um cubo desenhado nos seguintes tipos de perspectiva: cavaleira, isométrica, dimétrica e trimétrica, nesta ordem.

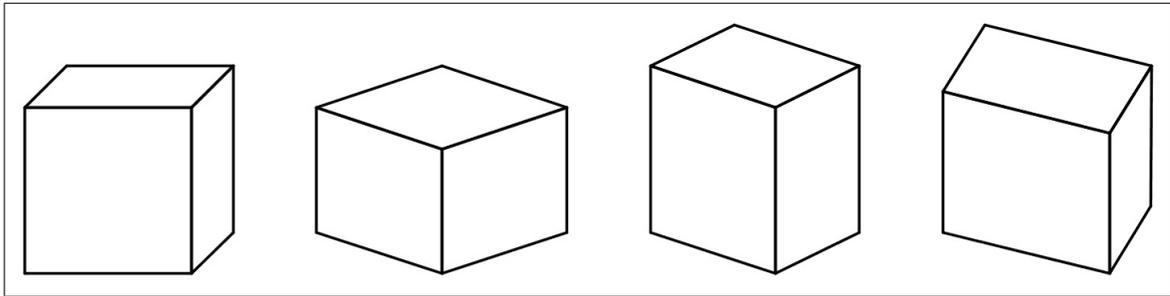


Figura 11: Cubo desenhado em diferentes tipos de perspectivas cilíndricas.

2.4 PERSPECTIVA CÔNICA

As técnicas utilizadas para construções geométrico-gráficas da perspectiva cônica, segundo Seara (2010, p. 10), baseiam-se em alguns elementos básicos, tais como:

- Quadro: espaço que delimita o objeto ou a paisagem representada, ou seja, trata-se da moldura do desenho;
- Observador: é a pessoa que está observando e representando o objeto ou a paisagem, é quem determina a posição dos demais elementos a serem definidos;
- Linha de terra (LT): é uma linha horizontal determinada pela posição dos pés do observador, ou seja, é a base do desenho;
- Linha do horizonte (LH): é uma linha horizontal determinada pela posição dos olhos do observador; no desenho de uma paisagem, por exemplo, é a linha que divide céu e terra, ou a linha das montanhas, ou ainda o nível do mar no horizonte;
- Ponto de vista (PV): é uma linha vertical traçada sobre a linha do horizonte, cuja posição é determinada pela direção da visão do observador;
- Ponto de fuga (PF): é a intersecção da linha do horizonte com o ponto de vista, para onde todas as linhas paralelas convergem; em outras palavras, é um ponto que pertence à linha do horizonte, porém, apesar de possuir uma localização bem definida num lugar específico, sua posição relativa ao observador está no infinito e um desenho pode ter mais de um ponto de fuga;

- Linhas de fuga (LF): quando o objeto ou a paisagem que é representada é vista em perspectiva, todas as linhas convergem para o mesmo ponto (PF), estas linhas imaginárias são as linhas de fuga; o efeito gráfico de tridimensionalidade do desenho em perspectiva é formado pelo afunilamento destas linhas em direção ao ponto de fuga.

É importante ressaltar que estes elementos, utilizados para a construção do desenho em perspectiva, geralmente são apagados após sua finalização, restando apenas a representação daquilo que se pretende retratar. Na Figura 12 é possível visualizar os elementos citados no desenho de uma paisagem.

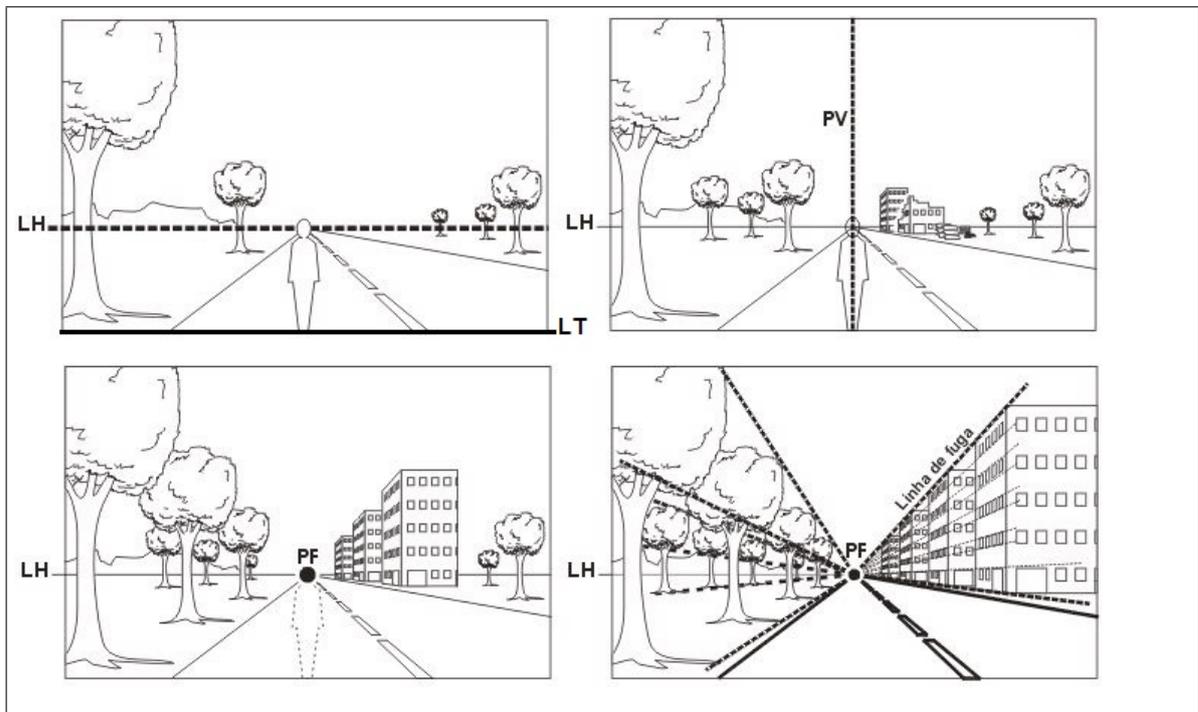


Figura 12: Elementos de perspectiva.

(JUVENIL, 2015)

Para o desenho de sólidos geométricos são utilizados os mesmos elementos e técnicas aplicadas à representação de paisagens, adaptando-se apenas as posições dos elementos. A Figura 13 mostra cubos com a perspectiva representada através de um, dois e três pontos de fuga.

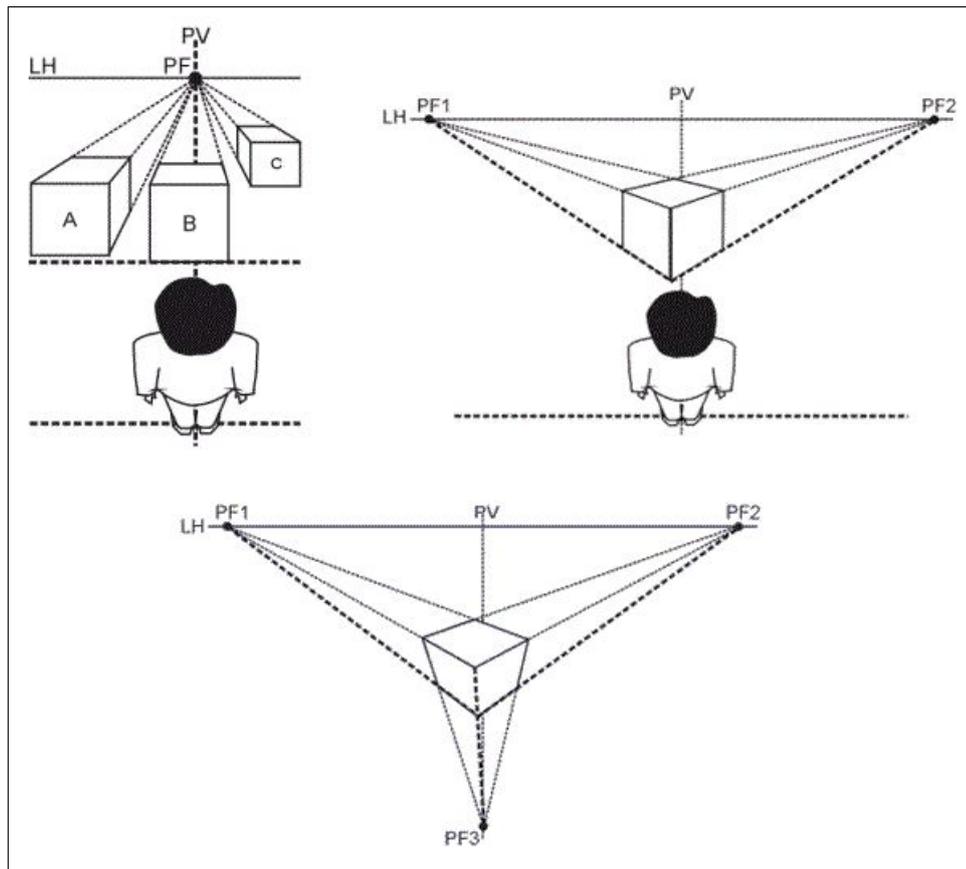


Figura 13: Cubos em perspectiva com um, dois e três pontos de fuga.

(JUVENIL, 2015)

Para que a representação de objetos ou cenas do mundo tridimensional numa folha de papel plana seja eficaz, é necessário que o desenhista, além de conhecer os elementos de perspectiva, saiba utilizá-los de forma conveniente. Não basta conhecer as quantificações métricas dos objetos desenhados, é necessário conhecer as qualidades visuais destes objetos. Também é necessário que o desenhista possua uma série de conhecimentos adquiridos através da experiência e das técnicas, pois é a posição dada aos pontos de fuga, por exemplo, que proporciona o aspecto tridimensional desejado no desenho final.

3 A PERSPECTIVA E A GEOMETRIA PROJETIVA

3.1 CONEXÃO ENTRE GEOMETRIA EUCLIDIANA E GEOMETRIA PROJETIVA

O plano é o lugar geométrico a partir do qual a Geometria Euclidiana é construída. Também chamado de plano afim, constitui-se de um conjunto de elementos denominados pontos e de um conjunto de elementos denominados retas que satisfazem os três axiomas a seguir (HARTSHORNE, 1967, p. 1):

A1: Dados dois pontos distintos P e Q , existe uma e apenas uma reta r que contém ambos os pontos P e Q . Diz-se que duas retas são paralelas se elas são iguais (a mesma reta) ou se elas não tem pontos em comum.

A2: Dada uma reta t e um ponto P que não pertence a t , existe uma e apenas uma reta m que é paralela a t e passa por P .

A3: Existem três pontos não colineares. Dois ou mais pontos são ditos colineares se existe uma reta contendo todos eles.

A ilustração desses axiomas podem ser visualizada na Figura 14.

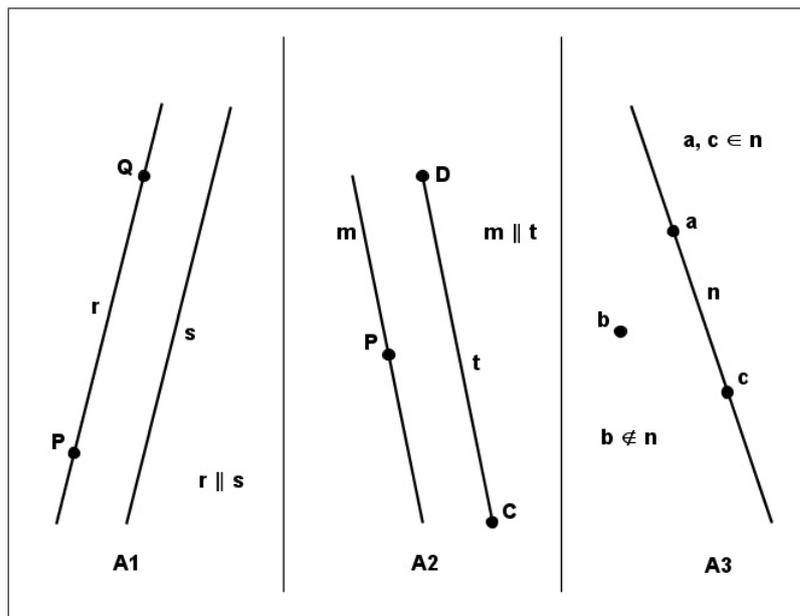


Figura 14: Ilustração dos axiomas da Geometria Euclidiana.

Segundo Carmo (1987, p. 25-26), originalmente Euclides formulou um conjunto de cinco postulados, apresentando assim a Geometria de forma sistemática. Dentre as muitas versões para o historicamente controverso quinto postulado de Euclides, a mais famosa é atribuída a John Playfair (1748-1819): “Por um ponto P fora de uma reta r passa não mais que uma paralela a r ”.

Euclides definiu como retas paralelas aquelas que não se interceptam quando são prolongadas indefinidamente. Assim, no plano afim, onde é definida originalmente a Geometria Euclidiana, retas paralelas não se interceptam. Um exemplo para visualizar tal situação é quando se percorre uma estrada retilínea, as faixas laterais da estrada permanecem com suas posições relativas inalteradas, sendo facilmente compreendidas como faixas ou retas paralelas. Porém, quando se observa esta mesma estrada ao longo do seu trajeto, as linhas laterais parecem se aproximar mais adiante e tem-se a impressão de que as linhas, que inicialmente foram detectadas como retas paralelas, parecem se encontrar num ponto muito distante. O mesmo ocorre nas linhas férreas, Figura 15.



Figura 15: Linha férrea e o quinto postulado de Euclides: trilhos paralelos.

(SIENICKI, 2002)

Com o objetivo de produzir nas representações planas o efeito visual da Figura 15, acrescentam-se ao plano afim da Geometria Euclidiana pontos ideais, cuja localização é definida no infinito, obtendo-se a Geometria Projetiva. Nela, o quinto postulado de Euclides não é válido, pois na Geometria Projetiva duas retas quaisquer se encontram em, pelo menos, um ponto, ou seja, no plano projetivo duas retas paralelas se encontram em um ponto ideal. Esta é, sem dúvida, a principal diferença entre a Geometria Projetiva e Geometria Euclidiana (HARTSHORNE, 1967, p. 1-3). Na Figura 16 é ilustrada esta diferença entre as duas geometrias: (a) as retas paralelas a ,

b , c , d e e do plano afim, que não se interceptam, e (b) as retas paralelas a' , b' , c' , d' e e' do plano projetivo se encontram no ponto O .

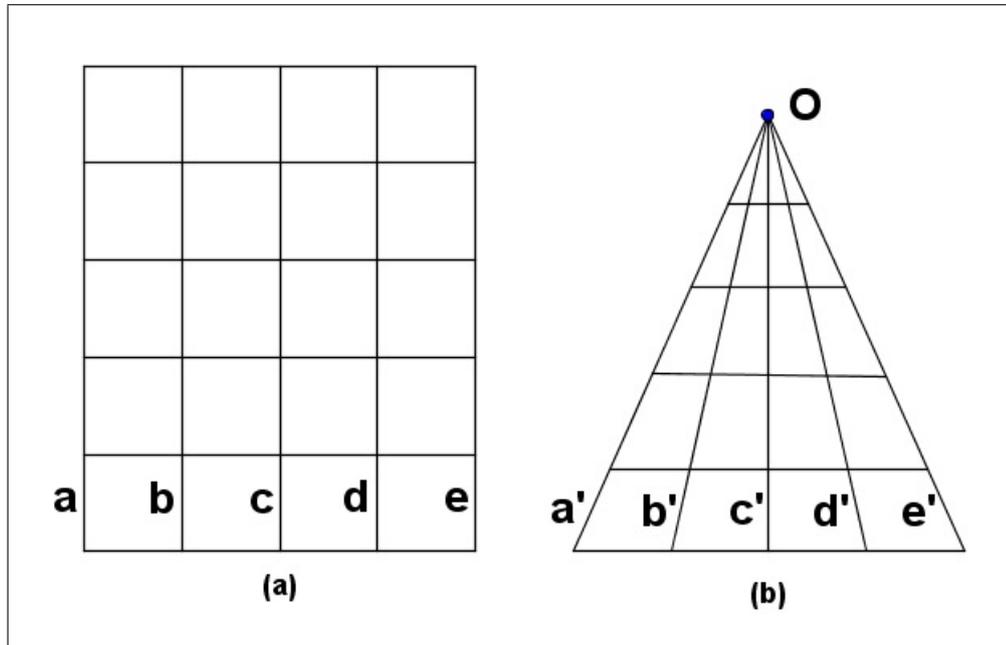


Figura 16: Retas paralelas: (a) no plano euclidiano; (b) no plano projetivo.

Na Figura 17 verifica-se que o objeto observado, no plano H , é um trapézio, enquanto que sua projeção sobre o plano H' é um retângulo. O observador encontra-se no ponto O e os raios projetantes são as linhas tracejadas.

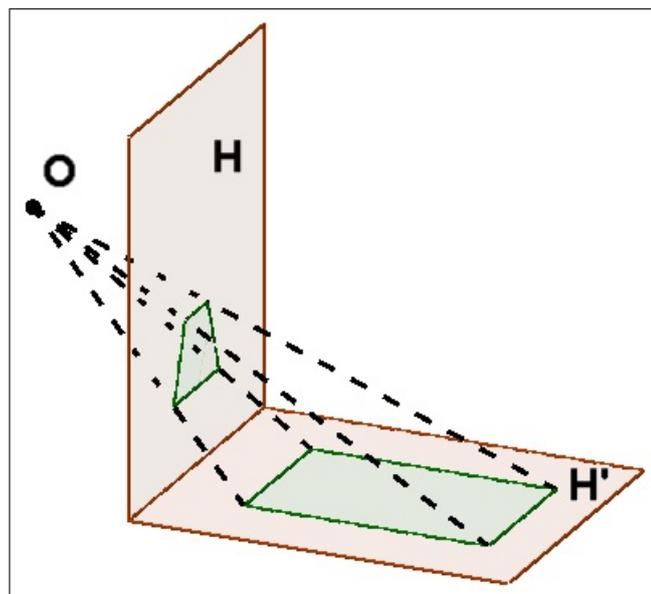


Figura 17: Projeção com distâncias, ângulos e paralelismo não preservados.

Nesta mesma Figura 17 os planos H e H' são planos afins, enquanto os planos que

contém os raios projetantes e o ponto O (ponto ideal) são planos projetivos. Portanto, o plano projetivo é obtido a partir do plano afim da Geometria Euclidiana com a inserção de pontos ideais.

3.2 AXIOMAS DO PLANO PROJETIVO

A construção da Geometria Projetiva teve contribuições de diversos matemáticos. Os italianos Gino Fano (1871-1952) e Mario Pieri (1860-1913) foram os primeiros a formular um sistema completo de axiomas para a Geometria Projetiva. Coxeter (apud AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p. 10-14) estrutura a Geometria Projetiva em oito axiomas, porém, a partir do quarto axioma, todos os demais são obtidos como consequências dos três primeiros. Outros autores, como Wu (2006, p. 80-81), além dos três axiomas iniciais, elencam outros dois que aqui serão tratados como teoremas:

- Teorema de Fano: os três pontos de intersecção de um quadrângulo completo nunca são colineares (quadrângulo completo é um conjunto de quatro pontos, a cada três não colineares, e as seis retas determinadas por esses quatro pontos);
- Teorema de Pappus (seção 3.6.1).

O sistema axiomático aqui adotado é o apresentado por Hartshorne (1967, p. 1-3), que define de maneira sucinta o plano projetivo constituído por um conjunto de elementos chamados pontos e de um conjunto de elementos chamados retas que satisfazem os seguintes axiomas:

AP1: Dois pontos distintos P e Q pertencem a uma e apenas uma reta.

AP2: Quaisquer duas retas se encontram em, pelo menos, um ponto.

AP3: Existem três pontos não colineares.

AP4: Cada reta contém, pelo menos, três pontos.

Para Hefez (1985, p. 39) os axiomas A1 e A2 da Geometria Euclidiana – chamados de axiomas de incidência, pois definem como ocorre a incidência de pontos em retas e vice-versa – e os axiomas AP1 e AP2 da Geometria Projetiva não são conflitantes:

Os axiomas de incidência da Geometria Projetiva não contradizem nenhum axioma da Geometria Euclidiana. Trata-se tão somente de ajustar as coisas a nível de semântica. Duas retas são paralelas no plano euclidiano se e somente se elas se encontram no infinito no plano projetivo.

O plano projetivo pode ser compreendido como a união do plano afim, que contém todos os pontos de intersecção das retas concorrentes, com a reta que está no infinito e que contém todos os pontos de intersecção das retas paralelas. Entretanto, no plano projetivo, nem todas as retas paralelas possuem o mesmo ponto de intersecção duas a duas, ou seja, este ponto não é único. Torna-se, então, necessária a definição a seguir (WU, 2006, p. 86):

Dados um ponto P e uma reta r . Chamamos uma **fileira** (de pontos) o conjunto de todos os pontos sobre r e um **feixe** de retas, o conjunto de todas as retas que passam por P . Se as retas de um feixe que passa por P unem os pontos de uma fileira com um outro ponto, dizemos que a fileira é uma **seção** do feixe.

A partir desta definição é possível identificar que diferentes feixes de retas paralelas possuem diferentes pontos de intersecção. Na Figura 18(a), os dois feixes de retas, $P(a,b,c,d,e)$ e $P'(a',b',c',d',e')$, possuem dois pontos de intersecção diferentes, P e P' , que são chamados de centros dos respectivos feixes. Além disso, a fileira de pontos $r(A,B,C,D,E)$ é incidente na reta r , ou seja, são todos pontos colineares, 18(b).

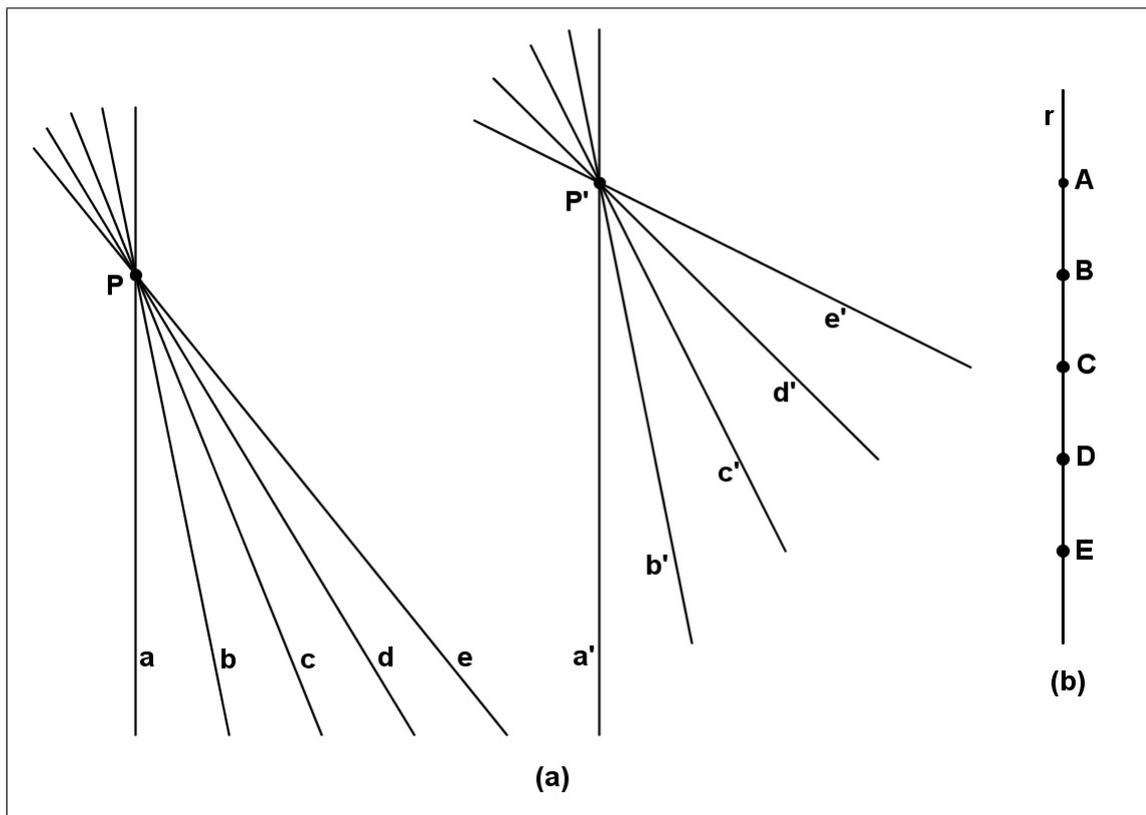


Figura 18: Feixe e fileira: (a) feixes de retas com pontos de intersecção diferentes; (b) fileira de pontos.

