



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FELIPE D'ANGELO HOLANDA

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS

FORTALEZA

2015

FELIPE D'ANGELO HOLANDA

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

H669i Holanda, Felipe D'Angelo
Introdução à geometria diferencial das curvas planas / Felipe D'Angelo Holanda. – 2015.
64 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Curvatura. 2. Fórmulas de Frenet. 3. Teorema fundamental das curvas planas. 4. Teorema de Jordan. I. Título.

CDD 516.36

FELIPE DANGELO HOLANDA

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

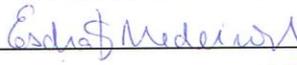
Aprovada em: 24 / 07 / 2015.

BANCA EXAMINADORA



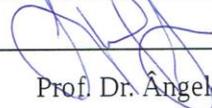
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho

Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Ângelo Papa Neto

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico esse trabalho primeiramente à Deus e logo em seguida minha família, composta por minha esposa Dany e meu filho Cauã, pelo qual me inspiro todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Como cristão, meus primeiros agradecimentos serão à Jesus Cristo, meu senhor e salvador, pois sem a sua misericórdia divina e diária jamais teria chegado até aqui.

Aos meus pais, Francisco e Angela, que infelizmente, mesmo não estando mais juntos como um casal, de um certo modo me transformaram no homem que sou hoje, batalhador e vencedor de inúmeros obstáculos que a vida nos proporciona, por isso dedico essa realização à eles.

Ao meu filho, Cauã, hoje com apenas 3 anos e 2 meses, motivo de bastante alegria em minha vida e grande motivador da realização desse projeto, pois através da conclusão posso galgar novos horizontes em busca de uma melhor qualidade de vida para mim e para minha família, especialmente para ele.

A minha esposa, Dany, que é uma pessoa muito especial em minha vida. A pessoa que mais me incetivou durante todo meu ensino superior. Esteve presente nesse processo desde à graduação, especialização e agora mestrado, sendo uma mulher bastante paciente, perseverante e sábia.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, meu professor e coordenador do PROFMAT da Universidade Federal do Ceará (UFC), pois num grande momento de dificuldade do curso ele estendeu à mão para mim ajudar. Sem comentar na grande personalidade que possui e grande professor que é.

E a CAPES pelo apoio financeiro e sua grande iniciativa, algo bastante significativo e incentivador para, principalmente, profissionais da rede pública.

Obrigado à todos!

Felipe D'angelo Holanda

RESUMO

A intenção desse trabalho será de abordar de forma básica e introdutória o estudo da Geometria Diferencial, que por sua vez tem seus estudos iniciados com as Curvas Planas. Será necessário um conhecimento de Cálculo Diferencial, Integral e Geometria Analítica para melhor compreensão desse trabalho, pois como seu próprio nome nos transparece Geometria Diferencial vem de uma junção do estudo da Geometria envolvendo Cálculo. Assim abordaremos subtemas como curvas suaves, vetor tangente, comprimento de arco passando por fórmulas de Frenet, curvas evolutas e involutas e finalizaremos com alguns teoremas importantes, como o teorema fundamental das curvas planas, teorema de Jordan e o teorema dos quatro vértices. O que, basicamente representa, o capítulo 1, 4 e 6 do livro Introdução às Curvas Planas de Hilário Alencar e Walcy Santos.

Palavras-chave: Geometria diferencial. Curvas planas. Fórmulas de Frenet. Teorema fundamental das curvas planas.

ABSTRACT

The intention of this work is to address in basic form and introductory study of Differential Geometry, which in turn has started his studies with Planas curves. It will require a knowledge of Differential Calculus, Integral and Analytic Geometry for better understanding of this work, because as its name says in Differential Geometry comes from the joint study of geometry involving Calculation. So we discuss sub-themes as smooth curves, tangent vector, arc length through formulas of Frenet, evolutas curves and involute and conclude with some important theorems, as the fundamental theorem of plane curves, Jordan 's theorem and the theorem of four vertices. What basically is, Chapter 1, 4 and 6 of the book Introduction to Plane Curves Hilário Alencar and Walcy Santos.

Keywords: Differential geometry. Plane curves. Frenet formula; Fundamental theorem of plane curves.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	09
2	CURVAS PLANAS.....	10
2.1	Curvas suaves.....	20
2.2	Curva regular	21
2.3	Vetor tangente	22
2.4	Comprimento do arco.....	24
2.5	Vetores ao longo de curvas.....	27
2.6	Triedro e fórmulas de Frenet	33
2.7	Planos do triedro de Frenet	36
2.8	Curvas no plano complexo	38
2.9	Forma canônica local	47
2.10	Evolutas e involutas	49
3	TEOREMAS IMPORTANTES	53
3.1	Teorema fundamental das curvas planas	53
3.2	Teorema de Jordan	54
3.3	Desigualdade isoperimétrica	58
3.4	Teorema dos quatro vértices	59
4	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS.....	62
	APÊNDICE A - SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS.....	63

1 INTRODUÇÃO

A geometria diferencial é o estudo da geometria com o cálculo. Essas duas áreas da matemática andam juntas. Com estudos iniciados na cartografia, posteriormente, com grande utilidade na astronomia e engenharia, e hoje, com muitas aplicações em física, especialmente na teoria da relatividade.

Os primeiros a estudá-la, por volta do século XVII, foram: Pierre de Fermat, que conseguiu representar algebricamente tangente de curvas; Christiaan Huygens introduziu evolutas e involutas; e Isaac Newton o primeiro a calcular a curvatura por meio do cálculo infinitesimal.

Já no século XIX, Carl Friedrich Gauss estabeleceu uma propriedade fundamental das superfícies. Ele descobriu e provou o Theorema Egregium, que mais tarde seria estendido para espaço de dimensões superiores por Bernhard Riemann, que também foi o responsável na introdução da noção de variedade, assunto esse que veio revolucionar a geometria conduzindo-a à moderna geometria diferencial.

A geometria diferencial vem influenciando cada vez mais nos avanços da humanidade. No cálculo, que foi suficiente para as Leis de Newton, ela serviu de alicerce para o nascimento da teoria da relatividade. Na análise, a interação entre as duas disciplinas foi fator de crescimento para ambas. Nas equações diferenciais parciais não-lienares, foi desenvolvido todo um capítulo inspirado nas suas questões. E na computação gráfica está se aproximando de um público bem mais amplo, tornando-a acessível e fornecendo uma interface adequada à apresentação de resultados, desenvolvimento de novas tecnologias e planejamento de novos produtos, levando assim o seu desenvolvimento não apenas para a área científica mas também na área empresarial.

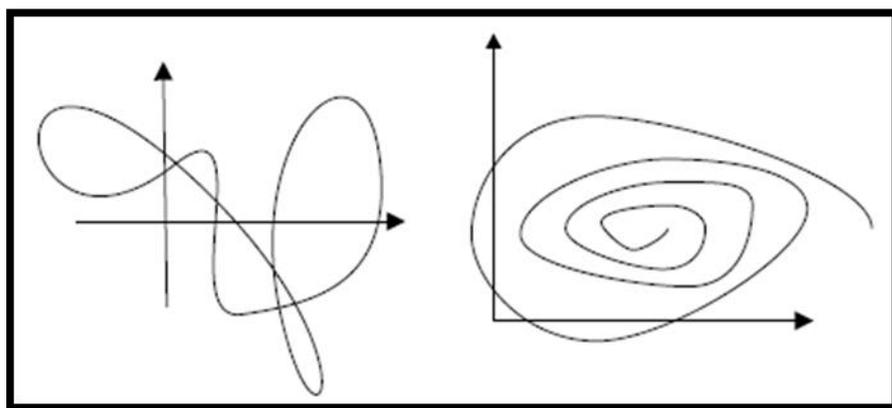
Então hoje, ele é dividida em dois aspectos: geometria diferencial clássica e geometria diferencial global. O primeiro aspecto estuda as propriedades locais da curva, que por sua vez, depende do comportamento da curva nas proximidades de um ponto. Os métodos utilizados para os estudos dessa propriedade foram os métodos do cálculo diferencial, que por essa razão, as curvas serão definidas por funções que possam ser derivadas algumas vezes. Já o segundo aspecto estuda a influência das propriedades locais sobre o comportamento da curva.

2 CURVAS PLANAS

Intuitivamente falando, uma curva plana será o que uma criança faz, com poucos anos de vida, quando tem ao seu alcance um lápis e um papel. Ela fará figuras desenhadas com um único traço, sem tirar o lápis do papel.



Podemos dizer de uma forma mais elaborada que curva é uma deformação contínua de um intervalo, ou, a trajetória de um deslocamento de uma partícula no plano. Seguem abaixo alguns exemplos:



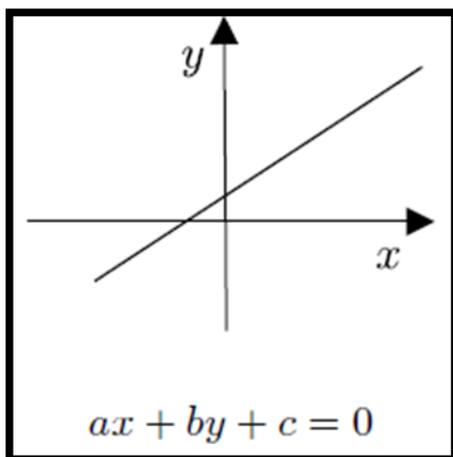
Antes de qualquer coisa precisamos considerar, de acordo com a Geometria Analítica, que uma curva no \mathbb{R}^2 é como um conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz as equações

$f(x, y) = 0$, onde a função dada é uma função real de duas variáveis reais em f . Ou seja, uma curva algébrica pode ser definida como:

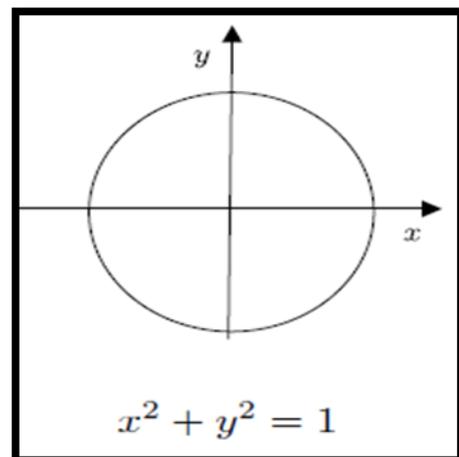
Definição 1 Uma curva algébrica plana é o lugar dos pontos onde as coordenadas cartesianas satisfazem equações do tipo $f(x, y) = 0$, e f é um polinômio não constante.

Exemplos:

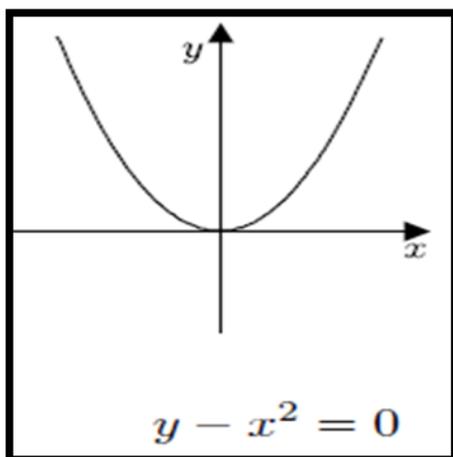
1. Reta



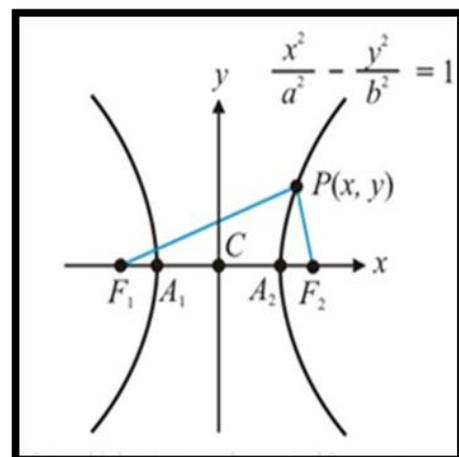
2. Círculo



3. Parábola



4. Hipérbole



Mas, infelizmente, esse tipo de curva, mesmo para funções muito bem comportadas, pode ficar longe da idéia do que consideramos uma curva. Por outro lado, existem vários

outros conjuntos que gostaríamos de considerar como curvas e não podemos, como por exemplo curvas em \mathbf{R}^n e os fractais que são objetos geométricos ainda não definíveis pela geometria tradicional.

Já na Geometria Diferencial, em vez de considerarmos curvas escritas por equações, devemos retornar à idéia inicial onde uma curva deve ser definida de acordo com a trajetória contínua de uma partícula em movimento sobre um plano. Se pensarmos num ponto $\alpha(t)$ como sendo a posição de uma partícula em movimento contínuo, quando o tempo t varia em um intervalo $[a,b]$, então o conjunto que iremos considerar como sendo o caminho percorrido pelo ponto $\alpha(t)$ é $C = \{\alpha(t) \in \mathbf{R}^2, t \in [a,b]\}$. Essa forma de contextualização da curva facilita sua formalização e contém inúmeras informações sobre o ponto $\alpha(t)$ pertencente ao conjunto C . Assim podemos ter uma definição mais formal da curva.

Definição 2 Uma curva contínua em \mathbf{R}^2 é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, definida num intervalo fechado $I = [a,b] \subset \mathbf{R}$. A aplicação α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, é contínua, se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função contínua.

Observações:

O conjunto $C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in I\}$ da aplicação α é o conjunto imagem, chamado de *traço* de α . Com a definição acima temos α como uma *parametrização* de C e denotamos t como parâmetro da curva α . Agora não estamos apenas estudando o conjunto C mas todo o movimento da partícula.

Se α está definido num intervalo fechado $I = [a,b]$, então os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ serão chamados, respectivamente de, *ponto inicial* e *ponto final* da curva α . Se tivermos uma curva α onde $\alpha(a) = \alpha(b)$, então a curva α será chamada de curva *fechada*. Já se existir um número real $k > 0$, tal que $\alpha(t + k) = \alpha(t)$, teremos uma curva $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, ou seja, seu domínio não é um intervalo fechado, e sim o conjunto dos reais. Essa curva será chamada de *periódica* para todo $k \in \mathbf{R}$. O menor valor de k para o qual acontece a periodicidade da curva α denotaremos por k_0 e chamaremos de *período*. Podemos assim restringir a curva a um intervalo $[t_0, t_0 + k_0]$.

