Sumário

Resumo

O respectivo trabalho visa contribuir para que alunos e professores possam aprimorar seus conhecimentos matemáticos em números complexos, polinômios e equações polinomiais. Inicialmente foi analisado o contexto histórico dos números complexos, em seguida foram vistos alguns conceitos importantes como o de corpo dos números complexos, unidade imaginária e plano complexo. Além disso, foram apresentadas as propriedades e operações básicas dos polinômios, o dispositivo de Briot-Ruffini, através do qual podemos obter o quociente e o resto da divisão de um polinômio p(x) por um polinômio linear. Parte significativa deste trabalho foi dedicado ao estudo de equações algébricas. Nessa perspectiva, foram discutidos alguns teoremas e métodos resolutivos de equações como o método de Gustavo, que nos auxilia na resolução de equações do terceiro e do quarto graus, o teorema das raízes racionais, entre outros. Para tanto, foi essencial provar o Teorema Fundamental da Álgebra, que afirma que todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa. Ademais, mostramos como podemos analisar o número de raízes reais de uma equação polinomial com coeficientes reais. Nesse sentido, provamos o Teorema de Descartes, que diz que o número de raízes positivas de uma equação não supera o número de mudanças de sinal na sequência dos seus coeficientes não nulos, provamos também o Teorema de Bolzano, que investiga o número de raízes reais de uma equação num intervalo real e, finalmente, o Teorema de Lagrange que estabelece um limite superior das raízes reais de uma equação.

Palavras-chave: Números complexos, Polinômios, Equações polinomiais.

Abstract

The respective work aims to help students and teachers to improve their math skills in complex numbers, polynomials and polynomial equations. Initially it analysed the historical context of complex numbers then were seen some important concepts such as the body of complex numbers, imaginary unit and complex plane. In addition, the properties and basic operations of the polynomials were presented, the Briot-Ruffini device, through which we can get the quotient and remainder of the division of a polynomial p(x) by a linear polynomial. Significant part of this work was devoted to the study of algebraic equations. In this perspective, were discussed some theorems and methods of resolution of equations such as the method of Gustavo, who helps us in the resolution of equations of the third and fourth degrees, the theorem of rational roots, among others. For both, it was essential to prove the Fundamental Theorem of Algebra, which says that all polynomial not constant with complex coefficients has at least one complex root.Furthemore, we show how we can analyze the number of real roots of a polynomial equation with real coefficients. In this sense, we will prove the Theorem of Descartes, which says that the number of positive roots of an equation does not exceed the number of signal changes following its non-zero coefficients, we prove the theorem of Bolzano, which investigates the number of real roots of an equation in a real interval and finally the theorem of Lagrange the establishes an upper limit on roots of an equation.

Keywords: Complex numbers, Polynomials, Polynomial equations.

Introdução

É fato que a abordagem do conteúdo de números complexos, polinômios e equações polinomiais, nos livros didáticos atuais, merecem uma atenção especial no sentido de que muitas vezes são inseridos nos mesmos uma serie de definições, conceitos e exercícios os quais não estão bem concatenados, por vezes, fora de uma sequência lógica e de um contexto histórico, nos remetendo a um material didático meramente enciclopédico, o que vem dificultando o aprendizado do educando.

Numa tentativa de fornecer um material didático razoalvelmente estruturado e conciso e utilizando uma linguagem acessível a alunos e professores, objetivei escrever a respeito de números complexos, polinômios e equações polinomiais, com destaque para este último, porém, de forma mais logicamente elaborada, incluindo em alguns momentos os aspectos históricos envolvidos, acrescentando alguns teoremas e proposições mais aprofundados que os usuais e suas respectivas demonstrações, permitindo assim um certo aprimoramento dos conhecimentos daqueles que se interessam pelo assunto.

O capítulo 1 é destinado ao estudo dos números complexos onde inicialmente foi discutido o contexto histórico dos números complexos. Em seguida, provamos que os números complexos satisfazem um conjunto de propriedades que o caracterizam como corpo, além disso, discorremos sobre a unidade imaginária, forma algébrica de um número complexo e o plano complexo. A intenção principal desse capítulo foi de fornecer subsídios para uma melhor compreensão do Teorema Fundamental da Álgebra e na resolução de equações algébricas.

O capítulo 2 trata das definições, propriedades e operações envolvendo polinômios com coeficientes complexos, ademais, prova o algoritmo da divisão para polinômios mostrando algumas consequências desse algoritmo e por fim é visto como podemos obter o quociente e o resto da divisão de um polinômio por polinômio linear, o conhecido dispositivo de Briot-Ruffini.

No capítulo 3 começamos descrevendo algumas tentativas históricas de demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra. Prescindindo das noções básicas de topologia, cálculo diferencial e análise complexa, provamos o TFA de forma que não fosse necessário grande traquejo algébrico para entendê-lo. O capítulo 4 é devotado a resolução de equações algébricas e foi a este capítulo que tentei dar maior destaque, justamente pelo fato de muitos livros didáticos adotados hoje tratarem o assunto de forma bastante superficial. Desse modo, foram apresentados os métodos de resolução de equações do terceiro e quarto graus, o teorema das raízes racionais, que nos fornece as possíveis raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiros e mais adiante como resolver algumas equações com características especiais, as chamadas equações recíprocas. O último capítulo investiga o número de raízes reais de uma equação com coeficientes reais. Nessa perspectiva, é demonstrado o Teorema de Descartes, que fornece informações a respeito do número de raízes positivas de um polinômio a partir do número de trocas de sinais na sequência dos seus coeficientes não nulos. Ademais, exploramos o Teorema de Bolzano que nos indica a quantidade de raízes reais num certo intervalo aberto real e finalmente, o Teorema de Lagrange que estabelece um limite superior das raízes reais de uma equação polinomial.

1 Números Complexos

1.1 Aspectos históricos

O aparecimento dos chamados números complexos - números da forma $a + b\sqrt{-1}$ com a e b números reais - data do século XVI, e é geralmente atribuído a Girolamo Cardano (1501-1576). Na sua obra Artis Magnae (geralmente referida como ***Ars Magna***), datada de 1545, Cardano considera equações quadráticas que, tais como a equação

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

por exemplo, não admitem soluções reais. A fórmula resolvente dá expressões "formais" para as duas soluções dessa equação, mas envolve raízes de números negativos:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{-1}.$$

Embora tais números surjam, de fato, na referida obra de Cardano, ele próprio se apressa a desvalorizá-los, referindo-se-lhes como "tão subtis quanto inúteis". De fato, para Cardano, tal como para os restantes matemáticos do seu tempo, com uma concepção da matemática ainda herdada dos Gregos, o que interessava eram, essencialmente, os problemas geométricos; nesse sentido, uma equação tal como a equação anterior, não tinha interesse por si própria, surgindo associada, por exemplo, ao problema geométrico da determinação da interseção da parábola $y = x^2$ com a reta $y = -2x - 2$, problema esse sem solução. Em 1512, Rafael Bombelli, discípilo de Cardano, lida, no seu livro *Algebra*, com a resolução de equações cúbicas do tipo

$$x^3 = 3px + 2q.$$

pela aplicação da chamada fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Ao aplicar tal fórmula à resolução da equação

$$x^3 = 15x + 4$$

(que corresponde, geometricamente, a determinar a interseção da cúbica $y = x^3$ com a reta de equação $y = 15x + 4$ obtém como solução

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}},$$

isto é, é uma expressão envolvendo raízes de números negativos. Neste caso, no entanto, Bombelli sabe (por inspeção) existir solução real x = 4 para o problema, o que parece, portanto, ser paradoxal. É, então, que lhe surge a ideia que, ele próprio, considera de "louca": E se

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \;\; for \; da \;\; forma \;\; 2 + n\sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \;\; for \; da \; forma \;\; 2 - n\sqrt{-1},$$

de modo que, ao somar, se obtenha, de fato x = 4?Admitindo que tal fato é verdade, elevando formalmente ao cubo cada uma dessas expressões(usando $(\sqrt{-1})^2 = -1$) e igualando, respectivamente, a

$$2 + 11\sqrt{-1} \quad e \quad 2 - 11\sqrt{-1},$$

obtém-se que

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \quad e \quad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

ou seja, vem n = 1!

Como facilmente se entende, Bombelli não aceita ainda os números complexos como números de pleno direito, continuando a considerá-los misteriosos; no entanto, é ele o primeiro a escrever explicitamente as regras para a adição, subtração e multiplicação de números complexos e a mostrar como, usando esse tipo de números com a aritmética, é possível obter soluções reais para a cúbica, quando se usa a fórmula de Cardano-Tartaglia. É também ele que introduz uma notação própria para $\sqrt{-1}$, chamando-lhe " *piú de meno* ".

À medida que se desenvolvem outras manipulações com números complexos e são introduzidas funções complexas de variável complexa, vai-se tornando clara sua utilidade e descobrindo como a sua utilização pode contribuir significamente para a simplificação de muitos problemas.

Apesar disso, durante quase três séculos, estes números vão sendo usados, mas não são nunca considerados números verdadeiramente "legítimos".

Em 1637, na sua obra *La Géométrie*(contida no *Discours de la méthode*), Descartes faz a distinçãoentre números "reais" e números "imaginários"(ou que existem apenas na imaginação), interpretando a ocorrência de soluções imaginárias para um certo problema como um sinal de que o problema em causa não tem solução geométrica. Esta opinião é, um século mais tarde, ainda compartilhada por Euler, apesar de este ter contribuído de forma significativa para o desenvolvimento da teoria das funções complexas. De fato, os números complexos só começam a ser aceitos como números de "pleno direito" em pleno século XIX, quando surge a ideia de os identificar com pontos do plano.

Em 1797, o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) apresenta à Real Acade mia de Ciências Dinamarquesa um artigo intitulado *" Om Direktionens analytiske Betegning"* ("Sobre a Representação Analítica de Direção"), no qual descreve pormenorizadamente a representação geométrica de números complexos. Tal artigo é publicado (em dinamarquês) nas Memórias da referida Academia, em 1799, mas permanece totalmente desconhecido até à sua tradução para francês, cerca de cem anos mais tarde. Entretanto, a ideia é atribuída ao suíço Jean Argand, que a apresenta, independentemente, em 1806. Desde aí, a representação geométrica dos números complexos, é conhecida vulgarmente por diagrama de Argand.

É, no entanto, apenas com a publicação em 1831 de um trabalho de Gauss, no qual é feito um estudo pormenorizado da representação geométrica dos números complexos, que estes começam a ganhar certa respeitabilidade, e se aceita que, de fato, não há nada de "imaginário" acerda deles. É a Gauss que se deve também a introdução da designação "números complexos".

Finalmente, em 1837, quase três séculos depois do seu aparecimento com Cardano, Hamilton publica a definição formal e completa do sistema de números complexos, como conjunto de pares ordenados de números reais com duas operações (uma adição e uma multiplicação) bem definidas.

Uma vez aceitos totalmente estes números, a análise complexa, ou seja, o estudo das funções complexas de variável complexa, desenvolveu-se de uma forma extremamente rápida no século XIX, essencialmente devido aos trabalhos de Cauchy. Ainda durante este século, esta teoria vai ser aprofundada a alargada, com matemáticos tais como Dirichlet, Weierstrass e Riemann. No século XX muitos matemáticos continuaram a dedicar-se a esta fascinante área da matemática, obtendo importantes desenvolvimentos e novas aplicações.

1.2 O corpo dos números complexos

Nesta seção, veremos que o conjunto $\mathbb{R}^2$, munido das operações de adição e multiplicação satisfaz uma série de propriedades as quais o qualifica como um corpo. Este corpo é usualmente denotado por $\mathbb{C}$, e os seus elementos são chamados de números complexos.

Dado o conjunto $\mathbb{R}^2$ de todos os pares ordenados de números reais, podemos definir duas operações binárias - uma adição (denotada pelo símbolo $+$) e uma multiplicação (denotada pelo símbolo $\cdot$) - da seguinte maneira:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \ . \ (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2)$$

Observe que a adição como foi definida é a adição usual do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pelo que, como sabemos, goza das propriedades comutativa e associativa; além disso, (0,0) é o elemento neutro para esta operação e todo par (x,y) tem inverso (-x,-y) tmbém chamado de simétrico.

Quanto à multiplicação, facilmente se mostra que, também ela, é comutativa e associativa, que existe elemento neutro (ou identidade) para esta operação (o par (1,0)) e que todo o elemento $(x, y) \neq (0, 0)$ tem inverso, dado por

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Finalmente, a multiplicação é distributiva em relação à adição.

Exemplo. Mostre que a operação definida em $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ por

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

é comutativa e satisfaz (1,0)(x,y) = (x,y), para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

Comutativa: $(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ Por outro lado, $(x_2, y_2).(x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2)$. Comparando as expressões acima obtemos o que queríamos mostrar.
Elemento neutro: Temos $(1, 0).(x, y)$=$(1x - 0y, 1y + 0x) = (x, y)$.

Exemplo. Mostre que a operação definida no exercício anterior é tal que se $(x, y) \neq (0, 0)$, então existe $(u, v) \in \mathbb{C}$ tal que (x,y).(u,v) = (1,0).

Inverso Multiplicativo: Se $(x, y) \neq (0, 0)$ então podemos definir

$$(u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

e obtemos

$$(x,y)\ .\ (u,v) = (x,y)\ .\ \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right) = (1,0)$$

As propriedades acima mencionadas permitem-nos, portanto, afirmar que o conjunto $\mathbb{R}^2$, munido das operações de adição e multiplicação definidas acima, constitui um corpo.

Considere agora a aplicação

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto (x,0),$$

e note-se que para quaisquer x,y $\in \mathbb{R}$, se tem

$$\alpha(x+y) = (x+y,0) = (x,0) + (y,0) = \alpha(x) + \alpha(y)$$

e

$$\alpha(xy) = (xy,0) = (x,0).(y,0) = \alpha(x).\alpha(y).$$

1.3 Unidade imaginária e forma algébrica

É usual denotar o complexo (0,1) pelo símbolo i. Utilizando esta notação e fazendo a identificação anterior dos complexos da forma (x,0) com os correspondentes números reais x, tem-se

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0).(1,0) + (0,y).(0,1) = x.1 + y.i = x + yi.$$

Dessa forma, todo número complexo (x,y) pode também ser designado por $x+yi$. Esta é a chamada *forma algébrica* de z, sendo esta a notação que passaremos a usar para números complexos nesse trabalho. É, então, imediato reconhecer que (denotando por z^2 o complexo z.z) se tem

$$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = -1.$$

Dado um número complexo z = x + yi chamamos a x a **parte real** de z e a y de **parte imaginária** de z, e escrevemos

$$Rez := x \qquad Imz := y,$$

Com o auxílio da forma algébrica de um número complexo z e considerando os números complexos $z_1 = (x_1 + y_1 i)$ e $z_2 = (x_2 + y_2 i)$, podemos reescrever as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$ da seguinte forma:

Adição: a soma $z_1 + z_2$ é obtida pelas somas das respectivas parte real e imaginária,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Multiplicação: aplicamos a distributividade e agrupamos as partes real e imaginária (lembrando que $i^2 = -1$)

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$

$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Uma vez definidas as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, podemos definir as operações de subtração e divisão de números complexos da maneira usual: se $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) \;\; e \;\; \frac{z_1}{z_2} = z_1 {z_2}^{-1} \;\; se z_2 \neq 0.$$

Dados os números complexos $z_1 = (x_1 + y_1 i)$ e $z_2 = (x_2 + y_2 i)$, dizemos que $z_1 = z_2$, se suas respectivas parte real e imaginária são iguais, ou seja, se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Dado um número complexo z=x+yi, chamamos **conjugado** de z e denotamos por $\overline{z}$ o número complexo

$$\overline{z} := x - yi.$$

Proposição 1. Se $z \in \mathbb{C}$, então temos as seguintes propriedades :

(i) $\overline{z} = 0$ se, e somente se, $z = 0$;

(ii) $\overline{z} = z$, se e somente se, $z \in \mathbb{R}$;

(iii) $\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}$

(iv) $\overline{(z - w)} = \overline{z} - \overline{w}$

(v) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$;

(vi)$Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Demonstração: Sendo z = x + yi e w = c + di temos:

(i) $\overline{z} = 0 \Leftrightarrow x - yi = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0.$

(ii)Temos

$$\overline{z} = z \ \Leftrightarrow x - yi = x + yi \ \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow \ z = x \in \mathbb{R}.$$

(iii)

$$\overline{(z+w)} = \overline{(x+yi)+(c+di)} = \overline{(x+c)+(y+d)i} =$$
$$(x+c)-(y+d)i = (x-yi)+(c-di) = \overline{z}+\overline{w}$$

(iv)

$$\overline{(z-w)} = \overline{(x+yi)-(c+di)} = \overline{(x-c)+(y-d)i} =$$
$$(x-c)-(y-d)i = (x-yi)-(c-di) = \overline{z}-\overline{w}$$

(v)

$$\overline{z.w} = \overline{(xc-yd)+(xd+yc)i} = (xc-yd)-(xd+yc)i.$$

Por outro lado

$$\overline{z}.\overline{w} = xc - xdi - yci - yd = (xc-yd)-(xd+yc)i,$$

provando a igualdade.
(vi) Temos

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{x+yi+x-yi}{2} = x = Re(z).$$
$$\frac{z+\overline{z}}{2i} = \frac{x+yi-x+yi}{2i} = y = Im(z).$$

Dado um número complexo z = x + yi, chamamos **módulo** ou **valor absoluto** de z e denotamos por |z| o número (real não negativo) dado por

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2};$$

Proposição 2: Se $z, w \in \mathbb{C}$, então temos as seguintes propriedades :
(i)$z.\overline{z} = |z|^2$, para todo $z \in \mathbb{C}$;

(ii)$|z| = |\overline{z}|$, para todo $\in \mathbb{C}$;

(iii) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ e $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$;

(iv)|z.w| = |z|.|w|, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.

(v) $|z+w| \leq |z|+|w|$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ *(desigualdade triangular)*

(vi) $||z|-|w|| \leq |z \pm w|$,para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$

Demonstração: Sendo z = x + yi e $w \in \mathbb{C}$ temos:

(i)$z.\overline{z} = (x+yi).(x-yi) = x^2+y^2 = |z|^2$.

