UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁRCIO REBOUÇAS DA SILVA

NÚMEROS BINOMIAIS: UMA ABORDAGEM COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

FORTALEZA
2015

MÁRCIO REBOUÇAS DA SILVA

NÚMEROS BINOMIAIS: UMA ABORDAGEM COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Robério Rogério.

FORTALEZA
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S581n Silva, Márcio Rebouças da
Números binomiais: uma abordagem combinatória para o ensino médio / Márcio Rebouças da Silva. – 2015.
74 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Robério Rogério.

1. Números binomiais. 2. Probabilidades. 3. Triângulo de Pascal. 4. Matemática I. Título.

CDD 512

MÁRCIO REBOUÇAS DA SILVA

NÚMEROS BINOMIAIS: UMA ABORDAGEM COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 28 / 08 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Robério Rogério (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

À Deus.

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Jeovane e Deusiana, pela enorme dedicação na educação de seus filhos.

Ao meu irmão Bruno, pelo companheirismo e pela confiança a mim depositada.

Ao meu irmão Felipe, por me fazer uma pessoa paciente ao lidar com suas dúvidas e teimosias.

À minha esposa Ana, por estar sempre ao meu lado estimulando a concluir o mestrado.

Aos meus filhos Nicole e Mateus, pois sem vocês certamente não estaria concluindo o mestrado.

Aos demais familiares, por ficar com meus filhos enquanto assistia às aulas de sábado.

Ao meu amigo Alexmay, pelas conversas e sugestões valiosas, que espero ter correspondido às expectativas.

Ao professor Antônio Caminha, por ser um professor referencial, mesmo antes de conhecê-lo.

Ao professor José Robério Rogério, pela postura e, principalmente, paciência na forma de conduzir a orientação.

A todos os professores do PROFMAT, por contribuírem significativamente para a minha formação profissional.

"*A Ciência pelo caminho da exatidão só tem dois olhos: a Matemática e a Lógica.*"

(De Morgan)

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade apresentar uma abordagem, para o Ensino Médio, de números binomiais (incluindo as propriedades do triângulo de Pascal e binômio de Newton), contendo as demonstrações combinatórias, ao utilizar dupla contagem, juntamente com as demonstrações algébricas, como parcialmente já é feito, além de generalizar, citando os números trinomiais (incluindo as propriedades da pirâmide de Pascal) e os números multinomiais (incluindo o polinômio de Leibniz).

Palavras-chave: Contagem. Triângulo de Pascal. Binômio de Newton. Pirâmide de Pascal. Polinômio de Leibniz.

ABSTRACT

This project aims at presenting an approach of binomial numbers for high school (including Pascal’s triangle properties and binomial of Newton), containing the combinatorial statements when using double counting, along with algebraic demonstrations, as part is already done in addition to generalize, citing the trinomial numbers (including the properties of the Pascal pyramid) and multinomial numbers (including the Leibniz’s polynomial).

Keywords: Counting. Pascal’s triangle. Binomial of Newton. Pascal’s pyramid. Leibniz’s polynomial.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa desenvolver uma ferramenta imprescindível para o estudo de probabilidade, assunto tão importante não apenas para a Matemática Pura, como também para a Matemática Aplicada. Nosso maior foco se encontra sobre números binomiais, apresentando-os sob uma perspectiva algébrica, como normalmente é visto no Ensino Médio e, principalmente, sob uma perspectiva combinatória, acreditando ser esta a forma ideal para desenvolver no aluno o interesse pela área, desafiando-o a sempre apresentar respostas mais simples para os problemas, mas mantendo sempre todo o rigor matemático na elaboração desses resultados.

No capítulo 2, apresentamos as principais técnicas de contagem que serão úteis para as demonstrações combinatórias necessárias nos demais capítulos, tais como princípio aditivo, princípio multiplicativo, arranjos simples, permutações simples e combinações simples, onde tais demonstrações serão feitas utilizando o raciocínio de contagem dupla (que consiste em calcularmos um certo número de configurações de duas maneiras distintas sem cometer erros e, consequentemente, obtermos resultados iguais). Apesar de não ser nosso maior foco, apenas uma ferramenta para isso, trataremos desse assunto mostrando o encadeamento lógico das ideias em busca de nosso maior foco, sempre privilegiando o raciocínio em cada técnica de contagem em detrimento da simples memorização de uma fórmula, como normalmente acontece no Ensino Médio.

No capítulo 3, apresentamos os números binomiais, a organização desses números no triângulo de Pascal, juntamente com suas propriedades, e a fórmula para o desenvolvimento do binômio de Newton. Sendo este nosso maior foco, faremos com que seja despertada no aluno a capacidade que o mesmo tem na percepção da estrutura lógica existente no triângulo de Pascal e, consequentemente, fazendo com que este aluno seja capaz de (não apenas) enunciar as propriedades do triângulo de Pascal, mas (principalmente) de demonstrá-las algebricamente e combinatoriamente (ao utilizar as técnicas de contagem juntamente com o raciocínio de dupla contagem).

No capítulo 4, apresentamos os números trinomiais, a organização desses números na pirâmide de Pascal, juntamente com suas propriedades, a fórmula para a expansão trinomial e as suas generalizações, ou seja, os números multinomiais e a fórmula para a expansão multinomial (polinômio de Leibniz). O objetivo deste capítulo é voltado para alunos mais habilidosos em Matemática, por apresentar uma dificuldade maior, uma vez que este aluno terá que desenvolver a sua capacidade de percepção de uma estrutura lógica mais rica que a do triângulo de Pascal, a estrutura lógica existente na pirâmide de Pascal (versão tridimensional do triângulo de Pascal), fazendo com que este aluno seja capaz de enunciar e demonstrar tais propriedades da pirâmide de Pascal, tal qual foi capaz de fazer no triângulo de Pascal, despertando neste aluno a busca por resultados mais gerais para sua aprendizagem.

2 CONTAGEM

Neste capítulo, apresentaremos as principais técnicas de contagem que serão úteis para as demonstrações necessárias nos capítulos seguintes, tais como *princípio aditivo*, *princípio multiplicativo*, *arranjos simples*, *permutações simples* e *combinações simples*.

Para a apresentação das principais técnicas de contagem, defina o *fatorial* de n, para cada número natural n, por

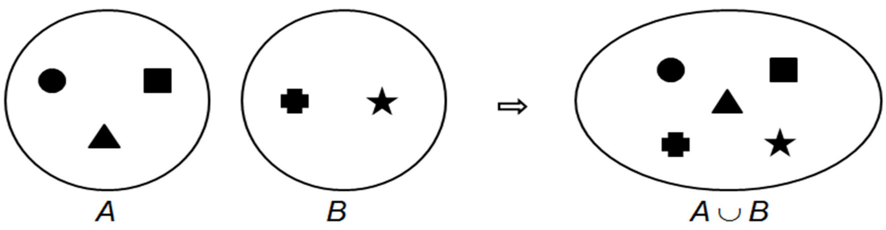
$$n! = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, \text{ se } n \geq 1 \end{cases},$$

e, consequentemente,

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i \text{ quando } n \geq 1.$$

2.1 Princípios básicos de contagem

Inicialmente, apresentaremos a primeira técnica básica de contagem, conhecido como *princípio aditivo*, ilustrado a seguir.



Sejam A e B dois conjuntos disjuntos (i.e., $A \cap B = \varnothing$) com m e n elementos, respectivamente. Então, o conjunto $A \cup B$ possui $m+n$ elementos (i.e., $|A \cup B| = |A| + |B|$).

Uma aplicação comum do princípio acima consiste em escolhermos exatamente um objeto dentre dois grupos mutuamente exclusivos (a saber, A e B), havendo um certo número de possibilidades em cada grupo (respectivamente, m e n), o que pode ser feito de $m+n$ maneiras.

O exemplo a seguir é uma ilustração do princípio aditivo mencionado acima.

Exemplo 2.1.1. Um cesto contém 4 maçãs diferentes e 6 bananas diferentes. De quantas maneiras distintas pode Nicole escolher uma única fruta do cesto?

Solução. Se Nicole pretende escolher uma única fruta, então ela escolhe ou uma maçã ou uma banana e, como ela tem 4 possibilidades na escolha da maçã e 6 possiblidades na escolha da banana, segue que Nicole tem $4+6=10$ maneiras de escolher uma única fruta do cesto. ■

O princípio aditivo pode ser generalizado para um número finito qualquer de conjuntos, como segue.

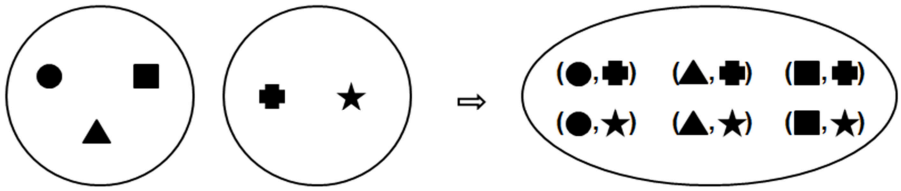
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ conjuntos disjuntos dois a dois (i.e., $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$) com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos, respectivamente. Então, o conjunto $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ possui $\sum_{i=1}^{k} m_i$ elementos (i.e., $\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$).

O exemplo a seguir é uma ilustração da generalização do princípio aditivo mencionado acima.

Exemplo 2.1.2. Numa livraria, há 3 livros diferentes de física, 5 livros diferentes de matemática e 7 livros diferentes de química. Supondo que Mateus tenha permissão para escolher exatamente um livro, de quantas maneiras ele pode escolhê-lo?

Solução. Se Mateus pretende escolher exatamente um livro, então ele escolhe ou um de física ou um de matemática ou um de química e, como ele tem 3 possibilidades na escolha do livro de física, 5 possibilidades na escolha do livro de matemática e 7 possiblidades na escolha do livro de química, segue que Mateus tem $3+5+7=15$ maneiras de escolher exatamente um livro. ■

Agora, apresentaremos a segunda técnica básica de contagem, conhecido como *princípio multiplicativo* ou *princípio fundamental da contagem*, ilustrado a seguir.



Sejam A e B dois conjuntos não vazios com m e n elementos, respectivamente. Então, o conjunto $A \times B$ formado pelos pares ordenados (x,y), tais que $x \in A$ e $y \in B$, possui $m \cdot n$ elementos (i.e., $|A \times B| = |A| \cdot |B|$).

Uma aplicação comum do princípio acima consiste em escolhermos simultaneamente dois objetos, um de cada um de dois grupos distintos (a saber, A e B), havendo um certo número de possibilidades em cada grupo (respectivamente, m e n), o que pode ser feito de $m \cdot n$ maneiras.

O exemplo a seguir é uma ilustração do princípio multiplicativo mencionado acima.

Exemplo 2.1.3. Um cesto contém 4 maçãs diferentes e 6 bananas diferentes. De quantas maneiras distintas pode Nicole escolher duas frutas do cesto, sendo maçã uma delas e banana a outra?

Solução. Sabendo que Nicole pretende escolher duas frutas, sendo maçã uma delas e banana a outra, com 4 possibilidades na escolha da maçã e 6 possiblidades na escolha da banana e, como cada escolha das duas frutas consiste em um par ordenado (x,y), onde x pertence ao conjunto das maçãs e y pertence ao conjunto das bananas, segue que Nicole tem $4 \cdot 6 = 24$ maneiras de escolher duas frutas do cesto, considerando que maçã seja uma delas e banana a outra. ■

O princípio multiplicativo pode ser generalizado para um número finito qualquer de conjuntos, como segue.

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_k$ conjuntos não vazios com $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementos, respectivamente. Então, o conjunto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ formado pelas k-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, tais que $x_i \in A_i$, possui $\prod_{i=1}^{k} m_i$ elementos (i.e., $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$).

O exemplo a seguir é uma ilustração da generalização do princípio multiplicativo mencionado acima.

Exemplo 2.1.4. Numa livraria, há 3 livros diferentes de física, 5 livros diferentes de matemática e 7 livros diferentes de química. Supondo que Mateus tenha permissão para escolher três livros com a condição de que quaisquer dois deles não sejam da mesma matéria, de quantas maneiras ele pode escolhê-los?

Solução. Se Mateus pretende escolher três livros com a condição de que quaisquer dois deles não sejam da mesma matéria, sendo 3 possibilidades na escolha do livro de física, 5 possibilidades na escolha do livro de matemática e 7 possiblidades na escolha do livro de química, então Mateus tem $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ maneiras de escolher três livros, sem que quaisquer dois deles sejam da mesma matéria. ■

O exemplo a seguir é uma ilustração da combinação dos princípios aditivo e multiplicativo mencionados anteriormente.

Exemplo 2.1.5. Numa livraria, há 3 livros diferentes de física, 5 livros diferentes de matemática e 7 livros diferentes de química. Supondo (agora) que Mateus tenha permissão para escolher (apenas) dois livros com a condição de que eles não sejam da mesma matéria, de quantas maneiras ele pode escolhê-los?

Solução. Se Mateus pretende escolher dois livros com a condição de que eles não sejam da mesma matéria, sendo 3 possibilidades na escolha do livro de física, 5 possibilidades na escolha do livro de matemática e 7 possiblidades na escolha do livro de química, então ele pode fazer as seguintes escolhas:

(a) um de física e um de matemática: $3 \cdot 5 = 15$ maneiras;

(b) um de física e um de química: $3 \cdot 7 = 21$ maneiras;

(c) um de matemática e um de química: $5 \cdot 7 = 35$ maneiras.

Como as escolhas de Mateus só podem ocorrer dentre uma das possibilidades (a), (b) ou (c), segue que ele tem $15+21+35=71$ maneiras de escolher dois livros de matérias diferentes. ■

No exemplo anterior, aplicamos o princípio aditivo dividindo o problema em casos (*método construtivo*, que é a alternativa mais natural). Por outro lado, poderíamos aplicar o princípio aditivo eliminando o caso referente à restrição (*método destrutivo*, que é a alternativa mais sofisticada).

