Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Áreas de Polígonos via Determinantes

Paulo Henrique Zerbinatti

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Jamil Viana Pereira

2015

516.2 Zerbinatti, Paulo Henrique
Z58a Áreas de Polígonos via Determinantes/ Paulo Henrique Zerbinatti- Rio Claro: [s.n.], 2015.
64 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Jamil Viana Pereira

1. Geometria euclidiana. 2. triângulos. 3. Vértices. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

termo de aprovação

Paulo Henrique Zerbinatti
ÁREAS DE POLÍGONOS VIA DETERMINANTES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Orientador

Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva
ICMC-USP de São Carlos - SP

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato .
UNESP - Rio Claro - IGCE

Rio Claro, 24 de agosto de 2015

Aos meus pais Maria de Lourdes e Francisco(in memoriam).
À minha esposa Silvia.
Às minhas filhas Luiza e Sofia.
Ao meu avô Vergílio Bernardi(in memoriam).
Ao professor Frederico Heyden (in memoriam)

Agradecimentos

A Deus, que sempre meu deu força nos momentos mais complicados..

Aos meus pais Maria de Lourdes e Francisco que me deram bons exemplos e me ensinaram a ser justo.

À minha esposa Silvia que sempre me apoiou nesses anos de curso.

Às minhas filhas que sempre me deram muita alegria e amor.

Ao meu avô Vergílio Bernardi(in memoriam) pelo grande exemplo de honestidade e dignidade.

Ao professor Frederico Heyden(im memoriam) que sempre me incentivou a estudar Matemática.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela excelente iniciativa de conceber o PROFMAT.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela bolsa de estudos concedida, que foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro.

Aos meus colegas professores (turma 2012), por oferecerem apoio nos momentos de tensão e propiciarem momentos de alegria durante as aulas.

Ao meu companheiro de viagem Rafael Oliveira.

A Prof. Suzi coordenadora do PROFMAT em 2012, pelo carinho e respeito com que sempre me acolheu, me animando nos momentos mais difíceis.

Ao Prof. Dr. Jamil Viana Pereira, por me orientar durante a elaboração deste trabalho com esclarecimentos, correções e sugestão, e por demonstrar compreensão e paciência.

"Diante de Deus todos somos igualmente sábios e igualmente tolos."

Albert Einstein.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre o cálculo de áreas de polígonos através das coordenadas de seus vértices. Faremos isto utilizando determinantes de ordem 2 e conceitos básicos de Geometria Euclidiana Plana.

Palavras-chave: Geometria euclidiana, triângulos, Vértices.

Abstract

The aim of this work is to present a study on areas of polygons through their vertex coordinates. We treat the subject using determinants of order 2 and basic Euclidean Geometry.

Keywords: Euclidean Geometry, triangles , vertices.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Há muitos anos leciono Geometria em cursos preparatórios para vestibular. Em uma dessas minhas aulas, quando calculava a área de um pentágono convexo através de seus vértices, utizando a área de um triângulo através do determinante, um aluno me perguntou se eu já tinha ouvido falar do "Determinante Místico". Logicamente fiquei curioso e percebi que se tratava de um método prático para o cálculo de áreas. Perguntei ao garoto se ele tinha a demonstração do método e ele me falou que um professor havia mostrado este método no ano anterior , mas também não conhecia a demonstração. Obviamente fiquei curioso, me fiz as seguintes perguntas: Este método funciona mesmo para todos os polígonos? Este método funciona apenas para os polígonos convexos? Confesso que isto me perturbou por uns bons anos, até que consegui provar que o método valia para polígonos convexos. A partir daí comecei a mostrar para meus alunos, mas sempre enfatizando que valia com certeza para polígonos convexos. A dúvida sobre os polígonos não convexos ainda me perturbava. Por falta de tempo devido a grande quantidade de aulas nunca tive disposição para pensar no assunto com maior profundidade. Depois que comecei a participar do PROFMAT, ministrado pelos professores da UNESP de Rio Claro, a necessidade de escolha de um tema para a dissertação, fez com que este determinante viesse a mente e a partir daí com o apoio do meu orientador comecei a trabalhar na demonstração do "Determinante Místico"para qualquer polígono. Este Trabalho é dividido da seguinte forma:

Tomaremos como referências os livros [2] e [3] para desenvolver alguns pré-requisitos de Geometria Plana, postulados, definições e alguns resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 2, trabalharemos assuntos importantes de Trigonometria e Geometria Analítica, tomando como referência o livro [1], que darão sustentabilidade ao trabalho, como distância entre dois pontos, áreas e adição de arcos trigonométricos. No capítulo 3, demonstraremos um resultado que pode ser encontrado no trabalho [7], o qual mostra que todo polígono pode ser decomposto em triângulos. Ainda neste capítulo, utilizaremos o conceito de determinante, tendo como referência o livro [6], para desenvolver uma fórmula capaz de calcular a área de qualquer polígono utilizando apenas as coordenadas de seus vértices. Encerramos o trabalho resolvendo exercícios comuns ao Ensino Médio e aos vestibulares.

1 Geometria Plana.

Neste capítulo trabalharemos os principais postulados da Geometria Plana.

1.1 Principais Axiomas da Geometria Plana.

Apresentaremos as principais noções primitivas da Geometria Plana, ou seja as ideias de ponto, reta e plano. A partir destes três elementos começaremos o desenvolvimeto da Geometria Plana. Os pontos serão indicados pelas letras maiúsculas do nosso alfabeto, as retas por letras minúsculas do nosso alfabeto e os planos por letras minúsculas do alfabeto grego.

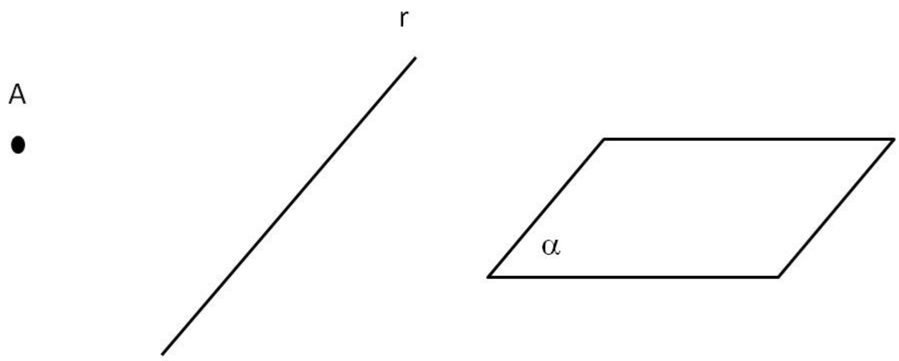


Figura 1.1: Entes Primitivos da Geometria Plana.

Axioma 1.1. *Numa reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.*

Exemplo 1.2. Na figura abaixo dizemos que os pontos A e B pertencem à reta r, ou que a reta r passa pelos pontos A e B. Dizemos também que C não pertence à reta r.

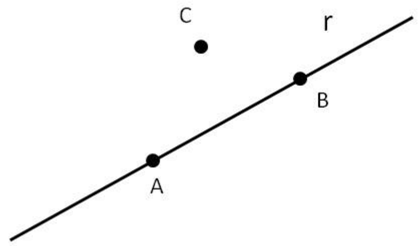


Figura 1.2: Reta e Ponto.

Definição 1.3. *Pontos de uma mesma reta são chamados de colineares.*

Definição 1.4. *Dois pontos distintos A e B de uma reta r determinam um segmento de reta AB e são as extremidades deste segmento. Indicamos por $\overline{AB}$. A medida desse segmento será indicada por apenas AB. A medida desse segmento será dada pela distância entre os pontos A e B.*

Definição 1.5. *Dois segmentos com a mesma medida são chamados de congruentes.*

Definição 1.6. *Um reta r que contém um segmento $\overline{AB}$ é chamada de reta suporte do segmento AB.*

Definição 1.7. *Um ponto O de uma reta r separa-a em duas semirretas opostas de origem O, indicamos por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

Axioma 1.8. *Num plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.*

Exemplo 1.9. Consideremos a figura abaixo:

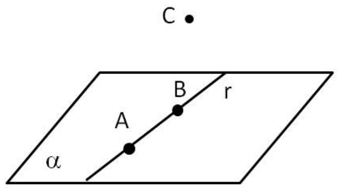


Figura 1.3: Plano.

Dizemos que os pontos A e B pertencem ao plano e que o ponto C não pertence ao plano. Dizemos que a reta r, que passa pelos pontos A e B, está contida no plano.

Definição 1.10. *Uma reta r ,contida em um plano α, divide este plano em duas regiões, cada uma destas regiões e a reta r formam um semiplano. Esta reta é denominada de origem dos semiplanos.*

Definição 1.11. *Pontos de um mesmo plano são chamados de coplanares.*

Definição 1.12. *Duas retas distintas e coplanares podem ser paralelas, quando não possuem ponto comum ou concorrentes, quando possuem apenas um ponto comum.*

1.2 Ângulos

Apresentaremos, agora, a definição de ângulo, bem como algumas propriedades relativas à sua medida.

Definição 1.13. *Dados no plano duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo é a reunião dessas duas semirretas. As semirretas são sãoo chamadas de lados do ângulo e o ponto O de vértice do ângulo. Este ângulo será denotado por AOB.*

Axioma 1.14. *A cada ângulo AOB corresponde um número real entre 0 e 180.*

Definição 1.15. *O número correspondente ao axioma anterior é chamado medida do ângulo AOB, o que é denotado por $A\hat{O}B$, em alguns casos esta medida também poderá ser denotada por $\hat{O}$.*

Definição 1.16. *Ângulos que têm a mesma medida são chamados de ângulos congruentes.*

Axioma 1.17. *Seja $\overrightarrow{AB}$ uma semirreta contida na reta origem de um semiplano H. Para cada número r entre 0 e 180 existe exatamente uma semirrreta $\overrightarrow{AP}$, com P em H, tal que $P\hat{A}B = r$*

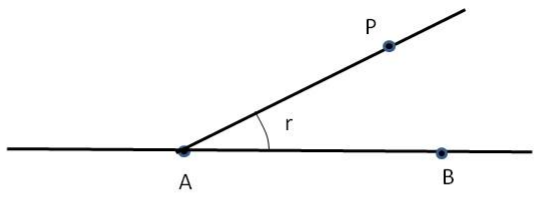


Figura 1.4: Ângulo.

Axioma 1.18. *Se D é um ponto interior do ângulo BAC , então $B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C$*

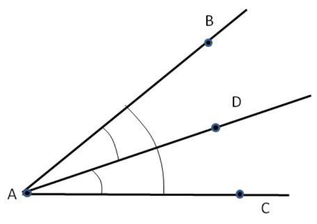


Figura 1.5: Ângulos consecutivos.

Definição 1.19. *Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são semirretas opostas e $\overrightarrow{AD}$ é uma outra semirreta então $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$ formam um par linear.*

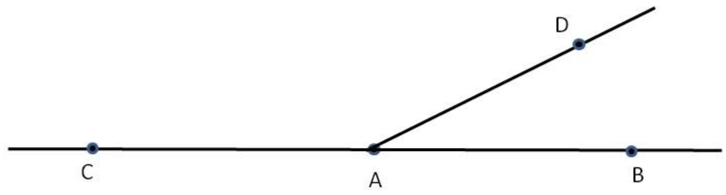


Figura 1.6: Ângulos Adjacentes.

Axioma 1.20. *Se dois ângulos formam um par linear, então a soma de suas medidas é* 180°.

Observação 1.21. Um ângulo cuja medida varia de 0 a 90 graus é chamado de agudo, um ângulo com medida igual a 90 graus é chamado de reto e um ângulo cuja medida varia entre 90 e 180 graus é chamado de obtuso.

1.3 Outras definições para Ângulos

Para Euclides, um ângulo é a inclinação recíprocra de duas retas que num plano têm um extremo comum e não estão em prolongamento. Euclides admitia um ângulo raso, definido como retilíneo, como sendo o ângulo cujos lados estão na mesma linha reta. H.Shotten , em 1803, colocou as definições de ângulos em três categorias: a diferença de direção entre duas linhas retas, a medida de rotação necessária para trazer um lado de sua posição inicial para outro e finalmente a porção do plano entre duas retas.Este texto tem como referência o livro [3]. Quando adicionamos a medidas de dois ângulos obtusos, por exemplo, encontramos uma medida maior que 180 graus. Neste trabalho consideraremos um ângulo com medida θ, dada em graus , maior que 180 graus , admitindo que este ângulo foi obtido a partir da soma das medidas de outros ângulos.