(ii) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(-y)^2} = |\overline{z}|$

(iii) Sendo $z = x+yi$, então $Re(z) = x \leq |x| = |Re(z)|$ e

$$x \leq |x| = \sqrt{|x|^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$$

(iv) Usando proposição 2 (i), proposição 1 (v), a comutatividade e associatividade da multiplicação de números complexos e, novamente (i) da proposição 2, temos:

$$|z.w|^2 = (z.w)\overline{(z.w)} = (z.w).(\overline{z}.\overline{w}) =$$
$$(z.\overline{z}).(w.\overline{w}) = |z|^2.|w|^2 = (|z|.|w|)^2.$$

(v) Usando as proposições 1 e 2 e a distributividade da multiplicação com relação a adição de números complexos, temos:

$$|z+w|^2 = (z+w)\overline{z+w} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$$

$$= \text{z}.\overline{z} + z.\overline{w} + w.\overline{z} + w.\overline{w}$$

$$= |z|^2 + z.\overline{w} + w.\overline{z} + w.\overline{z} + |w|^2$$

Temos pela proposição 1(v) e usando a proposição 2 que:

$$\overline{\overline{z}.w} + \overline{z}w = 2Re(\overline{z}w) \leq 2|\overline{z}w| = 2|\overline{z}||w| = |z||w|$$

Assim,

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$$

e portanto,

$$|z+w| \leq |z|+|w|$$

(vi) Escrevendo $z = (z-w)+w$ e $w = (w-z)+z$ e usando a desigualdade triangular, obtemos:

$$|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w|+|w|$$

$$|w| = |(w-z)+z| \leq |w-z| + |z| = |z-w| + |z|.$$

daí como

$$|z| - |w| \leq |z-w| e - (|z| - |w|) \leq |z-w|$$

então

$$||z| - |w|| \leq |z-w|.$$

A desilgualdade $||z| - |w|| \leq |z+w|$ pode ser obtida fazendo as modificações convenientes acima.

Exemplo. Dados $z_1 = 2+4i$ e $z_2 = 4-i$, temos

i)$z_1 + z_2 = (2+4i) + (4-i) = 6+3i$

ii)$z_1 - z_2 = (2+4i) - (4-i) = -2+5i$

iii)$z_1 z_2 = (2+4i)(4-i) = 8-2i+16i-4i^2 = 12+14i$

iv) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+4i}{(4-i)}\frac{(4-i)}{(4-i)} = \frac{8+2i+16i+4i^2}{16-i^2} = \frac{4}{17} + \frac{18}{17}i$

Exemplo. Se $z = x+yi$, $z \neq 0$, determine a forma algébrica do inverso de z.
A razão $\frac{1}{z}$ é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, isto é,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{yi}{x^2+y^2}$$

Exemplo. Dados $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, determine a divisão $\frac{z_1}{z_2}$.
A divisão é obtida multiplicando-se o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, isto é,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(x_1+y_1 i)(x_2-y_2 i)}{(x_2+y_2 i)(x_2-y_2 i)} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}$$

Exemplo. Obtenha o número complexo z tal que $\overline{z} + 2z - i = 6+3i$. Sendo $z = x+yi$, então $\overline{z} = x-yi$ e então temos:

$$x - yi + 2(x+yi) - i + 6 + 3i$$

$$3x + yi - i = 6 + 3i$$

$$3x + (y-1)i = 6 + 3i.$$

Logo, pela igualdade de números complexos, devemos ter 3x = 6 e y - 1 = 3. Daí, x = 2 e y = 4, portanto $z = 2 + 4i$

Exemplo. Obtenha o valor real de a para que o número complexo $z = \frac{2+i}{a+i}$ seja real.

Temos que

$$\frac{2+i}{a+i} = \frac{2+i}{a+i}\frac{(a-i)}{(a-i)} = \frac{2a-2i+ai+1}{a^2+1} = \frac{2a+1}{a^2+1} + \frac{(-2+a)i}{a^2+1}.$$

Como o número complexo deve ser real, devemos ter $\frac{a-2}{a^2+1} = 0$ e como $a^2+1 \neq 0$, então a - 2 = 0, isto é, a = 2.

Exemplo. Sejam dados $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$, não nulos. Mostre que

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|.$$

Demonstração: Façamos indução sobre n. Para n = 1, de fato, $|z_1| \leq |z_1|$. Suponha que a desigualdade vale para um certo n e provemos que consequentemente vale para n + 1. Usando a desigualdade triangular para números complexos e em seguida a hipótese de indução, temos que:

$$|z_1+z_2+...+z_n+z_{n+1}| \leq |z_1+z_2+...+z_n|+|z_{n+1}| \leq |z_1|+|z_2|+...+|z_n|+|z_{n+1}|.$$

Logo, a desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.4 Plano complexo

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas num plano, a cada número complexo $z = x + yi$ poderá associar-se, de modo único, o ponto de coordenadas (x,y) = (Re z, Im z) desse plano (ou se preferirmos, o vetor que une a origem de coordenadas a esse ponto). Estabelece-se, assim, uma bijeção entre o conjunto dos números complexos e o conjunto dos pontos desse plano. Os números reais (ou seja, os complexos de parte imaginária nula) correspondem ao eixo das abscissas, o qual é designado por *eixo real*; de modo análogo, os complexos da forma iy (isto é, os complexos de parte real nula)- chamados *imaginários puros* - correspondem ao eixo das ordenadas, o qual costuma ser designado por *eixo imaginário.* Quando o plano xy é utilizado, deste modo, para a representação de números complexos, é usual chamar-lhe *plano complexo* ou *plano de Argand-Gauss* Muitas vezes, identificamos completamente o conjunto $\mathbb{C}$ com este plano e referimo-nos a $\mathbb{C}$ como o plano complexo, falando no ponto $z = x + yi$.

2 Polinômios com coeficientes complexos

Nesta seção veremos a definição de polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$, a definição de grau e mais algumas características envolvendo esses polinômios.

Um polinômio p(z) com coeficientes em $\mathbb{C}$ é uma expressão formal do tipo

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

onde $n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}$, para $0 \leq j \leq n$ e a variável z pode assumir qualquer valor complexo.

Os elementos a_j para $0 \leq j \leq n$ são chamados de ***coeficientes*** de p(z), as parcelas $a_j z^j$ de ***termos*** sendo a_0 o termo independente de z e os termos $a_j z^j$ tais que $a_j \neq 0$, de termos de grau j do polinômio p(z).

Chamamos $p(z) = a_0$, com $a_0 \in \mathbb{C}$, de polinômio constante. Se $p(z) = 0$, chamamos p(z) de polinômio identicamente nulo e podemos escrever tmabém $p(z) \equiv 0$. Este polinômio poderá ser escrito na forma

$$p(z) = 0z^n + 0z^{n-1} + ... + 0z + 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se p(z) for um polinômio não identicamente nulo, ou seja, $p(z) \neq 0$, então algum coeficiente deve ser diferente de zero e daí haverá um maior índice n tal que $a_n \neq 0$. Definimos o grau de p(z) como sendo este número ***n*** e o denotamos por ***gr(p(z))***. Neste caso, a_n é chamado de coeficiente ***líder*** de p(z). Chamaremos de polinômios ***mônicos*** aqueles de coeficiente líder $a_n = 1$.

Observação: Não definimos grau de polinômio identicamente nulo $p(z) \equiv 0$.

Exemplo. Seja $p(z) = z^2 - 5z + 2$. Temos um polinômio de coeficientes complexos 1, -5 e 2.

Exemplo. Seja $p(z) = z^2 - 2iz - i$. Temos um polinômio de coeficientes complexos 1, -2i e -i.

Exemplo. Seja o polinômio constante $f(z) = 2$, temos que gr (f(z)) = 0, uma vez que f não é identicamente nula.

Exemplo. Seja o polinômio $f(z) = z^3 - 2z + 4$, temos que f é mônico e gr (f(z)) = 3.

Seja o polinômio p(z) de coeficientes complexos tal que $n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{C}$, para $0 \leq j \leq n$,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

e seja $z_0 \in \mathbb{C}$. Definimos a avaliação de p(z) em z_0 como sendo

$$p(z_0) = a_n {z_0}^n + a_{n-1} {z_0}^{n-1} + ... + a_1 z_0 + a_0 \ \in \mathbb{C}.$$

Se $p(z_0) = 0$, dizemos que z_0 é uma raiz de p(z).

Considere dois polinômios de coeficientes complexos f e g. Temos que f e g serão iguais (ou seja, são tais que $f(z) = g(z)$ para todo z$\in \mathbb{C}$), se sua diferença f - g for identicamente nula. Contudo, isso acontece somente se todos os coeficientes de f - g são nulos; logo, dois polinômios de coeficientes complexos f e g são iguais se , e somente se, f e g têm coeficientes respectivamente iguais.

Exemplo. Seja o polinômio $f(z) = z^2 + z + 1 - i$. Observe que $f(i) = i^2 + i + 1 - i = -1 + i + 1 - i = 0$. Logo, i é raiz de f.

Exemplo. Seja $f(z) = z^4 + 2z^2 + 1$. Se f é um polinômio tal que $z \in \mathbb{R}, \forall z$, então, $f(z) = (z^2 + 1)^2 > 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$, o que mostra que f não tem raízes reais. Contudo, f é polinômio definido em $\mathbb{C}$ e em particular $f(\pm i) = [(\pm i)^2 + 1]^2 = [-1 + 1]^2 = 0$. Portanto, $\pm i$ são raízes complexas do polinômio f.

Exemplo. Os polinômios $f(z) = 3z^4 - 2z^2 + z - 4 + i$ e $g(z) = z - 2z^2 + 3z^4 - 4 + i$ são iguais, visto que os seus coeficientes a_i das i-ésimas potências de z^i são : $a_0 = i, a_1 = -4, a_2 = 1, a_3 = -2, a_4 = 3$.

Exemplo. Os polinômios $f(z) = z^3 - 3z + 1$ e $g(z) = z^3 + z - 3$ são diferentes, uma vez que os coeficientes de f(z) são $a_3 = 1, a_1 = -3$ e $a_0 = 1$ e os coeficientes de g(z) são $b_3 = 1, b_1 = 1$ e $b_0 = -3$ e daí não ocorre $a_j = b_j$, para $0 \leq j \leq 3$.

2.1 Polinômios e Operações

2.1.1 Adição de Polinômios

No conjunto dos polinômios de coeficientes complexos, podemos definir a operação de adição de polinômios, a partir da operação de adição de $\mathbb{C}$.

Dados dois polinômios com coeficientes complexos f(z) e g(z) com n > m.

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \quad e \quad g(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i$$

Após reescrever f(z) e g(z) com as mesmas potências de z, podemos supor que m = n e assim, definimos a adição desses polinômios da seguinte forma:

$$f(z) + g(z) = (a_n + b_n)z^n + ... + (a_2 + b_2)z^2 + (a_1 + b_1)z + (a_0 + b_0)$$

ou seja

$$f(z) + g(z) = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i, \ onde \ c_i = a_i + b_i, \ para \ 0 \leq i \leq n,$$

cujo resultado chama-se soma de f com g.

Exemplo. Somar $f(z) = z^2 + 3z + 4$ e $g(z) = z^4 + 3z^2 + 5$.Temos

$$(f + g)(z) = (0 + 1)z^4 + (0 + 0)z^3 + (1 + 3)z^2 + (3 + 0)z + (4 + 5)$$

Para a operação adição de polinômios, vale a seguinte propriedade do grau: se $f(z) \neq 0, g(z) \neq 0, f(z) + g(z) \neq 0$,
então

$$gr(f(z) + g(z)) \leq max\{gr(f(z)), g(z))\},$$

valendo a igualdade sempre que $gr(f(z)) \neq gr(g(z))$

De fato, como o coeficiente líder é o coeficiente do termo de mais alto grau de um polinômio, então, supondo primeiramente que gr f < gr g, temos que o coeficiente líder de f + g é o coeficiente líder de g, o que mostra que se $gr\ f \neq gr\ g$, então

$$gr(f(z) + g(z)) = max\{gr(f(z)), g(z))\},$$

Se gr f = gr g, o coeficiente líder de f + g é a soma dos coeficientes líderes de f e g. Como essa soma pode ser nula (basta que o coeficiente líder de f seja oposto ao coeficiente líder de g), o grau de f + g pode cair e daí temos que

$$gr(f(z) + g(z)) \leq max\{gr(f(z)), g(z))\}.$$

A adição de polinômios de coeficientes complexos tem as seguintes propriedades, para quaisquer f(z), g(z) e h(z):

- **(Associativa)** $((f(z)+g(z))+h(z)=(f(z)+(g(z)+h(z));$
- **(Comutativa)** $f(z)+g(z)=g(z)+f(z);$
- **(Existência de elemento neutro aditivo)** O polinômio nulo é tal que f(z) = 0 + f(z) para todo f(z) de coeficientes complexos.
- **(Existência de simétrico)** Dado $f(z)=a_0+a_1z+...a_nz^n$, o simétrico de f(z) é o polinômio

$$-f(z)=(-a_0)+(-a_1)z+...(-a_n)z^n.$$

Exemplo. Demonstre a propriedade associativa da adição de polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$.
Considere os polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$,

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i,\quad g(z)=\sum_{i=0}^{m}b_iz^i \quad e \quad h(z)=\sum_{i=0}^{l}c_iz^i$$

Uma vez que podemos reescrever f(z), g(z) e h(z) com as mesmas potências de z, então podemos supor que n = m = l e temos

$$\begin{aligned}((f(z)+g(z))+h(z)&=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)z^i+\sum_{i=0}^{n}c_iz^i\\&=\sum_{i=0}^{n}((a_i+b_i)+c_i)z^i\\&=\sum_{i=0}^{n}(a_i+(b_i+c_i))z^i\\&=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i+\sum_{i=0}^{n}(b_i+c_i)z^i\\&=(f(z)+(g(z)+h(z)).\end{aligned}$$

As demais demonstrações são corriqueiras.

2.1.2 Multiplicação de Polinômios

Considerando o conjunto dos polinômios de coeficientes complexos, podemos definir a operação multiplicação de polinômios, a partir da operação de multiplicação de $\mathbb{C}$.

Dados dois polinômios de coeficientes complexos

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \quad e \quad g(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i$$

Definimos a multiplicação desses polinômios da seguinte forma:

$$f(z).g(z) = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n).(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_m z^m) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)z^2 + ... + a_n b_m z^{m+n}$$

isto é,

$$f(z).g(z) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i z^i, \ onde$$

$c_0 = a_0 b_0$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$
. . .
$c_j = a_0 b_j + a_1 b_{j-1} + ... + a_j b_0 = \sum_{j+k=i} a_j.b_k$
. . .
$c_{m+n} = a_n.b_m$

Notemos ainda que fg pode ser obtido multiplicando-se cada termo $a_i z^i$ de f por cada termo $b_j z^j$ de g, segundo a regra $(a_i z^i).(b_j z^j) = a_i b_j z^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

Para a operação multiplicação de polinômios, vale a propriedade multiplicativa do grau: se $f(z) \neq 0, g(z) \neq 0$ então $f(z).g(z) \neq 0$, e sendo gr f(z) = n e gr g(z) = m, então vale

$$gr(f(z).g(z))=gr(f(z))+gr(g(z))$$

De fato, temos

$$c_{m+n} = a_n.b_m \neq 0$$

$$c_k = 0, \forall k > m+n$$

então

$$gr(f.g) = m+n = gr(f)+gr(g)$$

A multiplicação de polinômios de coeficientes complexos tem as seguintes propriedades, para quaisquer f(z), g(z) e h(z):

- **(Associativa)** $(f(z).g(z)).h(z) = f(z).(g(z).h(z))$
- **(Comutativa)** $f(z).g(z) = g(z).f(z)$
- **(Distributiva)** $f(z)(g(z)+h(z)) = f(z)g(z) + f(z)h(z);$
- **(Existência de elemento neutro)** O polinômio constante 1 é tal que 1.f(z) = f(z), para todo f(z) com coeficientes complexos.

Exemplo. Multiplicar $f(z) = z^3 + 2z^2 + z$ por $g(z) = 5z^2 + 4z - 1$.
Usando a propriedade distributiva da multiplicação de polinômios, temos:

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= (z^3 + 2z^2 + z)(5z^2 + 4z - 1) \\ &= z^3(5z^2 + 4z - 1) + 2z^2(5z^2 + 4z - 1) + z(5z^2 + 4z - 1) \\ &= (5z^5 + 4z^4 - z^3) + (10z^4 + 8z^3 - 2z^2) + (5z^3 + 4z^2 - z) \\ &= 5z^5 + 14z^4 + 12z^3 + 2z^2 - z \end{aligned}$$

Exemplo. Demonstre a propriedade comutativa da multiplicação de polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$.
Considere os polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \ e \ g(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i.$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(z).g(z) &= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} a_j.b_k \right) z^i \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} b_k.a_j \right) z^i \\ &= g(z).f(z) \end{aligned}$$

pois, em $\mathbb{C}$, temos $a_j.b_k = b_k.a_j$, para quaisquer j e k.

Exemplo. Demonstre a propriedade distributiva de polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$.
Considere os polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \quad g(z) = \sum_{i=0}^{m} b_i z^i \quad e \quad h(z) = \sum_{i=0}^{l} c_i z^i$$

Reescrevendo g(z) e h(z) com as mesmas potências de z, podemos supor l = m e então,

$$\begin{aligned} f(z).(g(z)+h(z)) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i z^i\right).\left(\sum_{i=0}^{m} (b_i + c_i) z^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} a_j.(b_k + c_k)\right) z^i \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} (a_j.b_k + a_j.c_k)\right) z^i \\ &= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} a_j.b_k\right) z^i + \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{j+k=i} a_j.c_k\right) z^i \\ &= f(z)g(z) + f(z)h(z), \end{aligned}$$

As demais demonstrações são corriqueiras.

2.1.3 Divisão de polinômios

Considere os polinômios de coeficientes complexos f(z) e g(z). Se $g(z) \neq 0$, dizemos que g(z) ***divide*** f(z) ou f(z) é ***divisível*** por g(z), quando existe o polinômio h(z) em $\mathbb{C}$, tal que f(z) = g(z).h(z) e dizemos, nesse caso, que f(z) é um múltiplo de g(z).