O exemplo a seguir é uma ilustração da combinação dos princípios aditivo e multiplicativo, utilizando os métodos mencionados anteriormente.

Exemplo 2.1.6. Numa festa, existem 18 moças e 12 rapazes, onde 5 deles (3 moças e 2 rapazes) são irmãos e os demais não tem parentesco algum. Sabendo que não pode haver casais formados entre irmãos, quantos casais podem ser formados, sendo uma moça e um rapaz?

Solução (natural). Pelo método construtivo, podemos considerar os seguintes casos:

- as moças que possuem irmãos: $3\cdot 10=30$ casais possíveis;
- as moças que não possuem irmãos: $15\cdot 12=180$ casais possíveis.

Portanto, podem ser formados $30+180=210$ casais possíveis. ■

Solução (sofisticada). Pelo método destrutivo, temos $18\cdot 12=216$ casais possíveis ignorando a restrição de que não pode haver casais formados entre irmãos (a saber, $3\cdot 2=6$ casais possíveis). Portanto, podem ser formados $216-6=210$ casais possíveis. ■

2.2 Outras técnicas de contagem

Embora alguns (poucos, mas frequentes) problemas de Combinatória sejam aplicações dos princípios básicos mencionados na seção anterior, vale a pena conhecermos técnicas "mais refinadas" de contagem para que tais problemas tenham soluções mais imediatas.

Inicialmente, sendo consequência do princípio multiplicativo, estabeleceremos a primeira dessas técnicas “mais refinadas” de contagem denominada *arranjo*. No entanto, devemos entender em que situação o problema é enquadrado num arranjo, observando os exemplos a seguir.

Exemplo 2.2.1. Considerando o alfabeto com 23 letras (excluindo as letras K, Y e W), de quantas maneiras podemos escolher duas letras, sendo uma vogal e uma consoante?

Solução. Inicialmente, observe que para a escolha da vogal temos 5 possiblidades e, para cada uma delas, temos 18 possibilidades para a escolha da consoante. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $5 \cdot 18 = 90$ maneiras de escolher as duas letras, sendo uma vogal e uma consoante. ■

Exemplo 2.2.2. Considerando o alfabeto com 23 letras (excluindo as letras K, Y e W), de quantas maneiras podemos formar uma senha de duas letras, sendo uma vogal e uma consoante?

Solução. No exemplo anterior, concluímos que existem 90 maneiras de escolher as duas letras, sendo uma vogal e uma consoante. Agora, para formarmos senhas com essas duas letras, basta considerarmos duas possibilidades (a saber, vogal-consoante ou consoante-vogal) para cada uma dessas escolhas. Logo, existem $90 \cdot 2 = 180$ maneiras de formar uma senha de duas letras, sendo uma vogal e uma consoante. ■

Exemplo 2.2.3. Considerando o alfabeto com 23 letras (excluindo as letras K, Y e W), de quantas maneiras podemos formar uma senha de duas letras distintas?

Solução. Inicialmente, observe que para a escolha da primeira letra temos 23 possibilidades e, para cada uma delas, temos 22 possibilidades (já que as letras são distintas) para a escolha da segunda letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $23 \cdot 22 = 506$ maneiras de formar uma senha de duas letras distintas. ■

Observe que, no primeiro exemplo, apenas escolhemos as duas letras (a escolha de O e S foi contada uma única vez), enquanto que, no segundo exemplo, escolhemos as duas letras e, em seguida, tivemos que ordená-las para formar uma senha (a escolha de O e S deve ser contada duas vezes, pois as senhas OS e SO são diferentes). Por outro lado, no terceiro exemplo, já fizemos as duas etapas, ou seja, escolhemos as duas letras colocando-as em ordem (a escolha de O e S foi contada duas vezes, uma na ordem OS e a outra na ordem SO). Neste último exemplo, o problema é enquadrado num arranjo, conforme a definição a seguir.

Seja A um conjunto não vazio com n elementos. Denomina-se *arranjo simples* dos n elementos de A, tomados k a k, com $k \geq 1$, a qualquer k-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tal que $x_i \in A$ com $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Denotando por $A_{n,k}$ o número de arranjos simples dos n elementos, tomados k a k, temos que:

- se $n < k$ então é impossível escolhermos uma quantidade de elementos (distintos) maior do que a quantidade disponível, concluindo que $A_{n,k} = 0$;
- se $n \geq k$ então temos n possibilidades para a escolha de x_1 e, excluindo o elemento escolhido anteriormente, restam $n-1$ possibilidades para a escolha de x_2 e, em seguida, excluindo os dois elementos escolhidos anteriormente, restam $n-2$ possibilidades para a escolha de x_3 e, assim sucessivamente, até restarem $n-(k-1)$ possibilidades para a escolha de x_k, uma vez que devemos excluir os $k-1$ elementos escolhidos anteriormente, concluindo, pelo princípio multiplicativo, que $A_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$.

Assim, o número de arranjos simples dos n elementos, tomados k a k, é dado por

$$A_{n,k} = \begin{cases} 0, \text{ se } n < k \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)), \text{ se } n \geq k \end{cases},$$

ou ainda, considerando a definição de fatorial vista anteriormente, segue que

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ para } n \geq k.$$

Uma aplicação comum da técnica de contagem acima consiste em escolhermos ordenadamente k objetos distintos de um grupo, havendo n possibilidades neste grupo, o que pode ser feito de $A_{n,k}$ maneiras.

O exemplo a seguir é mais uma ilustração da técnica de contagem mencionada acima.

Exemplo 2.2.4. Numa corrida de carros, participam 20 pilotos. Quantos resultados são possíveis para o pódio (1º, 2º e 3º lugares)?

Solução. Observe que para formar um pódio é necessário escolhermos ordenadamente 3 pilotos (distintos) dentre os 20 pilotos participantes, ou seja, cada pódio corresponde a uma tripla ordenada (a,b,c), com $a \neq b \neq c \neq a$, em que "a" representa o piloto que chegou em primeiro, "b" representa o piloto que chegou em segundo e "c" representa o piloto que chegou em terceiro. Logo, existem $A_{20,3} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840$ resultados possíveis para o pódio. ■

Agora, sendo consequência do arranjo, estabeleceremos a segunda dessas técnicas "mais refinadas" de contagem denominada *permutação*. No entanto, devemos entender em que situação o problema é enquadrado numa permutação, observando os exemplos a seguir.

Exemplo 2.2.5. Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos são os números naturais de três algarismos distintos?

Solução. Observe que para formar um número de três algarismos distintos é necessário escolhermos ordenadamente 3 dígitos distintos dentre os 5 dígitos possíveis, ou seja, cada número corresponde a uma tripla ordenada (a,b,c), com $a \neq b \neq c \neq a$, em que "a" representa o algarismo das centenas, "b" representa o algarismo das dezenas e "c" representa o algarismo das unidades. Logo, existem $A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números naturais de três algarismos distintos. ■

Exemplo 2.2.6. Considerando os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5, quantos são os números naturais de cinco algarismos distintos?

Solução. De maneira análoga ao exemplo anterior, observe que para formar um número de cinco algarismos distintos é necessário "escolhermos" ordenadamente 5 dígitos distintos dentre os 5 dígitos possíveis. Logo, existem $A_{5,5} = \frac{5!}{0!} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ números naturais de cinco algarismos distintos. ■

Observe que, no primeiro exemplo, escolhemos três algarismos distintos colocando-os em ordem, enquanto que, no segundo exemplo, escolhemos todos os algarismos colocando-os em ordem, ou seja, não tivemos trabalho algum em escolhermos os algarismos (já que todos os números possuem os mesmos cinco algarismos), mas apenas em ordenarmos os algarismos. Neste último exemplo, o problema é enquadrado numa permutação, conforme a definição a seguir.

Seja A um conjunto não vazio com n elementos. Denomina-se *permutação (simples)* dos n elementos de A, a qualquer n-upla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $x_i \in A$ com $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Denotando por P_n o número de permutações (simples) dos n elementos, temos que $P_n = A_{n,n}$, pois cada permutação (simples) dos n elementos consiste em um arranjo simples dos n elementos, tomados n a n. Assim, o número de permutações (simples) dos n elementos é dado por

$$P_n = n!.$$

Uma aplicação comum da técnica de contagem acima consiste em ordenarmos todos os objetos de um grupo, havendo n objetos neste grupo, o que pode ser feito de P_n maneiras.

O exemplo a seguir é mais uma ilustração da técnica de contagem mencionada acima.

Exemplo 2.2.7. Quantos são os anagramas da palavra NICOLE?

Solução. Observe que cada anagrama da palavra NICOLE corresponde a uma ordenação das letras N, I, C, O, L e E. Logo, existem $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ anagramas da palavra NICOLE. ■

Por fim, sendo consequência do arranjo e da permutação, estabeleceremos a terceira dessas técnicas “mais refinadas” de contagem denominada *combinação*. No entanto, devemos entender em que situação o problema é enquadrado numa combinação, observando os exemplos a seguir.

Exemplo 2.2.8. Recapitulando o exemplo 2.2.3, considere o alfabeto com 23 letras (excluindo as letras K, Y e W). De quantas maneiras podemos formar uma senha de duas letras distintas?

Solução. Observe que para formar uma senha de duas letras distintas é necessário escolhermos ordenadamente 2 letras distintas dentre as 23 letras possíveis do alfabeto, ou seja, cada senha corresponde a um par ordenado (a,b), com $a \neq b$, em que “a” representa a primeira letra e “b” representa a segunda. Logo, existem $A_{23,2} = \dfrac{23!}{21!} = 23 \cdot 22 = 506$ maneiras de formar uma senha de duas letras distintas. ■

Exemplo 2.2.9. Considerando o alfabeto com 23 letras (excluindo as letras K, Y e W), de quantas maneiras podemos escolher duas letras distintas?

Solução. No exemplo anterior, concluímos que existem 506 maneiras de formar uma senha de duas letras distintas. Agora, para (apenas) escolhermos duas letras, basta considerarmos que para cada uma das escolhas possíveis existem duas senhas (a escolha de O e S deveria ser contada uma única vez, já que foi contada duas vezes, através das senhas OS e SO). Logo, existem $\dfrac{506}{2} = 253$ maneiras de escolher duas letras distintas. ■

Exemplo 2.2.10. Recapitulando o exemplo 2.2.5, considere os dígitos 1, 2, 3, 4 e 5. Quantos são os números naturais de três algarismos distintos?

Solução. Observe que para formar um número de três algarismos distintos é necessário escolhermos ordenadamente 3 dígitos distintos dentre os 5 dígitos possíveis, ou seja, cada número corresponde a uma tripla ordenada (a,b,c), com

$a \neq b \neq c \neq a$, em que "a" representa o algarismo das centenas, "b" representa o algarismo das dezenas e "c" representa o algarismo das unidades. Logo, existem $A_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números naturais de três algarismos distintos. ■

Exemplo 2.2.11. Quantos são os subconjuntos de três elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5\}$?

Solução. No exemplo anterior, concluímos que existem 60 números naturais de três algarismos distintos. Agora, para formarmos um subconjunto de três elementos, basta considerarmos que para cada um dos subconjuntos possíveis existem $3! = 6$ números naturais de três algarismos distintos (o subconjunto $\{1,3,5\}$ deveria ser contado uma única vez, já que foi contado seis vezes, através dos números 135, 153, 315, 351, 513 e 531). Logo, existem $\frac{60}{6} = 10$ subconjuntos de três elementos. ■

Observe que, no primeiro (respectivamente, terceiro) exemplo, escolhemos dois (respectivamente, três) elementos colocando-os em ordem. Por outro lado, no segundo (respectivamente, quarto) exemplo, apenas escolhemos dois (respectivamente, três) elementos, sem a necessidade de colocá-los em ordem. Nestes últimos exemplos mencionados (segundo e quarto), o problema é enquadrado numa combinação, conforme a definição a seguir.

Seja A um conjunto com n elementos. Denomina-se *combinação simples* dos n elementos de A, tomados k a k, com $k \geq 0$, ao subconjunto $\varnothing$ (conjunto vazio) ou a qualquer subconjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ tal que $x_i \in A$.

Denotando por $C_{n,k}$ o número de combinações simples dos n elementos, tomados k a k, temos que:

- se $n < k$ então é impossível escolhermos uma quantidade de elementos (distintos) maior do que a quantidade disponível, concluindo que $C_{n,k} = 0$;

- se $n \geq k \geq 1$ então cada subconjunto de k elementos escolhidos de A gera $k!$ sequências com os mesmos k elementos (k-uplas ordenadas), concluindo que $k! \cdot C_{n,k} = A_{n,k}$.

Assim, o número de combinações simples dos n elementos, tomados k a k, é dado por

$$C_{n,k} = \begin{cases} 0, \text{ se } n < k \\ \dfrac{A_{n,k}}{k!}, \text{ se } n \geq k \geq 1 \end{cases},$$

ou ainda, considerando $C_{n,0} = 1$ (i.e., o conjunto vazio), segue que

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ para } n \geq k.$$

Uma aplicação comum da técnica de contagem acima consiste em escolhermos não ordenadamente k objetos distintos de um grupo, havendo n possibilidades neste grupo, o que pode ser feito de $C_{n,k}$ maneiras.

O exemplo a seguir é mais uma ilustração da técnica de contagem mencionada acima.

Exemplo 2.2.12. Sabendo que a aposta simples na MEGA-SENA é constituída de seis números escolhidos de um total de sessenta dezenas (a saber, de 01 a 60), de quantas maneiras podemos fazer uma aposta simples?