Quando um feixe de retas é cortado por duas fileiras de pontos, ocorre uma perspectividade, que é a correspondência – designada pelo símbolo $\overline{\wedge}$ – entre duas fileiras que são seções de

um mesmo feixe que passa pelo ponto O , denominado centro de perspectividade.

A Figura 19 mostra um feixe de retas r e s que passam pelo centro de perspectividade O e são seccionadas pelas fileiras de pontos AB e $A'B'$. Neste caso $AB \stackrel{=}{\wedge} O A'B'$, ou seja, a fileira de pontos AB é perspectiva à fileira de pontos $A'B'$ pelo ponto O .

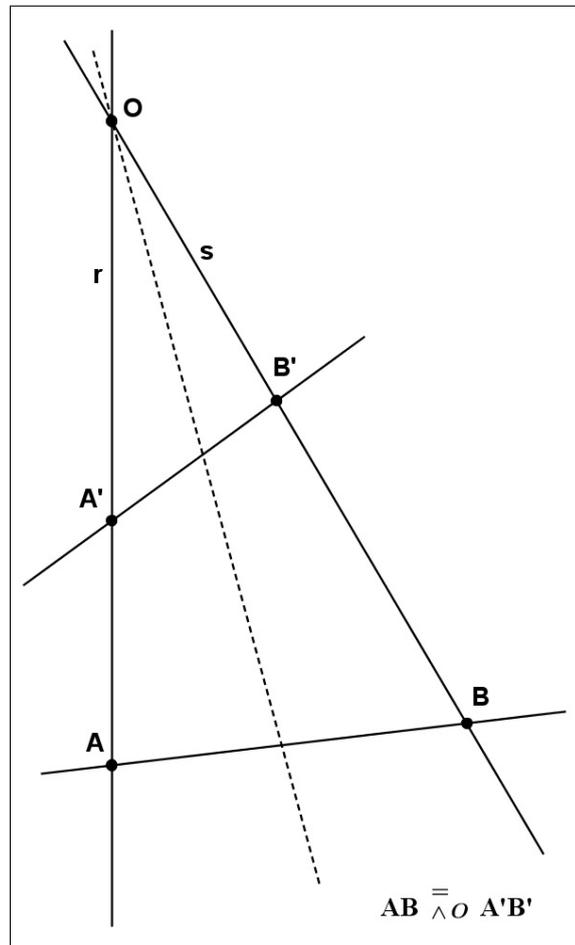


Figura 19: Perspectividade entre fileiras de pontos.

Assim, duas figuras são perspectivas se as retas definidas pelos seus vértices concorrem num ponto, chamado centro de perspectividade. Diz-se que as duas figuras são, então, perspectivas por um ponto. Se as retas definidas pelos vértices das figuras se cruzam sobre uma mesma reta, diz-se que as figuras são perspectivas por uma reta, chamada eixo de perspectividade. Na Figura 19 é possível visualizar que o eixo de perspectividade (linha pontilhada) incide sobre o centro de perspectividade e que divide as fileiras de pontos AB e $A'B'$ em segmentos proporcionais.

Quando são aplicadas duas ou mais perspectivas obtém-se uma projetividade, designada pelo símbolo $\overline{\wedge}$. Uma projetividade pode ser também interpretada como o produto de duas ou mais perspectivas. Na Figura 20 a fileira de pontos AB é perspectiva à fileira de

pontos $A'B'$ pelo ponto O e a fileira de pontos $A'B'$ é perspectiva à fileira de pontos $A''B''$ pelo ponto O' . Então, pela definição de projetividade, a fileira de pontos AB é uma projeção da fileira de pontos $A''B''$, ou seja, $AB \bar{\wedge}_O A'B' \bar{\wedge}_{O'} A''B'' \Rightarrow AB \bar{\wedge} A''B''$.

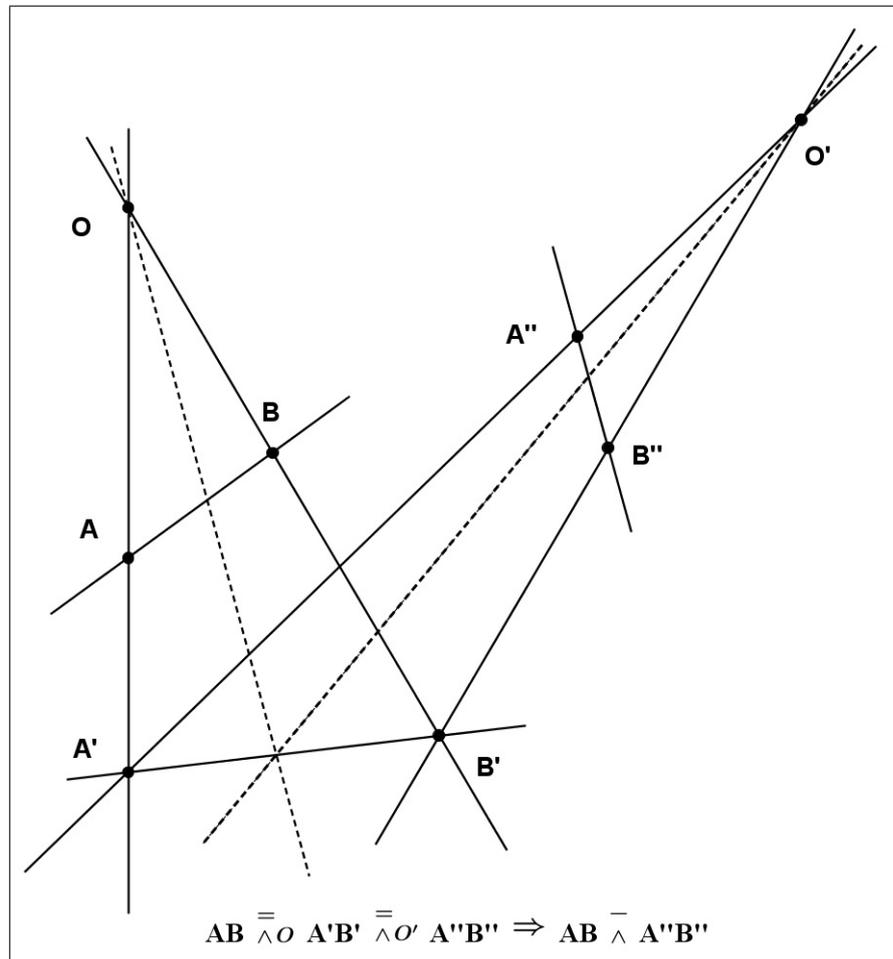


Figura 20: Projetividade entre fileiras de pontos.

Enquanto uma perspectividade pode ser definida por um ponto ou por uma reta, respectivamente chamados de centro e eixo de perspectividade, uma projetividade não é definida em relação a um centro (ponto) ou uma reta (eixo). A exceção ocorre quando uma projetividade é formada por apenas uma perspectividade (CASTRO, 2012, p. 28).

3.3 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA GEOMETRIA PROJETIVA

Estabelecidas as definições de perspectividade e projetividade, o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva constitui um importante resultado que estabelece o que é necessário para que uma projetividade possa ser bem definida, ou seja, aquilo que garante que uma projetividade entre duas fileiras de pontos seja única.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva). *Uma projetividade é determinada quando são conhecidos três pontos colineares e seus três pontos colineares correspondentes.*

Inicialmente é necessário verificar, com base nas definições supracitadas, a existência de uma projetividade entre duas fileiras de três pontos. Para isso, conforme a construção da Figura 21: sejam duas fileiras de pontos A, B, C sobre a reta r e A', B', C' sobre a reta s ; a reta l é construída passando por A e A' ; seja um ponto P , pertencente a l , diferente de A e A' ; passando por P e B é definida a reta m ; passando por P e C é definida a reta n ; por A' traça-se a reta t diferente de l e s ; na interseção de t e m defina-se o ponto B_1 ; na interseção de t e n defina-se o ponto C_1 ; sejam os segmentos B_1B' e C_1C' , sobre a interseção dos mesmos é definido o ponto Q .

Então, $ABC \stackrel{P}{\bar{\wedge}} A'B_1C_1 \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} A'B'C' \Rightarrow ABC \bar{\wedge} A'B'C'$, ou seja, a fileira ABC é perspectiva à fileira $A'B_1C_1$ pelo ponto P que, por sua vez, é perspectiva à fileira $A'B'C'$ pelo ponto Q e, como o produto de duas perspectividades consecutivas estabelece uma projetividade, conclui-se que a fileira ABC é uma projeção da fileira $A'B'C'$ e vice-versa.

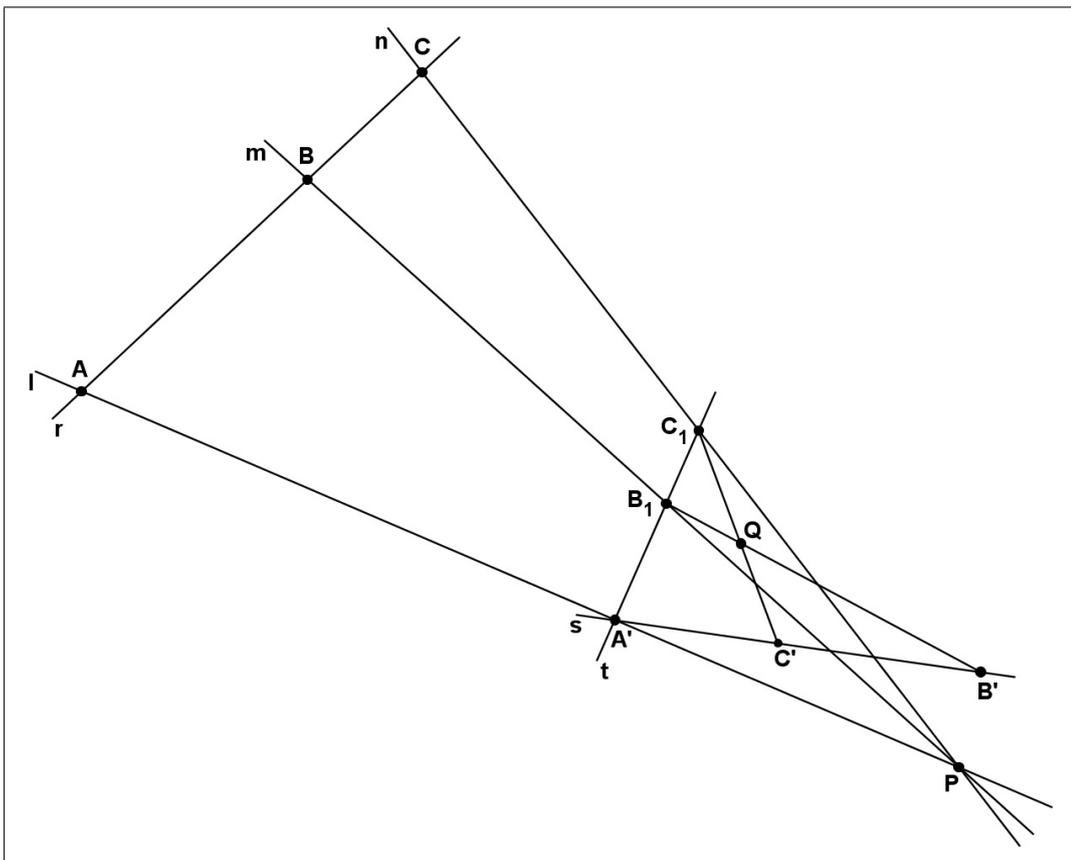


Figura 21: Projetividade composta por duas perspectividades.

Uma vez verificada a existência da projetividade entre duas fileiras de três pontos, é necessário provar que esta projetividade está bem definida para quaisquer pontos sobre os feixes

dados, ou seja, que não exista outra projetividade entre os feixes que eventualmente resulte em pontos diferentes dos mesmos.

A prova da unicidade do Teorema 3.1 utiliza um axioma adicional da Geometria Projetiva. Este axioma é descrito por Auffinger e Valentim (2003, p.14) da seguinte forma:

AP5: Se uma projetividade deixa invariante cada um dos três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todos os pontos da reta.

Prova da unicidade:

Dada uma fileira de pontos A, B, C e X sobre a reta n e outra fileira A_1, B_1 e C_1 sobre a reta m , uma das maneiras de construir um ponto X_1 pertencente à m tal que $ABCX \bar{\wedge} A_1B_1C_1X_1$ é apresentada na Figura 22. Nesta construção geométrica a fileira $ABCX$ é perspectiva à fileira $EFGH$ pelo ponto A_1 e esta última é perspectiva à fileira $A_1B_1C_1X_1$ pelo ponto A , concluindo-se então que $ABCX$ é uma projeção de $A_1B_1C_1X_1$.

De forma resumida, obtém-se a seguinte cadeia de perspectividades:

$$ABCX \bar{\wedge}_{A_1} EFGH \bar{\wedge}_A A_1B_1C_1X_1. \quad (1)$$

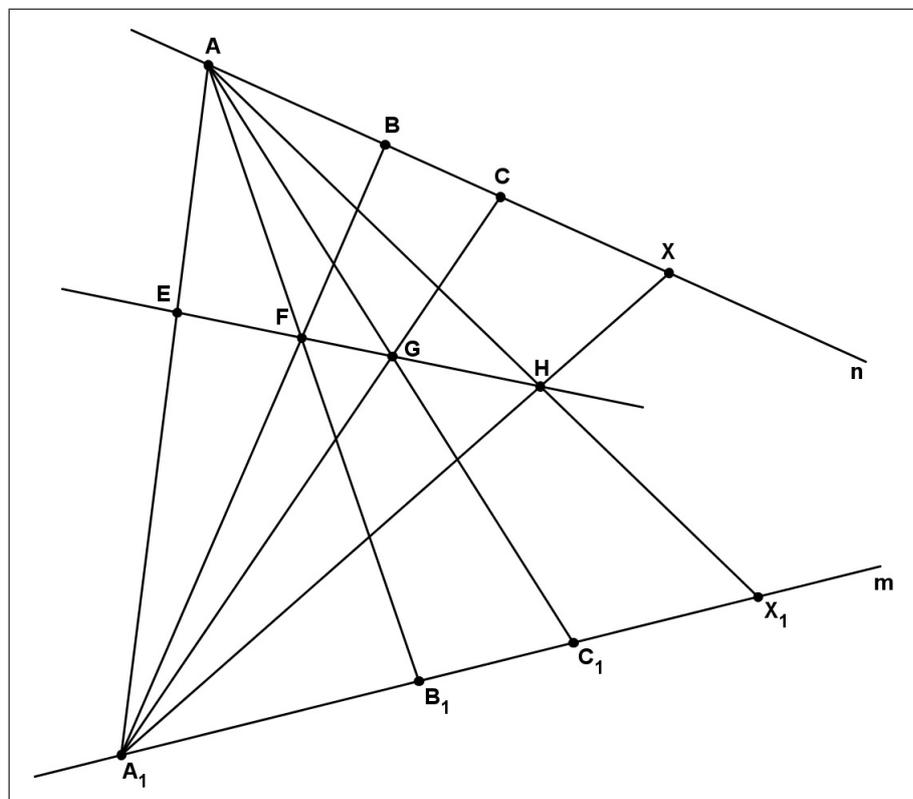


Figura 22: Projetividade entre fileiras de quatro pontos.

É importante salientar que a sequência de perspectividades apresentada é possível desde que as retas n e m não sejam coincidentes. Supondo, entretanto, que as retas n e m sejam coincidentes, nesse caso uma perspectividade qualquer pode ser utilizada para levar a fileira $ABCX$ para fora de n e é possível construir a seguinte cadeia de perspectividades:

$$ABCX \stackrel{=}{\wedge}_O A_2B_2C_2X_2 \stackrel{=}{\wedge}_{A_1} EFGH \stackrel{=}{\wedge}_{A_2} A_1B_1C_1X_1. \quad (2)$$

Supondo, então, que o ponto X_1 de (1) é diferente do ponto X_1 de (2), ou seja, se o ponto X_1 não for único, existe um ponto X_3 diferente de X_1 tal que (1) e (2) resultam, respectivamente, em:

$$ABCX \stackrel{=}{\wedge} A_1B_1C_1X_1 \text{ e } ABCX \stackrel{=}{\wedge} A_1B_1C_1X_3.$$

Assim, seguindo o caminho inverso da cadeia de perspectividades (1) e em seguida o caminho estabelecido pela cadeia (2) resulta que $A_1B_1C_1X_1 \stackrel{=}{\wedge} A_1B_1C_1X_3$, o que contraria o Axioma AP5. Portanto, não existe tal ponto X_3 e a unicidade do Teorema 3.1 está provada.

O Teorema 3.1 é chamado de Teorema Fundamental da Geometria Projetiva para Retas. No caso de transformações projetivas¹ de pontos não colineares no plano, o mesmo teorema é enunciado da seguinte maneira:

Teorema 3.2 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva para Planos). *Sejam duas quádruplas de pontos A, B, C, D e A', B', C', D' , três a três não colineares, então existe uma única transformação projetiva que leva A em A' , B em B' , C em C' e D em D' .*

A prova deste teorema é feita com a utilização de princípios da álgebra linear associados à ideia do quadrângulo e do quadrilátero completos, Figura 26 e Figura 27 da Seção 3.4. Seguindo os passos adotados na demonstração do Teorema 3.1, inicialmente verifica-se a existência de uma transformação projetiva t_1 entre duas quádruplas de pontos não colineares (A, B, C, D) e (A', B', C', D') do espaço projetivo. Posteriormente, seguindo a caminho inverso e supondo a hipótese da mesma transformação t_1 levar os mesmos quatro pontos (A, B, C, D) em outros quatro pontos diferentes (A'', B'', C'', D'') , chega-se ao absurdo, concluindo-se que t_1 é única.

Uma demonstração completa é sugerida por Ribeiro (2012, p. 23-26) e uma forma dual do Teorema 3.1 é apresentada na próxima seção.

¹Transformação projetiva: é a composição de perspectivas no plano projetivo, podendo ser chamada também de projetividade do plano projetivo (ALMEIDA, 2007, p. 30).

3.4 PRINCÍPIO DA DUALIDADE

Uma característica marcante da Geometria Projetiva é a possibilidade de trocar pontos por retas e vice-versa, além de alguns termos relacionados a estes elementos, sem que se perca a validade de axiomas, proposições e teoremas. Esta característica é chamada de Princípio da Dualidade ou Princípio da Reciprocidade, que é possível pelo fato de pontos e retas preservarem relações de incidência e, em especial, devido à existência de pontos ideais na Geometria Projetiva.

Obviamente, para que o sentido das afirmações duais não seja prejudicado, alguns outros elementos linguísticos também precisam ser alterados quando as palavras ponto e reta são alternadas entre si. Segundo Coxeter e Greitzer (1967, p. 135) quando as palavras ponto e reta são substituídas uma pela outra em uma afirmação, os demais elementos devem ser recolocados de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2: Expressões duais entre ponto e reta.

Ponto	Reta
está sobre	passa por
reta por dois pontos	intersecção de duas retas
concorrentes	colineares
vértice	lado
quadrângulo	quadrilátero
tangente	ponto de contato

(Adaptado de Coxeter e Greitzer (1967, p. 135))

A partir do princípio da dualidade as afirmações da Geometria Projetiva que relacionam pontos, retas e incidência entre estes elementos podem ser dualizadas da seguinte maneira:

- ponto que incide na reta \Leftrightarrow Reta que passa pelo ponto.
- reta determinada pelos pontos \Leftrightarrow Pontos definidos pela intersecção das retas.
- uma fileira de pontos incidentes numa única reta pode ser dualizada em um feixe de retas que se cruzam em um mesmo ponto, Figura 23.

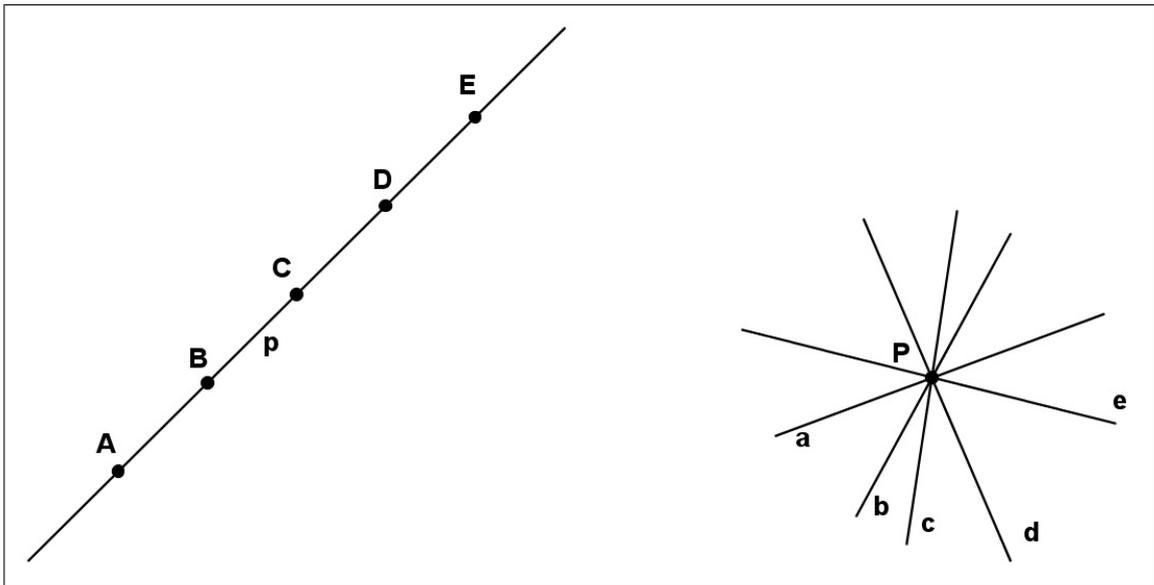


Figura 23: Figuras duais: fileira de pontos e feixe de retas.

Três pontos não colineares e as retas que os unem podem ser dualizados por três retas não incidentes num mesmo ponto e os pontos determinados pela sua intersecção duas a duas, Figura 24. É possível verificar que o dual de um triângulo é um triângulo igual ao original, neste caso diz-se que o ente geométrico que possui ele próprio como seu dual é uma figura auto-dual.

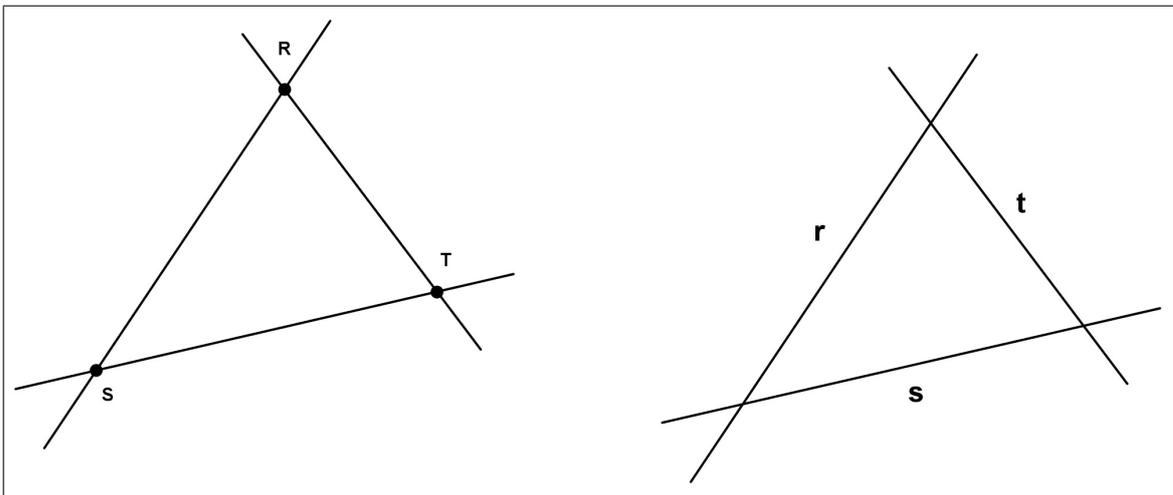


Figura 24: Figuras auto-duais: três pontos não colineares e as retas que os unem.