Exemplo: Temos que $p(z) = z^2 - 4z + 8$ divide $q(z) = z^4 + 64$
De fato,

$$q(z) = (z^2)^2 + 8^2 = (z^2+8)^2 - 2z^2 8 = (z^2+8)^2 - 16z^2$$

$$= (z^2+8)^2 - (4z)^2 = (z^2 + 8 - 4z)(z^2 + 8 + 4z).$$

Exemplo. O polinômio $p(z) = z^n - a^n$ é divisível por z-a, onde a é um número complexo qualquer e $n \geq 2; n \in \mathbb{N}$. Basta verificar que

$$z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + ... + a^{n-2}z + a^{n-1})$$

Proposição: Sejam f(z) e g(z) polinômios de coeficientes complexos não identicamente nulos. Se g(z) divide f(z), então gr(g(z)) $<$ gr(f(z)).

Demonstração: Como g(z) divide f(z) e ambos são não nulos, existe h(z) de coeficientes complexos, não nulo tal que f(z) = g(z).h(z). Pela propriedade multiplicativa do grau, temos

$$gr(f(z)){=}gr(g(z).h(z)){=}gr(g(z)) + gr(h(z)) \geq gr(g(z)).$$

Exemplo. Verifique se o polinômio $p(z) = 3z^3 + 5z^2 + z - 1$ é divisível por $3z - 1$.
Devemos verificar se existe um polinômio h tal que

$$p(z){=}(3z-1) \cdot h(z)$$

de forma que essa igualdade seja satisfeita para qualquer complexo z. Observe que a igualdade exige que os coeficientes sejam idênticos dos dois lados da igualdade. Atente que caso exista esse polinômio, ele deve ser do segundo grau, pois pela propriedade do grau

$$gr(p(z)) = gr(3z-1) + gr(h(z)) \Rightarrow gr(h(z)) = 3 - 1 = 2.$$

Portanto h(z) é da forma $az^2 + bz + c$ e procuramos números a,b e c tais que

$$3z^3 + 5z^2 + z - 1 = (3z-1) \cdot (az^2 + bz + c)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos

$$(3z-1) \cdot (az^2 + bz + c) = 3az^3 + (3b-a)z^2 + (3c-b)z - c$$

e daí devemos ter

$$3z^3 + 5z^2 + z - 1 = 3az^3 + (3b-a)z^2 + (3c-b)z - c$$

Portanto, deve-se ter:

$$3a = 3$$

$$3b - a = 5$$

$$3c - b = 1$$

$$c = 1$$

Logo, a = 1, da segunda equação b = 2 e da última temos que c = 1 onde a terceira equação é satisfeita para b e c encontrados. Logo, p(z) é divisível por (3z - 1).

Esse método de resolução é chamado de método dos coeficientes a determinar de Descartes, pelo qual podemos obter polinômios sob determinadas condições, utilizando o fato de que a igualdade de polinômios exige a igualdade de todos os seus coeficientes. Uma outra maneira de verificar se um polinômio é divisível por outro é utilizando o algoritmo da divisão que será discutido logo a seguir.

A divisibilidade entre dois polinômios exerce um papel significativo no estudo de suas raízes. Se um polinômio p pode ser escrito como o produto $p = f.g$ de dois polinômios f e g, então um complexo z_0 é raíz de p se, e somente, se z_0 é raiz de f ou de g, uma vez que

$$f(z) \cdot g(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0 \ ou \ g(z) = 0.$$

Sabemos que segundo o conceito de divisão de números inteiros, dado um inteiro dividendo **a** e um inteiro divisor **b** $\neq 0$, dividir a por b consiste em encontrar inteiros **q** e **r** (onde $0 \leq r < |b|$), chamados respectivamente, de quociente e resto da divisão, que cumpram a = bq + r. É possível demonstrar que q e r existem e são únicos.

Da mesma forma, dividir um polinômio de coeficientes complexos f(z) (dividendo) por um outro polinômio g(z) (divisor) não identicamente nulo, consiste em obter polinômios de coeficientes complexos q(z) e r(z), chamados respectivamente, de quociente e resto da divisão, que cumpram:

$$f(z) = q(z)g(z) + r(z),$$

onde r(z) = 0 ou gr(r(z)) < gr(g(z)).

Teorema. O quociente e o resto da divisão de um polinômio de coeficientes complexos f(z) por um polinômio g(z) (não identicamente nulo) existem e são únicos.

Existência: Seja $g(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m$, onde b_m tem inverso $b_m^{-1} \in \mathbb{C}$. Se f(z) = 0, então tome q(z) = r(z) = 0. Suponhamos que $f(z) \neq 0$. Considere n = gr(f(z)) e escreva

$$f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n, \ com \ a_n \neq 0.$$

Se n $<$ m, então tome q(z) $=$ 0 e r(z) $=$ f(z).

Podemos supor $n \geq m$. A demonstração é por indução sobre n $=$ gr(f(z)). Se n $=$ 0, então $0 = n \geq m = gr(g(z))$, portanto

$$m = 0,\ f(z) = a_0 \neq 0, g(z) = b_0,\ com\ {b_0}^{-1} \in \mathbb{C}.$$

Dessa forma, temos que

$$f(z) = a_0{b_0}^{-1}g(z),\ com\ q(z) = a_0{b_0}^{-1}\ e\ r(z) = 0.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para polinômios com grau menor do que n $=$ gr(f(z)). Mostremos que de fato vale para f(z).

Seja $f_1(z)$ o polinômio definido por $f_1(z) = f(z) - a_n{b_m}^{-1}z^{n-m}g(z)$. O polinômio $a_n{b_m}^{-1}z^{n-m}g(z)$ tem grau n e coeficiente líder a_n. Portanto, $gr(f_1(z)) < gr(f(z))$. Por hipótese de indução, existem $q_1(z)$ e $r_1(z)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$ tais que

$$f_1(z) = q_1(z)g(z) + r_1(z),$$

com $r_1(z) = 0$ ou $gr(r_1(z)) < gr(g(z))$. Logo,

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) + a_n{b_m}^{-1}z^{n-m}g(z) \\ &= (q_1(z)g(z) + r_1(z)) + a_n{b_m}^{-1}z^{n-m}g(z) \quad (1) \\ &= (q_1(z) + a_n{b_m}^{-1}z^{n-m})g(z) + r_1(z). \quad (2) \end{aligned}$$

Em (1), substituímos a expressão de $f_1(z)$ e, em (2), usamos a comutatividade da adição e a distributividade em polinômios de coeficientes complexos. Tomamos $q(z) = q_1(z) + a_n{b_m}^{-1}z^{n-m}$ e $r(z) = r_1(z)$.

(Unicidade) Considere $q_1(z), r_1(z), q_2(z), r_2(z)$ tais que

$$f(z) = q_1(z)g(z) + r_1(z) = q_2(z)g(z) + r_2(z) \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1(z) &= 0\ ou\ \ gr(r_1(z)) < gr(g(z)) \\ r_2(z) &= 0\ ou\ \ gr(r_2(z)) < gr(g(z)) \end{aligned}$$

De (3), segue que $(q_1(z) - q_2(z))g(z) = r_2(z) - r_1(z)$.
Se $q_1(z) \neq q_2(z)$, então $q_1(z) - q_2(z) \neq 0$, assim, $r_2(z) - r_1(z) \neq 0$ e, da proposição anterior, obtemos

$$gr(\underbrace{g(z)}_{divisor}) \leq gr(r_2(z) - r_1(z)) < gr(g(z)),$$

uma contradição. Portanto, $q_1(z) = q_2(z)$, logo $r_2(z) = r_1(z)$.

Corolário: Se f(z) um polinômio com coeficientes complexos e $a \in \mathbb{C}$, então o resto da divisão de f(z) por z-a é dado por f(a).

Demonstração: Pelo algoritmo da divisão, temos que

$$f(z) = q(z) \cdot (z - a) + r(z),$$

onde q(z) e r(z) têm coeficientes em $\mathbb{C}$, com

$$r(z) = 0 \ ou \ gr(z) < gr(z - a) = 1.$$

Assim, r(z) é constante, portanto,

$$f(a) = (a - a) \cdot q(a) + r(a) = r.$$

Proposição: Seja f(z) um polinômio de coeficientes complexos. Então $a \in \mathbb{C}$ é uma raiz de f(z) se, e somente se, z - a divide f(z).

Demonstração: Como consequência do corolário anterior, temos que se a é raiz de f(z), então,

$$r = f(a) = 0, \ ou \ seja, \ z - a \ \ divide \ f(z).$$

Reciprocamente, suponhamos que z - a divida f(z). Então, existe q(z) com coeficientes em $\mathbb{C}$ tal que $f(z)= q(z) \cdot (z - a)$. Portanto,

$$f(a) = q(a)(a - a) = \ q(a).0 =0.$$

Exemplo. Determine o resto da divisão do polinômio p(z) pelo polinômio q(z) = z, onde $p(z) = (z - 1) \cdot (z - 2) \ldots (z - n) + a$.
Utilizando o corolário anterior, o resto r da divisão de p(z) por q(z) é p(0).
Logo,

$$\begin{aligned} r &= (0 - 1) \cdot (0 - 2) \ldots (0 - n) + a \\ &= (-1) \cdot (-2) \ldots (-n) + a \\ &= (-1)^n \cdot n! + a \end{aligned}$$

Vejamos como encontrar o quociente e o resto da divisão de f(z) por g(z). Para isso, foram elaboradas tabelas ilustrando os cálculos passo a passo. Os exemplos a seguir tratam-se de uma maneira prática de interpretar a demonstração do teorema anterior.

Exemplo: Dividir o polinômio $f(z) = 3z + 4$ por $g(z) = z^2 + 3z + 1$.
(Passo 1) Temos $gr(f(z)) = 1 < 2 = gr(g(z))$. Nada a fazer.
(Passo 2) O quociente é q(z) = 0 e o resto é r(z) = f(z) = 3z + 4.

$$\begin{array}{r|l} 3z + 4 & z^2 + 3z + 1 \\ \cline{2-2} -\ 0 & 0 \\ \cline{1-1} 3z + 4 & \end{array}$$

Exemplo: Dividir $f(z) = 2z^4 + 5z^3 + z^2 - z + 2$ por $g(z) = z^2 + 3z + 1$.

(Passo 1) O quociente da divisão de $2z^4$ por z^2 é $q_1(z) = 2z^2$.
(Passo 2) Fazendo os cálculos:

$$r_1(z) = f(z) - q_1(z)g(z) = (2z^4 + 5z^3 + z^2 - z + 2) - 2z^4 - 6z^3 + 2z^2 = -z^3 - z^2 - z + 2$$

$$\begin{array}{l|l} \ \ 2z^4 + 5z^3 + z^2 - z + 2 & z^2 + 3z + 1 \\ \cline{2-2} -2z^4 - 6z^3 - 2z^2 & 2z^2 \\ \cline{1-1} -z^3 - z^2 - z + 2 & \end{array}$$

(Passo 3) Como $3 = gr(r_1(z)) > gr(g(z)) = 2$ devemos continuar dividindo $r_1(z)$ por g(z), pois $r_1(z)$ não é o resto da divisão.
(Passo 4) O monômio de maior grau de $r_1(z)$ é $-z^3$ e o monômio de maior grau de g(z) é z^2. O quociente da divisão de $-z^3$ por z^2 é $q_2(z) = -z$.
(Passo 5) Fazendo os cálculos:

$$r_2(z) = r_1(z) - q_2(z)g(z) = (-z^3 - z^2 - z + 2) + z^3 + 3z^2 + z = 2z^2 + 2.$$

$$\begin{array}{r|l} 2z^4 + 5z^3 + z^2 - z + 2 & z^2 + 3z + 1 \\ \cline{2-2} -2z^4 - 6z^3 - 2z^2 \qquad\quad & 2z^2 - z \\ \cline{1-1} -z^3 - z^2 - z + 2 & \\ z^3 + 3z^2 + z \quad\ & \\ \cline{1-1} 2z^2 + \quad 2 & \end{array}$$

(Passo 6) Como $2 = gr(r_2(z)) = gr(g(z)) = 2$ podemos continuar calculando a divisão de $r_2(z)$ por g(z), pois $r_2(z)$ não é o resto da divisão.

(Passo 7) O monômio de maior grau de $r_2(z)$ é $2z^2$ e o monômio de maior grau de g(z) é z^2. O quociente da divisão de $2z^2$ por z^2 é $q_3(z) = 2$.
(Passo 8) Fazendo os cálculos:

$$r_3(z) = r_2(z) - q_3(z)g(z) = (2z^2 + 2) - 2z^2 - 6z - 2 = -6z.$$

$$\begin{array}{r|l}
2z^4 + 5z^3 + z^2 - z + 2 & z^2 + 3z + 1 \\ \cline{2-2}
-2z^4 - 6z^3 - 2z^2 \quad\quad\quad & 2z^2 - z + 2 \\ \cline{1-1}
-z^3 - z^2 - z + 2 & \\
z^3 + 3z^2 + z \quad\; & \\ \cline{1-1}
2z^2 + \quad\quad 2 & \\
-2z^2 - 6z - 2 & \\ \cline{1-1}
-6z \quad\quad &
\end{array}$$

(Passo 9) Como $1 = gr(r_3(z)) < gr(g(z)) = 2$, terminamos o algoritmo, pois $r_3(z)$ é o resto da divisão.
(Passo 10) Obtemos $q(z) = 2z^2 - z + 2 = q_1(z) + q_2(z) + q_3(z)$ e $r(z) = r_3(z) = -6z$.

Definição: Dizemos que $a \in \mathbb{C}$ é uma raiz de um polinômio f(z) com coeficientes em $\mathbb{C}$, de multiplicidade **m**, quando $(z-a)^m$ dividir f(z) e $(z-a)^{m+1}$ não dividir f(z). Nesse caso, existe o polinômio q(z) com coeficientes em $\mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = (z-a)^m q(z), \ com \ q(a) \neq 0.$$

Dizemos que a é uma raiz simples de f(z) quando m = 1 e uma raiz múltipla quando $m \geq 2$.

Exemplo. Dado o polinômio $f(z) = (z-2)^3(z-4)(z^2+z-1)$, temos que 2 é raiz de multiplicidade 3 e 4 é raiz simples de f(z).

Seja $f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ um polinômio com coeficientes complexos. A ***derivada*** de f(z) é o polinômio definido pela expressão formal:

$$f'(z) = D(f(z)) = \sum_{j=1}^{n} j a_j z^{j-1} = a_1 + 2a_2 z + ... + n a_n z^{n-1}$$

Pondo $f^{(1)} = f'$, as ***derivadas sucessivas*** são definidas por

$$f^{(j+1)}(z) = D(f^{(j)}(z)), \ para \ cada \ j \in \mathbb{N}.$$

A derivada tem as seguintes propriedades para quaisquer polinômios de coeficientes complexos f(z), g(z) e $a, b \in \mathbb{C}$

(i) D(f(z) + g(z)) = D(f(z)) + D(f(z)).
(ii) D(f(z).g(z)) = D(f(z)).g(z) + f(z)D(g(z)).
(iii) D(af(z)) = a(D(f(z))
(iv) $D((z-a)^n) = n(z-a)^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Sendo $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$; $a_i \in \mathbb{C}$ e sendo $n \geq 1$, podemos aplicar sucessivamente o algoritmo da divisão, dividindo f(z) por z - a , $a \in \mathbb{C}$, de tal forma que f(z) pode ser escrito em potências de z-a:

$$f(z) = t_0 + t_1(z-a) + t_2(z-a)^2 + t_3(z-a)^3 + ... + t_n(z-a)^n$$

e derivando sucessivamente, obtemos que

$$f'(z) = t_1 + 2t_2(z-a) + 3t_3(z-a)^2 + 4t_4(z-a)^3 + ...$$

$$f''(z) = 2t_2 + 3.2t_3(z-a) + 4.3t_4(z-a)^3 + ...$$

$$...$$

$$f^{(j)}(z) = j!t_j + (j+1)j!t_{j+1}(z-a) + ...$$

$$...$$

$$f^{(n)}(z) = n!t_n.$$

Avaliando em **a** esses polinômios temos que

$$f^{(j)}(a) = j!t_j, \ para \ cada \ j = 1, ..., n$$

onde $f^{(0)}(z) = f(z)$. Logo,

$$t_j = \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \ e \ f(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

Isto é,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad (1)$$

conhecida como fórmula de Taylor.

Seja f(z) um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ com $gr(f(z)) = n \geq 1$ e $a \in \mathbb{C}$ uma raiz de f(z). Da fórmula de Taylor, obtemos uma caracterização para a multiplicidade $\boldsymbol{m}$ da raiz $\boldsymbol{a}$, onde $1 \leq m \leq n$, em função das derivadas sucessivas.

Teorema: Se z_0 é uma raiz de f(z) de multiplicidade $\boldsymbol{m}$ então $f^{(k)}(z_0) = 0$, para todo k < m e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
A raiz z_0 tem multiplicidade $\boldsymbol{m}$ se e somente se $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, onde g(z) é um polinômio de coeficientes complexos e $g(z_0) \neq 0$. Pela fórmula de Taylor temos que:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + ... + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j + \sum_{j=m}^{n} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j + (z - z_0)^m \sum_{j=m}^{n} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^{j-m}$$

Uma vez que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, com $g(z_0) \neq 0$, então pela unicidade no algoritmo da divisão:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j \equiv 0 \ e \ g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

Portanto, $f^{(k)}(z_0) = 0, \forall k < m$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

2.2 Dispositivo de Briot-Ruffini

Nesta seção, veremos que dado um polinômio p(z) com coeficientes em $\mathbb{C}$, existe uma maneira prática de efetuarmos a divisão de p(z) por um polinômio do primeiro grau da forma z - a com $a \in \mathbb{C}$.

Vamos considerar o polinômio p(z) com coeficientes complexos

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

e sejam

$$q(z) = b_{n-1} z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + +... + b_1 z + b_0 \ e \ r(z) = r_0$$

o quociente e o resto da divisão euclidiana de p(z) por z - a, $a \in \mathbb{C}$, onde q(z) tem coeficientes complexos. Desse modo, temos:

$$p(z) = q(z)(z-a) + r_0$$

Efetuando a multiplicação do segundo membro, obtemos:

$$q(z) \cdot (z-a) = b_{n-1}z^{n-1} + (b_{n-2} - ab_{n-1})z^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2})z^{n-2}$$

$$+ \ldots + (b_0 - ab_1) \cdot z + (r_0 - ab_0)$$

Igualando os coeficientes, obtemos:

$$b_{n-1} = a_n$$

$$b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1} \longrightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + abn_{n-1}$$

$$b_{n-3} - ab_{n-2} = a_{n-2} \longrightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + abn_{n-2}$$

$$\ldots$$

$$r_0 - ab_0 = a_0 \longrightarrow r_0 = a_0 + ab_0$$

Esse procedimento pode ser colocado na seguinte forma prática, chamado de dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccccc} \text{a} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_1 & b_0 & r_0 \end{array}$$

Afim de montar o dispositivo, o polinômio p(x) deve estar ordenado segundo as potências decrescentes de z e expresso com todos os seus termos, inclusive aqueles que têm coeficiente nulo.