Solução. Observe que para fazer uma aposta simples, basta escolhermos não ordenadamente 6 das 60 dezenas disponíveis. Logo, existem $C_{60,6} = \dfrac{60!}{6! \cdot 54!} = \dfrac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6!} = 50.063.860$ maneiras de fazer uma aposta simples. ■

Os exemplos a seguir são ilustrações da combinação dos princípios básicos de contagem, mencionados na seção anterior, juntamente com as técnicas “mais refinadas” de contagem, mencionadas na seção atual.

Exemplo 2.2.13. As placas dos automóveis são formadas por sete caracteres, sendo três letras do alfabeto oficial (incluindo as letras K, Y e W) seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas, supondo que os caracteres são distintos?

Solução. Para escolhermos os sete caracteres que formam as placas, temos que escolher ordenadamente três letras distintas (o que pode ser feito de $A_{26,3} = \frac{26!}{23!} = 15600$ maneiras) e, em seguida, para cada uma dessas escolhas, devemos escolher ordenadamente quatro algarismos distintos (o que pode ser feito de $A_{10,4} = \frac{10!}{6!} = 5040$ maneiras). Logo, pelo princípio multiplicativo, podem ser formadas $A_{26,3} \cdot A_{10,4} = 15600 \cdot 5040 = 78.624.000$ placas, supondo que os caracteres sejam distintos. ■

Exemplo 2.2.14. De quantas maneiras 10 pessoas, sendo 2 crianças, 3 mulheres e 5 homens, podem ficar em fila, supondo que as crianças devem ficar no início e os homens devem ficar no fim da fila?

Solução. Inicialmente, devemos ordenar as 2 crianças que ficarão à frente da fila (o que pode ser feito de $P_2 = 2! = 2$ maneiras), em seguida, devemos ordenar as 3 mulheres que ficarão logo após as crianças (o que pode ser feito de $P_3 = 3! = 6$ maneiras) e, finalmente, devemos ordenar os 5 homens que ficarão logo após as mulheres (o que pode ser feito de $P_5 = 5! = 120$ maneiras). Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $P_2 \cdot P_3 \cdot P_5 = 2 \cdot 6 \cdot 120 = 1.440$ maneiras dessas pessoas ficarem em fila, supondo que as crianças devem ficar no início e os homens no fim da fila. ■

Exemplo 2.2.15. Considerando que dispomos de 7 tipos de frutas diferentes, quantas saladas de frutas, contendo quatro ou cinco tipos de frutas, podem ser formadas?

Solução. Observe que para formar uma salada de fruta, com exatamente quatro tipos de frutas, basta escolhermos não ordenadamente 4 dos 7 tipos de frutas disponíveis (o que pode ser feito de $C_{7,4}=\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=35$ maneiras), enquanto que para formar uma salada de fruta, com exatamente cinco tipos de frutas, basta escolhermos não ordenadamente 5 dos 7 tipos de frutas disponíveis (o que pode ser feito de $C_{7,5}=\dfrac{7!}{5!\cdot 2!}=21$ maneiras). Logo, pelo princípio aditivo, existem $C_{7,4}+C_{7,5}=35+21=56$ maneiras de formar uma salada de frutas, contendo quatro ou cinco tipos de frutas. ■

Exemplo 2.2.16. Num hospital, cada equipe de plantão deve conter 2 médicos e 3 enfermeiras. Sabendo que o hospital dispõe de 7 médicos e 10 enfermeiras, de quantas maneiras pode ser formada a equipe de plantão?

Solução. Observe que para formar a equipe de plantão, temos que escolher não ordenadamente 2 médicos (o que pode ser feito de $C_{7,2}=\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=21$ maneiras) e, em seguida, temos que escolher não ordenadamente as 3 enfermeiras (o que pode ser feito de $C_{10,3}=\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}=120$ maneiras). Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $C_{7,2}\cdot C_{10,3}=21\cdot 120=2.520$ maneiras de formar tal equipe de plantão. ■

Exemplo 2.2.17. Num hospital, cada equipe de plantão deve conter 2 médicos e 3 enfermeiras. Sabendo que o hospital dispõe de 7 médicos (sendo Mateus um deles) e 10 enfermeiras (sendo Nicole uma delas), de quantas maneiras pode ser formada a equipe de plantão, supondo que Mateus e Nicole sejam casados e que o hospital não permita cônjuges na mesma equipe?

Solução (natural). Pelo método construtivo, podemos considerar os seguintes casos:

- Mateus participa e Nicole não participa: $C_{6,1}\cdot C_{9,3}=6\cdot 84=504$ maneiras de formar a equipe;
- Mateus não participa e Nicole participa: $C_{6,2}\cdot C_{9,2}=15\cdot 36=540$ maneiras de formar a equipe;

- Mateus não participa e Nicole não participa: $C_{6,2} \cdot C_{9,3} = 15 \cdot 84 = 1.260$ maneiras de formar a equipe.

Portanto, existem $504 + 540 + 1260 = 2.304$ maneiras de formar a equipe de plantão, não havendo cônjuges na mesma equipe. ■

Solução (sofisticada). Pelo método destrutivo, já sabemos (exemplo anterior) que existem 2.520 maneiras de formar a equipe de plantão ignorando a restrição de que Mateus e Nicole não podem participar simultaneamente (a saber, $C_{6,1} \cdot C_{9,2} = 6 \cdot 36 = 216$ maneiras de formar tal equipe). Portanto, existem $2520 - 216 = 2.304$ maneiras de formar a equipe de plantão, não havendo cônjuges na mesma equipe. ■

Exemplo 2.2.18. Considerando o alfabeto com 23 letras (excluindo as letras K, Y e W), de quantas maneiras podemos formar uma senha de cinco letras distintas, sendo duas vogais e três consoantes?

Solução. Inicialmente, devemos escolher não ordenadamente as duas vogais distintas (o que pode ser feito de $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ maneiras) e, em seguida, devemos escolher não ordenadamente as três consoantes distintas (o que pode ser feito de $C_{18,3} = \dfrac{18!}{3!\cdot 15!} = 816$ maneiras). Por outro lado, uma vez de posse das cinco letras distintas, devemos ordená-las a fim de formar uma senha (o que pode ser feito de $P_5 = 5! = 120$ maneiras). Logo, pelo princípio multiplicativo, existem $C_{5,2} \cdot C_{18,3} \cdot P_5 = 10 \cdot 816 \cdot 120 = 979.200$ maneiras de formar uma senha de cinco letras distintas, sendo duas vogais e três consoantes. ■

3 NÚMEROS BINOMIAIS

Neste capítulo, apresentaremos os *números binomiais*, a organização desses números numa tabela denominada *triângulo de Pascal* e a fórmula para o desenvolvimento do *binômio de Newton*.

Inicialmente, devemos definir, para n e k naturais, com $n \geq k$, o *número binomial de* n *sobre* k por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

onde n representa a *ordem* e k representa a *classe* do número binomial.

Como consequência imediata da definição acima, dado o natural n, segue que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1 \text{ e } \binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n \text{ para } n \geq 1,$$

e ainda, dado o natural k, segue também que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ para } n \geq k,$$

denominados *binomiais complementares*.

Observe que a definição de número binomial corresponde ao cálculo das combinações simples e, sendo assim, podemos comprovar os resultados anteriores percebendo que, dado o conjunto A com n elementos:

- $C_{n,0} = 1$ significa 1 subconjunto sem elementos de A (i.e., o conjunto vazio);
- $C_{n,n} = 1$ significa 1 subconjunto com n elementos de A (i.e., o próprio conjunto);
- $C_{n,1} = n$ significa n subconjuntos com 1 elemento de A (i.e., os conjuntos unitários);
- $C_{n,k} = C_{n,n-k}$ significa que a quantidade de subconjuntos com k elementos de A é igual à quantidade de subconjuntos com $n-k$ elementos de A (pois, cada subconjunto com k elementos de A corresponde biunivocamente a um subconjunto com os $n-k$ elementos restantes de A).

3.1 Triângulo de Pascal

Com os números binomiais definidos anteriormente, construímos uma tabela (numérica) triangular, denominada *triângulo de Pascal*, dispondo-os de tal forma que aqueles de mesma ordem situam-se na mesma linha e os de mesma classe situam-se na mesma coluna, levando em consideração o crescimento das ordens (linhas numeradas de cima para baixo, começando em zero) e o crescimento das classes (colunas numeradas da esquerda para direita, começando em zero), ou seja, especificamente temos:

- o elemento da linha n e coluna k é $\binom{n}{k}$;
- os elementos (na ordem) da linha n são $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$;
- os elementos (na ordem) da coluna k são $\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \ldots.$

Desse modo, segundo a descrição mencionada acima, as primeiras linhas do triângulo de Pascal estão ilustradas a seguir.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

Por outro lado, substituindo cada número binomial pelo seu valor numérico, obtemos outra versão do triângulo de Pascal, ilustrada a seguir.

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Observando atentamente o triângulo de Pascal, algumas propriedades surgem com muita naturalidade. No entanto, ao demonstrá-las, percebemos não ser com tanta “naturalidade” como se imaginava e, por esse motivo, faremos as demonstrações através de duas abordagens: *algébrica*, utilizando argumentos algébricos e, *combinatória*, utilizando argumentos combinatórios; percebendo também que em algumas dessas demonstrações, o argumento algébrico é o mais elementar, enquanto que, em outras demonstrações, o argumento combinatório é o mais elementar.

Inicialmente, apresentaremos a propriedade mais importante (e a mais fácil de notar) no triângulo de Pascal, conhecida como *relação de Stifel*, ilustrada a seguir. (*Tal ilustração sugere que somando quaisquer dois elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.*)

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Proposição 3.1.1. Se n e k são inteiros tais que $n > k \geq 0$, então

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demonstração (algébrica). De forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando a definição de número binomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \frac{n!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k) \cdot (k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \binom{n+1}{k+1},
\end{aligned}$$

onde queríamos chegar. ■

Demonstração (combinatória). Considere um grupo formado por n homens e 1 mulher, e ainda, que desejamos escolher $k+1$ pessoas desse grupo, o que pode ser feito de $C_{n+1,k+1}$ maneiras. Por outro lado, se desejarmos escolher $k+1$ pessoas desse grupo, sendo k homens e 1 mulher, isto pode ser feito de $1 \cdot C_{n,k} = C_{n,k}$ maneiras, enquanto que, se desejarmos escolher $k+1$ pessoas desse grupo, sendo todos homens, isto pode ser feito de $C_{n,k+1}$. Logo, como dentre as escolhas de $k+1$ pessoas desse grupo temos (apenas) duas possibilidades, ou seja, a mulher sendo uma das $k+1$ pessoas é uma possibilidade e a mulher não sendo uma das $k+1$ pessoas é outra possibilidade, segue que $C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$. ■

A próxima propriedade que apresentaremos é conhecida como *relação de Fermat*.

Proposição 3.1.2. Se n e k são inteiros tais que $n > k \geq 0$, então

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k}.$$

Demonstração (algébrica). De forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando a definição de número binomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{n-k}{n-k} \cdot \frac{n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k) \cdot (n-k-1)!} \\
&= \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k},
\end{aligned}$$

onde queríamos chegar. ■

Demonstração (combinatória). Considere um grupo formado por n pessoas e que desejamos formar uma diretoria composta de $k+1$ pessoas (1 presidente e k conselheiros) escolhidos desse grupo. Para tanto, podemos escolher $k+1$ pessoas e, em seguida, escolher o presidente dentre as $k+1$ pessoas restando k conselheiros, o que pode ser feito de $(k+1) \cdot C_{n,k+1}$ maneiras. Por outro lado, poderíamos escolher k pessoas correspondendo aos conselheiros e, em seguida, escolher o presidente dentre as $n-k$ pessoas restantes, o que pode ser feito de $(n-k) \cdot C_{n,k}$ maneiras. Portanto, como as escolhas são idênticas, diferindo (apenas) nos procedimentos, segue que $(k+1) \cdot C_{n,k+1} = (n-k) \cdot C_{n,k}$, sendo equivalente ao que queríamos demonstrar. ■

Como corolário da proposição anterior, apresentamos a próxima propriedade, verificando que ao longo de qualquer linha, os elementos crescem até a metade e decrescem a partir da metade, ou seja, os elementos crescem quando

$$\frac{n-k}{k+1} > 1 \text{ ou, equivalentemente, } k < \frac{n-1}{2}$$

e, em seguida, os elementos decrescem quando

$$\frac{n-k}{k+1} < 1 \text{ ou, equivalentemente, } k > \frac{n-1}{2}$$

onde o elemento máximo é

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} \text{ (para } n \text{ par) e } \binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}} \text{ (para } n \text{ ímpar).}$$

Corolário 3.1.1. Se n e k são inteiros tais que $n > k \geq 0$, então

$$\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k} \text{ se } k < \frac{n-1}{2} \text{ e } \binom{n}{k+1} < \binom{n}{k} \text{ se } k > \frac{n-1}{2}.$$

A próxima propriedade que apresentaremos é conhecida como *teorema da soma nas linhas*, ilustrada a seguir.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & - & - & - & - & - & - & \xrightarrow{+} & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & - & - & \xrightarrow{+} & 2 \\
1 & 2 & 1 & - & - & - & - & \xrightarrow{+} & 4 \\
1 & 3 & 3 & 1 & - & - & - & \xrightarrow{+} & 8 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & - & - & \xrightarrow{+} & 16 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & - & \xrightarrow{+} & 32 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \xrightarrow{+} & 64
\end{array}$$

Proposição 3.1.3. Se n é inteiro tal que $n \geq 0$, então

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração (algébrica). Considerando $S_m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}$ para $m \geq 0$, temos que

$$S_m = \binom{m}{0} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{i} + \binom{m}{m},$$

e, aplicando a relação de Stifel ao termo geral do somatório, concluímos que

$$\begin{aligned} S_m &= \binom{m}{0} + \sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i} + \binom{m}{m} \\ &= \binom{m-1}{0} + \sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{i} + \binom{m-1}{m-1} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i} \\ &= \sum_{i-1=0}^{m-1}\binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i}, \end{aligned}$$

e ainda, fazendo a mudança de variável em um dos somatórios, concluímos que

$$S_m = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m-1}{i} = 2 \cdot S_{m-1}.$$

