



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JOÃO BATISTA COELHO

**GEOMETRIA FRACTAL:UM OLHAR SOBRE A
NECESSIDADE DE INCLUSÃO NA ESTRUTURA
CURRICULAR DO ENSINO MÉDIO**

Palmas - TO
2015

JOÃO BATISTA COELHO

**GEOMETRIA FRACTAL:UM OLHAR SOBRE A
NECESSIDADE DE INCLUSÃO NA ESTRUTURA
CURRICULAR DO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática. Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes.

Palmas - TO
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

C672g Coelho, João Batista.
 Geometria Fractal: Um olhar sobre a necessidade de inclusão na
 estrutura curricular do ensino médio . / João Batista Coelho. –
 Palmas, TO, 2015.
 80 f.

 Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do
 Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-
 Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2015.
 Orientador: Msc. Gilmar Pires Novaes

 1. Fractal. 2. Geometria. 3. Ensino Médio. 4. Estrutura curricular .
I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

JOÃO BATISTA COELHO

**GEOMETRIA FRACTAL: UM OLHAR SOBRE A NECESSIDADE DE
INCLUSÃO NA ESTRUTURA CURRICULAR DO ENSINO MÉDIO.**

Trabalho de Conclusão de Curso
Apresentado ao programa de Mestrado
Profissional em Matemática em Rede
Nacional – PROFMAT da Universidade
Federal do Tocantins como requisito
parcial para a obtenção do título de
Mestre.

Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires
Novaes.

Aprovada em 19 de junho de 2015.

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz (Presidente da banca – UFT)



Prof. Dr. Chrystian de Assis Siqueira (UFT)



Prof^a. Dr^a. Lady Sakay (UNIRG)

Ao meu amor maior, Maria Eduarda; a minha esposa, Poliana, e aos meus pais João Francisco in memoriam e Tita Alves.

Agradecimentos

Imensurável é minha gratidão ao senhor Deus por ter me privilegiado com a oportunidade de enriquecer meus conhecimentos científicos e por ter caminhado ao meu lado me avigorando nos momentos de fraquezas e angústias. Por mais uma vez ter me mostrado que é o Deus do impossível que me deu coragem, discernimento e compreensão para superar todos os obstáculos.

Tenho muito a agradecer a minha família, pelo incentivo e apoio, e amavelmente a minha filha, Maria Eduarda, pelo companheirismo incansável de todos os momentos e, carinhosamente, a minha esposa pela sua permanente compreensão, pelo ânimo e dedicação incondicional.

Agradecer e parabenizar à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e à Universidade Federal do Tocantins(UFT) pela parceria de sucesso no Profmat, no intuito de preparar o professor para desenvolver melhoria na educação básica no estado do Tocantins. E também ao professor coordenador Andrés Lázaro Barraza De La Cruz e a todos os demais professores pelos seus ensinamentos. Um agradecimento especial aos Professores Msc. Gilmar Pires Novaes pela sua brilhantíssima orientação científica, e por sua grande cooperação e compreensão ao longo da realização deste trabalho e o Dr. Pedro Alexandre da Cruz pela a disposição e grande colaboração para a finalização do trabalho.

E, por fim, agradecer aos guerreiros amigos de sala. Mantivemo-nos unidos em busca de um só objetivo. E a todos que diretamente contribuíram para o meu crescimento intelectual e pessoal. Especialmente, aos amigos de viagem por tudo que vivemos e aprendemos juntos. Agora é a hora de dizer que foi difícilimo, mas valeu a pena...

*As nuvens não são esferas,
as montanhas não são cones,
as linhas costeiras não são círculos e a casca de uma árvore não é suave,
e nem os relâmpagos se propagam em linha reta.
(Benoit Mandelbrot)*

Resumo

Para atender à necessidade de estudos de formas mais complexas, surgiu uma nova geometria que não atende a nenhum dos cinco postulados de Euclides, conhecida como Geometria Fractal, também intitulada geometria da natureza, pois propõe uma melhor aproximação das atividades do cotidiano com as atividades praticadas na escola. É importante ressaltar a relação entre a Geometria Fractal e a aplicação interdisciplinar com outros componentes curriculares, tais como a Biologia, Geografia, Música, Economia, dentre outros. Destacamos as principais propriedades que caracterizam a identificação dos fractais (autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal). Existem vários fractais famosos, tais como Conjunto de Cantor, Curva e Floco de Neve de Koch, Triângulo e Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger, Curva de Peano, Curva de Hilbert. Neste trabalho, também será abordado a necessidade de apresentar reflexões e justificativas sobre as possibilidades da inclusão do ensino de Geometria Fractal no Ensino Médio, pois textos e situações-problema envolvendo a Geometria Fractal começam a aparecer no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares. Tem-se a perceptibilidade que é um tema recente para a maioria dos professores e alunos, pois não consta na estrutura curricular, e quando surgem nos livros didáticos, são apenas leituras complementares. Pode citar a importância da conexão dos fractais com as progressões geométricas, pois ambos trabalham na mesma linha de pensamento, podendo construir uma contextualização enriquecedora para a aprendizagem do aluno.

Palavras-chave: Fractal. Geometria. Estrutura Curricular. Ensino Médio.

Abstract

To all the need of study of the most complex ways, there's come a new geometry that do not attend Non of the five Euclid's postulates, known as fractal geometry that is also known as natural geometry, because it proposes a better approximation of the common activities with the activities practice in school. Its important to point the relationship between fractional geometry with interdisciplinary applications with others curricular components as biology, geometry, music, economy, etc. We must to point out the main properties that characterize the identity of fractals, they are, self-similarity, infinite complexity and fractal dimension. There are several famous fractals, as Cantors Set, Kochs Snowflake Curve, Sierpinks Triangle and mat, Mengers Sponge, Peanos Curve and Hilberts Curve. In this issue project we shall also approach the necessity of introducing reflection and justifications about the possibilities of inclusion Fractal Geometry studies in High School. Because texts and problem situation involving the fractal geometry began to appear in ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio/ High School National Exam), and national tests. We have the perceptibility that its a theme to most teachers and students, because it doesnt "counts" in the curricular structure and when it appears in didactic books, it only as a complemented reading. We can point the importance of the connection between fractals and geometric progression because both of them work in the same line of knowledge, the can build a rich contextualization to the students learn.

Key-words: Fractal. Geometry. Curricular structure. secondary school.

Lista de ilustrações

Figura 1 – <i>Fractal.(Escala 01)</i>	18
Figura 2 – <i>Fractal.(Escala 04)</i>	18
Figura 3 – <i>Fractal.(Escala 30)</i>	19
Figura 4 – <i>Fractal.(Escala 350)</i>	19
Figura 5 – <i>Benoit Mandelbrot(1924-2010)</i>	20
Figura 6 – <i>Fractal.(Imagens de um fractal ampliado)</i>	21
Figura 7 – <i>Fractal.(Processo iterativo de construção do Tapete de Sierpinski.)</i>	24
Figura 8 – <i>Fractal.(Auto semelhança aproximada)</i>	25
Figura 9 – <i>Fractal.(Complexidade infinita)</i>	26
Figura 10 – <i>Segmento de reta.</i>	27
Figura 11 – <i>Quadrado</i>	28
Figura 12 – <i>Cubo</i>	28
Figura 13 – <i>Georg Cantor(1845-1918)</i>	31
Figura 14 – <i>Intervalos no conjunto de Cantor</i>	32
Figura 15 – <i>Etapas da construção geométrica do conjunto de Cantor</i>	32
Figura 16 – <i>Helge Von Koch(1870-1924)</i>	35
Figura 17 – <i>Curva de Koch</i>	36
Figura 18 – <i>Comprimento da curva de Koch</i>	36
Figura 19 – <i>Curva de Koch(níveis)</i>	38
Figura 20 – <i>Níveis do Floco de Neve de Koch</i>	39
Figura 21 – <i>Floco de Neve de Koch</i>	41
Figura 22 – <i>Waclaw Sierpinski(1822-1969)</i>	41
Figura 23 – <i>Níveis de construção do triângulo de Sierpinski</i>	42
Figura 24 – <i>Triângulo de Sierpinski</i>	43
Figura 25 – <i>Processo de construção do tapete de Sierpinski</i>	47
Figura 26 – <i>Processo de construção da Esponja de Menger.</i>	47
Figura 27 – <i>Giuseppe Peano(1858-1932).</i>	48
Figura 28 – <i>Processo de construção da Curva Peano.</i>	49
Figura 29 – <i>David Hilbert(1862-1943).</i>	51
Figura 30 – <i>Níveis da curva de Hilbert.</i>	51
Figura 31 – <i>Detecção de núcleos atípicos</i>	55
Figura 32 – <i>Antena fractal</i>	55
Figura 33 – <i>Cordilheiras</i>	56
Figura 34 – <i>Egito visto do espaço</i>	56
Figura 35 – <i>Cefalópodes Nautilus</i>	57
Figura 36 – <i>Asas de uma Libélula</i>	57

Figura 37 – <i>Raio</i>	58
Figura 38 – <i>Antenas Fractais</i>	58
Figura 39 – <i>Falha em produto têxtil</i>	59
Figura 40 – <i>Questão 3 Prova de Matemática do Vestibular UFPR, 2008.</i>	60
Figura 41 – <i>Prova de Matemática do Vestibular UNESP, 2011.</i>	61
Figura 42 – <i>Prova de Matemática do Vestibular da MACKENZIE, 2010.</i>	61
Figura 43 – <i>Prova de Matemática do Vestibular da UNICAMP, 2012.</i>	62
Figura 44 – <i>Prova de Matemática do Vestibular da UEL, 2011.</i>	63
Figura 45 – <i>Livro MATEMÁTICA PAIVA volume 1, edição 2013.</i>	64
Figura 46 – <i>Livro MATEMÁTICA de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.</i>	65
Figura 47 – <i>Livro MATEMÁTICA de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.</i>	66
Figura 48 – <i>Livro MATEMÁTICA de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.</i>	67
Figura 49 – <i>Livro MATEMÁTICA de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.</i>	68
Figura 50 – <i>Livro MATEMÁTICA de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.</i>	68
Figura 51 – <i>Questão 54 do ENEM 2008.</i>	69
Figura 52 – <i>Introduzindo a ideia de fractal.</i>	71
Figura 53 – <i>Apresentando o Conjunto de Cantor.</i>	72
Figura 54 – <i>Apresentando a Curva de Koch.</i>	72
Figura 55 – <i>Apresentando o Floco de neve de Koch.</i>	73
Figura 56 – <i>Triângulo e Tapete Sierpinski. Esponja de Menger.</i>	73
Figura 57 – <i>Cartão Triângulo Sierpinski.</i>	74
Figura 58 – <i>Cartão Degraus Centrais.</i>	74

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	A GEOMETRIA FRACTAL	15
2.1	Origem da Geometria não Euclidiana	15
2.2	Fractal	17
3	CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS	23
3.1	Estrutura fina em qualquer escala	23
3.2	Autossimilaridade	23
3.3	Complexidade Infinita ou Iteração	25
3.4	Dimensão fractal	27
3.4.1	Dimensão topológica e dimensão de Hausdorff	27
4	FRACTAIS CLÁSSICOS	30
4.1	O conjunto de Cantor	30
4.1.1	Construção numérica	31
4.1.2	Construção geométrica	32
4.1.3	Número de segmentos	33
4.1.4	Comprimento de cada segmento	34
4.1.5	Comprimento total	34
4.1.6	Dimensão do Conjunto de Cantor	35
4.2	A Curva de Koch	35
4.2.1	Construção da Curva de Koch	35
4.2.2	Análise da Curva de Koch	36
4.2.3	Dimensão	38
4.2.4	Características fractais da Curva de Koch	38
4.3	Floco de Neve de Koch	39
4.3.1	Área delimitada pelo Floco de Neve de Koch	39
4.4	Triângulo de Sierpinski	41
4.4.1	Processo por remoção de triângulos	42
4.4.2	Propriedades geométricas	43
4.4.3	Números de triângulos	43
4.4.4	Perímetro	44
4.4.5	Área	45
4.4.6	Características fractais	46
4.4.7	Dimensão fractal	46

4.4.8	Tapete de Sierpinski	46
4.4.9	Esponja de Menger	47
4.5	Curva de Peano	47
4.5.1	Construção da Curva de Peano	48
4.5.2	Estudo da curva	49
4.5.3	Dimensão	50
4.5.4	Características fractais da Curva de Peano	50
4.6	Curva de Hilbert	50
4.6.1	Construção da Curva de Hilbert	51
4.6.2	Estudo da Curva de Hilbert	51
4.6.3	Características fractais da Curva de Hilbert	52
5	FRACTAL: INCLUSÃO NA PRÁTICA PEDAGÓGICA	53
5.1	Conexão da Geometria Fractal com outras áreas do conhecimento .	54
5.2	Inclusão da Geometria Fractal no Ensino Médio	60
5.3	Fractais na sala de aula	70
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	76

1 INTRODUÇÃO

Com a necessidade de estudar formas geométricas com uma complexidade maior, sendo estas impossíveis de ser descritas por meio da Geometria Euclidiana, começaram a ocorrer vários questionamentos, por volta da primeira metade do século XIX, o que gerou um grande acontecimento na história da Matemática: a descoberta das geometrias não euclidianas. Diante desse acontecimento, surge uma nova Geometria: a Geometria Fractal. Esta que define por não atender a um ou a mais dos cinco postulados de Euclides, e cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos. A Geometria Fractal nos traz a possibilidade de trabalharmos com objetos na Natureza que apresentam formas irregulares, como as nuvens, girassóis, couve-flor, dentre outros. A Geometria Euclidiana, por sua vez, está limitada a pontos, retas, planos, o que a torna insuficiente, sendo necessário recorrer à Geometria Fractal.

Apresenta-se a Geometria Fractal por meio dos fractais clássicos de Cantor, com suas construções numéricas e geométricas; Curva de Koch, com comprimento total da curva, perímetro e área do Floco de Neve de Koch; Sierpink, com o processo de construção do seu Triângulo especificando o processo de remoção de triângulos, cálculo de perímetro e área, e também o Tapete de Sierpink e a Esponja de Menger, que são fractais que têm características semelhantes às citadas acima; Peano, com sua belíssima curva que preenche o quadrado no qual é traçado, e a curva de Hilbert, que traz uma peculiaridade extraordinária na sua construção. Todas essas figuras não atendem à Geometria Euclidiana. Mencionamos a necessidade de descrever as características básicas dos fractais, que são: estrutura fina em qualquer escala, a autossimilaridade, a complexidade infinita (iteração) e a dimensão.

Com o presente trabalho, pretende-se contribuir para o processo de ensino aprendizagem apresentando reflexões e evidências sobre a necessidade da inclusão do ensino da Geometria Fractal no Ensino Médio. Estudar fractais é ter outra visão da geometria do mundo, uma nova maneira de ver e organizar uma geometria não euclidiana; é buscar, na Natureza, formas que exprimem o significado da geometria para o aluno. José Sebastião e Silva (1966) afirma que a modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. Segundo esses autores, "Ensinar matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltônico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos de início, não estejam solidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam."

Atualmente, a abordagem da Geometria Fractal tem-se destacado nos vestibulares

e ENEM. Com isso os alunos precisam ser direcionados ao estudo científico do tema. Porém, lamentavelmente, alguns livros didáticos fazem referência aos fractais apenas como textos complementares e exercícios envolvendo progressão geométrica, não com o devido embasamento necessário para preparar e sanar as dúvidas dos estudantes. Nesse cenário, surge a necessidade de buscar diferentes atividades de ensino, construções geométricas, exploração do tema, exposição de trabalhos que permitam aos alunos compreenderem a existência e a aplicação da Geometria Fractal.

O presente trabalho foi realizado em três etapas:

Na primeira etapa, foram reunidos dados e informações a respeito do histórico, características e construção dos fractais. Análise de livros, questões de vestibular e ENEM.

Na segunda etapa, será mencionada a importância no processo de desenvolvimento pedagógico de se ensinar geometria fractal, através da sua conexão com outras áreas do conhecimento, e apresentando aplicações com contextos significativos para o aluno. Também foi realizadas coletas de informações a fim de se concluir o motivo pelo qual encontramos necessidade em inserir geometria fractal na estrutura curricular do ensino médio.

Na terceira e última finalizará com um seminário onde a introdução dos fractais na sala de aula ocorrerá por meio da proposta do professor de trabalhar objetos fora dos padrões da Geometria Euclidiana, surgindo, então, uma pesquisa aplicada com o tema fractal. O tema foi abordado inicialmente pelo professor por meio do desenvolvimento de uma oficina com alunos do 2º ano do Ensino Médio, denominada “Conhecendo a Geometria Fractal”, a qual contará com a aplicação de diferentes atividades, exposições de trabalhos, construção de diferentes fractais e cálculo de perímetro, área e volume, na intenção de permitir aos alunos a compreensão da existência e da aplicação da Geometria Fractal. Sabemos que essas atividades envolvendo fractais possibilitam ao aluno o desenvolvimento do raciocínio-lógico matemático, a integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, desenvolvimento do senso estético, criatividade, dentre outras habilidades.