Vejamos como podemos utilizar desse dispositivo para efetuar, por exemplo, a divisão de $p(z) = 2z^3 - 4z^2 + z - 3$ por z - 3.

1. Montamos o dispositivo colocando primeiramente a raiz do divisor e em seguida os coeficientes de p(z):

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ \hline & & & & \end{array}$$

2. Repetimos o coeficiente líder do polinômio p(z) na linha inferior:

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

3. Multiplicamos a raiz do divisor por esse coeficiente líder e em seguida somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de p(z), colocando o resultado abaixo desse coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & 2 & & \end{array}$$

4. Multiplicamos a raiz do divisor pelo resultado que acabamos de obter, somamos o produto com o próximo coeficiente de p(z) colocando esse novo resultado abaixo desse coeficiente, e assim sucessivamente. O último resultado é o resto da divisão e os demais são os coeficientes do quociente, dispostos em ordem decrescente das potência de z.

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & 2 & 7 & |\ 18 \end{array}$$

Dessa forma, o quociente $q(z) = 2z^2 + 2z + 7$ e o resto r(z) $=$ 18.

Exemplo. Determine o quociente e o resto da divisão de $p(z) = 2z^3 - z^2 - 1$ por z-1.
Utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini obtemos

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & |\ 0 \end{array}$$

Dessa forma, o quociente $q(z)$=$2z^2 + 2z + 1$ e o resto é r(z) $=$ 0.

Exemplo. Determine o quociente e o resto da divisão de $p(z) = z^3 - iz^2 + 2z + i$ por z - i.

i	1	$-i$	2	i
	1	0	2	$\mid 3i$

Assim, o quociente na divisão por z - i é $q(z)$=$z^2 + 2$ e o resto é r(z) = 3i.

Exemplo. Determine a e b para que o polinômio $p(z) = 2z^3 - z^2 + az + b$ seja divisível por $(z - 1)^2$.
Como p(z) é divisível por $(z - 1)^2$, então p(z) é divisível por (z-1).(z-1) e dessa forma, pelo Dispositivo de Briot-Ruffini, temos

1	2	-1	a	b
1	2	1	$(1 + a)$	$\mid (1 + a + b)$
	2	3	$(4 + a)$	$\mid (5 + 2a + b)$

Uma vez que p(z) é divisível por $(z - 1)^2$, então 1 + a + b = 0 e 5 + 2a + b = 0 e portanto, 1 + a + b = 5 + 2a + b, segue que a = - 4 e b = 3.

3 Teorema Fundamental da Álgebra

3.1 Aspectos históricos do teorema

Nesta seção serão discutidas, sob um ponto de vista histórico, algumas tentativas de demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) que afirma que ***todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.***

Séculos antes da criação dos números complexos, François Vieta (1540-1603) exibiu várias equações (polinomiais com coeficientes reais) de grau n com n raízes. Peter Roth (falecido em 1617) já afirmara, em 1608, que equações polinomiais de coeficientes reais de grau n têm no máximo n raízes. Porém, Roth já utilizara que tais equações efetivamente admitem raízes. O matemático belga, nascido na França, Albert Girard (1595-1632), na sua "L'invention Nouvelle en l'Algèbre", em 1629, foi o primeiro a afirmar que há sempre soluções (possivelmente repetidas) para tais equações, mas não demonstrou tal fato.

René Descartes(1596-1650), na terceira parte " La Geométrie", em 1637, descreve tudo o que se conhecia à época sobre equações polinomiais, observa que um polinômio p(x) com coeficientes reais na variável real x que se anula em um número real α é divisível pelo polinômio de grau um (x - α), e apresenta a famosa "regra dos sinais" para calcular o número máximo de raízes reais positivas e negativas.

O alemão G. W. Leibniz (1646-1716), procurando integrar uma função dada pela divisão de dois polinômios com coeficientes reais, na "Acta Eruditorum" de 1702 considera a questão de saber se é sempre possível fatorar um polinômio real em fatores lineares reais (polinômios reais de grau 1) ou fatores quadráticos reais (polinômios reais de grau 2). Porém, Leibnitz vem a desistir de provar a existência de tal fatoração, face ao "contra-exemplo" que ele encontra. Leibnitz achara que a fatoração para o polinômio $x^4 + r^4$, com r um número real,

$$x^4 + r^4 = (x^2 - r^2 i)(x^2 + r^2 i) = (x + r\sqrt{i})(x - r\sqrt{i})(x + r\sqrt{-i})(x - r\sqrt{-i})$$

era tal que o produto de dois fatores quaisquer no lado direito da equação acima nunca é um polinômio quadrático real. Certamente, Leibnitz não percebera que $\sqrt{i}$ e também $\sqrt{-i}$ podem ser postos na forma padrão a + bi, escrevendo

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad , \quad \sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

caso contrário ele teria visto que, na fatoração de $x^4 + r^4$, multiplicando o primeiro e o terceiro fatores e multiplicando o segundo e o quarto fatores encontramos dois polinômios quadráticos reais tais que

$$x^4 + r^4 = (x^2 + r\sqrt{2}x + r^2)(x^2 - r\sqrt{2}x + r^2).$$

O suíço L. Euler (1707-1783) em 1742 enunciou que um polinômio com coeficientes reais pode ser fatorado como um produto de fatores lineares e fatores quadráticos, mas não conseguiu uma prova concreta desse fato. Porém, Euler demonstrou tal teorema para polinômios reais de grau menor ou igual a seis. Euler também enunciou que um polinômio com coeficientes reais que tem "raízes imaginárias" tem então uma raiz da forma $a + b\sqrt{-1}$, com a e b números reais. Ainda, Euler já utilizava extensivamente números complexos e notação $i = \sqrt{-1}$.

Em 1746 o enciclopedista françês J. d' Alembert (1717-1783), atuante na Revolução Francesa de 1789, tal como Leibnitz pesquisando um método para integrar uma função dada pela divisão de dois polinômios com coeficientes reais) o hoje denominado Método das Frações Parciais), encontra uma demonstração difícil do TFA e que contém um erro que só em 1851 seria corrigido, por V. Puiseux (1820-1883). Devido a tal demonstração, na literatura francesa o Teorema Fundamental da Álgebra é chamado teorema de d'Alembert. Atualmente, procura-se resgatar a validade da demonstração de d'Alembert, obviamente inserindo a necessária correção.

J. L. Lagrange (1736-1813) em 1772 levantou objeções à demonstração de Euler e obteve sucesso em preencher várias lacunas na prova de Euler. Mas, sua prova também era incompleta. É importante salientar que em 1777 Lagrange já observara em uma carta que os "números imaginários" já haviam se tornado universalmente aceitos como parte da matemática.

Em 1795, P.S. Laplace (1749-1827) apresentou uma demonstração muito elegante do TFA e bem diferente daquela de Lagrange-Euler. Sua sofisticada demonstração também era incompleta, porém é hoje reabilitada.

Em 1798 o inglês James Wood, publicou em *The Philosophical Transactions of the Royal Society* o artigo " On the roots of equations," apresentando uma prova do TFA para polinômios com coeficientes reais. Sua prova também continha falhas. Recentemente, em 2000, sua prova foi reabilitada por Frank Smithies.

Em 1799 o alemão K. F. Gauss (1777-1855) em sua tese de doutorado apresentou uma demonstração para o TFA que veio a ser considerada a primeira prova correta do teorema. Porém tal demonstração também contém "problemas" que só seriam superados em 1920 por A. Ostrowski. Tal trabalho foi comentado por S. Smale em 1981. Em 1816 Gauss apresenta sua segunda prova, a qual é bastante algébrica, do TFA. Tal prova é correta porém utiliza um resultado que só seria provado posteriormente (o Teorema do Anulamento: uma função contínua num intervalo que é maior que zero num ponto e menor que zero em outro, se anula em um terceiro ponto.) Ainda em 1816 Gauss mostra sua terceira prova do TFA, baseada na teoria da integração. Em 1849, ano do jubileu de sua tese de doutorado, Gauss apresenta sua quarta prova do TFA, onde o teorema é enunciado para polinômios com variável e coeficientes complexos.

Em 1806 o suíço J. R. Argand (1768-1822), um dos idealizadores da identificação do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$, publica um esboço de uma demonstração do TFA em um ensaio sobre a representação dos números complexos. Alguns anos depois, em 1814, Argand publica a primeira prova totalmente correta do Teorema Fundamental da Álgebra enunciado para polinômios com coeficientes complexos, porém utilizando um resultado - sobre a existência do mínimo de uma função contínua - que só em 1861 seria estabelecido por K. Weierstrass (O Teorema do Máximo e do Mínimo, publicado por G. Cantor(1845-1918) em 1870). A prova de Argand de 1814, não reconhecida a princípio devido a tal lacuna, é muito provavelmente a mais simples das demonstrações do TFA. Entretanto, tal prova não é elementar para o padrão moderno da matemática. Esta prova de Argand foi adotada em vários livros textos no século XIX, mas foi aos poucos relegada a um segundo plano no século XX quando o TFA passou a ser apresentado como consequência do Teorema de Liouville - provado por J. Liouville (1809-1882) - em cursos de "Integração em uma Varável Complexa", em uma demonstração por contradição.

Em 1946 o inglês J. Littlewood (1885-1977) publica uma nova prova do TFA que elementariza a dada por Argand. Porém, a prova de Littlewood é sofisticada (e " somewhat artificial in appearance", em suas palavras). Sua prova é feita por contradição e por indução. Em 2009, o holandês Theo de Jong publicou uma versão modernizada da primeira prova de Gauss para o TFA (1799). Porém, a apresentação não é elementar, pois usa o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange e assim, resultados superiores do Cálculo.

Tradicionalmente o TFA é provado em cursos de uma variável complexa nos bacharelados de matemática e física e/ou nos cursos de pós-graduação em matemática e física, sendo que não raras vezes os alunos tem contato com tal teorema pela primeira vez na pós-graduação. Em tais cursos, via de regra o TFA é provado logo após o Teorema de Liouville o qual é deduzido da Fórmula Integral de Cauchy, devida a A. L. Cauchy (1789-1857), que para sua prova requer o estudo da Teoria da Integração em uma Variável Complexa. Muitas vezes o TFA é demonstrado utilizando a Teoria de Galois ou a Topologia Algébrica, que são teorias sofisticadas.

3.2 A translação na variável $p(z + z_0)$

Considere o polinômio p(z) com coeficientes complexos, $gr(p(z)) = n \geq 1 \ e \ a_n \neq 0:$

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

Isto é, p(z) é um polinômio na variável z, com termo independente $p(z_0)$ e coeficiente líder a_n.

Já vimos que se z_0 um número fixo qualquer em $\mathbb{C}$, podemos escrever

$$p(z) = p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + ... + \frac{p^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

conhecida como fórmula de Taylor. Dessa forma, temos que

$$p(z + z_0) = p(z_0) + p'(z_0)(z) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z)^2 + ... + \frac{p^{(n)}(z_0)}{n!}(z)^n.$$

Fazendo

$$\frac{p^{(j)}(z_0)}{j!} = b_j, \ para \ 0 \leq j \leq n$$

obtemos:

$$p(z+z_0) = p(z_0) + b_1 z + ... + b_{n-1}z^{n-1} + b_n z^n \ com \ b_{j's} \in \mathbb{C} \ e \ b_n = a_n,$$

Exemplo. Se $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, com a,b,c e d reais e $a \neq 0$, então

$$\begin{aligned} p(z+z_0) &= a(z+z_0)^3 + b(z+z_0)^2 + c(z+z_0) + d = \\ &= a(z^3 + 3z^2 z_0 + 3z{z_0}^2 + {z_0}^3) + b(z^2 + 2zz_0 + {z_0}^2) + cz + cz_0 + d \\ &= a{z_0}^3 + b{z_0}^2 + cz_0 + d + (3a{z_0}^2 + 2bz_0 + c)z + (3az_0 + b)z^2 + az^3 \\ &= p(z_0) + (3az_0^2 + 2bz_0 + c)z + (3az_0 + b)z^2 + az^3 = \\ &= p(z_0) + p^{'}(z_0)z + \frac{p^{''}(z_0)z^2}{2!} + \frac{p^{'''}(z_0)z^3}{3!} \end{aligned}$$

De fato, temos um polinômio na variável z com termo independente $p(z_0)$ e coeficiente líder a.

3.3 Demonstração do TFA

Para a demonstração do teorema, assumiremos apenas a continuidade dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$ e a completude de $\mathbb{R}$ aplicada a função contínua $f : D \to \mathbb{R}$, D é um disco compacto em $\mathbb{R}^2$, assume mínimo em D (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

Teorema: Todo polinômio p(z) não constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa.

Dividiremos a demonstração em duas partes:
i. |p(z)| assume um mínimo em $\mathbb{C}$, ou seja, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$|p(z)| \geq |p(z_0)| \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

ii.Para esse z_0 ponto de mínimo absoluto, temos que $p(z_0) = 0$.

Demonstração: Considere o polinômio p(z) com coeficientes complexos, onde $gr(p(z)) = n \geq 1 \ e \ a_n \neq 0$:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

i. Para todo complexo z não nulo, podemos escrever

$$p(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + ... + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)$$

e daí, temos

$$|p(z)| = |a_n z^n| \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + ... + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right|$$

$$\geq |a_n z^n| \left|1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n z}\right| - ... - \left|\frac{a_1}{a_n z^{n-1}}\right| - \left|\frac{a_0}{a_n z^n}\right|\right|$$

$$= |a_n||z^n| \left|1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n||z|} - ... - \frac{|a_1|}{|a_n||z^{n-1}|} - \frac{|a_0|}{|a_n||z^n|}\right|$$

Já que $\lim_{|z|\to+\infty} |a_n||z|^n = +\infty \;\; e \;\; \lim_{|z|\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_n||z|^{n-k}} = 0 \;\; \forall k \in \{0, ..., n-1\}$

então, temos que

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| \geq \lim_{|z|\to\infty} \left(|a_n||z^n| \left|1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n||z|} - ... - \frac{|a_1|}{|a_n||z^{n-1}|} - \frac{|a_0|}{|a_n||z^n|}\right|\right)$$

$$= \lim_{|z|\to\infty} |a_n||z|^n . \lim_{|z|\to\infty} \left(\left|1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n||z|} - ... - \frac{|a_1|}{|a_n||z^{n-1}|} - \frac{|a_0|}{|a_n||z^n|}\right|\right)$$

$$= +\infty . |a_n| = +\infty.$$

Portanto, temos que

$$\lim_{|z|\to\infty} |p(z)| = +\infty.$$

Dessa forma, por definição, existe um raio R > 0 tal que

$$|p(z)| > |p(0)| \;\; se \;\; |z| > R$$

e, uma vez que a função |p(z)| é uma função contínua no disco compacto centrado na origem $D_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, segue pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass que a função |p(z)| restrita ao disco $D_r(0)$ assume um valor mínimo em um ponto $z_0 \in D_r(0)$, ou seja, temos $|p(z_0)| \leq |p(z)|, \;\forall z \in D_r(0)$ e como $0 \in D_r(0)$, então $|p(z_0)| \leq |p(0)|$ e portanto,

$$\underbrace{|p(z_0)| \leq |p(0)|}_{0 \in D_r(0)}, \;\; \underbrace{|p(0)| < |p(z)|}_{z \notin D_r(0)} \;\; e \;\; \underbrace{|p(z_0)| \leq |p(z)|}_{z \in D_r(0)}$$

logo, provamos que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)| \; \forall z \in \mathbb{C}$$

Dessa forma, z_0 é um ponto de mínimo absoluto da função |P(z)|.

ii. Como já provamos que se $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \; com \; gr(p(z)) = n \geq 1 \; e \; a_n \neq 0$ então

$$p(z + z_0) = p(z_0) + b_1 z + ... + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n \; com \; b_{i's} \in \mathbb{C} \; e \; b_n = a_n,$$

vemos que $p(z+z_0)$ é polinômio não constante com grau n e, portanto, existe o menor inteiro $k \in \mathbb{N}, k \in \{1, ..., n\}$ tal que o termo $b_k z^k$ tem $b_k \neq 0$. Então, colocando z^k em evidência, obtemos:

$$\begin{aligned} p(z + z_0) &= p(z_0) + b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + ... + b_n z^n \\ &= p(z_0) + z^k (b_k + b_{k+1} z + ... + b_n z^{n-k}) \end{aligned}$$