Uma curva α é dita *simples* quando sua aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ for injetiva. Quando tivermos $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, com $t_1, t_2 \in I$ e $t_1 \neq t_2$, dizemos que α possui um ponto duplo em t_1 e t_2 .

E para finalizarmos essa seção, uma curva $\alpha : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ será dita *fechada* e *simples* quando seu único ponto duplo coincidir com os pontos inicial e final, ou seja, $\alpha(t) \neq \alpha(s)$ para todo $t \neq s \in [a,b]$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$. Quando α for uma curva fechada e simples ela será chamada de *curva de Jordan*.

Exemplos:

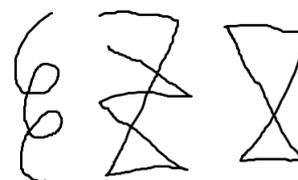
1. Curvas Simples

(São aquelas que não têm cruzamentos)



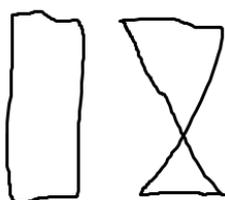
2. Curvas Não Simples

(São aquelas que têm cruzamentos)



3. Curvas Fechadas

(São aquelas que não tem extremidades)



4. Curvas Não Fechadas

(São aquelas que tem extremidades)



5. Curvas Periódicas

(São aquelas que se repetem com um período)



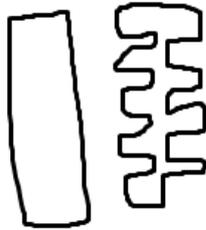
6. Curvas Não Periódicas

(São aquelas que não se repetem com um período)



7. Curvas de Jordan

(São curvas fechadas e simples ao mesmo tempo)



8. Curvas Não de Jordan

(São curvas não fechadas e simples ao mesmo tempo)

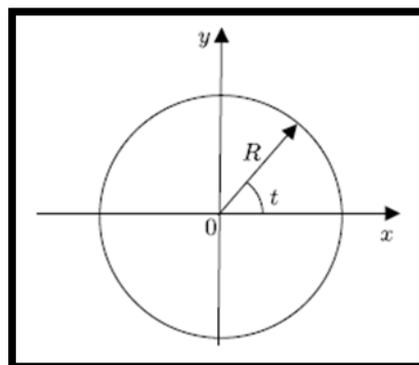


Vamos encerrar esta seção com alguns exemplos ilustrativos de como pode ser uma curva contínua no plano.

1. Círculos

O círculo de raio R e centro na origem O é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância ao ponto $(0, 0)$ é constante e igual a R , ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} = R$.

O círculo é o traço da curva contínua α , definida por $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$ e parâmetro que representa o ângulo que $\alpha(t)$ faz com o eixo Ox .

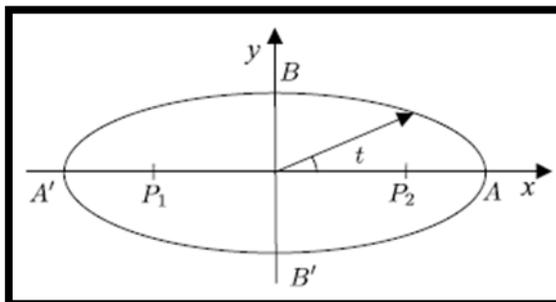


2. Elipses

A elipse é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja soma das distâncias aos pontos P_1 e P_2 é uma constante, onde P_1 e P_2 são chamados de focos da elipse. Se escolhermos o sistema

de coordenadas \mathbb{R}^2 de modo que $\mathbf{P}_1 = (-c, 0)$ e $\mathbf{P}_2 = (c, 0)$, com $c > 0$, então a elipse é descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $a^2 = b^2 + c^2$.

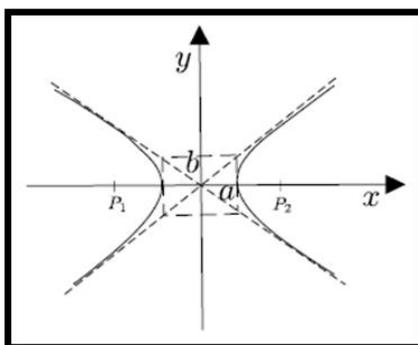
Se $(x, y) \neq (0, 0)$ e t o ângulo que o vetor com o ponto inicial na origem e ponto final (x, y) faz com semi-eixo Ox positivo, então podemos parametrizar a elipse pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, com $a, b > 0$.



3. Hipérbole

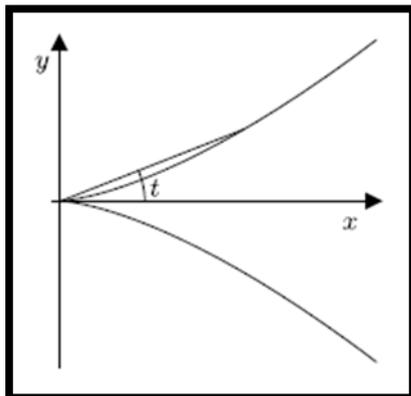
A hipérbole é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja diferença das distâncias aos pontos \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 é, em valor absoluto, uma constante, e \mathbf{P}_1 e \mathbf{P}_2 são os focos da hipérbole. Se escolhermos o sistema de coordenadas \mathbb{R}^2 de modo que $\mathbf{P}_1 = (-c, 0)$ e $\mathbf{P}_2 = (c, 0)$, com $c > 0$, então a hipérbole é descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde a e b são números reais positivos.

Considerando a função cosseno hiperbólico como $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ e a função seno hiperbólico como $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, temos $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. Agora podemos parametrizar o ramo direito da hipérbole pelo traço da curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$.



4. Parábola de Neill

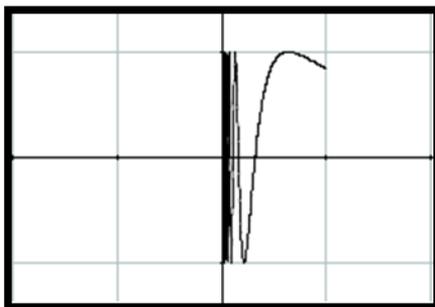
Parábola de Neill é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal $x^3 - y^2 = 0$. Seja $(x, y) \neq (0, 0)$ e considere t o ângulo que o vetor com ponto inicial na origem e ponto final (x, y) faz com o semi-eixo Ox positivo. Assim podemos parametrizar a parábola de Neill pelo traço da curva $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (t^2, t^3)$.



5. Gráficos

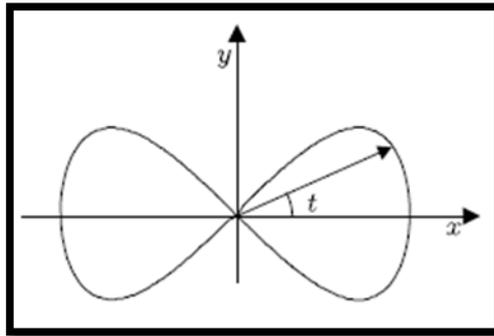
Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k . O conjunto $G = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} / y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ é chamado de gráfico de f . G pode ser parametrizado pela curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , dada por $\alpha(t) = (t, f(t))$.

Um exemplo de curva dessa forma é obtido quando consideramos $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Observe que nenhum ponto do segmento $\{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ pertence ao gráfico de f , porém existem pontos do gráfico de f arbitrariamente próximos de cada ponto desse segmento.



6. Lemniscata

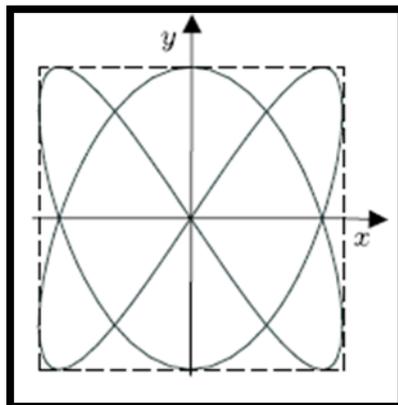
A lemniscata é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$. Consideremos t o ângulo entre um vetor de \mathbb{R}^2 , com ponto final (x, y) e o eixo Ox , podemos, portanto, parametrizar a lemniscata pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (\text{sen}t, \text{sen}2t)$.



7. Curvas de Lissajous

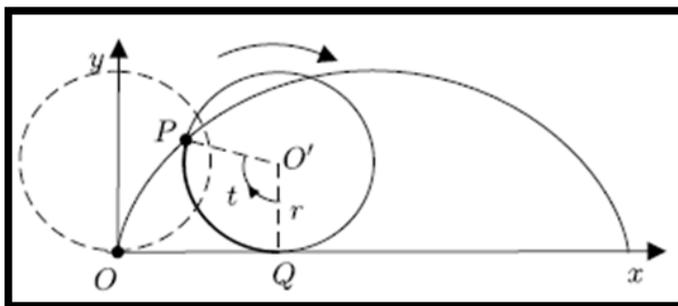
Vamos citar apenas um grupo especial dessas curvas, as que aparecem na Mecânica, quando duas oscilações elásticas ocorrem simultaneamente em planos ortogonais, por exemplo, os pêndulos duplos. Nesse caso, o traço da curva de Lissajous é $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\text{sen}at, \text{sen}bt)$, com $a, b > 0$ e $a \neq b$.

A lemniscata é um caso particular da curva de Lissajous, quando $a = 1$ e $b = 2$. Na figura abaixo mostraremos um esboço do traço de α no caso em que $a = 2$ e $b = 3$.



8. Ciclóide

A cicloide é a trajetória descrita por um ponto $P = (x, y)$ de \mathbb{R}^2 , localizada no círculo de raio r e centro O' , que gira ao longo do eixo Ox . Seja v o vetor com ponto inicial em O' e ponto final em P , e seja t o ângulo descrito entre o vetor v , supondo que P coincida com a origem O , quando $t = 0$.



Como o arco QP tem o mesmo comprimento que o segmento com ponto inicial na origem O e ponto final em Q , onde Q é o ponto de interseção entre o círculo e o eixo Ox . Assim concluímos que rt e r são, respectivamente, abscissa e ordenada de O' . Como consequência disso as coordenadas de P são:

- $x = rt - r\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = rt - r\sin t$
- $y = r - r\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = r - r\cos t$

Agora podemos descrever a cicloide como sendo o traço da curva parametrizada $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$.

9. Espirais

A espiral de Arquimedes é o conjunto de pontos (x, y) de \mathbb{R}^2 tal que $x \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = y$, com $a > 0$. Em coordenadas polares, sua equação é dada por $r = a\theta$, com $a > 0$. Assim

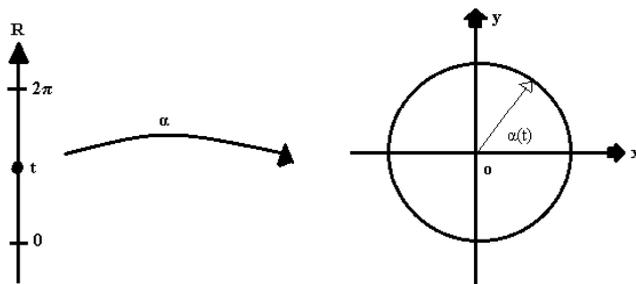
Solução:

As equações paramétricas da curva α são $x = a \cos t$ e $y = a \sin t$.

Assim podemos eliminar o parâmetro t obtendo $x^2 + y^2 = a^2$.

Logo, as coordenadas de todos os pontos pertencente as curva α satisfazem a equação acima, ou seja, a curva α está contida numa circunferência de centro na origem e raio a .

O parâmetro t é a medida do ângulo formado entre o eixo x e o raio da circunferência, como t varia de 0 à 2π , então a curva α é a circunferência contida na figura abaixo.



Exercício Proposto 1

Para cada um dos seguintes pares de equações paramétricas abaixo, esboce a curva e determine sua equação cartesiana:

- (a) $x = -1 + t$, $y = 2 - t$, $t \in \mathbb{R}$.
- (b) $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $t \in \mathbb{R}$.
- (c) $x = t^2 - 4$, $y = 1 - t$, $t \in \mathbb{R}$.
- (d) $x = \cos t$, $y = -3 + \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$

2.1 Curvas suaves

Definição 3 Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação suave se, cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞ , isto é, x e y possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto I .

Exemplo Resolvido 2

Curva constante $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\alpha(t) = (a, b)$ é uma curva parametrizada suave cujo traço se reduz ao ponto (a, b) .

Exemplo Resolvido 3

A aplicação dada por $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\alpha(t) = (t, |t|)$ não é uma curva parametrizada suave, pois a função definida por $y(t) = |t|$ não é diferenciável em $t = 0$.

Exercício Proposto 2

Dê uma parametrização para cada uma das curvas:

(a) a reta $2x - 3y = 6$

(b) a parábola $x^2 = 4ay$

(c) a circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

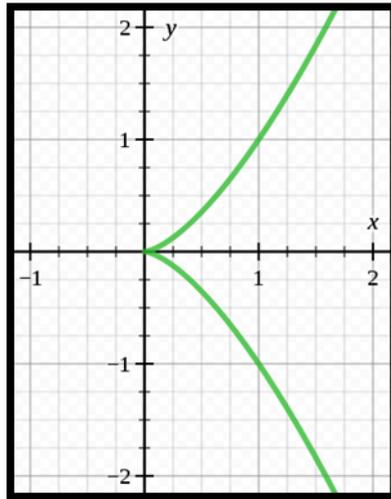
(d) a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0$

2.2 Curva regular

Definição 4 Dizemos que uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t) \neq (0,0)$. A curva α é regular em I , se α for regular para todo $t \in I$.

Um exemplo de curva parametrizada e regular é dado por $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $\alpha(t) = (t, f(t))$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Assim o traço de α será igual ao gráfico de f . Como $\alpha'(t) = (1, f'(t)) \neq (0, 0)$, para todo $t \in I$, então α é uma curva parametrizada e regular.