De acordo com Sallum (p.1, 2005):

"A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométrica e estímulo ao uso de tabelas."

2 A GEOMETRIA FRACTAL

2.1 Origem da Geometria não Euclidiana

O homem sempre buscou maneiras de explorar o mundo para a satisfação de suas necessidades sociais, econômicas e filosóficas, dentre outras. Com relação à Geometria, não aconteceu de maneira diferente. Sua origem ocorreu devido à necessidade e à capacidade do homem de reconhecer aspectos físicos, comparar formas e tamanhos. Etimologicamente, a palavra Geometria origina-se do Grego (geo, que significa Terra, e metria, que significa medida (medida da Terra)). Muitos povos colaboraram para que a Geometria tivesse destaque como uma ciência, mas foram os gregos que a sistematizaram como um corpo de conhecimentos. Embora anteriormente tivesse havido registros que poderiam caracterizar a Geometria como uma ciência, os estudos desenvolvidos por Tales de Mileto e Pitágoras, durante o século VI a.C., foram fundamentais para a Geometria assumir caráter de ciência.

Após esses estudiosos, outros matemáticos apresentaram trabalhos que fortaleceram a Geometria como uma cadeia de proposições baseadas em definições e suposições iniciais. Um deles foi o matemático grego Euclides, que nasceu por volta de 365 a.C. A Geometria Euclidiana, denominada assim pelos propulsores da Matemática por estar sistematizada e fundamentada nos postulados de Euclides. A contribuição de Euclides para o conhecimento matemático inicia com duas definições fundamentais: a de reta e a de ponto. Segundo Euclides, ponto é o que não tem partes, e reta é um comprimento sem medida. A partir desses conceitos, realiza-se uma sistematização geométrica por meio de cinco axiomas (ou postulados) de Euclides. Os enunciados, em linguagem atual, dos cinco postulados de Euclides nos quais se fundamenta sua Geometria são:

1. dois pontos distintos determinam uma reta;
2. a partir de qualquer ponto de uma reta dada, é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário;
3. é possível obter uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;
4. todos os ângulos retos são iguais;
5. dados um ponto P e uma reta r , existe uma única reta que passa pelo ponto P e é paralela à r .

Aplicados ao conhecimento geométrico, os postulados I, II, III e IV, de Euclides, são simples e evidentes. No entanto, o postulado V, conhecido como postulado das paralelas,

é diferente, ou seja, é complicado e pouco evidente. Foram realizadas investigações para demonstrar sua validade, ou seja, deduzi-lo a partir dos quatro anteriores, porém as tentativas falharam. Hoje, dentro do conhecimento matemático, é consenso que sua validade depende diretamente da opção da superfície geométrica para realizar sua demonstração.

Os estudos que visavam validar o quinto postulado de Euclides são considerados o ponto de partida para o desenvolvimento das Geometrias não Euclidianas. Somente quando se negou esse postulado foi que se chegou ao desenvolvimento da primeira Geometria não Euclidiana. Estas Geometrias, segundo Kasner e Newman (1968, p. 135) se caracterizam na história da ciência como um conhecimento que “abalou os fundamentos da crença secular de que Euclides havia apresentado verdades eternas”.

"Era preciso ter uma imaginação excepcional para considerar a possibilidade de uma geometria diferente daquela de Euclides, pois o espírito humano, por dois milênios, estivera limitado, pelo preconceito da tradição, à firme crença de que o sistema de Euclides era certamente a única maneira de descrever, em termos geométricos, o espaço físico, e que qualquer sistema geométrico contrário não poderia ser consistente. (EVES, 1992, p.22)."

No final do século XVIII e início do século XIX, a Geometria ganhou mais uma nova perspectiva de conhecimento, as Geometrias não Euclidianas, que trouxe uma nova maneira de ver e conceber o conhecimento geométrico.

Robold (1992, p. 45) define Geometrias não Euclidianas como “um sistema geométrico construído sem a ajuda da hipótese euclidiana das paralelas e contendo uma suposição sobre paralelas incompatível com a de Euclides”.

A descoberta dessa nova geometria deve-se a três grandes matemáticos: Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de abril de 1777 — Göttingen, 23 de fevereiro de 1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito com diversas áreas da ciência, dentre elas a Teoria dos Números, Estatística, Análise Matemática, Geometria, Cálculo Diferencial, Geodésia, Geofísica, Eletroestática, Astronomia e Óptica. Nikolai Ivanovich Lobachevsky (Níjni Novgorod, 2 de Novembro de 1792 — Kazan, 24 de fevereiro de 1856) foi um matemático russo, estudou no Instituto de Kazan, destacando-se, desde cedo, por sua vocação pela Matemática. János Bolyai (Cluj-Napoca, 15 de dezembro de 1802 — Târgu Mureș, 27 de janeiro de 1860) foi um matemático húngaro, conhecido por seu trabalho em Geometria não Euclidiana. Entre 1818 e 1822, estudou no Royal College of Engineering, em Viena. Em 1832, publicou um tratado global sobre a Geometria não Euclidiana, sem saber que três anos antes, Nikolai Lobachevski havia publicado um estudo semelhante, de modo que os seus resultados matemáticos não foram merecidamente reconhecidos. Gauss foi o primeiro a obter conclusões mais avançadas aceitando a independência do quinto postulado em relação aos outros, porém, temendo críticas, nada publicou sobre suas ideias a respeito dessa nova Geometria.

A primeira publicação negando o postulado deve-se ao matemático Lobachevski, em 1826, que, de acordo com Boyer (1974, p. 396) é chamado de Copérnico da Geometria de Lobachevski, mostrando com isso que a Geometria Euclidiana não era a verdade absoluta que se supunha ser.

Atualmente, podemos destacar que muitos problemas do cotidiano e do mundo científico não são resolvidos pela Geometria Euclidiana, mas sim por Geometrias não Euclidianas, que são aquelas que não atendem a um ou a mais de um dos postulados de Euclides. Dentro das Geometrias não Euclidianas, dentre outras, podemos citar a Geometria Hiperbólica, a Geometria Elíptica, a Geometria Projetiva, a Topologia e a Geometria dos Fractais. É precisamente esta última, cuja necessidade de ser apresentada como conteúdo programático na estrutura curricular do Ensino Médio, vamos enfatizar, a partir de agora.

Quando nós encontramos objetos na Natureza que apresentam formas irregulares, formas mais complexas que não atendem às perspectivas da Geometria Euclidiana, como as nuvens, as montanhas, as árvores, dentre outras, a Geometria Euclidiana torna-se inadequada, sendo necessário recorrer à Geometria Fractal.

2.2 Fractal

Em 1970, Benoît Mandelbrot publicou o livro “The Fractal Geometry of Nature”, o qual foi o pioneiro no uso do termo “fractal”, que, segundo Barbosa (2005), tem sua origem no latim (do adjetivo fractus, cujo verbo correspondente, fragere, significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar). Para representar formas semelhantes às existentes na Natureza, Mandelbrot criou a Geometria Fractal. O termo fractal foi criado para designar um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura, qualquer que seja a distância de visão (figuras 1, 2, 3 e 4 a seguir).

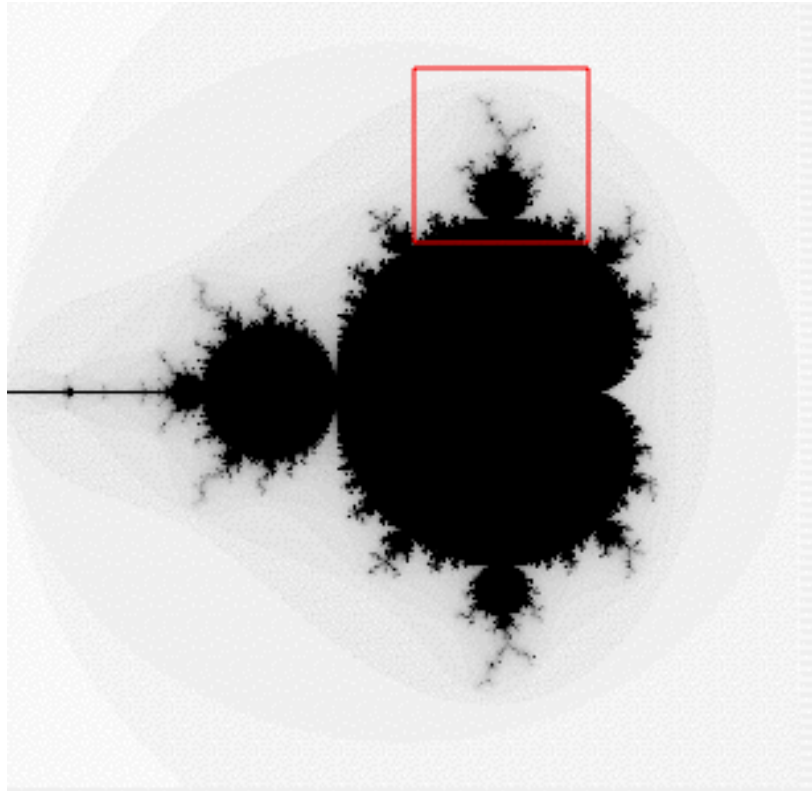


Figura 1 – *Fractal.(Escala 01)*

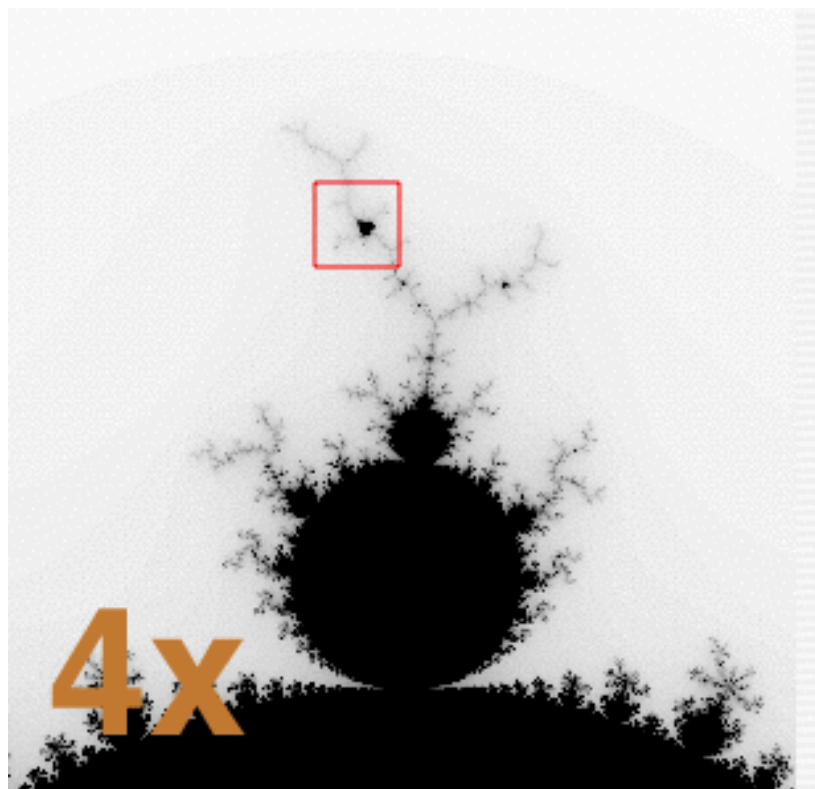


Figura 2 – *Fractal.(Escala 04)*

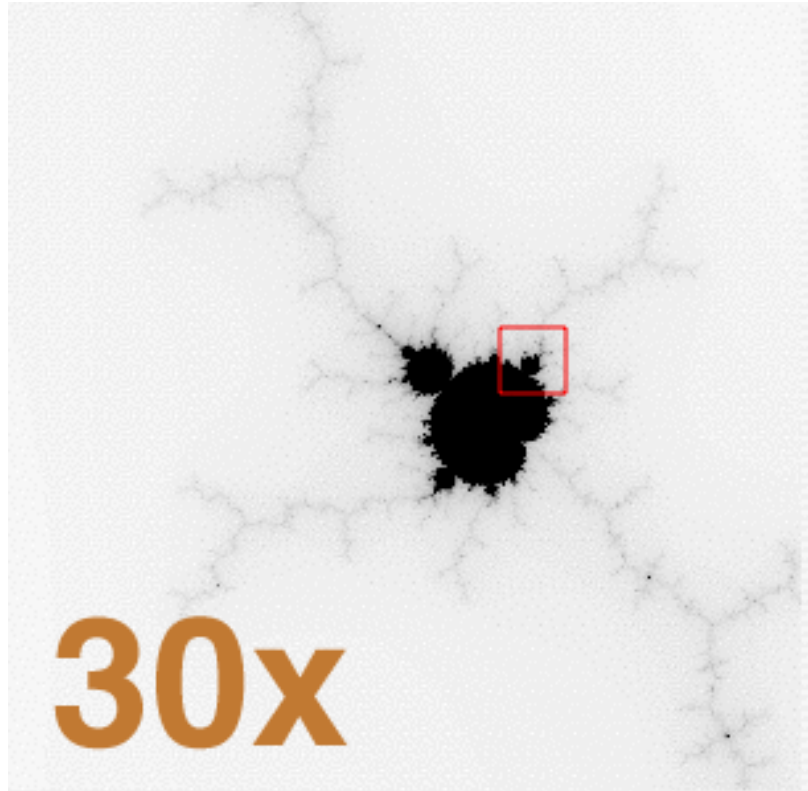


Figura 3 – *Fractal.*(Escala 30)

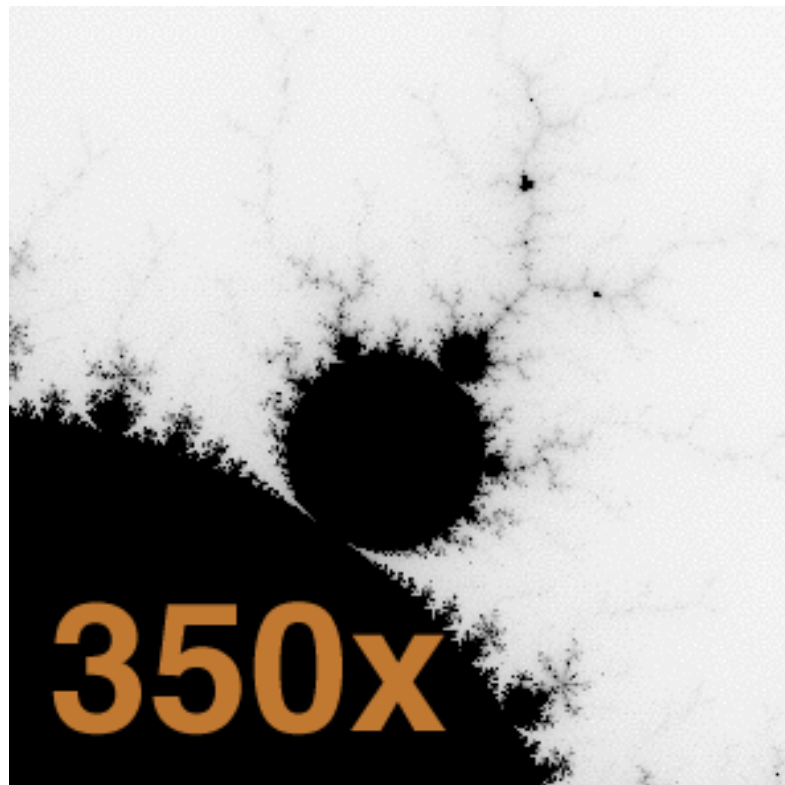


Figura 4 – *Fractal.*(Escala 350)

Segundo Barbosa (2005), Benoît Mandelbrot nasceu em Varsóvia (capital da Polônia), em 20 de novembro de 1924. A sua família era judaica e tinha vindo originariamente da Lituânia. Tinha um tio, Szolem Mandelbrot, que era professor de Matemática no “Collège de France”, sendo o responsável pela sua educação. Benoît frequentou o “Lycée Rolin” em Paris, depois estudou em Lyon, e, mais tarde, foi para os Estados Unidos da América. Por fim, estudou na École Polytechnique e na Sorbonne, em Paris, e no Instituto Californiano de Tecnologia. A sua carreira académica dividiu-se principalmente entre França e EUA. Esse prodigioso e ilustre matemático contemporâneo é conhecido mundialmente como sendo o único responsável pelo enorme interesse nos chamados objectos fractais. E também é considerado o “Pai da Geometria Fractal”, que hoje se entende por Geometria Fractal, um ramo da Matemática que estuda os Fractais, considerada uma Geometria não Euclidiana, pois não atende a qualquer dos cinco postulados de Euclides .