2 Conceitos Iniciais

A intenção deste capítulo é fornecer uma base teórica para o desenvolvimento do assunto proposto neste trabalho, para isso partimos da ideia de polígono, de áreas para depois seguir na direção da Geometria Analítica e da Trigonometria, terminando com rotação e translação de triângulos.

2.1 Polígonos

Nesta seção definiremos um polígono, bem como algumas de suas classificações como convexo, não convexo e regular.

Definição 2.1. *Seja A_1,A_2,A_3...A_n, uma sequência de n pontos distintos e coplanares tais que os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$,..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ têm as seguintes propriedades:*

(a) Nenhum par de segmentos se intersecciona, salvo nas extremidades.

(b) Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A união dos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$,..., $\overline{A_{n-1}A_n}$é chamada de polígono , sendo denotado por $A_1A_2A_3A_4...A_{n-1}A_n$. Os pontos $A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{n-1}, A_n$ são chamados de vértices do polígono e os segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$,..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$ são os lados do polígono.

Definição 2.2. *O conjunto dos pontos internos de um polígono é chamado de região interna deste polígono e o conjunto dos pontos externos de um polígono é chamado de região externa deste polígono.*

Definição 2.3. *A reunião de um polígono com sua região interna é chamada de região poligonal.*

Definição 2.4. *Todo segmento de reta cujos extremos são dois vértices não consecutivos de um polígono é denominado diagonal desse polígono.*

Definição 2.5. *Diagonal interna é uma diagonal que possui todos os pontos, exceto os extremos, na região interna de um polígono.*

Definição 2.6. *Diagonal externa é uma diagonal que possui todos os pontos, exceto os extremos, na região externa de um polígono.*

Definição 2.7. *Dizemos que um polígono é convexo quando dado dois pontos de sua região poligonal, o segmento que os une também está contido nesta região poligonal.*

Definição 2.8. *Todo polígono que não é convexo, é denominado côncavo ou não convexo.*

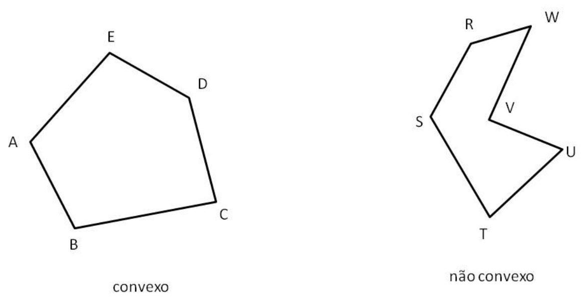


Figura 2.1: Polígono.

Definição 2.9. *Um polígono regular é um polígono convexo que possui seus lados dois a dois e seus ângulos dois a dois congruentes.*

Definição 2.10. *Retângulo é um polígono com quatro lados e quatro ângulos retos.*

Definição 2.11. *Quadrado é um retângulo de lados congruentes.*

2.2 Triângulos

Faremos agora a definição e a classificação dos triângulos.

Definição 2.12. *Um polígono com três lados é denominado triângulo ou trilátero.*

Os triângulos podem ser classificados das seguintes maneiras:

> O triângulo que possui dois lados com as mesmas medidas é chamado de Isósceles, o terceiro lado é denominado base. O triângulo que não possui lados com medidas iguais é chamado de escaleno. O triângulo que possui os três lados congruentes é chamado de equilátero.

O triângulo que possui um ângulo reto é chamado de retângulo, o que possui todos os ângulos agudos é chamado de acutângulo e o triângulo que possui um ângulo obtuso é chamado de obtusângulo. Os lados do triângulo retângulo que formam o ângulo reto são os catetos e o terceiro lado será chamado de hipotenusa.

Definição 2.13. *Uma altura de um triângulo é um segmento que une um vértice do triângulo com a reta suporte do lado oposto e é perpendicular a essa reta. Cada triângulo possui três alturas.*

2.3 Congruência de triângulos.

Nesta seção serão mostrados dois casos para a congruência de dois triângulos. Estes dois casos serão muito úteis para garantir que as medidas de um triângulo não se alteram quando este sofre rotação ou translação.

Definição 2.14. *Dois triângulos são congruentes quando é possível estabelecer uma correpondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes tenham as mesmas medidas.*

ABC e DEF são triângulos congruentes, então:

$AB = DE$, $BC = EF$ e $AC = DF$

$B\hat{A}C = E\hat{D}F$, $A\hat{C}B = D\hat{F}E$ e $C\hat{B}A = F\hat{E}D$

Axioma 2.15. *(Axioma da Congruência) Dados dois triângulos ABC e DEF, se $AB = DE$, $AC = DF$ e $B\hat{A}C = E\hat{D}F$, então eles são congruentes.*

Teorema 2.16. *(Teorema do Triângulo Isósceles) Em um triângulo isósceles os ângulos da base têm medidas iguais.*

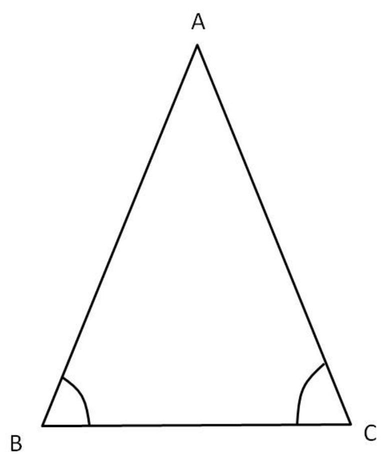


Figura 2.2: Triângulo Isósceles.

Demonstração: Seja ABC um triângulo em que AB = AC. Pretendemos provar que $A\hat{B}C = A\hat{C}B$, para isto comparemos o triângulo ABC com com o triângulo ACB. Desta comparação obtemos que AB = AC , AC = AB e $B\hat{A}C = C\hat{A}B$. Pelo Axioma da congruência acima concluímos que os triângulos ABC e ACB são congruentes e que $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. ■

Teorema 2.17. *(caso LLL) Se dois triângulos tem os três lados correspondentes congruentes, então eles são congruentes.*

Demonstração: Consideremos os triângulos ABC e DEF, tais que AB = DE, BC = EF e CA = FD.

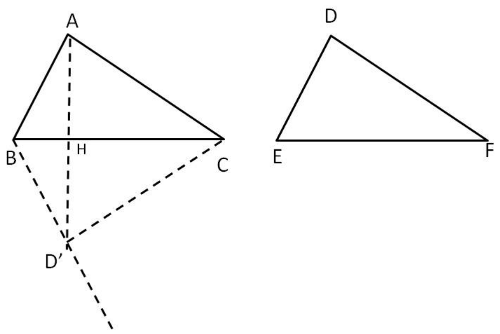


Figura 2.3: Caso LLL.

No semiplano determinado por $\overline{BC}$ e que não contém o ponto A, consideremos uma semirreta de origem B formando com $\overline{BC}$ um ângulo congruente ao ângulo DEF. Escolhamos sobre ela um ponto D' tal que BD' = DE. Pelo axioma da congruência concluímos que os triângulos $D'BC$ e DEF são congruentes.
Iremos mostrar agora que os triângulos ABC e $D'BC$ são congruentes.
Seja H o ponto em que $\overline{AD'}$ corta a reta que passa pelos pontos B e C.
Vamos supor primeiro que H está entre B e C, como na figura anterior. Sabemos que os triângulos $BD'A$ e CAD' são isósceles e que $B\hat{A}D' = B\hat{D'}A$ e $C\hat{A}D' = C\hat{D'}A$
Utilizando o Postulado da adição de ângulos, obtemos:
$B\hat{A}C = B\hat{A}D' + D'\hat{A}C = B\hat{D'}A + A\hat{D'}C = B\hat{D'}C$
Concluímos então que os triângulos ABC e $D'BC$ são congruentes pelo axioma da congruência.

No caso em que B está entre H e C como na figura seguinte, pode-se demonstrar de forma análoga que $D'BC$ e DEF são congruentes e que ABC e $D'BC$ também são congruentes.

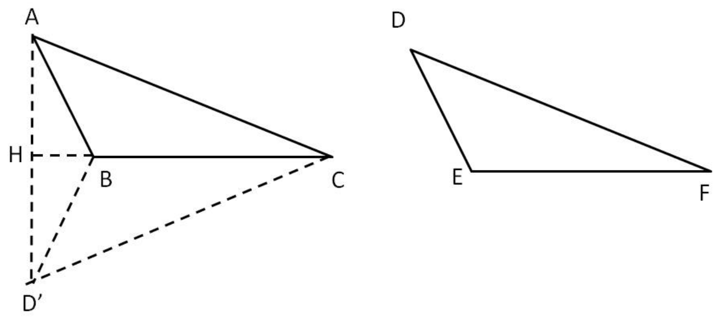


Figura 2.4: Caso LLL(2).

Em ambos os casos, por transitividade, obtemos que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Iremos agora analisar o caso em que H = B, isto é A, B e D' são colineares.

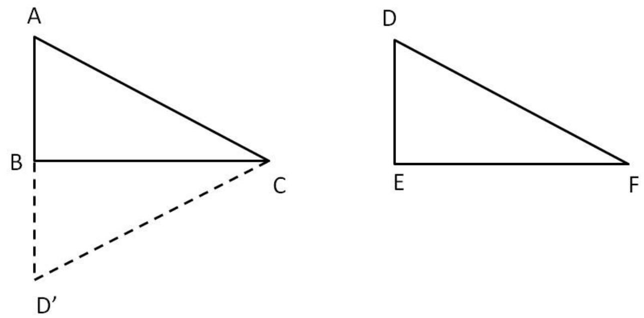


Figura 2.5: Caso LLL(3).

Neste caso, $B\hat{A}C = B\hat{D}'C$, pelo Triângulo Isésceles e por transitividade $B\hat{A}C = E\hat{D}F$. Novamente pelo Axioma da Congruência e por transitividade, obtemos que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Outros dois casos em que H = C ou que C está entre B e H, são análogos aos casos anteriores. ■

Definição 2.18. *Seja S uma correspondência biunívuca entre os vértices de dois triângulos ABC e DEF. Se os ângulos correspondentes são congruentes e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, dizemos que os triângulos ABC e DEF são semelhantes.*

2.4 Áreas de alguns polígonos.

Nesta seção calcularemos a área da região poligonal de algumas figuras importantes para o desenvolvimento deste tabalho.

Axioma 2.19. *(Axioma das Áreas) A cada região poligonal corresponde um único número real positivo.*

Definição 2.20. *A área de uma região poligonal é o número real que lhe corresponde pelo Axioma das Áreas.*

Axioma 2.21. *Se uma região poligonal quadrada tem lado de comprimento a, então sua área é a^2.*

Iremos estudar áreas de regiões poligonais que podem ser decompostas como a união de duas ou mais regiões poligonais, como na figura.

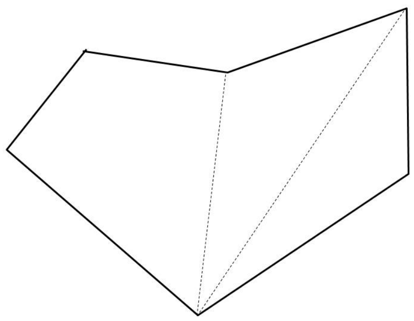


Figura 2.6: Regiões Poligonais.

O axioma abaixo trata da situação descrita acima.

Axioma 2.22. *Se uma região R de um plano M é a união de duas outras regiões R' e R",sendo R' e R" regiões de M que se interceptam em um número finito de pontos ou segmentos, então a área de R é a soma das áreas de R' e R".*

Daqui em diante, usaremos a expressão "área de um polígono"ao invés de "área de um região poligonal".