Já uma curva α onde $|\alpha'(t_0)| = 0$, não é regular, dizemos que α é *singular* em t_0 e o $\alpha(t_0)$ é chamado uma *singularidade* de α . Ou seja, curvas que possuem pontos singulares não são curvas regulares, pois existe um $t \in I$ com $\alpha'(t) = (0,0)$. Exemplo de curvas desse tipo geralmente possuem um “bico”, como está representado na figura abaixo:



Exercício Proposto 3

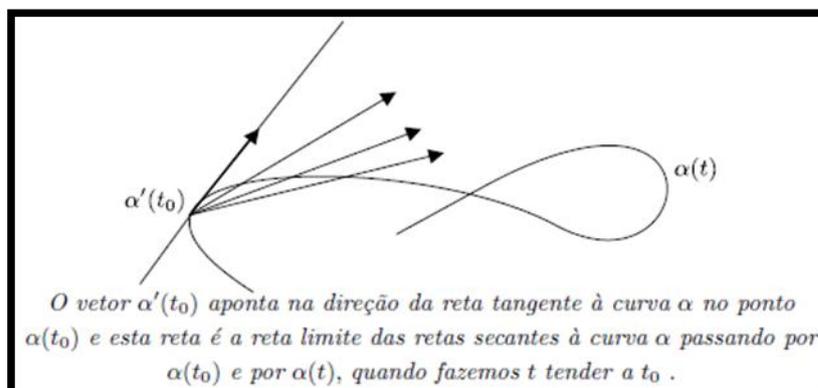
Seja $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva, dada por $\alpha(t) = ((1 - 2\sin t)\cos t, (1 - \sin t)\sin t)$.

- Mostre que α é uma curva regular, de classe C^∞ e fechada;
- A curva α é simples?
- Esboce o traço de α .

2.3 Vetor tangente

Definição 5 Como definimos a curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ sendo a trajetória do deslocamento de uma partícula dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, então definiremos vetor tangente (ou vetor velocidade) de α em $t_0 \in I$ como:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$



Sendo o módulo de $\alpha'(t_0)$ a *velocidade escalar* de α no ponto $t_0 \in I$, dada por:

$$|\alpha'(t_0)| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$$

Além disso, a *aceleração linear* ou *vetor aceleração* é a segunda derivada de α em $t_0 \in I$ e a *aceleração escalar* é o módulo da segunda derivada.

Exemplo Resolvido 4

Se uma partícula tem velocidade escalar constante, mostre que sua aceleração é ortogonal a sua velocidade em cada ponto da trajetória.

Solução:

$$|\alpha'(t)| = c \rightarrow \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) = c^2$$

Utilizando a fórmula da derivação produto, derivamos ambos os membros em relação a t :

$$2 \cdot \alpha'(t) \cdot \alpha''(t) = 0$$

Ou seja, $\alpha''(t)$ é ortogonal a $\alpha'(t)$ em cada instante t onde $\alpha''(t) \neq 0$

Exemplo Resolvido 5

Qual o vetor que indica a velocidade escalar, ou vetor tangente, de uma partícula em qualquer ponto da curva $\alpha(t) = (\text{sent}, \text{cost})$?

Solução:

$$\text{Velocidade escalar} = \text{vetor tangente} = \alpha'(t) = (\text{cost}, -\text{sent})$$

Exemplo Resolvido 6

Represente geometricamente o vetor tangente à curva definida por $\alpha(t) = (\text{cost}, \text{sent})$ no ponto em que $t = \frac{\pi}{4}$.

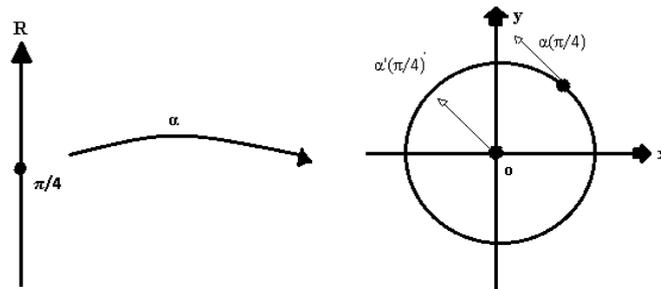
Solução:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \text{coordenadas do ponto quando } t = \frac{\pi}{4}$$

$\alpha'(t) = (-\text{sen}t, \text{cost}) \rightarrow$ vetor tangente em qualquer ponto t

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\text{sen}\frac{\pi}{4}, \text{cos}\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \text{vetor tangente no ponto } t = \frac{\pi}{4}$$

De acordo com o exemplo resolvido 1 do t3pico 1 a curva definida por α 3 uma circunfer3ncia de centro $(0,0)$ e raio 1.



O vetor tangente encontrado tem seu ponto inicial na origem, assim sua representa33o geom3trica tangente 3 circunfer3ncia 3 obtida atrav3s de uma transla33o para o ponto sobre a curva.

Exerc3cio Proposto 4

Nos itens abaixo, $\alpha(t)$ denota o vetor posi33o de uma part3cula movendo, em cada instante t . Em cada caso determine o vetor velocidade, o vetor acelera33o e a velocidade escalar quando $t = t_1$.

a) $\alpha(t) = (2 + \text{cos}6t, 2 + \text{sen}6t)$, $t_1 = \frac{\pi}{9}$

b) $\alpha(t) = (\text{cos}2t, -3\text{sen}t)$, $t_1 = \pi$

c) $\alpha(t) = (e^{2t}, t^2)$, $t_1 = 0$

d) $\alpha(t) = (\text{cost}, \text{sent}, 2)$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$

2.4 Comprimento de arco

Defini33o 6 Seja $\alpha : I \rightarrow R^2$ uma curva regular parametrizada dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, ent3o a fun33o $L_\alpha : I \rightarrow R$ com $t_0 \in I$ e denominada como comprimento de arco 3 definida por:

$$L_{\alpha}(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\mu)| d\mu$$

Exemplo Resolvido 7

Calcular o comprimento do arco da curva definida por $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$ com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solução:

$$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t) \text{ é contínua em } [0, 2\pi] \rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 (1)}$$

$$|\alpha'(t)| = a$$

$$L_{\alpha}(t) = \int_0^{2\pi} |\alpha'(t)| dt = \int_0^{2\pi} a dt = at \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \cdot a - 0 = 2\pi a$$

Exercício Proposto 5

Encontre o comprimento do caminho percorrido por uma partícula que se move ao longo das curvas de equações dadas durante o intervalo de tempo especificado em cada um dos casos abaixo:

(a) $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $0 \leq t \leq 2$

(b) $\alpha(t) = (a(\cos t + \sin t), a(\sin t - \cos t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Agora se α é uma curva regular, então é possível mudar seu parâmetro t para o parâmetro comprimento de arco L . Para provarmos, temos α regular, então $\alpha'(t)$ contínua e $|\alpha'(t)|$ também contínua, assim pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que diz que toda

função f contínua em $[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, então f é derivável e $F'(x) = f(x)$. Logo L é derivável, $L'(t) = |\alpha'(t)|$, e tem derivada positiva para todo $t \in I$, pois α é regular; daí L é

uma função contínua e crescente, ou seja, invertível. Supondo que o parâmetro $t = h(L)$ defina a inversa de L , então a função vetorial g definida por $g(L) = \alpha(h(L))$ também define a curva α . Assim podemos dizer que a curva α definida por $g(L) = \alpha(h(L))$ está *parametrizada pelo comprimento do arco*.

Definição 7 Uma curva $\alpha: I \rightarrow R^2$ está parametrizada pelo comprimento do arco, se o parâmetro t é, a menos de constante, igual $L_\alpha(t)$, isto é,

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

Agora vamos observar que, se $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$, então $L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$
 $= \int_{t_0}^t 1 dt = t - t_0$, assim α está parametrizado pelo comprimento do arco. A recíproca também é verdadeira, pois, se,

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

obtemos que

$$|\alpha'(t)| = L'_\alpha(t) = 1.$$

Portanto, provamos o seguinte resultado:

Proposição 1 Uma curva $\alpha: I \rightarrow R^2$ está parametrizada pelo comprimento do arco, se e somente se,

$$|\alpha'(t)| = 1$$

Exemplo Resolvido 8

Parametrizar pelo comprimento de arco a circunferência definida por $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$.

Solução:

Como $t = 0$ está no domínio da curva α , podemos considerar então $L = \int_0^t |\alpha'(\mu)| d\mu$.

De acordo com o exemplo resolvido 7 temos $|\alpha'(t)| = r$, então $L = \int_0^t r dt = rt$.

Como $L = rt$, logo a inversa de L definida por $t = \frac{L}{r}$.

Assim $\alpha(L) = (r \cos \frac{L}{r}, r \sin \frac{L}{r})$, isto é, a parametrização de α pelo comprimento L .

Exemplo Resolvido 9

Seja uma curva definida por $\alpha(t)$ e $\alpha(L)$ a parametrização da curva pelo comprimento do arco. Provar que $\alpha'(L)$ é unitário e tangente a curva α .

Solução:

Utilizando regras de derivação (regra da cadeia) faremos $\alpha'(L) = D_t \alpha(t) \cdot D_L t$

$$\alpha'(L) = \frac{D_t \alpha(t)}{D_t L}$$

Como $D_t L = |\alpha'(t)| \rightarrow \alpha'(L) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$

Isto é, $\alpha'(L)$ é unitário e o fato de ser tangente a curva α , decorre da interpretação geométrica da definição de derivada.

Exercício Proposto 6

Parametrize pelo comprimento do arco as curva do exercício proposto 5, e verifique se a proposição 1 é verdadeira.

2.5 Vetores ao longo de curvas

Neste tópico vamos determinar um conjunto de vetores ortonormais para um determinado ponto t da curva. Como já definimos no item 1.3, o vetor tangente da curva no ponto t é a derivada da curva nesse ponto. Assim teremos os seguintes vetores:

➤ *Vetor Tangente Unitário* → $\mathbf{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ (prova feita no exemplo resolvido 9)

➤ *Vetor Curvatura* → $\mathbf{K}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\alpha'(t)|}$

➤ *Curvatura* → $k(t) = |\mathbf{K}(t)|$ (valor escalar do vetor curvatura)

Observações sobre a curvatura de uma curva α :

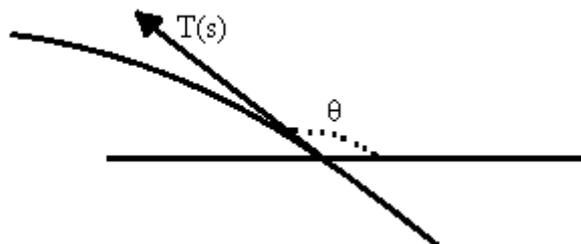
A função curvatura definida por k é uma medida que quantifica a mudança de direção da curva, ou seja, uma medida do quanto a curva deixa de ser reta numa vizinhança em cada um de seus pontos, demonstração essa que faremos no exemplo resolvido abaixo.

Exemplo Resolvido 10

Uma curva α definida pela função $\alpha(t)$ e sua parametrização pelo comprimento do arco definido por $\alpha(s)$. Prove que a curvatura é uma medida da mudança de direção da curva.

Solução:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}^2$ e $|\mathbf{T}(s)| = 1$, temos $\mathbf{T}(s) = \cos\theta \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\theta \cdot \mathbf{e}_2$, onde θ é a medida do ângulo determinado pelo lado positivo do eixo x e o vetor $\mathbf{T}(s)$ no sentido anti-horário.



Então $\mathbf{T}'(s) = -\sin\theta \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\theta \cdot \mathbf{e}_2$, daí $|\mathbf{T}'(s)| = 1$, ou seja, pela regra da cadeia $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{D}_\theta \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{D}_s \theta$, assim $|\mathbf{T}'(s)| = |\mathbf{D}_s \theta|$.

Utilizando agora a definição de curvatura dada nesse tópico temos $k(s) = \frac{|\mathbf{T}'(s)|}{|\alpha'(s)|} = |\mathbf{T}'(s)| = |\mathbf{D}_s \theta|$, pois $|\alpha'(s)| = 1$. Assim $k(s) = |\mathbf{D}_s \theta|$ que por sua vez significa a taxa de variação θ em relação a s .

Outra observação importante sobre a função curvatura é que $k(t) = |\mathbf{K}(t)|$ e $\mathbf{K}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\alpha'(t)|}$, logo $k(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\alpha'(t)|}$, mas no tópico anterior vimos que uma curva está parametrizada pelo comprimento do arco se, somente se, $|\alpha'(L)| = 1$, onde L é o comprimento do arco, ou seja, a função curvatura $k(L) = |\mathbf{T}'(L)|$, que por sua vez, $T(L) = \alpha'(L)$ e $|\mathbf{T}'(L)| = |\alpha''(L)|$, conseqüentemente $k(L) = |\alpha''(L)|$. Assim uma forma de acharmos a função curvatura mais fácil e rápida seria através da parametrização da curva pelo comprimento do arco. Um ótimo exercício nesse momento seria acharmos a função curvatura do exemplo resolvido 8. Segue abaixo:

Exemplo Resolvido 11
 Qual seria a função que representa a curvatura da curva dada no exemplo resolvido 8. Veja que neste exemplo já efetuamos a parametrização pelo comprimento do arco.

Solução:
 Como já temos a curva $\alpha(L) = (r \cos \frac{L}{r}, r \sin \frac{L}{r})$ parametrizada pelo comprimento do arco, basta agora acharmos $|\alpha''(L)|$, pois $k(L) = |\alpha''(L)|$.
 $\alpha'(L) = (-\sin \frac{L}{r}, \cos \frac{L}{r})$, $\alpha''(L) = (-\frac{1}{r} \cos \frac{L}{r}, -\frac{1}{r} \sin \frac{L}{r})$ e $|\alpha''(L)| = \frac{1}{r} = k(L)$

Mas também podemos ter uma expressão para função curvatura de uma curva regular sem, necessariamente, estar parametrizada pelo comprimento do arco. Partindo do ponto:

$$k(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\alpha'(t)|}, |\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \text{ e } |\mathbf{T}'(t)| = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right)^2}$$

Agora basta substituímos os valores de $|\alpha'(t)|$ e $|\mathbf{T}'(t)|$ na função curvatura e teremos:

$$k(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)\mathbf{y}''(t) - \mathbf{x}''(t)\mathbf{y}'(t)}{\left(\sqrt{(\mathbf{x}'(t))^2 + (\mathbf{y}'(t))^2}\right)^3}$$

Nesse momento podemos resolver novamente o exemplo resolvido 10, mas dessa vez sem utilizar a parametrização pelo comprimento do arco e, sim, utilizando a parametrização fornecida inicialmente no exemplo resolvido 8.