Figura 5 – *Benoit Mandelbrot(1924-2010)*

Rompendo as barreiras impostas pela Matemática Clássica, Mandelbrot, em seu trabalho, ressaltou que os matemáticos foram, de certa forma, iludidos pela Natureza, que mostrou ter mais imaginação nas diversidades de forma que apresenta. A percepção de tais formas levou esses matemáticos a estudá-las sob os aspectos que Euclides não alcançou, tomando-se, assim, um estudo das “formas sem formas” ou “morfologias dos amorfos”. Foi aceitando esse desafio que Mandelbrot concebeu e desenvolveu essa Geometria da Natureza e implementou o seu uso em inúmeras aplicações. A partir dessa teoria, descreveu vários dos irregulares e fragmentados modelos que encontramos em nossa volta, aos quais atribuiu o nome de fractais.

São muitas as definições de fractal. Enunciemos, agora, algumas definições dadas por outros autores:

J. Feder (*apud*, Barbosa 2005, p.18): Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo, sob alguns aspectos.

K.J. Falconer (*apud*, Barbosa, 2005, p.18): Um conjunto F é fractal se:

- F tem alguma forma de “autossimilaridade”, ainda que aproximada ou estatística;

- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;
- O conjunto F pode ser expresso por meio de um procedimento recursivo ou iterativo.

Mas, para este trabalho, basta considerarmos a definição segundo J. Feder (1988), p.18: “um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo, sob alguns aspectos”.

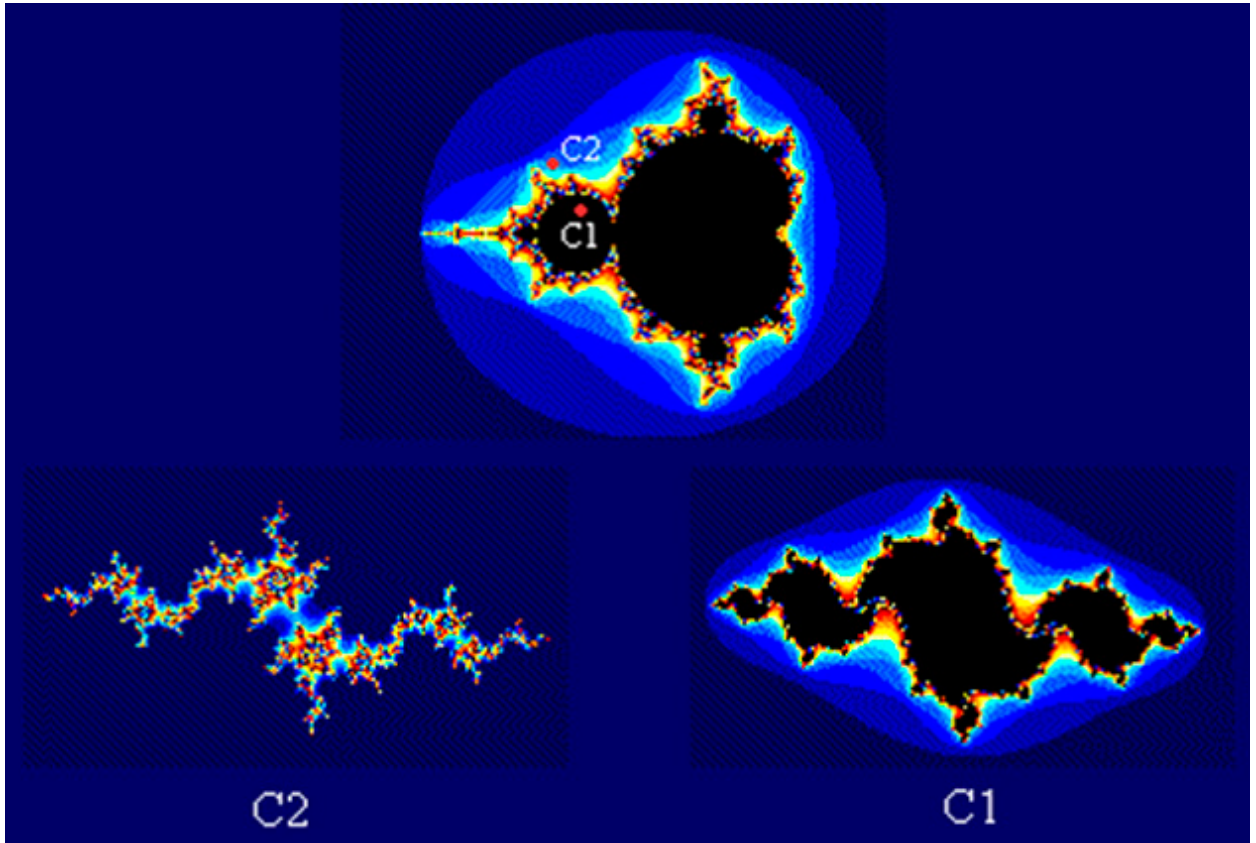


Figura 6 – *Fractal.* (Imagens de um fractal ampliado)

Todas as pesquisas científicas que serviram de apoio matemático a Mandelbrot foram designadas, em geral, por grandes matemáticos de notável projeção científica, que analisaremos com mais detalhes no Capítulo 3, sendo eles: Georg Cantor (1845-1918), com o Conjunto de Cantor; Giuseppe Peano (1858-1932), com a Curva de Peano; David Hilbert (1862-1943), com a Curva de Hilbert; Helge Von Koch (1870-1924), com a Curva de Koch; Waclaw Sierpinski (1882-1969), com a Curva, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski.

Segundo K.J. Falconer (*apud*, Barbosa, 2005, p. 18), autor de duas obras importantes sobre fractais (1985 e 1990), sugeriu a definição de fractal por caracterização:

Um conjunto é fractal se tem alguma forma de autossimilaridade, ainda que aproximada, cuja dimensão seja maior que a dimensão topológica,

e que esse conjunto possa ser expresso por meio de um procedimento recursivo ou iterativo.

Para definirmos os fractais de uma maneira simples, numa visão voltada para o interesse do aluno, basta observar uma propriedade especial que os fractais têm que também pode ser considerada uma característica, característica esta conhecida como autosimilaridade, ou seja, os fractais têm uma cópia de si próprios, em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhes são semelhantes.

As principais propriedades que caracterizam os fractais são:

- a autossimilaridade: um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pedaço é similar ao todo. Visto em 7 diferentes escalas, a imagem de um fractal parece similar. (SIQUEIRA, 2008).
- a complexidade infinita: é uma propriedade dos fractais, a qual significa que nunca conseguiremos representá-la completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. (SIQUEIRA, 2008).
- a dimensão dos fractais: Ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira, e sim uma quantidade fracionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem que ver com o seu grau de irregularidade. (FERNANDES, 2007).

Embora não seja comum mencionarmos a observação que segue, mas o fazemos, devido ao seu caráter didático: os fractais podem ser encontrados em todo o universo natural e em quase toda ciência, desde os aspectos das nuvens, montanhas, árvores, brócolis, couve-flor, relâmpagos, até a distribuição das galáxias, como na Arte e na Matemática. É de grande importância ressaltar que hoje a aplicação do conceito de fractal em problemas reais se estende por um vasto campo interdisciplinar como Biologia, Geografia, Medicina, Música, Economia, Indústria Cinematográfica, Análise de Imagens por Satélite, Meteorologia, Geologia, dentre outras. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os médicos, fornece uma nova visão da anatomia interna do corpo. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies caóticas. Enfim, não faltam exemplos. Um dos mais belos e, sem dúvida, o mais colorido, é o uso dos fractais na Arte. Quando os computadores são alimentados com equações, eles criam magníficos desenhos abstratos (OLIVEIRA, 1994). Nos próximos capítulos, abordaremos de forma mais detalhada as características dos fractais, bem como os famosos fractais clássicos.

3 CARACTERÍSTICAS DOS FRACTAIS

Kenneth Falconer(1990) propõe uma definição, em termos das características das construções ou conjuntos denominados fractais. Usaremos, pois, essa ideia para considerar uma dada construção como fractal se tem todas, ou a maioria, das quatro características, as quais detalharemos a seguir.

3.1 Estrutura fina em qualquer escala

A estrutura fina consiste em detalhamento infinito. Sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes, indefinidamente. Isso não ocorre com as figuras geométricas convencionais, como a circunferência: se ampliarmos suficientemente um pequeno arco de circunferência e dele retirarmos um pequeno arco que também ampliaremos, e repetirmos sucessivamente o processo, obteremos um arco virtualmente retilíneo. Uma reta se caracteriza por não ter detalhes. Nos fractais, isso não ocorre. A cada ampliação, surgem mais detalhes, mesmo que se repita o processo indefinidamente. Se o fractal for construído na tela gráfica de um computador, os detalhes aparecerão nas ampliações sucessivas, até onde o computador suportar a realização dessas ampliações.

3.2 Autossimilaridade

Autossimilaridade ou autossemelhança se manifesta nas figuras que apresentam sempre o mesmo aspecto visual, independentemente da escala usada (ampliada ou reduzida), ou seja, parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo.

Segundo Carvalho (2005), autossimilaridade ou autossemelhança é a mais elementar e marcante das características dos fractais. Significa que cada parte em escala menor é exatamente igual ou semelhante à parte inicial, isto é, cada parte ampliada da imagem será igual à da inicial.

"Autossimilaridade é que seus padrões característicos são repetidamente encontrados em escala descendente, de modo que suas partes, em escalas menores, em qualquer escala, são, na forma, semelhantes ao todo (CAPRA, 1996, p. 118)".

Os fractais apresentam dois tipos de autossimilaridade: exata e a aproximada ou estatística. A autossemelhança exata só pode ser encontrada em figuras geradas por processos matemáticos, em que o conjunto total é gerado por pequenas cópias perfeitas delas mesmas, ou seja, é formado por meio de um processo iterativo. Ainda segundo (CAPRA,

1996), "a autossemelhança exata significa que, mesmo ampliada várias vezes, cada parte é idêntica à original, não importando quantas ampliações sejam efetuadas".

A característica da autossemelhança exata só é encontrada nos fractais construídos a partir de figuras geométricas, os chamados Fractais Geométricos, tais como Curva de Koch e Triângulo de Sierpinski. Vejamos o exemplo do Tapete de Sierpinski descrito na figura 7 a seguir.

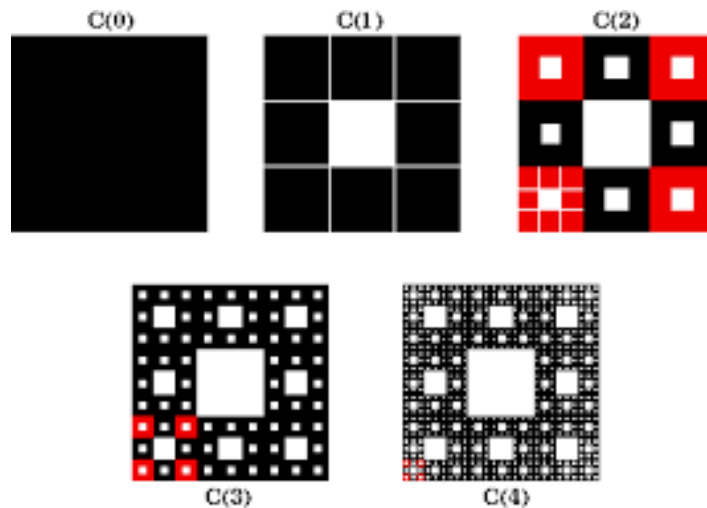


Figura 7 – *Fractal.* (*Processo iterativo de construção do Tapete de Sierpinski.*)

Autossemelhança é uma característica que resulta do fato de as figuras serem construídas pela iteração da mesma regra de construção, que segue infinitamente.

A autossemelhança aproximada (ou estatística) apresenta a mesma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica, mas não são cópias exatas de si próprias. Para Janos (2008, p. 35):

"O que existe nas figuras na Natureza é uma autossemelhança aproximada em diferentes escalas. Essa autossemelhança aproximada é chamada de autossemelhança estatística, porque, em diferentes escalas, essas autossemelhanças existem em média. Nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais, as partes são apenas reminiscências do todo."

Na natureza, existem várias formas que apresentam estruturas de autossemelhança e que, apesar de não conseguirmos visualizar muitas escalas de ampliação, devem ser discutidas sob o ponto de vista da Geometria Fractal. Sobre essas, é importante salientar que a noção de autossemelhança deve ser vista cuidadosamente e deve ser encarada como autossemelhança aproximada (ou estatística), uma vez que essas figuras irão apresentar a mesma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica, mas não são cópias exatas de si próprias.



Figura 8 – *Fractal. (Auto semelhança aproximada)*

3.3 Complexidade Infinita ou Iteração

Na construção dos fractais, temos que destacar uma importante característica – a iteração – que se relaciona à existência de um processo recursivo, o que propõe que uma determinada operação repete-se infinitamente. De acordo com essa propriedade, cada fractal, em sua construção, dispõe de um número infinito de procedimentos, resultando em uma estrutura complexa.

"A técnica principal para se construir um fractal é a iteração - isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica" (CAPRA, 1996, p. 119)."

Com a ajuda de computadores, as iterações geométricas simples podem ser aplicadas milhares de vezes em diferentes escalas (figura 9), para produzir os assim chamados forjamentos (*forgeries*) – fractais-modelos, gerados por computador, de plantas, árvores, montanhas, linhas litorâneas e tudo aquilo que manifeste uma semelhança espantosa com formas reais encontradas na Natureza (CAPRA, 1996, p. 120).

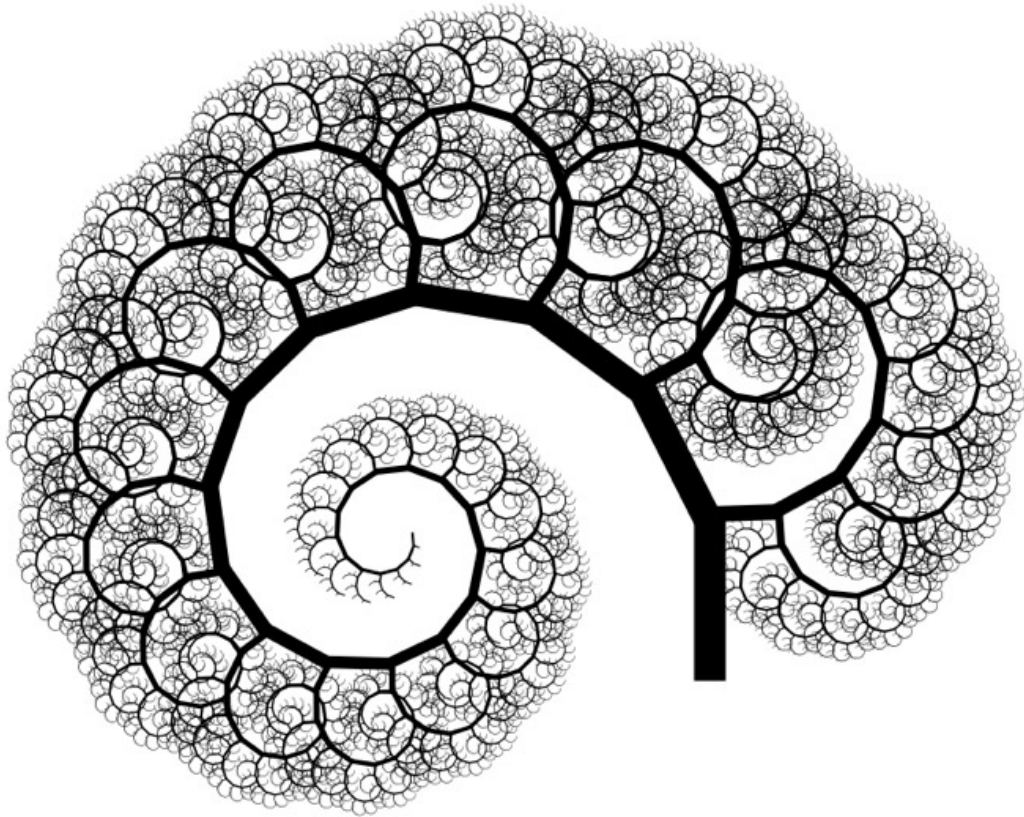


Figura 9 – *Fractal. (Complexidade infinita)*

Na complexidade infinita, a formação dos fractais passa por um processo recursivo aplicado indefinidamente. Quanto maior for o número de iterações desse processo, mais detalhes serão apresentados e, assim, nunca obteremos uma “imagem final”. Devemos mencionar que nem todo processo iterativo define um fractal. Por exemplo, se, de um segmento de reta, retirarmos um pedaço final e repetirmos essa operação sucessivamente, obteremos apenas um segmento menor, que, obviamente, não é um fractal.

Podemos destacar também outra forma de iteração que ocorre por meio das funções matemáticas que geram sequências de números. Observemos o exemplo da função logística $F(x) = kx(1 - x)$ ($k \neq 0$). Iterar essa função matemática significa gerar uma sequência de números por meio da mesma regra, ou seja, fazendo repetir o processo de converter cada número x em um novo valor da seguinte forma:

Sabendo que $F(x) = kx(1 - x)$, substituindo x por $F(x)$, temos:

$$F(F(x)) = F(kx(1 - x)) = k[kx(1 - x)][1 - kx(1 - x)].$$

Assim,

$$F(F(F(x))) = F(k[kx(1 - x)][1 - kx(1 - x)]).$$

A representação da sequência é dada por:

$$F^1(x) = F(x),$$

$$F^2(x) = F(F(x)),$$

$$F^3(x) = F(F(F(x))).$$

Portanto,

$F_n(x)$ gera a n -ésima iteração de F .