Teorema 2.23. *A área de um retângulo cujos lados medem a e b é dada por* $S = a \cdot b$

Demonstração: Consideremos o retângulo $ABCD$ da figura:

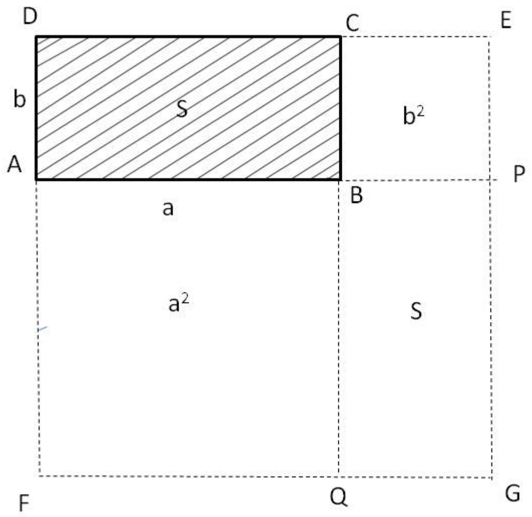


Figura 2.7: Área do Retângulo.

Para o construção acima tracemos o segmento de medida $CE = b$ de modo que $\overline{DC}$ e $\overline{CE}$ sejam colineares e o segmento de medida $AF = a$ de modo que $\overline{DA}$ e $\overline{AF}$ sejam colineares. Pelo ponto F tracemos o segmento $\overline{FG}$ paralelo ao segmento $\overline{DE}$ e por E tracemos o segmento $\overline{EG}$ paralelo ao segmento $\overline{AF}$, de modo que FG = EG = a + b. A reta suporte do segmento $\overline{AB}$ intersecciona o segmento $\overline{EG}$ no ponto P e a reta suporte do segmento $\overline{CB}$ intersecciona o segmento $\overline{FG}$ no ponto Q.

A figura , agora, é composta por dois quadrados, um com lado medindo a e outro com lado medindo b e dois retângulos congruentes de lados a e b e de áreas iguais a S. A área do quadrado DFGE é dada por $(a+b)^2$. portanto:

$a^2 + b^2 + 2 \cdot S = (a+b)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot S = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b - a^2 - b^2 \Leftrightarrow S = a \cdot b$ ■

2.5 Área do Triângulo Retângulo

Neste seção estabeleceremos a ideia básica para o cálculo da área de triângulos, o que será muito útil no desenvolvimento do tema principal.

Teorema 2.24. *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto das medidas dos lados que formam o ângulo reto.*

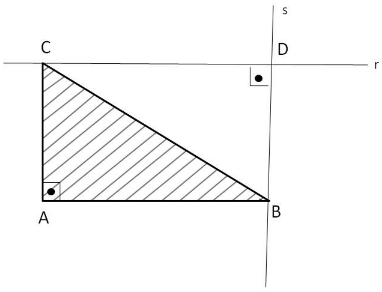


Figura 2.8: Área do triângulo retângulo.

Demonstração: Vamos considerar um triângulo retângulo ABC com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ formando o ângulo reto. Pelo ponto C tracemos uma reta r paralela ao lado $\overline{AB}$ e por B uma reta s paralela ao lado $\overline{AC}$, de modo que as retas r e s se interseccionem no ponto D. Os triângulos ABC e DCB são congruentes pelo postulado de congruência. Portanto os triângulos CAB e BDC possuem a mesma área S, que correspode à metade da área do retângulo ABCD, dada por $AB.AC$. Logo , $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$. ■

Proposição 2.25. *A área de um triângulo acutângulo é a metade do produto da medida de um lado pela altura relativa a este lado.*

Demonstração: Consideremos um triângulo acutângulo ABC com altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$. Vamos mostrar que a área S deste triângulo será dada por $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$

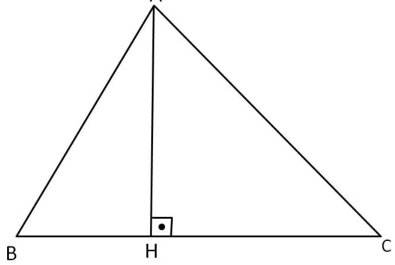


Figura 2.9: Área do triângulo acutângulo.

$$S_{ABC} = S_{ABH} + S_{ACH}$$
$$S_{ABC} = \frac{BH \cdot AH}{2} + \frac{CH \cdot AH}{2}$$
$$S_{ABC} = \frac{(BH + CH) \cdot AH}{2}$$

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2}$

■

Proposição 2.26. *A área de um triângulo obtusângulo é igual a metade do produto da medida de um lado pela medida da altura relativa a este lado.*

Demonstração: Consideremos um triângulo obtusângulo ABC com altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$, sendo o ângulo ABC obtuso. Vamos mostrar que a área deste triângulo será dada por $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$

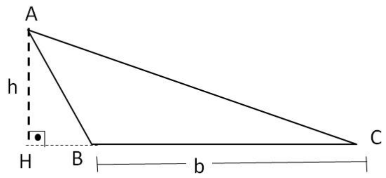


Figura 2.10: Área do triângulo obtusângulo.

$S_{ABC} = S_{AHC} - S_{ABH}$
$S_{ABC} = \frac{CH \cdot AH}{2}$ - $\frac{BH \cdot AH}{2}$
$S_{ABC} = \frac{(CH - BH) \cdot AH}{2}$
$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2}$

■

2.6 Teorema de Pitágoras

Existerm inúmeras demonstrações para o Teorema de Pitágoras. Iremos elaborar uma demonstração utilizando semelhana de triângulos.

Teorema 2.27. *Num triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Demonstração: Vamos considerar um triângulo ABC, retângulo em A , sendo BC a medida de sua hipotenusa,AC e AB as medidas de seus catetos. Tracemos a altura de medida AH , determinando os triângulos HBA e HAC.

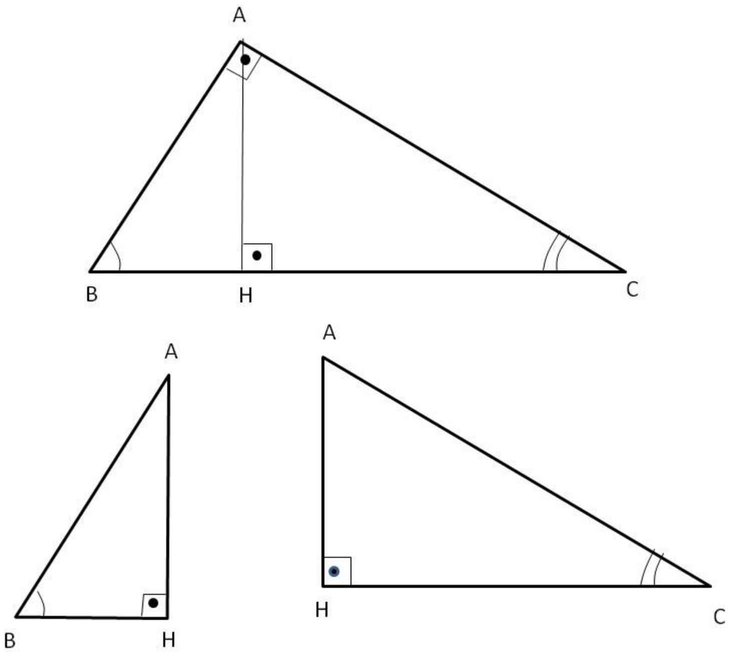


Figura 2.11: Pitágoras.

Observando que os triângulos HBA e ABC são semelhantes, podemos escrever:

$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot BC(i)$

Considerando, agora, a semelhança entre os triângulos HAC e ABC, podemos escrever:

$\frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2 = HC \cdot BC(ii)$

Somando as equações (i) e (ii) acima, obtemos:

$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BH + HC) \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC \cdot BC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

■

2.7 Sistema de Coordenadas no Plano.

Construiremos agora o sistema de eixos perpendiculares para a localização de pontos através de suas coordenadas.

Dada uma reta r podemos representar os pontos desta reta por números reais, através da seguinte construção:

(a) Escolhemos um ponto O na reta r chamado de origem.

(b) Escolhemos uma unidade u de comprimento.

(c) Escolhemos um sentido positivo de percurso.

A cada ponto X da reta r, correspondemos um número x, que chamaremos de medida orientada do segmento $\overline{OX}$. Medida Orientada é o comprimento do segmento $\overline{OX}$ na unidade u. Usaremos os sinal positivo se o sentido coincidir com o sentido de percurso e usaremos o sinal negativo se o sentido não coincidir com o sentido de percurso. Uma representação parecida para pontos de um plano é obtida do seguinte modo: Fixemos no plano um ponto O chamado de origem e por O traçam-se duas retas OX e OY perpendiculares chamadas de eixos coordenados. Sobre estas duas retas escolhemos uma unidade de comprimento e sentidos de percurso Por um ponto P deste plano, tracemos as retas r es que interceptam perpendicularmente OX e OY nos pontos X e Y, respectivamente. Os números x_P e y_P são os números reais associados aos pontos X e Y de cada eixo. É usual chamarmos x_P de abscissa do ponto P e y_P de ordenada do ponto P.

O sistema que segue é denominado Sistema de Coordenadas Ortogonais. Deste modo a cada ponto do plano associamos a um único par ordenado (x,y).

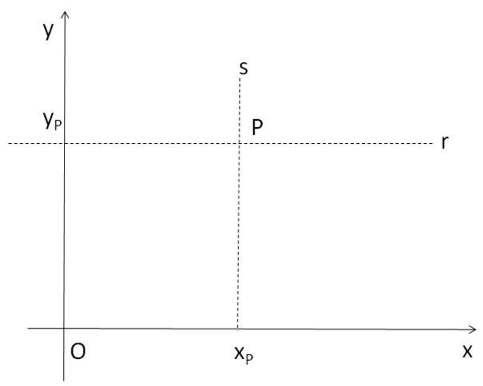


Figura 2.12: Sistema Cartesiano.

2.8 Distância Entre Dois Pontos no Plano.

Calcularemos agora a distância entre dois pontos A e B através de suas coordenadas. Consiedremos dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ localizados no mesmo sistema de eixos. Para determinar a distância entre estes dois pontos devemos determinar a medida do segmento que une estes dois pontos, considerando a unidade estabelecida no próprio sistema de coordenadas.

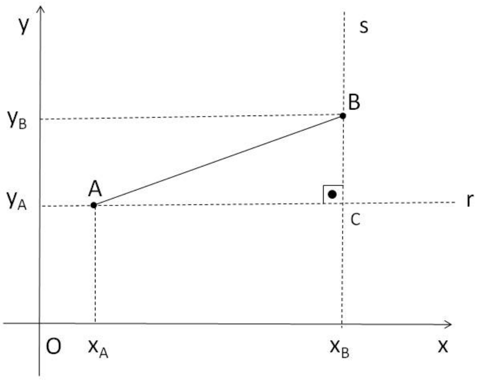


Figura 2.13: Distância entre dois Pontos.

Pelo ponto A tracemos uma reta r paralela ao eixo OX e pelo ponto B tracemos uma reta s paralela ao eixo OY, de modo que r interseccione s no ponto C.Temos então um triângulo retângulo de vértices A, B e C. Apliquemos, agora, o teorema de Pitágoras.

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Temos agora uma relação para o álculo da distância ente dois pontos através de seus vértices.

2.9 Razões Trigonométricas.

Mostraremos agora as principais razões trigonométricas para ângulos cujas medidas variam ente 0 e 90 graus, fazendo no final desta seção uma ampliação para uma medida θ ,dada em graus ,de modo que $\theta > 0$.

Definição 2.28. *Num triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos cujas medidas são $\hat{B}$ e $\hat{C}$ opostos respectivamente aos catetos b e c, definimos seno e cosseno do seguinte modo:*

- $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$ *(cateto adjacente dividido pela hipotenusa)*
- $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a}$ *(cateto oposto dividido pela hipotenusa)*

E, analogamente $\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$ *e* $\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a}$.