Um conjunto de pontos incidentes sobre uma cônica apresenta como forma dual um conjunto de retas tangentes à mesma cônica, Figura 25.

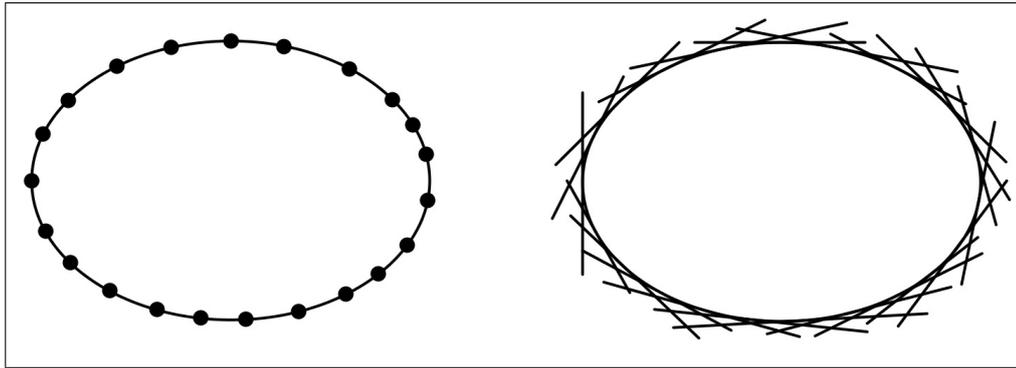


Figura 25: Dual entre pontos incidentes e retas tangentes à elipse.

Quando o princípio da dualidade é aplicado aos teoremas da Geometria Projetiva surgem as formas duais destes mesmos teoremas, que não necessitam de uma demonstração diferenciada em relação ao original, exceto a dualização passo a passo de sua demonstração. Assim, o princípio da dualidade gera economia de demonstrações e possibilita o acesso a novos resultados.

Observa-se facilmente que na Geometria Euclidiana não é possível adotar o princípio da dualidade. Caso fosse aplicado, o axioma A1, por exemplo, seria escrito na forma dual da seguinte maneira:

A1 Dual: Dadas duas retas distintas p e q , existe um e apenas um ponto R no qual as retas se cruzam.

O que seria um absurdo, pois na Geometria Euclidiana retas paralelas distintas não tem ponto em comum. Já os axiomas AP1 a AP4 da Geometria Projetiva podem ser reescritos na sua forma dual de acordo com Tabela 3.

Tabela 3: Axiomas da Geometria Projetiva e seus duais.

Axioma	Forma Original	Forma Dual
AP1	Dois pontos distintos pertencem a uma e apenas uma reta	Duas retas distintas passam por um e apenas um ponto
AP2	Quaisquer duas retas se encontram em, pelo menos, um ponto	Quaisquer dois pontos são colineares
AP3	Existem três pontos não colineares	Existem três retas que não passam pelo mesmo ponto
AP4	Cada reta contém, pelo menos, três pontos	Sobre cada ponto passam, pelo menos, três retas

Com o objetivo de ressaltar o princípio da dualidade, segundo Auffinger e Valentim (2003, p. 12), Poncelet introduziu dois entes geométricos duais entre si: o quadrângulo completo e o quadrilátero completo – a palavra completo foi usada para diferenciá-los de um quadrilátero usual.

- *Quadrângulo completo*: também chamado de quadrângulo projetivo é composto por quatro pontos (A, B, C, D), designados por vértices, três a três não colineares e, pelas seis retas (r, s, t, u, v, w), designadas por lados, determinadas por cada par de pontos. Dois lados são opostos se o ponto de intersecção entre eles não é um vértice, neste caso o ponto é chamado de ponto diagonal. Existem três pontos diagonais (O, P, Q), representados por formas retangulares na Figura 26.

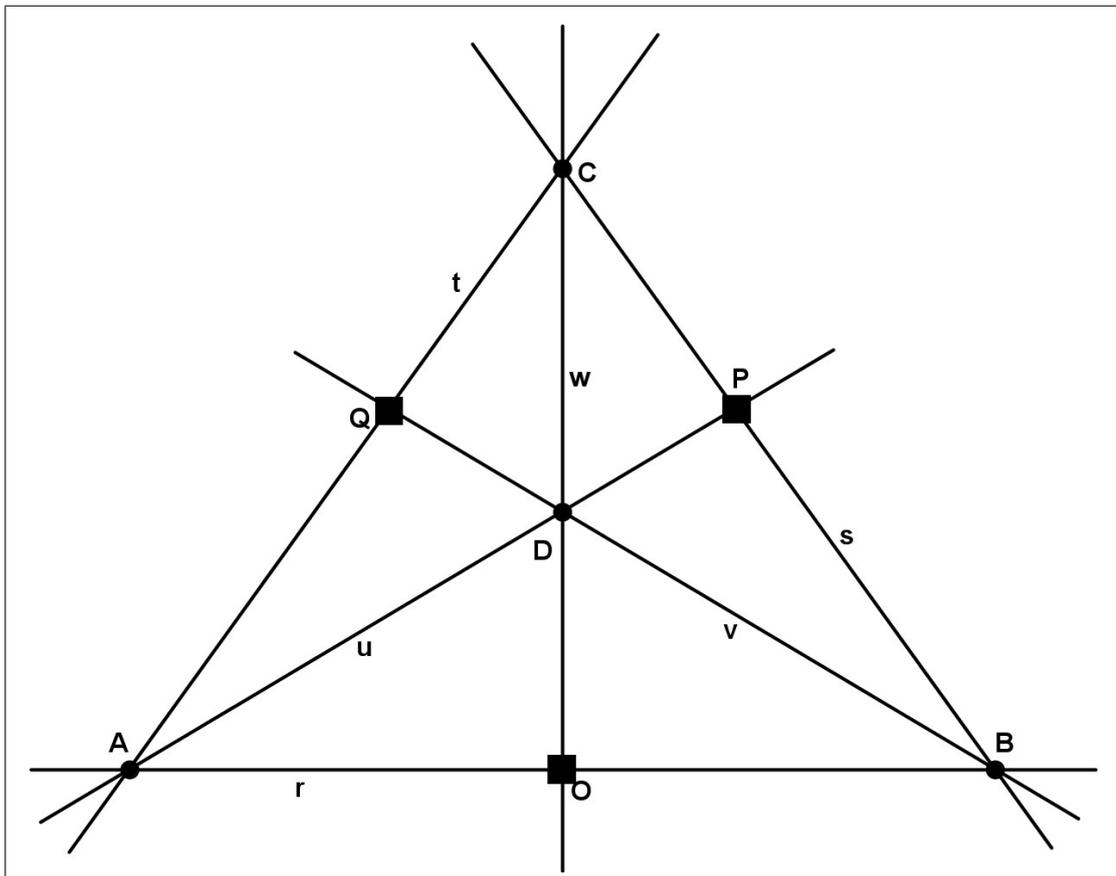


Figura 26: Quadrângulo completo.

- *Quadrilátero completo*: é composto por quatro retas (a, b, c, d), designadas por lados, três a três não concorrentes, e pelos seis pontos (R, S, T, U, V, W), designados por vértices, determinados por cada par de retas. Dois vértices são opostos se a reta que os une não é um lado, neste caso a reta é chamada de reta diagonal. Existem três retas diagonais (o, p, q), representadas por linhas tracejadas na Figura 27.

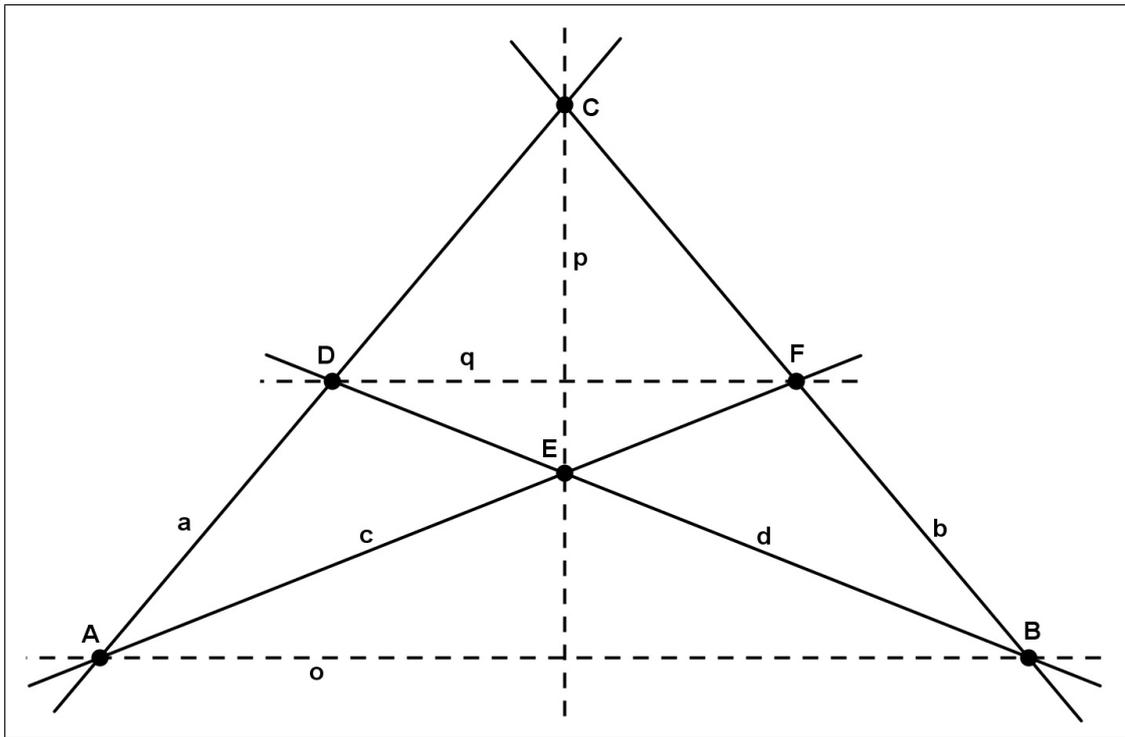


Figura 27: Quadrilátero completo.

Na comparação entre o quadrângulo e o quadrilátero completo das Figuras 26 e 27 é possível verificar a semelhança entre as duas figuras. Entretanto, a construção de uma é feita dualizando a outra. Em especial, a construção gráfica apresentada constitui uma figura auto-dual, porém outras configurações gráficas dos mesmos entes geométricos poderiam não apresentar figuras auto-duais.

O Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (Teorema 3.1), demonstrado na seção anterior, pode ser dualizado da seguinte forma:

Teorema 3.3 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva – forma dual). *Uma projetividade é determinada quando são conhecidas três retas concorrentes e suas três retas concorrentes correspondentes.*

Como esta é a forma dual do Teorema 3.1, já demonstrado no item 3.3, não é necessária uma nova demonstração, uma vez que foi admitido o princípio da dualidade.

O teorema que melhor representa o princípio da dualidade da Geometria Projetiva é o Teorema de Desargues (dos triângulos perspectivos). Este teorema também possibilita a visualização e compreensão de como a perspectiva é fundamentada pela Geometria Projetiva.

3.5 O TEOREMA DE DESARGUES

3.5.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Girard Desargues (1591-1661) foi um arquiteto e engenheiro militar francês que desde cedo demonstrou interesse pelo estudo das cônicas de Apolônio (262-190 a.C.). Sua obra apresentava uma nova maneira de tratar as demonstrações geométricas, nada ortodoxas para a época. Utilizava termos oriundos de outras áreas do conhecimento e os atribuía às entidades geométricas conhecidas. Por exemplo, uma reta interceptada por outras retas é chamada de tronco e os pontos de intersecção são chamados de nós, as retas que passam pelos nós são os galhos e três pares de nós formam uma árvore. Essa linguagem inovadora não contou com a simpatia dos matemáticos da época.

Em 1639, ele publicou sua principal obra com o título “*Brouillon projet d’une atteinte aux événements des recontres d’un cone avec un plan*”, cuja tradução pode ser “*Esboço tosco de uma tentativa de descrever os resultados do encontro de um cone com um plano*”. Nesta obra, desprezada na época, Desargues trata das cônicas como diferentes projeções de uma circunferência.

A obra de Desargues foi ofuscada pelo uso de uma linguagem considerada não adequada e pelo fato de René Descartes (1596-1650), que era seu amigo, ter lançado as bases da Geometria Analítica anos antes.

Desargues inovou em seus estudos quando passou a usar os pontos ideais, no infinito, como sendo o ponto de encontro entre retas paralelas, criando assim o plano projetivo. Além disso, sua obra concentrava-se no estudo dos invariantes projetivos, ou seja, as propriedades que não eram alteradas entre as diferentes projeções de um mesmo ente geométrico.

Sua obra teria sido perdida se não fossem cópias manuscritas feitas por um de seus poucos admiradores, Philippe De La Hire (1640-1718). A porção mais conhecida é, até hoje, o teorema dos triângulos perspectivos, que não era parte integrante do *Brouillon projet* (YOKOYAMA, 2000, p. 6-9). Este teorema foi publicado em 1648 no livro *Manière universelle de S. Desargues pour pratiquer la perspective*, pelo artista francês Abraham Bosse (1602-1676), que era admirador e amigo de Desargues (FARIA, 2013, p. 29).

3.5.2 O TEOREMA DOS TRIÂNGULOS PERSPECTIVOS

O Teorema dos Triângulos Perspectivos de Desargues foi inicialmente proposto para o plano euclidiano. Entretanto, utiliza o conceito de perspectividade descrito na Seção 3.2. Hilbert

(1950, p. 46) descreve assim o teorema em questão de forma estritamente plana:

Teorema 3.4 (Teorema dos Triângulos de Desargues – para o plano euclidiano). *Quando dois triângulos estão situados no plano, tais que seus lados homólogos são respectivamente paralelos, então as retas que unem os vértices homólogos passam pelo mesmo ponto, ou são paralelas entre si.*

Este importante caso particular de triângulos perspectivos preserva o paralelismo entre os lados homólogos de dois triângulos no mesmo plano (Figura 28) para triângulos de diferentes tamanhos.

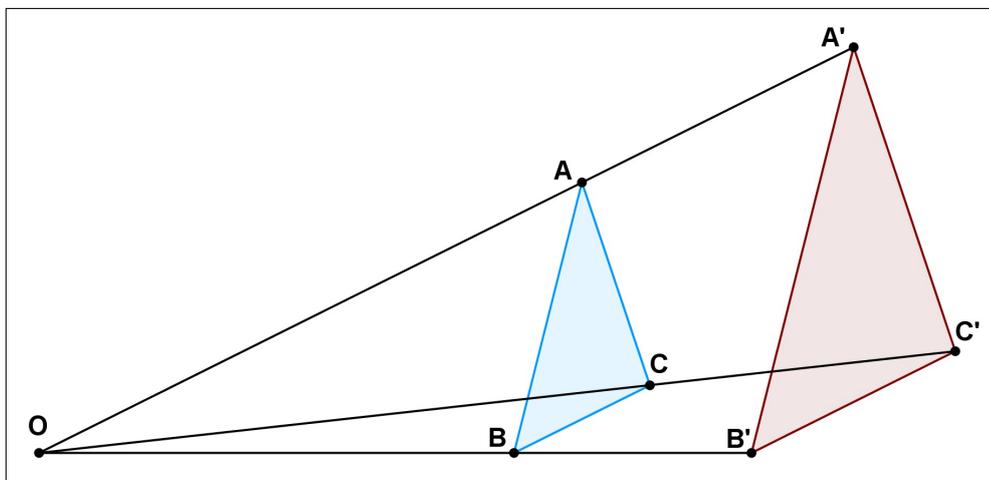


Figura 28: Triângulos perspectivos no plano euclidiano.

E, na Figura 29, para triângulos congruentes com as retas que unem os vértices homólogos paralelas entre si.

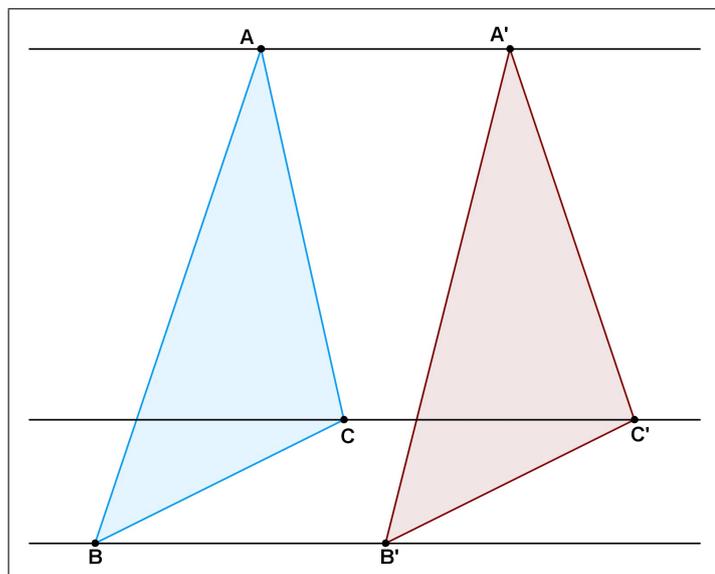


Figura 29: Triângulos perspectivos congruentes no plano euclidiano.

Se estendido para o espaço, com triângulos situados em planos paralelos, o Teorema 3.4 pode ser ilustrado como na Figura 30, para triângulos de diferentes tamanhos e, na Figura 31 para triângulos congruentes. Em ambos os casos, no plano ou no espaço em planos paralelos, há uma homotetia entre os triângulos, onde O é o centro e $k = \frac{OA}{OA'}$ é a razão da homotetia (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012, p. 78).

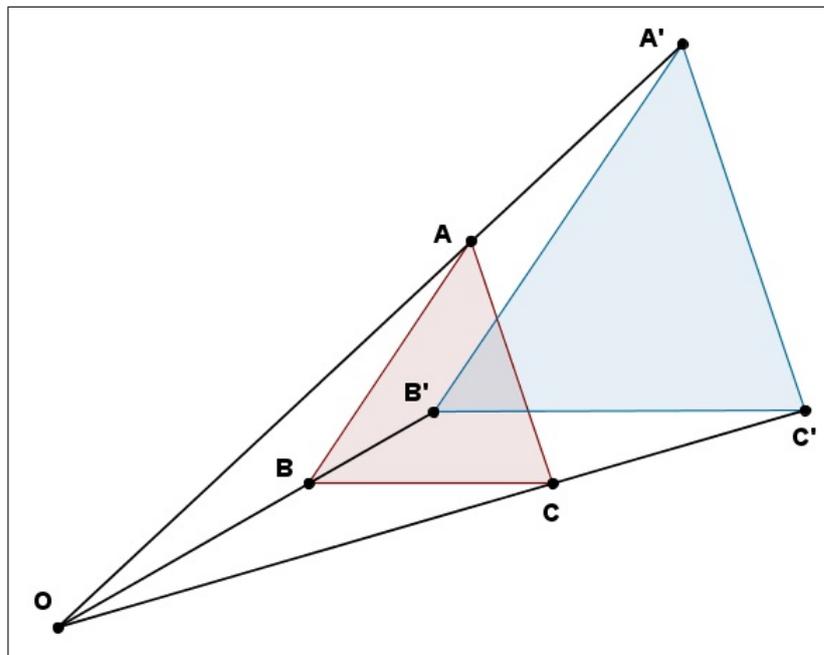


Figura 30: Triângulos perspectivas no espaço.

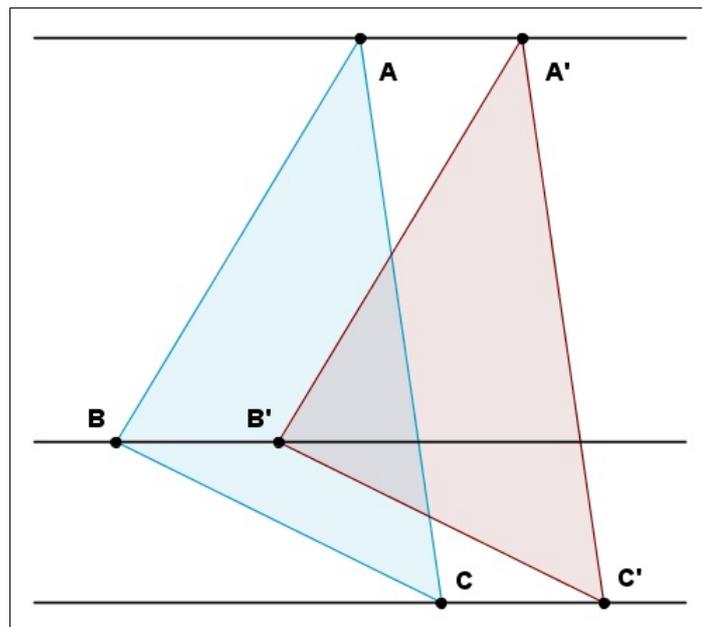


Figura 31: Triângulos perspectivas congruentes no espaço.

Ampliando este conceito inicial, Coxeter e Greitzer (1967, p. 70) descreve o mesmo teorema a partir da ideia da perspectividade com centro em um ponto definido. Além disso, acrescenta a colinearidade dos pontos de intersecção entre os lados dos triângulos.

Teorema 3.5 (Teorema dos Triângulos Perspectivos de Desargues – no plano e no espaço afim). *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, e se os seus pares de lados correspondentes se encontram, então os três pontos de intersecção são colineares.*

Para o plano euclidiano a prova do Teorema 3.5 será baseada no teorema de Menelau (70-130), utilizado originalmente por Desargues. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Coxeter e Greitzer (1967, p. 66-67). A Figura 32 possibilita a sua visualização.

Teorema 3.6 (Teorema de Menelau – forma alternativa). *Três pontos X, Y e Z das três retas suporte AB, BC e CA de um triângulo ABC são colineares por uma reta transversal aos lados do triângulo se e somente se:*

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = -1.$$

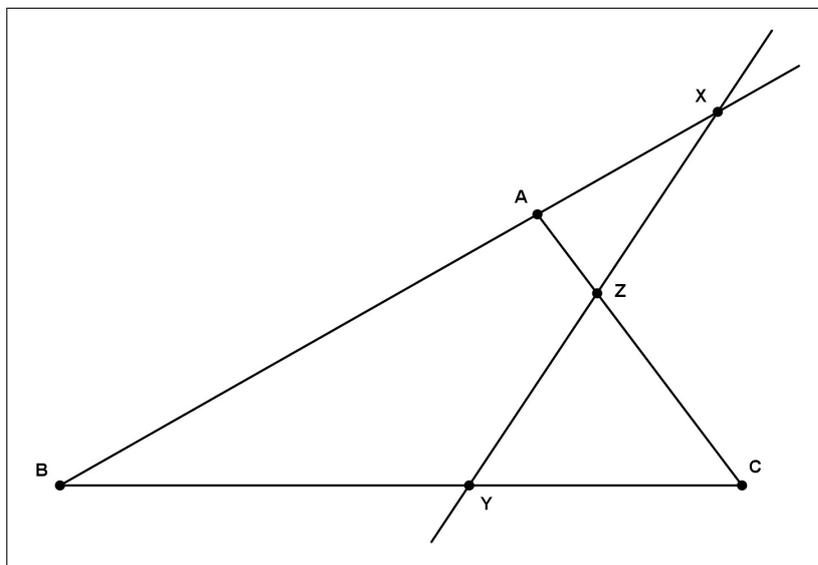


Figura 32: Triângulo de referência para o Teorema de Menelau.