Exemplo Resolvido 12

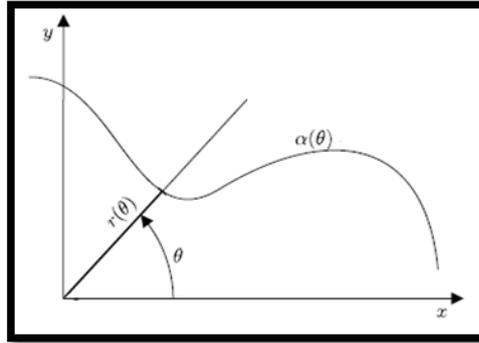
Calcule a função que representa a curvatura da curva do exemplo resolvido 8, utilizando a parametrização dada no exemplo resolvido 8.

Solução:

A parametrização inicial é $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Onde $x = r\cos t$, $x' = -r\sin t$, $x'' = -r\cos t$ e $y = r\sin t$, $y' = r\cos t$, $y'' = -r\sin t$. Substituindo os valores da expressão da curvatura teremos:

$$k(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)\mathbf{y}''(t) - \mathbf{x}''(t)\mathbf{y}'(t)}{\left(\sqrt{(\mathbf{x}'(t))^2 + (\mathbf{y}'(t))^2}\right)^3} = \frac{(-r\sin t) \cdot (-r\sin t) - (-r\cos t) \cdot (r\cos t)}{\sqrt{((-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2)^3}} = \frac{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}{\sqrt{(r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t)^3}} = \frac{1}{r}$$

Agora seja $\alpha(\theta) = r(\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ a equação paramétrica da curva dada por $r = r(\theta)$.



Logo $\alpha'(\theta) = (x', y') = r'(\cos\theta, \sin\theta) + r(-\sin\theta, \cos\theta)$ e, conseqüentemente, $\alpha''(\theta) = (x'', y'') = r''(\cos\theta, \sin\theta) + r'(-\sin\theta, \cos\theta) + r'(-\sin\theta, \cos\theta) + r(-\cos\theta, -\sin\theta) = (r'' - r')(\cos\theta, \sin\theta) + 2r'(-\sin\theta, \cos\theta)$. Substituindo os valores de x', x'', y' e y'' na expressão da curvatura de uma curva regular sem a parametrização pelo comprimento do arco, teremos:

$$k(\theta) = \frac{(r(\theta))^2 + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)}{(r(\theta)^2 + r'(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ou seja, em outras situações, uma curva pode ter uma expressão descrita em coordenadas polares. E com o resultado acima temos a expressão para a curvatura em coordenadas polares.

Exemplo Resolvido 13

Calcule a função curvatura da curva dada em coordenadas polares, $r = a\cos\theta$ (círculo).

Solução:

$$r' = -a\sin\theta \text{ e } r'' = -a\cos\theta.$$

Agora basta fazermos a substituição na fórmula da curvatura em coordenadas polares.

$$k(\theta) = \frac{(a\cos\theta)^2 + 2(-a\sin\theta)^2 - (a\cos\theta)(-a\cos\theta)}{((a\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2\cos^2\theta + 2a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}{(a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2a^2\cos^2\theta + 2a^2\sin^2\theta}{(a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a}$$

Outra forma bastante interessante de calcularmos a curvatura, seria de uma curva cujo traço é um gráfico de uma função definida por $y = f(x)$, onde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável.

Como já vimos, no caso em que a curva não está parametrizada pelo comprimento do

$$\frac{\mathbf{x}'(t)\mathbf{y}''(t) - \mathbf{x}''(t)\mathbf{y}'(t)}{\left(\sqrt{(\mathbf{x}'(t))^2 + (\mathbf{y}'(t))^2}\right)^3}$$

arco, podemos calcular a curvatura como $k(t) =$ e no caso da função $y = f(x)$ podemos parametrizá-la chamando $x = t$ e $y = f(t)$. Assim teremos $\alpha(t) = (t, f(t))$ como a parametrização da função dada.

Calculando $x' = 1$, $x'' = 0$, $y' = f'(t)$ e $y'' = f''(t)$, e substituindo esses valores na

função curvatura teremos $k(t) = \frac{1 \cdot f''(t) - 0 \cdot f'(t)}{\left(\sqrt{(1)^2 + (f'(t))^2}\right)^3} = \frac{f''(t)}{\left(1 + (f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, como $x = t$, então:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Exemplo Resolvido 14

Calcule a função curvatura da função $y = e^x$

Solução:

Calculamos $f'(x) = e^x$ e $f''(x) = e^x$, e substituímos na expressão acima encontrada.

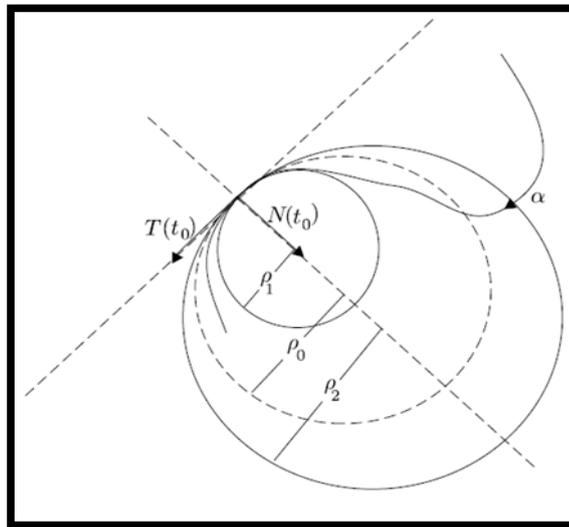
$$k(x) = \frac{e^x}{\left(1 + (e^x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Agora continuemos com os demais vetores ao longo da curva, decorrentes da curvatura. Quando $k(\mathbf{t}_0) > 0$ definimos o raio de curvatura de α em t como o inverso da função curvatura.

➤ Raio de Curvatura $\rightarrow \rho_0 = \frac{1}{k(t_0)}$ (o inverso da curvatura)

O ponto $P_{\rho_0} = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)} N(t_0)$ é chamado de *centro de curvatura* ou *ponto focal* de α em t_0 e o círculo C_{ρ_0} é chamado de *círculo osculador* de α em t_0 .

Representação Geométrica:



Exemplo Resolvido 15

Calcule o raio de curvatura num ponto qualquer da função definida como $\alpha(t) = (acost, asent)$.

Solução:

$$K(t) = \frac{T'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{a} (-acost, -asent) = -\frac{a}{a^2} (cost, sent) = -\frac{1}{a} (cost, sent) \rightarrow \text{vetor curvatura}$$

$$k(t) = |K(t)| = \sqrt{\left(\frac{-cost}{a}\right)^2 + \left(\frac{-sent}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \rightarrow \text{curvatura}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{1}{\frac{1}{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 + b^2}{a} \rightarrow \text{raio de curvatura}$$

Efetuando o produto escalar entre o vetor curvatura ($\mathbf{K}(t)$) e o vetor tangente unitário

($\mathbf{T}(t)$), obtemos $\mathbf{K}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\alpha'(t)|} \cdot \mathbf{T}(t) = |\alpha'(t)|^{-1} \cdot [\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t)]$, como $|\mathbf{T}(t)| = 1$, elevando os dois membros ao quadrado e derivando-os (utilizaremos a regra da cadeia), então teremos $\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$, daí o vetor curvatura e o vetor tangente unitário são ortogonais, ou seja, o vetor curvatura é normal à curva e assim temos outro vetor:

➤ *Vetor Normal Unitário* $\rightarrow \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{K}(t)}{|\mathbf{K}(t)|}$

Substituindo o vetor curvatura e a curvatura obtemos uma outra maneira de escrever o vetor $\mathbf{N}(t)$:

➤ *Vetor Normal Unitário* $\rightarrow \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$

Exercício Proposto 7

Encontre a curvatura e o raio de curvatura no ponto P dado: (Busque verificar qual fórmula tornará mais fácil de se achar a função curvatura).

a) $y = 2\sqrt{x}$ e $P = (0, 0)$

b) $y = \cos x$ e $P = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$

c) $\alpha(t) = (2e^t, 2e^{-t})$ e $P = (2, 2)$

d) $r = 2\theta$ e $P = (2, \theta)$

2.6 Triedro e fórmulas de Frenet

Jean Frédéric Frenet (1816-1900), professor, astrônomo, matemático e meteorologista francês, expôs suas fórmulas na apresentação de sua tese em 1847, e na apresentação de Joseph Alfred Serret em 1851, por isso o Triedro e as Fórmulas de Frenet também são conhecidas, respectivamente, como Triedro de Frenet-Serret e Fórmulas de Frenet-Serret.

Estas fórmulas ainda não estavam em uso como hoje, nas notações dos vetores e da álgebra linear.

Em cálculo vetorial, as Fórmulas de Frenet-Serret descrevem propriedades cinemáticas e geométricas. Cinemática quando citamos, em \mathbb{R}^3 , o movimento de uma partícula ao longo da curva contínua e diferenciável; e geométrica quando falamos da própria curva independente de movimento.

Sendo mais específico, as Fórmulas de Frenet-Serret descrevem as derivadas dos vetores unitários Tangente (T), Normal (N) e Binormal (B), que, por sua vez, são os vetores que formam o Triedro de Frenet-Serret. Dois desse vetores já foram mostrados no tópico 1.5 quando falamos sobre os vetores ao longo de curvas. Relembrando, esses vetores são:

➤ *Vetor Tangente Unitário* $\rightarrow \mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{\alpha}'(t)}{|\boldsymbol{\alpha}'(t)|}$

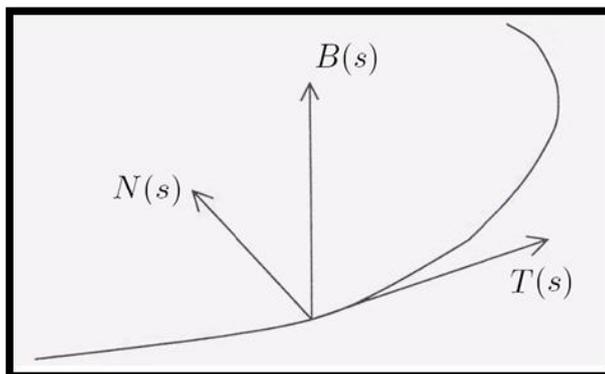
➤ *Vetor Normal Unitário* $\rightarrow \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$

O terceiro e último vetor unitário é o Binormal, originado do produto vetorial dos outros dois, assim:

➤ *Vetor Binormal Unitário* $\rightarrow \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$

Ou seja, o conjunto dos vetores unitários e mutuamente ortogonais $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$, é chamado o *Triedro de Frenet-Serret*.

Representação geométrica:



Exemplo Resolvido 16

Encontrar o triedro de Frenet-Serret num ponto qualquer da hélice cilíndrica definida como $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.

Solução:

$\alpha'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \rightarrow$ derivada da curva α num ponto t qualquer

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow \text{módulo da derivada da curva } \alpha(t)$$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b) \rightarrow \text{vetor tangente unitário}$$

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \cos t, -a \sin t, 0) \rightarrow \text{derivada do vetor tangente unitário}$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\left(\frac{-a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + 0^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \text{módulo da derivada do vetor tangente unitário}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \cos t, -a \sin t, 0)}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = (-\cos t, -\sin t, 0) \rightarrow \text{vetor normal unitário}$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b) \times (-\cos t, -\sin t, 0) =$$
$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t, -b \cos t, a) \rightarrow \text{vetor binomial unitário}$$

Exercício Proposto 8

Considere a curva C definida por $f(t) = (\sin t, \cos t, t)$. Encontre o triedro de Frenet e o raio de curvatura de C num ponto qualquer.

Antes de definirmos as fórmulas de Frenet precisamos definir uma nova grandeza que será utilizada em duas das suas três fórmulas.

Definição 7 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular onde $\alpha''(t) \neq 0$ e o número $\tau(t)$ definido por $B'(t) = \tau(t).N(t)$ é chamado torção de α em t .

Diferentemente da curvatura a torção pode ser positiva ou negativa, mas igualmente a curvatura, ela não depende da orientação da curva.

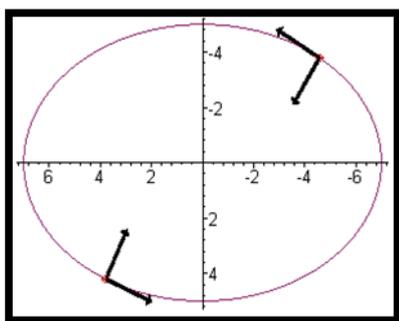
Como $B(t) = T(t) \times N(t)$, então derivando teremos $B'(t) = T'(t) \times N(t) + T(t) \times N'(t) = T(t) \times N'(t)$. Da mesma forma para $N(t) = B(t) \times T(t)$, derivando-o e substituindo $B'(t)$ e $T'(t)$ teremos $N'(t) = -k(t).T(t) - \tau(t).B(t)$.

Estabelecemos assim as derivadas do Triedro de Frenet-Serret que são mais conhecidas como as *Fórmulas de Frenet-Serret*.