Na figura abaixo os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes:

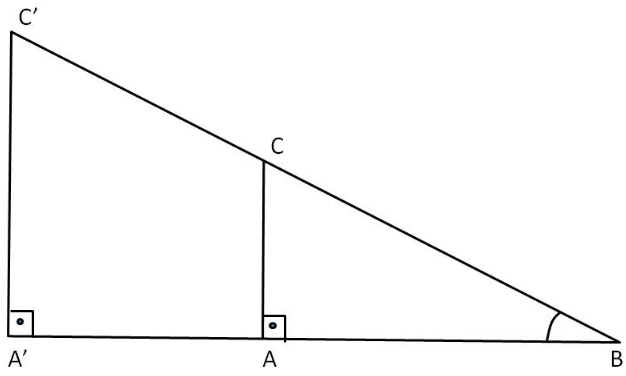


Figura 2.14: Triângulo Retângulo.

$sen\hat{B} = \frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B}$ e $cos\hat{B} = \frac{AB}{CB} = \frac{A'B}{C'B}$

Concluímos então que o seno e o cosseno para ângulos agudos dependem exclusivamente do ângulo e não do triângulo que contém este ângulo.

Teorema 2.29. *A medida da diagonal de um quadrado, cujo lado mede a, é dada por* $a \cdot \sqrt{2}$.

Demonstração: Considere um quadrado ABCD de lado a, iremos calcular a medida da diagonal AC deste quadrado.

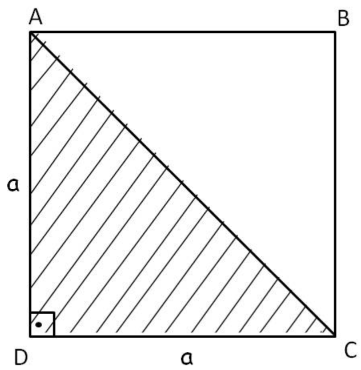


Figura 2.15: Quadrado.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADC, temos:

$(AC)^2 = a^2 + a^2$

$AC = \sqrt{2 \cdot a^2}$
$AC = a \cdot \sqrt{2}$
O cálculo da medida da diagonal BD é análogo. ■

Proposição 2.30. *Um ângulo cuja medida é de* $45°$ *possui o seno igual ao cosseno.*

Demonstração: Quando traçamos a diagonal AC de um quadrado $ABCD$ obtemos os triângulos ADC e ABC, congruentes pelo caso LLL de congruência, pois $AD = AB$, $DC = BC$ e o lado AC é comum. Vamos considerar um quadrado ABCD de lado a e diagonal $a \cdot \sqrt{2}$.
Calcularemos neste quadrado o seno e o cosseno de 45°.

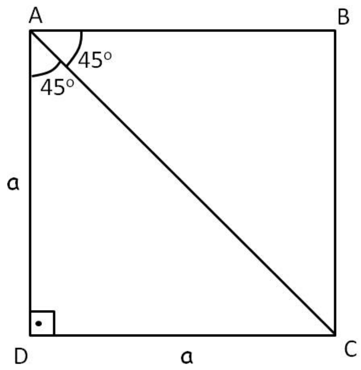


Figura 2.16: Quadrado(2).

Considerando a congruência dos triângulos ADC e ABC, podemos escrever que $D\hat{A}C = B\hat{A}C = 45°$ e calcular o seno e o cosseno de 45°.

$sen45° = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos45° = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto $sen45° = cos45°$ ■

2.10 Relação Trigonométrica Fundamental.

Mostraremos nesta seção uma das fórmulas mais importantes da Trigonometria, a Relação Trigonométrica Fundamental

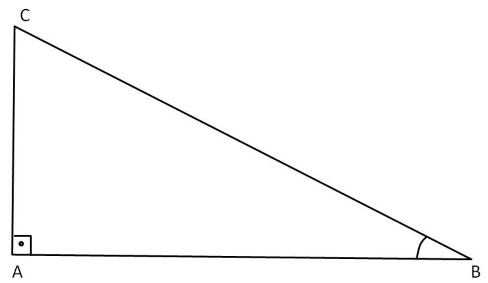


Figura 2.17: Relação Fundamental

No triângulo ABC da figura, podemos , utilizando o Teorema de Pitágoras, escrever:

$$(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2 \Rightarrow \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \tag{2.2}$$

$$\left(sen\hat{B}\right)^2 + \left(cos\hat{B}\right)^2 = 1 \tag{2.3}$$

2.11 Ampliação do domínio do seno e do cosseno.

Na seção anterior foram definidos o seno e o cossendo de um ângulo de medida θ graus, para $0° < \theta < 90°$. Ampliaremos , nesta seção, a definição para ângulos de medida θ, dada em graus, de modo que $\theta > 0$.

Definição 2.31. *Etendemos o domínio das funções seno e cosseno para um ângulo de medida θ , dada em graus, de modo que $\theta > 0$, através das seguintes fórmulas:*

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$
$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha,$
onde α e β são medidas positivas dadas em graus.

Exemplo 2.32. Calcularemos, inicialmente, os valores do seno e do cosseno de 90 graus, que serão muito úteis para a definição do seno e do cosseno de medidas que variam entre 90 e 180 graus.

$sen90° = sen(45° + 45°)$
$sen90° = sen45° \cdot cos45° + sen45° \cdot cos45°$
$sen90° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$sen90° = 1$

$cos90° = cos(45° + 45°)$
$cos90° = cos45° \cdot cos45° - cos45° \cdot cos45°$
$cos90° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$
$cos90° = 0$

Consideremos um ângulo de medida θ dada em graus de modo que $0° < \theta < 180°$ e escrevemos :
$\theta = 90° + \alpha$ com $0° < \alpha < 90°$.
Calculemos, agora, o $sen\theta$ e o $cos\theta$ do seguinte modo:

$sen\theta = sen(90° + \alpha)$
$sen\theta = sen90° \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot cos90°$
$sen\theta = 1 \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot 0$
$sen\theta = cos\alpha$

$cos\theta = cos(90° + \alpha)$
$cos\theta = cos90° \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot sen90°$
$cos\theta = 0 \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot 1$
$cos\theta = -sen\alpha$

A relacão fundamental também vale para este caso.
$(sen\theta)^2 + (cos\theta)^2 = (cos\alpha)^2 + (-sen\alpha)^2 = 1$

Com tudo isso ampliamos as definições de seno e cosseno para ângulos de medidas θ, dada em graus, de modo que $0° < \theta < 180°$.

Exemplo 2.33. Neste exemplo calcularemos os valores do seno e do cosseno de 180 graus.
$sen(180°) = sen(90° + 90°)$
$sen(180°) = sen90° \cdot cos90^o + sen90° \cdot cos90^o$
$sen180° = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0$
$sen180° = 0$

$cos(180°) = cos(90° + 90°)$
$cos(180°) = cos90° \cdot cos90^o - sen90° \cdot sen90^o$
$cos180° = 0 \cdot 0 - 1.1$
$cos180° = -1$

Consideremos um ângulo de medida θ dada em graus de modo que $180° < \theta < 360°$ e escrevemos :
$\theta = 180° + \alpha$ com $0° < \alpha < 180°$.
Calculemos, agora o $sen\theta$ e o $cos\theta$ do seguinte modo:

$sen\theta = sen(180° + \alpha)$
$sen\theta = sen180° \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot cos180°$
$sen\theta = 0 \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot (-1)$
$sen\theta = -sen\alpha$

$cos\theta = cos(180° + \alpha)$
$cos\theta = cos180° \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot sen180°$
$cos\theta = (-1) \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot 0$
$cos\theta = -cos\alpha$
Neste caso a relação trigonométrica fundamental também é válida.

$(sen\theta)^2 + (cos\theta)^2 = (-sen\alpha)^2 + (-cos\alpha)^2 = 1$
Com tudo isso ampliamos as definições de seno e cosseno para ângulos de medidas θ, dada em graus, de modo que $0° < \theta < 360°$.

Exemplo 2.34. Calcularemos os valores do seno e do cosseno de 360 graus.
$sen360° = sen(180° + 180°)$
$sen360° = sen180° \cdot cos180° + sen180° \cdot cos180°$
$sen360° = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)$
$sen360° = 0$

$cos360° = cos(180° + 180°)$
$cos360° = cos180° \cdot cos180° - sen180° \cdot sen180°$
$cos360° = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0$
$cos360° = 1$

Observação 2.35. Através das relações de soma de dois ângulos de medidas α e β.

$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha$

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$,
podemos definir o seno e cosseno para qualquer medida $\theta > 0$, dada em graus.

Exemplo 2.36. Calcularemos agora o valor da relação $sen(\beta - \alpha)$, considerando que $0 < \alpha < \beta$ e que $\beta - \alpha = \theta$, podemos escrever:

$$\beta = \theta + \alpha \tag{2.4}$$

$$sen\beta = sen\theta \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot cos\theta \tag{2.5}$$

$$cos\beta = cos\theta \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot sen\theta \tag{2.6}$$

Multiplicando a equação (2.5) por $cos\alpha$, obtemos;

$$sen\beta \cdot cos\alpha = sen\theta \cdot (cos\alpha)^2 + sen\alpha \cdot cos\theta \cdot cos\alpha \tag{2.7}$$

Multiplicando a equação (2.6) por $-sen\alpha$, obtemos;

$$-sen\alpha \cdot cos\beta = -sen\alpha \cdot cos\theta \cdot cos\alpha + (sen\alpha)^2 \cdot sen\theta. \tag{2.8}$$

somando as equações (2.7) e (2.8) obtemos:

$sen\beta \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot cos\beta = sen\theta \cdot ((cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2)$
$sen\beta \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot cos\beta = sen\theta$

Portanto $sen(\beta - \alpha) = sen\beta \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot cos\beta$

Multiplicando a equação (2.5) por $sen\alpha$, obtemos;

$$sen\beta \cdot sen\alpha = sen\theta \cdot cos\alpha \cdot sen\alpha + (sen\alpha)^2 \cdot cos\theta \tag{2.9}$$

Multiplicando a equação (2.6) por $scos\alpha$, obtemos;

$$cos\beta \cdot cos\alpha = cos\theta \cdot (cos\alpha)^2 - sen\alpha \cdot cos\alpha \cdot sen\theta \tag{2.10}$$

Somando as equações (2.9) e (2.10) obtemos:

$cos\theta = cos\beta \cdot cos\alpha + sen\beta \cdot sen\alpha$

Portanto $cos(\beta - \alpha) = cos\beta \cdot cos\alpha + sen\beta \cdot sen\alpha$

2.12 Coordenadas de um Ponto através do Seno e do Cosseno.

Escreveremos agora as coordenadas de um ponto usando trigonometria.

Teorema 2.37. *As coordenadas (x_P, y_P) de um ponto P, localizado em um sistema de eixos XOY, podem ser escritas através do seno e do cosseno do ângulo de medida θ, dada em graus, que o segmento OP forma com o eixo x no sentido anti-horário, através das seguintes relações:*

$x_P = OP \cdot cos\theta$

$y_P = OP \cdot sen\theta$

Demonstração: Faremos a demonstração deste teorema analisando as diversas posições do ponto P de acordo com ângulo de medida θ , dada em graus.

(1) $0° < \theta < 90^o$

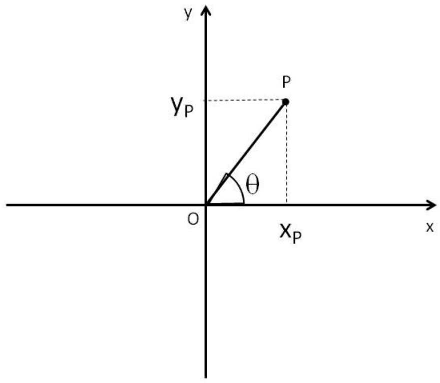


Figura 2.18: Coordenadas (1).

$\frac{x_P}{OP} = cos\theta \Leftrightarrow x_P = OP \cdot cos\theta$
$\frac{y_P}{OP} = sen\theta \Leftrightarrow y_P = OP \cdot sen\theta$

(2) $\theta = 90^o$

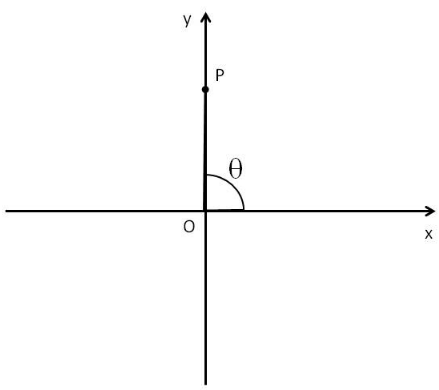


Figura 2.19: Coordenadas (2).