A função logística já é conhecida e utilizada por cientistas há mais de cem anos para descrever matematicamente fenômenos progressivos.

3.4 Dimensão fractal

Devido à contribuição de Euclides para a Geometria, a ideia de dimensão (como um número inteiro positivo) aceitava apenas o comprimento, a largura e a altura. A partir de então, a definição matemática de dimensão vem se modificando ao longo dos tempos, sendo descrita por vários matemáticos à medida que surgia a necessidade de relacioná-la com novos conceitos que não se encaixavam dentro da Geometria Euclidiana, ou seja, a Geometria Fractal. É nesse sentido que relacionamos, em seguida, a definição de dimensão topológica com a dimensão de Hausdorff.

3.4.1 Dimensão topológica e dimensão de Hausdorff

Dimensão topológica é o número que caracteriza a geometria de um objeto euclidiano, ou seja, representa a dimensionalidade do espaço em que dado objeto está inserido, admitindo apenas valores inteiros positivos.

- Dimensão 1:

Considere um segmento de reta, o qual dividimos em 4 ($= 4^1$) partes iguais:

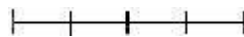
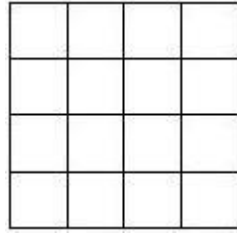


Figura 10 – *Segmento de reta.*

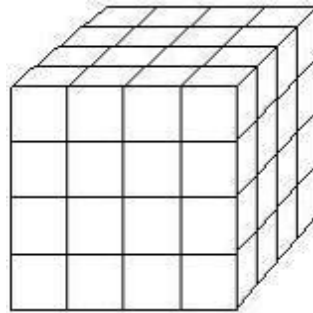
- Dimensão 2:

Efetuando o mesmo processo anterior para o quadrado, dividimos cada um dos seus lados em 4 partes iguais, obtendo 16 ($= 4^2$) partes iguais:

Figura 11 – *Quadrado*

- Dimensão 3:

Procedendo de modo análogo com o cubo, obtemos $64 (= 4^3)$ partes iguais:

Figura 12 – *Cubo*

A partir dessa ideia foi que surgiu a generalização da Geometria Euclidiana para Geometria Fractal, pois permitiu a matemáticos como Hausdorff investigar a possibilidade da existência de dimensões fracionárias. Os seus métodos de determinação tornaram-se altamente aplicáveis, pois os fractais são formas complexas que não podem ser medidas apenas por dimensão topológica.

Com isso a dimensão fractal (ou dimensão de Hausdorff) se tornou fundamental para o cálculo de fractais, pois surgiu como uma alternativa de medição, já que pode assumir valores fracionários, que é uma característica que as figuras tradicionais (euclidianas) não têm.

Mas, o que vem a ser dimensão de Hausdorff? A resposta a essa pergunta, sem formalidades, pode ser apresentada como sendo o valor que representa o grau de ocupação de um fractal no espaço, estando relacionada com o seu grau de irregularidade, ou seja, ela mostra o quão densamente um fractal ocupa o espaço métrico em que ele está inserido. Por definição, a dimensão de Hausdorff de um conjunto autossimilar S (denotada por $d_H(S)$) é dada por:

$$d_H(S) = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{S})};$$

em que:

$d_H(S)$: dimensão de Hausdorff do objeto S sob estudo;

N : número de partes em que se divide o objeto;

S : coeficiente de redução.

A partir da demonstração intuitiva da dimensão topológica, observamos que:

$$\text{Dimensão 1: } N = \frac{1}{S^1}.$$

$$\text{Dimensão 2: } N = \frac{1}{S^2}.$$

$$\text{Dimensão 3 : } N = \frac{1}{S^3}.$$

Generalizando, temos:

$$\text{Dimensão } d: N = \frac{1}{S^d}.$$

Esse raciocínio é válido para qualquer redução efetuada em objetos com autosselhança exata. Observemos que:

$$N = \frac{1}{S^d} \Rightarrow N = \left(\frac{1}{S}\right)^d.$$

Aplicando logaritmo a ambos os lados da igualdade acima, obtemos:

$$\log N = \log\left(\frac{1}{S}\right)^d.$$

Pela propriedade de potência do logaritmo, temos:

$$\log N = d \log\left(\frac{1}{S}\right).$$

Agora, basta isolarmos a incógnita d , para obtermos a fórmula de Hausdorff utilizada para o cálculo da dimensão de um fractal:

$$d = \frac{\log N}{\log(1/S)}.$$

Usando a fórmula obtida acima, perceberemos que, a cada iteração, substituímos um segmento dado por N segmentos de tamanho S .

4 FRACTAIS CLÁSSICOS

No final do século XIX e início do século XX, muitos matemáticos que, ao longo dos tempos, se dedicaram ao estudo de comportamentos naturais, foram surgindo com novas teorias que formavam bases matemáticas sólidas, que descreviam e formalizavam os fenômenos naturais para tornar a Natureza mais simples e compreensível. Segundo Capra (1996), o matemático Francês Benoît Mandelbrot iniciou seus estudos da geometria de fenômenos naturais irregulares e compreendeu que essas formas geométricas apresentavam características comuns bastante notáveis.

Matemáticos como George Cantor, Giuseppe Peano, Helge von Koch e Waclaw Sierpinski já haviam construído figuras que não seguiam as definições da Geometria Euclidiana. Eles as consideravam estranhas e indefinidas. Essas figuras receberam o nome de “monstros matemáticos”. Para Janos (2008), essa designação se deu pelo fato de que, diferentemente do que estamos acostumados, essas figuras nunca são realmente retas ou curvas, são objetos sem forma definida. Essas figuras, às quais nos dedicaremos a partir de agora, são consideradas os fractais clássicos.

4.1 O conjunto de Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em 1845, na cidade de São Petersburgo, Rússia. Aos 12 anos de idade, mudou-se para a Alemanha com sua família e, em 1867, completou seu doutorado, na Universidade de Berlim. Dedicou a maior parte dos seus estudos ao que atualmente conhecemos como Teoria dos Conjuntos (uma das mais notáveis inovações matemáticas dos últimos séculos, amplamente difundida e aplicada até hoje). A partir de 1884, passou por sucessivas crises de saúde mental, vindo a falecer em janeiro de 1918. Cantor levou o estudo da Matemática para campos inteiramente novos, como o dos números transfinitos, e é considerado um dos maiores matemáticos do seu tempo.



Figura 13 – *Georg Cantor(1845-1918)*

4.1.1 Construção numérica

Em Murr et al (2003), encontramos uma explicação para a construção numérica do Conjunto de Cantor. Segundo essa autora, o Conjunto de Cantor, denotado por K , é um subconjunto fechado do intervalo $[0,1]$, obtido como complementar apropriado de uma reunião de intervalos abertos. Para construí-lo, considera-se com o intervalo $[0, 1]$. Divide-se esse intervalo em 3 partes iguais. Em seguida, retira-se o intervalo $(1/3, 2/3)$, ficando com $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Observe que os pontos extremos, $1/3$ e $2/3$, permanecem no conjunto que está sendo construído. Esse é o primeiro nível (ou etapa) da construção de K . No segundo nível, novamente divide-se cada um dos intervalos restantes em 3 partes iguais e, em seguida, retiram-se, sem os extremos dos intervalos, os respectivos terços médios. Foram retirados, então, $(1/9, 2/9)$ e $(7/9, 8/9)$, ficando, no segundo nível com o seguinte conjunto: $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, é novamente retirado o terço médio de cada um desses intervalos que constituem o conjunto obtido no segundo nível. E assim sucessivamente. Na figura a seguir, apresentamos alguns níveis de sua construção.

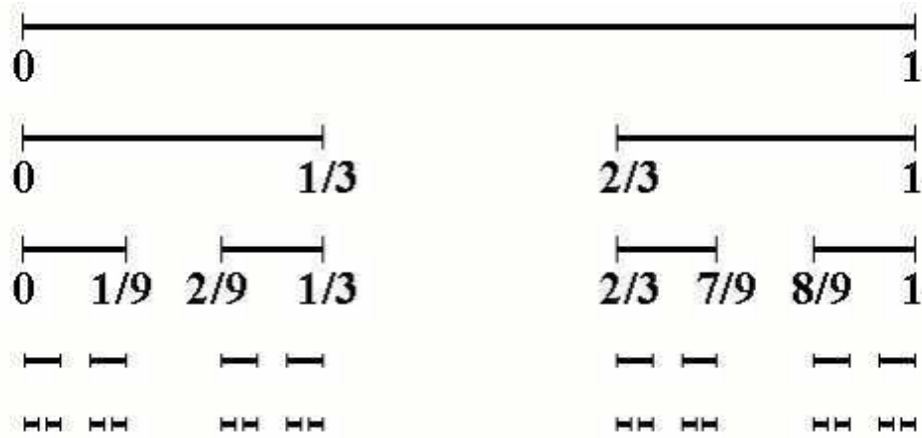


Figura 14 – *Intervalos no conjunto de Cantor*

4.1.2 Construção geométrica

Quando analisamos a construção geométrica do Conjunto de Cantor, ele passa a receber o nome de “Poeira de Cantor”. O processo é semelhante ao da construção numérica. A diferença está em iniciar com um segmento de reta de comprimento unitário, e não com um intervalo numérico. Dividi-se esse segmento em 3 partes iguais e retira-se o seu terço médio. Esse é o primeiro nível (ou etapa) da construção. Na segunda etapa, retira-se o terço médio de cada um dos segmentos restantes. E assim sucessivamente. Novamente, repete-se o processo, fazendo-se o número de etapas (ou níveis) N tender a infinito. A “figura” obtida quando N tende a infinito é o Conjunto de Cantor, ou seja, a sua representação geométrica, também conhecida como Poeira de Cantor. Na figura a seguir, apresentamos algumas etapas da sua construção.



Figura 15 – *Etapas da construção geométrica do conjunto de Cantor*

É interessante analisarmos o que ocorre com o número de segmentos (n_N), o seu comprimento (C_N), bem como o comprimento total do conjunto (C_T), a cada etapa N da sua construção. Entendemos por comprimento total a soma dos comprimentos dos intervalos de um conjunto.

4.1.3 Número de segmentos

Nível 0: temos 1 segmento, de modo que $N = 0 \Rightarrow n_0 = 1$,

Nível 1: ficamos com 2 segmentos, de modo que $N = 1 \Rightarrow n_1 = 2$,

Nível 2: ficamos com 4 segmentos, de modo que $N = 2 \Rightarrow n_2 = 4$.

⋮

Usando indução finita, podemos demonstrar que, na etapa N , o número de segmentos é 2^N , ou seja:

$$n_N = 2^N.$$

Demonstração. Demonstraremos por indução sobre N . Consideremos $n_N = 2^N$ uma propriedade, a qual denotaremos por P_N .

Para $N = 0, n_0 = 2^0 = 1$.

De fato, ao iniciarmos a construção, o número de segmentos que consideramos é igual a 1. Logo, P_N é verdadeira para $N = 0$.

Seja $k \geq 0$. Supondo P_K verdadeira, isto é, $n_K = 2^K$, devemos demonstrar que P_{K+1} também é verdadeira, ou seja:

$$n_{K+1} = 2^{k+1}.$$

Por construção, temos:

$$n_{K+1} = n_K \cdot 2,$$

pois, a cada nível, o número de intervalos é multiplicado por 2.

Usando a hipótese de indução, temos:

$$n_{K+1} = 2^k \cdot 2^1.$$

$$n_{K+1} = 2^{k+1}.$$

Portanto, para qualquer $N \geq 0$:

$$n_N = 2^N.$$

Logo, na construção do Conjunto de Cantor, quando $N \rightarrow \infty$, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2^N = \infty.$$

Portanto, na construção do Conjunto de Cantor, o número de segmentos tende a infinito.

4.1.4 Comprimento de cada segmento

Vamos analisar agora qual é o comprimento de cada segmento.

ETAPA 0: temos que $C_0 = 1$.

ETAPA 1: temos que $C_1 = \frac{1}{3}$.

ETAPA 2: temos que $C_2 = \frac{1}{9}$.

Novamente, é possível demonstrar por indução finita, analogamente ao que foi feito para o número de segmentos. Na etapa N , o comprimento de cada segmento é:

$$C_N = (1/3)^N.$$

Assim, no conjunto de Cantor:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (1/3)^N = 0.$$

Portanto, podemos considerar que o comprimento de cada segmento tende a zero quando N tende a infinito. Na construção numérica, isso significa que cada intervalo está tendendo a um ponto. Por isso, o resultado da construção do Conjunto de Cantor é uma série de pontos “pulverizados”. Daí, a denominação “Poeira de Cantor”.

4.1.5 Comprimento total

Para analisarmos o comprimento total do Conjunto de Cantor, basta multiplicarmos o número de segmentos pelo comprimento de cada um deles. Assim, temos:

$$C_T = (2/3)^N.$$

Quando o número de etapas tende ao infinito, temos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2/3)^N = 0.$$

Portanto, o comprimento do Conjunto de Cantor tende a 0 quando N tende a infinito.

4.1.6 Dimensão do Conjunto de Cantor

Sabendo que, em cada iteração, ficamos com 2 segmentos que serão novamente divididos em três partes iguais, e que o coeficiente de redução é $\frac{1}{3}$, então a dimensão fractal do Conjunto de Cantor é dada por:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63.$$

4.2 A Curva de Koch

O matemático Niels Fabian Helge von Koch nasceu em 25 de janeiro de 1870, em Estocolmo, Suécia. Estudou na Universidade de Estocolmo a partir de 1888. Publicou vários livros sobre Sistemas Lineares e Equações Diferenciais. Em 1911, iniciou sua carreira de professor na Universidade onde estudou. Koch ficou famoso por meio de um artigo por ele publicado em 1904 sobre uma curva sem tangentes, que atualmente é conhecida como Curva de Koch. Ele morreu em 11 de março de 1924, na cidade onde nasceu.



Figura 16 – *Helge Von Koch(1870-1924)*

4.2.1 Construção da Curva de Koch

A Curva de Koch pode ser construída a partir de um segmento dado, dividindo-o em três partes iguais e retirando-se o segmento do meio e o substituindo por um triângulo equilátero sem a sua base. Com isso teremos quatro novos segmentos com o comprimento de um terço do original. Repete-se esse mesmo procedimento, novamente, agora com os

quatro segmentos restantes. Assim, com um processo infinito, vai surgindo a Curva de Koch (figura a seguir).

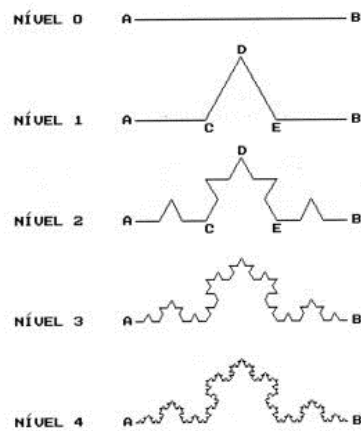


Figura 17 – Curva de Koch

4.2.2 Análise da Curva de Koch

Na construção de cada nível da Curva de Koch, realizaremos uma análise em relação ao número de segmentos, comprimento destes e o comprimento total da curva. Cada um dos itens citados pode ser representado por meio de uma função cuja variável é o nível da construção.

Nível	0	1	2	3	...	n
Número de segmentos	1	4	16	64	...	4^n
Comprimento de cada segmento	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$...	$\frac{1}{3^n}$
Comprimento total da curva	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{64}{27}$...	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Figura 18 – Comprimento da curva de Koch

Demonstraremos através da Indução Finita que o comprimento total da curva N_n em um nível $n \geq 0$ é:

$$N_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

No primeiro nível, ou seja, para $n = 0$, temos:

$$N_0 = (4/3)^0 = 1.$$

De fato, no primeiro nível, partimos de um segmento de comprimento unitário. Fixado $k \geq 0$, suponhamos que o comprimento total N_k da curva no nível k seja

$$N_k = (4/3)^k.$$

Como, em cada nível, um segmento é substituído por 4 segmentos reduzidos de $\frac{1}{3}$, neste nível, a curva tem $\frac{4}{3}$ do comprimento dela no nível anterior. Assim, a cada nível, multiplicamos o comprimento por $\frac{4}{3}$. Logo, podemos escrever:

$$N_{k+1} = \frac{4}{3}N_k.$$

Substituindo N_k por $(4/3)^k$, temos:

$$N_{k+1} = (4/3) \cdot (4/3)^k,$$

ou seja,

$$N_{k+1} = (4/3)^{k+1}.$$

Portanto, por indução, demonstramos o resultado.