Chamando $b_k + \sum_{i=k+1}^{n-k} b_i z^i$ de Q(z), sabemos que Q(z) é um polinômio com $Q(0) = b_k \neq 0$, e dessa forma, podemos escrever

$$p(z + z_0) = p(z_0) + z^k Q(z),$$

onde assumindo que $z_0 = 0$, temos

$$p(z) = p(0) + z^k Q(z) \tag{1}$$

Sabemos que o polinômio $p(z + z_0)$ também tem grau n, tem seu coeficiente líder a_n e termo independente $p(z_0)$. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que o valor de $p(z_0)$ é assumido em z = 0. Ou seja, podemos assumir que z_0 =0 e assim temos,

$$|p(z)| \geq |p(0)|, \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Consideremos o conjunto S dos círculos unitários centrado na origem:

$$S = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}.$$

Para todo $r \geq 0$ e $w \in S$ temos, por (2),

$$|p(rw)|^2 \geq |p(0)|^2 \tag{3}$$

e como por (1),

$$p(rw) = p(0) + r^k w^k Q(rw),$$

então temos que

$$\begin{aligned}
|p(rw)|^2 &= \left[p(0) + r^k w^k Q(rw)\right].\overline{\left[p(0) + r^k w^k Q(rw)\right]} \\
&= \left[p(0) + r^k w^k Q(rw)\right].\left[\overline{p(0)} + \overline{r^k w^k Q(rw)}\right] \\
&= |p(0)|^2 + p(0)\overline{r^k w^k Q(rw)} + \overline{p(0)} r^k w^k Q(rw) + |r^k w^k Q(rw)|^2 \\
&= |p(0)|^2 + \overline{p(0)} r^k w^k Q(rw) + \overline{\overline{p(0)} r^k w^k Q(rw)} + |r^k w^k Q(rw)|^2 \\
&= |p(0)|^2 + 2Re[\overline{p(0)} r^k w^k Q(rw)] + |r^{2k}||w^{2k}||Q(rw)|^2
\end{aligned}$$

que substituindo em (3) obtemos

$$2Re[\overline{p(0)} r^k w^k Q(rw)] + |r^{2k}||w^{2k}||Q(rw)|^2 \geq 0$$

e simplificando a desigualdade acima temos

$$2r^k Re[\overline{p(0)} w^k Q(rw)] + r^{2k}|Q(rw)|^2 \geq 0, \forall r \geq 0, \forall w \in S$$

e então, dividindo por $r^k > 0$ e fixando $w \in S$ obtemos

$$2Re[\overline{p(0)} Q(rw) w^k] + r^k |Q(rw)|^2 \geq 0, \ \forall r > 0,$$

com a expressão no lado esquerdo contínua em $r \in [0, +\infty]$. Logo, em r=0 temos

$$2Re[\overline{p(0)} Q(0) w^k] \geq 0, \ w \textit{ arbitrário em } S. \tag{4}$$

Seja $\alpha = \overline{p(0)} Q(0)$. Fatorando potências de 2 escrevemos $k = 2^j m$, com $\boldsymbol{m}$ ímpar. Substituindo w = 1 em (4) temos $Re(\alpha) \geq 0$. Escolhendo, como podemos, w tal que $w^{2^j} = -1$, temos

$$w^k = (w^{2^j})^m = -1$$

e concluímos $Re(\alpha) \leq 0$ e portanto, $Re(\alpha) = 0$. Escolhendo, como também podemos, um complexo w tal que $w^{2^j} = i$ obtemos

$$w^k = (w^{2^j})^m = i^m = \pm i \textit{ e } \overline{w}^k = \mp i$$

e então, substituindo os valores w e $\overline{w}$ em (4) obtemos a dupla de desigualdades

$$Re(\pm \alpha i) = \mp Im(\alpha) \geq 0.$$

Logo, $\alpha = \overline{p(0)} Q(0) = 0$. Como $Q(0) \neq 0$, então $\overline{p(0)} = 0$ e daí p(0) = 0, o que encerra a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

3.4 Fatoração de polinômios

Proposição: Seja f(z) um polinômio não nulo com coeficientes em $\mathbb{C}$. Se f(z) tem grau $\boldsymbol{n}$, então f(z) tem no máximo n raízes em $\mathbb{C}$.

Demonstração: Façamos indução sobre n = gr(f(z)). Se n = 0, então $f(z)= a \neq 0$ não tem raízes em $\mathbb{C}$ e o resultado é válido. Seja $n \geq 0$. Suponhamos que o resultado vale para polinômios de grau n e considere f(z) um polinômio com $gr(f(z)) = n + 1$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, todo polinômio não constante de coeficientes complexos f(z) tenha uma raiz $\beta \in \mathbb{C}$, então, $z - \beta$ divide f(z) com coeficientes em $\mathbb{C}$, portanto existe q(z) com coeficientes complexos tal que

$$f(z) = q(z)(z - \beta),\ com\ gr(q(z)) = n.$$

Por hipótese de indução, q(z) tem no máximo n raízes em $\mathbb{C}$. Observamos que

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathbb{C} \Leftrightarrow 0 = f(\alpha) &= q(\alpha)(\alpha - \beta) \\ &\Leftrightarrow q(\alpha) = 0\ ou\ \alpha - \beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha\ é\ raiz\ de\ q(z)\ ou\ \alpha = \beta, \end{aligned}$$

Logo, f(z) tem no máximo n + 1 raízes em $\mathbb{C}$.

Proposição: Sejam p(z) um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ e $gr(f(z)) = n \geq 1$. Então, existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, não necessariamente distintos, e $a \in \mathbb{C}\setminus \{0\}$ tais que

$$p(z) = a(z - \alpha_1)...(z - \alpha_n).$$

Demonstração: Façamos indução sobre o grau de p(z). Se gr(p(z)) = 1, então p(z) = az + b, com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, logo $p(z)=a(z+a^{-1}b)$ e $\alpha_1= - a^{-1}b$. seja $n \geq 1$ e suponhamos o resultado válido para polinômios de grau n. Seja f(z) com coeficientes complexos com gr(p(z)) = n+1. Por hipótese, p(z) tem uma raiz $\alpha \in \mathbb{C}$. Então, $p(z)= q(z)(z\text{-}\alpha)$, para algum q(z) de coeficientes complexos e $gr(q(z))=n$. Por hipótese de indução, existem $a, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, com $a \neq 0$, tais que

$$q(z) = a(z - \alpha_1)...(z - \alpha_n).$$

Logo,

$$p(z) = a(z - \alpha_1)...(z - \alpha_n)(z - \alpha).$$

Tomando α_{n+1}=α, obtemos o resultado.

Sendo $\boldsymbol{a}$ o coeficiente líder de p(z) e após uma reordenação das raízes de p(z), caso necessário, podemos supor que

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \in \mathbb{C},\ 1 \leq s \leq n,$$

são as suas raízes distintas e α_j ocorre com multiplicidade m_j, para cada $1 \leq j \leq s$, desse modo

$$p(z) = \ a(z - \alpha_1)^{m_1}...(z - \alpha_n)^{m_s},$$

onde $m_1 + m_2 + ... + m_s = n$.

4 Equações Algébricas

Nesta seção, veremos propriedades referentes a equações algébricas do tipo p(x) = 0, $x \in \mathbb{C}$. Entre elas está o fato de que raízes não reais de equações algébricas do tipo p(x) = 0, $x \in \mathbb{C}$, com coeficientes reais ocorrem aos pares, devido ao teorema a seguir.

Teorema. Se o número a + bi é uma raiz complexa não real de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado a - bi também é raiz da equação, com a mesma multiplicidade.
Demonstração:
Seja $p(x)$=$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ um polinômio de coeficientes reais tal que o número z = a+ bi, com a e b números reais, $b \neq 0$, seja raiz da equação p(x) = 0.
Como z é raiz, então:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$$

e pelas propriedades dos números complexos:

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z^i} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\overline{z}\right)^i = 0$$

Assim, $p(\overline{z})$=0, e portanto, a - bi é raiz da equação p(x) = 0.

Para mostrar que a multiplicidade de a + bi e a - bi é a mesma, basta eliminar as raízes a + bi e a - bi, dividindo p(x) por

$$(x - a - bi)(x - a + bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2.$$

Como o divisor é um polinômio de coeficientes reais, o quociente também tem coeficientes reais. Logo, novamente a + bi e a - bi estarão ambas presentes ou ambas ausentes como raízes do novo polinômio. Concluímos, portanto, que as raízes a + bi e a - bi ocorrem o mesmo número de vezes.

Exemplo. Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$ sabendo que 3 + i é raiz dessa equação.

Se 3 + i é raiz da equação de coeficientes reais, então 3 - i também é raiz da mesma equação. Aplicando Briot-Ruffini para baixar o grau da equação, vem:

3+ i	1	-9	30	-42	20
3 - i	1	$-6+i$	$11-3i$	$-6+2i$	0
	1	-3	2	0	

Tendo eliminado as duas raízes complexas conjugadas, ficamos com $x^2 - 3x + 2 = 0$ que possui as raízes 1 e 2. Logo, as raízes são 3 + i, 3 - i, 1 e 2. É claro que ao invés de eliminar cada raiz complexa de uma vez, poderíamos também ter dividido $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 42x + 20 = 0$, diretamente, pelo polinômio de coeficientes reais $x^2 - 6x + 10$, obtendo o mesmo resultado. Uma fato importante à respeito de que equações algébricas é que toda equação algébrica de coeficientes reais de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real. De fato, como as raízes complexas não reais ocorrem aos pares e essas equações possuem uma quantidade ímpar de raízes, então, pelo menos uma dessas raízes deve ser real.

4.1 Resolução de equações algébricas

Nas seções anteriores, vimos algumas propriedades e teoremas que nos auxiliam a encontrar as raízes de uma equação algébrica com coeficientes reais. Mas o fazer quando essas propriedades e teoremas não são suficientes para resolver uma equação polinomial ? Será que existem fórmulas para solucionar equações de grau superior a 3 como ocorre com as equações do primeiro e segundo graus ?

A busca por respostas a essas perguntas foi responsável por importantes avanços da Matemática, no período aproximado de 1500 a 1800. A primeira contribuição importante foi a Tartaglia, que obteve uma fórmula de resolução, envolvendo radicais, para equações do terceiro grau. Não muito depois, Ferrari generalizou o processo para equações do quarto grau. E as coisas pararam por aí. Durante três séculos, buscou-se um processo de resolução para equações do quinto grau ou superior através de radicais. A questão foi resolvida por Abel e Galois, que demonstraram a impossibilidade de se ter uma fórmula geral para resolver equações de grau superior a 4.

Como ocorre muitas vezes em Matemática, apesar da resposta a respeito da possibilidade de se resolver tais equações ser negativa, a busca não foi infrutífera: a teoria desenvolvida por Galois em sua demonstração gerou uma inteira área de desenvolvimento da Álgebra. O fato de não possuírmos fórmulas algébricas de resolução para equações de grau superior a 4 não significa que não possamos resolver tais equações, isto é, calcular suas raízes reais e complexas. Os processos de resolução, no entanto, envolvem métodos numéricos de aproximação para a obtenção dessas raízes. Na verdade, mesmo equações de grau 3 e 4 não são, na prática, resolvidas através de suas fórmulas algébricas de resolução, preferindo-se, na maior parte das vezes, recorrer a métodos numéricos.

Apesar da inexistência de fórmulas de resolução para equações de grau maior ou igual a 4, determinadas equações particulares podem ser resolvidas algebricamente. A seguir, veremos como resolver por meio de radicais equações do terceiro e quarto graus.

4.1.1 Resolução de equações do terceiro grau

Motivado pelo cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do segundo grau em função dos coeficientes da equação, Gustavo resolveu um dia resolver a expressão:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2},$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ e dessa forma satisfazem $x_1 + x_2 = S$ e $x_1 x_2 = P$. Fazendo os devidos cálculos, temos

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow$$

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1 x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \Rightarrow$$

$$y^3 = S + 3\sqrt[3]{P}y.$$

Dessa forma, para obtermos y devemos resolver uma equação do terceiro grau. Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, procuramos uma substituição $x = y + t$ que anule o coeficiente em y^2:

$$(y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0 \Rightarrow y^3 + (3t+a)y^2 + ... = 0.$$

Fazemos $t = -\frac{a}{3}$ e caímos numa equação do tipo $y^3 + py + q = 0$.
Determinamos números P e S tais que

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad e \quad q = -S,$$

de forma que se x_1 e x_2 são raízes de $x^2 - Sx + P = 0$, então $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfaz a equaçao $y^3 + py + q = 0$. Assim obtemos

$$\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3} \Rightarrow P = -\frac{p^3}{27} \quad e \quad S = -q,$$

ou seja, x_1 e x_2 são raízes de

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0,$$

isto é,

$$x_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad x_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

donde,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

satisfaz $y^2+py+q = 0$. Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $\sqrt[3]{P} = \frac{-p}{3}$ diz que o produto das duas raízes deve ser $-\frac{p}{3}$. Essa fórmula dá as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, que somadas a $t = -\frac{a}{3}$ nos dão as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Dessa forma as raízes da equação $y^3 + py + q = 0$ são

$$y_1 = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$$
$$y_2 = w\sqrt[3]{x_1} + w^2\sqrt[3]{x_2}$$
$$y_3 = w^2\sqrt[3]{x_1} + w\sqrt[3]{x_2}$$

em que $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes cúbicas da unidade.
De forma equivalente, temos,

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$y_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Exemplo. Determine as raízes da equação $x^3 + 9x - 6 = 0$.
Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes dessa equação, temos

$$-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = 3+\sqrt{9+27} = 3+\sqrt{36} = 9.$$

$$-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} = 3-\sqrt{9+27} = 3-\sqrt{36} = -3.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3} \\ x_2 &= w\sqrt[3]{9}-w^2\sqrt[3]{3} \\ x_3 &= w^2\sqrt[3]{9}-w\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

onde

$$w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad w^2 = \overline{w} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo. Elimine o termo do segundo grau na equação $x^3-6x^2+x-1=0$.

Fazendo a substituição x = y + 2 na equação dada temos

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + (y+2) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6(y^2+4y+4) + y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + y + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 - 11y - 15 = 0$$

Exemplo. Determine as raízes da equação $x^3 - 6x^2 - 6x - 14 = 0$.

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes dessa equação. Para eliminarmos o termo do segundo grau, efetuamos a substituição $x = y + 2$, obtendo a equação:

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 - 6(y+2) - 14 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 - 6y - 26 = 0$$

Logo temos a equação

$$y^3 - 18y - 42 = 0$$

Como p = -18 e q = -42, então

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 21 + \sqrt{441 - 216} = 21 + \sqrt{225} = 36.$$

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 21 - \sqrt{441 - 216} = 21 - \sqrt{225} = 6$$

Logo, sendo y_1, y_2 e y_3 as raízes de $y^3 - 18y - 42 = 0$, temos que

$$y_1 = \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6}$$

$$y_2 = w\sqrt[3]{36} + w^2\sqrt[3]{6}$$

$$y_3 = w^2\sqrt[3]{36} + w\sqrt[3]{6}.$$

Portanto, as raízes da equação original são:

$$x_1 = y_1 + 2 = \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6} + 2$$

$$x_2 = y_2 + 2 = w\sqrt[3]{36} + w^2\sqrt[3]{6} + 2$$

$$x_3 = y_3 + 2 = w^2\sqrt[3]{36} + w\sqrt[3]{6} + 2.$$

onde

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad w^2 = \overline{w} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Exemplo. Mostre que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = 1$
Seja

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$x^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\right) + 2 - \sqrt{5}$$

$$x^3 = 4 + 3\sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\right)$$

$$x^3 = 4 + 3(-1)x \Rightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$$

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes dessa equação, temos

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 2 + \sqrt{4 + 1} = 2 + \sqrt{5}$$

$$-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=2-\sqrt{4+1}=2-\sqrt{5}$$

Logo,

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$x_1=w\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+w^2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$x_2=w^2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+w\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

Como x é a única raiz real e 1 é raiz da equação $x^3+3x-4=0$, então

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=1$$

4.1.2 Resolução de equações do quarto grau

É possível resolver equações do quarto grau fazendo uma variação da técnica anterior. Para isso, condidere a equação do terceiro grau

$$x^3-Sx^2+S_dx-P=0,$$

de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem:

$$x_1+x_2+x_3=S,$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=S_d$$

e

$$x_1x_2x_3=P.$$

Seja $y=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$. Temos:

$$y^2=x_1+x_2+x_3+2(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3}) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2=(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_3}+\sqrt{x_2x_3})^2=$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}),$$

ou seja,

$$\left(\frac{y^2-S}{2}\right)^2=S_d+2\sqrt{P}y,$$

ou

$$y^4-2Sy^2-8\sqrt{P}y+S^2-4Sd=0. \qquad (1)$$

Dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazemos uma substituição do tipo $x = y + t$ e obtemos $y^4 + (4t + a)y^3 + ... = 0$. Tomando $t = -\frac{a}{4}$, obtemos uma equação do tipo

$$y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0,$$

sem termo em y^3.
Comparando com (1), tomamos S, P e S_d tais que

$$-2S = k_1 \Rightarrow S = -\frac{k_1}{2}$$

$$-8\sqrt{P} = k_2 \Rightarrow P = \left(\frac{k_2}{8}\right)^2$$

$$S^2 - 4S_d = k_3 \Rightarrow$$

$$S_d = \frac{S^2 - k_3}{4} = \frac{{k_1}^2 - 4k_3}{16}.$$

Assim, resolvendo a equação

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)x - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0,$$

obtemos raízes x_1, x_2 e x_3 tais que

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$$

satisfaz

$$y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0$$

Para obter as raízes de

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

basta diminuir $\frac{a}{4}$ das raízes de

$$y^4 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3 = 0.$$

Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -\frac{k_2}{8}$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -\frac{k_2}{8}$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Assim, obtemos todas as raízes da equação original.

Exemplo. Resolva a equação $x^4 + 8x^2 + 16x + 20 = 0$.
De acordo com o método visto para equações do quarto grau, temos

$$k_1 = 8, k_2 = 16 \;\; e \;\; k_3 = 20.$$

Resolvendo a equação do terceiro grau:

$$y^3 + \frac{k_1}{2}y^2 + \left(\frac{k_1^2 - 4k_3}{16}\right)y - \left(\frac{k_2}{8}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 + 4y^2 - y - 4 = 0 \Rightarrow y^2(y+4) - (y+4) = 0 \Rightarrow (y^2 - 1)(y+4) = 0,$$

logo

$$y_1 = 1, \;\; y_2 = -1 \;\; e \;\; y_3 = -4.$$

Temos que as raízes da equação $x^4 + 8x^2 + 16x + 20 = 0$. são da forma

$$x = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$$

Como as raízes complexas de y_1, y_2 e y_3 são, respectivamente, $\pm 1, \pm i$ e $\pm 2i$ e como devemos ter

$$\sqrt{y_1}\sqrt{y_2}\sqrt{y_3} = -\frac{k_2}{8} = -\frac{16}{8} - 2$$

então

$$x_1 = 1 + i + 2i = 1 + 3i$$

$$x_2 = 1 - i - 2i = 1 - 3i$$

$$x_3 = -1 - i + 2i = -1 + i$$

$$x_4 = -1 + i - 2i = -1 - i$$

Então o conjunto solução $S = \{1 + 3i, 1 - 3i, -1 + i, -1 - i\}$

4.2 Teorema das Raízes Racionais

A seguir, veremos como podemos investigar as possíveis raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes em $\mathbb{Z}$.
Considere a equação de coeficientes inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \; com \; a_0 \neq 0$$

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q ínteiros primos entre si, é raiz da equação anterior, temos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + \ a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando os dois membros da equação por q^n, obtemos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \ (1)$$

Preparando a equação, vem:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} = -a_0q^n$$

$$p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n$$

O primeiro membro da igualdade é um número inteiro, pois $p, q, a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ são números inteiros. Logo,a_0q^n deve ser um número inteiro e também múltiplo de p, uma vez que p é fator do primeiro membro, isto é $kp = a_0q^n$ com k inteiro. Daí obtemos $\frac{a_0q^n}{p} = k$. Como p e q são números primos entre si, p e q^n também o são. Logo, p é divisor de a_n. De (1) podemos escrever ainda:

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + ... + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n$$

De maneira análoga, podemos concluir que q é divisor de a_n. Do exposto, podemos enunciar o seguinte:

Teorema. Se o número racional $\frac{p}{q}$, p e q primos entre si, for raiz da equação algébrica de coeficientes inteiros $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0 \ com \ a_0 \neq 0$, então p$|a_0$ e q$|$ a_n. Este teorema permite fazer uma previsão sobre as possíveis raízes racionais de uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Observações:

- Este teorema não garante a existência de raízes racionais, mas no caso de elas existirem, mostra como obtê-las.