$x_P = 0 = OP \cdot cos90° = OP \cdot cos\theta$
$y_P = OP = OP \cdot sen90° = OP \cdot sen\theta$

(3) $\theta = 90^o + \alpha$, com $0° < \alpha < 90^o$

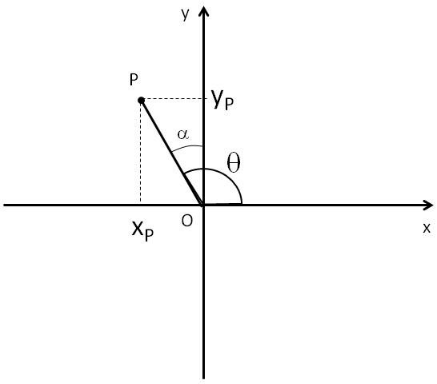


Figura 2.20: Coordenadas (3).

$\frac{-x_P}{OP} = sen\alpha \Rightarrow -x_P = OP \cdot sen\,(\theta - 90^o) \Rightarrow -x_P = OP \cdot (-cos\theta) \Rightarrow x_P = OP \cdot cos\theta$

$\frac{y_P}{OP} = cos\alpha \Rightarrow y_P = OP \cdot cos(\theta - 90^o) \Rightarrow y_P = OP \cdot sen\theta$

(4) $\theta = 180^o$

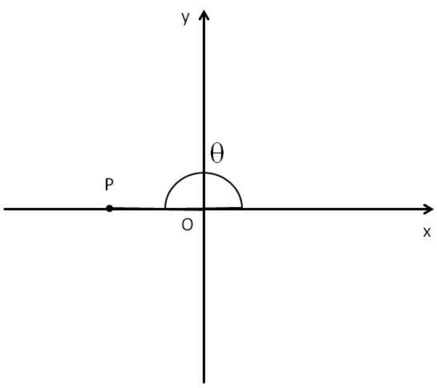


Figura 2.21: Coordenadas (4).

$x_P = -OP = OP \cdot cos180^o = OP \cdot cos\theta$
$y_P = 0 = OP \cdot sen180^\circ = OP \cdot sen\theta$

(5) $\theta = 180^\circ + \alpha$, com $0^\circ < \alpha < 90^o$

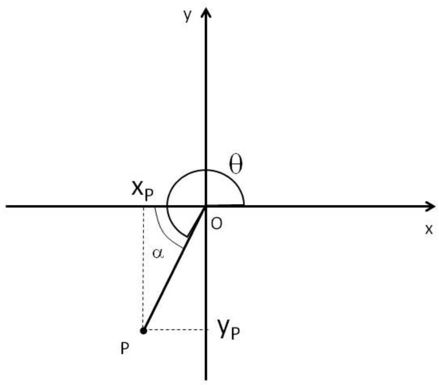


Figura 2.22: Coordenadas (5).

$\frac{x_P}{OP} = cos\alpha \Rightarrow x_P = OP \cdot cos(\theta - 180^o) \Rightarrow x_P = OP \cdot cos\theta$

$\frac{-y_P}{OP} = sen\alpha \Rightarrow -y_P = OP \cdot sen(\theta - 180^o) \Rightarrow -y_P = OP \cdot (-sen\theta) \Rightarrow y_P = OP \cdot sen\theta$

(6) $\theta = 270^o$

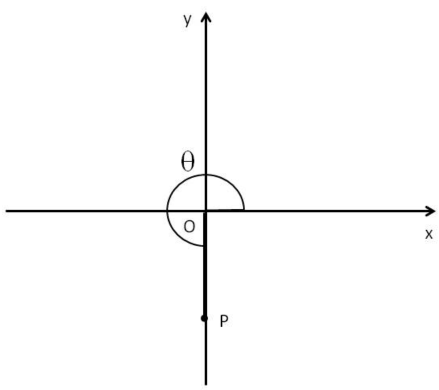


Figura 2.23: Coordenadas (6).

$x_P = 0 = OP \cdot cos270° = 0P \cdot cos\theta$
$y_P = OP \cdot (-1) = OP \cdot sen270° = OP \cdot sen\theta$

(7) $\theta = 270° + \alpha$, com $0° < \alpha < 90^o$

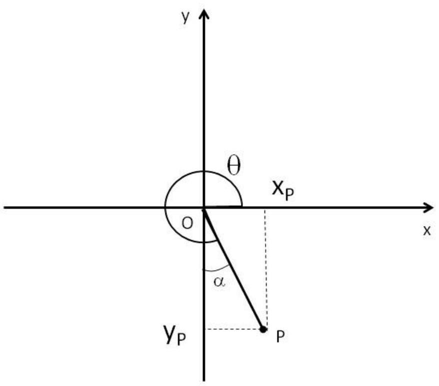


Figura 2.24: Coordenadas (7).

$\frac{x_P}{OP} = sen\alpha \Rightarrow x_P = OP \cdot sen(\theta - 270^o) \Rightarrow x_P = OP \cdot cos\theta$

$\frac{-y_p}{OP} = cos\alpha \Rightarrow -y_P = OP \cdot cos\,(\theta - 270^o) \Rightarrow -y_P = OP \cdot (-sen\theta) \Rightarrow y_P = OP \cdot sen\theta$

(8) $\theta = 360^o$

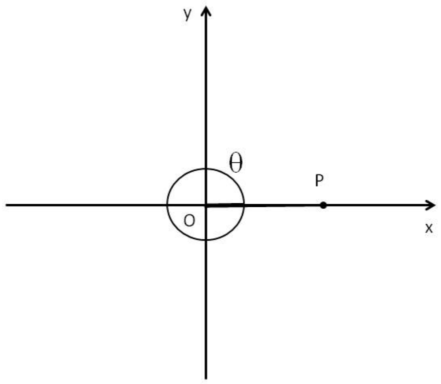


Figura 2.25: Coordenadas (8).

$x_P = OP = OP \cdot 360° = OP \cdot cos\theta$
$y_p = 0 = OP \cdot sen360° = OP \cdot sen\theta$

■

2.13 Área de um triângulo dados dois de seus lados e o ângulo entre eles.

Nesta seção calcularemos a área de um triângulo através das medidas de dois de seus lados e do seno da medida do ângulo que estes lados formam.

Teorema 2.38. *a área S de um triângulo ABC é dada por $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot senA\hat{B}C$.*

Demonstração: Consideremos um triângulo ABC , seus lados AB e AC e a medida $B\hat{A}C$=α , dada em graus. Consideremos também que S seja a área do triângulo ABC. Vamos considerar três casos.

- $B\hat{A}C$ é agudo.

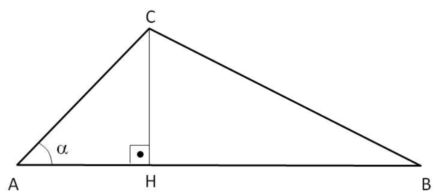


Figura 2.26: Área do triângulo(1).

$$sen\alpha = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot sen\alpha \tag{2.11}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12), temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen\alpha \tag{2.13}$$

- $B\hat{A}C$ obtuso.

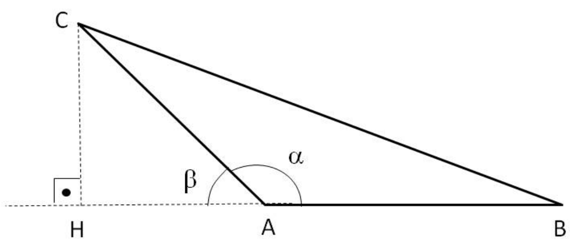


Figura 2.27: Área do Triângulo (2).

$$sen\beta = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot sen\beta \tag{2.14}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15), temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen\beta \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen\alpha \tag{2.16}$$

- $B\hat{A}C$ reto.

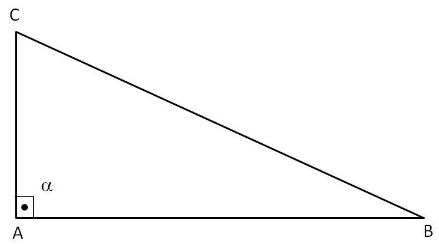


Figura 2.28: Área do Triângulo (3).

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen90^o \tag{2.17}$$

■

2.14 Translação de um ponto no Sistema de Eixos.

O estudo da translação de um ponto, no sistema de eixos, tem como finalidade mostrar que quando um triângulo sofre uma rotação suas medidas não se alteram.

Um ponto $A = (x, y)$ do plano XOY pode ser deslocado para uma posição $A' = (x', y')$, através da adição de valores de translação às coordenadas deste ponto. Considerando os valores reais de translação, k unidades deslocadas paralelamente ao eixo horizontal e p unidades deslocadas paralelamente ao eixo vertical, podemos escrever $x' = x + k$ e $y' = y + p$. Nesta transformação $A = (x, y)$ é a posição inicial e $A' = (x', y')$ a posição final do ponto após ele ser transladado.

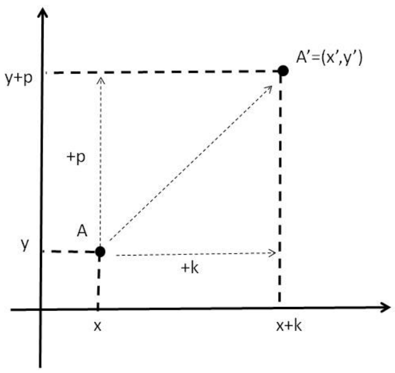


Figura 2.29: Translação (1).

Teorema 2.39. *Se $A' = (x_A + k, y_A + p)$ e $B' = (x_B + k, y_B + p)$ são as respectivas translações dos pontos A e B, então as medidas AB e$A'B'$ são iguais.*

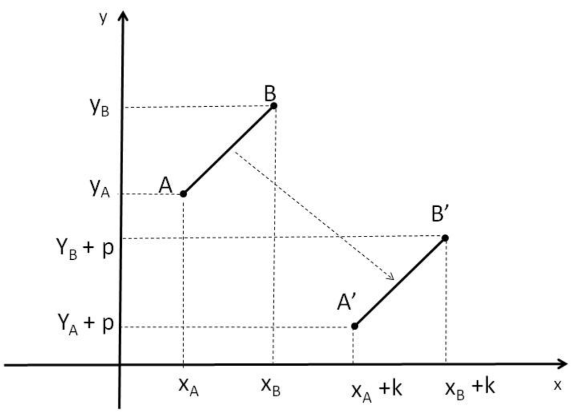


Figura 2.30: Translação (2).

Demonstração: $A'B' = \sqrt{(x_B + p - (x_A + p))^2 + (y_B + k - (y_A + k))^2} \Rightarrow A'B' = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB \Rightarrow A'B' = AB$ ■

Propriedade 2.40. Se o triângulo $A'B'C'$ é obtido pela translação do triângulo ABC, então estes triângulos são congruentes.

Demonstração: Se AB = A'B', AC = A'C' e BC = B'C', os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes. ■

2.15 Matriz Rotacional.

Quando um triângulo sofre rotação, suas medidas não se alteram. Determinaremos agora uma matriz capaz de encontrar as coordenadas do ponto P' , obtido pela rotação do ponto P de θ graus, em torno da origem do sistema de eixos, em função das coordenadas do ponto P e de θ.

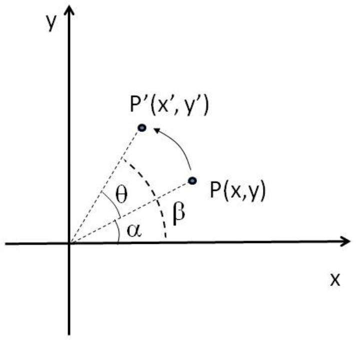


Figura 2.31: Rotação (1).