Note que a reta XYZ é transversal aos lados AC e BC, bem como ao prolongamento do lado AB. Neste caso, diz-se que a reta XYZ é transversal aos três lados do triângulo ABC, valendo portanto a relação proposta pelo Teorema 3.6.

Prova do Teorema 3.5

Para a sequência da prova do Teorema 3.5 considera-se a Figura 33, que traz uma construção geométrica na qual dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são perspectivos pelo ponto O e cujos prolongamentos dos lados correspondentes AB com $A'B'$, BC com $B'C'$ e CA com $C'A'$ se interceptam respectivamente nos pontos P , Q e R , colineares pela reta r .

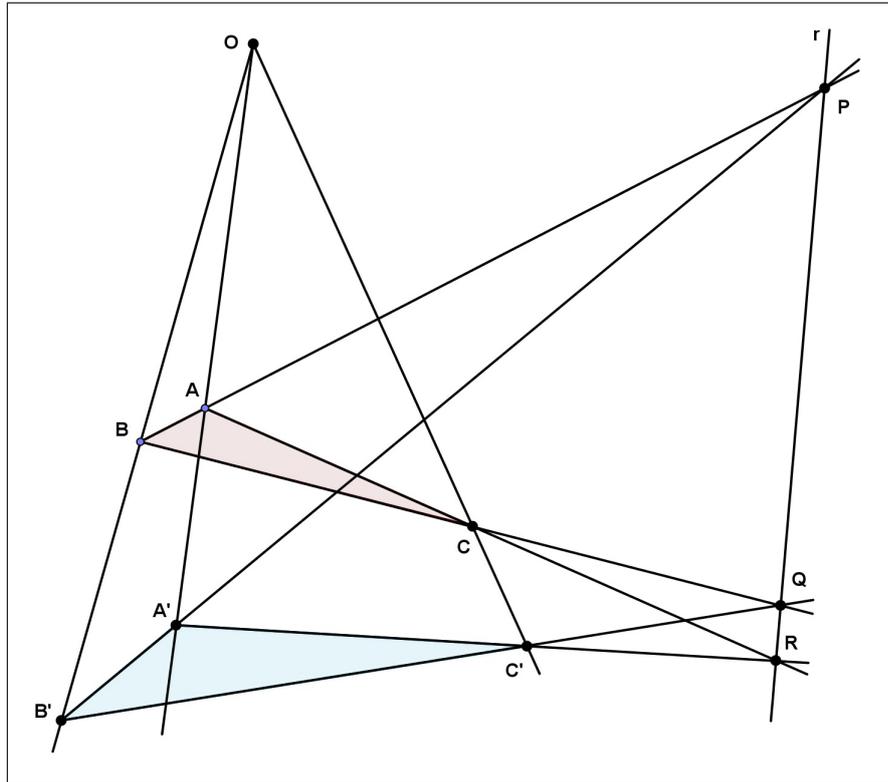


Figura 33: Ilustração do Teorema de Desargues no plano.

Com relação aos triângulos OAB , OAC e OBC , as retas $B'A'P$, $A'C'R$ e $B'C'Q$ são, respectivamente, transversais aos seus lados. Através de repetidas aplicações do Teorema de Menelau obtém-se:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = -1, \quad (3)$$

$$\frac{CR}{RA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = -1, \quad (4)$$

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = -1. \quad (5)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (3), (4) e (5) resulta que:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{BQ}{QC} = -1.$$

Assim, pelo Teorema 3.6 tem-se que os pontos P , Q e R são colineares.

Para o espaço afim da Geometria Euclidiana, segue a prova espacial do mesmo teorema baseada em Hartshorne (1967, p. 8):

Considere que o triângulo ABC está contido no plano π e que $OABC$ é um tetraedro. Considere ainda que o triângulo $A'B'C'$ está contido no plano π' e que $OA'B'C'$ é um outro tetraedro, conforme Figura 34.

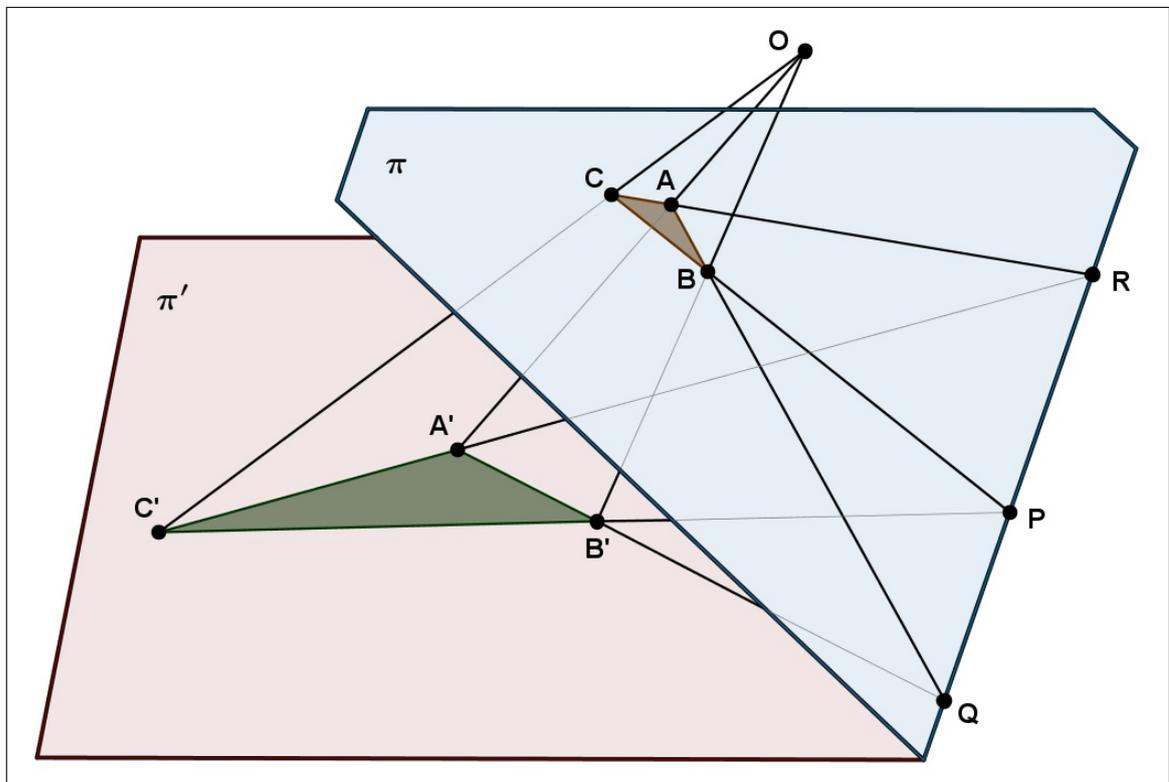


Figura 34: Triângulos perspectivos no espaço.

As retas AB e $A'B'$ estão contidas, respectivamente, nos planos π e π' e se interceptam no ponto Q . De forma similar as retas BC e $B'C'$ pertencem, respectivamente, aos planos π e π' e se interceptam no ponto P e as retas AC e $A'C'$ pertencem, respectivamente, aos planos π e π' e se interceptam no ponto R . Logo, os pontos P , Q e R pertencem ao plano π e também ao plano π' . Portanto, eles pertencem à intersecção dos dois planos, que é a reta r .

A forma clássica deste mesmo teorema, que traz à tona a ideia da dualidade, pois relaciona perspectividade por um ponto e por uma reta, e que o generaliza é a seguinte:

Teorema 3.7 (Teorema dos Triângulos Perspectivos de Desargues – forma generalizada). *Dois triângulos são perspectivos por um ponto se e somente se são perspectivos por uma reta.*

A prova deste teorema não pode ser feita utilizando apenas a Geometria Euclidiana, quer seja no plano ou espaço. O Teorema 3.5 pôde ser provado através da Geometria Euclidiana, pois no seu enunciado havia a condição de que os lados correspondentes dos triângulos deveriam se encontrar, ou seja, os dois triângulos não poderiam ser congruentes.

Com o objetivo de provar que dois triângulos, paralelos ou não, num mesmo plano ou no espaço, podem ser perspectivos por um ponto é necessário considerá-los no plano ou no espaço projetivo, onde, pelo Axioma AP2 apresentado na Seção 3.2, as retas que unem os vértices correspondentes dos triângulos se encontram em um ponto, o centro da perspectividade, que pode ser visualizado tanto na Figura 33 quanto na Figura 34, onde o referido ponto é denotado por O .

Resta verificar que os pontos de intersecção das retas formadas pelos lados correspondentes são colineares. Novamente, pelo Axioma AP2, estas retas se encontram duas a duas em três pontos distintos. A prova da colinearidade destes pontos pode ser obtida através de um resultado auxiliar cunhado a partir da aplicação de uma série de perspectividades e projetividades. Esta demonstração, bem como a demonstração do seu dual, pode ser encontrada em Faria (2013, p. 30).

Outra prova pode ser encontrada em Almeida (2007, p. 25,36), que através de um resultado auxiliar, afirma que a reta que une os pontos de intersecção dos lados correspondentes de dois triângulos perspectivos (eixo de perspectividade) é a linha de terra e que o centro da perspectividade (ponto O) é o ponto de fuga. Ambos, elementos de perspectiva apresentados na Seção 2.4.

A forma dual do Teorema 3.7 pode ser obtida pela simples alternância entre ponto e reta, como segue:

Teorema 3.8 (Teorema dos Triângulos Perspectivos de Desargues – forma dual). *Dois triângulos são perspectivos por uma reta se e somente se são perspectivos por um ponto.*

Na sequência são apresentados outros dois importantes resultados históricos para a Geometria Projetiva: o Teorema de Pappus e o Teorema de Pascal.

3.6 O TEOREMA DE PAPPUS E O TEOREMA DE PASCAL

3.6.1 O TEOREMA DE PAPPUS

Pappus de Alexandria viveu por volta de 300 a.C., considerado o último grande geômetra da antiguidade, desenvolveu e preservou parte dos conhecimentos geométricos dos antigos gregos. Conhecido como o precursor da Geometria Projetiva, o teorema que leva seu nome foi estudado e ampliado por outros importantes matemáticos como Pascal e Brianchon e, por ter sido amplamente explorado durante os séculos, muitas versões diferentes foram cunhadas. Uma destas versões, baseada em Coxeter (1974, p. 68) e Hartshorne (1967, p. 37) é descrita a seguir:

Teorema 3.9 (Teorema de Pappus). *Sejam os pontos A, C, E sobre a reta r e os pontos B, D, F sobre outra reta l , diferentes da intersecção entre as duas retas, e se as retas AB, CD, EF encontram as retas DE, FA, BC , respectivamente, então os três pontos de intersecção L, M, N são colineares.*

Assim como há versões diferentes do enunciado do Teorema de Pappus, o mesmo ocorre com a construção geométrica deste teorema. A Figura 35 apresenta uma destas possibilidades. Tanto o enunciado do teorema quanto sua construção geométrica independem das medidas de comprimentos e ângulos. Também não há referência à ordem, pois os conjuntos de três pontos podem se alternar entre si. É possível ainda permutar os nomes dos pontos A, B, C, D, E e F , desde que sejam adequadamente renomeados os três pontos de intersecção. Portanto, este é um teorema de “pura incidência”, o que determina a sua natureza projetiva (COXETER, 1974, p. 68).

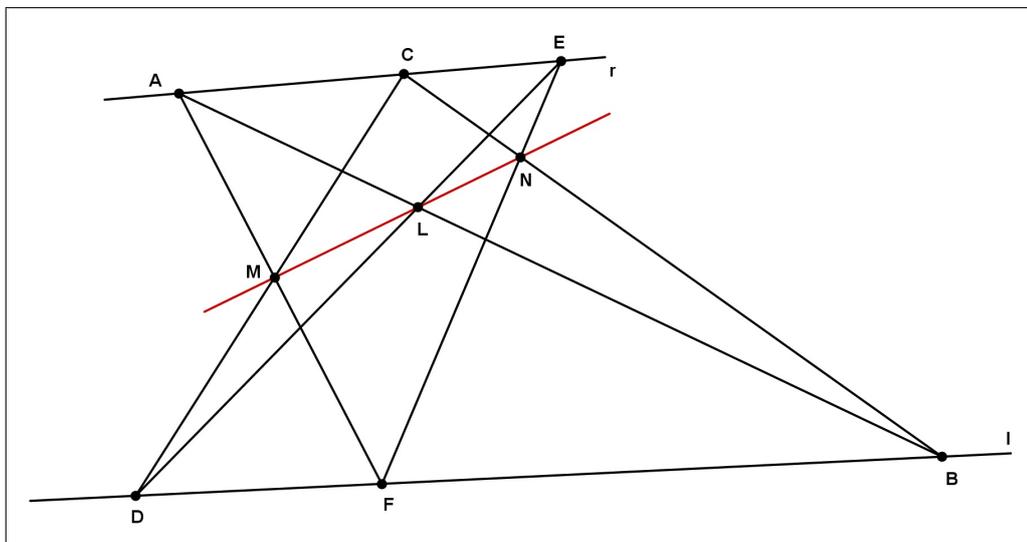


Figura 35: Ilustração do Teorema de Pappus.

Demonstração:

A demonstração do Teorema de Pappus será baseada no Teorema de Menelau (Teorema 3.6) e na configuração apresentada na Figura 36.

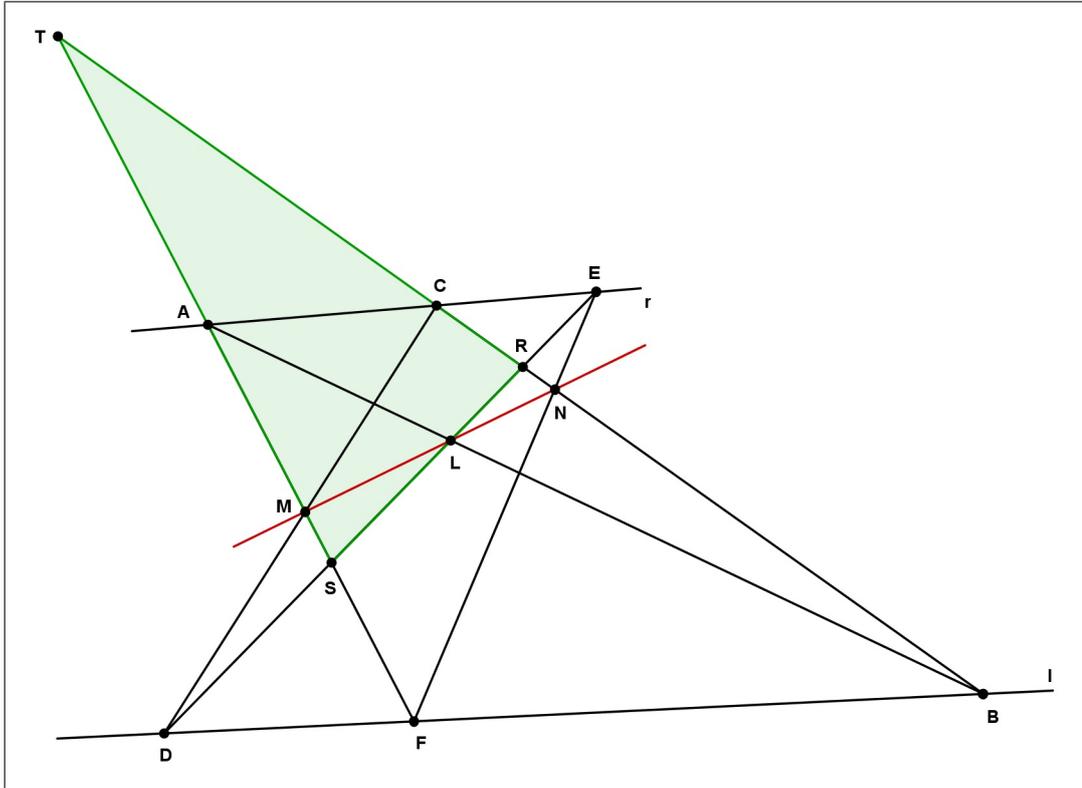


Figura 36: Ilustração do Teorema de Pappus adaptado para demonstração.

Considere que as retas ED , BC , FA formam o triângulo RST . Aplicando a ele o Teorema 3.6 sucessivamente e em cada uma delas considerando uma transversal diferente, obtém-se:

- transversal LBA

$$\frac{SL}{LR} \cdot \frac{RB}{BT} \cdot \frac{TA}{AS} = -1, \quad (6)$$

- transversal ENF

$$\frac{SE}{ER} \cdot \frac{RN}{NT} \cdot \frac{TF}{FS} = -1, \quad (7)$$

- transversal DCM

$$\frac{SD}{DR} \cdot \frac{RC}{CT} \cdot \frac{TM}{MS} = -1, \quad (8)$$

- transversal ECA

$$\frac{SE}{ER} \cdot \frac{RC}{CT} \cdot \frac{TA}{AS} = -1, \quad (9)$$

- transversal DBF

$$\frac{SD}{DR} \cdot \frac{RB}{BT} \cdot \frac{TF}{FS} = -1. \quad (10)$$

Dividindo o produto das expressões (6), (7) e (8) pelo produto das expressões (9) e (10) encontra-se:

$$\frac{SL}{LR} \cdot \frac{RN}{NT} \cdot \frac{TM}{MS} = -1. \quad (11)$$

A equação (11) representa a aplicação do Teorema de Menelau ao triângulo RST considerando a diagonal LMN . Portanto, os pontos LMN são colineares, concluindo a demonstração (COXETER, 1974, p. 68), (CHAVES, 2013, p. 21-22).

Uma outra maneira de enunciar o Teorema de Pappus é descrita de forma generalizada por Auffinger e Valentim (2003, p. 25):

Teorema 3.10 (Teorema de Pappus – forma generalizada). *Se os seis vértices de um hexágono estão alternadamente sobre um par de retas então os três pares de lados opostos se encontram em pontos colineares.*

Mesmo que o Teorema de Pappus tenha surgido muito antes do Teorema de Pascal, ele é considerado como um caso particular deste.

3.6.2 O TEOREMA DE PASCAL

O matemático, físico, teólogo e escritor francês Blaise Pascal (1623-1662), natural de Clermont-Ferrand, começou a estudar e fazer geometria com doze anos. Ele participava com seu pai de reuniões na casa do padre Marin Mersenne (1588-1648). Nestas reuniões discutiam ideias sobre assuntos que lhes interessavam, entre eles, matemática. Participava também destas reuniões o arquiteto Girard Desargues, de quem Pascal pode ser considerado admirador (CHAVES, 2013, p. 24).

Aos dezesseis anos, em 1640, lançou o seu trabalho *Ensaio sobre cônicas*. Neste trabalho Pascal cunhou, de forma cuidadosa, o teorema sobre hexágonos inscritos em circunferências,

de modo que nenhuma regra da Geometria Euclidiana fosse violada (AUFFINGER; VALENTIM, 2003, p. 3). Posteriormente, o seu teorema ganhou a redação mais conhecida, que segue:

Teorema 3.11 (Teorema do Hexágono de Pascal). *Se os seis vértices de um hexágono estão sobre uma cônica, então os três pontos de intersecção dos pares de lados opostos são colineares.*

A prova original dada por Pascal ao seu teorema foi perdida, mas provavelmente ele utilizou o Teorema de Menelau, de forma similar aquela utilizada para a prova do Teorema de Pappus. Leibniz (1646-1716), um dos idealizadores do cálculo diferencial-integral, aprovou a demonstração original do Teorema de Pascal, antes de ser perdida (COXETER, 1974, p. 74).

O método utilizado para generalizar o Teorema de Pascal, originalmente pensado para circunferências, de forma que passasse a ser válido para todas as cônicas, foi criado por Desargues e Pascal. Consiste em encontrar uma figura homóloga, mais simples que a original, através de uma sequência de projeções e seções. Então, são estudadas as propriedade invariantes que passarão a valer para a figura mais complexa (HEFEZ, 1985, p. 42). Desta forma, como a circunferência e as cônicas são seções de um cone, o teorema em questão vale para todas as cônicas. A representação gráfica do Teorema 3.11 é apresentada na Figura 37 para o hexágono inscrito em uma circunferência.

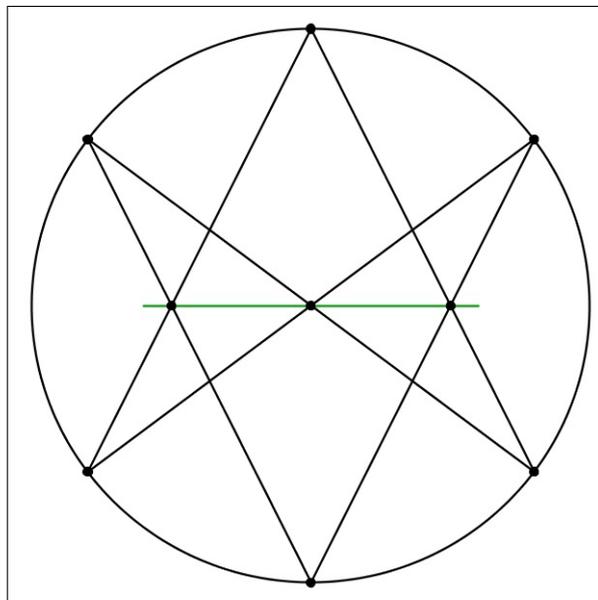


Figura 37: Teorema do Hexágono de Pascal na circunferência.

A Figura 38 e a Figura 39 apresentam, respectivamente, a representação gráfica do mesmo teorema para a elipse e para a hipérbole.

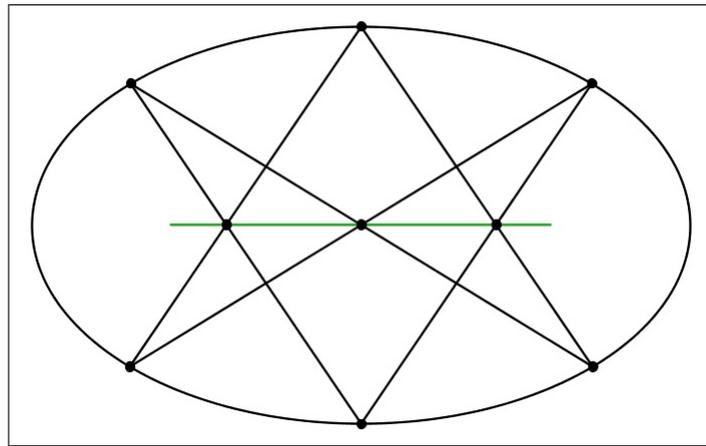


Figura 38: Teorema de Pascal na elipse.

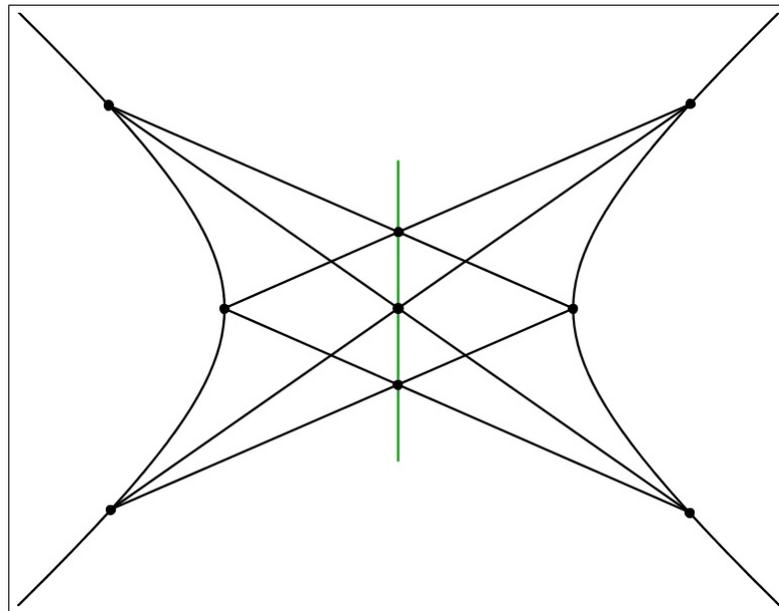


Figura 39: Teorema de Pascal na hipérbole.