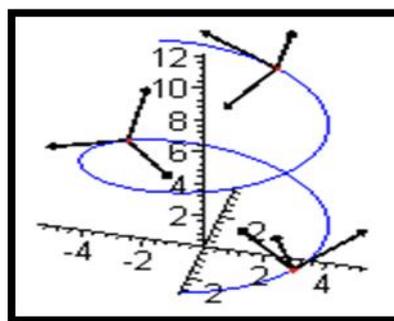
- *Derivada do Vetor Tangente Unitário* $\rightarrow T'(t) = k(t).N(t)$
- *Derivada do Vetor Normal Unitário* $\rightarrow N'(t) = -k(t).T(t) - \tau(t).B(t)$
- *Derivada do Vetor Binomial* $\rightarrow B'(t) = \tau(t).N(t)$

Lembrando que $\tau(t)$ é a torção da curva no ponto t e $k(t)$ é a curvatura da curva no ponto t . Na geometria diferencial de curvas elementar em três dimensões, a torção de uma curva mede quanto agudamente é torcida para fora do plano da curvatura. Tomada em conjunto, a curvatura e a torção de uma curva espacial são análogas à curvatura de uma curva plana. Em outras palavras a torção só vai existir quando tivermos em curvas do \mathbb{R}^3 , que não é o caso do nosso trabalho. No caso de curvas planas, curvas no \mathbb{R}^2 , a torção é zero. E assim, o Triedro e as Fórmulas de Frenet-Serret se limitam apenas aos vetores unitários $T(t)$ e $N(t)$, e suas derivadas. Veja as figuras abaixo:

Curva Plana (\mathbb{R}^2)



Curva Espacial (\mathbb{R}^3)



2.7 Planos do triedro de Frenet-Serret

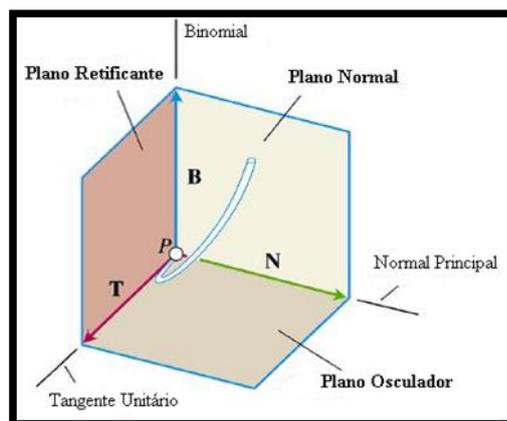
Existem três planos que, cada um individualmente, são paralelos, dois a dois aos vetores unitários de Frenet-Serret. São eles:

Plano Osculador que é paralelo aos vetores $T(t)$ e $N(t)$; o *Plano Retificante* que é paralelo aos vetores $T(t)$ e $B(t)$, e o *Plano Normal* que é paralelo aos vetores $N(t)$ e $B(t)$.

Além desses planos, ainda temos a *Reta Normal Principal* que é paralela ao vetor normal unitário $N(t)$, e possui um ponto, chamado *Centro de Curvatura*, no qual sua distância é igual ao raio de curvatura e de mesmo lado em que aponta o vetor $N(t)$.

Circunferência Osculatriz é a circunferência que está no plano osculador, possui centro no centro de curvatura e o seu raio é igual ao raio de curvatura.

Representação Geométrica:



Exemplo Resolvido 17

Determinar a circunferência osculatriz da curva definida por $\alpha(t) = (t, \frac{1}{2} t^2)$ no ponto em que $t = 0$ e representar geometricamente a curva e a circunferência osculatriz.

Solução:

$$\alpha'(t) = (1, t)$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1^2 + t^2} = \sqrt{1 + t^2}$$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} (1, t)$$

$$T'(t) = \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} (-t, 1)$$

$$K(t) = \frac{T'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{(\sqrt{1+t^2})^3} (-t, 1) = \frac{1}{(1+t^2)^2} (-t, 1)$$

Acima seria o vetor curvatura num ponto qualquer, mas o ponto solicitado seria $t = 0$, então

$$K(0) = (0, 1)$$

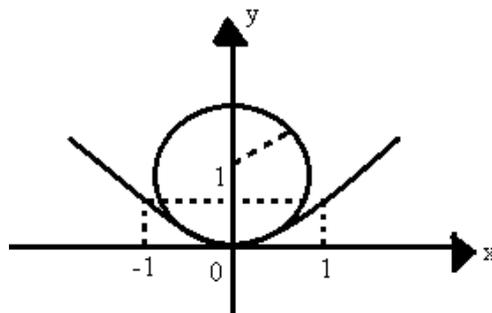
$$k(0) = |K(0)| = 1$$

$$\rho(0) = 1$$

$$f(0) = (0, 0)$$

Como $K(0) = \mathbf{e}_2$, o sentido do vetor $N(0)$ é o sentido positivo do eixo y , assim a circunferência oscultriz é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 1, logo a equação $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Observe que a curva definida por α é uma parábola de equação $y = \frac{x^2}{2}$. Na figura abaixo aparecem a parábola e a circunferência oscultriz da parábola no ponto $(0, 0)$.



Exercício Proposto 9

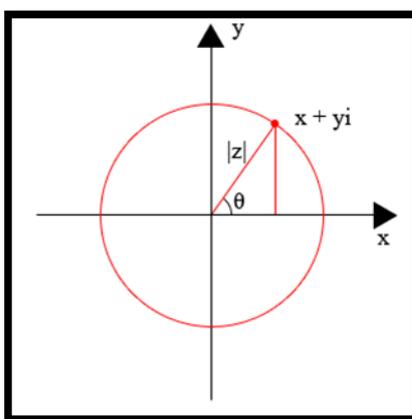
Determine a equação do plano osculador da curva C definida por $f(t) = (\text{sent}, \text{cost}, t)$

no ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

2.8 Curvas no plano complexo

Até agora vimos a representação dos pontos de curvas no plano \mathbb{R}^2 através de coordenadas cartesianas (x, y) . Nesse tópico veremos que o conjunto dos números complexos, representados pela letra C , também podem ser afixados no plano cartesiano, isso é o que chamamos de *Plano Complexo* ou *Plano de Argand-Gauss* ou *Diagrama de Argand*.

Representação Geométrica:



O conjunto dos números complexos $C = \{x + yi, x, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$ também podem ser identificados no plano \mathbb{R}^2 . Podemos dizer de forma bem simples que a construção do plano complexo é feita através da junção de uma circunferência de centro na origem e raio r com o plano cartesiano de pares ordenados (x, y) .

Um número complexo é um número z que pode ser escrito da forma $z = x + yi$, onde x é chamado de *parte real* e o y de *parte imaginária*. Dessa forma o número complexo $z = 2 - i$ pode ser representado, no plano complexo, através do ponto $(2, -1)$, onde o número 2 é a parte real do número complexo e, -1 a parte imaginária.

O conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais e além disso possuem algumas operações bem definidas, assim como nos reais. Vamos relembrar:

- **Adição**

Tanto na adição como na subtração, essas operações podem ser feitas de forma simples, somando e subtraindo separadamente parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária. Utilizaremos os mesmos números complexos nos exemplos resolvidos abaixo para facilitar a compreensão nas diferenças em cada operação.

Exemplo Resolvido 18

Se $z_1 = 5 + 7i$ e $z_2 = 3 - 2i$ qual o valor de $z_1 + z_2 = ?$

Solução:

$$z_1 + z_2 = (5 + 7i) + (3 - 2i) = 5 + 7i + 3 - 2i = (5 + 3) + (7i - 2i) = 8 + 5i$$

- **Subtração**

Exemplo Resolvido 19

Se $z_1 = 5 + 7i$ e $z_2 = 3 - 2i$ qual o valor de $z_1 - z_2 = ?$

Solução:

$$z_1 - z_2 = (5 + 7i) - (3 - 2i) = 5 + 7i - 3 + 2i = (5 - 3) + (7i + 2i) = 2 + 9i$$

- **Multiplicação**

No caso da multiplicação temos dois tipos diferentes: a multiplicação de um número real por um número complexo e a multiplicação entre dois números complexos. Nos dois casos o processo é o mesmo, o processo distributivo, que é uma das propriedades da multiplicação.

Exemplo Resolvido 20

Se $z = 5 + 7i$ qual o valor de $3.z = ?$

Solução:

$$3.z = 3.(5 + 7i) = 3.5 + 3.7i = 15 + 21i$$

Exemplo Resolvido 21

Se $z_1 = 5 + 7i$ e $z_2 = 3 - 2i$ qual o valor de $z_1 \cdot z_2 = ?$

Solução:

$$z_1 \cdot z_2 = (5 + 7i).(3 - 2i) = 5.3 - 5.2i + 7i.3 - 7i.2i = 15 - 10i + 21i - 14i^2$$

Lembrando que $i^2 = -1$, então continuamos:

$$15 + 11i - 14.(-1) = 15 + 11i + 14 = 29 + 11i$$

- **Conjugação**

O processo de conjugação é algo que devemos mostrar antes de falarmos da divisão, pois será bastante utilizado na divisão quando tivermos um número complexo no denominador.

Dizer que o número complexo $z = x + yi$ possui um conjugado significa dizer que existe um outro número complexo $c = a + bi$ tal que $z + c = 2x$, ou seja, ao somarmos os dois complexos o resultado seria duas vezes a parte real de z . Então vejamos: $z + c = (x + yi) + (a + bi) = x + yi + a + bi = (x + a) + (yi + bi)$.

Para que o resultado de $z + c$ seja igual a $2x$ temos que:

1. A parte real $(x + a)$ deve ser igual a $2x$, então $x + a = 2x \rightarrow a = 2x - x \rightarrow a = x$
2. A parte imaginária $(yi + bi)$ deve ser igual $0i$, então $yi + bi = 0i \rightarrow bi = -yi \rightarrow b = -y$

Logo o conjugado de $z = x + yi$ deve ser $c = x - yi$, ou seja, possuem a mesma parte real e a parte imaginária de um é o oposto do outro. Outro detalhe importante sobre os conjugados é que eles são representados com uma barra em cima da letra do próprio número complexo em que ele é o conjugado. Então para finalizarmos o conjugado de $z = x + yi$ é $\bar{z} = x - yi$.

Uma observação interessante é que a conjugação é uma involução de z , pois $\overline{\bar{z}} = z$.

Exemplo Resolvido 22

Se $z = 5 + 7i$ qual o valor do seu conjugado \bar{z} ?

Solução:

Se $z = 5 + 7i$, então seu conjugado $\bar{z} = 5 - 7i$

- **Divisão**

Agora a divisão entre números complexos pode ser efetuada, pois possuem um processo parecido com o processo de racionalização quando temos uma raiz no denominador de uma fração. Para efetuarmos a divisão entre dois números complexos precisávamos conhecer primeiro a conjugação, procedimento que será bastante utilizado na divisão.

Se tivermos a divisão de um número complexo por um número real basta dividirmos normalmente separando as frações (o número real irá dividir tanto a parte real quanto a parte imaginária), já no caso do número complexo está no denominador de uma fração (seja o numerador um número real ou número complexo) devemos, mais ou menos que, imitar o processo de racionalização feito com os números reais, vamos multiplicar a fração original por uma outra fração onde o numerador e o denominador é o conjugado do número complexo que está no denominador da fração original, esse é o motivo pelo qual precisamos conhecer primeiro o processo de conjugação.

Faremos as divisões nos exemplos a seguir, pois ficará mais fácil a compreensão do processo de divisão entre complexos.

Exemplo Resolvido 23

Se $z = 5 + 7i$ qual o valor de $z : 5 = ?$

Solução:

$$\frac{z}{5} = \frac{5 + 7i}{5} = \frac{5}{5} + \frac{7i}{5} = 1 + \frac{7i}{5}$$

Exemplo Resolvido 24

Se $z_1 = 5 + 7i$ e $z_2 = 3 - 2i$ qual o valor de $z_1 : z_2 = ?$

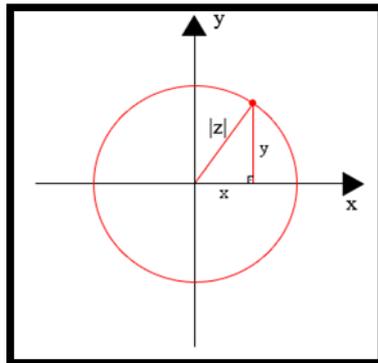
Solução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 7i}{3 - 2i} = \frac{5 + 7i}{3 - 2i} \cdot \frac{3 + 2i}{3 + 2i} = \frac{(5 + 7i) \cdot (3 + 2i)}{(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)} = \frac{15 + 10i + 21i + 14i^2}{9 + 6i - 6i - 4i^2} = \frac{15 + 31i - 14}{9 + 4} = \frac{1 + 31i}{13} = \frac{1}{13} + \frac{31i}{13}$$

Ainda falta falarmos de outros dois pontos importantes para os números complexos, que inclusive estão ilustrados na figura que está no início do tópico.

- **Módulo**

O módulo de um número complexo, representado por $|z|$, é o segmento de reta que mede a distância entre o número complexo z , no plano complexo, e a origem, ou seja, é o raio da circunferência em que z está inserido. Representaremos no gráfico abaixo o módulo de z :



Então é fácil ver que para calcularmos o módulo de z basta fazermos teorema de pitágoras no triângulo acima, onde $|z|$ é a hipotenusa e os eixos x e y são os catetos, então teremos:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Exemplo Resolvido 25

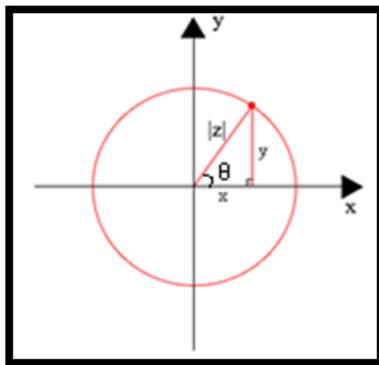
Se $z = 5 + 7i$ qual o valor de $|z| = ?$

Solução:

$$|z| = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$$

- **Argumento**

Já o argumento de um número complexo z é o ângulo θ formado pelo segmento de reta que representa o $|z|$ e o eixo x . Representaremos no gráfico abaixo o argumento de z :



E assim como o módulo de z , é fácil calcularmos o seu valor. Através do uso da trigonometria podemos achá-lo utilizando seno e cosseno, vejamos:

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{|z|} \quad \text{e} \quad \text{cos}\theta = \frac{x}{|z|}$$

Exemplo Resolvido 26

Se $z = 5 + 7i$ qual o valor de seu argumento, $\theta = ?$

Solução:

No caso do argumento é importante acharmos primeiro o módulo de z . O que no caso desse nosso exemplo já calculamos no exemplo resolvido 8.

$$|z| = \sqrt{74}$$

Agora, como já falamos, através do uso da trigonometria, podemos calcular θ utilizando seno e cosseno.

$$\text{sen}\theta = \frac{7}{\sqrt{74}} \cdot \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{74}} = \frac{7\sqrt{74}}{74}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{5}{\sqrt{74}} \cdot \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{74}} = \frac{5\sqrt{74}}{74}$$

Ou seja, o argumento do número complexo $z = 5 + 7i$ é o ângulo θ em que $\text{sen}\theta = \frac{7\sqrt{74}}{74}$ e $\text{cos}\theta = \frac{5\sqrt{74}}{74}$. Infelizmente nesse nosso exemplo não é um ângulo conhecido.