Daí, fazendo $m = 1,2,\ldots,n$ no resultado obtido acima, chegamos às equações:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \cdot S_0 \\ S_2 &= 2 \cdot S_1 \\ S_3 &= 2 \cdot S_2 \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= 2 \cdot S_{n-2} \\ S_n &= 2 \cdot S_{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, aplicando o produto telescópico, ou seja, multiplicando (membro a membro) as n equações acima e eliminando os fatores comuns em ambos os membros, concluímos que $S_n = 2^n \cdot S_0$ e, como

$$S_0 = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i} = \binom{0}{0} = 1$$

segue (consequentemente) que $S_n = 2^n$, completando a demonstração. ■

Demonstração (combinatória). Como $C_{n,k}$ é o número de subconjuntos com k elementos de $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, segue que $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n}$ é o número total de subconjuntos de A. Por outro lado, para formar um subconjunto de A devemos, para cada um dos n elementos, escolher se pertence ou não ao subconjunto a ser formado, o que pode ser feito de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ maneiras, obtendo o resultado desejado. ■

A próxima propriedade que apresentaremos é conhecida como *teorema da soma "alternante" nas linhas*, ilustrada a seguir.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
+1 & -1 & - & - & - & - & - & \xrightarrow{+-} & 0 \\
+1 & -2 & +1 & - & - & - & - & \xrightarrow{+-} & 0 \\
+1 & -3 & +3 & -1 & - & - & - & \xrightarrow{+-} & 0 \\
+1 & -4 & +6 & -4 & +1 & - & - & \xrightarrow{+-} & 0 \\
+1 & -5 & +10 & -10 & +5 & -1 & - & \xrightarrow{+-} & 0 \\
+1 & -6 & +15 & -20 & +15 & -6 & +1 & \xrightarrow{+-} & 0
\end{array}
$$

Proposição 3.1.4. Se n é inteiro tal que $n \geq 1$, então

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0 .$$

Demonstração (algébrica). Considerando $S_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot \binom{m}{i}$ para $m \geq 1$, temos que

$$S_m = \binom{m}{0} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \cdot \binom{m}{i} + (-1)^m \cdot \binom{m}{m},$$

e, aplicando a relação de Stifel ao termo geral do somatório, concluímos que

$$
\begin{aligned}
S_m &= \binom{m}{0} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \cdot \binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \cdot \binom{m-1}{i} + (-1)^m \cdot \binom{m}{m} \\
&= \binom{m-1}{0} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \cdot \binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \cdot \binom{m-1}{i} + (-1)^m \cdot \binom{m-1}{m-1} \\
&= \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \cdot \binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \cdot \binom{m-1}{i}
\end{aligned}
$$

$$= (-1) \cdot \sum_{i-1=0}^{m-1} (-1)^{i-1} \cdot \binom{m-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i} \cdot \binom{m-1}{i},$$

e ainda, fazendo a mudança de variável em um dos somatórios, concluímos que

$$S_m = (-1) \cdot \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i} \cdot \binom{m-1}{i} + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{i} \cdot \binom{m-1}{i} = (-1) \cdot S_{m-1} + S_{m-1} = 0,$$

onde queríamos chegar. ■

Demonstração (combinatória). Considere o conjunto A com n elementos e $x \in A$. Considere, ainda, p o total de subconjuntos de A com número par de elementos e i o total de subconjuntos de A com número ímpar de elementos, isto é:

$$p = C_{n,0} + C_{n,2} + C_{n,4} + \dots \text{ e } i = C_{n,1} + C_{n,3} + C_{n,5} + \dots .$$

Como já mencionado anteriormente, os subconjuntos podem ser divididos em dois casos (a saber, os subconjuntos contendo x e os subconjuntos não contendo x). Assim, para o cálculo de p, se o elemento x pertencer ao subconjunto, então temos que escolher um número ímpar de elementos dentre os demais $n-1$ elementos de A e, se o elemento x não pertencer ao subconjunto, então temos que escolher um número par de elementos dentre os demais $n-1$ elementos de A, isto é:

$$p = \underbrace{\left(C_{n-1,1} + C_{n-1,3} + C_{n-1,5} + \dots\right)}_{\text{contendo } x} + \underbrace{\left(C_{n-1,0} + C_{n-1,2} + C_{n-1,4} + \dots\right)}_{\text{não contendo } x}.$$

Por outro lado, para o cálculo de i, se o elemento x pertencer ao subconjunto, então temos que escolher um número par de elementos dentre os demais $n-1$ elementos de A e, se o elemento x não pertencer ao subconjunto, então temos que escolher um número ímpar de elementos dentre os demais $n-1$ elementos de A, isto é:

$$i = \underbrace{\left(C_{n-1,0} + C_{n-1,2} + C_{n-1,4} + \dots\right)}_{\text{contendo } x} + \underbrace{\left(C_{n-1,1} + C_{n-1,3} + C_{n-1,5} + \dots\right)}_{\text{não contendo } x}.$$

Daí:

$$p = C_{n-1,0} + C_{n-1,1} + C_{n-1,2} + \dots + C_{n-1,n-1} = i,$$

obtendo o resultado desejado. ■

Observando a demonstração (por argumentos combinatórios) da proposição anterior e, aplicando o teorema da soma nas linhas, concluímos o seguinte corolário.

Corolário 3.1.2. Se n é inteiro tal que $n \geq 1$, então

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}.$$

A próxima propriedade que apresentaremos é conhecida como *teorema da soma nas colunas*, ilustrada a seguir. (*Tal ilustração sugere que somando os elementos de uma mesma coluna, iniciando pelo primeiro elemento da coluna, obtemos o elemento situado abaixo e à direita da última parcela.*)

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Proposição 3.1.5. Se n e k são inteiros tais que $n \geq 0$ e $k \geq 0$, então

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{k+n}{k}=\binom{k+n+1}{k+1}.$$

Demonstração (algébrica). Considerando $S_k=\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}$ para $k \geq 0$, temos que

$$S_k=\binom{k}{k}+\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i}{k},$$

e, aplicando a relação de Stifel ao termo geral do somatório, concluímos que

$$\begin{aligned} S_k &= \binom{k}{k}+\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i+1}{k+1}-\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i}{k+1} \\ &= \binom{k+1}{k+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i+1}{k+1}-\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i}{k+1} \end{aligned}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k+i+1}{k+1}+\binom{k+n+1}{k+1}-\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i}{k+1}$$

$$=\sum_{i+1=1}^{n}\binom{k+i+1}{k+1}+\binom{k+n+1}{k+1}-\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i}{k+1},$$

e ainda, fazendo a mudança de variável em um dos somatórios, concluímos que

$$S_k=\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i}{k+1}+\binom{k+n+1}{k+1}-\sum_{i=1}^{n}\binom{k+i}{k+1}=\binom{k+n+1}{k+1},$$

onde queríamos chegar. ■

Demonstração (combinatória). Considere $A=\{1,2,3,\ldots,k,k+1,\ldots,n+k+1\}$ um conjunto com $n+k+1$ elementos, e ainda, que desejamos formar um subconjunto com $k+1$ elementos, o que pode ser feito de $C_{n+k+1,k+1}$ maneiras. Por outro lado, podemos formar tal subconjunto, escolhendo primeiro o maior elemento e, em seguida, escolhendo os k elementos restantes. Para tanto, se i é o maior elemento escolhido (que é pelo menos $k+1$), então os demais elementos podem ser escolhidos de $C_{i-1,k}$ maneiras. Logo, somando as quantidades de subconjuntos obtidos para cada i, com $k+1\le i\le n+k+1$, obtemos a quantidade (total) de subconjuntos com $k+1$ elementos, i.e.

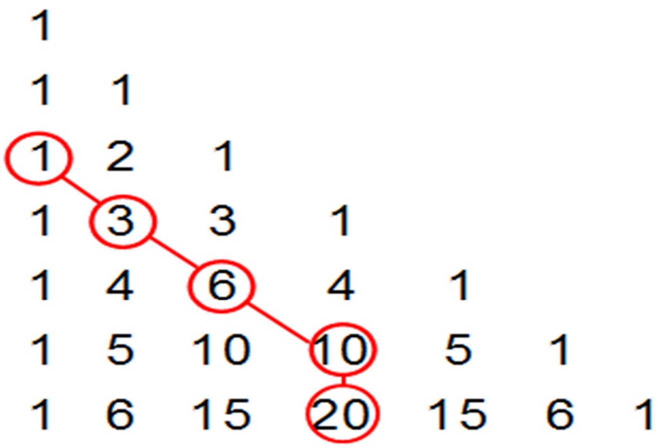
$$C_{k,k}+C_{k+1,k}+C_{k+2,k}+\ldots+C_{n+k,k}=C_{n+k+1,k+1},$$

completando a demonstração. ■

Como corolário da proposição anterior, lembrando a consequência entre binomiais complementares, i.e.,

$$\binom{n+i}{n}=\binom{n+i}{i} \text{ e } \binom{n+k+1}{n+1}=\binom{n+k+1}{k},$$

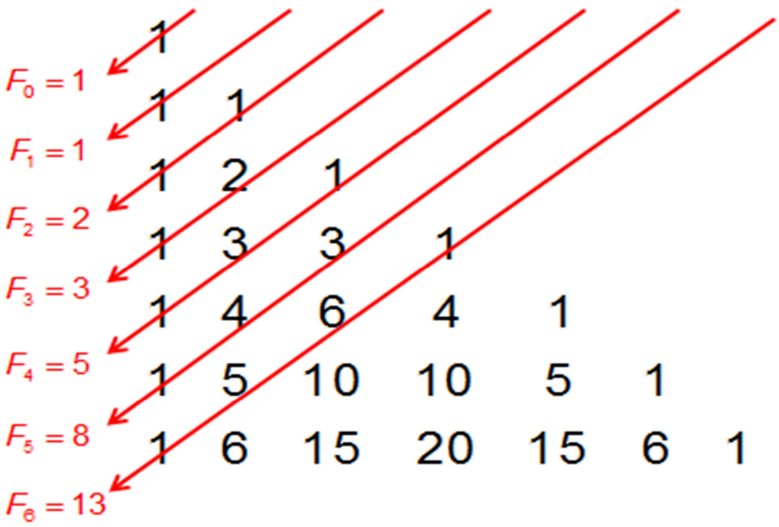
apresentamos a próxima propriedade, conhecida como *teorema da soma nas diagonais*, ilustrada a seguir. (*Tal ilustração sugere que somando os elementos de uma mesma diagonal, iniciando pelo primeiro elemento da diagonal, obtemos o elemento situado abaixo da última parcela.*)



Corolário 3.1.3. Se n e k são inteiros tais que $n \geq 0$ e $k \geq 0$, então

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Os exemplos a seguir são ilustrações das proposições mencionadas anteriormente e, o primeiro desses exemplos, é conhecido como *teorema da soma nas "diagonais inversas"*, ilustrado a seguir.



Exemplo 3.1.1. Seja $(F_n)_{n \geq 0}$ a sequência de Fibonacci, i.e., a sequência dada por:

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ para todo } n \geq 2.$$

Mostre que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n \geq 0$, temos

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} = F_n,$$

onde, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x, i.e.,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{ se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Solução. Inicialmente, considere S_n o valor da soma na "diagonal inversa", i.e.,

$$S_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

Desse modo, devemos mostrar que S_n satisfaz a definição da sequência de Fibonacci. De fato:

- para $n = 0$, temos que:

$$S_0 = \sum_{i=0}^{\lfloor 0 \rfloor} \binom{-i}{i} = \sum_{i=0}^{0} \binom{-i}{i} = \binom{0}{0} = 1;$$

- para $n = 1$, temos que:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{\lfloor 0,5 \rfloor} \binom{1-i}{i} = \sum_{i=0}^{0} \binom{1-i}{i} = \binom{1}{0} = 1;$$

- para $n \geq 2$ e n par, temos que:

$$S_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n-i}{i}$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n/2-1} \binom{n-i}{i} + \binom{n/2}{n/2},$$

  e, aplicando a relação de Stifel ao termo geral do somatório, concluímos que

$$S_n = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n/2-1} \binom{n-i-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{n/2-1} \binom{n-i-1}{i} + \binom{n/2}{n/2}$$

$$= \binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{n/2-1} \binom{n-i-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{n/2-1} \binom{n-i-1}{i} + \binom{n/2-1}{n/2-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n-i-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{n/2-1} \binom{n-i-1}{i}$$

$$= \sum_{i-1=0}^{n/2-1} \binom{n-2-(i-1)}{i-1} + \sum_{i=0}^{n/2-1} \binom{n-1-i}{i},$$

e ainda, fazendo a mudança de variável em um dos somatórios, concluímos que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-2/2} \binom{(n-2)-i}{i} + \sum_{i=0}^{n-2/2} \binom{(n-1)-i}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor n-2/2 \rfloor} \binom{(n-2)-i}{i} + \sum_{i=0}^{\lfloor n-1/2 \rfloor} \binom{(n-1)-i}{i} = S_{n-2} + S_{n-1};$$

- para $n \geq 2$ e n ímpar, temos que:

$$S_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} = \sum_{i=0}^{n-1/2} \binom{n-i}{i}$$

$$= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n-1/2} \binom{n-i}{i},$$

e, aplicando a relação de Stifel ao termo geral do somatório, concluímos que

$$S_n = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n-1/2} \binom{n-i-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{n-1/2} \binom{n-i-1}{i}$$

$$= \binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{n-1/2} \binom{n-i-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{n-1/2} \binom{n-i-1}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1/2} \binom{n-i-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{n-1/2} \binom{n-i-1}{i}$$

$$= \sum_{i-1=0}^{n-1/2-1} \binom{n-2-(i-1)}{i-1} + \sum_{i=0}^{n-1/2} \binom{n-1-i}{i},$$

e ainda, fazendo a mudança de variável em um dos somatórios, concluímos que

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-3/2} \binom{(n-2)-i}{i} + \sum_{i=0}^{n-1/2} \binom{(n-1)-i}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor n-2/2 \rfloor} \binom{(n-2)-i}{i} + \sum_{i=0}^{\lfloor n-1/2 \rfloor} \binom{(n-1)-i}{i} = S_{n-2} + S_{n-1}.$$