Podemos enfatizar que um fractal é o resultado de um número infinito de níveis, ou seja, temos um fractal quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, podemos descrever algumas propriedades, tais como:

- o número de segmentos tende para infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4)^n = \infty.$$

- O comprimento de cada segmento tende para zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/3)^n = 0.$$

- O comprimento total da curva tende para infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4/3)^n = \infty.$$

Daí, temos que, apesar de o comprimento de cada segmento tender para zero, o comprimento total da curva tende para infinito.

4.2.3 Dimensão

A Curva de Koch (*vide* Figura 18 abaixo) tem dimensão fractal que pode ser calculada por autossimilaridade.

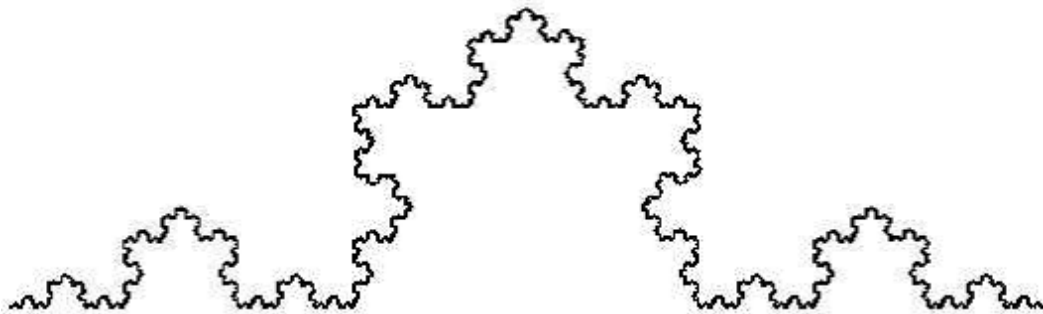


Figura 19 – *Curva de Koch(níveis)*

Podemos observar que, em cada nível, como já mencionamos, um segmento desta curva é substituído por quatro, reduzidos de $1/3$. Assim, podemos calcular sua dimensão fractal por:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26.$$

4.2.4 Características fractais da Curva de Koch

Podemos destacar as principais características dos fractais na Curva de Koch, a saber:

- **autossemelhança:** é possível encontrar, em cada nível da Curva de Koch, quatro cópias da figura no nível anterior, em tamanhos reduzidos, sendo que, para cada uma dessas quatro partes, esse padrão se repete. Desse modo, vemos que a autossemelhança é encontrada em cada parte da figura, não importando qual está sendo observada;
- **estrutura fina:** não importa o quanto ampliamos a Curva de Koch: a quantidade de detalhes que vemos continua sendo grande;
- **fácil construção:** o processo de construção da curva é simples, com apenas dois passos repetidos indefinidamente;
- **difícil descrição matemática:** apesar da facilidade da construção, não existe uma função analítica simples que descreva a Curva de Koch.

4.3 Floco de Neve de Koch

É um fractal geométrico clássico, simples de ser entendido. Para sua construção, iniciamos com um triângulo equilátero, que podemos considerar como o nível 0. Em seguida, basta dividirmos cada segmento que compõe o triângulo em três partes iguais e substituímos o segmento do meio por um triângulo equilátero retirando-lhe a base. Aplicamos essa regra infinitas vezes (processo de iteração). Observemos que, após cada iteração, surgem cópias idênticas da figura original em escalas diferentes, e que o número de cópias em cada iteração é justamente o número de lados da figura anterior. Logo, aplicamos o procedimento gerador em todos os segmentos de retas que compõem o triângulo. Aplicando esse processo repetidas vezes, obtemos uma figura em evolução constante, que lembra um floco de neve (figura a seguir).

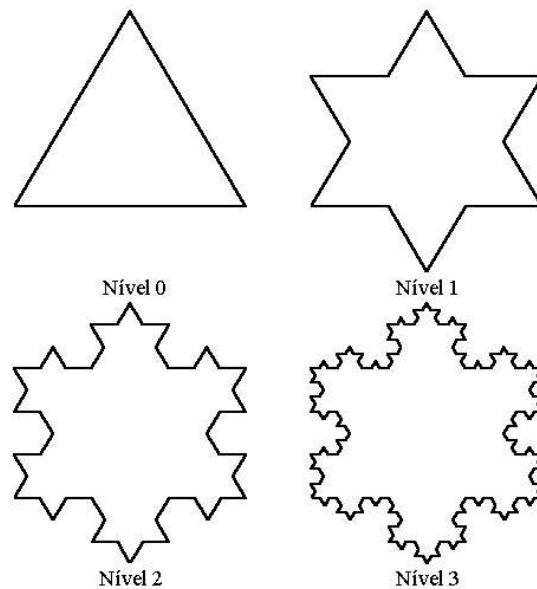


Figura 20 – Níveis do Floco de Neve de Koch

4.3.1 Área delimitada pelo Floco de Neve de Koch

Analisaremos o processo que determina a área delimitada pela Curva do Floco de Neve de Koch. Iniciaremos pela a área de um triângulo equilátero de lado l , que é dada por:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2.$$

Número de triângulos inseridos em cada nível:

Nível 1: temos $N = 1 \Rightarrow T_1 = 3$.

Nível 2: temos $N = 2 \Rightarrow T_2 = 12$.

Nível 3: temos $N = 3 \Rightarrow T_3 = 48$.

Nível 4: temos $N = 3 \Rightarrow T_4 = 192$.

⋮

Nível n : temos $N = n \Rightarrow T_n = 3 \cdot 4^{n-1}$,

em que $N =$ nível e $T_n =$ número de triângulos inseridos em cada nível.

A construção do floco de neve parte de um triângulo equilátero de lado unitário, ou seja, de área:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

E cada um de seus lados é a base da construção de uma curva de Koch.

Observe que, no nível n da construção da curva, são inseridos $3 \cdot 4^{n-1}$ novos triângulos de lado $l_n = (1/3)^n$. Então sua área no nível n passa a ser:

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1/3)^{2n},$$

que tende a zero quando n tende a infinito. Consequentemente, a área total delimitada pela curva é dada por:

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{n-1} A_n \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[1 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

Observe que $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$ corresponde à soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{4}{9}$ e a razão é $q = \frac{4}{9}$. Sabemos que, quando a razão q de uma PG é tal que $-1 < q < 1$, a soma dos seus (infinitos) termos converge para $\frac{a_1}{1-q}$. Assim, $S = \frac{4}{5}$. Substituindo esse valor na equação acima, temos que a área total do Floco de Neve de Koch tende para

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{3}{5}\right).$$

$$\text{Portanto, } A_T = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Comparando a área do triângulo inicial com a área do Floco de Neve de Koch, percebemos que o triângulo inicial representa $5/8$ da área do floco de neve.

Podemos observar que o Floco de Neve de Koch (Figura 20 abaixo) tem uma característica incomum: uma área finita delimitada por uma curva de comprimento infinito.

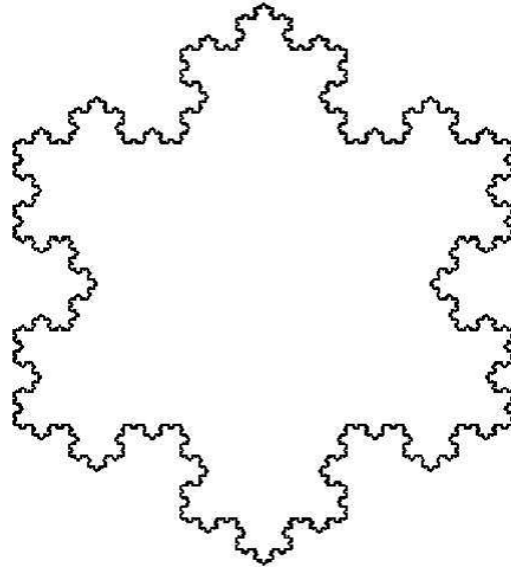


Figura 21 – *Floco de Neve de Koch*

4.4 Triângulo de Sierpinski

Waclaw Sierpinski, matemático polonês, nasceu em 14 de março de 1882 em Varsóvia e faleceu em 21 de outubro de 1969. Foi professor na Polônia, nas cidades de Lvov e Varsóvia. Publicou 724 artigos e 50 livros. Suas áreas de pesquisa predominantes foram a Teoria dos Números e a Teoria dos Conjuntos.



Figura 22 – *Waclaw Sierpinski(1822-1969)*

Barbosa(2005) menciona que Sierpinski apresentou, em 1916, um dos “monstros matemáticos”, a Curva de Sierpinski ou Triângulo de Sierpinski, em seu trabalho “Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée”.

A seguir, analisaremos o processo de construção do Triângulo de Sierpinski, suas propriedades geométricas e características fractais.

4.4.1 Processo por remoção de triângulos

Um processo bastante simples de construção do Triângulo de Sierpinski é por remoção de triângulos, conforme descrevemos a seguir (Figura 22 a seguir):

1. partimos de uma superfície delimitada por um triângulo qualquer;
2. marcamos os pontos médios de cada um dos três segmentos que delimitam o triângulo;
3. ligamos esses três pontos médios e obtemos quatro triângulos, cujos lados são a metade do lado do triângulo inicial, e a área é $\frac{1}{4}$ da área do triângulo inicial;
4. retiramos o triângulo central;
5. repetimos (indefinidamente) os três últimos passos com os triângulos restantes.

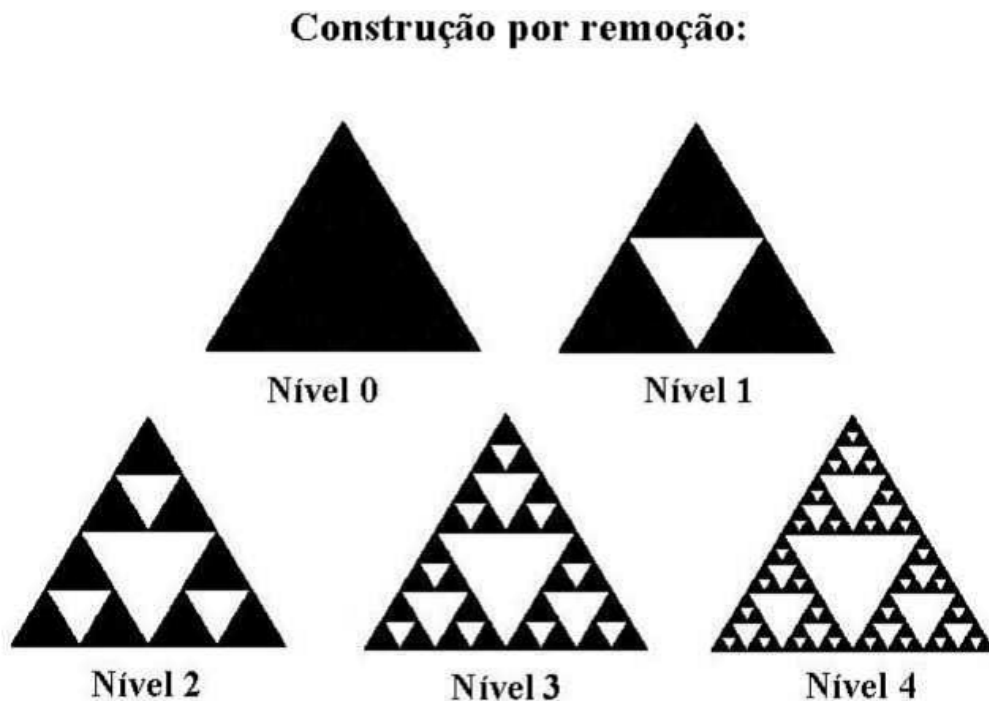


Figura 23 – Níveis de construção do triângulo de Sierpinski

4.4.2 Propriedades geométricas

Podemos considerar o Triângulo de Sierpinski uma figura que apresenta uma estrutura bem simples, a qual pode ser descrita como uma infinidade de triângulos encaixados, progressivamente menores. Para alguns, essa figura traz consigo um aspecto místico. Certamente, as simetrias presentes e a disposição geométrica dos triângulos a tornam uma figura com uma beleza deslumbrante (Figura 23 a seguir).

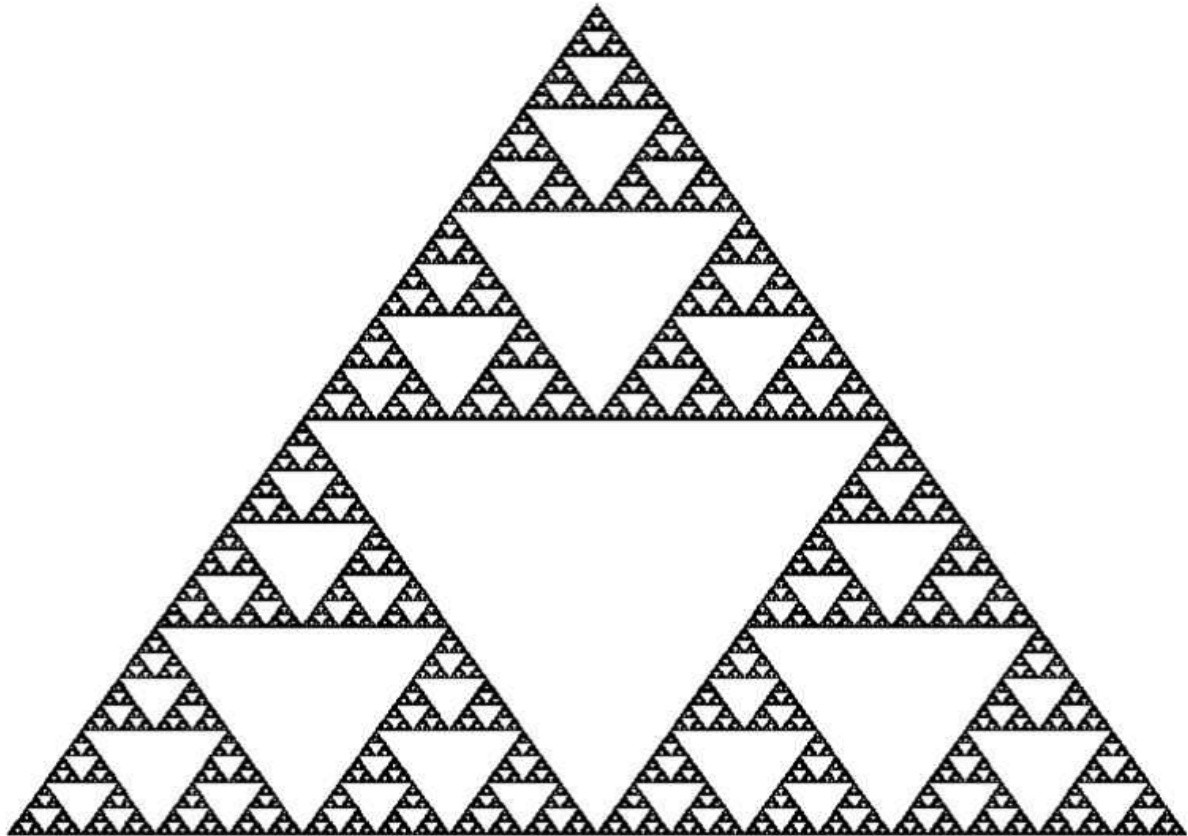


Figura 24 – *Triângulo de Sierpinski*

4.4.3 Números de triângulos

Considerando o número de triângulos que compõem a figura em cada nível da construção, podemos demonstrar, por indução finita, que, no nível $k \geq 0$ da construção do Triângulo de Sierpinski, o número de triângulos, denotado por N_k , é dado por:

$$N_k = 3^k.$$

De fato:

$$\text{Nível } 0: n = 0 \Rightarrow N_0 = 3^0 = 1,$$

$$\text{Nível } 1: n = 1 \Rightarrow N_1 = 3^1 = 3,$$

Nível 2: $n = 2 \Rightarrow N_2 = 3^2 = 9$,

Nível 3: $n = 3 \rightarrow N_3 = 3^3 = 27$,

\vdots

Nível k : $n = k \Rightarrow N_k = 3^k$,

que é, justamente, o número de triângulos nesse nível. Fixado $k \geq 0$, suponhamos que o número de triângulos no nível k seja $N_k = 3^k$.

Como, a cada nível um triângulo dá origem a outros três triângulos, de um nível para o seguinte, o número de triângulos é triplicado, ou seja, para $k + 1$, teremos:

$$N_{k+1} = 3N_k = 3(3^k) = 3^{k+1},$$

como queríamos demonstrar.

Como, na construção do Triângulo de Sierpinski, o número de níveis tende a infinito, o número de triângulos também tende a infinito, ou seja:

$$N = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \Rightarrow N = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k = \infty.$$

4.4.4 Perímetro

A seguir, analisaremos o perímetro de cada um dos triângulos obtidos em cada nível da construção do Triângulo de Sierpinski. Posteriormente, calcularemos a soma dos perímetros dos 3^k triângulos no nível k . Finalmente, discutiremos a soma do perímetro dos triângulos da figura como um todo.

Por razões de simplicidade, partiremos de um triângulo equilátero de lado l .