Sabemos que:

- $cos(\alpha+\theta) = cos\beta \Leftrightarrow cos\alpha \cdot cos\theta - sen\alpha \cdot sen\theta = cos\beta$

- $sen(\alpha+\theta) = sen\beta \Leftrightarrow sen\alpha \cdot cos\theta + sen\theta \cdot cos\alpha = sen\beta$

Daí, temos:

$$\begin{cases} \frac{x}{OP} \cdot cos\theta & -\frac{y}{OP} \cdot sen\theta & = \frac{x'}{OP} \\ \frac{x}{OP} \cdot sen\theta & +\frac{y}{OP} \cdot cos\theta & = \frac{y'}{OP} \end{cases}$$

ou seja:

$$\begin{cases} x \cdot cos\theta & -y \cdot sen\theta & = x' \\ x \cdot sen\theta & +y \cdot cos\theta & = y' \end{cases}$$

Representemos agora o sistema na forma matricial: $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Teorema 2.41. *Se A' e B' são os pontos obtidos das respevtivas rotações de θgraus, dos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ em torno da origem, então as distâncias AB e A'B' são iguais.*

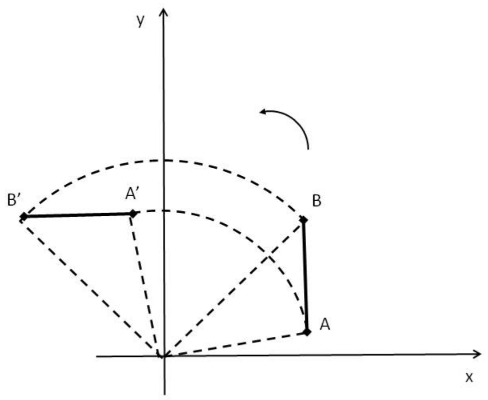


Figura 2.32: Rotação (2).

Demonstração: $A' = (x_A \cdot cos\theta - y_A \cdot sen\theta, y_A \cdot cos\theta + x_A \cdot sen\theta)$

$B' = (x_B \cdot cos\theta - y_B \cdot sen\theta, y_B \cdot cos\theta + x_B \cdot sen\theta)$

A distância A'B' poderá ser representada por:

$(A'B')^2 = ((x_B - x_A) \cdot cos\theta + (y_A - y_B) \cdot sen\theta)^2 + ((y_B - y_A) \cdot cos\theta + (x_B - x_A) \cdot sen\theta)^2 = (x_B - x_A)^2 \cdot cos^2 \cdot \theta + 2(x_B - x_A) \cdot (y_A - y_B) \cdot sen\theta \cdot cos\theta + (sen^2\theta) \cdot (y_(A) - y_(B)) + (y_B - y_A)^2 \cdot cos^2\theta + 2 \cdot (y_B - y_A) \cdot (x_B - x_A) \cdot sen\theta \cdot cos\theta + (x_B - x_A)^2 \cdot sen^2 = (x_B - x_A)^2 \cdot (cos^2\theta + sen^2\theta) + (y_B - y_A)^2 \cdot (sen^2\theta + cos^2\theta) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (AB)^2$

Ou seja :

$$A'B' = AB \tag{2.18}$$

■

Propriedade 2.42. Se o triângulo $A'B'C'$ é obtido pela rotação do triângulo ABC, então estes triângulos são congruentes.

Demonstração: Se AB = A'B', AC = A'C' e BC = B'C', os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes. ■

Teorema 2.43. *Se dois triângulos são congruentes, então suas áreas são iguais.*

Demonstração: Sejam ABC e DEF , dois triângulos congruentes com áreas S_1 e S_2, respectivamente e com $AB = DE$, $AC = DE$ e $B\hat{A}C = E\hat{D}F$. Iremos mostrar que $S_1 = S_2$.

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot sen\left(B\hat{A}C\right)$

$S_1 = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DF \cdot sen\left(E\hat{D}F\right)$

Portanto $S_1 = S_2$ $\blacksquare$

3 Áreas de Polígonos via Determinantes

Calcular a área de um polígono convexo ou não foi a ideia proposta na introdução deste trabalho. Utilizando as ideias apresentadas no texto [7] conseguimos demonstrar que é possvel calcular a área de um polígono convexo ou não convexo através das coordenadas de seus vértices.

Definição 3.1. *Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ dois pontos do plano cartesiano. Chamaremos de determinante de A para B, o determinante da matriz* $\begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix}$ *e indicaremos por :* $\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} = x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A$

Propriedade 3.2. O sinal do determinante do ponto $A = (x_A, y_A)$ para o ponto $B = (x_B, y_B)$ é oposto ao sinal de determinante do ponto $B = (x_B, y_B)$ para o ponto $A = (x_A, y_A)$

Demonstração: $\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} = x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = -1 \cdot (-x_A \cdot y_B + x_B \cdot y_A) = - \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_A & y_A \end{vmatrix}$ ■

3.1 Área do Triângulo com Vértice na Origem.

Nesra seção será apresentada uma fórmula capaz de calcular a área de um triângulo que possui um dos seus vértices na origem do sistema de eixos, utilizando a definição de determinantes acima.

Definição 3.3. *Dado um polígono definimos a orientação anti-horária de seus vértices como sendo o percurso pelo qual quando caminhamos pelos lados e passamos pelos seus vértices, o interior do polígono está sempre à esquerda.*

Teorema 3.4. *A área S de um triângulo de vértices $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $O = (0, 0)$, é dada por:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$$

desde que seus vértices A, B e O, nesta ordem, obedeçam à orientação anti-horária, na sua localização no sistema cartesiano.

Demonstração: Considere um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $O(0,0)$, a fórmula abaixo nos mostra a área S deste triângulo, utilizando um determinante de A para B.

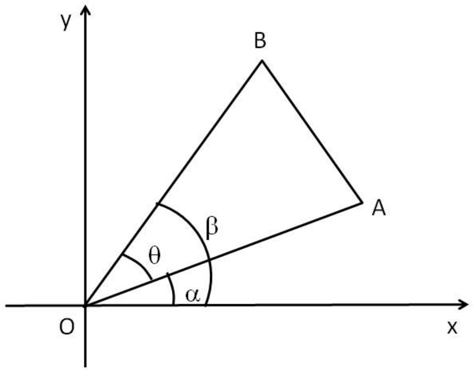


Figura 3.1: Área do Triângulos e Determinantes(1).

Consideremos que

$x_A = OA \cdot cos\alpha$

$y_A = OA \cdot sen\alpha$

$x_B = OB \cdot cos\beta$

$y_B = OB \cdot sen\beta$

Elaborando a área de um triângulo com vértice na origem do Sistema de Eixos.

$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot sen\theta \Leftrightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot sen(\beta - \alpha) \Leftrightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot (sen\beta \cdot cos\alpha - sen\alpha \cdot cos\beta) \Leftrightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot (OA \cdot cos\alpha.OB \cdot sen\alpha - OA \cdot sen\alpha \cdot OB \cdot cos\beta) \Leftrightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot (x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A) \Leftrightarrow$

$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$ ■

Observação 3.5. Como vimos acima $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot sen\theta = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$. Como OA, OB e $sen\theta$ são números reais maiores que zero podemos concluir que $\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$ também é maior que zero. Portanto adotaremos o sentido anti-horário na localizção dos pontos A e B, afim de garantir que o valor da área S seja um número real positivo. Se utilizássemos o determinante $\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_A & y_A \end{vmatrix}$ o valor da área S seria negativo. Portanto utilizaremos sempre o sentido anti-horário para compor o determinante.

3.2 Área de um Triângulo Qualquer.

A intenção desta seção é obter o cálculo da área de um triângulo qualquer localizado no sistema de eixos.

Teorema 3.6. *A área de um triângulo de vértices $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, desde que seus vértices A, B e C, nesta ordem, obedeçam à orientação anti-horária na sua localização no sistema cartesiano, é dada por :*

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} \right]$$

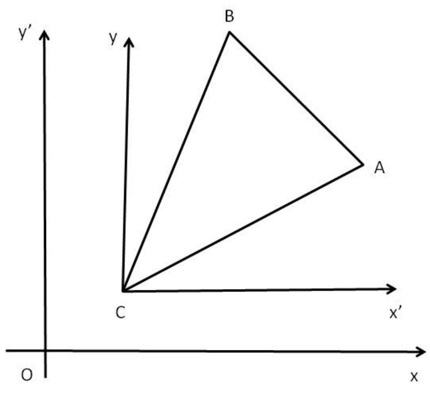


Figura 3.2: Área do Triângulos e Determinantes(2).

Demonstração: Consideremos que o vértice C do triângulo passe a ser a origem de um novo sistema XCY com eixos paralelos aos eixos Ox e Oy. No novo sistema cartesiano o pontos A e B passam a ter as seguintes coordenadas. $A = (x_A - x_C, y_A - y_C)$ $B = (x_B - x_C, y_B - y_C)$

Utilizando o Teorema 3.3, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (x_A \cdot y_B - x_A \cdot y_C - x_C \cdot y_B + x_C \cdot y_C - x_B \cdot y_A + x_B \cdot y_C + x_C \cdot y_A - x_C \cdot y_C)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot (x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B + x_C \cdot y_A - x_A \cdot y_C)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} \right] \qquad \blacksquare$$

3.3 Decomposição de um Polígono em Triângulos Justapostos.

Nesta seção o pol'igono será decomposto em triângulos justapostos, utilizando as ideias propostas no texto [7].

Teorema 3.7. *Traçando-se diagonais internas que não se cortam, podemos decompor qualquer polígono em triângulos justapostos.*

Demonstração: Supondo por absurdo que o teorema não seja verdadeiro, podemos encontrar um polígono P de n lados, que não pode ser decomposto em triângulos justapostos, conforme foi mencionado acima. Consideremos P de modo que o número n seja o menor possível. Tomemos uma reta r que não intercepte P e que não seja paralela a nenhuma das retas determinadas por quaisquer dois vértices distintos do polígono, consecutivos ou não. Desta forma garantimos que existe um único o vértice B com a menor distância até r. Chamemos de A e C os vértices adjacentes a B. Há dois casos possíveis.

- Primeiro Caso: A, B e C são os únicos vértices do polígono P contidos no triângulo ABC.

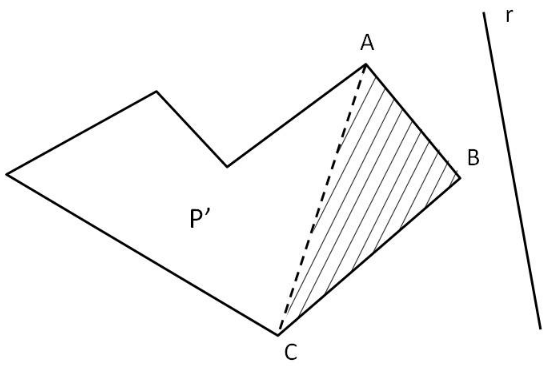


Figura 3.3: Decomposição(1).

Como o triângulo ABC não contém nenhum outro vértice de P, além de A, B e C, a decomposição começa traçando-se AC. Neste caso o polígono P', obtido de P, substituindo-se os lados AB, BC por AC, tem n -1 lados. Como n é o menor número de lados para o qual o teorema não vale, P' pode ser decomposto em triângulos na forma do enunciado. Acrescentando a P' o triângulo ABC, obtemos uma decomposição de P na forma requerida. O que é uma contradição. Concluímos então a demonstração para este caso.

- Segundo Caso: O triângulo ABC contém outros vértices do polígono P.

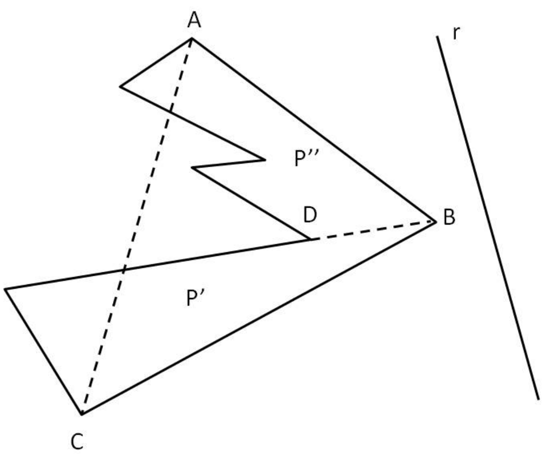


Figura 3.4: Decomposição(2).