Com o objetivo de tornar mais claro o método utilizado por Desargues e Pascal, de generalizar resultados para todas as seções cônicas, a Figura 40 apresenta uma construção que evidencia a invariância da aplicação do Teorema 3.11 para circunferências e elipses.

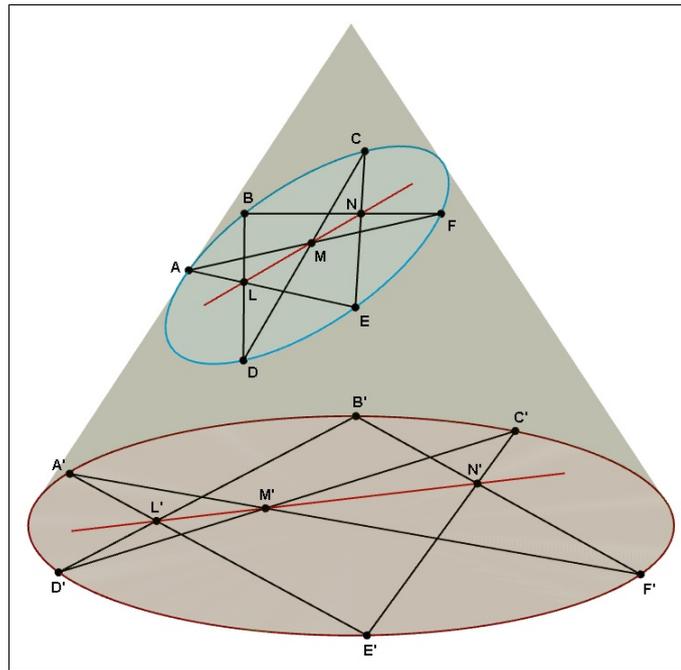


Figura 40: Teorema do Hexágono de Pascal aplicado a diferentes seções de um cone.

Segundo Hefez (1985, p. 43), através da utilização do método supracitado é possível obter o Teorema de Pappus. Por meio de uma seção longitudinal de um cone chega-se a uma cônica degenerada, no caso, duas retas concorrentes, conforme Figura 41.

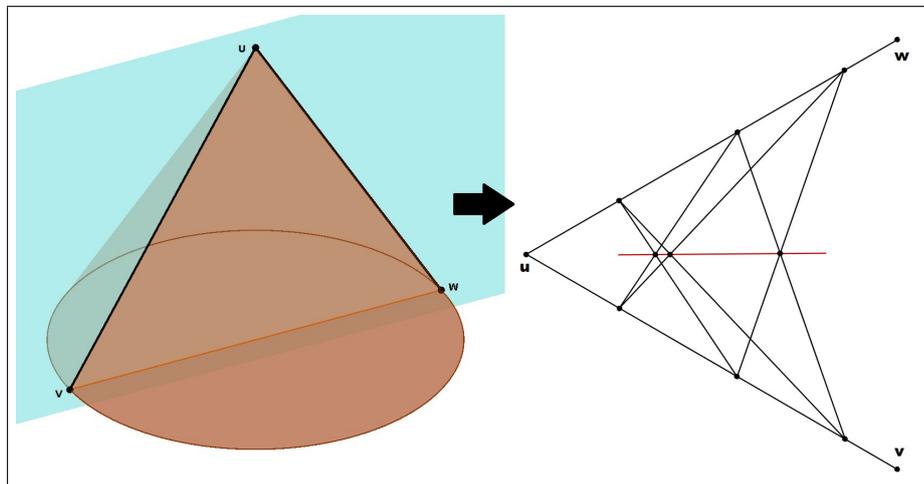


Figura 41: Teorema de Pappus pelo método das seções cônicas.

O Teorema 3.11 é também conhecido como Teorema do Hexagrama Místico de Pascal, certamente devido à sua semelhança com símbolos religiosos e, talvez, devido à religiosidade do seu criador. Um hexagrama é um tipo de hexágono não convexo com todos os lados congruentes, geralmente trata-se de uma figura composta por dois triângulos equiláteros sobrepostos, formando uma “estrela de seis pontas”.

Prova do Teorema 3.11:

Para a prova do Teorema 3.11 considera-se a Figura 42.

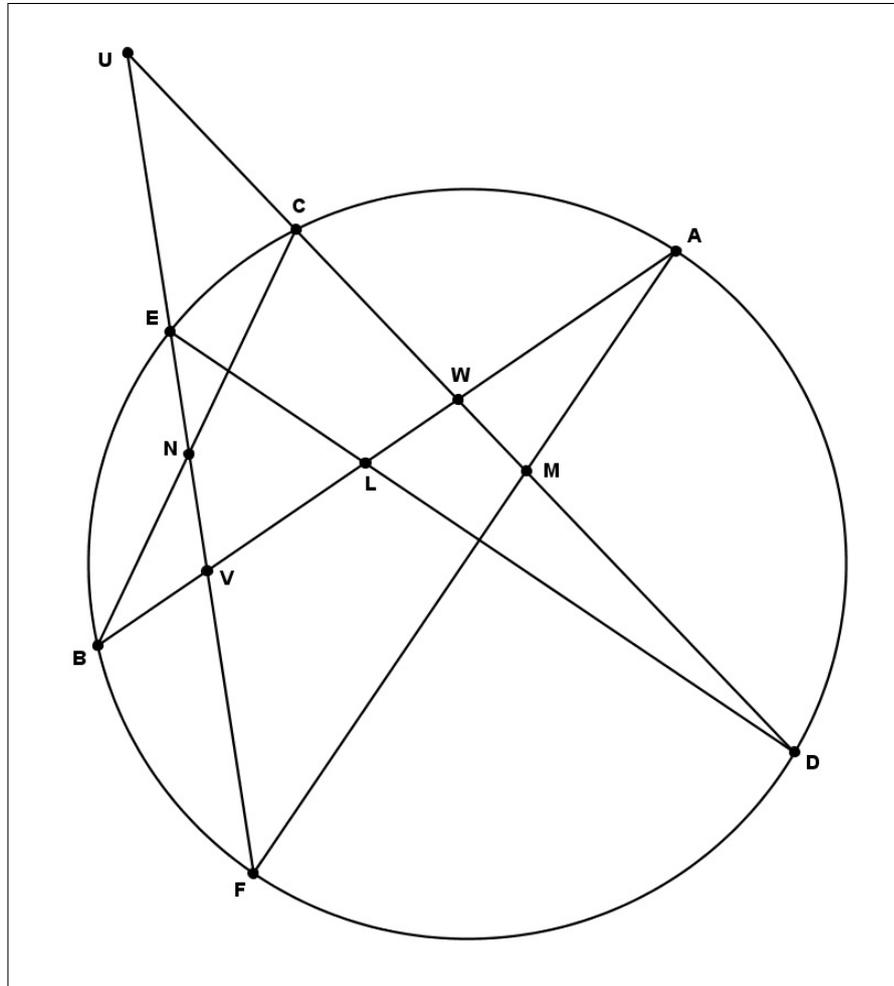


Figura 42: Teorema de Pascal adaptado para demonstração.

Observa-se que o hexágono $ABCDEF$ está inscrito na circunferência. Assumindo que as retas AB, CD, EF formam o triângulo UVW , aplica-se o Teorema de Menelau três vezes a cada uma das transversais, obtém-se:

- transversal LDE

$$\frac{VL}{WL} \cdot \frac{WD}{UD} \cdot \frac{UE}{VE} = -1, \quad (12)$$

- transversal AMF

$$\frac{VA}{WA} \cdot \frac{WM}{UM} \cdot \frac{UF}{VF} = -1, \quad (13)$$

- transversal BCN

$$\frac{VB}{WB} \cdot \frac{WC}{UC} \cdot \frac{UN}{VN} = -1. \quad (14)$$

Multiplicando as equações (12), (13) e (14) e reagrupando os termos chega-se a:

$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} \cdot \frac{UE}{UC} \cdot \frac{UF}{UD} \cdot \frac{VA}{VE} \cdot \frac{VB}{VF} \cdot \frac{WC}{WA} \cdot \frac{WD}{WB} = -1. \quad (15)$$

Observando a propriedade da potência de um ponto em uma circunferência² partes da expressão (15) podem ser escritas da seguinte forma:

- potência do ponto U

$$\frac{UE}{UC} \cdot \frac{UF}{UD} = 1, \quad (16)$$

- potência do ponto V

$$\frac{VA}{VE} \cdot \frac{VB}{VF} = 1, \quad (17)$$

- potência do ponto W

$$\frac{WC}{WA} \cdot \frac{WD}{WB} = 1. \quad (18)$$

Portanto, substituindo os resultados das igualdades (16), (17) e (18) na equação (15), esta última resume-se a:

$$\frac{VL}{LW} \cdot \frac{WM}{MU} \cdot \frac{UN}{NV} = -1.$$

Então, pelo Teorema de Menelau, decorre que os pontos L , M e N são colineares, concluindo a demonstração (COXETER, 1974, p. 74-75).

Uma outra configuração possível para o Teorema de Pascal é apresentada na Figura 43. Note que, nesta configuração, a reta que une os três pontos de intersecção dos pares de lados opostos do hexágono é externa à circunferência.

²A descrição desta propriedade, inclusive sua demonstração pode ser encontrada em Coxeter (1974, p. 28).

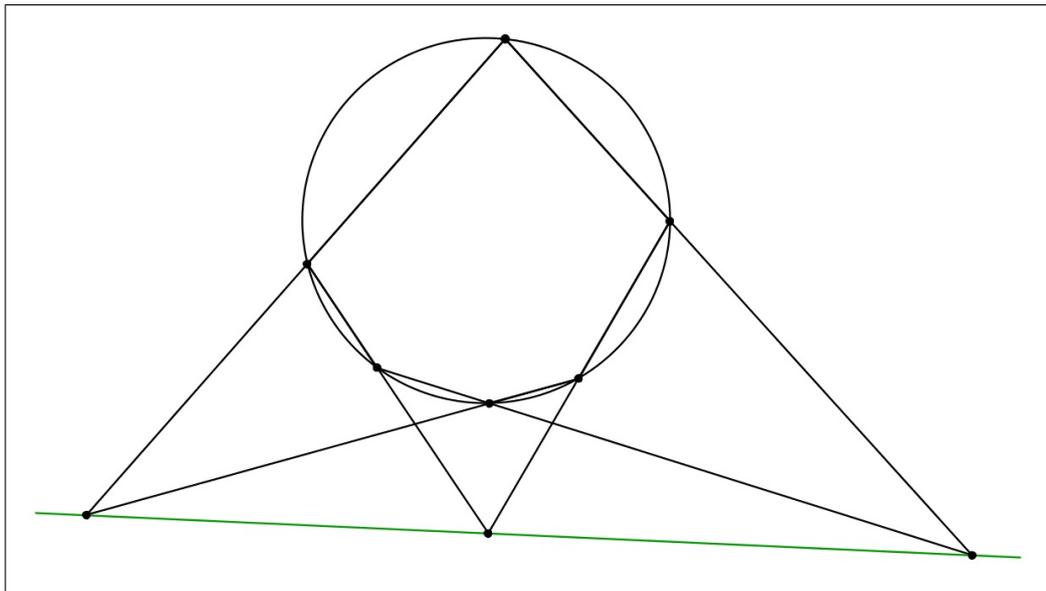


Figura 43: Teorema de Pascal: uma configuração alternativa.

O enunciado apresentado para o Teorema 3.11 foi estabelecido por Charles Julien Brianchon (1758-1864), enquanto era aluno da Escola Politécnica de Paris. Ele foi aluno de Gaspard Monge e aperfeiçoou os resultados sobre hexágonos inscritos em cônicas, obtidos anteriormente por Pascal (YOKOYAMA, 2000, p. 10).

Em 1806, Brianchon chegou a um resultado importante que ficou conhecido por Teorema de Brianchon. Ele dualizou o Teorema de Pascal através do princípio da dualidade, apresentado na Seção 3.4 (HEFEZ, 1985, p. 45).

Teorema 3.12 (Teorema de Brianchon). *Num hexágono circunscrito a um círculo, as três diagonais são concorrentes no mesmo ponto.*

Como este teorema é o dual do Teorema de Pascal original, para hexágonos inscritos em circunferências, sua demonstração se dá pelo processo de dualização e pode ser conferida em Coxeter (1974, p. 77-78). A ilustração do Teorema de Brianchon é apresentada na Figura 44, onde percebe-se que mesmo sendo o hexágono circunscrito tomado ao acaso, de fato, suas três diagonais relativas aos vértices opostos são concorrentes no mesmo ponto.

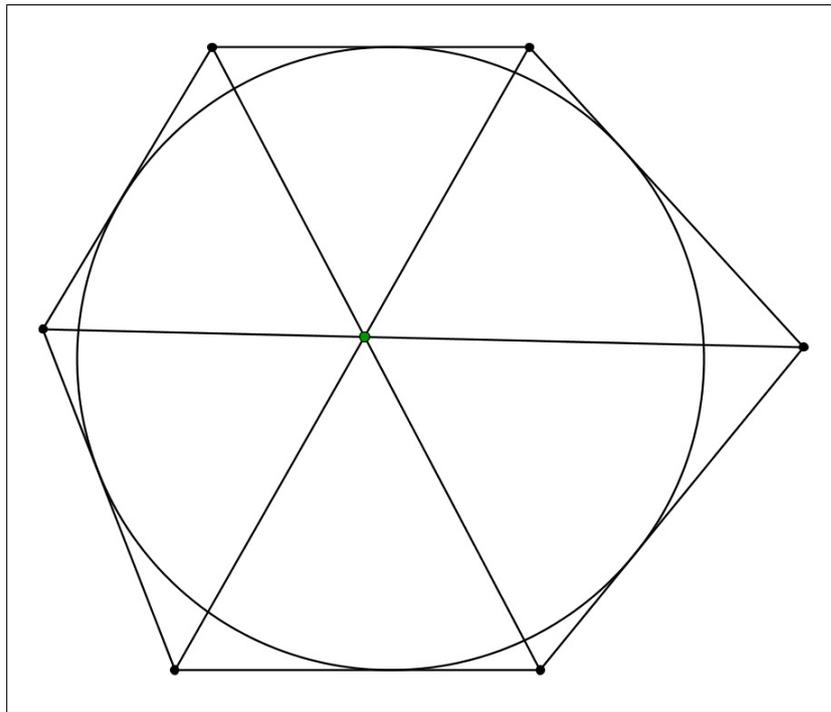


Figura 44: Ilustração do Teorema de Brianchon.

Outra contribuição de Desargues é a invariância projetiva denominada de *razão cruzada*.

3.7 A RAZÃO CRUZADA OU BI-RAZÃO

Pappus, em sua obra “*A Coleção*”, descreveu uma proposição que foi importante na busca de Desargues por invariantes projetivos. Trata-se da Proposição 129 do sétimo livro da Coleção de Pappus. Para descrever os resultados obtidos por Desargues é necessário verificar que uma perspectividade não preserva distâncias, bem como uma projetividade, que é um número finito de perspectividades (CORREIA, 2013, p. 69).

Uma vez estabelecida a perspectividade entre as retas r e r' pelo centro de perspectividade O , os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} são congruentes, Figura 45. Entretanto, o mesmo não é possível afirmar em relação aos segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$, que não são congruentes, ou seja, a perspectividade não preserva a razão entre os segmentos dados, pois $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$ mas $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \neq 1$, logo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \neq \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

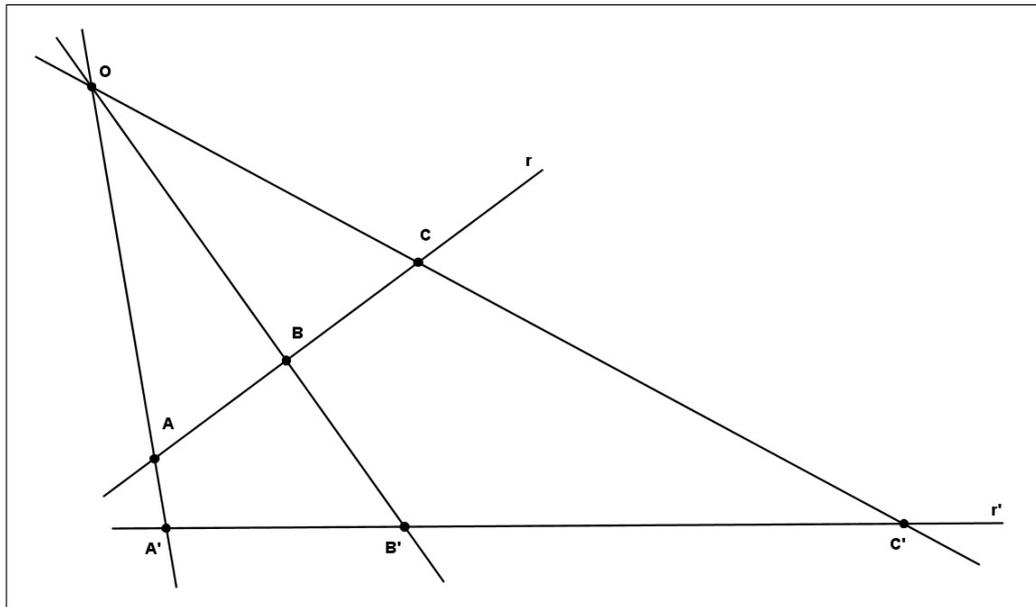


Figura 45: Perspectividade no plano: não preserva distâncias.

Esta variação da relação métrica entre segmentos perspectivos pode ser verificada também no espaço. Na Figura 46, B é o ponto médio do segmento \overline{AC} , porém B' não é o ponto médio do segmento $A'C'$. Além disso, o ponto C está entre B e D , mas o ponto C' não está entre B' e D' .

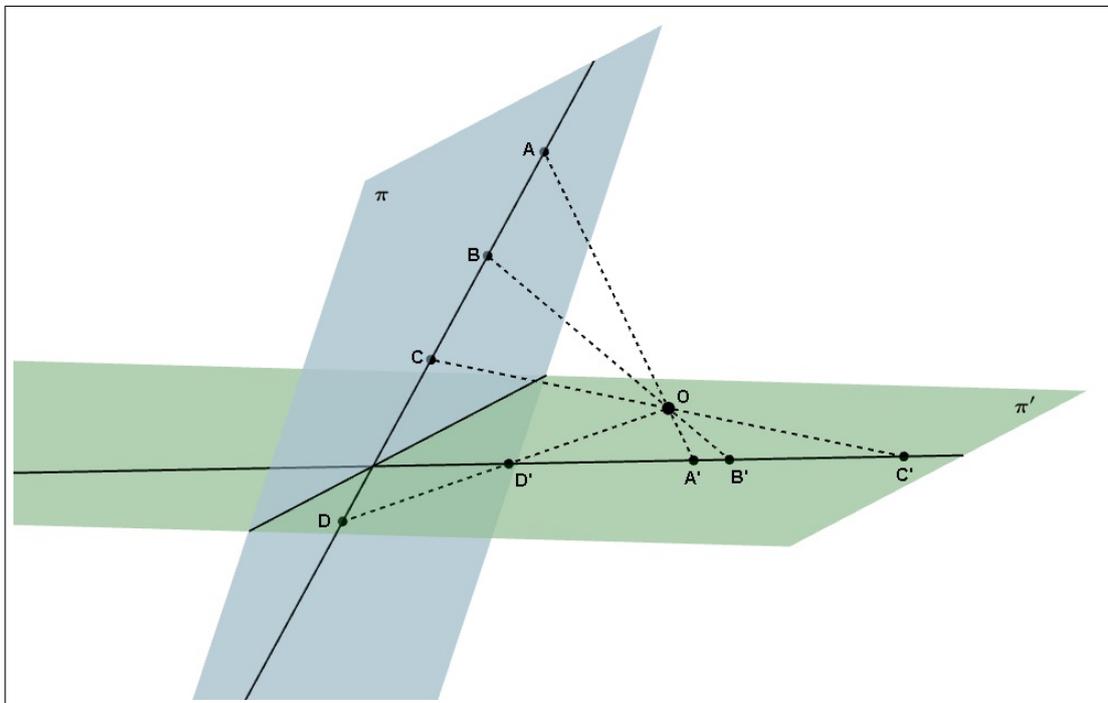


Figura 46: Perspectividade no espaço: não preserva distâncias.

Desargues descobriu, analisando a obra de Pappus, um invariante projetivo, a razão

cruzada ou bi-razão de quatro pontos. Este conceito tornou-se importante na Geometria Projetiva, pois no desenho em perspectiva, é ele que define uma escala entre a imagem real e a sua representação gráfica.

Definição 3.13 (Bi-razão ou razão cruzada). *Dados quatro pontos colineares A, B, C e D , a bi-razão, $R(A, B, C, D)$, entre eles é*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}.$$

Aplicando esta definição a uma perspectividade, Desargues chegou ao seguinte teorema:

Teorema 3.14 (Teorema da Bi-razão de Desargues). *Sejam as retas r e r' perspectivas pelo ponto O , os pontos A, B, C, D sobre a reta r e os pontos A', B', C', D' sobre a reta r' . Então $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$, ou seja:*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}}.$$

Demonstração: (adaptada de Wu (2006, p. 88))

O objetivo é verificar que numa perspectividade a razão cruzada entre os pontos correspondentes depende somente dos ângulos entre as retas a, b, c e d do feixe que passa pelo centro de perspectividade O .

Considere os triângulos AOC, BOC, BOD e AOD , Figura 47, como todos eles tem o mesmo vértice O oposto às bases, e estas, por sua vez, estão sobre a mesma reta r , a altura de todos eles é a mesma e a razão entre suas bases passa a ser a razão entre as suas áreas, que dependem tão somente dos ângulos entre os lados de cada triângulo.

Sejam $\widehat{AOB} = \alpha$, $\widehat{BOC} = \beta$ e $\widehat{COD} = \gamma$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} &= \frac{\frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\frac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \text{sen}\beta} \cdot \frac{\frac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{OD} \cdot \text{sen}(\beta + \gamma)}{\frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{OD} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)}, \\ \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} &= \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{sen}(\beta + \gamma)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)}. \end{aligned} \quad (19)$$

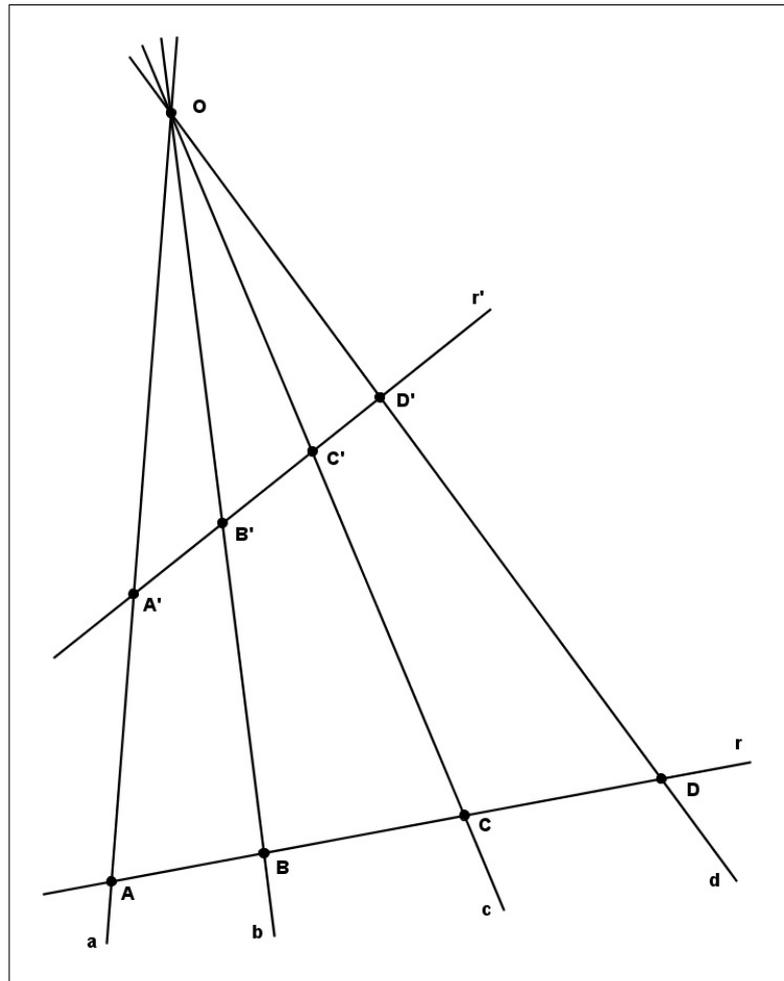


Figura 47: Teorema da bi-razão de Desargues.