Denotando

C_n = comprimento do lado,

P_n = perímetro do triângulo,

temos que:

Nível $N = 0$: temos $C_0 = l$ e $P_0 = 3l$,

Nível $N = 1$: temos $C_1 = \frac{l}{2}$ e $P_1 = \frac{3l}{2}$,

Nível $N = 2$: temos $C_2 = \frac{l}{4}$ e $P_2 = \frac{3l}{4}$,

Nível $N = 3$: temos $C_3 = \frac{l}{8}$ e $P_3 = \frac{3l}{8}$,

\vdots

Nível $N = k$: temos $C_k = \frac{l}{2^k}$ e $P_k = \frac{3l}{2^k}$.

Podemos demonstrar, por indução finita, analogamente ao que fizemos para o número de triângulos, que o perímetro de cada triângulo no nível k denotado por P_k , é:

$$P_k = \frac{3l}{2^k}.$$

O número de triângulos no nível k é 3^k . Logo, a soma dos perímetros dos triângulos no nível k é:

$$S_k = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k l.$$

O Triângulo de Sierpinski é obtido fazendo-se o nível k tender a infinito. Assim, a soma dos perímetros dos triângulos é:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k l = \infty,$$

pois $\frac{3}{2} > 1$ e $l > 0$ é um número fixo. Logo, o perímetro aumenta indefinidamente, à medida que avançamos nos níveis de construção do Triângulo de Sierpinski.

4.4.5 Área

Considerando a área do triângulo inicial como uma constante A_0 , então, a área de cada triângulo em cada nível será:

$$\text{Nível } N = 0: n = 0 \Rightarrow A_0 = A_0,$$

$$\text{Nível } N = 1: n = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}A_0,$$

$$\text{Nível } N = 2: n = 2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{16}A_0,$$

$$\text{Nível } N = 3: n = 3 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{64}A_0,$$

⋮

$$\text{Nível } N = k: n = k \rightarrow A_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k A_0.$$

Portanto, temos que a área do triângulo em cada nível é

$$A_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k A_0,$$

o que pode ser demonstrado por indução finita.

Assim, a soma das áreas dos $N_k = 3^k$ triângulos no nível k , denotada por S_k , será:

$$S_k = N_k A_k = 3^k \left(\frac{1}{4}\right)^k A_0.$$

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k A_0 = 0.$$

pois $\frac{3}{4} < 1$ e $A_0 > 0$ é um número fixo. Observamos, assim, que a área total de todos os triângulos tende para zero, enquanto o perímetro aumenta indefinidamente.

4.4.6 Características fractais

O Triângulo de Sierpinski é uma figura que apresenta todas as características fractais:

- estrutura fina;
- autossimilaridade estrita;
- simplicidade na lei de formação;
- processo de construção iterativo;
- o fractal não é descrito de modo analiticamente simples.

4.4.7 Dimensão fractal

Dentre as características dos fractais, trataremos, agora, da dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski, que pode ser calculada pela fórmula:

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{S} \right)}.$$

Neste caso, $N = 3$, pois o número de triângulos é triplicado de um nível para outro, e o fator de semelhança entre esses triângulos é $S = \frac{1}{2}$, pois o comprimento do lado de cada triângulo é reduzido, em cada nível, à metade. Assim, temos:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58.$$

A seguir, apresentamos outras figuras, tais como o Tapete de Sierpinski e a Esponja de Menger, que se assemelham, pela sua construção, ao Triângulo de Sierpinski.

4.4.8 Tapete de Sierpinski

O processo de construção do Tapete de Sierpinski parte de um quadrado, que é o nível 0. Analogamente ao Triângulo de Sierpinski, basta dividirmos tal figura em partes e remover a parte central. Com isso teremos quadrados semelhantes ao quadrado original, em escala menor. Esse será o procedimento gerador. Basta seguirmos esse processo repetidas vezes em todos os quadrados que restam após cada iteração. Dessa forma, determinamos onde está sendo aplicado o procedimento gerador em cada iteração. Com isso

finalizamos a construção do Tapete de Sierpinski. Na Figura 24 a seguir, apresentamos esse processo.

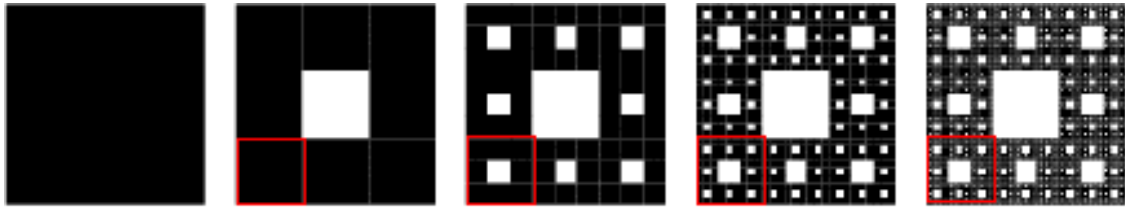


Figura 25 – Processo de construção do tapete de Sierpinski

4.4.9 Esponja de Menger

A Esponja de Menger é um fractal tridimensional obtido a partir de um cubo, do qual são retirados sistematicamente outros cubos de modo semelhante ao que é feito na construção do Triângulo de Sierpinski: divide-se o cubo em 27 cubos iguais, removendo-se o cubo central e os seis cubos centrais de cada face. Repete-se o processo em cada um dos cubos restantes e continua-se indefinidamente desse modo, obtendo-se uma figura de área infinita e volume zero. Na Figura 25 a seguir, apresentamos esse processo.

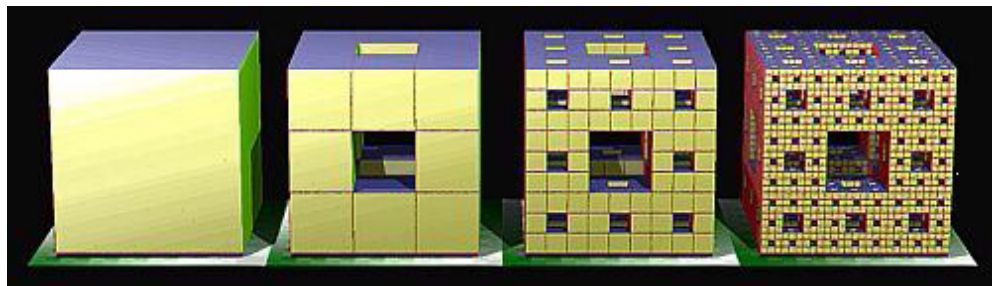


Figura 26 – Processo de construção da Esponja de Menger.

4.5 Curva de Peano

Giuseppe Peano, logicista e matemático italiano, nasceu em 27 de agosto de 1858, em Cuneo, Sardenha. Estudou Matemática na Universidade de Turim, onde foi professor desde 1890 até a sua morte. Também lecionou na Academia Real de Artilharia, de 1886 até 1901. Peano criou um idioma internacional chamado latino sine flexione ou interlúngua, com um vocabulário bastante simplificado, baseado no latim, francês, inglês e alemão. Fundou, em 1891, a “Rivista di Matematica”, publicada posteriormente em francês e em interlúngua. Em 1903, propôs a interlúngua como idioma auxiliar internacional e em 1908 foi eleito presidente da Academia pro interlúngua, que transformou numa associação científica,

tendo como órgão de expressão oficial a revista *Schola et Vita*. Morreu subitamente em Turim, em 20 de Abril de 1932.



Figura 27 – *Giuseppe Peano*(1858-1932).

Foi Peano quem, em 1890, inventou as curvas que levam o seu nome e preenchem o plano, como discutiremos a seguir. Dentre suas contribuições para a Matemática, destaca-se sua famosa axiomatização dos números inteiros (positivos). Outro trabalho que merece destaque é a obra *Arithmetices Principia*. Nessa obra, observa-se o alto nível de precisão e rigor lógico, que surpreenderam os matemáticos contemporâneos. Aprofundando as noções de continuidade e dimensão, Peano publicou, em 1890, seu “monstro matemático”, a Curva de Peano, com a proposta de cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular.

4.5.1 Construção da Curva de Peano

Iniciamos a construção da Curva de Peano com um segmento de reta de comprimento unitário. Substituímos esse segmento por uma curva de nove segmentos em escala de $\frac{1}{3}$. Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos. Substituímos, novamente, cada segmento pela curva de nove segmentos, e assim sucessivamente. A curva vai preenchendo uma região quadrada, cuja diagonal, dada pelo segmento inicial, é 1. A curva de Peano, sendo um fractal, só é obtida quando o número de níveis tende para infinito.

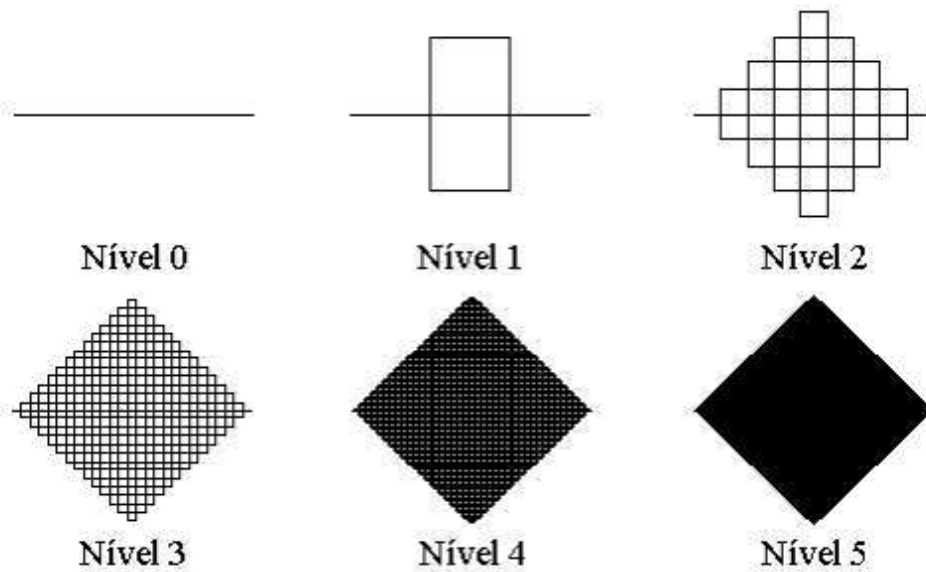


Figura 28 – Processo de construção da Curva Peano.

4.5.2 Estudo da curva

Analisando a curva de Peano, podemos obter informações relativas ao número de segmentos, comprimento de cada segmento e comprimento total, em cada nível de construção do fractal. Se aplicarmos o limite quando $n \rightarrow \infty$, veremos que:

- o número de segmentos tende para infinito:

$$N_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 9^n = \infty;$$

- o comprimento de cada segmento tende para zero:

$$C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0;$$

- o comprimento total desta curva tende para infinito:

$$T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty;$$

Logo:

$$\text{Nível } n = 0: N_0 = 1 \rightarrow C_0 = 1 \rightarrow T_0 = 1.$$

$$\text{Nível } n = 1: N_1 = 9 \rightarrow C_1 = \frac{1}{3} \rightarrow T_1 = 3.$$

$$\text{Nível } n = 2: N_2 = 81 \rightarrow C_2 = \frac{1}{9} \rightarrow T_2 = 9.$$

$$\text{Nível } n = 3: N_3 = 729 \rightarrow C_3 = \frac{1}{27} \rightarrow T_3 = 27.$$

⋮

$$\text{Nível } n = k: N_k = 9^k \rightarrow C_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \rightarrow T_k = 3^k.$$

4.5.3 Dimensão

Na construção deste fractal, substitui-se sempre um segmento por nove, reduzido de $\frac{1}{3}$. Calculando a sua dimensão, temos:

$$D = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.$$

Isso significa que a Curva de Peano preenche a área do plano na qual é traçada.

4.5.4 Características fractais da Curva de Peano

- autossimilaridade: a Curva de Peano no nível 1 tem nove segmentos. Como as substituições são efetuadas em cada um desses, podemos obter miniaturas da curva no Nível 1 em nove partes do Nível 2. Desse mesmo modo, podemos obter nove miniaturas do nível 2 no nível 3, e assim sucessivamente;
- estrutura-fina: ao ampliarmos a curva, não importando o fator de ampliação, não perderemos a quantidade de detalhes que ela tem;
- fácil construção: o processo de obtenção da curva é simples, com apenas um passo repetido indefinidamente;
- difícil descrição analítica: não conseguimos descrever essa curva por meio de simples funções analíticas.

4.6 Curva de Hilbert

David Hilbert nasceu em Kaliningrad, em 23 de janeiro de 1862, na Prússia Oriental. Estudou na Universidade local e recebeu o título de Doutor (Doctor Philosophie Human), em 1885. Começou a lecionar em 1886 como Privadozent. Em 1895, tornou-se professor titular na Universidade de Göttingen. Em 1899, publicou os "Fundamentos da Geometria", que exerceu grande influência sobre a Matemática do século XX. Trabalhou com axiomas da Matemática, Topologia, Equações Diferenciais, Cálculo Variacional. Hilbert interessou-se por todos os aspectos da Matemática Pura, contribuindo para a Teoria dos Números, Lógica Matemática, Equações Diferenciais e também para a Física Matemática, sendo considerado uma figura importante de transição entre os séculos XIX e XX. Em 1891 publicou a famosa curva de Hilbert, faleceu em 14 de fevereiro de 1943, na cidade de Göttingen, Alemanha.



Figura 29 – *David Hilbert(1862-1943).*

4.6.1 Construção da Curva de Hilbert

A construção da Curva de Hilbert é feita por meio de um processo recursivo mas com algumas particularidades. A figura inicial é um quadrado unitário, como podemos ver na figura a seguir. A figura geradora consiste em dividi-lo em quatro quadrados iguais, unindo os pontos centrais de cada um desses quadrados, tal como podemos ver em (figura 30). A curva é formada, não pelos quadrados, mas sim pelos segmentos de reta formados pela ligação desses pontos centrais. Os sucessivos passos são construídos analogamente ao processo anterior.

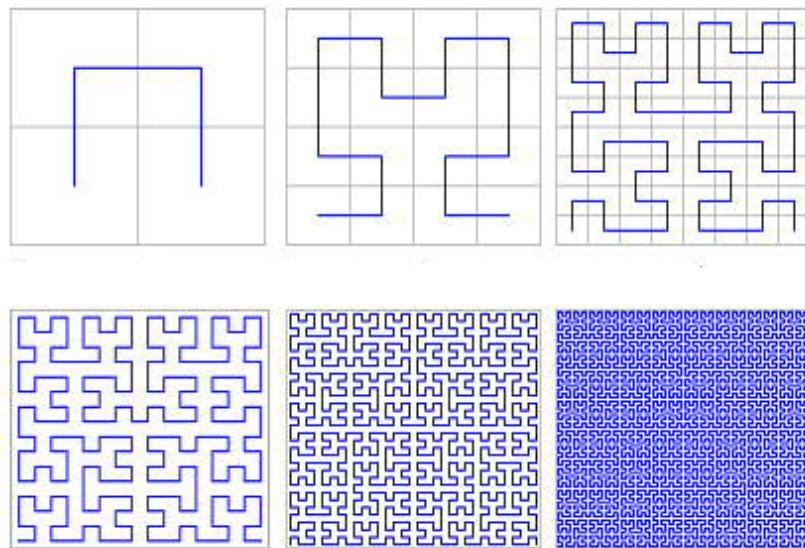


Figura 30 – *Níveis da curva de Hilbert.*

4.6.2 Estudo da Curva de Hilbert

Analisando a Curva de Hilbert, observamos que o fractal é o resultado de um número infinito de níveis. Passando, então, ao limite, com $n \rightarrow \infty$, temos:

- o número de segmentos tende para infinito:

$$N_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^{n+1} - 1 = \infty;$$

- o comprimento de cada segmento tende para zero:

$$C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0;$$

- o comprimento total da curva tende para o infinito:

$$T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = \infty;$$

4.6.3 Características fractais da Curva de Hilbert

As características fractais que mencionamos acima são também encontradas na Curva de Hilbert, tais como:

- autossimilaridade: podemos obter quatro cópias do fractal, reduzidas pela metade, no próprio fractal;
- estrutura fina: ao ampliarmos a curva, não importando o fator de ampliação, não perderemos a quantidade de detalhes que ela tem;
- fácil construção: vimos que, apesar da complexidade da Curva de Hilbert, sua construção é composta por alguns passos repetidos indefinidamente;
- difícil descrição matemática: a curva resultante tem um traçado que não conseguimos representar por uma função analítica simples.

5 FRACTAL: INCLUSÃO NA PRÁTICA PEDAGÓGICA

No Brasil, o Ensino Médio vem passando por um processo de reformulação curricular, que teve como marco inicial a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (LDBEM) de 1996, confirmada e regulamentada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e pelas Diretrizes do Conselho Nacional de Educação, em 1998. Organizado pelo Ministério da Educação e Cultura, por meio da Secretaria de Educação Média e Tecnológica, o projeto de reforma do Ensino Médio visa adequar o currículo dessa etapa de ensino às novas condições sociais, econômicas e culturais, impostas pela sociedade tecnológica, de modo a contornar a defasagem do nível do Ensino Básico brasileiro em comparação ao apresentado pelos países desenvolvidos.