O triângulo ABC contém outros vértices do polígono P além de A, B e C. Consideremos que D seja um vértice interior a ABC mais distante do lado AC. Mostraremos abaixo que a diagonal BD não pode conter outros vértices além de B e D.

De fato, suponhamos que exista um vértice E interior ao segmento $\overline{BD}$. Como D é interno ao triângulo ABC, podemos considerar R o ponto aonde a reta passando por B e D intersecta o segmento $\overline{AC}$.

Consideremos DM a distância do ponto D até a reta suporte de $\overline{AC}$ e EN a distância do ponto E até a reta suporte de $\overline{AC}$, desta forma os triângulos RDM e REN são semelhantes.

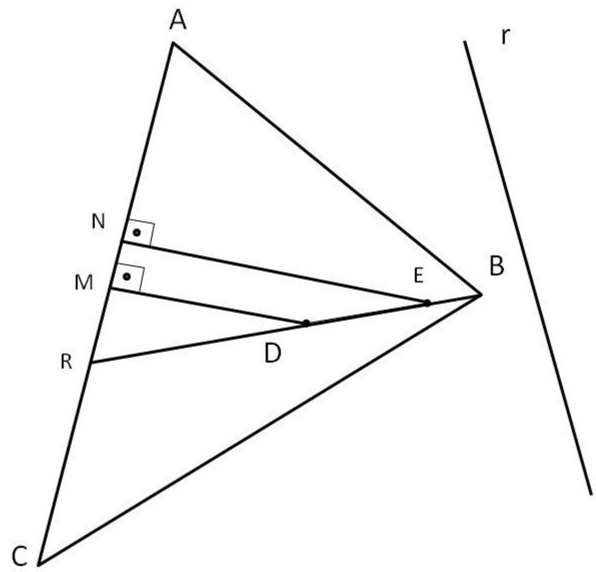


Figura 3.5: Decomposição(3).

Desta forma, escrevemos que:

$\frac{EN}{DM} = \frac{ER}{DR}$

$\frac{EN}{DM} = \frac{ED+DR}{DR}$

$\frac{EN}{DM} = 1 + \frac{ED}{DR}$

$\frac{EN}{DM} > 1$

$EN > DM.$

Concluímos que, se houvesse um outro vértice E , diferente de B e D, na diagonal $\overline{BD}$, este seria o vértice mais distante de $\overline{AC}$. Desta forma a diagonal $\overline{BD}$ não pode conter outros vértices de P, além de D e B. Desse modo o polígono P através da diagonal BD fica decomposto em dois polígonos P' e P'', ambos com menos lados que P. O teorema vale então, para P' e P'', que se decompõem em triângulos justapostos, juntando estas decomposições em DB, obtemos a decomposição de P, contradição, pois P não pode ser decomposto em triângulos. O que prova o segundo caso.

Portanto, todos os polígonos podem ser decompostos em triângulos justapostos.

■

Exemplo 3.8. Na figura abaixo temos um polígono sendo decomposto em triângulos justapostos.

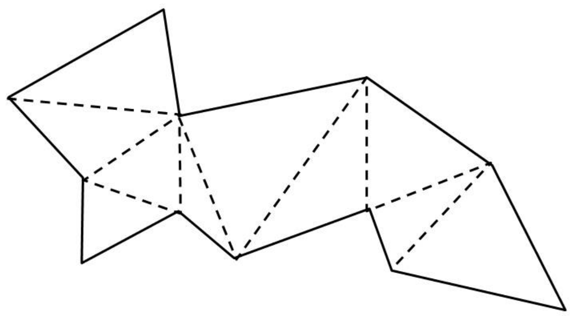


Figura 3.6: Decomposição(4).

3.4 Área de um Polígono através de Determinantes

Nesta seção foi desenvolvida a ideia original deste trabalho, ou seja a demonsttração de um método para o cálculo da área de um polígono, utilizando as coordenadas de seus vértices.

Exemplo 3.9. Vamos calcular a área do quadrilátero de vértices A_1, A_2, A_3 e A_4, $A_k = (x_k, y_k)$, da figura abaixo:

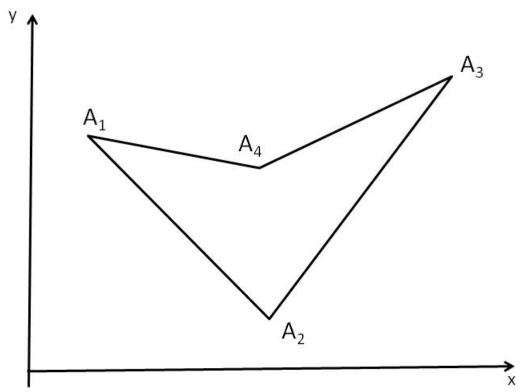
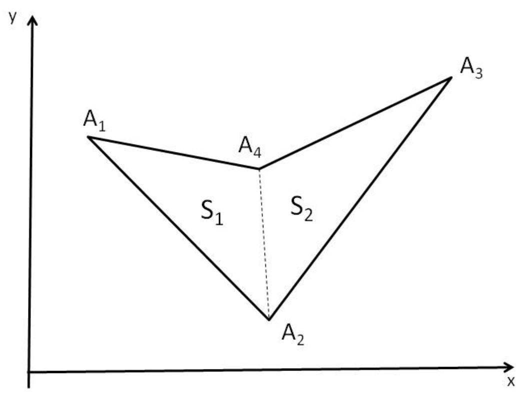


Figura 3.7: Quadrilátero(1).

Faremos isso de duas maneiras distintas. A primeira dividindo o quadrilátero em dois triângulos justapostos através de uma de suas diagonais internas e a segunda através de uma diagonal externa que transforma o quadrilátero como parte de um triângulo.

1. Decompondo o quadrilátero em dois triângulos através de uma diagonal interna.



.

Figura 3.8: Quadrilátero(2).

Tracemos a diagonal interna $\overline{A_2A_4}$, decompondo o quadrilárero de área S em dois triângulos de áreas S_1 e S_2. Portanto a área S do quadrilátero igual à soma das áreas S_1 e S_2.
$S = S_1 + S_2$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right] + \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

2. Traçando a diagonal externa $\overline{A_1A_3}$, e deixando o quadrilátero como parte de uma região triangular.

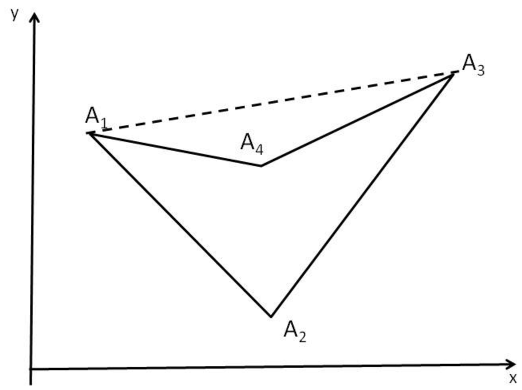


Figura 3.9: Quadrilátero(3).

Considerando que S seja a área do quadrilátero, S_1, a área do triângulo $A_1A_2A_3$ e S_2 a aŕea do triângulo $A_1A_4A_3$, podemos escrever:

$S = S_1 - S_2$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

Temos então uma fórmula para calcular a área de um quadrilátero considerando o sentido anti-horário de seus vértices no sistema de eixos.

Teorema 3.10. *A área S de um polígono de vértices $A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ e A_n, obedecendo o sentido anti-horário na sua localização no sistema de eixos, cujas coordenadas são $A_k = (x_k, y_k)$, é dada por :*

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right]$$

Demonstração: Já sabemos que esta fórmula é válida para um triângulo $A_1A_2A_3$, acabamos de mostrar, no último exemplo, que ela também vale para um quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. Utilizando o princípio da indução provaremos sua validade para qualquer polígono . Nossa hipótese de indução será que a área de um polígono de n vértices, é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

Provaremos, então sua validade para um polígono de n + 1 lados.

Teremos que pensar de dois modos diferentes para demonstrar a validade desta fórmula para um polígono qualquer, o primeiro modo será construído a partir da possibilidade de conectar os vértices A_1 e A_n, de um polígono de n+1 vértices, por meio de uma diagonal interna e decompondo-o em um polígono de n vértices e em um triângulo de vértices A_1, A_n e A_{n+1}. O segundo modo será construído a partir da possibilidade de conectar os vértices A_1 e A_n , de um polígono de n +1 vértices, através de uma diagonal externa, transformando este polígono e o triângulo de vértices A_1, A_n e A_{n+1} como partes da região poligonal de um polígono de n vértices.

(1) Conectando os vértices A_1 e A_n e decompondo a figura em um polígono de n lados e em um triângulo.

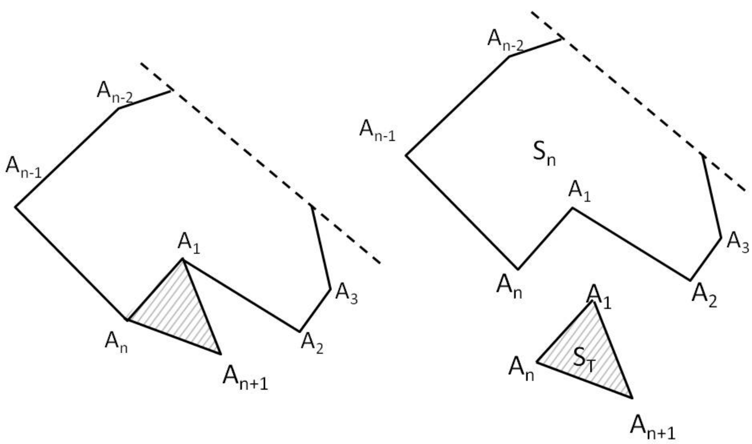


Figura 3.10: polígono de n+1 lados(1).

Admitindo que S_{n+1}, S_n e S_T sejam, respectivamente as áreas dos polígonos de $n + 1$ lados, n lados e do triângulo de vértices A_1, A_n e A_{n+1} , podemos escrever

$S_{n+1} - S_T = S_n$

$S_{n+1} = S_n + S_T$

$S_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right] + \frac{1}{2} \cdot$
$\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$

Sabendo que $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_n & y_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, temos:

$S_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$ que mostra a validade da fórmula para um polígono de n + 1 lados , neste caso.

Observação 3.11. Quando conectamos os vértices A_1 e A_n estamos supondo que não exista nenhum vértice no interior do triângulo, caso existe outro vértice no interior do triângulo devemos decompor o polígono em dois outros, como é feito no segundo caso do teorema da decomposição de um polígono em triângulos justapostos, utilizando como referência o texto [7].

(2) Conectando os vértices A_1 e A_n e tornando o polígono de $n+1$ lados como parte da região poligonal de um polígono de n lados.

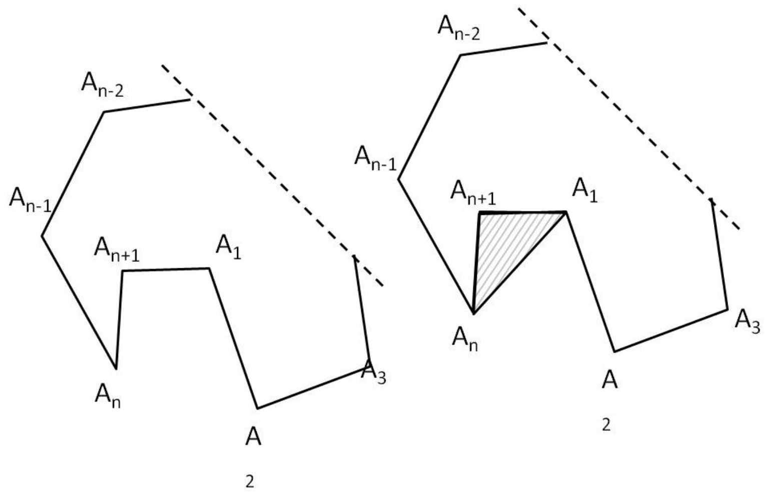


Figura 3.11: polígono de n+1 lados(2).