Daí, concluímos que S_n é a sequência de Fibonacci (i.e., $S_n = F_n$). ■

O exemplo a seguir tem por finalidade dar uma alternativa para o teorema da soma “alternante” nas linhas, caso se queira calcular o somatório até um determinado termo e, não necessariamente, todos os termos da linha, ilustrado a seguir. (*Tal ilustração sugere que somando e subtraindo alternadamente os elementos de uma mesma linha obtemos o elemento situado acima da última parcela, mantendo o sinal da mesma.*)

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & -1 & & & \\
+1 & -4 & +6 & -4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Exemplo 3.1.2. Mostre que, para quaisquer que sejam os inteiros n e k tais que $n > k \geq 0$, temos

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = (-1)^k \cdot \binom{n-1}{k}.$$

Solução. Considerando $S_{n,k} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot \binom{n}{i}$ para $n > k \geq 0$, temos que

$$S_{n,k} = \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \cdot \binom{n}{i},$$

e, aplicando a relação de Stifel ao termo geral do somatório, concluímos que

$$\begin{aligned}
S_{n,k} &= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \cdot \binom{n-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \cdot \binom{n-1}{i} \\
&= \binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \cdot \binom{n-1}{i-1} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \cdot \binom{n-1}{i} \\
&= (-1) \cdot \sum_{i-1=0}^{k-1}(-1)^{i-1} \cdot \binom{n-1}{i-1} + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \cdot \binom{n-1}{i} + (-1)^k \cdot \binom{n-1}{k},
\end{aligned}$$

e ainda, fazendo a mudança de variável em um dos somatórios, concluímos que

$$S_{n,k}=(-1)\cdot\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\cdot\binom{n-1}{i}+\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\cdot\binom{n-1}{i}+(-1)^k\cdot\binom{n-1}{k}$$

$$=(-1)\cdot S_{n-1,k-1}+S_{n-1,k-1}+(-1)^k\cdot\binom{n-1}{k}=(-1)^k\cdot\binom{n-1}{k},$$

onde queríamos chegar. ■

Exemplo 3.1.3. Mostre que, para quaisquer que sejam os inteiros n e k tais que $n\geq k\geq 1$, temos

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

Solução. De forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando (sucessivamente) as relações de Stifel e Fermat, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

$$=\binom{n-1}{k-1}+\frac{(n-1)-(k-1)}{(k-1)+1}\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

$$=\frac{k}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}+\frac{n-k}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1},$$

onde queríamos chegar. ■

Exemplo 3.1.4. Mostre que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n\geq 0$, temos

$$\sum_{i=0}^{n}i\cdot\binom{n}{i}=0\cdot\binom{n}{0}+1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+\ldots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}.$$

Solução. Considerando $S_n=\sum_{i=0}^{n}i\cdot\binom{n}{i}$ para $n\geq 0$, temos que

$$S_n=0\cdot\binom{n}{0}+\sum_{i=1}^{n}i\cdot\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}i\cdot\binom{n}{i},$$

e, aplicando o resultado obtido do exemplo 3.1.3 ao termo geral do somatório, concluímos que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{n}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1}$$

$$= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} = n \cdot \sum_{i-1=0}^{n-1} \binom{n-1}{i-1},$$

e ainda, fazendo a mudança de variável no somatório, concluímos que

$$S_n = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}.$$

Daí, pelo teorema da soma nas linhas, segue que $S_n = n \cdot 2^{n-1}$. ■

Exemplo 3.1.5. Mostre que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n \geq 2$, temos

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} = 0 \cdot \binom{n}{0} - 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} - 3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \cdot n \cdot \binom{n}{n} = 0.$$

Solução. Considerando $S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i}$ para $n \geq 2$, temos que

$$S_n = 0 \cdot \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i},$$

e, aplicando o resultado obtido do exemplo 3.1.3 ao termo geral do somatório, concluímos que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \frac{n}{i} \cdot \binom{n-1}{i-1} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n-1}{i-1}$$

$$= n \cdot (-1) \cdot \sum_{i-1=0}^{n-1} (-1)^{i-1} \cdot \binom{n-1}{i-1},$$

e ainda, fazendo a mudança de variável no somatório, concluímos que

$$S_n = (-n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \cdot \binom{n-1}{i}.$$

Daí, pelo teorema da soma "alternante" nas linhas, segue que $S_n = (-n) \cdot 0 = 0$. ■

Exemplo 3.1.6. Mostre que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n \geq 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Solução. Considerando $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$ para $n \geq 1$, temos que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1}.$$

Daí, pelo teorema da soma nas colunas, segue que

$$S_n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)\cdot n}{2!} = \frac{n\cdot(n+1)}{2},$$

obtendo o resultado desejado. ■

Exemplo 3.1.7. Mostre que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n \geq 2$, temos

$$\sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i+1) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + (n-1)\cdot n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}.$$

Solução. Considerando $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i+1)$ para $n \geq 2$, temos que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} 2\cdot\frac{i\cdot(i+1)}{2}$$

$$= 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i+1}{2} = 2\cdot\sum_{i+1=2}^{n}\binom{i+1}{2},$$

e, fazendo a mudança de variável no somatório, concluímos que

$$S_n = 2\cdot\sum_{i=2}^{n}\binom{i}{2}.$$

Daí, pelo teorema da soma nas colunas, segue que

$$S_n = 2\cdot\binom{n+1}{3} = 2\cdot\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{3!} = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3},$$

obtendo o resultado desejado. ■

Exemplo 3.1.8. Mostre que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n \geq 1$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Solução. Considerando $S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$ para $n \geq 1$, temos que

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - i + i\right) = \sum_{i=1}^{n}(i-1)\cdot i + \sum_{i=1}^{n} i,$$

e, aplicando os resultados obtidos dos exemplos 3.1.6 e 3.1.7 aos somatórios, concluímos que

$$S_n = 2\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2},$$

e ainda, aplicando a relação de Fermat a um dos números binomiais, concluímos que

$$\begin{aligned} S_n &= 2\cdot\frac{(n+1)-2}{2+1}\cdot\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{2} \\ &= 2\cdot\frac{n-1}{3}\cdot\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{2} \\ &= \frac{2n+1}{3}\cdot\binom{n+1}{2} \\ &= \frac{2n+1}{3}\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2!} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}, \end{aligned}$$

obtendo o resultado desejado. ■

3.2 Binômio de Newton

Com o que foi visto até agora (ou seja, os números binomiais e o triângulo de Pascal), obteremos a fórmula para o desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, conhecido como *binômio de Newton*. Para tanto, observe alguns casos particulares que irão fornecer uma ideia de qual seja essa fórmula para que, em seguida, possamos demonstrá-la (algebricamente e combinatoriamente).

Lembrando que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n > 0$, podemos calcular

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n\text{ fatores}}$$

usando a propriedade distributiva da multiplicação, segue (consequentemente) os casos particulares:

- $(x+y)^0 = 1$;
- $(x+y)^1 = x+y$;
- $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$;

- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
- $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

Observando atentamente os termos em cada caso, percebemos alguns padrões no desenvolvimento do binômio, a saber:

- o desenvolvimento de $(x+y)^n$ possui $n+1$ termos;
- os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal;
- os termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$ são formados, além dos coeficientes, por $x^i y^j$ com $i = 0,1,2,\ldots,n-1,n$ e $j = n,n-1,\ldots,2,1,0$, segundo a ordem apresentada acima.

Desse modo, diante dos padrões mencionados acima, podemos conjecturar a fórmula do binômio de Newton, conhecida como *teorema binomial*, apresentada a seguir.

Proposição 3.2.1. Se x e y são números reais e n é um inteiro tal que $n \geq 0$, então

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot y^n.$$

Demonstração (algébrica). Considerando $S_m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot x^{m-i} \cdot y^i$ para $m \geq 0$, temos que

$$S_m = \binom{m}{0} \cdot x^m + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{i} \cdot x^{m-i} \cdot y^i + \binom{m}{m} \cdot y^m,$$

e, aplicando a relação de Stifel ao termo geral do somatório, concluímos que

$$S_m = \binom{m}{0} \cdot x^m + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i-1} \cdot x^{m-i} \cdot y^i + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot x^{m-i} \cdot y^i + \binom{m}{m} \cdot y^m$$

$$= \binom{m-1}{0} \cdot x^m + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i-1} \cdot x^{m-i} \cdot y^i + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot x^{m-i} \cdot y^i + \binom{m-1}{m-1} \cdot y^m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \binom{m-1}{i-1} \cdot x^{m-i} \cdot y^i + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot x^{m-i} \cdot y^i$$

$$= y \cdot \sum_{i-1=0}^{m-1} \binom{m-1}{i-1} \cdot x^{(m-1)-(i-1)} \cdot y^{i-1} + x \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot x^{(m-1)-i} \cdot y^{i} \,,$$

e ainda, fazendo a mudança de variável em um dos somatórios, concluímos que

$$S_m = y \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot x^{(m-1)-i} \cdot y^{i} + x \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot x^{(m-1)-i} \cdot y^{i}$$

$$= y \cdot S_{m-1} + x \cdot S_{m-1} = (x+y) \cdot S_{m-1} \,.$$

Daí, fazendo $m = 1, 2, \ldots, n$ no resultado obtido acima, chegamos às equações:

$$S_1 = (x+y) \cdot S_0$$

$$S_2 = (x+y) \cdot S_1$$

$$S_3 = (x+y) \cdot S_2$$

$$\vdots$$

$$S_{n-1} = (x+y) \cdot S_{n-2}$$

$$S_n = (x+y) \cdot S_{n-1} \,.$$

Assim, aplicando o produto telescópico, ou seja, multiplicando (membro a membro) as n equações acima e eliminando os fatores comuns em ambos os membros, concluímos que $S_n = (x+y)^n \cdot S_0$ e, como

$$S_0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} \cdot x^{-i} \cdot y^{i} = \binom{0}{0} \cdot x^{0} \cdot y^{0} = 1$$

segue (consequentemente) que $S_n = (x+y)^n$, completando a demonstração. ■

Demonstração (combinatória). Inicialmente, sabemos que $(x+y)^0 = 1$ e, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n > 0$, podemos calcular

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \cdot (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{n \text{ fatores}} \,,$$

obtendo um somatório de termos, onde cada termo do produto acima é obtido escolhendo um dos dois elementos em cada fator (a saber, x ou y) e, em seguida, multiplicando os elementos escolhidos. Se, para cada inteiro i tal que $0 \le i \le n$, escolhermos y em i dos n fatores (o que pode ser feito de $C_{n,i}$ maneiras), consequentemente, x será escolhido nos $n-i$ fatores restantes (o que pode ser feito de $C_{n-i,n-i} = 1$ maneira) e, em seguida, multiplicando os n elementos escolhidos, obtemos o resultado $x^{n-i} \cdot y^{i}$. Desse modo, somando os termos semelhantes, concluímos que o coeficiente de cada um dos termos gerados é (precisamente) o número de maneiras de escolhermos os n elementos que formam o termo (a saber, $C_{n,i} \cdot C_{n-i,n-i} = C_{n,i} \cdot 1 = C_{n,i}$ maneiras), i.e.,

$$\left(x+y\right)^{n} = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i} \cdot x^{n-i} \cdot y^{i},$$

obtendo o resultado desejado. ■

Fazendo a troca de y por $-y$ na proposição anterior, concluímos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.1. Se x e y são números reais e n é um inteiro tal que $n \geq 0$, então

$$\left(x-y\right)^{n} = \sum_{i=0}^{n} \left(-1\right)^{i} \cdot \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^{i} = \binom{n}{0} \cdot x^{n} - \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^{1} + \ldots + \left(-1\right)^{n} \cdot \binom{n}{n} \cdot y^{n}.$$

A próxima fórmula que apresentaremos é conhecida como *identidade de Vandermonde*.

Proposição 3.2.2. Se m, n e k são inteiros tais que $m \geq k \geq 0$ e $n \geq k \geq 0$, então

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i} = \binom{m}{0} \cdot \binom{n}{k} + \binom{m}{1} \cdot \binom{n}{k-1} + \ldots + \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

Demonstração (algébrica). Inicialmente, observe a identidade

$$\left(1+x\right)^{m} \cdot \left(1+x\right)^{n} \equiv \left(1+x\right)^{m+n},$$

significando que os termos de mesmo grau em cada membro possuem os mesmos coeficientes, ou seja, se

$$\left(1+x\right)^{m} \cdot \left(1+x\right)^{n} = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + \ldots + A_k \cdot x^k + \ldots + A_{m+n} \cdot x^{m+n}$$

e

$$\left(1+x\right)^{m+n} = B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot x^2 + \ldots + B_k \cdot x^k + \ldots + B_{m+n} \cdot x^{m+n},$$

então

$$A_i = B_i \text{ para } 0 \leq i \leq m+n.$$

Daí, aplicando o teorema binomial ao membro da direita, obtemos

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} \cdot x^i \,,$$

onde o coeficiente do termo de grau k é dado por

$$B_k = \binom{m+n}{k}.$$

Por outro lado, aplicando o teorema binomial ao membro da esquerda, obtemos

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot x^j \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \cdot x^l \right),$$

onde o termo de grau k é obtido do produto entre o termo de grau i do binômio $(1+x)^m$ e o termo de grau $k-i$ do binômio $(1+x)^n$ para $0 \le i \le k$, ou seja, o coeficiente do termo de grau k é dado por

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i}.$$

Portanto, pela identidade observada inicialmente, concluímos que $A_k = B_k$, i.e.,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k},$$

completando a demonstração. ■

Demonstração (combinatória). Considere um grupo formado por m homens e n mulheres, e ainda, que desejamos escolher k pessoas desse grupo, o que pode ser feito de $C_{m+n,k}$ maneiras. Por outro lado, se escolhermos k pessoas desse grupo, sendo i homens e $k-i$ mulheres, isto pode ser feito de $C_{m,i} \cdot C_{n,k-i}$ maneiras. Daí, adicionando tais possibilidades, para $0 \le i \le k$, concluímos que

$$\sum_{i=0}^{k} C_{m,i} \cdot C_{n,k-i} = C_{m+n,k} \,,$$

obtendo o resultado desejado. ■

Como corolário da proposição anterior, fazendo $m = k = n$ e lembrando a consequência entre binomiais complementares, i.e.,

$$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i},$$

apresentamos a próxima fórmula, conhecida como *identidade de Lagrange*.