A renovação do Ensino Médio é um processo que está em pleno curso. De modo geral, os profissionais ligados à educação concordam que mudanças radicais precisam ser implementadas. Além disso, a renovação curricular do Ensino Médio precisa estar sintonizada com as novas demandas sociais e econômicas da nossa sociedade, sem deixar de levar em conta a enorme diversidade social, cultural e econômica do alunado ingressante no Ensino Médio, o que torna necessária a ampliação da matriz curricular ajustando e acrescentando conteúdos que atenda as necessidades intelectual e cotidiana dos alunos.

Verifica-se que o estudo das geometrias não euclidianas tem sido descuidadas nas aulas de Matemática pela maioria dos professores, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, não pelo descaso do professor, mas sim pelo fato destes não terem tido contato com essas geometrias em sua formação, considerando que a maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática não incluem esse conteúdo em suas estruturas curriculares. Também as formações continuadas oferecidas pela Secretaria de Educação trabalham temas mais generalizados, não focando em temas específicos. Essa ausência tem levado os alunos e professores a crer que a Geometria Euclidiana é a única geometria possível e presente em nosso mundo. Daí a necessidade de trabalhar com as Geometrias não Euclidianas, especificamente a Geometria dos Fractais.

Neste capítulo, aborda-se a necessidade de apresentar reflexões e justificativas sobre as possibilidades da inclusão do ensino da Geometria Fractal no Ensino Médio. Tem-se a clareza de que é um tema recente para a maioria dos professores e alunos, pois não consta na matriz curricular, e, quando ocorrem nos (poucos) livros didáticos, são apenas leituras complementares. Um fato importante que nos motivou a pesquisar sobre esse assunto foi que: os conhecimentos geométricos que se ensinam em grande parte das escolas estão restritos apenas à Geometria Euclidiana.

5.1 Conexão da Geometria Fractal com outras áreas do conhecimento

No ensino da Matemática, fala-se muito em conteúdos significativos voltados para o cotidiano do aluno, conteúdos que realmente atendam as suas necessidades, para que eles possam desenvolver suas habilidades e competências. Um dos principais conteúdos significativos é a Geometria dos Fractais, pois ela possibilita uma interpretação mais completa do mundo, uma comunicação mais abrangente de ideias e uma visão mais equilibrada da Matemática. Além desses fatos, devemos mencionar que a Geometria Fractal tem um vasto campo de aplicação dos conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como Álgebra, Aritmética, Geometria Plana, Geometria Espacial, progressões e também a interação com outras disciplinas.

Segundo Nunes (2010):

"A exploração da Geometria Fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da Matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos. (Ibidem, p. 74)."

Podemos citar alguns exemplos da conexão da Geometria Fractal com outras áreas do conhecimento:

Na Medicina, como método de diagnóstico quantitativo de patologias. Um dos campos em que esse procedimento é mais desenvolvido é o diagnóstico do câncer, por meio da análise de imagens de tumores. As evidências experimentais sugerem que tumores malignos (câncer) apresentam uma fronteira com dimensão fractal superior às que ocorrem em agregados de tecidos normais. Um exemplo, nessa linha de investigação, é o da detecção de núcleos atípicos.

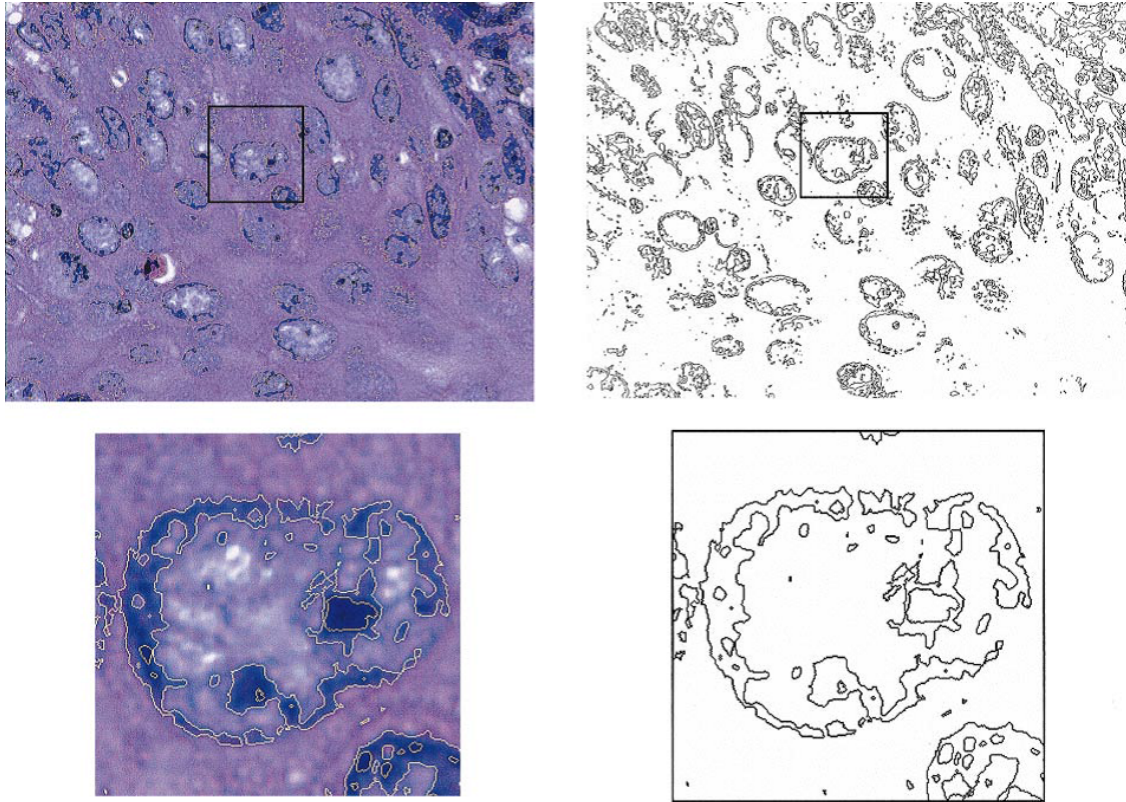


Figura 31 – *Deteção de núcleos atípicos*

Na tecnologia de fabricação de antenas, o conceito de dimensão fractal também desempenha papel importante. A resposta das antenas fractais difere acentuadamente das tradicionais, uma vez que são capazes de funcionar de forma otimizada, simultaneamente em várias frequências. Essa característica faz das antenas fractais uma excelente alternativa para aplicações de recepção de banda larga.



Figura 32 – *Antena fractal*

Pode-se também verificar aplicações nas mais diversas áreas da ciência, listando-se aplicações na Mineralogia, com o objetivo de medir a densidade dos minerais, a evolução dos terrenos e a descontinuidades das rochas; na Biologia, para a análise da rugosidade dos fungos e de corais; na indústria, como a detecção automática de falhas em produtos têxteis; no solo, na chuva, na Economia, na Ecologia.

A seguir, apresentamos alguns dos exemplos de aplicação de fractais que mencionamos acima:

- Solo

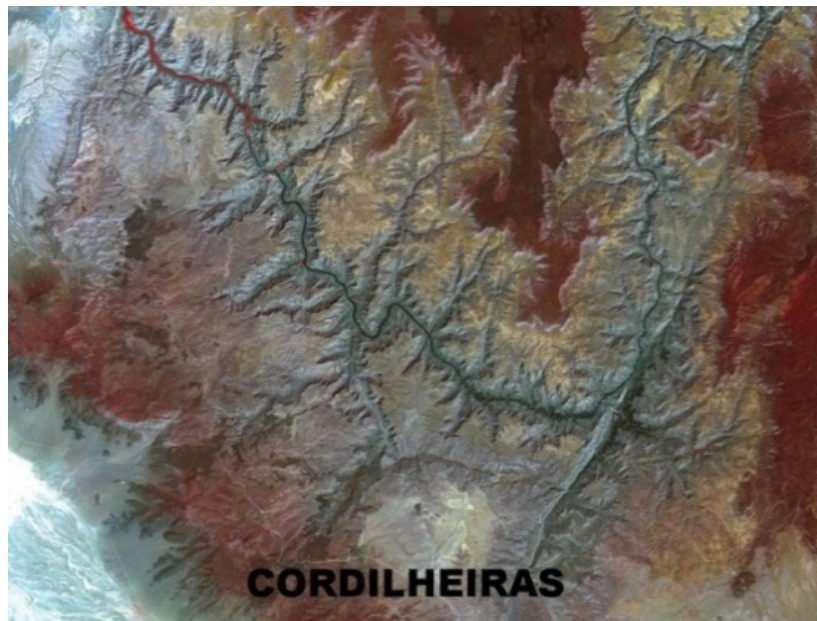


Figura 33 – *Cordilheiras*



Figura 34 – *Egito visto do espaço*

- Ecologia

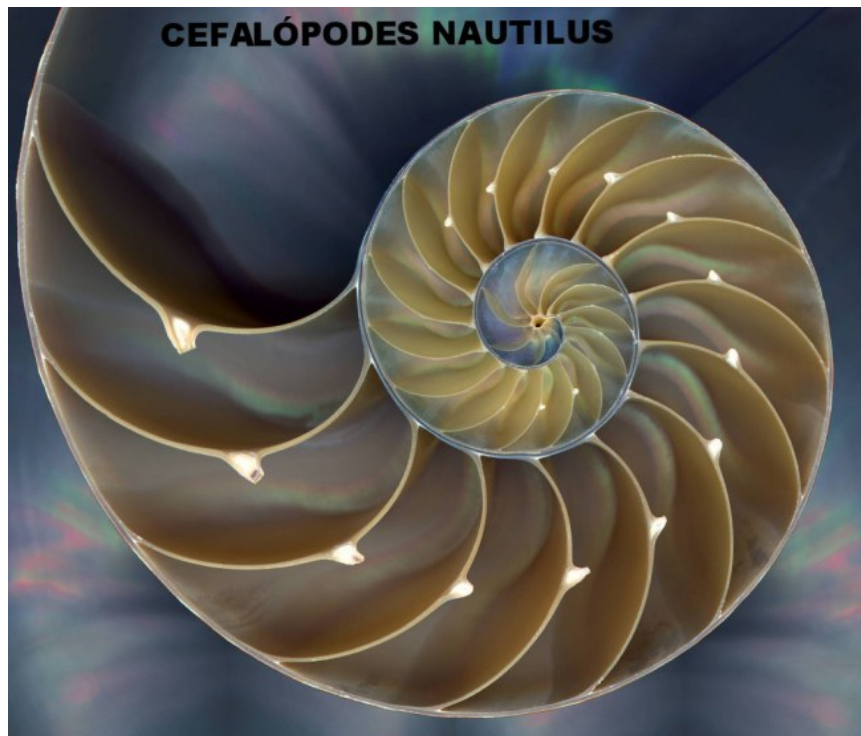


Figura 35 – *Cefalópodes Nautilus*

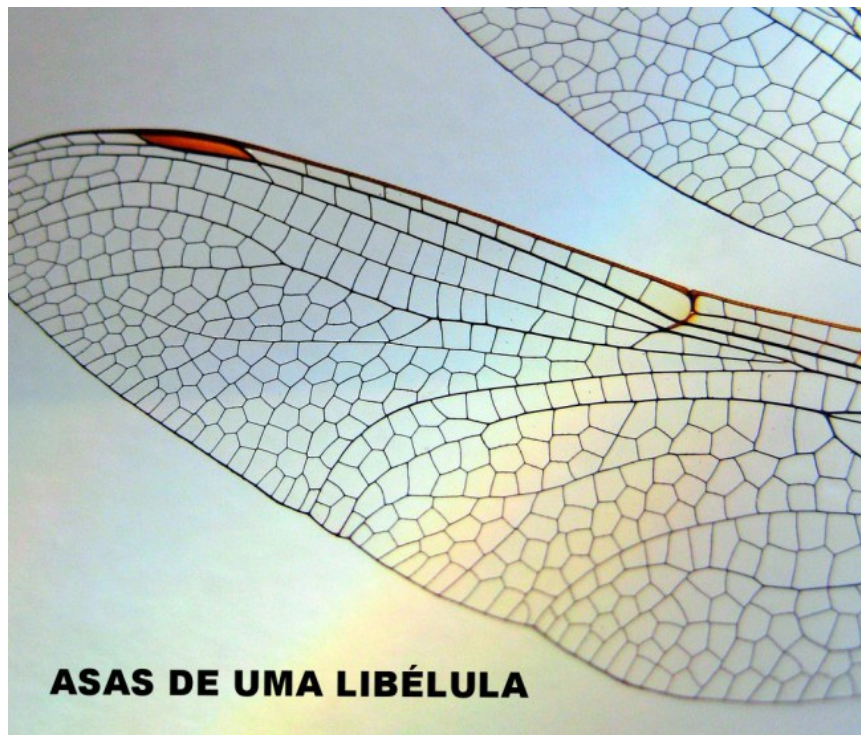


Figura 36 – *Asas de uma Libélula*

- Chuva



Figura 37 – *Raio*

- Economia

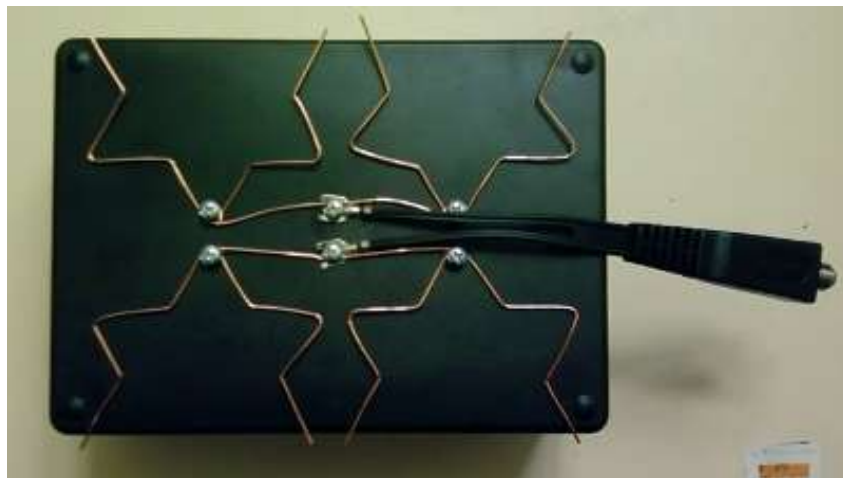


Figura 38 – *Antenas Fractais*

- Indústria

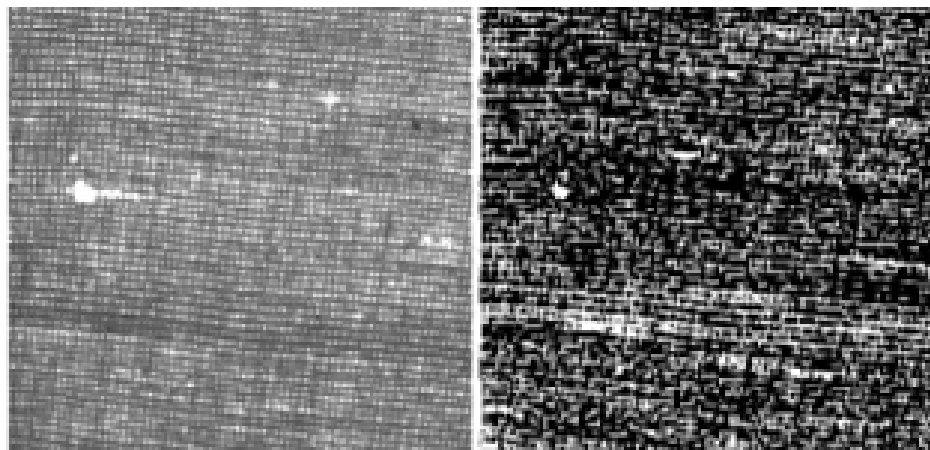


Figura 39 – Falha em produto têxtil

Assim, podemos concluir que essa área da geometria passa a ser uma importante e necessária metodologia de ensino, uma vez que sua prática possibilita uma abordagem concreta e enriquece a aplicação de vários conceitos, diversificando, desse modo, a metodologia do professor, propondo aulas dinâmicas com situações novas, voltadas para a prática cotidiana, nas quais o educando possa descobrir e fazer relações entre o que visualiza e o que estuda, tornando a sala de aula mais prazerosa e favorável à aprendizagem. Acreditamos que:

[...] "para os fractais, em especial para a Geometria Fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração, e talvez evidenciando o êxtase na complementação na beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais (BARBOSA, p. 14, 2002)."

Além das inúmeras possibilidades de aplicações dos fractais, é necessário que o professor perceba a potencialidade da Geometria Fractal, quando relacionamos o conceito de simetria com Arte e Matemática. A Geometria Fractal tem função essencial na formação dos alunos, pois ela possibilita uma interpretação melhor da realidade matemática. Assim, percebemos que é:

"É necessário discutir com os alunos que a perfeição dos espaços geográficos é consequência da atividade humana, sendo que, em muitos espaços onde vivemos nos deparamos com situações que fogem das alterações proferidas pelas pessoas e, portanto, foge aos conceitos de Geometria Plana, uma Geometria Euclidiana. É coerente, do ponto de vista da aprendizagem matemática, explorar os conceitos de Geometria não Euclidiana (CRUZ, 2008, p. 4)."