- O teorema possibilita a formação de um conjunto de possíveis raízes racionais obtidas dos divisores de a_n e a_0. Se nenhum elemento desse conjunto for raiz da equação, esta não admitirá raízes racionais.

- Se $a_n = \pm 1$ e os demais coeficientes são inteiros, a equação não admite raízes fracionárias, podendo, entretanto, admitir raízes inteiras que são divisores de a_0.

- Para formar o conjunto das possíveis raízes racionais da forma $\frac{p}{q}$ é suficiente fazermos p$\in \mathbb{Z}$ e q$\in \mathbb{Z}$.

- Em toda equação algébrica cuja soma dos coeficientes for igual a zero, o número 1 será raiz da equação.

Exemplo. Verifique se a equação $x^4 - x^2 - 2 = 0$ tem raízes racionais.
Como a equação tem todos os coeficientes inteiros, temos p é um divisor de -2, logo $p = \pm 1$ ou $p = \pm 2$. Temos que q é um divisor de 1, logo $q = \pm 1$. Os possíveis valores das raízes racionais são dados pela razão $\frac{p}{q}$, daí $\frac{p}{q} \in \{-1, 1, -2, 2\}$. Fazendo a verificação de quais desses valores tornam a equação verdadeira, notamos que nenhum dos quatro valores é raiz da equação. Portanto, a equação não tem raízes racionais.

Exemplo. Resolva a equação $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3 = 0$. Como a soma dos coeficientes da equação é nula: 2 - 7 + 8 - 3 = 0, uma das raízes é 1. Logo, a equação pode ser colocada na forma (x - 1).q(x) = 0. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & 2 & -7 & 8 & -3 \\
\hline
 & 2 & -5 & 3 & |\ 0
\end{array}$$

Portanto, $q(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Fazendo q(x) = 0, temos que $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Logo, as raízes são 1 e 3/2.
Exemplo. Encontre as raízes inteiras da equação $x^3 - 4x^2 + 25x - 100 = 0$ e depois a resolva em $\mathbb{C}$.
Como a equação dada tem todos os coeficientes inteiros, aplicamos o teorema das raízes racionais. Temos que

$$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50, \pm 100\} \; e \; q \in \{\pm 1\}$$

daí, $\frac{p}{q} \in$ p $\in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50, \pm 100\}$

Utilizando o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 25x - 100$, verificamos se algum elemento desse conjunto é raiz da equação dada. Obtemos $p(1) \neq 0, p(-1) \neq 0, p(2) \neq 0, p(-2) \neq 0 \; e \; p(4) = 0$. Daí, 4 é raiz da equação e podemos aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini e encontrar uma equação de grau menor.
Resolvendo a equação $x^2 + 25 = 0$, obtemos as outras raízes: $x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x^2 = -25 \Rightarrow x^2 = 25i^2 \Rightarrow x = \pm 5i$. Logo, a solução é $S = \{4, \pm 5i\}$.

$$\begin{array}{c|cccc}
4 & 1 & -4 & 25 & -100 \\
\hline
 & 1 & 0 & 25 & | \ 0
\end{array}$$

4.3 Relação entre coeficientes e raízes

A busca por fórmulas gerais que resolvessem equações polinomiais provocou o surgimento de importantes teoremas sobre esse tipo de equação. Um deles, conhecido como ***"Relações de Girard,"*** foi descorbeto pelo matemático francês Albert Girard e publicado, em 1629, em sua obra ***Invention nouvelle en l'algèbre.*** Este teorema permite relacionar os coeficientes de uma equação polinomial à soma de suas raízes, à soma dos produtos dessas raízes tomadas duas a duas, à soma dos produtos dessas raízes tomadas três a três e assim por diante e, finalmente, ao produto dessas raízes.

A partir de agora, vejamos que relações existem entre os coeficientes e as raízes, ambos em $\mathbb{C}$, de uma equação algébrica do tipo p(x) = 0. Começaremos apresentando as relações de Girard para equações polinomiais do segundo grau, terceiro grau e em seguida a generalização para equações polinomiais de grau n.

Seja $p(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio quadrático de raízes r_1 e r_2. A equação p(x) = 0 pode ser escrita na forma:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

Daí temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) = 0, \ \forall x$$

ou seja,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2, \ \forall x$$

Logo,

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \ e \ r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Considere o polinômio p(x) de raízes r_1, r_2 e r_3.

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0(a \neq 0)$$

Escrevendo a equação p(x) = 0 na forma fatorada, temos

$$a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

Dessa forma temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0, \ \forall x$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - r_1r_2r_3, \ \forall x$$

Portanto,

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}, r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{c}{a} \ e \ r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$$

A partir de agora, deduziremos as relações de Girard para uma equação polinomial de grau $n \geq 1$.
Considere a equação

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1x + a_0 \ (a_n \neq 0)$$

cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$. O polinômio p(x) na forma fatorada é dado por

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n) = \\ &= a_nx^n - a_n(\underbrace{r_1 + r_2 + r_3 + r_n}_{S_1})x^{n-1} \\ &+ a_n(\underbrace{r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{n-1}r_n}_{S_2})x^{n-2} \\ &- a_n(\underbrace{r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + ... + r_{n-2}r_{n-1}r_n}_{S_3})x^{n-3} \\ &+ ... + (-1)^n a_n(\underbrace{r_1r_2...r_n}_{S_n}), \ \forall x \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} S_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 &= r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 &= r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + ... + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\cdots \\ S_n &= r_1r_2...r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação p(x) = 0.

Exemplo. Seja a equação $3x^3 + 5x^2 + 7x - 3 = 0$. As raízes $r_1, r_2 \ e \ r_3$ satisfazem:
$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-5}{3}$

$S_2 = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{7}{3}$

$S_3 = r_1r_2r_3 = -\frac{-3}{3} = 1.$

Exemplo. Resolva a equação algébrica $x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ =0, sabendo que uma das raízes é igual à soma das duas outras.
Sendo as raízes $r_1, r_2 \ e \ r_3$ e usando as relações de Girard, temos:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 + r_3 && (1) \\ r_1 + r_2 + r_3 &= 2 && (2) \\ r_1r_2r_3 &= -12. && (3) \end{aligned}$$

Substituindo a equação (1) na equação (2) obtemos $2r_1 = 2$ e, portanto, $r_1 = 1$. Substituindo $r_1 = 1$ na equação (3) vem $r_2r_3 = -12$ e como $r_2 + r_3 = 1$ então

$$r_2(1 - r_2) = -12 \Rightarrow -r_2^2 + r_2 + 12 = 0$$

e daí verificamos facilmente que -3 e 4 são raízes da equação.

Exemplo. Formar uma equação cujas raízes sejam 1,1,2 e 3.

A equação procurada é do quarto grau e pode ser escrita como:

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0,$$

onde pelas relações de Girard, temos

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 + 1 + 2 + 3 = 7 \\ S_2 &= 1.1 + 1.2 + 1.3 + 1.2 + 1.3 + 2.3 = 17 \\ S_3 &= 1.1.2 + 1.1.3 + 1.2.3 + 1.2.3 = 17 \\ S_4 &= 1.1.2.3 = 6 \end{aligned}$$

Daí, a equação procurada é

$$x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0.$$

Exemplo. Determine, sem resolver a equação $2x^5 - 4x^4 + x^3 + x - 2 = 0$, a soma dos quadrados das raízes.
Se r_1, r_2, r_3, r_4 *e* r_5 são as suas raízes, temos que

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2+r_5^2 = (r_1+r_2+r_3+r_4+r_5)^2-2(r_1r_2+...+r_4r_5) = -\frac{(-4)}{2} = 1.$$

Exemplo. Resolva a equação $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é -1.
Se r_1, r_2, r_3 são as raízes dessa equação, então, das relações entre coeficientes e raízes temos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{2}{3}$$
$$r_1 + r_2 = -1$$
$$r_1r_2r_3 = -2$$

Substituindo a segunda equação na primeira, temos que $r_3 = \frac{1}{3}$ que substituindo na terceira equação temos $r_1r_2 = -6$ o que nos dá a equação $y^2+y-6 = 0$ de raízes 2 e -3. Portanto, as raízes da equação são $\left\{\frac{1}{3}, 2, -3\right\}$.

Exemplo. Determine a soma dos inversos das raízes da equação

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Se r_1, r_2, r_3 *e* r_4 são as raízes da equação, temos que

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{r_2r_3r_4 + r_1r_3r_4 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_3}{r_1r_2r_3r_4} = \frac{4}{1} = 4$$

4.4 Equações Recíprocas

Nesta seção, investigaremos de que forma as equações polinomiais de coeficientes reais podem ser resolvidas se os seus coeficientes extremos forem iguais ou simétricos. Para um melhor entendimento no que diz respeito à equações recíprocas, comecemos observando as definições abaixo:

Chamamos de ***transformação*** de uma equação algébrica p(x) = 0, a toda operação pela qual obtemos uma nova equação q(y) = 0, cujas raízes estejam relacionadas com as raízes da equação original através da lei de associação y = f(x). A equação p(x) = 0 é chamada equação ***primitiva*** e a equação q(y) = 0 é chamada de equação ***transformada*** e a lei y = f(x) é a chamada relação de transformação.

Exemplo. Se $p(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ é a equação primitiva e y = x + 2 é a relação de transformação, então

$$q(y) = (y-2)^3 - 2(y-2)^2 + 5$$

é a sua equação transformada.

Definição: Chama-se **transformação recíproca** aquela em que a relação de transformação é:

$$y = \frac{1}{x},\ x \neq 0$$

Dada a equação primitiva $p(x) = 0$, substituindo x por $\frac{1}{y}$ e fazendo as simplificações, obtemos a transformada $q(y) = 0$, cujas raízes são precisamente os inversos das raízes de p(x) = 0.

Exemplo: Dada a equação $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, obter sua transformada recíproca pela relação $y = \frac{1}{x}$.

$$p(x) = p\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{1}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{y}\right) + 2 = 0 \Rightarrow q(y) = 1 - 2y - y^2 + 2y^3 = 0$$

Observe que

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x-2) = 0$$

Logo, as raízes da equação primitiva são ± 1 e 2. Como

$$1 - 2y - y^2 + 2y^3 = y^2(2y-1) - (2y-1) = 0 \Rightarrow (y^2-1)(2y-1) = 0$$

Daí, as raízes da transformada são ± 1 e $\frac{1}{2}$, ou seja, são os inversos das raízes de p(x).

Definição: Uma equação polinomial p(x) = 0 é chamada **recíproca**, se e somente se, é equivalente à sua transformada recíproca $p\left(\frac{1}{x}\right)$=0.

Exemplo: A equação $3x^2 - 5x + 3 = 0$ é recíproca, pois $3x^2 - 5x + 3 = 0$ e

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = \frac{3 - 5x + 3x^2}{x^2} = 0$$

são equivalentes.

Teorema do reconhecimento: A condição necessária e suficiente para que uma equação p(x) = 0 seja recíproca é que os coeficientes dos extremos sejam iguais ou simétricos.

Demonstração: Consideremos a equação polinomial de grau n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Dizemos que a_n e a_0 são os coeficientes extremos, a_{n-1} e a_1 são coeficientes extremos, a_{n-2} e a_2 também, etc. De uma maneira geral, a_{n-k} e $a_k(k \leq n)$ são equidistantes dos extremos.

Condição suficiente: Se $a_{n-k} = \pm a_k$, para todo inteiro k $(0 \leq k \leq n)$, é evidente que $p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ equivale a p(x) = 0. Basta multiplicar $p\left(\frac{1}{x}\right)$ =0, membro a membro, por ± 1 que obtemos p(x) = 0.
Condição necessária: Provemos que se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

e

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$$

são equivalentes, então $a_{n-k} = \pm a_k$, para todo $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Devido à equivalência das equações, os coeficientes devem ser proporcionais, isto é:

$$\begin{aligned}
(0)\quad & a_n = k.a_0 \\
(1)\quad & a_{n-1} = k.a_1 \\
(2)\quad & a_{n-2} = k.a_2 \\
& ... \\
(2')\quad & a_2 = k.a_{n-2} \\
(1')\quad & a_1 = k.a_{n-1} \\
(0')\quad & a_0 = k.a_0
\end{aligned}$$

Tomando as igualdades (k) e (k'), temos: $a_{n-k} = k.a_k$ e $a_k = a_{n-k}$ então $a_{n-k} = k(k.a_{n-k})$ portanto, $1 = k^2 \Rightarrow k = \pm 1$ e daí $a_{n-k} = \pm a_k$

Exemplo: São equações recíprocas:

(i) $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 5x + 2 = 0$
(ii) $3x^5 + x^4 + 7x^3 - 7x^2 - x - 3 = 0$
(iii) $4x^2 + 4 = 0$ $(4x^2 + 0x + 4 = 0)$

Exemplo: Resolva a equação $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$.

Como a soma dos coeficientes é zero, então 1 é raiz da equação. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & -5 & 9 & -9 & 5 & -1 \\
\hline
 & 1 & -4 & 5 & -4 & 1 & | \ 0
\end{array}$$

Devemos, então, achar as raízes da equação $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$. Dividindo a equação por $\left(\frac{1}{x^2}\right)$, obtemos que:

$$x^2 - 4x + 5 - 4.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

Fazendo $y = x + \frac{1}{x}$ então $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e substituindo na equação acima, temos

$$y^2 - 2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$$

cujas raízes são y = 1 e y = 3. Logo,

se x + $\frac{1}{x} = 3$, então $x^2 - 3x + 1 = 0$ e $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

se x + $\frac{1}{x} = 1$, então $x^2 - x + 1 = 0$ e $x = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

Temos, portanto, $S = \left\{1, \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right\}$

Exemplo: Resolva a equação $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$. Dividindo ambos os membros por x^2 temos

$$6x^2 - 35x + 62 - 35\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 6(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 35(x + \frac{1}{x}) + 62 = 0$$

Fazendo $y = x + \frac{1}{x}$, então $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e substituindo na equação acima, temos:

$$6(y^2 - 2) - 35y + 62 = 0 \Rightarrow 6y^2 - 35y + 50 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \ ou \ y = \frac{10}{3}$$

se x + $\frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, então $2x^2 - 5x + 2 = 0$ e x = 2 ou $x = \frac{1}{2}$

se x + $\frac{1}{x} = \frac{10}{3}$, então $3x^2 - 10x + 3 = 0$ e x = 3 ou $x = \frac{1}{3}$

Logo, $S = \left\{2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\right\}$

5 Análise do número de raízes reais

5.1 Teorema de Descartes

Nesta seção, faremos um estudo à respeito do número de raízes positivas de uma equação polinomial de coeficientes reais p(x) = 0. Para isso, demonstraremos o teorema de Descartes que afirma que o número de raízes positivas nunca é maior que o número de mudanças de sinais na sequência de coeficientes não nulos da equação p(x) = 0, e se é menor, então é sempre por um número par.

Ao dividir p(x) pelo seu coeficiente líder, não alteramos o número de raízes positivas de p(x) nem o padrão de variação nos sinais dos seus coeficientes, com isso podemos supor, sem perda de generalidade, que p(x) é mônico.

Outra observação importante é que se p(x) tem termo independente a_0 nulo, então podemos dividir p(x) por alguma potência conveniente de x de forma a obter um polinômio com termo constante não nulo com o mesmo número de raízes positivas e o mesmo padrão de variação no sinal de p(x), visto que essa potência não contribui com raízes positivas nem nas variações nos sinais de p(x). Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que o termo constante do nosso polinômio p(x) não é nulo.