Corolário 3.2.2. Se n é inteiro tal que $n \geq 0$, então

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Os exemplos a seguir são ilustrações das proposições mencionadas anteriormente.

Exemplo 3.2.1. Mostre, utilizando o teorema binomial, a proposição 3.1.3: se n é inteiro tal que $n \geq 0$, então

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Solução. No desenvolvimento binomial (proposição 3.2.1)

$$(x + y)^n \equiv \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i,$$

fazendo $x = y = 1$, concluímos que

$$(1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot 1^i,$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

conforme desejado. ■

Exemplo 3.2.2. Mostre, utilizando o teorema binomial, a proposição 3.1.4: se n é inteiro tal que $n \geq 1$, então

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0.$$

Solução. No desenvolvimento binomial (corolário 3.2.1)

$$(x - y)^n \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i,$$

fazendo $x = y = 1$, concluímos que

$$(1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot 1^i ,$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} = 0 ,$$

conforme desejado. ■

Exemplo 3.2.3. Mostre, utilizando o teorema binomial, o exemplo 3.1.4: para qualquer que seja o inteiro n tal que $n \geq 0$, temos

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + n \cdot \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1} .$$

Solução. Considere a função f definida por $f(x) = (1+x)^n$ que, segundo o teorema binomial, temos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i .$$

Derivando a função f por um lado, concluímos que

$$f'(x) = n \cdot (1+x)^{n-1},$$

por outro lado, concluímos que

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} \cdot x^{i-1} ,$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} \cdot x^{i-1} \equiv n \cdot (1+x)^{n-1} .$$

Agora, fazendo $x = 1$, concluímos que

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} \cdot 1^{i-1} = n \cdot (1+1)^{n-1} ,$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1} ,$$

conforme desejado. ■

Exemplo 3.2.4. Mostre, utilizando o teorema binomial, o exemplo 3.1.5: para qualquer que seja o inteiro n tal que $n \geq 2$, temos

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} = 0 \cdot \binom{n}{0} - 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} - 3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n \cdot n \cdot \binom{n}{n} = 0 .$$

Solução. Considere a função f definida por $f(x) = (1-x)^n$ que, segundo o teorema binomial, temos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot x^i .$$

Derivando a função f por um lado, concluímos que

$$f'(x) = -n \cdot (1-x)^{n-1},$$

por outro lado, concluímos que

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} \cdot x^{i-1},$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} \cdot x^{i-1} \equiv -n \cdot (1-x)^{n-1}.$$

Agora, fazendo $x = 1$, concluímos que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} \cdot 1^{i-1} = -n \cdot (1-1)^{n-1},$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot i \cdot \binom{n}{i} = 0,$$

conforme desejado. ■

4 NÚMEROS MULTINOMIAIS

Neste capítulo, apresentaremos os *números trinomiais* generalizando para os *números multinomiais*, a organização desses números (trinomiais) numa tabela tridimensional denominada *pirâmide de Pascal* e a fórmula para a expansão trinomial generalizando para a expansão multinomial, conhecida como *polinômio de Leibniz*.

Inicialmente, devemos observar que o número binomial poderia ser definido, para i e j naturais, por

$$\binom{n}{i,j} = \frac{n!}{i!\cdot j!} \text{ com } i+j=n,$$

pois, de fato, fazendo $i=k$ e (consequentemente) $j=n-k$, segue que

$$\binom{n}{k,n-k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

sendo equivalente à definição usual de número binomial vista no capítulo anterior.

Analogamente, podemos definir o *número trinomial*, para i, j e k naturais, por

$$\binom{n}{i,j,k} = \frac{n!}{i!\cdot j!\cdot k!} \text{ com } i+j+k=n,$$

e, generalizando, podemos definir o *número multinomial*, para n_i natural, qualquer que seja i, por

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!} \text{ com } n_1+n_2+\ldots+n_k=n,$$

onde n representa a *ordem* e n_i representam as *classes* do número multinomial.

Observe que a definição de número multinomial corresponde ao produto de várias combinações simples, i.e.,

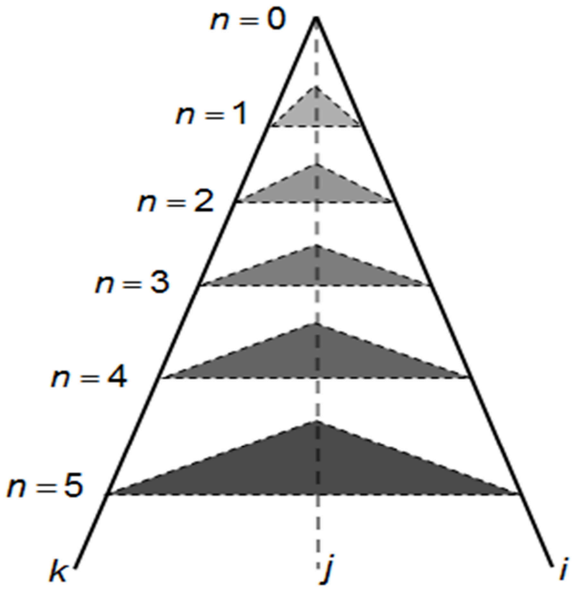
$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\ldots\cdot\binom{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}{n_k},$$

significando o número de maneiras de particionarmos (ordenadamente) os n elementos de um conjunto A em k subconjuntos A_i com $|A_i|=n_i$, onde uma *partição ordenada* de A é uma sequência $\left(A_1, A_2, \ldots, A_k\right)$ formada por subconjuntos de A tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ e $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = A$.

4.1 Pirâmide de Pascal

Com os números trinomiais definidos anteriormente, construímos (agora) uma tabela (numérica) piramidal, denominada *pirâmide de Pascal* (versão tridimensional do triângulo de Pascal), dispondo-os de tal forma que aqueles de mesma ordem situam-se na mesma camada (secções transversais triangulares, exceto a camada inicial), levando em consideração o crescimento das ordens (camadas numeradas de cima para baixo, começando em zero), de modo que suas faces (triangulares) sejam triângulos de Pascal.

Desse modo, segundo a descrição mencionada acima, as primeiras camadas da pirâmide de Pascal ficam com o formato ilustrado abaixo e, em seguida, especificamos como ficam distribuídos os números trinomiais, bem como seus respectivos valores numéricos, em tais camadas.



Camada 0:

$$\binom{0}{0,0,0} \Leftrightarrow 1$$

Camada 1:

$$\begin{array}{c} \binom{1}{0,1,0} \\ \binom{1}{0,0,1} \quad \binom{1}{1,0,0} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

Camada 2:

$$\begin{array}{c} \binom{2}{0,2,0} \\ \binom{2}{0,1,1} \quad \binom{2}{1,1,0} \\ \binom{2}{0,0,2} \quad \binom{2}{1,0,1} \quad \binom{2}{2,0,0} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 2 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

Camada 3:

$$\begin{array}{c} \binom{3}{0,3,0} \\ \binom{3}{0,2,1} \quad \binom{3}{1,2,0} \\ \binom{3}{0,1,2} \quad \binom{3}{1,1,1} \quad \binom{3}{2,1,0} \\ \binom{3}{0,0,3} \quad \binom{3}{1,0,2} \quad \binom{3}{2,0,1} \quad \binom{3}{3,0,0} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 3 \quad 3 \\ 3 \quad 6 \quad 3 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array}$$

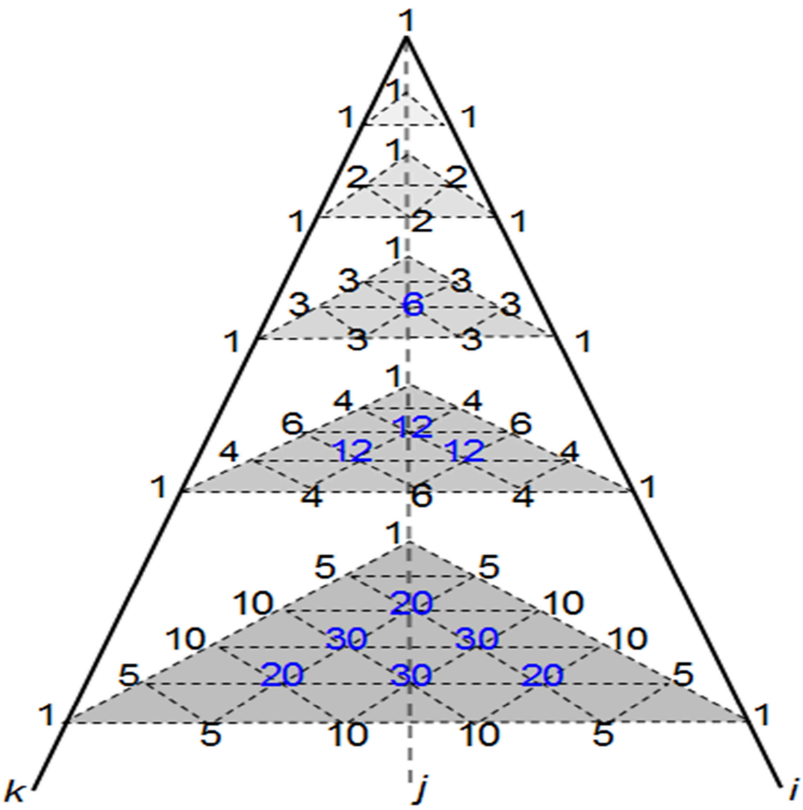
Camada 4:

$$\begin{array}{c} \binom{4}{0,4,0} \\ \binom{4}{0,3,1} \quad \binom{4}{1,3,0} \\ \binom{4}{0,2,2} \quad \binom{4}{1,2,1} \quad \binom{4}{2,2,0} \\ \binom{4}{0,1,3} \quad \binom{4}{1,1,2} \quad \binom{4}{2,1,1} \quad \binom{4}{3,1,0} \\ \binom{4}{0,0,4} \quad \binom{4}{1,0,3} \quad \binom{4}{2,0,2} \quad \binom{4}{3,0,1} \quad \binom{4}{4,0,0} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 4 \quad 4 \\ 6 \quad 12 \quad 6 \\ 4 \quad 12 \quad 12 \quad 4 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

Camada 5:

$$
\begin{array}{c}
\binom{5}{0,5,0} \\
\binom{5}{0,4,1} \quad \binom{5}{1,4,0} \\
\binom{5}{0,3,2} \quad \binom{5}{1,3,1} \quad \binom{5}{2,3,0} \\
\binom{5}{0,2,3} \quad \binom{5}{1,2,2} \quad \binom{5}{2,2,1} \quad \binom{5}{3,2,0} \\
\binom{5}{0,1,4} \quad \binom{5}{1,1,3} \quad \binom{5}{2,1,2} \quad \binom{5}{3,1,1} \quad \binom{5}{4,1,0} \\
\binom{5}{0,0,5} \quad \binom{5}{1,0,4} \quad \binom{5}{2,0,3} \quad \binom{5}{3,0,2} \quad \binom{5}{4,0,1} \quad \binom{5}{5,0,0}
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c}
1 \\
5 \quad 5 \\
10 \quad 20 \quad 10 \\
10 \quad 30 \quad 30 \quad 10 \\
5 \quad 20 \quad 30 \quad 20 \quad 5 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}
$$

Dessa forma, segue a ilustração da pirâmide de Pascal contendo os valores numéricos dos números trinomiais mencionados acima.

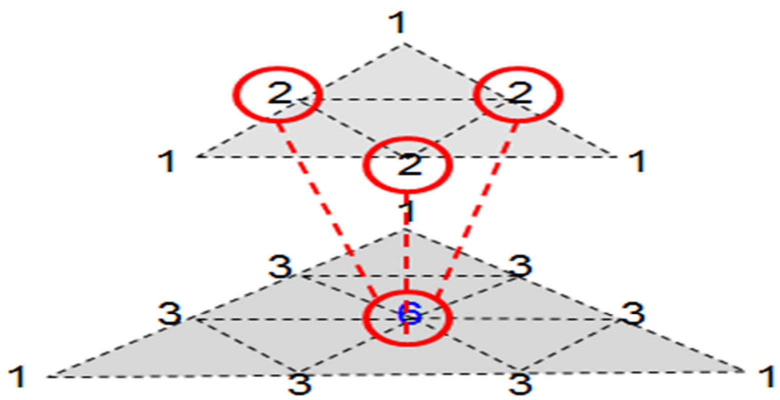


Convém (também) destacar que a distribuição dos números trinomiais em cada camada (exceto a inicial) é feita sob o formato de um triângulo equilátero, mantendo uma simetria sob a perspectiva (quando i ou j ou k é constante) de qualquer um dos três lados, de forma análoga ao que acontece no triângulo de Pascal devido aos binomiais complementares, i.e.,

$$\binom{n}{i,j,k}=\binom{n}{i,k,j},\ \binom{n}{i,j,k}=\binom{n}{k,j,i}\ \text{e}\ \binom{n}{i,j,k}=\binom{n}{j,i,k}.$$

Observando atentamente a pirâmide de Pascal, algumas propriedades surgem tão naturalmente quanto as propriedades do triângulo de Pascal e, assim como fizemos com as propriedades do triângulo (de Pascal), faremos as demonstrações das propriedades da pirâmide (de Pascal) através das abordagens algébrica e combinatória.