Agora podemos escrever um número complexo $z = x + yi$ em função de seu argumento, ou seja, escreveremos em função de suas coordenadas polares.

Quando calculamos o argumento de um número complexo z verificamos que $\text{sen}\theta = \frac{y}{|z|}$ e $\text{cos}\theta = \frac{x}{|z|}$, ou seja, $y = \text{sen}\theta \cdot |z|$ e $x = \text{cos}\theta \cdot |z|$. Assim substituindo x e y em z teremos:

$$z = |z| \cdot (\text{cos}\theta + i \cdot \text{sen}\theta) = |z|e^{i\theta}$$

Exemplo Resolvido 27

Se $z = \sqrt{3} + i$ em coordenadas cartesianas, mostre como ficará esse número complexo em coordenadas polares?

Solução:

Primeiro precisamos calcular seu módulo e seu argumento.

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{sen}\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ou seja, $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

Agora basta substituírmos os valores na equação:

$$z = 2 \cdot (\text{cos}\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}) \rightarrow \text{forma polar do número complexo } z = \sqrt{3} + i$$

Agora podemos definir uma curva parametrizada cujo traço está contido em C :

Definição 8 Uma aplicação $z : I \rightarrow C$ definida num intervalo $I \subset C$, é dada por $z(t) = x(t) + i.y(t)$ onde $x, y : I \rightarrow R$ são funções reais.

Agora faremos algumas observações importantes em torno da curva parametrizada em C assim como fizemos com a curva parametrizada em R , pois assim como as operações nos complexos são parecidas com as dos reais, as características de uma partícula em torno do percurso de uma curva em C também é parecida com as características em torno de uma curva em R .

Por exemplo, o *traço* de uma curva z em C é o conjunto imagem $z(I) \subset C$. A curva z é *contínua*, se as funções x e y são funções contínuas em I . A curva z é *n vezes diferenciável* em I , se as funções x e y são funções n vezes diferenciáveis em I e $z^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) + i y^{(k)}(t)$.

Assim como nas definições de curvas no plano real, dizemos que z é *regular* se $|z'(t)| \neq 0$, para todo $t \in I$, e que z está *parametrizado pelo comprimento de arco*, se $|z'(t)| = 1$, para todo $t \in I$. Lembrando que:

- $z'(t) \rightarrow$ *vetor velocidade ou vetor tangente*
- $|z'(t)| \rightarrow$ *velocidade escalar*
- $T(z) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \rightarrow$ *vetor tangente unitário*

No caso em que z é uma curva regular, também vale os resultados da Equação de Frenet para z .

- $N(t) = i \cdot z'(t)$ ou $N(t) = i \cdot T(z) \rightarrow$ *vetor normal*
- $T'(z) = k(t)N(t)$ ou $T'(z) = i \cdot k(t)T(t)$ ou $T'(z) = i \cdot k(t)z'(t) \rightarrow$ *derivada do vetor tangente*

Considerando T o campo tangente de z , que é dado por, $T(z) = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$ e $T'(z) = i \cdot k(t) \cdot z'(t) = k(t) \cdot |z'(t)| \cdot N(t)$. Como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z'(t)}{|z'(t)|} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right) z'(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t) \cdot |z'(t)| \cdot N(t).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right) |z'(t)| T(t) + \frac{1}{|z'(t)|} z''(t) = k(t) \cdot |z'(t)| \cdot N(t).$$

Fazendo agora o produto interno de ambos os membros da equação por $N(t)$ e usando o fato de que $T(t)$ e $N(t)$ são ortonormais, temos que:

$$k(t) = \frac{1}{|z'(t)|^2} \langle z''(t), N(t) \rangle.$$

Como $N(t) = i \cdot \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$. Então podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$k(t) = \frac{1}{|z'(t)|^2 \langle z''(t), i \cdot \frac{z'(t)}{|z'(t)|} \rangle} = \frac{1}{|z'(t)|^3 \langle z''(t), i \cdot z'(t) \rangle}$$

Como $\langle z''(t), i \cdot z'(t) \rangle = \text{Im}(z''(t)(z'(t)\bar{i})) = -\text{Im}(z''(t)z'(t))$. Assim concluímos que, a função curvatura para curvas no plano complexo pode ser escrita da maneira abaixo:

$$k(t) = \frac{-\text{Im}((z''(t)\bar{z}'(t)))}{|z'(t)|^3}$$

Exemplo Resolvido 28

Calcule a curvatura da curva dada por $z(t) = a \cdot \text{cost} \cdot e^{it}$

Solução:

Como $e^{it} = \text{cost} + i \cdot \text{sent}$, então $z(t) = a \cdot \text{cost} \cdot (\text{cost} + i \cdot \text{sent})$

$z'(t) = (a \cdot \text{cost})' \cdot (\text{cost} + i \cdot \text{sent}) + a \cdot \text{cost} \cdot (\text{cost} + i \cdot \text{sent})'$

$$z'(t) = (-a \cdot \text{sen}t) \cdot (\text{cost} + i \cdot \text{sent}) + a \cdot \text{cost}(-\text{sent} + i \cdot \text{cost})$$

$$z'(t) = -a \cdot \text{sen}t \cdot \text{cost} - a \cdot i \cdot \text{sen}^2t - a \cdot \text{sent} \cdot \text{cost} + a \cdot i \cdot \text{cos}^2t$$

$$z'(t) = -2a \cdot \text{sen}t \cdot \text{cost} + a \cdot i \cdot (-\text{sen}^2t + \text{cos}^2t)$$

$$z'(t) = -a \cdot \text{sen}2t + a \cdot i \cdot \text{cos}2t$$

$$|z'(t)| = \sqrt{(-a \cdot \text{sen}2t)^2 + (a \cdot \text{cos}2t)^2} = \sqrt{a^2 \cdot \text{sen}^22t + a^2 \cdot \text{cos}^22t} = a$$

$$z''(t) = (-a \cdot \text{sen}2t)' + (a \cdot i \cdot \text{cos}2t)'$$

$$z''(t) = -2a \cdot \text{cos}2t - 2a \cdot i \cdot \text{sen}2t, \text{ então o conjugado de } z''(t) \text{ é } \overline{z''(t)} = -2a \cdot \text{cos}2t + 2a \cdot i \cdot \text{sen}2t$$

$$\overline{z''(t)} \cdot z'(t) = (-2a \cdot \text{cos}2t + 2a \cdot i \cdot \text{sen}2t) \cdot (-a \cdot \text{sen}2t + a \cdot i \cdot \text{cos}2t)$$

$$\overline{z''(t)} \cdot z'(t) = 2a^2 \cdot \text{sen}2t \cdot \text{cos}2t - 2a^2 \cdot i \cdot \text{cos}^22t - 2a^2 \cdot i \cdot \text{sen}^22t + 2a^2 \cdot i^2 \cdot \text{sen}2t \cdot \text{cos}2t$$

$$\overline{z''(t)} \cdot z'(t) = -2a^2 \cdot i \text{ (imaginário puro)}$$

Agora podemos substituir os valores de $\overline{z''(t)} \cdot z'(t)$ e $|z'(t)|$ na função curvatura.

$$k(t) = \frac{2 \cdot a^2}{a^3} = \frac{2}{a}$$

Exercício Proposto 10

Calcule as curvaturas das curvas, dada por:

a) $z(t) = a \cdot t \cdot e^{it}$

b) $z(t) = e^{(b+it)t}$

c) $z(t) = a \cdot (1 + \text{cost}) \cdot e^{it}$

2.9 Forma canônica local

É um dos métodos mais eficazes para resolução de problemas em geometria. A forma canônica local consiste na escolha de um sistema de coordenadas que melhor se adapta a resolução do problema.

Por exemplo, para o estudo das propriedades locais de uma curva na vizinhança de um ponto s , temos um sistema de coordenadas naturais, o triedro de Frenet em s , e convém escrevermos a curva com este triedro.

Escreveremos agora as equações da curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada pelo comprimento do arco, em uma vizinhança de \mathbf{s}_0 , utilizando o triedro $(\mathbf{t}(\mathbf{s}_0), \mathbf{n}(\mathbf{s}_0), \mathbf{b}(\mathbf{s}_0))$ como uma base para \mathbb{R}^3 . Sem perda de generalidade, podemos supor $\mathbf{s}_0 = 0$ e considerar o desenvolvimento de Taylor.

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + \frac{s^2}{2}\alpha''(0) + \frac{s^3}{6}\alpha'''(0) + R, \text{ onde } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^3} = 0$$

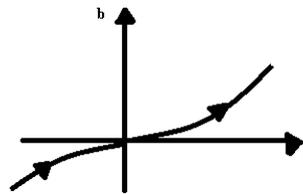
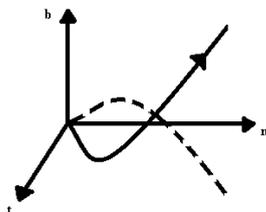
Como $\alpha'(0) = \mathbf{t}$, $\alpha''(0) = k\mathbf{n}$, e $\alpha'''(0) = (k\mathbf{n})' = k'\mathbf{n} + k\mathbf{n}' = k'\mathbf{n} - k^2\mathbf{t} - k\mathbf{r}\mathbf{b}$, obtemos:

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \left(s - \frac{k^2 s^3}{3!}\right) \cdot \mathbf{t} + \left(\frac{s^2 k}{2} + \frac{s^3 k'}{3!}\right) \cdot \mathbf{n} - \frac{s^3}{3!} k \mathbf{r} \mathbf{b} + R$$

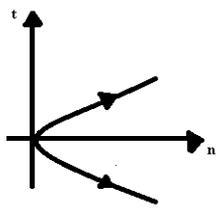
Tomemos agora um sistema \mathbf{O}_{xyz} de maneira que a origem O coincida com $\alpha(0)$ e que $\mathbf{t} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$. Nessas condições $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ é dada por:

$$\begin{aligned} x(s) &= s - \frac{k^2 s^3}{3!} + R_x, \\ y(s) &= \frac{s^2 k}{2} + \frac{s^3 k'}{3!} + R_y, \\ z(s) &= -\frac{s^3}{3!} k \mathbf{r} + R_z, \end{aligned}$$

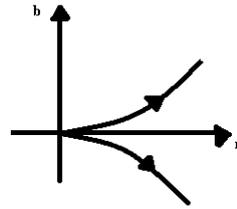
onde $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$. Essa representação de $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$ é o que chamamos de *forma canônica local* de α , em uma vizinhança de $s = 0$. Abaixo um esboço das projeções do traço de α , para s pequeno, nos planos bt , tn e bn .



Projeção sobre o plano bt



Projeção sobre o plano tn



Projeção sobre o plano bn

Descreveremos abaixo, em forma de exercícios (resolvido e proposto), algumas aplicações geométricas da forma canônica local.

Exemplo Resolvido 29

Prove a existência de uma vizinhança $J \subset I$ de $s = 0$ tal que $\alpha(J)$ está totalmente contida no lado do plano retificante para o qual o vetor normal n aponta. Ver acima o esboço das projeções do traço de α .

Solução:

Como $k > 0$, temos que, para s suficientemente pequeno, $y(s) \geq 0$, e $y(s) = 0$ se, e somente se $s = 0$. Isso demonstra a afirmação acima.

Exercício Proposto 11

Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada regular com curvatura $k(s) \neq 0$, $s \in I$. Seja P um plano satisfazendo às duas condições seguintes:

1. P contém a reta tangente em s .
2. Para toda vizinhança $J \subset I$ de s , existem pontos de $\alpha(J)$ de ambos os lados de P .

Prove que P é o plano osculador de α em s .

2.10 Evolutas e involutas

Quando falamos dos planos do triedro de Frenet, citamos que uma circunferência oscultriz é a circunferência que está no plano osculador, possui centro no centro de curvatura

e o seu raio é igual ao raio de curvatura. Então, a partir da recordação desse fato, podemos definir o que será a evoluta de uma curva α .

Definição 9 Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento do arco com curvatura $k(t) \neq 0$, onde o centro de curvatura de α em t , está bem definida por:

$$\alpha_e(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} N(t),$$

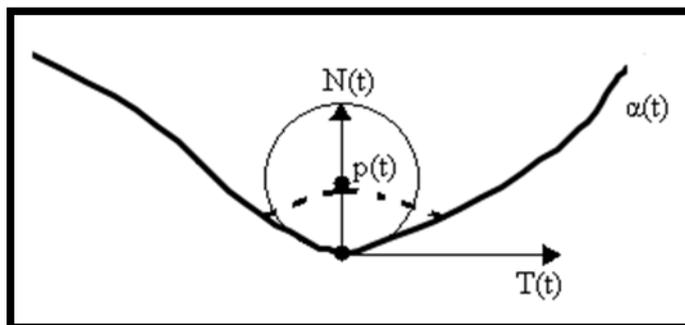
com N sendo o campo normal e unitário de α , e que a cada $t \in I$ associado $\alpha_e(t)$ temos uma curva diferenciável em \mathbb{R}^2 , que é chamada de evoluta da curva α .