Começaremos a demonstração do Teorema de Descartes com o caso em que o polinômio p(x) de coeficientes reais só possui raízes complexas não reais. Para isso, considere a seguinte

Definição: O sinal de um número real x não nulo é dado por

$$s(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & se\ x > 0 \\ -1, & se\ x < 0. \end{cases}$$

Dessa forma, para quaisquer x e y números reais não nulos, temos as seguintes propriedades:

$$i)\ s\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\frac{x}{y}}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{|y|}{y} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\frac{y}{|y|}} = s(x) \cdot \frac{1}{s(y)} = \frac{s(x)}{s(y)}$$

$ii)\ s(x.y) = \dfrac{x.y}{|x.y|} = \dfrac{x}{|x|} \cdot \dfrac{y}{|y|} = s(x) \cdot s(y)$

Notação: Seja $V[p(x)]$ o número de variações de sinal de um polinômio p(x) com coeficientes reais e $P[p(x)]$ o número de raízes positivas de p(x) contadas com multiplicidade. Dessa forma, comecemos a demonstração do seguinte

Lema 1: Se p(x) é um polinômio mônico com coeficientes em $\mathbb{R}$, e $a_0 \neq 0$:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,$$

então podemos afirmar que

$$s(a_0) = (-1)^{V[p(x)]}$$

Prova: Vamos definir j_0 como o primeiro índice em ordem crescente tal que $a_{j_0} \neq 0$, j_1 como o segundo índice tal que $a_{j_1} \neq 0$, e assim por diante, até j_k como o último índice tal que $a_{j_k} \neq 0$. Assim, temos a sequência de coeficientes não nulos $(a_{j_0}, a_{j_1}, ..., a_{j_k})$, com $a_{j_0} = a_0$ e $a_{j_k} = a_n = 1$. Dessa forma, considerando o produto telescópico,

$$\frac{a_{j0}}{a_{j1}} \cdot \frac{a_{j1}}{a_{j2}} \cdots \frac{a_{jk-1}}{a_{jk}} = \frac{a_{j0}}{a_{jk}}$$

e aplicando a função sinal em ambos os membros, segue que

$$s\left(\frac{a_{j0}}{a_{j1}} \cdot \frac{a_{j1}}{a_{j2}} \cdots \frac{a_{jk-1}}{a_{jk}}\right) = s\left(\frac{a_{j0}}{a_{jk}}\right).$$

Utilizando a propriedade da função sinal e substituindo $a_{j_0} = a_0$ e $a_{j_k} = 1$:

$$s\left(\frac{a_{j0}}{a_{j1}}\right) \cdot s\left(\frac{a_{j1}}{a_{j2}}\right) \cdots s\left(\frac{a_{jk-1}}{a_{jk}}\right) = s(a_0)$$

Haja vista que $s\left(\dfrac{a_{j_i}}{a_{j_{i+1}}}\right)$ vale ± 1, sendo -1 em cada mudança de sinal entre a_{j_i} e $a_{j_{i+1}}$ e 1, caso contrário, então o número de fatores iguais a -1 no produto

$$s\left(\frac{a_{j0}}{a_{j1}}\right) \cdot s\left(\frac{a_{j1}}{a_{j2}}\right) \cdots s\left(\frac{a_{jk-1}}{a_{jk}}\right)$$

é igual ao número de mudanças de sinais nos coeficientes de p(x), logo

$$(-1)^{V[p(x)]} = s\left(\frac{a_{j_0}}{a_{j_1}}\right) \cdot s\left(\frac{a_{j_1}}{a_{j_2}}\right) \ldots s\left(\frac{a_{j_{k-1}}}{a_{j_k}}\right) = s(a_0).$$

Proposição: Considere o polinômio mônico de coeficientes reais,

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Se o polinômio p(x) não possui raízes reais, então $a_0 > 0$ e $V\,[p(x)]$ é par.
Prova: Seja $\alpha_1, ..., \alpha_n$ as raízes complexas do polinômio p(x). Como as raízes complexas sempre ocorrem aos pares, então n é par. Dessa forma, pelas relações de Girard, podemos escrever p(x) assim

$$p(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - ... + \sigma_n$$

onde

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$\sigma_2 = \sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n$$

Como $\sigma_n = (\alpha_1\alpha_2)\,...\,(\alpha_{n-1}\alpha_n)$ e já que podemos reodernar as raízes de modo que α_k seja o conjugado de α_{k+1} para todo $1 \leq k \leq n-1$, então $\alpha_k\alpha_{k+1}{>}0$. Uma vez que $\sigma_n = a_0{>}0$, segue, pelo Lema 1, que $V\,[p(x)]$ é par.

Dessa forma, caso o polinômio p(x) de coeficientes reais só possua raízes complexas não reais, então como p(x) não tem raízes reais positivas, é imediato que o número de raízes positivas de p(x) não excede o número de trocas de sinais dos seus coeficientes não nulos e o número de mudanças de sinais é um número par.

Assim, doravante, assumiremos que p(x) é um polinômio mônico, com coeficientes reais, de termo independente não nulo e que possui raiz real.

Analisemos os casos em que esses polinômios são lineares e quadráticos:

Se p(x) = x + b é um polinômio do primeiro grau, então temos que p(x) tem uma única raiz real $x = -b$. Se b > 0, então x < 0 e daí não temos nenhuma raiz positiva nem troca de sinal em p(x). Se b < 0, então x > 0 e portanto, temos 1 raiz positiva e 1 troca de sinal em p(x).

Seja p(x) um polinômio quadrático da forma $p(x) = x^2 + bx + c$ com $c \neq 0$. Como estamos assumindo que p(x) tem raiz real, segue que ambas as raízes são reais. Suponha que nós identificamos as duas raízes reais **r** e **s** de p(x).

Assim, pelas relações de Girard, podemos escrever p(x) na forma,

$$p(x) = x^2 - (r+s)x + rs.$$

Comparando os coeficientes b = - (r + s) e c = rs, temos dois casos a considerar:

i. Se c for positivo, então como c = r.s devemos ter r e s com o mesmo sinal. Se r e s forem ambos positivos então b < 0 e daí haverá duas variações de sinais e duas raízes positivas. Se r e s forem ambos negativos então b > 0 e daí não haverá mudança de sinal nem raiz positiva.

ii. Se c for negativo, p(x) tem exatamente uma variação de sinal em p(x), independente de b ser positivo, negativo ou nulo e como c = r.s < 0, concluímos que r e s têm sinais contrários, isto é, p(x) tem exatamente uma raiz positiva. Assim, p(x) tem exatamente uma variação de sinal e uma raiz positiva.

Em todos os casos, o número de raízes positivas não excede o número de trocas de sinais nos coeficientes. Afim de que tratemos dos casos dos polinômios de grau mais elevado, considere o seguinte

Lema 2: Seja p(x) um polinômio mônico com coeficientes em $\mathbb{R}$, e $a_0 \neq 0$:

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

i. $s(a_0) = (-1)^{P[p(x)]}$

ii. $V[p(x)] \equiv P[p(x)] \pmod 2$

i. Prova: Façamos indução sobre o grau do polinômio p(x). Para polinômios de grau 1 e 2 já vimos que o resultado se verifica. Suponhamos que tal afirmação seja verdadeira para todo polinômio de grau k - 1 e consideremos o polinômio a seguir de grau k:

$$p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1x + a_0.$$

Como estamos assumindo que p(x) tem raiz real α, então podemos definir o polinômio g(x) mônico de grau k - 1, quociente da divisão de p(x) por $x - \alpha$,

$$g(x) = x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + ... + b_1x + b_0.$$

De tal forma que

$$p(x) = (x-\alpha)(x^{k-1} + b_{k-2}x^{k-2} + ... + b_1x + b_0) = x^k + ... + (b_0 - b_1\alpha)x - \alpha b_0,$$

então $a_0 = -b_0\alpha$ e utilizando a hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned} s(a_0) &= (-1) \cdot s(b_0) \cdot s(\alpha) \\ &= (-1) \cdot (-1)^{P[g(x)]} \cdot s(\alpha) \\ &= (-1)^{P[g(x)]+1} \cdot s(\alpha) \end{aligned}$$

Desse modo, temos apenas dois casos a considerar:
1º caso: Se $P[p(x)] > 0$, podemos tomar $\alpha > 0$, daí $P[p(x)] = P[g(x)] + 1$ e segue que

$$s(a_0) = (-1)^{P[p(x)]}$$

2º caso: Se, $P[p(x)] = 0$, só podemos tomar $\alpha < 0$ e $P[g(x)] = 0$, portanto

$$s(a_0) = (-1) \cdot s(\alpha) = (-1)(-1) = 1^0 = (-1)^{P[p(x)]}.$$

ii. Combinando i. com o Lema 1 temos que $V\left[p(x)\right]$ e $P\left[p(x)\right]$ são ambos ímpares ou ambos pares, ou seja, $V\left[p(x)\right] \equiv P\left[p(x)\right] \pmod 2$

Lema 3: Se um polinômio q(x) com coeficientes reais exibe **m** mudanças de sinais, então para qualquer α>0, o polinômio p(x) = (x- α)q(x) exibe pelo menos **m+1** mudanças de sinais.
Considere q(x) de grau n. Em seguida, formando p(x) = (x- α)q(x) obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\alpha)(q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + ... + q_r x^r + q_{r-1}x^{r-1} + ... + q_1 x + q_0) \\ &= q_n x^{n+1} + q_{n-1}x^n + ... + q_r x^{r+1} + q_{r-1}x^r + ... + q_1 x^2 + q_0 x \\ &-\alpha q_n x^n - \alpha q_{n-1}x^{n-1} - ... - \alpha q_r x^r - \alpha q_{r-1}x^{r-1} - ... - \alpha q_1 x - \alpha q_0 \\ &= -\alpha q_0 + (q_{n-1} - \alpha q_n)x^n + ... + (q_{r-1} - \alpha q_r)x^r + ... + q_n x^{n+1} \end{aligned}$$

Logo,

$$p(x) = \underbrace{p_{n+1}}_{q_n} x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} (q_{j-1} - \alpha q_j)x^j + \underbrace{p_0}_{-\alpha q_0}$$

Como $p_{n+1} = q_n = 1$, e portanto, tem o mesmo sinal (lembre que p(x) é mônico). Além disso, como fizemos j decrescendo de n até 1, temos que a cada mudança de sinal entre q_j e q_{j-1} o valor de $p_j = q_{j-1} - \alpha q_j$ tem o mesmo sinal de q_{j-1}.

De fato, se $q_{j-1} > 0$ e $q_j < 0$, então como $\alpha > 0$ temos que $p_j = q_{j-1} - \alpha q_j > 0$ e daí p_j tem o mesmo sinal de q_{j-1} e se $q_{j-1} < 0$ e $q_j > 0$, então como $\alpha > 0$ temos que $p_j = q_{j-1} - \alpha q_j < 0$ e p_j também tem o mesmo sinal de q_{j-1}.

Assim, começando com p_{n+1}, existe uma subsequência de p_j, chamada p_{j_k}

que tem os mesmos sinais dos termos da subsequência q_{j_k-1} dos coeficientes de q(x). Dessa forma, sendo

$$q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + ... + q_j x^j + ... + q_l x^l + ... + q_1 x + q_0$$

podemos definir j_1 como o menor índice dos coeficientes de q(x) antes da primeira mudança de sinal e q_{j_1} o último coeficiente antes dessa primeira mudança. Definimos j_2 como o menor índice antes da segunda mudança de sinal e assim por diante até j_k. Daí, temos:

$$j_1 = min\left\{j \in \mathbb{N};\ q_j.q_l > 0,\ \forall j \leq l < n, com\ q_l\ \neq 0\right\}.$$

$$j_2 = min\left\{j \in \mathbb{N};\ q_j.q_l > 0,\ \forall j \leq l < j_1\right\}.$$
$$j_3 = min\left\{j \in \mathbb{N};\ q_j.q_l > 0,\ \forall j \leq l < j_2\right\}.$$
$$...$$
$$j_k = min\left\{j \in \mathbb{N};\ q_j.q_l > 0,\ \forall j \leq l < j_{k-1}\right\}.$$

Portanto, obteremos $\{q_{j_1}, q_{j_2}, q_{j_3}, ..., q_{j_k}\}$ como o conjunto dos coeficientes de q(x) antes da primeira, segunda,..., k-ésima mudança no sinal. Esquematicamente:

$$q_{j_1} \quad \underbrace{\rightarrow}_{troca\ de\ sinal} \quad q_{j_1-1}$$
$$...$$
$$q_{j_k} \quad \underbrace{\rightarrow}_{troca\ de\ sinal} \quad q_{j_k-1}$$

Assim, a cada transição no sinal entre q_{j_k} e q_{j_k-1} o valor de p_{j_k} tem o mesmo sinal de q_{j_k-1}. Desde que o número de mudanças nos sinais da sequência completa p_j é maior que o número de mudanças nos sinais em qualquer subsequência, nós temos pelo menos m mudanças de sinais em p(x). Finalmente, p_0 tem sinal oposto ao de q_0 e consequentemente, oposto ao de p_{j_m}. Portanto, p(x) tem pelo menos m + 1 mudanças nos sinais.

Como já provamos no Lema 2 que o número de raízes positivas de um polinômio de coeficientes reais difere do número de mudanças de sinais nos seus coeficientes por um múltiplo de 2, para concluir a demonstração do Teorema de Descates, basta provar que esse número de raízes positivas não excede o número de mudanças de sinais nos seus coeficientes.

Teorema: O número de raízes positivas de um polinômio p(x) com coeficientes reais não excede o número de mudanças de sinais nos seus coeficientes.

Prova: Façamos indução sobre o número de raízes positivas de p(x).
Se p(x) não tem raízes positivas, o resultado é imediato, uma vez que o número de mudanças de sinais é sempre um número maior que ou igual a zero. Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para polinômios que possuam k - 1 raízes positivas e que nós temos um polinômio p(x) com k raízes positivas. Então, para uma certa raiz $\alpha > 0$,

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

para algum q(x) com k - 1 raízes positivas. Por indução q(x) tem pelo menos k - 1 mudanças de sinais. Portanto, pelo Lema 3, p(x) tem pelo menos k -1 + 1 = k mudanças de sinais.

Observação: A mesma regra pode ser aplicada para o número de raízes reais e negativas de p(x), calculando-se p(-x), pois as raízes positivas de p(-x) são as negativas de p(x).

Corolário: Se um polinômio p(x) de grau n tem n raízes positivas então seus coeficientes são todos diferentes de zero e os sinais dos coeficientes alternam.

Prova: Considere o polinômio p(x) de grau n com raízes positivas $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

Uma vez que o polinômio p(x) tem fatoração

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)...(x - \alpha_n),$$

vimos nas relações de Girard que podemos escrever p(x) na forma

$$p(x) = a_n x^n - \sigma_1 a_n x^{n-1} + \sigma_2 a_n x^{n-2} + ... + (-1)^i \sigma_i a_n x^{n-i} + ... + (-1)^n \sigma_n a_n$$

onde

$$\sigma_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

$$\sigma_2 = \sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n$$

Já que $\sigma_i > 0$, para $i \in \{1, ..., n\}$ e $a_n \neq 0$, então todos os coeficientes de p(x) são não nulos. Ademais, como $a_{n-i} = (-1)^i \sigma_i a_n$, e $\sigma_i > 0$, segue que

$$\frac{a_{n-i}}{|a_{n-i}|} = (-1)^i \cdot \frac{\sigma_i}{|\sigma_i|} \cdot \frac{a_n}{|a_n|} = (-1)^i \cdot \frac{a_n}{|a_n|}$$

Isso nos diz que $s(a_{n-i}) = (-1)^i s(a_n)$, portanto, os sinais nos coeficientes de p(x) alternam.

Corolário: Se todos os coeficientes de p(x) são diferentes de zero e alternam de sinal, então p(x) não tem raízes negativas.

Prova: Considere o polinômio p(x) de coeficientes não nulos

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

tal que os sinais nos seus coeficientes alternam, ou seja,

$$s\left(\frac{a_j}{a_{j+1}}\right) = -1$$

Tendo em vista que

$$p(-x) = (-1)^n a_n x^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + ... + (-1) a_1 x + a_0,$$

segue que qualquer coeficiente de p(-x) é da forma $b_j = (-1)^j a^j$, logo

$$\begin{aligned} s\left(\frac{b_j}{b_{j+1}}\right) &= \frac{(-1)^j}{(-1)^{j+1}} \cdot s\left(\frac{a_j}{a_{j+1}}\right) \\ &= \frac{(-1)^j}{(-1)^{j+1}} \cdot (-1) \\ &= \frac{(-1)^{j+1}}{(-1)^{j+1}} = 1. \end{aligned}$$

Desse modo, como não ocorre mudança de sinal nos coeficientes de p(-x), pelo teorema de Descartes p(-x) não tem raízes positivas. Como as raízes positivas de p(-x) são as raízes negativas de p(x), então p(x) não tem raízes negativas.

Exemplo. Seja $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$. A sequência de sinais é + + - -. Logo, $V\,[p(x)]$ =1 e pode-se afirmar com exatidão que p(x) tem uma raiz positiva. Temos que $p(-x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ e a sequência de sinais é - + + - . Logo, temos duas trocas de sinais e daí p(x) pode ter duas ou zero raízes negativas. Se p(x) tiver duas raízes negativas, então não terá nenhuma raiz complexa. Se, contudo, não tiver raízes negativas, então terá duas complexas conjugadas.

Exemplo. Seja $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. A sequência de sinais é + - + - +. Logo, $V\left[p(x)\right]$= 4, então p(x) tem 4, 2 ou 0 raízes positivas. Como $p(-x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, então não temos troca de sinais e daí não temos raízes negativas. Logo, p(x) pode ter 4 raízes positivas, ou 2 raízes positivas e duas complexas, ou nenhuma raiz positiva e quatro complexas.

O teorema a seguir, trata-se de uma generalização do Teorema de Descartes.

Teorema: Se p(x) é um polinômio de coeficientes reais de grau n e $a \in \mathbb{R}$, então o número de raízes de p(x) maiores que a não supera o número de mudanças de sinal na sequência p(a), p'(a), p''(a), ... E se for menor, a diferença é par.
Prova: Defina g(x) = p(x + a). Como já vimos, podemos escrever

$$p(x+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!} x^k$$

Portanto, o número de variações de sinal nos termos da sequência p(a),p'(a), p''(a),..., coincide com $V\left[g(x)\right]$. Por outro lado, temos uma bijeção

$$\sigma : \{\alpha \in \mathbb{C};\ \alpha > 0\ e\ g(\alpha) = 0\} \leftrightarrow \{\beta \in \mathbb{C};\ \beta > a, p(\beta) = 0\}$$

dada por $\sigma(\alpha) = \alpha + a$. Como $g(\alpha)$=0, temos $p(\alpha + a) = 0$. Logo α + a é raiz de p(x) e certamente $\alpha + a > a$. Além disso, a inversa σ^{-1} é dada por $\sigma^{-1}(\beta)$=$\beta - a$, pois $g(\beta - a) = p(\beta) = 0$. Portanto, se denotarmos por P_a o número de raízes de p(x) maiores que a, temos que $P_a = P\left[g(x)\right]$. Pelo Teorema de Descartes, $P_a = P\left[g(x)\right] \leq V\left[g(x)\right]$ e se for menor, a diferença é par.

5.2 Teorema de Bolzano

Bernard Bolzano (Praga, Boémia, atual República Checa, 5 de outubro de 1781 - Praga, 18 de dezembro de 1848) foi um matemático, teólogo e filósofo que pesquisou também problemas ligados ao espaço, a força e à propagação de ondas. Filho de um comerciante de artes católico, foi educado na Universidade de Praga. Depois de estudar teologia, filosofia e matemática, foi ordenado sacerdote da Igreja Católica em 1805, e foi designado para uma cadeira de ciência da religião, recém criada para combater o ateísmo e as ideias oriundas da Revolução Francesa.