Admitindo que S_{n+1}, S_n e S_T sejam, respectivamente as áreas dos polígonos de $n+1$ lados, n lados e do triângulo de vértices A_1, A_n e A_{n+1} , podemos escrever:

$S_{n+1} + S_T = S_n$

$S_{n+1} = S_n - S_T$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

ou seja

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

Com isso demonstramos a validade da fórmula para este caso e consequentemente o teorema proposto.

$\blacksquare$

4 Aplicações no Ensino Médio.

4.1 Regra Prática para o Cálculo de Áreas.

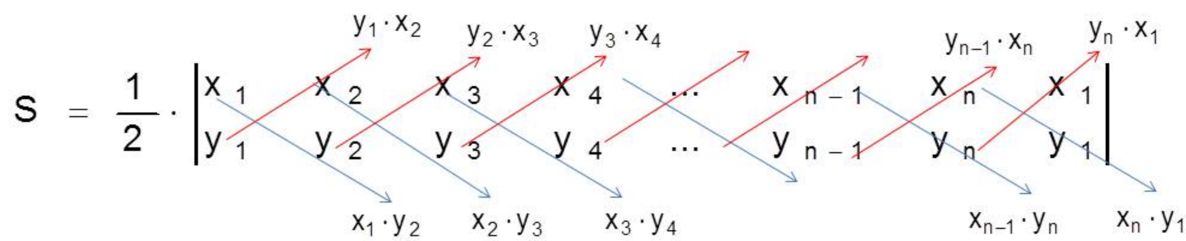
O presente Capítulo tem por finalidade exemplificar um método prático da fórmula apresentada no capítulo anterior para o cálculo de áreas de polígonos através de seus vértices, que seja de fácil compreensão aos alunos do Ensino Médio e vestibulandos em geral. Como vimos anteriormente a área de um polígono de n de vértices através das coordenadas destes vértices , é obtida através da fórmula

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + ... + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

Podemos representar esta área através da seguinte expressão:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + ... + x_{n-1} \cdot y_n + x_n \cdot y_1 - y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_3 - ... - y_{n-1} \cdot x_n - y_n \cdot x_1)$$

Para facilitar a memorização podemos elaborar o esquema abaixo, onde as diagonais em forma de setas nos mostram os produtos que devem ser efetuados.



Em grande parte dos livros do Ensino Médio o cálculo da área do triângulo a partir de seus vértices é feita do seguinte modo:

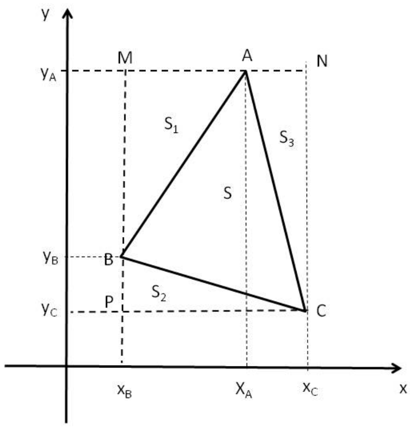


Figura 4.1: Triângulo e Determinantes (1).

Vamos admitir que S seja a área do triângulo ABC , S' a área do retângulo $PCMN$, S_1 a área do triângulo AMB, S_2 a área do trângulo BPC e S_3 a área do triângulo ANC. Entâo :

$S = S' - S_1 - S_2 - S_3$

$S = (x_c - x_B) \cdot (y_A - y_C) - \frac{(x_A - x_B)\cdot(y_A - y_B)}{2} - \frac{(x_C - x_B)\cdot(y_B - x_c)}{2} - \frac{(x_C - x_A)\cdot(y_A - y_C)}{2}$

Desenvolvendo a expressão acima conclui-se que a área do triângulo utilizando seus vértices é dada por:

$S = \frac{x_A \cdot y_B + x_C \cdot y_A + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B - x_A \cdot y_C - x_B \cdot y_A}{2}$

Escrevendo através de uma forma simplificada a expressão, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

O cálculo da área de polígonos, utilizando seus vértices, normalmente feito decompondo o polígono em triângulos , calculando a área de cada um destes triângulos e somando todos os resultados obtidos. O exemplo abaixo nos mostra isso.

Exemplo 4.1. Calcular a área do polígono da figura:

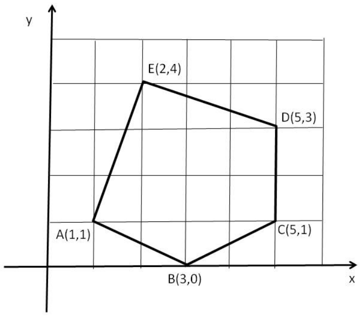


Figura 4.2: Triângulo e Determinantes (2).

Iremos resolver este exemplo de dois modos diferentes, o primeiro modo decommpondo a figura em triângulos e somando as áreas destes triângulos, e no segundo modo pelo método apresentado no capítulo 3.

- Decompondo a figura em triângulos.

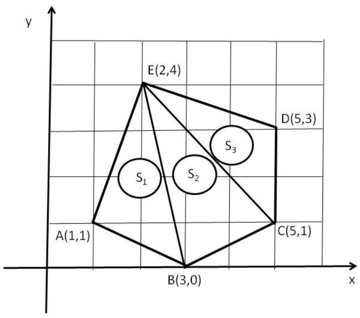


Figura 4.3: Triângulo e Determinantes (3).

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando cada determinante separadamente:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4) = 7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 4) = 9$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot -5 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 5 \cdot 4) = 6$$

Portanto:

$S = \frac{1}{2} \cdot (7 + 9 + 6) \Leftrightarrow S = 11$

- Utilizando o método prático exposto no início do capítulo.

$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$S = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 0 \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1)$

$S = \frac{1}{2} \cdot (40 - 18)$

$S = 11$

Exemplo 4.2. Esta questão apareceu na primeira fase do vestibular de inverno de 2015 da UNESP.

Os polígonos ABC e $DEFG$ estão desenhados em uma malha formada por quadrados. Suas áreas são iguais a S_1 e S_2 , respectivamente, conforme indica a figura.

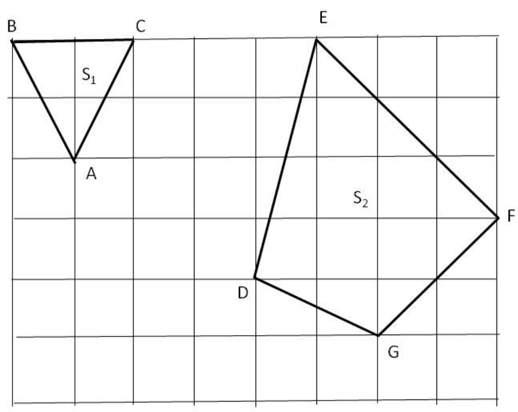


Figura 4.4: Questão da UNESP(1).

Sabendo que os vértices dos dois polígonos estão exatamente sobre os pontos de cruzamento das linhas da malha, é correto afirmar que $\frac{S_1}{S_2}$ é igual a:

a)5,25
b)4,75
c)5,00
d)5,50
e05,75

Vamos, agora, resolver esta questão utilizando o método prático apresentado do início deste capítulo para calcular a área de cada um dos polígonos sugeridos pelo exercício.

Primeiramente consideremos um sistema de eixos na figura em que a unidade será representada pela medida do lado de cada quadrado da malha.

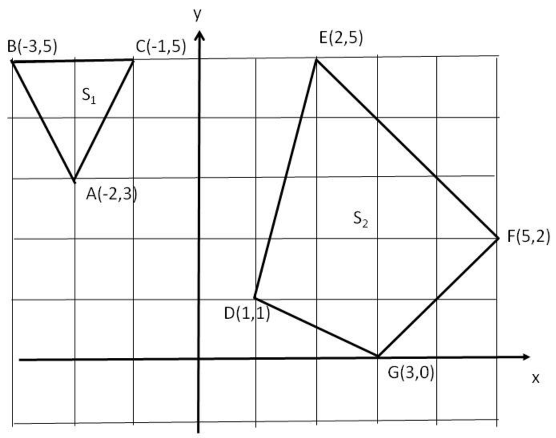


Figura 4.5: Questão da UNESP (2).

Calculando então a razão pedida.

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 0 \cdot 5 - 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = 10,5$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & -3 \\ 5 & 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 5 - 5 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) - 5 \cdot (-3)) = 2$$

Portanto $\frac{S_1}{S_2} = 5{,}25$

4.2 Alinhamento de Três Pontos

Mostraremos agora um método para verificar se três pontos estão alinhados, ou seja numa mesma reta. Construiremos também uma maneira de determinar a equação de uma reta através de determinantes.

Teorema 4.3. *Se três pontos distintos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ estão alinhados, então:*

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} = 0$$

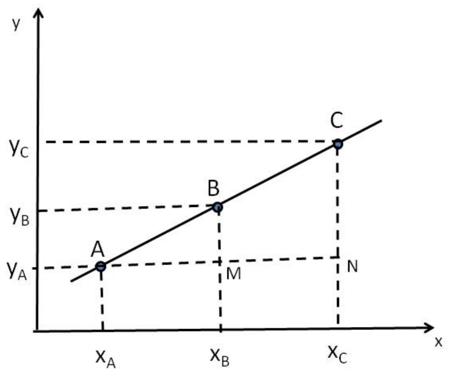


Figura 4.6: Alimhamento de Pontos (1).

Demonstração: Como os triângulos ABM e ACM são semelhantes, podemos escrever que:

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$

ou seja,

$x_C \cdot y_B - x_A \cdot y_B - x_C \cdot y_A + x_A \cdot y_A = x_B \cdot y_C - x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_C + x_A \cdot y_A$

Deixando o segundo membro nulo, obtemos:

$x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A + x_B \cdot y_C - x_C \cdot y_B + x_C \cdot y_A - x_A \cdot y_C = 0$

Escrevendo agora utiliando os determinantes:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} = 0 \qquad \blacksquare$$

Podemos escrever utilizando o método prático elaborado neste capítulo.

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 4.4. Vamos determinar agora a equação da reta que passa pelos pontos $(0,1)$ e $(2,5)$. Para isso devemos considerar um ponto (x,y) cuja finalidade é represntar qualquer ponto petencente a esta reta.

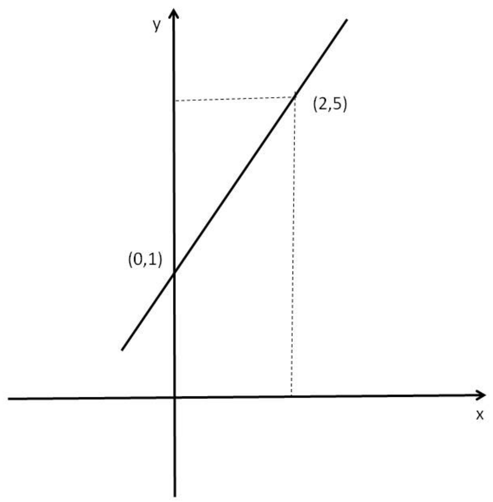


Figura 4.7: Alimhamento de Pontos (2).

portanto: $\begin{vmatrix} x & 0 & 2 & x \\ y & 1 & 5 & y \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot y - y \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 5 \cdot x = 0$

Temos, então a equação da reta: $y = 2 \cdot x + 1$

Referências

[1] LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio.* 9ed. Rio de janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática,2006.237p.

[2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 11ed. Rio de janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática,2012.257p.

[3] REZENDE, E. Q. F.*Geometria Euclidiana Plana.* 1ed. Campinas: Editora da Unicamp,2000.259p.

[4] MUNIZ, A. C. *Geometria Euclidiana Plana.* 1ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática,2012.417p.

[5] CAMARGO, I. *Geometria Analítica, Um tratamento vetorial .* 3 ed. São Paulo: Pearson,2012.543p.

[6] KLEIN, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Geometry.* 2 ed. New York: Macmillan,1939.

[7] LIMA, E. L. *Qual a soma dos ângulos internos de um polígono?.* Revista do professor de Matemáica, Rio de Janeiro. n19. p 31- 38, julho de 1991.

[8] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo.* 1 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.,1985.579p.