Inicialmente, apresentaremos a propriedade análoga à relação de Stifel no triângulo de Pascal, ilustrada a seguir. (*Tal ilustração sugere que cada elemento no interior de uma camada é obtido somando os três elementos adjacentes na camada anterior.*)



Proposição 4.1.1. Se i, j e k são naturais não nulos tais que $i+j+k=n$, então

$$\binom{n-1}{i-1,j,k}+\binom{n-1}{i,j-1,k}+\binom{n-1}{i,j,k-1}=\binom{n}{i,j,k}.$$

Demonstração (algébrica). De forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando a definição de número trinomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\binom{n-1}{i-1,j,k}+\binom{n-1}{i,j-1,k}+\binom{n-1}{i,j,k-1}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(i-1)!\cdot j!\cdot k!}+\frac{(n-1)!}{i!\cdot(j-1)!\cdot k!}+\frac{(n-1)!}{i!\cdot j!\cdot(k-1)!}$$

$$=\frac{i}{i}\cdot\frac{(n-1)!}{(i-1)!\cdot j!\cdot k!}+\frac{j}{j}\cdot\frac{(n-1)!}{i!\cdot(j-1)!\cdot k!}+\frac{k}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{i!\cdot j!\cdot(k-1)!}$$

$$=i\cdot\frac{(n-1)!}{i!\cdot j!\cdot k!}+j\cdot\frac{(n-1)!}{i!\cdot j!\cdot k!}+k\cdot\frac{(n-1)!}{i!\cdot j!\cdot k!}$$

$$=(i+j+k)\cdot\frac{(n-1)!}{i!\cdot j!\cdot k!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{i!\cdot j!\cdot k!}$$

$$=\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot k!}=\binom{n}{i,j,k},$$

onde queríamos chegar. ■

Demonstração (combinatória). Considere um grupo formado por n pessoas, sendo $n-1$ homens e 1 mulher, e ainda, que desejamos distribuir (particionar) essas pessoas em três salas (a saber, A com i pessoas, B com j pessoas e C com k pessoas), o que pode ser feito de $C_{n,i}\cdot C_{n-i,j}\cdot C_{n-i-j,k}$ maneiras, onde

$$C_{n,i}\cdot C_{n-i,j}\cdot C_{n-i-j,k}=\binom{n}{i,j,k}.$$

Por outro lado, se distribuirmos essas pessoas nas salas, especificando em qual sala a mulher deve ficar, teríamos os seguintes casos:

(a) de modo que a mulher fique na sala A, o que pode ser feito de $C_{n-1,i-1}\cdot C_{n-i,j}\cdot C_{n-i-j,k}$ maneiras, onde

$$C_{n-1,i-1}\cdot C_{n-i,j}\cdot C_{n-i-j,k}=\binom{n-1}{i-1,j,k};$$

(b) de modo que a mulher fique na sala B, o que pode ser feito de $C_{n-1,i}\cdot C_{n-1-i,j-1}\cdot C_{n-i-j,k}$ maneiras, onde

$$C_{n-1,i}\cdot C_{n-1-i,j-1}\cdot C_{n-i-j,k}=\binom{n-1}{i,j-1,k};$$

(c) de modo que a mulher fique na sala C, o que pode ser feito de $C_{n-1,i}\cdot C_{n-1-i,j}\cdot C_{n-1-i-j,k-1}$ maneiras, onde

$$C_{n-1,i}\cdot C_{n-1-i,j}\cdot C_{n-1-i-j,k-1}=\binom{n-1}{i,j,k-1}.$$

Como as distribuições dessas pessoas só podem ocorrer dentre uma das possibilidades (a), (b) ou (c), segue que

$$\binom{n-1}{i-1,j,k}+\binom{n-1}{i,j-1,k}+\binom{n-1}{i,j,k-1}=\binom{n}{i,j,k},$$

conforme desejado. ■

A próxima propriedade que apresentaremos é análoga à relação de Fermat no triângulo de Pascal.

Proposição 4.1.2. Se i, j e k são naturais tais que $i+j+k=n$, então

(i) $\binom{n}{i,j-1,k+1}=\frac{j}{k+1}\cdot\binom{n}{i,j,k}$, para $i\geq 0$ (constante), $k\geq 0$ e $j>0$;

(ii) $\binom{n}{i+1,j,k-1}=\frac{k}{i+1}\cdot\binom{n}{i,j,k}$, para $j\geq 0$ (constante), $i\geq 0$ e $k>0$;

(iii) $\binom{n}{i-1,j+1,k}=\frac{i}{j+1}\cdot\binom{n}{i,j,k}$, para $k\geq 0$ (constante), $j\geq 0$ e $i>0$.

Demonstração (algébrica). Inicialmente, observe que, por simetria, basta demonstrarmos um (por exemplo, o segundo) dos três resultados acima e, de forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade, aplicando a definição de número trinomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\begin{aligned}\binom{n}{i+1,j,k-1}&=\frac{n!}{(i+1)!\cdot j!\cdot(k-1)!}\\&=\frac{k}{k}\cdot\frac{n!}{(i+1)\cdot i!\cdot j!\cdot(k-1)!}\\&=\frac{k}{i+1}\cdot\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot k!}=\frac{k}{i+1}\cdot\binom{n}{i,j,k},\end{aligned}$$

onde queríamos chegar. ■

Demonstração (combinatória). Assim como fizemos na demonstração algébrica, basta demonstrarmos o segundo dos três resultados e, para isso, considere um grupo formado por n pessoas, e ainda, que desejamos distribuir (particionar) essas pessoas em três salas (a saber, A com i pessoas, B com j pessoas e C com k pessoas) e, em seguida, escolher (da sala C) o líder dessas n pessoas, o que pode ser feito de $k \cdot C_{n,i} \cdot C_{n-i,j} \cdot C_{n-i-j,k}$ maneiras, onde

$$k \cdot C_{n,i} \cdot C_{n-i,j} \cdot C_{n-i-j,k} = k \cdot \binom{n}{i,j,k}.$$

Por outro lado, poderíamos distribuir essas pessoas nas salas, de modo que a sala C ficasse com $k-1$ pessoas e uma das outras salas (no caso, A) ficasse com 1 pessoa a mais que na distribuição original ($i+1$ pessoas) e, em seguida, escolheríamos (da sala A) o líder dessas n pessoas transferindo-o para a sala C (ficando as salas A, B e C com i, j e k pessoas, respectivamente), o que pode ser feito de $(i+1) \cdot C_{n,i+1} \cdot C_{n-i-1,j} \cdot C_{n-i-1-j,k-1}$, onde

$$(i+1) \cdot C_{n,i+1} \cdot C_{n-i-1,j} \cdot C_{n-i-1-j,k-1} = (i+1) \cdot \binom{n}{i+1,j,k-1}.$$

Portanto, como a distribuição das pessoas e a escolha do líder são idênticas, diferindo (apenas) nos procedimentos, segue que

$$(i+1) \cdot \binom{n}{i+1,j,k-1} = k \cdot \binom{n}{i,j,k},$$

sendo equivalente ao que queríamos demonstrar. ■

Como corolário da proposição anterior, apresentamos a próxima propriedade, verificando que ao longo de qualquer linha em cada camada, sob a perspectiva de qualquer um dos três lados (em particular, j constante), os elementos crescem até a metade e decrescem a partir da metade, ou seja, os elementos crescem quando

$$\frac{k}{i+1} > 1 \text{ ou, equivalentemente, } i < \frac{n-j-1}{2}$$

e, em seguida, os elementos decrescem quando

$$\frac{k}{i+1} < 1 \text{ ou, equivalentemente, } i > \frac{n-j-1}{2}$$

onde o elemento máximo, para $n-j$ par, é

$$\binom{n}{\frac{n-j}{2},j,\frac{n-j}{2}}$$

e, para $n-j$ ímpar, é

$$\binom{n}{\frac{n-j-1}{2},j,\frac{n-j+1}{2}}=\binom{n}{\frac{n-j+1}{2},j,\frac{n-j-1}{2}}.$$

Corolário 4.1.1. Se i, j e k são naturais tais que $i+j+k=n$, então

$$\binom{n}{i+1,j,k-1}>\binom{n}{i,j,k} \text{ se } i<\frac{n-j-1}{2} \text{ e } \binom{n}{i+1,j,k-1}<\binom{n}{i,j,k} \text{ se } i>\frac{n-j-1}{2}.$$

A próxima propriedade que apresentaremos relaciona os elementos de uma camada da pirâmide (de Pascal) com os elementos do triângulo (de Pascal), ilustrada a seguir. (*Tal ilustração sugere que os elementos da camada* n *da pirâmide são obtidos multiplicando todos os elementos até a linha* n *do triângulo pelos elementos da linha* n *do triângulo, respectivamente.*)

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \\ 1 & 3 & & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array} \quad \times \quad \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 4 & & 4 & \\ 6 & & 12 & & 6 \\ 4 & 12 & & 12 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Proposição 4.1.3. Se i, j e k são naturais tais que $i+j+k=n$, então

$$\binom{n}{i,j,k}=\binom{n-j}{i,k}\cdot\binom{n}{j}.$$

Demonstração (algébrica). De forma direta, partiremos do primeiro membro da igualdade acima, aplicando a definição de número trinomial e binomial, e chegaremos ao segundo membro, obtendo:

$$\binom{n}{i,j,k} = \frac{n!}{i!\cdot j!\cdot k!}$$

$$= \frac{(n-j)!}{(n-j)!}\cdot\frac{n!}{i!\cdot j!\cdot k!}$$

$$= \frac{(n-j)!}{i!\cdot k!}\cdot\frac{n!}{j!\cdot(n-j)!} = \binom{n-j}{i,k}\cdot\binom{n}{j},$$

onde queríamos chegar. ■

Demonstração (combinatória). Considere um grupo formado por n pessoas e que desejamos distribuir (particionar) essas pessoas em três salas (a saber, A com i pessoas, B com j pessoas e C com k pessoas), o que pode ser feito de $C_{n,i}\cdot C_{n-i,j}\cdot C_{n-i-j,k}$ maneiras, onde

$$C_{n,i}\cdot C_{n-i,j}\cdot C_{n-i-j,k} = \binom{n}{i,j,k}.$$

Observe que começamos escolhendo as pessoas que devem ficar na sala A, em seguida, as pessoas que devem ficar na sala B e, por fim, as pessoas que devem ficar na sala C. Por outro lado, como não importa a ordem em que essas pessoas serão distribuídas nas salas, segue que começando pela escolha das pessoas na sala B, em seguida, as pessoas na sala A e, por fim, as pessoas na sala C, teríamos $C_{n,j}\cdot C_{n-j,i}\cdot C_{n-j-i,k}$ maneiras. Daí, sabendo que

$$C_{n,j} = \binom{n}{j,n-j} = \binom{n}{j},$$

e, utilizando o fato de $i+j+k=n$, também que

$$C_{n-j,i} = \binom{n-j}{i,n-j-i} = \binom{n-j}{i,k} \text{ e } C_{n-j-i,k} = \binom{n-j-i}{k,n-j-i-k} = \binom{k}{k,0} = 1,$$

concluímos que

$$C_{n,j}\cdot C_{n-j,i}\cdot C_{n-j-i,k} = \binom{n}{j}\cdot\binom{n-j}{i,k},$$

Portanto, como a distribuição das pessoas são idênticas, diferindo (apenas) nos procedimentos, segue que

$$\binom{n}{i,j,k} = \binom{n-j}{i,k}\cdot\binom{n}{j},$$

conforme desejado. ■

Como corolário da proposição anterior, utilizando o resultado obtido no exemplo 3.1.6, apresentamos a próxima propriedade, verificando que o número de elementos da camada n da pirâmide (de Pascal) é igual ao número de elementos até a linha n do triângulo (de Pascal), onde cada linha i do triângulo possui $i+1$ elementos.

Corolário 4.1.2. O número de elementos da camada n da pirâmide de Pascal é dado por

$$\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

A próxima propriedade que apresentaremos é análoga ao teorema da soma nas linhas, no triângulo de Pascal.

Proposição 4.1.4. Se i, j e k são naturais tais que $i+j+k=n$, então

$$\sum_{i,j,k}\binom{n}{i,j,k}=3^n.$$

Demonstração (algébrica). Considere

$$S_n=\sum_{i,j,k}\binom{n}{i,j,k}$$

com $i+j+k=n$. Aplicando a propriedade anterior ao termo geral do somatório, temos que

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{i,j,k}\binom{n-j}{i,k}\cdot\binom{n}{j}\\&=\sum_{j}\sum_{i,k}\binom{n-j}{i,k}\cdot\binom{n}{j}\\&=\sum_{j}\left[\binom{n}{j}\cdot\sum_{i,k}\binom{n-j}{i,k}\right],\end{aligned}$$

e, aplicando o teorema da soma nas linhas no triângulo de Pascal ao somatório no interior dos colchetes, concluímos que

$$S_n = \sum_j \binom{n}{j} \cdot 2^{n-j} \text{ ,}$$

e ainda, aplicando o teorema binomial ao somatório restante, concluímos que

$$S_n = (1+2)^n = 3^n \text{,}$$

obtendo o resultado desejado. ■

Demonstração (combinatória). Como

$$\binom{n}{i,j,k}$$

significa o número de maneiras de particionarmos (ordenadamente) os n elementos de um conjunto S em 3 subconjuntos (a saber, A com i elementos, B com j elementos e C com k elementos), segue que

$$\sum_{i,j,k} \binom{n}{i,j,k}$$

significa o número total de partições (ordenadas) de S. Por outro lado, para formar uma partição (ordenada) de S devemos, para cada um dos n elementos, escolher a qual subconjunto ele pertence (a saber, A ou B ou C), o que pode ser feito de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = 3^n$ maneiras, obtendo o resultado desejado. ■

4.2 Polinômio de Leibniz

Com o que foi visto até agora (ou seja, os números trinomiais e a pirâmide de Pascal), obteremos a fórmula para o desenvolvimento do trinômio $(x+y+z)^n$. Para tanto, observe alguns casos particulares que irão fornecer uma ideia de qual seja essa fórmula para que, em seguida, possamos demonstrá-la (algebricamente e combinatoriamente).