Analogamente, os triângulos $A'OC'$, $B'OC'$, $B'OD'$ e $A'OD'$ também tem todos a mesma altura e, conseqüentemente, a razão entre suas bases é a razão entre as suas áreas:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{OA'} \cdot \overline{OC'} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta)}{\frac{1}{2}\overline{OB'} \cdot \overline{OC'} \cdot \text{sen}\beta} \cdot \frac{\frac{1}{2}\overline{OB'} \cdot \overline{OD'} \cdot \text{sen}(\beta + \gamma)}{\frac{1}{2}\overline{OA'} \cdot \overline{OD'} \cdot \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)},$$

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}} = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \text{sen}(\beta + \gamma)}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\alpha + \beta + \gamma)}. \quad (20)$$

Observa-se que as bi-razões (19) e (20) dependem apenas dos ângulos entre as retas que compõem o feixe que passa por O . Logo, finalizando a demonstração:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} \cdot \frac{\overline{B'D'}}{\overline{A'D'}}.$$

4 OFICINA DE GEOMETRIA PROJETIVA

Uma oficina em forma de sequência didática foi aplicada na turma do 6º ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Professora Gertrudes Steilein Milbratz, Jaraguá do Sul, Santa Catarina. O objetivo da oficina foi: verificar o conhecimento dos alunos em relação ao assunto de Geometria Projetiva condizente com a série escolar, promover a apreensão do conhecimento através de atividades e analisar o conhecimento adquirido pelos alunos sobre o assunto.

4.1 DESENVOLVIMENTO DA OFICINA – METODOLOGIA APLICADA

Os alunos desenvolveram as atividades em três momentos distintos: o primeiro foi a visualização de um objeto simples, o cubo, que integra o vocabulário comum das aulas de matemática; o segundo originou-se da observação de um corredor da escola, que propiciou uma ótima oportunidade de representação em perspectiva; e o terceiro ocorreu a partir da montagem e visualização de blocos lógicos de encaixe.

Ao término da oficina, um questionário foi aplicado com o objetivo de analisar a contribuição e eficácia das atividades realizadas.

Momento 1: Atividade Diagnóstica

Para verificar se os alunos possuíam noções básicas de perspectiva e de projeção foram aplicadas duas atividades diagnósticas:

- **Atividade Diagonóstica 1**

Desenho do cubo (1 aula¹): foi solicitado aos alunos que desenhassem como visualizam um cubo feito de papel com arestas de 40 cm pendurado no teto, à frente do quadro, conforme Figura 48.

¹1 aula: 45 min



Figura 48: Vizualização do cubo suspenso.

Desenho do corredor da escola (2 aulas): os alunos desenharam um dos corredores da escola a partir do ponto de vista representado na Figura 49. Antes de elaborar o desenho, os alunos foram conduzidos em grupos de cinco indivíduos até o local que permite obter este ponto de vista do corredor.



Figura 49: Corredor da escola.

- **Atividade Diagnóstica 2**

Na Atividade Diagnóstica 2 a tarefa foi representar, através de desenho, a projeção do cubo sobre o quadro que está atrás dele. Para que a linguagem fosse mais acessível aos alunos, foi explicado que projeção era a “sombra formada pelo objeto no quadro”.

Na sequência, foram ministradas aulas teóricas sobre técnicas de perspectiva e, através de visualização de figuras, explicadas noções básicas como: quadro, observador, ponto de fuga, ponto de vista, linha do horizonte, linha de terra e linhas de fuga, perspectiva e projeção. A visualização didática das figuras e análise dos conceitos básicos de perspectiva foram baseadas no site *SobreArte*² dedicado ao estudo das técnicas de desenho.

Momento 2: Atividade de Aprendizagem com Blocos Lógicos (2 aulas)

Visando consolidar a aprendizagem, os alunos tiveram contato com objetos manipuláveis, com a turma distribuída em seis grupos e as carteiras dispostas de modo a formar seis ilhas de trabalho, Figura 50. Neste momento, foram os alunos que criaram seu próprio exemplo e puderam aprender através da observação e da comparação com os desenhos dos colegas.



Figura 50: Organização da sala para a atividade com os blocos lógicos.

Cada grupo recebeu 15 peças de blocos lógicos, sendo 5 grandes, 5 médios e 5 pequenos, de diversas cores. Em seguida, os grupos foram orientados a montar um objeto qualquer e posicioná-lo no centro de sua ilha de trabalho, Figura 51. Posteriormente, cada integrante do grupo desenhou, sob o seu ponto de vista, o objeto montado e comparou com os desenhos dos demais integrantes.

²<http://www.sobrearte.com.br>

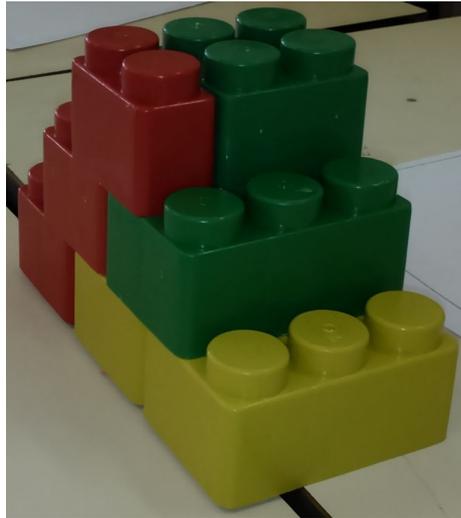


Figura 51: Montagem com blocos lógicos.

Momento 3: Atividade de Verificação da Aprendizagem

Na continuação da oficina, os alunos repetiram as Atividades Diagnósticas 1 e 2 utilizando suas novas descobertas sobre Geometria Projetiva. Esta atividade foi realizada com o objetivo de fazer um estudo comparativo entre as habilidades dos alunos antes e depois da sequência de aulas. A Tabela 4 relaciona o nome de cada atividade realizada, com o que foi desenhado, o momento em que ocorreu em relação às aulas teóricas e quantas aulas foram utilizadas.

Tabela 4: Atividades realizadas durante a oficina

Quando ocorreu	Nome da atividade	O que foi desenhado	Tempo
Antes das aulas	Diagnóstica 1	Cubo Corredor	2 aulas
	Diagnóstica 2	Projeção do cubo	
Durante as aulas	Aprendizagem	Montagem de blocos	2 aulas
Depois das aulas	Verificação 1	Cubo Corredor	2 aulas
	Verificação 2	Projeção do cubo	

4.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES REALIZADAS

Para uma melhor sistematização, a análise das atividades foi feita em três blocos: atividades com o cubo, atividades com o corredor da escola e atividade com os blocos lógicos.

4.2.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE COM O CUBO

A primeira atividade realizada foi o desenho do cubo colocado à frente dos alunos, fixado no quadro branco da sala de aula: “Desenhe como você está vendo o cubo de papel que está à frente do quadro”. A Figura 52 apresenta alguns dos possíveis pontos de vista.

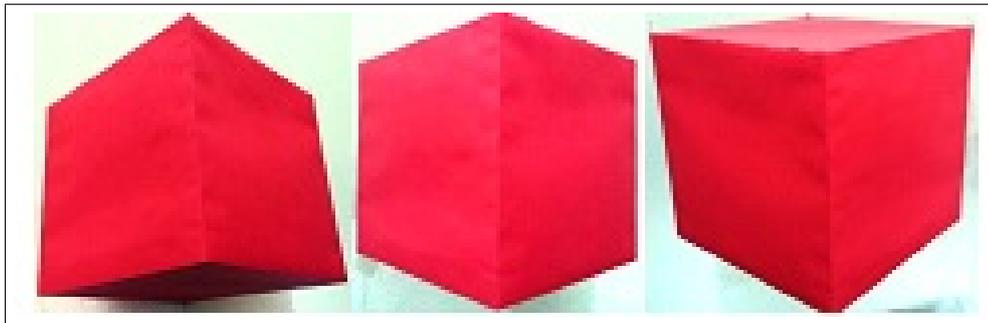


Figura 52: Cubo visto de diferentes posições da sala de aula.

Nesta atividade esperava-se que os alunos, depois das aulas teóricas, conseguissem representar o cubo a partir da utilização dos elementos de perspectiva estudados.

Os alunos apresentaram muitas dificuldades, inclusive em utilizar régua para a confecção do desenho. Também houve aqueles contrários a seguir as instruções. Muitos alunos, após verem que o desenho sem régua ou com caneta não havia ficado como pretendiam, pediram uma segunda folha para refazer a atividade, o que foi permitido mediante a advertência de que isto não mais ocorreria. Foi solicitado ainda que os desenhos fossem pintados, o que também gerou problemas, pois alguns alunos não queriam pintar.

A partir destes fatos, foi possível perceber o desinteresse dos alunos em realizar as Atividades Diagnósticas como um todo, pois para eles não havia sentido fazer aqueles desenhos. Entretanto, este panorama mudou completamente a partir das aulas teóricas, nas quais os alunos perceberam que poderiam executar seus próprios desenhos de uma maneira mais eficaz e, segundo eles, produzir desenhos “mais bonitos”.

A mesma atividade foi repetida depois das aulas teóricas e da atividade em grupos. No total, foi possível observar que 12 alunos (40%) conseguiram apresentar grande melhora na confecção dos desenhos e passaram a utilizar da maneira correta os elementos de perspectiva estudados nas aulas.

Na Figura 53 pode-se observar o antes e o depois nos desenhos de três destes alunos. Ficou evidente que mesmo aqueles alunos que no primeiro desenho não utilizaram régua, o fizeram na segunda vez. De maneira geral, o empenho dos alunos aumentou na execução dos

desenhos com a evolução da oficina e com as aulas teóricas. Neste momento, havia maior clareza quanto o que fazer e como fazer, mesmo que parte dos alunos não conseguisse executar o pretendido.

A utilização de um, dois e até três pontos de fuga foi explicada nas aulas teóricas. Houve alunos que utilizaram um ou dois pontos de fuga na execução dos seus desenhos.

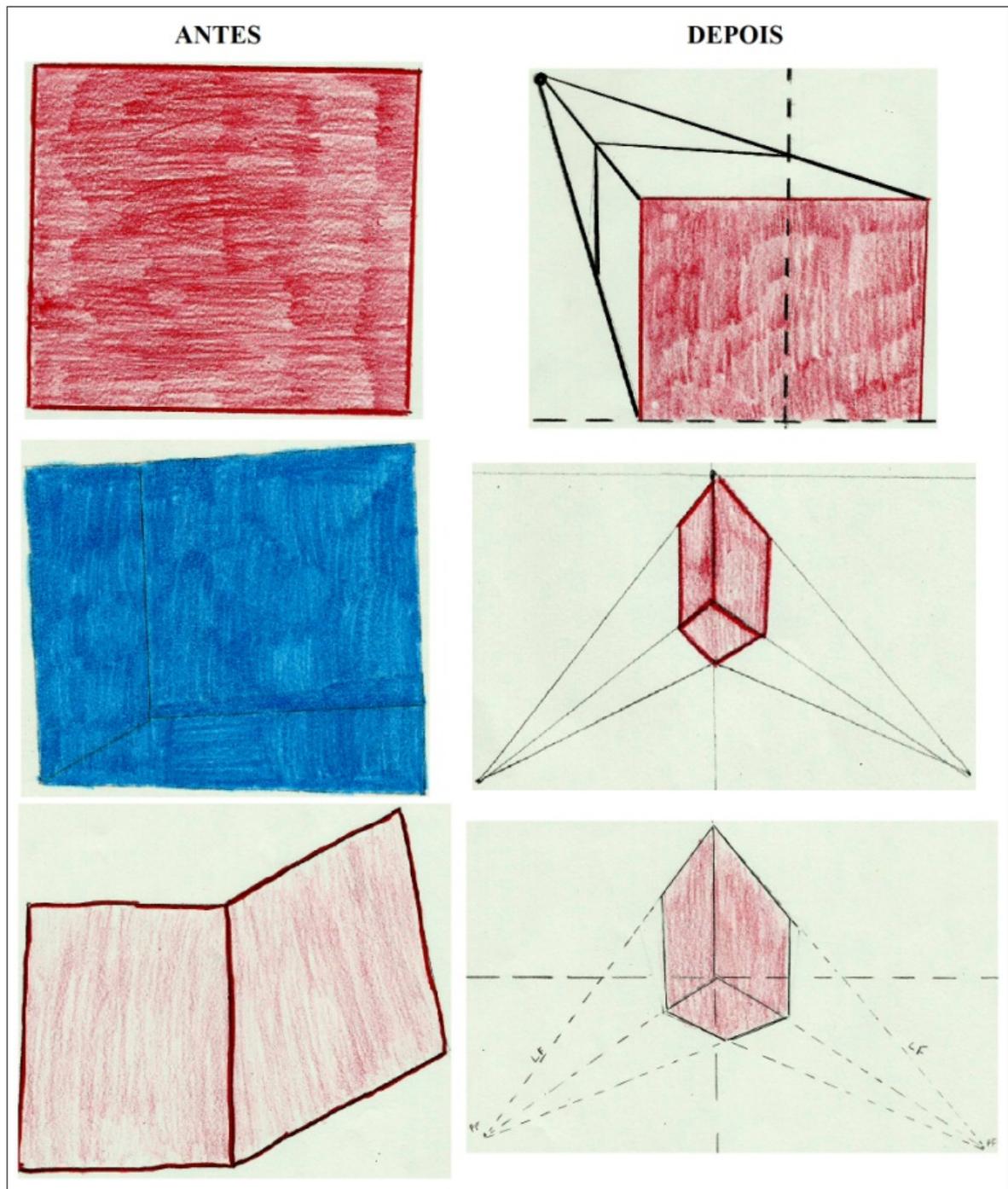


Figura 53: Desenhos do cubo antes e depois da realização da oficina.

Outros 18 alunos (60%) também apresentaram melhora na comparação entre o primeiro e o segundo desenho. Entretanto, não conseguiram utilizar de maneira clara e correta os elementos de perspectiva, como pode ser observado nos desenhos de três destes alunos na Figura 54.

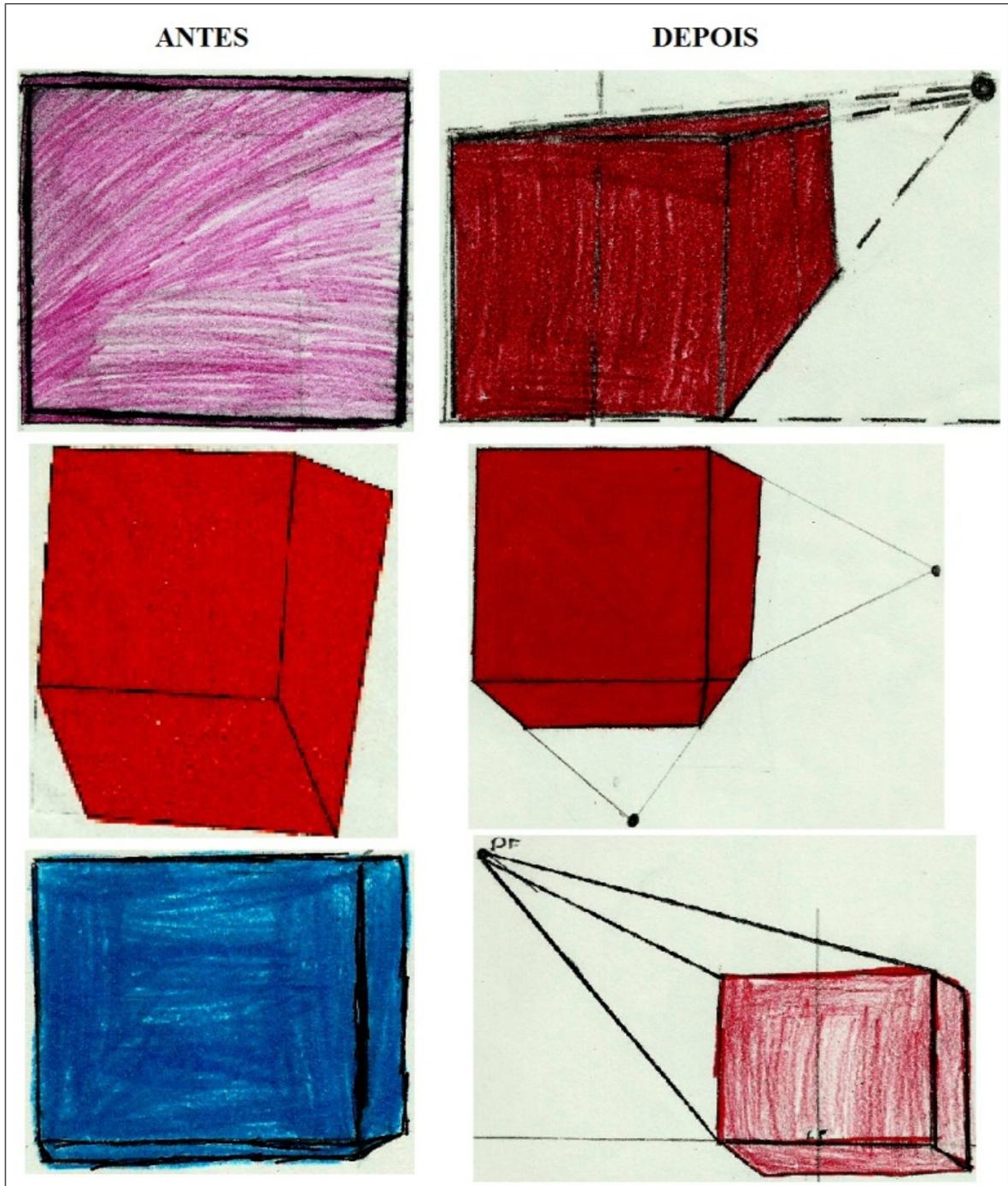


Figura 54: Desenhos do cubo antes e depois da realização da oficina.

Após a teoria, o que se observa é que estes alunos continuaram tentando expressar corretamente uma lateral e a parte inferior do cubo. Entretanto, não conseguiram compreender a conexão do ponto de fuga e das linhas de fuga com a construção da noção de perspectiva.

A segunda atividade realizada com o cubo foi a representação de sua projeção sobre o quadro branco. E, na tentativa de tornar o conceito de projeção mais claro aos alunos, que inicialmente não compreenderam a ideia, foi dito que a projeção seria a sombra formada pelo cubo sobre a superfície do quadro. Com esta atividade pretendia-se que os alunos compreendessem o conceito de projeção e passassem a desenhar de forma adequada uma projeção do cubo.

Para a análise desta atividade, antes e depois das aulas teóricas sobre o assunto, tem-se o quadro comparativo da Figura 55, que foi dividido em quatro categorias de análise.

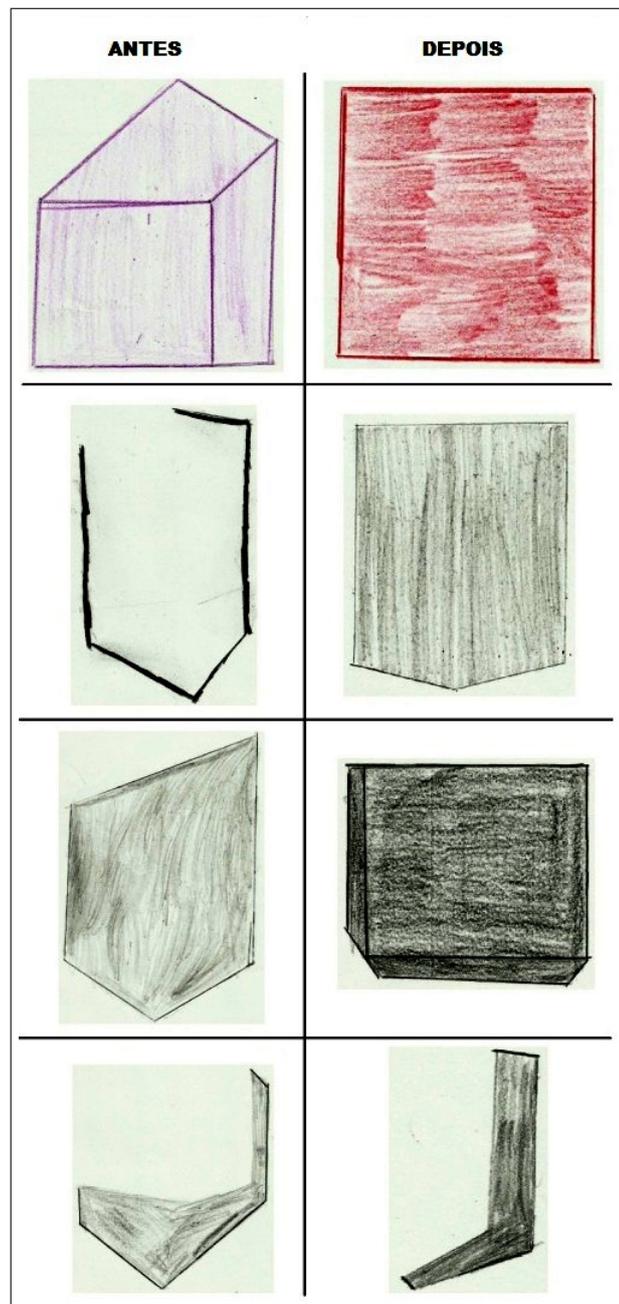


Figura 55: Representação da projeção do cubo antes e depois da realização da oficina.

Os dois primeiros desenhos representam um exemplo que foi seguido por 33% dos alunos. Neste caso, o primeiro desenho parece ser uma tentativa equivocada de representação em perspectiva. Na segunda tentativa de representar a projeção foi desenhado, simplesmente, um retângulo, pois para eles a sombra do cubo sobre o quadro seria um simples quadrado.

O conceito de projeção deste grupo de alunos não deixa de estar correto, se a projeção adotada fosse a paralela. Porém, não levou em consideração a posição de cada aluno em relação ao cubo.

O segundo grupo a ser analisado é representado pela segunda linha de desenhos da Figura 55. Para 36% dos alunos, apesar de na primeira tentativa terem surgido as mais variadas formas, na segunda tentativa o desenho ficou parecido com este exemplar. No caso do desenho escolhido como exemplo deste grupo, o primeiro é uma linha aberta. Vários alunos desenharam linhas abertas. Segundo eles, “uma sombra não tem fim”, logo não pode ser representada através de uma linha fechada. Certamente este pensamento pode ter surgido através da observação da sombra do próprio corpo sobre o chão. Esta sombra parte dos pés e parece não ter um final determinado. Entretanto, esta seria uma projeção oblíqua, que novamente não levaria em conta a posição de cada aluno em relação ao cubo.

Na segunda tentativa, muito bem sucedida, o desenho em questão representa bem o grupo aqui analisado, pois evidencia a maior proximidade da aresta do cubo que está no centro, bem como os vértices que se destacam no desenho em perspectiva com dois pontos de fuga, conforme Figura 53. Analisando a posição dos alunos em relação ao cubo durante a atividade, percebeu-se que todos os desenhos da projeção do cubo sobre o quadro, se corretamente executados, deveriam ser parecidos com este. Variando apenas a posição da aresta central em relação às duas arestas laterais que podiam ser visualizadas.