Usando as equações de Frenet podemos obter a sua regularidade:

$$\alpha'_e(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k(t)} N'(t) - \frac{k'(t)}{k^2(t)} N(t) = -\frac{k'(t)}{k^2(t)} N(t)$$

Assim, temos que α_e é regular, se somente se $k'(t) \neq 0$. Logo os pontos singulares da evoluta de uma curva α são aqueles para os quais a curvatura de α possui ponto crítico. Observe que nessa equação o vetor $N(t)$ é paralelo ao vetor $\alpha'_e(t)$, ou seja, a reta normal da curva α em $\alpha(t)$ coincide com a reta tangente à α_e em $\alpha_e(t)$.

Representação Geométrica:



Exemplo Resolvido 30

Se o traço de uma curva α descreve um círculo de raio R e centro P_0 , mostre que sua evoluta é a curva constante dada por $\alpha_e(t) = P_0$.

Solução:

Parametrizando a curva α por $\alpha(s) = P_0 + (R \cdot \cos \frac{s}{R}, R \cdot \sin \frac{s}{R})$, $s \in [0, 2\pi R]$,

Temos que $k(s) = \frac{1}{R}$ e, portanto, $\alpha_e(s) = \alpha(s) + R \left(-\frac{\cos s}{R}, -\frac{\sin s}{R} \right) = P_0$

Exemplo Resolvido 31

Considere a cicloide dada pelo traço da curva α , definido por $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Determine sua evoluta.

Solução:

Temos que $x = t - \sin t$ e $y = 1 - \cos t$. Logo $x' = 1 - \cos t$, $x'' = \sin t$, $y' = \sin t$ e $y'' = \cos t$.

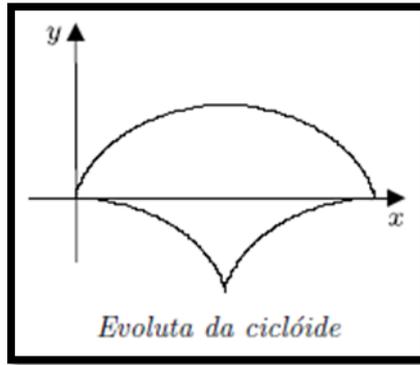
Substituindo na expressão da curvatura teremos:

$$k(t) = \frac{(1 - \cos t) \cdot (\cos t) - (\sin t) \cdot (\sin t)}{\left(\sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\cos t)^2} \right)^3} = \frac{\cos t - 1}{(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

Agora substituímos na expressão da evoluta:

$$\alpha_e(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) + \frac{(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{(\cos t - 1)(-\sin t, 1 - \cos t)} = (t + \sin t, \cos t - 1)$$

Observe, que no exemplo resolvido 31, $\alpha(t + \pi) = \alpha_e(t) + (\pi, 2)$. Logo, a menos de uma translação, a evoluta de α é a própria cicloide. Note também que $\alpha_e(t)$ deixa de ser regular quando $t = \pi$.



Agora vamos inserir uma noção dual à de evoluta de uma curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$.
 Seja $t_0 \in I$ fixado, e seja $L: I \rightarrow \mathbb{R}$ o comprimento do arco de α a partir de t_0 ,

$$L(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$$

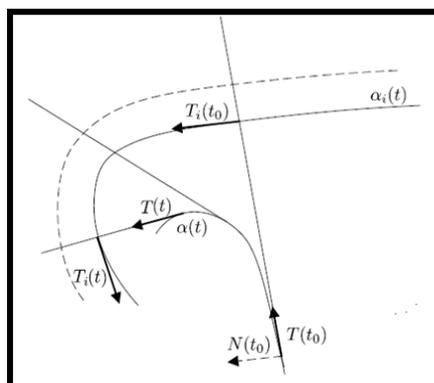
Definição 10 Uma involuta da curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a curva $\alpha_i: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$\alpha_i(t) = \alpha(t) + (C - L(t))T(t),$$

sendo T o campo tangente de α , e C é uma constante real positiva.

Observe que, para diferentes valores de C , obtemos involutas diferentes de α , porém todas são equidistantes, conforme mostra a representação geométrica abaixo:

Representação Geométrica:



Observação:

Temos, por definição, que a evoluta de α_i é $([\alpha_i])_e(\mathbf{t}) = \alpha_i(\mathbf{t}) + \frac{1}{\mathbf{k}_i(\mathbf{t})} \mathbf{N}_i(\mathbf{t}) = \alpha(\mathbf{t}) + (C - L(\mathbf{t}))\mathbf{T}(\mathbf{t}) - (C - L(\mathbf{t}))\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \alpha(\mathbf{t})$. Ou seja, concluímos que a curva α é a evoluta de qualquer uma de suas involutas:

$$([\alpha_i])_e(\mathbf{t}) = \alpha(\mathbf{t})$$

Exercício Proposto 12

Determine a evoluta da curva, definida por $\alpha(\mathbf{t}) = (t^2, t^3)$

3 TEOREMAS IMPORTANTES

Nesse capítulo buscaremos enunciar alguns dos teoremas importantes sobre curvas planas, como por exemplo, o Teorema Fundamental das Curvas Planas, como o próprio nome diz, é o teorema que dá fundamento as curvas planas. Mas também citaremos e mostraremos algumas aplicações do Teorema de Jordan, Desigualdade Isoperimétrica e o Teorema dos Quatro Vértices.

3.1 Teorema fundamental das curvas planas

Nosso objetivo é mostrar o teorema que garante que a função curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano.

Teorema 1. *Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva plana regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$. A curva $\alpha(s)$ é única quando fixamos $\alpha(s_0) = \mathbf{p}_0$ e $\alpha'(s_0) = \mathbf{v}_0$, onde \mathbf{v}_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 . E se duas curvas planas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, existe um movimento rígido que transforma uma curva na outra, ou seja, elas diferem por sua posição no plano, isto é, podemos transformar uma curva na outra através de uma rotação L e uma translação T em \mathbb{R}^2 , tal que $\alpha(s) = (LoT)(\beta(s))$.*

Prova. Considere $\theta(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{k}(s) ds$, onde $s_0 \in I$ é fixo. Fixemos um ponto $\mathbf{P}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ de \mathbb{R}^2 e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos uma curva $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ por:

$$x(s) = \mathbf{x}_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + \lambda) ds \quad \text{e} \quad y(s) = \mathbf{y}_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(s) + \lambda) ds$$

Agora iremos verificar se a curva acima definida está parametrizada pelo comprimento do arco s e possui curvatura $k(s)$. Pelo Diedro de Frenet temos que:

$$T(s) = \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)) \text{ e } N(s) = (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda))$$

Portanto, temos $|\alpha'(t)| = 1$ e a curvatura de α dada por $\langle T'(s), N(s) \rangle = \theta'(s) = k(s)$. Supondo que α , definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, seja uma curva parametrizada pelo comprimento do arco s e possua curvatura k . Então pelas Fórmulas de Frenet temos que x e y satisfazem $x''(s) = -k(s).y'(s)$ e $y''(s) = k(s).x'(s)$. Segue do teorema da unicidade de solução do sistema de equações diferenciais que fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ a curva α é única.

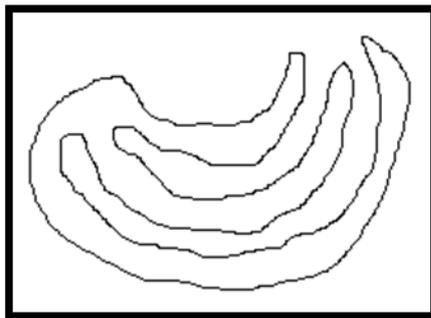
Agora se tivermos α e β duas curvas que têm a mesma curvatura, fixamos s_0 , assim existe uma rotação L e uma translação T de \mathbb{R}^2 tal que a curva $\bar{\alpha} = LoTo\beta$ satisfaz $\bar{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ e $\bar{\alpha}'(s_0) = \alpha'(s_0)$. Como $\bar{\alpha} \equiv \alpha$, então $\alpha = LoTo\beta$.

Esse resultado tem, como consequência, que a curvatura determina uma curva, a menos de sua posição no plano. A figura abaixo mostra duas curvas com a mesma função curvatura, mas com posições diferentes.

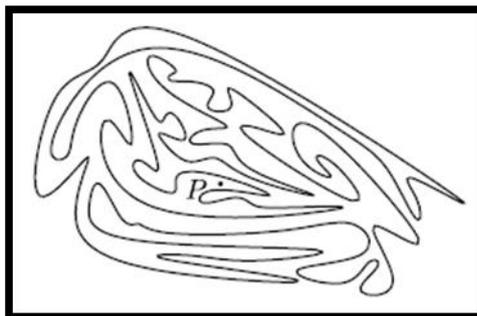


3.2 Teorema de Jordan

Relembrando que o traço de uma curva de Jordan é uma curva fechada e simples em \mathbb{R}^2 , como na figura abaixo:



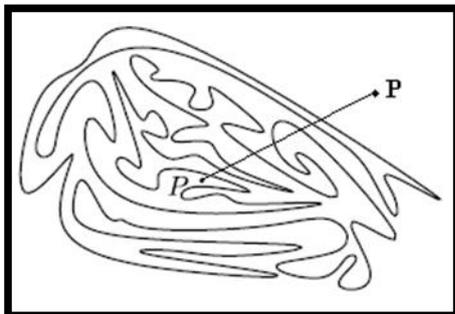
Mas quando pensamos em curvas desse tipo, o fato de suas “curvas” não se tocarem, ou seja, não possuir auto-interseções, nos faz imaginar que o seu traço divide o plano em duas componentes conexas: uma região limitada pelo traço da curva e outra região ilimitada. O mais interessante nessas curvas é que nem sempre é fácil identificar se um ponto está ou não na região limitada pela curva, em outras palavras, “dentro” da curva fechada. Veja o próximo exemplo e tente responder em qual componente conexa está localizada o ponto P. O ponto P está dentro ou fora da curva?



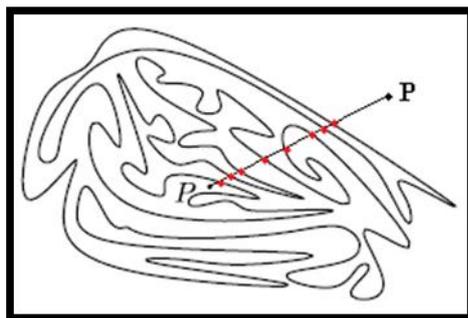
Teorema 2. (Teorema de Jordan) Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow R^2$ uma curva contínua e de Jordan. Então o complementar do traço de α , \mathbb{C}^α , é a união de dois conjuntos conexos, não vazios e com a fronteira de cada um igual ao traço de α . A componente conexa limitada de \mathbb{C}^α é denominada interior de α , e a outra componente conexa ilimitada de \mathbb{C}^α é chamada de exterior de α .

A complexidade da prova do Teorema de Jordan surpreendeu muitos matemáticos da época. O Teorema de Jordan pode ser um dos resultados matemáticos mais fáceis de acreditar, mas com certeza um dos mais difíceis de se demonstrar. Ele também é um belo exemplo de

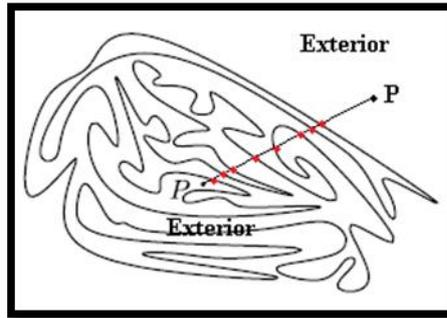
que desenhar é bem diferente de provar. Por isso não nos atentaremos para sua prova, mas sim em uma aplicação bem simples para resolução do problema acima.



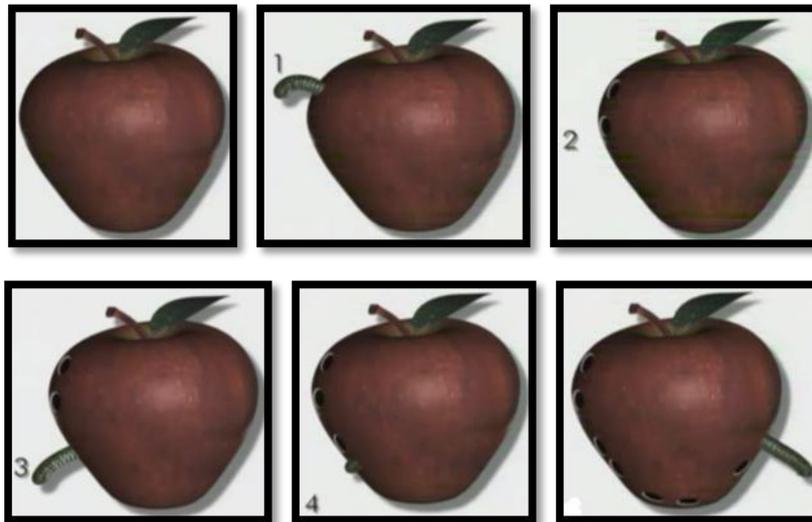
Primeiro coisa que faremos, se possível, é externalizar esse ponto P, isto é, fazer um segmento de reta que leve-o para uma região exterior da curva. Depois verificamos quantas vezes cortamos a própria curva até chegarmos fora dela. Vejamos figura abaixo:



Veja que o segmento de reta criado que levou o ponto P a uma região exterior da curva cortou a curva 8 vezes (os cortes estão nos pontos vermelhos), um número **par** de vezes. Então se o ponto P chegou no exterior significa que partiu do exterior, pois segundo o Teorema de Jordan quando temos uma paridade nos mantemos onde estamos.



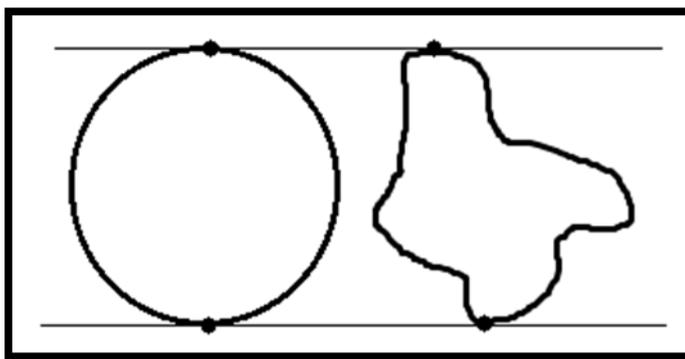
Um exemplo bem clássico dessa situação é o da minhoca na maçã. Como sabemos se a minhoca está dentro ou fora da maçã depois de uma certa quantidade de furos na maçã?