Lembrando que, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n > 0$, podemos calcular

$$(x+y+z)^n = \underbrace{(x+y+z) \cdot (x+y+z) \cdot \ldots \cdot (x+y+z)}_{n \text{ fatores}}$$

usando a propriedade distributiva da multiplicação, segue (consequentemente) os casos particulares:

- $(x+y+z)^0 = 1$;
- $(x+y+z)^1 = x+y+z$;
- $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$;
- $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2+3y^2z+3yz^2+6xyz$.

Observando atentamente os termos em cada caso, percebemos alguns padrões no desenvolvimento do trinômio, a saber:

- o desenvolvimento de $(x+y+z)^n$ possui $\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ termos;
- os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y+z)^n$ são os elementos da camada n da pirâmide de Pascal;
- os termos do desenvolvimento de $(x+y+z)^n$ são formados, além dos coeficientes, por $x^i y^j z^k$ com $i+j+k=n$.

Desse modo, diante dos padrões mencionados acima, podemos conjecturar a fórmula da expansão trinomial, conhecida como *teorema trinomial*, apresentada a seguir.

Proposição 4.2.1. Se x, y e z são números reais e n é um inteiro tal que $n \geq 0$, então

$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} \cdot x^i \cdot y^j \cdot z^k .$$

Demonstração (algébrica). Considerando

$$S_n = (x+y+z)^n = ((x+y)+z)^n$$

para $n \geq 0$, temos, aplicando o teorema binomial, que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (x+y)^{n-k} \cdot z^k ,$$

e, aplicando (novamente) o teorema binomial, concluímos que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \cdot x^{n-k-j} \cdot y^j \cdot z^k \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{n-k-j} \cdot y^{j} \cdot z^{k} \; ,$$

e ainda, fazendo $i = n - k - j$ juntamente com a proposição 4.1.3, i.e.,

$$\binom{n}{i,j,k} = \binom{n-k}{i,j} \cdot \binom{n}{k},$$

concluímos que

$$S_n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} \cdot x^{i} \cdot y^{j} \cdot z^{k} \; ,$$

obtendo o resultado desejado. ■

Demonstração (combinatória). Inicialmente, sabemos que $(x+y+z)^0 = 1$ e, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n > 0$, podemos calcular

$$(x+y+z)^n = \underbrace{(x+y+z)\cdot(x+y+z)\cdot\ldots\cdot(x+y+z)}_{n \text{ fatores}},$$

obtendo um somatório de termos, onde cada termo do produto acima é obtido escolhendo um dos três elementos em cada fator (a saber, x ou y ou z) e, em seguida, multiplicando os elementos escolhidos. Se, para cada inteiro k tal que $0 \le k \le n$, escolhermos z em k dos n fatores (o que pode ser feito de $C_{n,k}$ maneiras) e, para cada inteiro j tal que $0 \le j \le n-k$, escolhermos y em j dos $n-k$ fatores restantes (o que pode ser feito de $C_{n-k,j}$ maneiras), consequentemente, x será escolhido nos $n-k-j$ demais fatores (o que pode ser feito de $C_{n-k-j,n-k-j} = 1$ maneira) e, em seguida, multiplicando os n elementos escolhidos, obtemos o resultado $x^{n-k-j} y^{j} z^{k}$. Desse modo, somando os termos semelhantes, concluímos que o coeficiente de cada um dos termos gerados é (precisamente) o número de maneiras de escolhermos os n elementos que formam o termo, dado por $C_{n,k} \cdot C_{n-k,j} \cdot C_{n-k-j,n-k-j}$ maneiras, onde

$$C_{n,k} \cdot C_{n-k,j} \cdot C_{n-k-j,n-k-j} = \binom{n}{k,j,n-k-j},$$

e, fazendo $i = n - k - j$, concluímos que

$$(x+y+z)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{k,j,i} \cdot x^{n-k-j} \cdot y^{j} \cdot z^{k} = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i,j,k} \cdot x^{n-k-j} \cdot y^{j} \cdot z^{k} \; ,$$

onde na última igualdade utilizamos a simetria sob a perspectiva de um dos lados (j constante), completando a demonstração. ■

Observe que a proposição 4.1.4 pode ser obtida como corolário da proposição anterior, bastando fazer $x = y = z = 1$.

Corolário 4.2.1. Se i, j e k são naturais tais que $i + j + k = n$, então

$$\sum_{i,j,k} \binom{n}{i,j,k} = 3^n .$$

Agora, generalizando os teoremas binomial e trinomial, obtemos a fórmula da expansão multinomial, conhecida como *teorema multinomial* ou *polinômio de Leibniz*, apresentada a seguir.

Proposição 4.2.2. Se x_i (qualquer que seja i) é um número real e n é um inteiro tal que $n \geq 0$, então

$$\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_k\right)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k} .$$

Demonstração (algébrica). Faremos a demonstração por indução (ver Apêndice) em k com $k \geq 1$. Inicialmente, para $k = 1$, temos que ambos os membros são iguais a x_1^n, i.e.,

$$\left(x_1\right)^n = \sum_{n_1=n} \binom{n}{n_1} \cdot x_1^{n_1} .$$

Suponha, por hipótese de indução, que a proposição seja verdadeira para $k = r$, i.e.,

$$\left(x_1 + \ldots + x_r\right)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} \cdot x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r} .$$

Daí, para $k = r + 1$, temos que

$$\left(x_1 + \ldots + x_r + x_{r+1}\right)^n = \left(\left(x_1 + \ldots + x_r\right) + x_{r+1}\right)^n ,$$

e, aplicando o teorema binomial, concluímos que

$$\left(x_1+\ldots+x_r+x_{r+1}\right)^n=\sum_{n_{r+1}}\binom{n}{n_{r+1}}\cdot\left(x_1+\ldots+x_r\right)^{n-n_{r+1}}\cdot x_{r+1}{}^{n_{r+1}},$$

e ainda, aplicando a hipótese de indução, concluímos que

$$\begin{aligned}\left(x_1+\ldots+x_r+x_{r+1}\right)^n&=\sum_{n_{r+1}}\binom{n}{n_{r+1}}\cdot\sum_{n_1+\ldots+n_r=n-n_{r+1}}\binom{n-n_{r+1}}{n_1,\ldots,n_r}\cdot x_1{}^{n_1}\cdot\ldots\cdot x_r{}^{n_r}\cdot x_{r+1}{}^{n_{r+1}}\\&=\sum_{n_{r+1}}\sum_{n_1+\ldots+n_r=n-n_{r+1}}\binom{n}{n_{r+1}}\cdot\binom{n-n_{r+1}}{n_1,\ldots,n_r}\cdot x_1{}^{n_1}\cdot\ldots\cdot x_r{}^{n_r}\cdot x_{r+1}{}^{n_{r+1}}\\&=\sum_{n_1+\ldots+n_r+n_{r+1}=n}\binom{n}{n_1,\ldots,n_r,n_{r+1}}\cdot x_1{}^{n_1}\cdot\ldots\cdot x_r{}^{n_r}\cdot x_{r+1}{}^{n_{r+1}},\end{aligned}$$

fazendo com que a proposição também seja verdadeira para $k=r+1$, completando a demonstração. ■

Demonstração (combinatória). Inicialmente, sabemos que $\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)^0=1$ e, para qualquer que seja o inteiro n tal que $n>0$, podemos calcular

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)^n=\underbrace{\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)\cdot\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)}_{n\text{ fatores}},$$

obtendo um somatório de termos, onde cada termo do produto acima é obtido escolhendo um dos k elementos x_r em cada fator e, em seguida, multiplicando os elementos escolhidos. Assim, se escolhermos x_1 em n_1 fatores, escolhermos x_2 em n_2 fatores e, sucessivamente, até escolhermos x_k em n_k fatores, onde $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, obtemos, multiplicando os n elementos escolhidos, o resultado $x_1{}^{n_1}\cdot x_2{}^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_k{}^{n_k}$. Desse modo, somando os termos semelhantes, concluímos que o coeficiente de cada um dos termos gerados é (precisamente) o número de maneiras de escolhermos os n elementos que formam o termo, dado por $C_{n,n_1}\cdot C_{n-n_1,n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k}$ maneiras, onde

$$C_{n,n_1}\cdot C_{n-n_1,n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1},n_k}=\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k},$$

concluindo que

$$\left(x_1+x_2+\ldots+x_k\right)^n=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}\cdot x_1{}^{n_1}\cdot x_2{}^{n_2}\cdot\ldots\cdot x_k{}^{n_k},$$

obtendo o resultado desejado. ■

Fazendo $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$ na proposição anterior, concluímos o seguinte corolário.

Corolário 4.2.2. Se n_i (qualquer que seja i) é natural tal que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, então

$$\sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = k^n .$$

5 CONCLUSÃO

A forma como este trabalho foi apresentado teve como base anos de experiência como professor do Ensino Médio (especificamente, na maior parte desse tempo, no setor pré-universitário) trabalhando com alunos que apresentavam graves deficiências em Matemática (em particular, em Combinatória e Probabilidade), apesar de já terem contato anterior com tais assuntos. Muitas vezes, observava que esses alunos manifestavam conhecimento (apenas) de fórmulas, não entendendo suas aplicações, enquanto que em outras ocasiões, manifestavam total desconhecimento em tais assuntos e, boa parte deles, não era capaz de resolver problemas (elementares) de contagem do Ensino Fundamental (por exemplo, responder a quantidade de números inteiros de 17 a 71).

Apresento aqui apenas uma sugestão de como estes assuntos poderiam ser abordados, uma vez que conseguia significativamente grande sucesso na aprendizagem desses alunos e, muitas vezes, a admiração por esses assuntos atingindo, consequentemente, o entusiasmo pelo estudo dos mesmos. Apesar do assunto contido no capítulo 4 não fazer parte do currículo do Ensino Médio (apenas os assuntos contidos nos capítulos 2 e 3 fazem parte do currículo do Ensino Médio), para algumas turmas, notadamente aquelas formadas de alunos com aptidões para as disciplinas exatas (geralmente, preparatórias para as escolas militares), quando tal assunto era abordado, despertava entre eles uma vontade de aprofundar mais o conhecimento adquirido até o momento e, mesmo para aquelas turmas de alunos sem aptidões para as disciplinas exatas, quando tal assunto era abordado, pelo menos despertava uma admiração já ausente entre eles.

Considerado por alguns como um assunto em extinção, ressalto aqui a importância desses assuntos, uma vez que o teorema binomial e o teorema trinomial têm muitas aplicações na Matemática Aplicada. Por exemplo, em Genética, o aluno precisa calcular probabilidade binomial quando defronta com problemas com dois prognósticos possíveis (possui ou não uma determinada característica genética), enquanto que, em Economia, o aluno precisa calcular probabilidade trinomial quando defronta com problemas com três prognósticos possíveis (valorização, manutenção ou desvalorização de uma quantia aplicada na bolsa de valores).

Desse modo, acreditando que esse trabalho possa resgatar uma perspectiva desafiadora já ausente no corpo docente, espero que possa contribuir com novas perspectivas de atuação e, consequentemente, que possa constituir um tema instigante aos alunos, desenvolvendo de maneira significativa sua capacidade de concatenar as ideias e raciocinar logicamente.

APÊNDICE

O *princípio de Indução Matemática* (ou *princípio de Indução Finita* ou, simplesmente, *princípio de Indução*) é uma das ferramentas matemáticas utilizadas para demonstrações de proposições que envolvam uma variável inteira e, nesta obra, terá utilidade na demonstração algébrica do polinômio de Leibniz. Esta técnica de demonstração pode ser resumida conforme o enunciado a seguir.

Princípio de Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma proposição que dependa de uma variável inteira n. Supondo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(i) $P(n_0)$ é verdadeira;

(ii) $P(k+1)$ é verdadeira sempre que $P(k)$ é verdadeira com $k \geq n_0$;

então, $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro n tal que $n \geq n_0$.

A ideia é que ao tentarmos provar uma proposição relativa ao inteiro n, admitimos que tal proposição é verdadeira para seu antecessor $n-1$ (*hipótese de indução*), uma vez que já foi provado para um valor inicial.

REFERÊNCIAS

BOYER, C.B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, 1974.

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

HARRIS, J., HIRST, J.L. e MOSSINGHOFF, M. *Combinatorics and Graph Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2009.

HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 5: Combinatória e Probabilidade*. Atual, 2004.

KOSHY, T. *Discrete Mathematics with Applications*. Academic Press, 2004.

LOVÁSZ, L., PELIKÁN, J. e VESZTERGOMBI, K. *Matemática Discreta*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

MORGADO, A.C.O., CARVALHO J.B.P., CARVALHO e P.C.P., FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

SANTOS, J.P.O. e ESTRADA, E.L. *Problemas Resolvidos de Combinatória*. Ciência Moderna, 2007.

SANTOS, J.P.O., MELLO, M.P. e MURARI, I.T.C. *Introdução à Análise Combinatória*. Ciência Moderna, 2007.