O terceiro grupo analisado, representado pelos desenhos da terceira linha da Figura 55, representa os alunos que tentaram fazer a representação do cubo em perspectiva na segunda tentativa. 12% dos alunos se enquadram neste grupo, que claramente confundiu projeção com perspectiva. No caso do exemplo aqui apresentado, o primeiro desenho foi equivocado na parte superior do cubo, representado através de uma linha inclinada. Porém, no segundo desenho, houve a tentativa de representação em perspectiva muito semelhante ao desenho já analisado na segunda linha da Figura 54.

O quarto e último grupo a ser analisado, com 19 % do total, representa aqueles alunos que insistiram nas mesmas ideias para a primeira e segunda tentativa de representar a projeção. No exemplo aqui analisado o aluno manteve o pensamento supracitado que, segundo os próprios alunos, “uma sombra não tem fim” e, portanto, deve ser representada por uma linha aberta.

Na tentativa de explicar aos alunos que este conceito de “sombra sem fim” não estava totalmente correto, durante as aulas teóricas, o professor levou-os ao pátio da escola num dia ensolarado para que pudessem medir a sombra de cada um no chão. Eles perceberam, de maneira autônoma, sem indução do professor, que o sol representaria o observador, o corpo de cada aluno, poderia ser comparado ao cubo e o chão poderia ser comparado ao quadro branco da sala de aula. Este procedimento evidenciaria a finitude de uma projeção. Entretanto, parece que esta atividade não foi eficaz o suficiente para possibilitar aos alunos do quarto grupo uma melhor representação da projeção do cubo.

4.2.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE COM O CORREDOR DA ESCOLA

As atividades de desenho do corredor da escola foram as que mais motivaram os alunos; eles saíram da sala em grupos de cinco alunos para visualizá-lo, com base na fotografia representada na Figura 49. Posteriormente, foi solicitado que fizessem, individualmente, um desenho do corredor e que não poderiam faltar o piso, o teto, as paredes e as colunas. Com esta atividade pretendia-se que os alunos conseguissem, num segundo momento, desenhar o corredor a partir de uma perspectiva frontal, posicionando de maneira adequada os elementos de perspectiva.

Durante as aulas, vários alunos pesquisaram na internet sobre perspectiva e desenvolveram desenhos, mostrando o seu interesse pelo conteúdo, o que culminou na interação entre alunos e entre alunos e professor, de forma muito proveitosa. Assim, na segunda tentativa, após a explicação do conteúdo, mais de 65% dos alunos desenvolverem o desenho do corredor exatamente conforme o solicitado, sendo que apenas um aluno havia feito este desenho em perspectiva na primeira tentativa, e tratava-se de um aluno que já havia estudado sobre o tema em revistas.

Os outros 35% dos alunos não conseguiram representar o corredor perfeitamente, dentro das técnicas de perspectiva estudadas. Mesmo assim, estes alunos apresentaram alguma técnica de perspectiva que produziu o efeito de tridimensionalidade. Cabe ressaltar que o único aluno que não conseguiu esse efeito nos seus desenhos esteve ausente em algumas das aulas da oficina.

A Figura 56 exemplifica a evolução dos trabalhos. Na primeira situação, fizeram um desenho puramente planificado e ao serem questionados sobre o desenho, responderam que a visão foi obtida “imaginando que estávamos em cima, no teto” ou ainda “que estávamos num helicóptero sobre a escola”. E, posteriormente, produziram um desenho a partir das técnicas de perspectiva estudadas

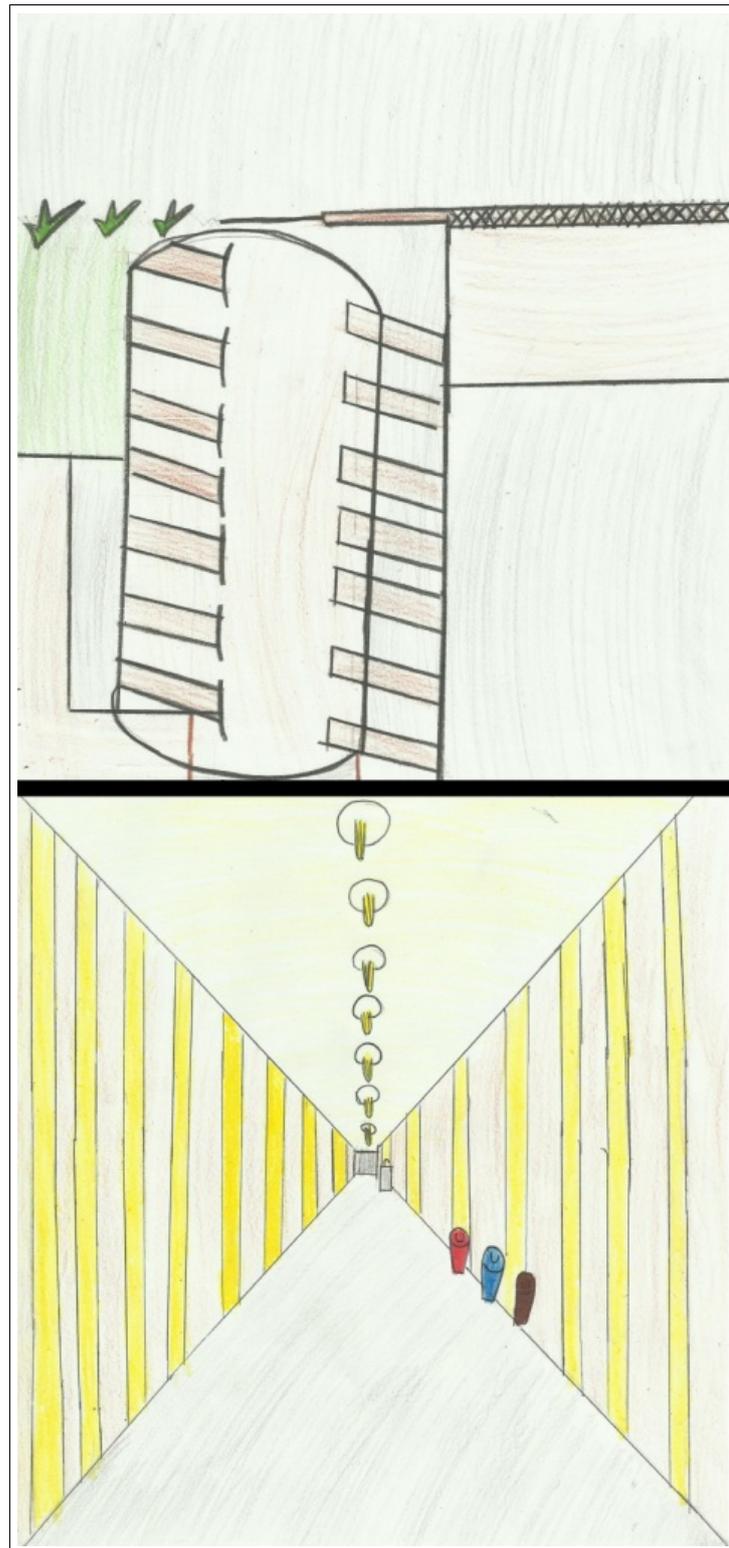


Figura 56: Desenho do corredor da escola: antes da aula sobre perspectiva (acima) e após a aula (abaixo).

O segundo desenho apresenta grandes diferenças em relação ao primeiro, com o uso das técnicas de perspectiva o aluno determinou a linha do horizonte e o ponto de vista e, na

intersecção destes dois elementos, posicionou o ponto de fuga, a partir do qual traçou as linhas de fuga. Estes elementos podem ser visualizados na Figura 57.

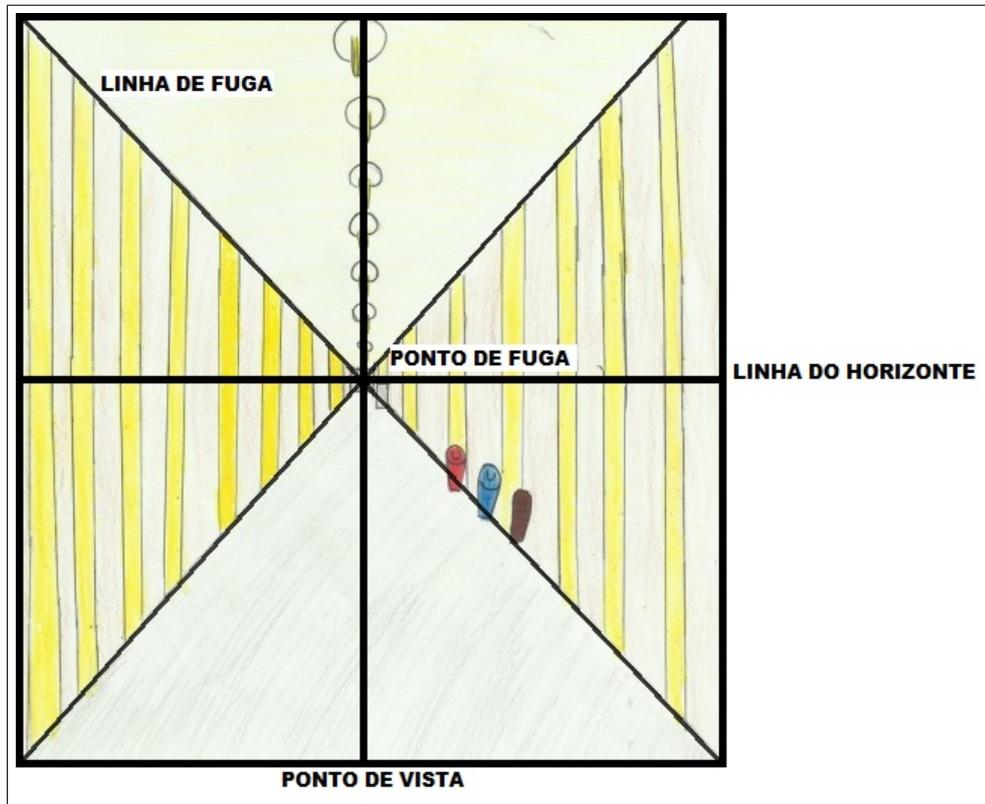


Figura 57: Desenho do corredor com elementos de perspectiva.

É interessante notar que as luminárias no teto do corredor também foram desenhadas em perspectiva, ou seja, as mais próximas do observador estão maiores que as mais distantes.

Para alguns alunos o primeiro desenho do corredor foi produzido com muitos detalhes, como pode ser visualizado na Figura 58. Entretanto, estes alunos abandonaram os detalhes no segundo desenho, pois, segundo eles, o mais importante eram as técnicas de perspectiva aplicadas ao desenho.

Outros alunos, apesar de aplicar corretamente as técnicas ensinadas, preservaram a riqueza de detalhes em seus desenhos, como na Figura 59. O aluno que o produziu disse que havia ficado mais fácil desenhar os detalhes porque o desenho havia ficado mais real do que na primeira vez.

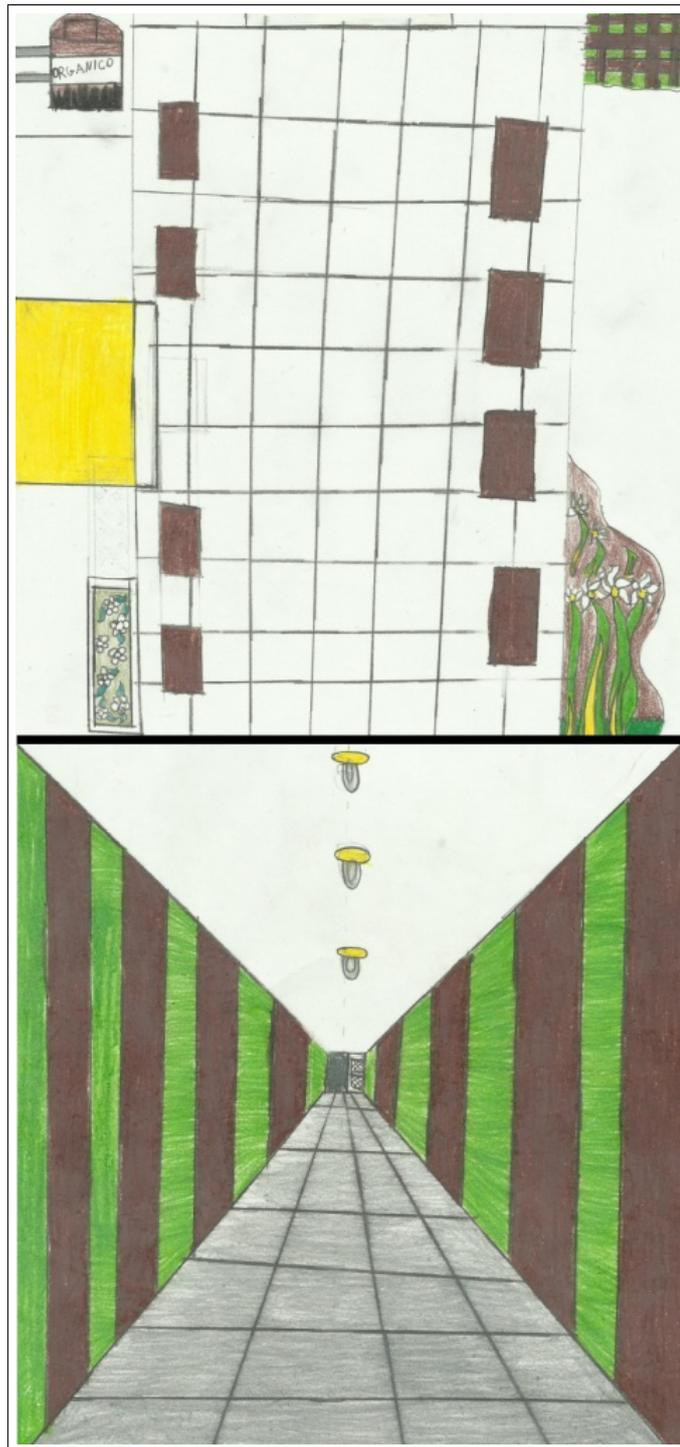


Figura 58: Desenho do corredor: antes da aula de perspectiva e com riqueza de detalhes (acima) e sem os detalhes (abaixo).

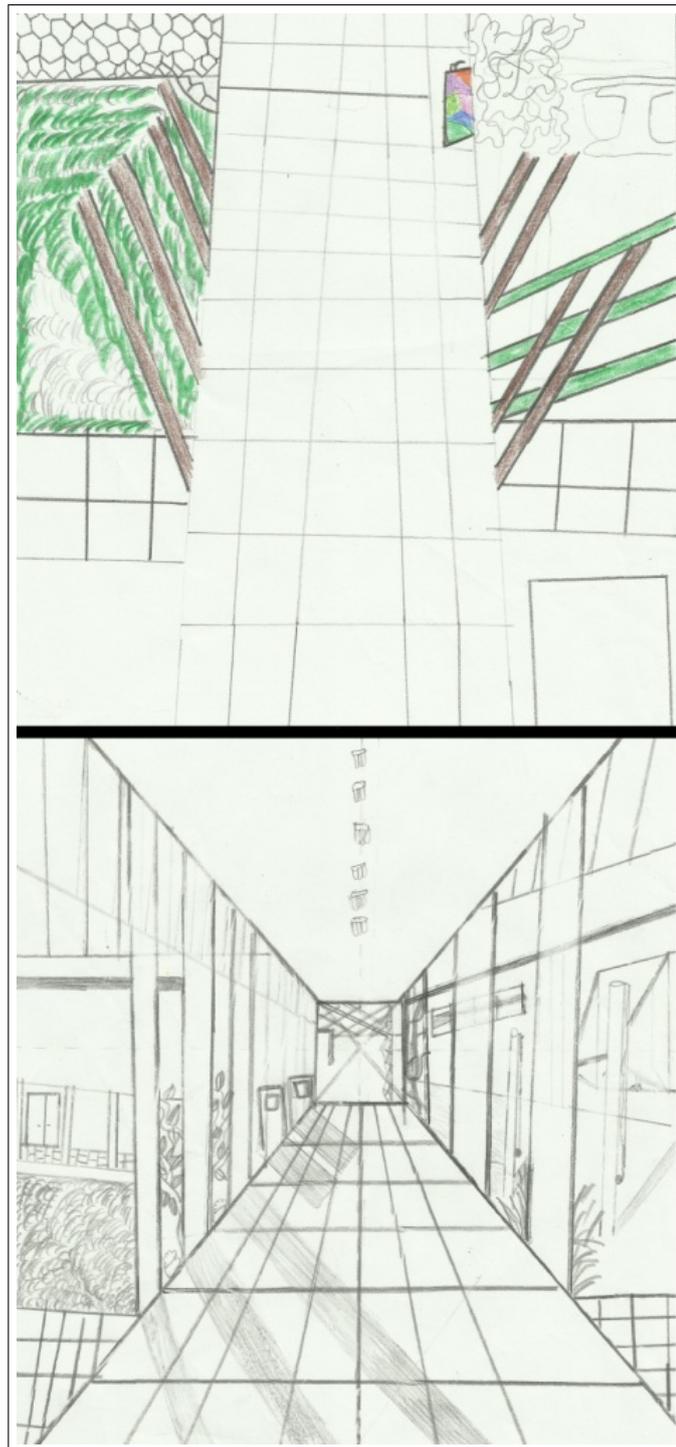


Figura 59: Desenho do corredor: antes da aula de perspectiva e com poucos detalhes (acima) e com riqueza de detalhes (abaixo).

Na Figura 60 observa-se um caso que representa os 35% dos desenhos dos alunos que não utilizaram todas as informações da técnica para realizá-los.

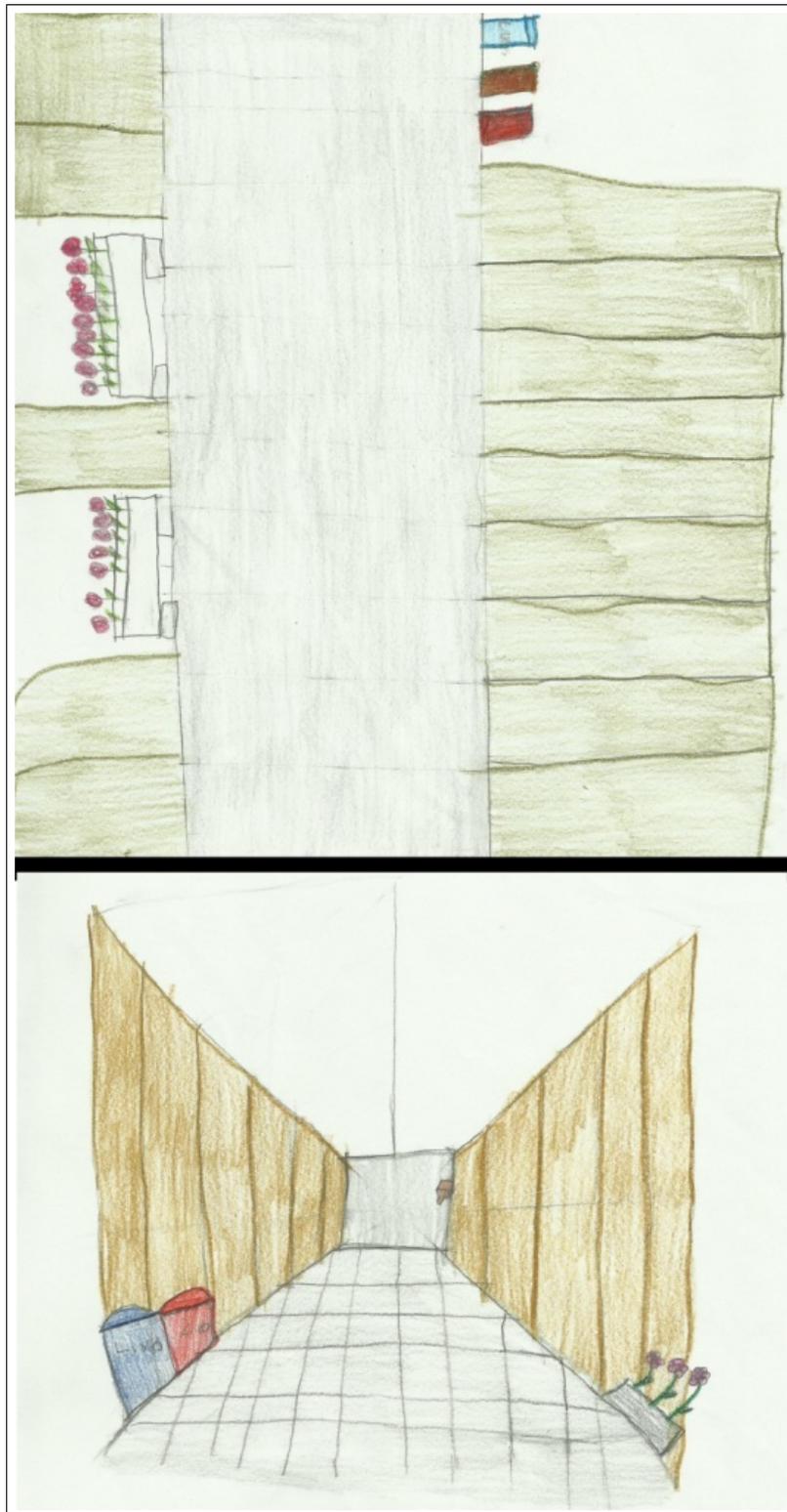


Figura 60: Tentativa de representar o corredor da escola em perspectiva.

Nos desenhos observa-se que o aluno não utilizou régua, ou utilizou-a parcialmente. Os mesmos detalhes estão representados nos dois desenhos. O primeiro desenho é uma simples planificação, como nos casos anteriores. Entretanto, além de não usar régua, conforme solicitado,

o segundo desenho apresenta alguns elementos inclinados como latas de lixo e o vaso com flores, sendo que as linhas que formam o piso não seguem as linhas de fuga. Equívocos como estes determinaram a classificação dos desenhos nos quais há alguns elementos de perspectiva, mas a sua execução não foi totalmente adequada.

4.2.3 ANÁLISE DA ATIVIDADE COM OS BLOCOS LÓGICOS

A atividade com blocos lógicos foi, sem dúvida, a atividade na qual os alunos demonstraram maiores dificuldades, como trabalhar em equipe e compreender a autonomia dada para desenvolver a atividade, necessitando de algumas intervenções do professor. De fato, os objetivos desta atividade eram a cooperação em equipe e que cada aluno percebe-se que, mesmo desenhando um objeto igual ao do colega, o resultado final poderia ser diferente, pois cada integrante da equipe veria o objeto de um ponto de vista diferente. Para produzir o efeito de perspectiva desejado, cada aluno deveria escolher, de maneira conveniente, a localização do ponto de fuga.

Na Figura 61 pode-se visualizar um quadro contendo dois desenhos de cada grupo, que representam as produções dos alunos.

O primeiro desenho do Grupo 1 retrata muito bem o objeto montado, onde é possível observar o ponto de fuga localizado na parte superior central do desenho e percebe-se que o autor se preocupou em representar a noção de profundidade do objeto através das cores, reforçando assim a ideia de tridimensionalidade no desenho. No segundo desenho do mesmo grupo percebe-se que não há uma boa noção de escala entre o desenho e o objeto real, quando comparado com o desenho anterior. Além disso, na tentativa de implementar os elementos de perspectiva, o autor acabou seccionando de forma equivocada as linhas de fuga e o desenho parece totalmente plano, com vista frontal, que não corresponde à posição do aluno em relação ao objeto durante a realização da atividade.

No Grupo 2, o primeiro desenho, apesar do aluno não ter usado régua em algumas linhas e de não ter traçado as linhas de fuga coerentemente na parte inferior do desenho, apresenta um bom efeito tridimensional. Já no segundo desenho, o autor teve dificuldade em posicionar o ponto de vista.