Defendeu abertamente uma reforma educacional, proclamou os direitos da consciência individual sobre as exigência do governo austríaco, e discursou sobre os absurdos da guerra e do militarismo. Em 1819 foi proibido de exercer qualquer atividade acadêmica por causa das posições críticas sobre as condições sociais vingentes no Império Austríaco e em 1824 foi obrigado, por pressão do Imperador Franz I da Áustria, a aposentar-se.

Embora Bolzano estivesse distante do grande centro científico de sua época, Paris, seus estudos científicos foram muito avançados para o seu tempo, nos fundamentos de vários ramos da matemática, como a teoria das funções, a lógica e a noção de cardinal. Depois de demonstrar o teorema do valor intermediário, deu o primeiro exemplo de uma função contínua não derivável em nenhum ponto do conjunto dos números reais. No campo da lógica, estudou a tabela de verdade de uma proposição e introduziu a primeira definição operativa de dedutibilidade. Estudou os conjuntos infinitos, e no seu "Paradoxos do Infinito" lançou as bases para a construção da teoria dos conjuntos por Georg Cantor.
Nesta seção, veremos que dada uma equação polinomial com coeficientes reais, podemos analisar o número de raízes reais dessa equação num intervalo real aberto (a,b). Para isso, faremos uso do seguinte

Teorema: Considere o polinômio de grau n com coeficientes reais e um intervalo real (a,b):

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

i. Se p(a).p(b) $>$ 0, então p(x) $=$ 0 possui um número par de raízes reais no intervalo (a,b); subentende-se que pode inclusive não existir raiz nesse intervalo.
ii. Se p(a).p(b) $<$ 0, então p(x) $=$ 0 possui um número ímpar de raízes reais no intervalo real (a,b).

Prova: Seja o polinômio p(x) de grau n cujas raízes reais e complexas não reais são, respectivamente, $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ e $\beta_1, \overline{\beta_1} \ldots, \beta_k, \overline{\beta_k}$ com j + 2k = n. Podemos escrever o polinômio p(x) na forma fatorada

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{j} (x - \alpha_i) \cdot \prod_{i=1}^{k} (x - \beta_i)(x - \overline{\beta_i})$$

Se supusermos que $\beta_1 = c + di$ então $\overline{\beta_1} = c - di$ e portanto,

$$\begin{aligned}(x-\beta_1)(x-\overline{\beta_1}) &= x^2 - (\beta_1 + \overline{\beta_1})x + \beta_1\overline{\beta_1} \\ &= x^2 + 2cx + c^2 + d^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Assim, como $S(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-\beta_i)(x-\overline{\beta_i})$ é o produto de k fatores da forma que analisamos acima, segue que $S(x) > 0, \forall x > 0$ e por conseguinte,

$$p(x) = a_n \cdot S(x) \cdot \prod_{i=1}^{j}(x-\alpha_i); \ com \ S(x) > 0, \forall x > 0$$

Observe que podemos obter p(a) e p(b) a partir da expressão acima. Dessa forma, se **k** indica o número de raízes reais maiores que a, **l** indica o número de raízes reais maiores que b e aplicando a função sinal (já definida na seção anterior) em p(a) e p(b), obtemos

$$s(p(a)) = s(a_n) \cdot (-1)^k$$

$$s(p(b)) = s(a_n) \cdot (-1)^l$$

Utilizando a propriedade da função sinal, temos

$$s(p(a) \cdot p(b)) = s({a_n}^2) \cdot (-1)^{k+l} = (-1)^{k-(-l)} = (-1)^k \cdot \left[(-1)^{-1}\right]^{-l} = (-1)^{k-l}$$

onde **k - l** indica o número de raízes reais entre a e b. Seguem naturalmente i e ii.

Exemplo. Prove que todo polinômio com coeficientes reais de grau ímpar possui pelo menos uma raiz real.
Sem perda de generalidade, considere o polinômio mônico com coeficientes reais, de grau n ímpar e termo independente não nulo,

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Colocando a potência x^n em evidência no polinômio p(x), temos

$$p(x) = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

Uma vez que $\lim_{|x|\to+\infty} \dfrac{a_k}{x^{n-k}} = 0 \ \ \forall k \in \{0, ..., n-1\}$, então

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty \ \ e \ \ \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

Dessa forma, devem existir números reais a e b tais que p(a) $<$ 0 e p(b) $>$ 0, portanto, pelo Teorema de Bolzano, p(x) tem ao menos uma raiz real no intervalo (a,b).

Exemplo. Determine quantas raízes reais $p(x)$=$x^3 - 4x^2 + 6x + 2$ pode apresentar no intervalo (0,1).
Como p(0) = 2 e p(1) = 5, pelo Teorema de Bolzano, a equação p(x) = 0 tem duas raízes reais ou nenhuma raiz no intervalo (0,1).

Exemplo. Mostre que o polinômio $p(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 + 16x - 96$ possui uma raiz real inferior a 4.
Como p(0) = -96 e p(4) = 128, então pelo Teorema de Bolzano, o polinômio p(x) tem 1 ou 3 raízes reais no intervalo (0,4).

Exemplo. Determine α de modo que o polinômio $p(x)$=$x^3 + x^2 + 5x + \alpha$ tenha pelo menos uma raiz real no intervalo (-2,0).
Temos que $p(-2)$=$\alpha - 14$ e p(0) = 0, portanto, pelo Teorema de Bolzano, para que p(x) possua pelo menos uma raiz real, p(-2) e p(0) devem ter sinais contrários, ou seja,

$$\alpha \cdot (\alpha - 14) < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 14\alpha < 0$$

$$\alpha^2 - 14\alpha + 49 < 49 \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha - 7)^2} < \sqrt{49}$$

$$|\alpha - 7| < 7 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 14.$$

5.3 Teorema de Lagrange

Nesta seção, veremos como encontrar o limite superior das raízes positivas de uma equação polinomial de coeficientes reais. Para isso, foi demonstrado o Teorema de Lagrange, através do qual podemos estabelecer um limite superior das raízes reais de uma equação polinomial.
Teorema: Seja $a_n > 0, a_0 \neq 0$ e $0 \leq k \leq n - 1$, o maior índice dos coeficientes negativos do polinômio p(x) de coeficientes reais. Se G é o máximo dos módulos dos coeficientes negativos, então p(x) é sempre positivo para

$$x \geq \sqrt[n-k]{\frac{G}{a_n}} + 1$$

Ademais, todas as raízes reais de p(x) são menores que esse valor.

Prova: Seja p(x) o polinômio de grau n e a_k o seu primeiro coeficiente negativo:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + ... + a_0$$

Assim, os coeficientes $\{a_n, a_{n-1}, ..., a_{k+1}\}$ de p(x) são positivos e para $x>1$,

$$a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_{k+1}x^{k+1} > 0$$

Desse modo, para x $>$ 1,

$$p(x) \geq a_nx^n + a_kx^k + ... + a_1x + a_0.$$

Posto que $G \geq -a_j$ para $j \in \{0, 1, ..., k\}$, ou seja, $-G \leq a_j$ temos

$$\begin{aligned}
p(x) &\geq a_nx^n + (-G)x^k + ... + (-G)x + (-G) \\
&= a_nx^n - G \cdot (x^k + x^{n-1} + \ldots + x + 1) \\
&> a_nx^n - a_nx^{n-k-1} - G \cdot \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \\
&= a_nx^{n-k-1} \cdot (x^{k+1} - 1) - G \cdot \frac{x^{k+1}}{x - 1} \\
&= \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \cdot [a_nx^{n-k-1}(x - 1) - G] \\
&> \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} \cdot [a_n(x - 1)^{n-k} - G],
\end{aligned}$$

pois para x $>$ 1, temos que $x^{n-k-1}.(x - 1) > (x - 1)^{n-k}$ e como

$$\frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^{k} x^i > 0$$

então $p(x)>0$ quando $a_n(x - 1)^{n-k} - G \geq 0$. o que resulta

$$x \geq \sqrt[n-k]{\frac{G}{a_n}} + 1$$

Assim, todas as raízes de p(x) são menores que esse valor. Mediante o exposto, para o limite superior das raízes positivas do polinômio, pode-se tomar o número,

$$L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{G}{a_n}}.$$

Exemplo. Dada a equação $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$, temos que $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$, logo satisfaz as hipóteses do teorema de Lagrange. Dessa forma,

$$L = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{24}{1}} = 1 + \sqrt{24} \cong 5,9.$$

De fato, pelo teorema das raízes racionais, as possíveis raízes são:

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}.$$

Como temos 3 trocas de sinais,pelo teorema de Descartes temos 3 ou 0 raízes positivas. Verificamos facilmente que $p(1) = p(2) = p(3) = 0$ e daí as raízes positivas não superam 5,9.

Exemplo. A equação $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ é tal que $a_n > 0$ e $a_0 \neq 0$, assim

$$L = 1 + \sqrt[3-2]{\frac{6}{1}} = 1 + 6 = 7$$

Logo, como temos 2 trocas de sinais, a equação tem 2 ou 0 raízes positivas onde nenhuma raiz positiva supera 7. De fato, as possíveis raízes racionais são $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$ e verificamos facilmente que $p(1) = p(4) = 0$.

Para obter o limite inferior para as raízes positivas de p(x) = 0, considere o polinômio $p_1(x) = x^n p(\frac{1}{x})$. Podemos usar o teorema de Lagrange para encontrar um limite superior para as raízes positivas da equação $p_1(x) = 0$. Suponha que $x_1, x_2, ..., x_n$ sejam as raízes da equação p(x) = 0. Logo podemos escrever $p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Assim

$$p_1(x) = x^n.p\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$x^n\left[a_n\left(\frac{1}{x} - x_1\right)\left(\frac{1}{x} - x_2\right)...\left(\frac{1}{x} - x_n\right)\right] =$$
$$= a_n(1 - xx_1)(1 - xx_2)...(1 - xx_n)$$

Observe que se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

então

$$p_1(x) = x^n\left(a_n\frac{1}{x^n} + a_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + a_{n-2}\frac{1}{x^{n-2}} + ... + a_2\frac{1}{x^2} + a_1\frac{1}{x} + a_0\right)$$

logo

$$p_1(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + ... + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + a_0x^n$$

Equivalentemente,

$$p_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

daí, se $a_0 > 0$ e $a_n \neq 0$ então, pelo Teorema de Lagrange, se denotarmos por L_1 o limite superior das raízes positivas de $p_1(x)$, teremos que L_1 será dado por:

$$L_1 = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{G}{a_0}}$$

onde B é o máximo dos módulos dos coeficientes negativos do polinômio e k é o maior dos índices dos coeficientes negativos

Note que as raízes de $p_1(x)$ são $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, ..., \frac{1}{x_n}$, ou seja, existe uma relação inversa entre as raízes de p(x) e $p_1(x)$ de tal modo que a maior raiz de $p_1(x)$ é a inversa da menor raiz de p(x). Assim, se L_1 é o limite superior para as raízes positivas de $p_1(x)$ então $\frac{1}{L_1}$ será o limite inferior para as raízes positivas de p(x). Dessa forma, se r é uma raiz de p(x), então $\frac{1}{L_1} \leq r \leq L$.

Exemplo. Obtenha um intervalo que contenha as raízes positivas da equação algébrica $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
Temos que

$$p_1(x) = x^3 \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right) + 2 \right] =$$

$$= x^3 \left[\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 2 \right] = 1 - 2x - x^2 + 2x^3$$

Dessa forma, pelo teorema de Lagrange temos que

$$L_1 = 1 + \sqrt[3-2]{\frac{2}{2}} = 1 + 1 = 2, \ e \ L = 1 + \sqrt[3-2]{\frac{2}{1}} = 1 + 2 = 3.$$

Então, um um intervalo que contenha as raízes positivas da equação é $\frac{1}{2} \leq r \leq 3$. De fato, a equação algébrica $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ é equivalente a

$$x^2(x-2) - (x-2) = (x^2 - 1)(x-2) = 0,$$

logo

$$(x-1)(x+1)(x-2) = 0$$

cujas raízes positivas 1 e 2 pertencem ao intervalo $\frac{1}{2} \leq r \leq 3$.

Exemplo. Sabendo que a equação $1000x^5 + 20x^2 - 1 = 0$ admite uma raiz positiva, mostre que essa raiz supera 0,02.

Procuremos então , um intervalo que contenha essa raiz positiva. Para isso, vamos determinar um limite inferior e superior para a raiz positiva dessa equação. Temos que:

$$L = 1 + \sqrt[5-0]{\frac{1}{1000}} \cong 1 + 0,25 \cong 1,25$$

Temos

$$p_1(x) = x^5 \left[1000\left(\frac{1}{x}\right)^5 + 20\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1 \right] =$$

$$= x^5 \left[\frac{1000}{x^5} + \frac{20}{x^2} - 1 \right] = -x^5 + 20x^3 + 1000.$$

Observe que não podemos aplicar o teorema de Lagrange, pois $a_n = -1 < 0$. Mas, as raízes de $p_1(x)$ são as mesmas de $-p_1(x)$, e assim ao encontrar um limite superior para a raiz positiva de $-p_1(x)$, estamos encontrando o limite superior para a raiz de positiva de $p_1(x)$ e, consequentemente, o limite inferior para a raiz positiva da equação inicial. Logo $-p_1(x) = x^5 - 20x^2 - 1000$ e daí

$$L_1 = 1 + \sqrt[5-2]{\frac{1000}{1}} = 1 + 10 = 11.$$

Como $\frac{1}{L_1} = \frac{1}{11} \cong 0,09$ então $0,09 \leq r \leq 1,25$.

Exemplo. Determine os limites inferior e superior das raízes reais positivas da equação $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$

O limite superior é dado por

$$L = 1 + \sqrt[3-2]{\frac{5}{1}} = 1 + 5 = 6.$$

Para determinar o limite inferior das raízes, temos

$$p_1(x) = x^3 \left[\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) + 24 \right] =$$

$$= x^3 \left[\frac{1}{x^3} - \frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} + 24 \right] = 24x^3 - 2x^2 - 5x + 1$$

e então:

$$L_1 = 1 + \sqrt[3-2]{\frac{5}{24}} = 1 + \frac{5}{24} = \frac{29}{24}.$$

Temos então que as raízes positivas estão no intervalo $\frac{24}{29} \leq r \leq 6$. De fato, as possíveis raízes racionais positivas são $\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$. Como temos duas trocas de sinais,então temos 2 ou 0 raízes positivas; verificamos facilmente que 3 e 4 são raízes da equação.

Exemplo. Determine os inteiros positivos que são soluções da equação

$$2015x^3 + 997x^2 - 45371x - 49945 = 0$$

Como temos 1 troca de sinal, pelo teorema de Descartes temos 1 raiz positiva. Pelo teorema de Lagrange, temos que

$$L = 1 + \sqrt[3-1]{\frac{49945}{2015}} = 1 + \sqrt{24,78} \cong 1 + 4,98 \cong 5,98.$$

Logo, nenhuma raiz supera 5,98. Por inspeção, temos que 5 é raiz da equação.

Conclusão

É notório que nos últimos anos, tem ocorrido uma explícita redução dos assuntos relacionados com polinômios. Até mesmo nos casos mais triviais de fatoração de polinômios quadráticos percebemos essa redução. Isso dificulta bastante o aprendizado do educando, uma vez que o mesmo necessita de uma serie de modelos de raciocínio afim de que possam ser generalizados em outras situações.

Quando nos remetemos a resolução de equações, percebemos que muitas vezes o aluno é levado a decorar fórmulas e procedimentos, como a fórmula de Báskara, sem que antes ele seja incentivado a escrever o polinômio na sua forma fatorada. Algumas soluções de problemas os quais aparentemente não tem nenhuma ligação com polinômios, acaba dependendo muito deles. É fundamental que entendamos que os alunos precisam dominá-lo com segurança.

É muito comum nos livros didáticos atuais adotados no Ensino Médio, exemplos de resoluções de equações do terceiro, quarto e até quinto graus, porém, na maioria dos casos, já são fornecidas algumas raízes, recaindo em equações triviais. Outras vezes, percebemos que alguns métodos que auxiliam na resolução de equações já não são eficientes, fazendo-se necessário uma abordagem diferenciada como o método de Gustavo para solucionar equações do terceiro e quarto graus.

Apesar da dificuldade do assunto em questão, é importante que o educando se aproprie de alguns desses métodos de resolução de equações e também saiba extrair informações pertinentes sobre o conjunto das raízes, como se existem raízes racionais, a quantidade de raízes reais positivas e negativas e assim por diante.

Espero que este trabalho venha estimular o interesse pelo estudo de polinômios e equações polinomiais, auxiliando alunos do Ensino Médio no aprimoramento dos seus conhecimentos e também os professores na elaboração de suas aulas.

Referências

[1] Soares, Maria Joana, *Análise Complexa*, pág. 11-21, Braga, Portugual, 2007, publicação do Departamento de Matemática da Universidade do Milho.

[2] Hefez, Abramo. *Polinômios e Equações Algébricas*/ Abramo Hefez; Maria Lúcia Torres Villela. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[3] Lima, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio,* volume 3/Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.6.ed.-Rio de Janeiro: SBM 2006.

[4] Giovanni, José Ruy. *Matemática Completa*/José Ruy Giovanni, José Roberto Bonjorno. 2. ed.renov. Volume 3. São Paulo: FTD, 2005.

[5] O.R.B. Oliveira, *Teorema Fundamental da Álgebra*, 2011. Disponível em: www.ime.usp.br/∼ oliveira/ELE-TFA-RAIZ.pdf Acessado em: 23/03/2015.

[6] Moreira, Carlos Gustavo Tamn de Araújo. *Uma solução das equações do terceiro e do quarto graus.* Revista do Professor de Matemática - RPM, número 25, IMPA, Rio de Janeiro, 1994, pág. 23-26. Disponível em: http://w3.impa.br/∼ gugu/equacoes.pdf. Acessado em: 20/04/2015.

[7] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar 6.* Atual Editora, São Paulo, 1977.

[8] Scott E. Brodie. *Descartes' Rule of Signs*; 1999. Disponível em http://www.cut-the-knot.org/fta/ROS2.shtml. Acessado em 18/05/2015.

[9] Stewart.A.Levin. *Descartes' Rule of Signs - How hard can it be?*,2002, Disponível em http://sepwww.stanford.edu/data/media/public/oldsep/stew/descartes.pdf. Acessado em: 23/05/2015.

[10] *Teorema de Lagrange.* http://matematicauva.org/artigos/minicurso_pedro.pdf. Acessado em: 21/06/2015.