De acordo com a sequência acima e partindo do fato que a minhoca esteja, inicialmente, do lado de dentro da maçã, e esta, por sua vez, uma curva de Jordan (fechada e simples em \mathbb{R}^2). Observe que, se tivermos um furo (número ímpar), a minhoca fica fora, se tivermos dois furos (número par), a minhoca volta a ficar dentro, três furos (número ímpar), fica fora, quatro furos (número par), a minhoca, mais uma vez, volta a ficar dentro e, assim, sucessivamente. Ou seja, mais uma vez podemos concluir que o número par de furos faz com a minhoca se mantenha em seu estado original, que seria dentro da maçã.

3.3 Desigualdade isoperimétrica

Teorema 3. (Desigualdade Isoperimétrica) Seja α uma curva plana simples e fechada, ou seja, uma curva de Jordan, com comprimento L e A , a área da região limitada por α , então $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$ e teremos a igualdade se, somente se, α for um círculo. Em outras palavras, dentre todas as curvas regulares e de Jordan com um mesmo comprimento fixado, o círculo delimita a maior área.



Pelo Teorema de Green, temos que a área A da região limitada pela curva α é:

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt$$

Exemplo Resolvido 32

Existe uma curva fechada e simples com comprimento de 6 metros que delimite uma região de 3 metros quadrados?

Solução:

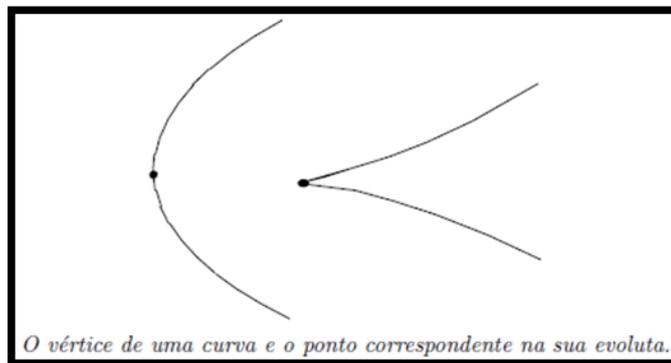
Verificaremos o resultado substituindo o valor do comprimento na expressão do Teorema e usando $\pi \cong 3,14$:

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} = \frac{6^2}{4\pi} = \frac{36}{4\pi} = \frac{9}{\pi} = \frac{9}{3,14} \cong 2,87 \rightarrow A \leq 2,87$$

Isso significa que uma curva com comprimento de 6 metros **não** delimita regiões de 3 metros quadrados, e sim, regiões menor que 2,87 metros quadrados.

3.4 Teorema dos quatro vértices

O Teorema dos Quatro Vértices é um dos teoremas clássicos mais famosos da Geometria Global das Curvas Planas. Basicamente nos diz que uma curva fechada e regular possui pelo menos quatro vértices. Para compreendermos um pouco melhor temos que entender geometricamente o que é um vértice de uma curva. Um vértice de uma curva α é um ponto crítico da função curvatura k de α , isto é, um ponto $t_0 \in [a, b]$, tal que a derivada da função curvatura, k' , é zero nesse ponto. Os pontos onde k' se anula são pontos singulares da evoluta de α . Em geral, a evoluta possui um “bico” nesses pontos singulares que correspondem aos vértices de α .



Um primeiro interesse do teorema dos quatro vértices é sobre o número de pontos singulares de uma evoluta de uma curva fechada e regular, pois a evoluta de uma curva possui aplicações geométricas importantes. Porém uma consequência maior desse resultado é que teremos uma condição necessária para que uma função seja curvatura de uma curva fechada.

Teorema 4. (Teorema dos Quatro Vértices) *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan, regular e de classe C^3 . Então α possui pelo menos quatro vértices.*

Exemplo Resolvido 33

Encontre os vértices da curva $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$, com $a, b > 0$.

Solução:

Temos $x = a \cdot \cos t$ e $y = b \cdot \sin t$. Então $x' = -a \cdot \sin t$, $x'' = -a \cdot \cos t$, $y' = b \cdot \cos t$ e $y'' = -b \cdot \sin t$.

Substituindo os valores na expressão curvatura teremos:

$$k(t) = \frac{(-a \cdot \sin t) \cdot (-b \cdot \sin t) - (-a \cdot \cos t) \cdot (b \cdot \cos t)}{(\sqrt{(-a \cdot \sin t)^2 + (b \cdot \cos t)^2})^3} = \frac{a \cdot b \cdot \sin^2 t + a \cdot b \cdot \cos^2 t}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3} = \frac{a \cdot b}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3}$$

$$k'(t) = \frac{a \cdot b \cdot \frac{3}{2} \cdot (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2 \cdot 2 \cdot \sin t \cdot \cos t - b^2 \cdot 2 \cdot \cos t \cdot \sin t)}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^3} = 0$$

Ou seja, os pontos onde $\sin 2t = 0 \rightarrow t = 0 + \frac{k\pi}{2}$

Logo, os pontos $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$ e $t = \frac{3\pi}{2}$ são os vértices da elipse.

Exercício Proposto 13

Mostre que uma curva fechada e simples, cujo traço descreve o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^4 + y^4 = 1\}$, possui oito vértices situados nas retas: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

4 CONCLUSÃO

Nesse capítulo queremos relembrar que o foco principal desse trabalho era explicar sobre o tema Introdução às Curvas Planas, ou seja, tentando ser o mais básico e simples possível para facilitar o entendimento desse assunto que tem como disciplina necessária o Cálculo Diferencial.

Então, relembrando por capítulos, temos que na Introdução falamos um pouco da história da Geometria Diferencial e, especialmente, da sua importância para os avanços da humanidade e da sua atual divisão em Geometria Diferencial Clássica e Geometria Diferencial Global.

No Capítulo 1 definimos o que seria uma curva plana algébrica, curva plana contínua e, principalmente uma curva de Jordan. Logo depois com os subtópicos definimos propriedades locais da curva como Vetor Tangente, Comprimento de Arco, Vetores ao Longo da Curva, onde podemos destacar a função curvatura que é peça fundamental para o Teorema das Curvas Planas.

Ainda no Capítulo 1 vimos o quanto é importante sabermos parametrizar uma curva, principalmente, pelo comprimento do arco, pois facilitará cálculos futuros como vetor Tangente Unitário, Vetor Normal Unitário e Curvatura. Concluimos também que podemos calcular a curvatura de algumas formas diferentes, e que, sabendo todas essas formas ajudará a calculá-la, buscando sempre a fórmula mais adequada para a questão. Vimos ainda o Triedro de Frenet e as Fórmulas de Frenet, fazendo um comparativo da curva plana com a curva espacial. Ainda mostramos a Forma Canônica Local e Curvas Evolutas e Involutas.

Já no Capítulo 2 demosntramos e citamos alguns Teoremas Importantes das Curvas Planas como o próprio Teorema Fundamental das Curvas Planas. Fizemos uma aplicação interessante do Teorema de Jordan e resolvemos exercícios sobre Desigualdade Isoperimétrica e Teorema de Quatro Vértices.

Ou seja, de forma geral, podemos concluir que esse trabalho vem com o intuito de transmitir conceitos iniciais e teoremas importantes da Geometria Diferencial de forma mais didática, sempre colocando exercícios resolvidos e propostos, para buscarmos seu entendimento não apenas na teoria mas na prática. No final ainda temos as Soluções dos Exercícios Propostos para auxiliar os alunos a garatirem o êxito de seus estudos.

REFERÊNCIAS

- ADRIANO P. CATTAL. Visualização do Triedro de Frenet. Disponível em: <http://www.alunospgmat.ufba.br/adrianocattal/construcoes/maple/triedro-frenet-curvas/triedro-frenet-curvas.html#2d> Acesso em: 14 jul 2015
- ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy. **Introdução às Curvas Planas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008
- ARAÚJO, Paulo. **Geometria Diferencial**. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008
- BARBOSA, Celso. **Cálculo Diferencial II**. 4.ed. Ceará: UFC, 2014
- DO CARMO, Manfredo. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012
- GEOMETRIA diferencial. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_diferencial> Acesso em: 21 abr 2015
- NÚMERO Complexo. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Número_complexo> Acesso em: 23 abr 2015
- PINTO, Diomara; MORGADO, Maria. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. 3.e.d. Rio de Janeiro: UFRJ, 2009
- PLANO Complexo. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Plano_complexo> Acesso em: 23 abr 2015
- RODRIGUES, Luciana. **Mini Curso Teoria Local das Curvas**. XXIII Semana do IME. Góias: UFG
- STEWART, James. **Cálculo Volume II**. Tradução da 6ª edição americana. Tradução Técnica de Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gili Martins. Revisão Técnica de Helena Maria Ávila de Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2011
- TEOREMA de Jordan. Pequena explicação sobre o Teorema de Jordan. 1'24''. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=PeMocNVaov8>. Acesso em: 04 jul 2015
- TEOREMA fundamental das curvas planas. In: ATRACTOR: matemática interactiva. Disponível em: <<http://www.atractor.pt/mat/curvtor/curvatura3.htm>> Acesso em: 07 mai 2015
- TORÇÃO de uma curva. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Torção_de_uma_curva> Acesso em: 14 jul 2015
- TRIEDRO de Frenet. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Triedro_de_Frenet> Acesso em: 21 abr 2015

APÊNDICE A - SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Curvas Planas – Exercício Proposto 1

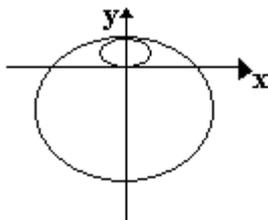
- a) $x + y = 1$
- b) $x + y = 1, 0 \leq x \leq 1$
- c) $x = y^2 - 2y - 3$
- d) $x^2 + (y + 3)^2 = 1$

1.1 Curvas Suaves – Exercício Proposto 2

- a) $\alpha(t) = (3t, -2 + 2t), t \in \mathbb{R}$
- b) $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{4a}), t \in \mathbb{R}$
- c) $\alpha(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$
- d) $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

1.2 Curva Regular – Exercício Proposto 3

- a) A curva α é regular, pois para cada $t \in [0, 2\pi]$ α é regular e $\alpha'(0) = (\sin 2 \cdot 0, -\cos^2 0) = (0, -1)$, ou seja, $\alpha'(0) \neq 0$. É fechada porque $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$
- b) Não é simples
- c)



1.3 Vetor Tangente – Exercício Proposto 4

- a) vetor velocidade = $(-6\sin 6t, 6\cos 6t)$; vetor aceleração = $(-36\cos 6t, -36\sin 6t)$ e velocidade escalar quando $t = \frac{\pi}{9}$ é 6.
- b) vetor velocidade = $(-2\sin 2t, -3\cos t)$; vetor aceleração = $(-4\cos 2t, 3\sin t)$ e velocidade escalar quando $t = \pi$ é 3.
- c) vetor velocidade = $(2e^{2t}, 2t)$; vetor aceleração = $(4e^{2t}, 2)$ e velocidade escalar quando $t = 0$ é 2.
- d) vetor velocidade = $(-\sin t, \cos t, 0)$; vetor aceleração = $(-\cos t, -\sin t, 0)$ e velocidade escalar quando $t = \frac{\pi}{2}$ é 1.

1.4 Comprimento de Arco – Exercício Proposto 5

- a) $\sqrt{2}(e^2 - 1)$
b) $2\pi a\sqrt{2}$

1.4 Comprimento de Arco – Exercício Proposto 6

- a) $\alpha(L) = (L\cos(\log_e L), L\sin(\log_e L))$
b) $\alpha(L) = (a(\cos(\frac{L\sqrt{2}}{2a}) + \sin(\frac{L\sqrt{2}}{2a})), a(\sin(\frac{L\sqrt{2}}{2a}) - \cos(\frac{L\sqrt{2}}{2a}))$

1.5 Vetores ao longo de Curvas – Exercício Proposto 7

- a) $k = \frac{1}{2}$ e $\rho = 2$
b) $k = \frac{4\sqrt{7}}{49}$ e $\rho = \frac{7\sqrt{7}}{4}$
c) $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ e $\rho = 2\sqrt{2}$
d) $k = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ e $\rho = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

1.6 Triedro e Fórmulas de Frenet – Exercício Proposto 8

$$T(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t, -\sin t, 1)$$
$$N(t) = (-\sin t, -\cos t, 0)$$
$$B(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t, -\sin t, 1)$$
$$k(t) = 2$$

1.7 Plano do Triedro de Frenet-Serrat – Exercício Proposto 9

$$x - y - \sqrt{2}z = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

1.8 Curvas no Plano Complexo – Exercício Proposto 10

- a) $k(t) = \frac{2 + t^2}{e^{-at}(1 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$
b) $k(t) = \sqrt{1 + a^2}$
c) $k(t) = \frac{3}{4a} \left| \frac{\sec t}{2} \right|$

1.10 Forma Canônica Local – Exercício Proposto 11

Suponha $s = 0$, e considere a forma canônica local em torno de $s = 0$. Pela condição 1, P tem a forma $z = cy$, ou $y = 0$. O plano $y = 0$ é o plano retificante, que não satisfaz a condição 2. Observe agora que se $|s|$ é suficientemente pequeno, $y(s) > 0$, e $z(s)$ tem o mesmo sinal que s .

Pela condição 2, $c = \frac{z}{y}$ é ao mesmo tempo positivo e negativo. Assim, P é o plano $z = 0$.

1.11 Evolutas e Involutas – Exercício Proposto 12

$$\alpha_e(\mathbf{t}) = \left(-t^2 - \frac{9}{2}t^4, \frac{4}{3}t + 4t^3 \right) \text{ para } t \neq 0$$