Quanto ao Grupo 3, o primeiro desenho apresenta corretamente a perspectiva, levando em consideração que o ponto de fuga deveria estar localizado no canto superior esquerdo do desenho, entretanto, o ponto de fuga foi incorretamente posicionado no lado direito. Quando questionado, o aluno disse que havia apagado o ponto e as linhas de fuga e voltou a inserí-las

posteriormente. O segundo desenho apresenta a vista frontal do objeto, totalmente plano, não correspondendo ao ponto de vista do autor durante a execução do desenho.

No Grupo 4, apesar de algumas inconsistências na base do primeiro desenho, representa uma das melhores elaborações de perspectiva produzidas nesta atividade, com todos os elementos de perspectiva utilizados da forma correta e a posição do ponto de fuga correspondendo fielmente à posição do observador. Apenas faltaram duas linhas de fuga no canto inferior esquerdo do desenho. Já o segundo desenho deste grupo apresenta uma simples imagem planificada do objeto, sem conexão com a real posição do observador durante a atividade.

No trabalho do Grupo 5, o primeiro desenho, apesar de representar uma perspectiva bem estruturada, não corresponde ao objeto montado pela equipe, trata-se de uma cópia do desenho de outra equipe, ignorando assim todas as orientações do professor, talvez por ter sido o grupo que mais apresentou dificuldades durante a atividade, sendo que nenhum integrante conseguiu construir a perspectiva do objeto desenhado.

O autor do primeiro desenho do Grupo 6 conseguiu representar bem o objeto montado com seu ponto de vista, posicionando corretamente o ponto de fuga. No segundo desenho do mesmo grupo, o autor parece não ter utilizado régua e o ponto e as linhas de fuga foram inseridos posteriormente, ou seja, a tentativa de construção do efeito tridimensional não foi baseada nos elementos de perspectiva.

De maneira geral constatou-se que, apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos durante a atividade, a mesma foi de grande utilidade, pois proporcionou aos alunos a possibilidade de trabalho em equipe e de desenvolver a autonomia. Além disso, a atividade pode ser considerada eficaz, sendo que ela foi realizada antes das Atividades de Averiguação de Aprendizagem — o segundo desenho do cubo e do corredor — e estas atividades renderam bons resultados, certamente também em decorrência da prática acumulada pelos alunos na atividade com os blocos lógicos.

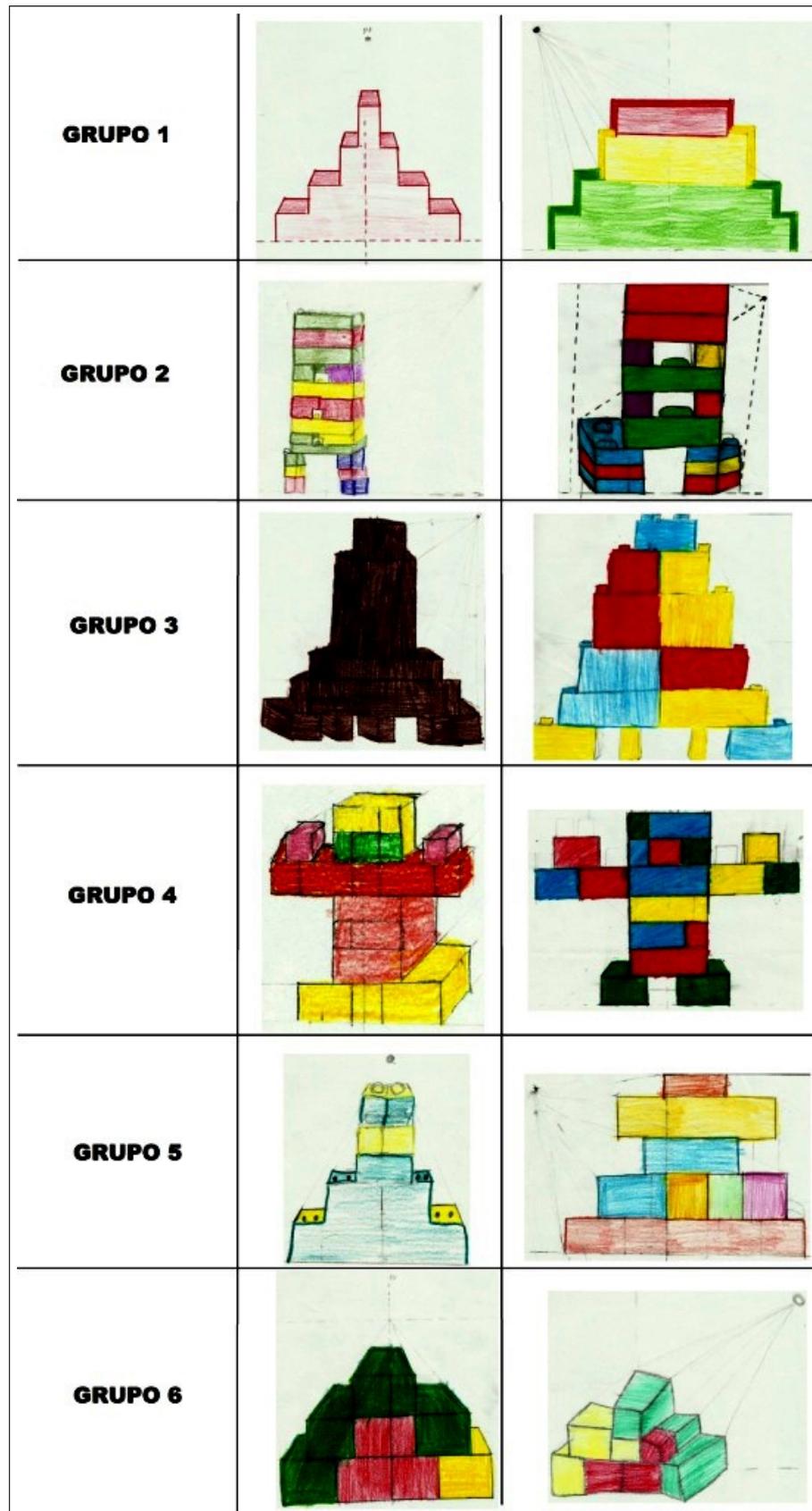


Figura 61: Seleção de desenhos produzidos na atividade com blocos lógicos.

4.3 QUESTIONÁRIO APLICADO

Após o término da oficina foi aplicado um questionário (Anexo A) com o objetivo de contribuir na análise da utilidade e eficácia das atividades realizadas. No total 28 alunos responderam ao questionário.

4.3.1 ANÁLISE DOS RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO APLICADO

No questionário aplicado pode-se observar que mais de 85% dos alunos nunca haviam aprendido algo sobre perspectiva na escola e 75% também não tiveram contato com o assunto fora da escola. Aqueles que já haviam estudado o tema na escola, o fizeram na disciplina de Matemática nos dois anos anteriores. Já entre os alunos que aprenderam perspectiva fora do ambiente escolar, 11% utilizaram revistas ou internet e 14% tiveram ajuda dos familiares.

Durante o transcorrer das atividades foi possível verificar que, mesmo aqueles alunos que afirmaram já conhecer algo sobre perspectiva tinham dificuldades semelhantes aos demais que afirmaram nunca terem estudado sobre o tema. Também foi possível observar através dos relatos que, na maioria, os alunos não conseguiam associar desenho à Matemática. Esta visão foi alterada ao término das atividades, sendo possível, neste momento, ouvir comentários de que realmente “há Matemática em tudo”, ou então, “não imaginei que até no desenho se utilizasse Matemática”.

Sobre a eficácia da oficina, a pesquisa revelou que mais de 78% dos alunos afirmaram que as aulas teóricas contribuíram muito, e aproximadamente 68% tiveram a mesma opinião sobre as aulas práticas (atividade de grupo), o que confirma as dificuldades do trabalho em equipe. Para 15% dos alunos a atividade prática em grupo contribuiu pouco ou nada na melhora do desenho.

Quando questionados se gostariam de continuar estudando o tema, 89% dos alunos responderam que gostariam de estudar mais sobre essa geometria, o que já era evidente diante da empolgação crescente dos alunos à medida que as atividades eram desenvolvidas.

No Anexo B encontra-se uma tabela com os dados coletados no questionário.

4.3.2 RESPOSTAS DOS ALUNOS E SUAS SIMILARIDADES, DESTAQUES E CURIOSIDADES

A última pergunta do questionário “Você gostaria de continuar estudando mais sobre este tipo de geometria? Por quê?” foi aberta, possibilitando aos alunos expressarem suas opiniões.

Em termos gerais, a resposta mais frequente pode ser expressa pela seguinte afirmação de um aluno: “Sim. Porque é legal e você aprende a desenhar melhor”. Esta resposta representa bem o que mais motivou os alunos durante as aulas: a possibilidade de desenhar melhor. Para eles, saber desenhar é muito importante. Durante a execução dos desenhos eram frequentes as comparações com as produções dos colegas. Quando surgia um desenho melhor, logo era cercado pelos demais alunos e admirado por todos.

Uma comparação feita pelos alunos ocorreu entre os desenhos produzidos durante as atividades diagnósticas e aqueles produzidos durante as atividades de averiguação. Um aluno respondeu a última questão da seguinte maneira: “Sim, porque mostra como nós podemos desenhar na segunda vez e mostra se melhoramos ou não”. De fato, a possibilidade de comparar o antes e o depois foi um fator motivacional aos alunos.

Os três alunos que responderam não querer mais estudar sobre o tema afirmaram que queriam estudar outros conteúdos, pois já bastava do mesmo. Porém, estes mesmos alunos, durante as aulas, realizaram todas as atividades com afinco.

Durante as aulas, os alunos expressavam o seu interesse pelo assunto e, frequentemente, faziam correlações entre o que estava sendo estudado em sala com fatos e situações vivenciados fora da escola. Em resposta à última pergunta do questionário, um aluno afirmou que é interessante estudar este assunto por que “você não precisa usar só para a escola”. Resposta esta que corrobora a ideia de que estudar desenho é algo útil à criança, pois seu espaço geométrico é aquele percebido ao seu redor e representado através do desenho (BRASIL, 1997, p. 81).

Um dos alunos que demonstrou já conhecer algumas técnicas de perspectiva, pois havia estudado e praticado por meio de revistas, afirmou que os elementos geométricos ensinados nas aulas, principalmente as linhas de fuga, foram importantes para seu aprendizado. Apesar de conseguir fazer desenhos em perspectiva à mão livre, este aluno em particular apresentou uma série de dificuldades para associar a teoria aprendida à execução dos desenhos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelas PCNs, a Geometria Projetiva pode fazer parte dos currículos da disciplina de Matemática: nos níveis iniciais, empregando conceitos básicos, como o ponto de fuga, para produzir efeitos de tridimensionalidade; no Ensino Médio, na abordagem de cônicas e suas projeções.

Mesmo sendo um tema importante e de grande potencial de aplicabilidade à Educação Básica, pouco material sobre o assunto ou para aplicação pôde ser encontrado. Apesar de um número maior de referências, mesmo o ensino da Geometria Plana, em alguns casos, é relegado ao segundo plano. No caso da Geometria Projetiva, o conteúdo não costuma fazer parte dos currículos acadêmicos para formação de professores de Matemática, contudo, alguns trabalhos tem mostrado preocupação com o assunto, como Goncalves (2013) e Chaves (2013).

Buscando contribuir para a mudança deste panorama, o terceiro capítulo do trabalho apresenta ilustrações que permitem uma compreensão do tema por professores atuantes na Educação Básica. A visualização gráfica de axiomas, definições e teoremas, com algumas demonstrações e indicação de outras, permite sua imediata vinculação com a aplicação em sala de aula, o que possibilita ao professor leitor idealizar aplicações didáticas enquanto se apropria dos novos conhecimentos ou mesmo relembra e aprofunda os que já possui.

O fato do tema “perspectiva” não fazer parte, de forma explícita, dos conteúdos programáticos normalmente estabelecidos para a disciplina de Matemática na Educação Básica, gerou alguns questionamentos sobre a oficina aplicada, pois geralmente o tema é trabalhado na disciplina de Artes. Porém, o enfoque dado mudou as opiniões iniciais. As diretrizes curriculares de estados e municípios trazem, em algum momento, o tema “representação de sólidos geométricos ou afins”. Com isto, a inclusão das noções de Geometria Projetiva na disciplina de Matemática é uma possibilidade que deve ser pensada.

O estudo comparativo entre os desenhos produzidos pelos alunos, antes e depois das aulas teóricas sobre o assunto, mostrou o avanço da grande maioria deles, que passaram a estruturar previamente seus desenhos através das técnicas vistas. Posteriormente, nas aulas sobre “cálculo de área e volume” a compreensão das figuras planas e do paralelepípedo foi imediata, sendo relacionada por eles com o estudo na oficina.

Baseado no progresso que os alunos apresentaram na oficina, um trabalho semelhante foi realizado, de forma adaptada, em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental, sendo que os resultados obtidos foram ainda mais positivos. A estruturação dos desenhos através dos elementos de perspectiva foi perfeita em alguns casos. Os alunos já haviam estudado sobre perspectiva na disciplina de Artes, entretanto, a turma foi unânime ao afirmar que o enfoque matemático dado ao tema tornou as ideias muito mais claras. Como resultado, um painel com os trabalhos dos alunos será apresentado na Feira Municipal de Matemática de Jaraguá do Sul/SC.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. R. T. de. Notas para as aulas de geometria projetiva e desenho. [s.n.], São Paulo (USP), 2007. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/rui/form3.pdf>>. Acesso em: 21 jul. 2014.
- ANTUNES, M. C. **Uma possível inserção das geometrias não-euclidianas no ensino médio**. 54 p. Dissertação (Licenciatura em Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em: <<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/18218/000728046.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 25 jul. 2014.
- AUFFINGER, A. C. T. de C.; VALENTIM, F. J. da S. **Introdução à geometria projetiva**. 5. ed. Vitória: UFES, 2003. Disponível em: <<http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT\20350\2012-I\Texto6\20-\20MAT\20350\20-\20212-I.pdf>>.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: 1ª a 4ª séries**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 07 jul. 2014.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2015.
- BRASIL. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 07 jul. 2014.
- CARMO, M. P. do. Geometrias não-euclidianas. **Matemática universitária**, Rio de Janeiro, n. 6, p. 25–48, 1987.
- CASTRO, R. B. de. **Tópicos da geometria projetiva**. 94 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2012. Disponível em: <http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94354/castro_rb_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 09 mai. 2015.
- CHAVES, J. J. F. **Teorema de Pappus**. 77 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <http://bit.profmatt-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/379/2011_00247_JOAO_JORGE_FERNANDES_CHAVES.pdf?sequence=1>. Acesso em: 13 jun. 2015.
- COMMANDINO, F. **Euclides: elementos de geometria**. 1. ed. São Paulo: Edições Cultura, 1944.
- CORREIA, M. C. L. F. **Diferentes Abordagens ao Estudo das Cônicas**. 118 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, 2013. Disponível em: <<https://www.google.com.br/url?sa=trct=jq=esrc=ssource=webcd=1cad=rjauac>>

t=8ved=0CB4QFjAAahUKEwjWz_ymysY_GAhVBGIwKHbmpANMurl=http%3A%2F%2Fsigarra.up.pt%2Ffcup%2Fpt%2Fpubls_pesquisa.show_publ_file%3Fpct_gdoc_id%3D35518ei=UY59VZbjLsGwsAS504KYDQusg=AFQjCNEPbygBJd2VHNviUkPKT751dsKX1wbvm=bv.95515949,d.cWc>. Acesso em: 14 jun. 2015.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática?: uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2000.

COUTINHO, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

COXETER, H. S. M. **Projective Geometry**. 2. ed. Toronto: Springer, 1974.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. 1. ed. Washington D.C.: The Mathematical Association of America, 1967.

DESENHO, P. W. de. Geometria descritiva - generalidade. 2015. Disponível em: <http://det.ufc.br/desenho/?page_id=86>. Acesso em: 17 jul. 2015.

FARIA, R. M. A. **Interpretação Geométrica dos Problemas Clássicos de Desargues, Fagnano e Malfatti**. 116 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade dos Açores, 2013. Disponível em: <<https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/2769/1/DissertMestradoRaquelMariaAlmeidaFaria2013.pdf>>. Acesso em: 07 jun. 2015.

FERREIRA, E. N. **Geometria descritiva**. 1. ed. Palmas: UFT, 2013.

GONCALVES, T. da S. **Uma Introdução à Geometria Projetiva para o Ensino Fundamental**. 149 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande, 2013. Disponível em: <<http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/851>>. Acesso em: 27 jun. 2015.

HARTSHORNE, R. **Foundations of projective geometry**. 1. ed. New York: W. A. Benjamin, 1967.

HEFEZ, A. **Uma introdução a história da geometria projetiva**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1985. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/doc/47075149/03-03-Uma-Introducao-a-Historia-da-Geometria-Projetiva-Abramo-Hefez>>. Acesso em: 07 mar. 2015.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

HILBERT, D. **The Foundations of Geometry**. Reprint. La Salle: The Open Court Publishing Company, 1950.

JUVENIL, A. [s.n.], 2015. Disponível em: <<http://www.sobrearte.com.br/>>. Acesso em: 21 abr. 2015.

LUZ, B. I. L. Pythagorean tree. 2015. Disponível em: <<http://blog.educastur.es/laluzbilingual2/2012/03/22/pythagorean-tree/>>. Acesso em: 17 jul. 2015.

NUNES, R. S. R. **Geometria fractal e aplicações**. 78 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2006. Disponível em: <<http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>>. Acesso em: 25 jul. 2014.

PARANA. **Diretrizes curriculares da educação básica: matemática**. Curitiba: SEED/PR, 2008.

RABELLO, P. S. B. **Geometria descritiva básica**. 1. ed. Rio de Janeiro: UERJ, 2005.

RIBEIRO, G. da Natividade Baptista da Silva Martins de A. **Teoremas clássicos sobre cônicas projetivas**. 116 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Minho, 2012. Disponível em: <<http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/22995/1/tese%20Gerarda%20Ribeiro.pdf>>. Acesso em: 06 jun. 2015.

ROHWEDDER, L. H. Triangles (spherical geometry). 2007. Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangles_\(spherical_geometry\).jpg#/media/File:Triangles_\(spherical_geometry\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangles_(spherical_geometry).jpg#/media/File:Triangles_(spherical_geometry).jpg)>. Acesso em: 17 jul. 2015.

SANTOS, M. M.; GUEDES, N. L. da S. A teoria da perspectiva fundamentada pela geometria projetiva. **Graphica**, Curitiba (UFPR), 2007. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/A%20TEORIA%20DA%20PERSPECTIVA%20FUNDAMENTADA%20PELA%20GEOMETRIA%20PROJETIV.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2014.

SEARA. [s.n.], 2013. Disponível em: <<http://www.seara.ufc.br/donafifi/hiperbolica/>>. Acesso em: 21 abr. 2015.

SEARA, H. F. Noções de geometria projetiva na formação de professores. **CINFE – Congresso Internacional de Filosofia e Educação**, Caxias do Sul, 2010. Disponível em: <http://www.ucs.br/ucs/tplcinfe/eventos/cinfe/artigos/artigos/arquivos/eixo_tematico5/Nocoos%20de%20Geometria%20Projetiva%20na%20Formacao%20de%20Professores.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2014.

SIENICKI, T. 08 tory railtrack ubt. **Wikipedia**, 2002. Disponível em: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Railroad#mediaviewer/File:08_tory_railtrack_ubt.jpeg>. Acesso em: 13 ago. 2014.

SORIGUEROLA, M. de. A taula de sant miquel. **História, imagem e narrativas**, Rio de Janeiro, n. 2, 2006. Disponível em: <<http://www.historiaimagem.com.br/edicao2abril2006/taulasantmiquel.pdf>>. Acesso em: 21 abr. 2015.

VINCI, L. D. A Última ceia. **Wikipedia**, 2014. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/A_%C3%9Altima_Ceia_%28Leonardo_da_Vinci%29#/media/File:Leonardo_da_Vinci_\(1452-1519\)_-_The_Last_Supper_\(1495-1498\).jpg](http://pt.wikipedia.org/wiki/A_%C3%9Altima_Ceia_%28Leonardo_da_Vinci%29#/media/File:Leonardo_da_Vinci_(1452-1519)_-_The_Last_Supper_(1495-1498).jpg)>. Acesso em: 21 abr. 2015.

WATERMANN, I.; FRANCO, V. S. Geometria projetiva no laboratório de ensino de matemática. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense**, Maringá, v. 2, 2008. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2192-8.pdf>>. Acesso em: 07 jul. 2014.

WOLFE, H. **Introduction to non-euclidean geometry**. 1. ed. New York: [s.n.], 1945.

WU, S.-T. Notas para as aulas de introdução à modelagem de sólidos. [s.n.], Campinas (UNICAMP), 2006. Disponível em: <<http://www.dca.fee.unicamp.br/courses/IA841/2s2006/notas/cap4.pdf>>. Acesso em: 21 jul. 2014.

YOKOYAMA, L. A. Matemática e arte: Perspectiva, um passeio histórico, artístico e teórico através da geometria dinâmica. Rio de Janeiro, 2000. Disponível em: <http://www.leoakio.com/wa_files/dissertacao_20adaptada_20mestrado_leo_20akio_20yokoyama.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2015.

ZUIN, E. de S. L. Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações. **Reunião ANPED**, Caxambu, v. 25, 2002. Disponível em: <<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:EyVbLzFXMKEJ:25reuniao.anped.org.br/excedentes25/elenicezuin19.rtf+cd=1hl=pt-BRct=clnkg1=br>>. Acesso em: 07 jul. 2014.

ANEXO A – QUESTIONÁRIO

QUESTIONÁRIO SOBRE AULAS DE GEOMETRIA PROJETIVA – 6º ANO 02 MATEMÁTICA – PROF. ELVIS SCHMIDT	
1) Você já havia aprendido algo sobre perspectiva na escola?	
<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Sim
	Em qual ano? _____
	Em qual disciplina? _____
2) Você já havia aprendido algo sobre perspectiva fora da escola?	
<input type="checkbox"/> Não	<input type="checkbox"/> Sim
	Onde? _____
3) As aulas teóricas (explicação do professor com projeção de imagens) sobre Geometria Projetiva contribuíram para você melhorar o desenho na segunda tentativa?	
<input type="checkbox"/> Não contribuiu em nada	<input type="checkbox"/> Contribuiu pouco <input type="checkbox"/> Contribuiu razoavelmente <input type="checkbox"/> Contribuiu muito
4) As aulas práticas (montagem dos blocos e desenhos em grupo) sobre Geometria Projetiva contribuíram para você melhorar o desenho na segunda tentativa?	
<input type="checkbox"/> Não contribuiu em nada	<input type="checkbox"/> Contribuiu pouco <input type="checkbox"/> Contribuiu razoavelmente <input type="checkbox"/> Contribuiu muito
5) Você gostaria de continuar estudando mais sobre este tipo de geometria? Por quê?	

ANEXO B – DADOS COLETADOS

QUESTIONÁRIO SOBRE AULAS DE GEOMETRIA PROJETIVA				
Você já havia aprendido algo sobre perspectiva?	Não	Sim	Quando?	
	24	4	4º, 5º, 6º anos	
	85,70%	14,30%	Disciplina de matemática	
Você já havia aprendido algo sobre perspectiva fora da escola?	Não	Sim	Onde?	
	21	7	Revistas: 2 (7%) Internet: 1 (3,5%) Em casa com parentes: 4 (14,5%)	
	75%	25%		
As aulas teóricas contribuíram na melhora do desenho?	Muito	Roçoavelmente		
	22	6		
	78,50%	21,50%		
As aulas práticas (em grupo) contribuíram na melhora do desenho?	Muito	Roçoavelmente	Pouco	Nada
	19	5	2	2
	68%	18%	7%	7%
Você gostaria de estudar mais sobre este tipo de geometria?	Sim	Não		
	25	3		
	89%	11%		