5.2 Inclusão da Geometria Fractal no Ensino Médio

Nas últimas décadas, ocorreram transformações nas práticas pedagógicas, visando a uma aproximação de conteúdo ministrado na sala de aula com o cotidiano do aluno, ou seja, conteúdos que venham a agregar significados. A partir dessas transformações, textos e situações-problema envolvendo a Geometria Fractal começam a aparecer em avaliações institucionais, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares.

A seguir, apresentamos mais algumas evidências da necessidade de incluir a Geometria Fractal nos conteúdos programáticos do Ensino Médio, pois vem adquirindo cada vez mais destaque nos vestibulares e ENEM, embora não tenha uma devida atenção dentre os conteúdos matemáticos para os alunos do Ensino Médio, deixando clara a deficiência do ensino de Geometria Fractal no que diz respeito às habilidades e competências cobradas em tais avaliações.

Um problema que trata, especificamente, de um dos mais famosos fractais – a Curva de Koch –, foi incluído na prova de Matemática do vestibular da Universidade Federal do Paraná, em 2008 (Vestibular UFPR, 2008).

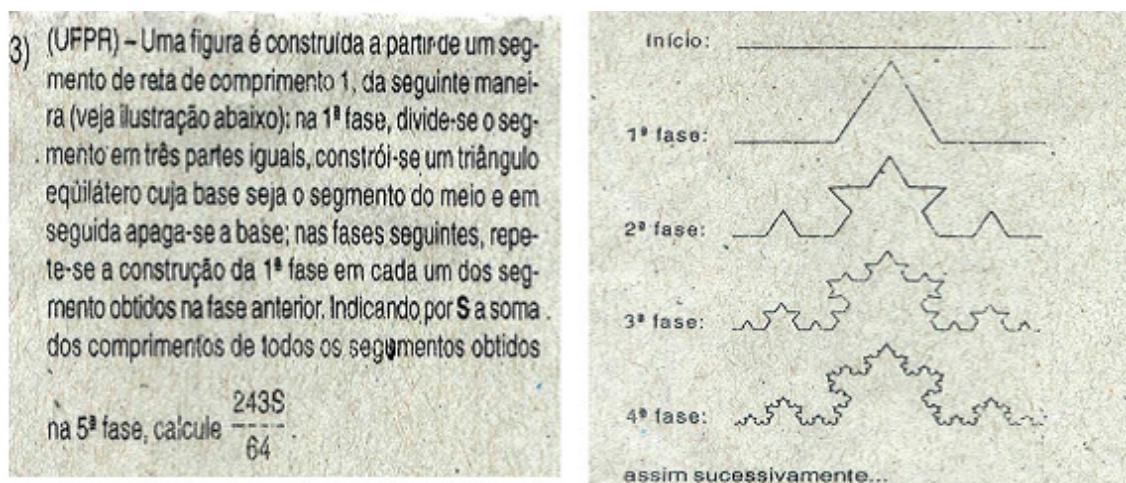


Figura 40 – *Questão 3 Prova de Matemática do Vestibular UFPR, 2008.*

É necessário destacar que, com o texto oferecido pelo vestibular UFPR 2008, provavelmente o vestibulando conseguiria resolver o problema acima, porém acreditamos que, para muitos, o assunto é desconhecido, ou seja, não foi abordado em sala de aula.

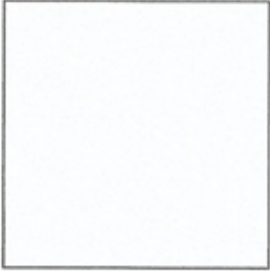
Outro problema que também trata, especificamente, de um dos mais famosos fractais – o Tapete de Sierpinski – foi incluído na prova de Matemática do vestibular do meio de ano (2011) da UNESP, na prova de conhecimentos específicos.

Questão 24


Divide-se, inicialmente, um quadrado de lado com medida unitária em 9 quadrados iguais, traçando-se dois pares de retas paralelas aos lados. Em seguida, remove-se o quadrado central. Repete-se este processo de divisão, para os quadrados restantes, n vezes.

Observe o processo para as duas primeiras divisões:

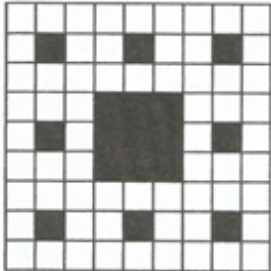
QUADRADO DE LADO UNITÁRIO



1.ª DIVISÃO



2.ª DIVISÃO



Quantos quadrados restarão após as n divisões sucessivas do quadrado inicial e qual a soma das áreas dos quadrados removidos, quando n cresce indefinidamente?

Figura 41 – Prova de Matemática do Vestibular UNESP, 2011.

A MACKENZIE, no seu vestibular de 2010, na prova tipo A, página 20, questão 24, refere à importante construção fractal – Conjunto de Cantor. Essa universidade usa a construção desse fractal na resolução do problema, mas não enfatiza a Geometria Fractal no seu contexto.

Questão nº 24

Divide-se um segmento de comprimento x em três partes iguais, retirando-se a parte central. Repete-se o procedimento na parte retirada. Procedendo-se indefinidamente da mesma forma, a soma de todos os segmentos retirados é 30. O valor de x é:

- a) 90
- b) 50
- c) 55
- d) 45
- e) 60

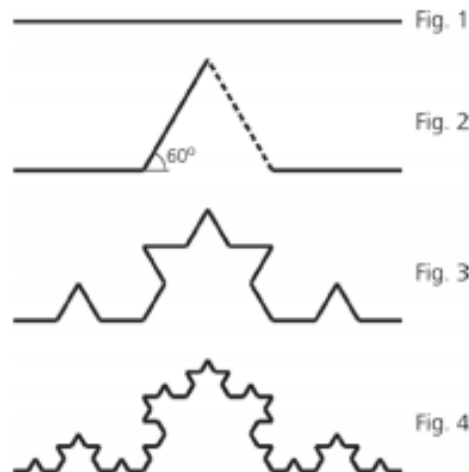
Figura 42 – Prova de Matemática do Vestibular da MACKENZIE, 2010.

A UNICAMP, no seu vestibular de 2012, 1ª fase da prova de conhecimentos gerais, página 6, questão 10, propõe um problema envolvendo um fractal de grande destaque: o

Floco de Neve de Koch.

QUESTÃO 10

Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60° , e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 3 e 4.



Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

- a) $\left(\frac{6!}{4! 3!}\right)$ cm.
- b) $\left(\frac{5!}{4! 3!}\right)$ cm.
- c) $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ cm.
- d) $\left(\frac{4}{3}\right)^6$ cm.

RASCUNHO

Figura 43 – Prova de Matemática do Vestibular da UNICAMP, 2012.

O processo seletivo vestibular UEL 2012, 1ª fase 30/10/2011, página 11, questão 27, traz uma questão que atende a todas as características no processo de construção de um fractal.

A figura a seguir representa um modelo plano do desenvolvimento vertical da raiz de uma planta de mangue. A partir do caule, surgem duas ramificações da raiz e em cada uma delas surgem mais duas ramificações e, assim, sucessivamente. O comprimento vertical de uma ramificação, dado pela distância vertical reta do início ao fim da mesma, é sempre a metade do comprimento da ramificação anterior.

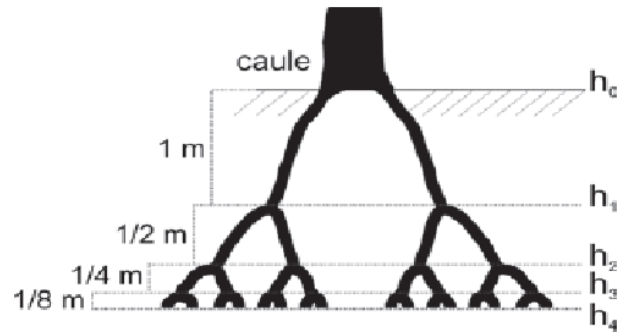


Figura 14: Modelo de raiz de planta de mangue.

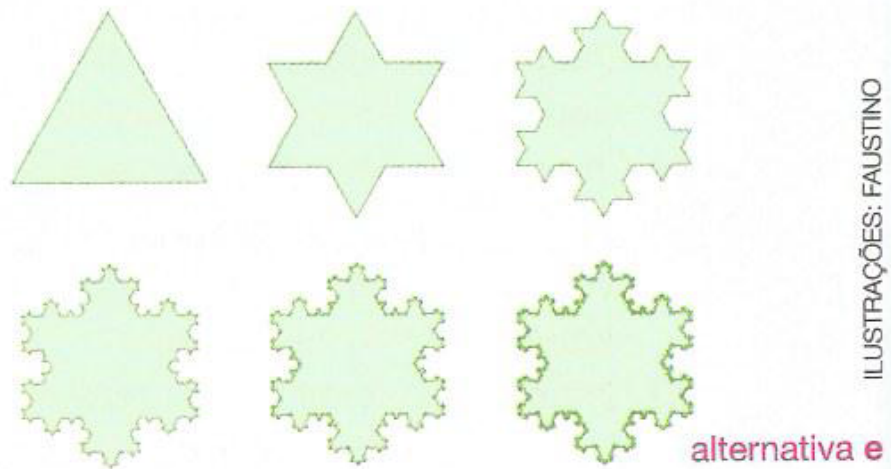
Sabendo que o comprimento vertical da primeira ramificação é de $h_1 = 1$ m, qual o comprimento vertical total da raiz, em metros, até h_{10} ?

- a) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$
- b) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^9}\right)$
- c) $2 \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$
- d) $2 \left(1 - \frac{1}{10^{10}}\right)$
- e) $2 \left(1 - \frac{1}{2^9}\right)$

Figura 44 – Prova de Matemática do Vestibular da UEL, 2011.

O livro MATEMÁTICA PAIVA, volume 1, de Manoel Paiva, Editora Moderna, 2ª edição de 2013, página 280, Capítulo 12, menciona, na seção exercícios complementares, a questão 10, que usa um dos fractais citados no capítulo anterior: o Floco de Neve de Koch. Ao observar que o tema fractal foi apenas inserido como uma atividade complementar dentro do conteúdo de progressão geométrica, alguns autores perceberam a necessidade de apresentar esse tema para os alunos só que ainda de maneira tímida, pois ele ainda não recebe atenção necessária dentro da matriz curricular do Ensino Médio. Na referida questão, o autor faz um breve comentário contextual para se certificar de que aluno tenha uma pequena noção do termo fractal.

- 10** O termo “fractal” foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, pesquisador da IBM e autor de trabalhos pioneiros sobre fractais. A característica principal de um fractal é a repetição de padrões. Por exemplo, partindo de um triângulo equilátero, dividimos cada lado em três partes iguais e desenhamos, externamente ao triângulo original, um novo triângulo equilátero em que um dos lados é o segmento central obtido dessa divisão; a seguir apagamos o segmento central. Repetimos esse procedimento para cada lado do polígono obtido com o primeiro procedimento, e assim por diante. Consideremos todos os infinitos polígonos assim obtidos, de modo que a sequência formada pelos números de lados seja crescente.



O número de lados do 6º polígono dessa sequência é:
a) 192 b) 768 c) 1.264 d) 2.288 e) 3.072

Figura 45 – Livro *MATEMÁTICA PAIVA volume 1*, edição 2013.

Analisando o livro *MATEMÁTICA ENSINO MÉDIO*, de Kátia Stocco e Maria Ignez Diniz, volume 1, Editora Saraiva, 8ª edição, página 73 da unidade 3, observamos que as autoras usam no exemplo 5, os padrões geométricos dos fractais (TAPETE DE SIERPINSKI) para exemplificar a relação com conceito de funções. Mais uma importante

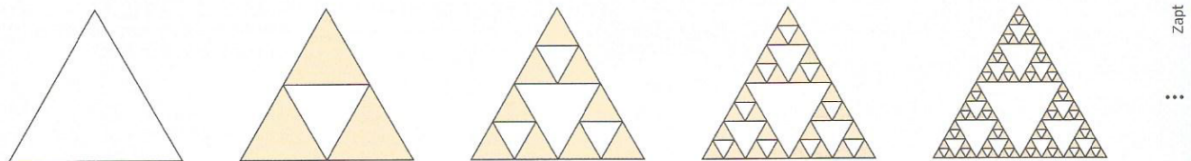
combinação de fractal com função que devemos considerar para enriquecer as aulas de Matemática. A fim de que isso realmente aconteça, precisamos trabalhar conceitos e características dos fractais para que o discente possa desenvolver melhor suas habilidades para conceituar e compreender uma função.

Exemplo 5

Alguns padrões geométricos também estão relacionados com funções. O padrão que vamos descrever é conhecido como **tapete de Sierpinski** e é construído a partir de uma regra que se repete indefinidamente.

Tudo começa com um triângulo equilátero, dividido em 4 triângulos equiláteros congruentes, cujo triângulo do centro é desconsiderado, restando dessa forma apenas 3 triângulos equiláteros. Veja ao lado.

Repete-se a divisão de cada triângulo restante em 4 triângulos equiláteros congruentes, desconsiderando sempre o triângulo do centro:



O número de triângulos que compõem o tapete em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção?

Etapas	1	2	3	4	...
Número de triângulos	1	3	9	27	...

Quantos triângulos haverá na décima etapa da construção do tapete?
É possível desenhar tantos triângulos?

Figura 46 – Livro *MATEMÁTICA de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1*.

Continuando no livro citado acima, nas páginas 140 e 141 da unidade 16, as autoras usam as propriedades dos fractais, conhecidos como CURVA DO FLOCO DE NEVE DE KOCH e TAPETE DE SIERPINSKI, como exemplo para introduzir os conteúdos de sequências, progressão aritmética e progressão geométrica, a fim de mostrar essa importante ligação entre sequências e os padrões fractais. Percebemos também que para estudar as progressões aritmética e geométrica precisamos conhecer os fractais, pois ambos trabalham com padrões na organização da sua lei de formação.



Sequências, progressão aritmética e progressão geométrica

Optamos por inserir esta unidade sobre sequências numéricas e progressões antes das funções exponencial e logarítmica porque, dessa forma, é possível:

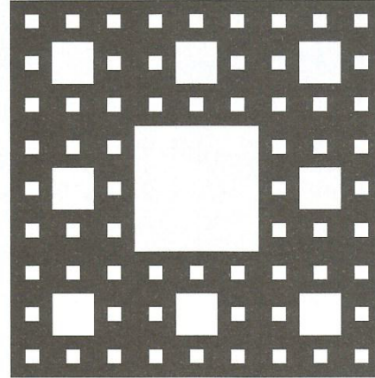
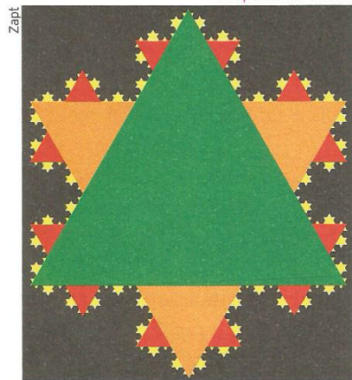
- relacionar o estudo das funções e de função afim com sequências e progressões;

Nesta unidade, vamos estudar algumas funções especiais, conhecidas como **sequências numéricas**, com atenção às **progressões aritméticas** e **progressões geométricas**. A compreensão dessas sequências facilitará o estudo, nas próximas unidades, das funções exponencial e logarítmica.

- abordar a noção de crescimento ou decréscimo exponencial por meio de progressão geométrica, cujos padrões permitem um contexto de aprendizagem que favorece a maior compreensão de função exponencial e o conceito de logaritmo. Nos próximos três

1. Sequências

capítulos, há muitas possibilidades de integração da Matemática com a Biologia, o que favorece o desenvolvimento de atividades conjuntas entre as disciplinas, especialmente no que diz respeito ao estudo de populações.



As figuras acima são conhecidas como **curva do floco de neve de Koch** e **tapete de Sierpinski**, respectivamente. A primeira é feita a partir de uma sequência de construções nos lados de um triângulo equilátero e a segunda, no interior de um quadrado.

O matemático Helge von Koch, em 1904, obteve a primeira dessas figuras a partir de um triângulo equilátero de lado 1. Observe as três primeiras figuras da sequência.



Você consegue descobrir como a segunda e a terceira figuras foram obtidas a partir da primeira? Acompanhe a explicação.

Consideremos um triângulo equilátero de lado 1. Dividimos cada um de seus lados em três partes iguais.

No terço médio de cada lado, construímos novos triângulos equiláteros. O resultado é uma linha poligonal fechada de 12 lados.

No estágio seguinte, fazemos a divisão de cada um dos 12 lados da poligonal em três partes iguais e construímos novos triângulos equiláteros sobre os terços médios, e assim sucessivamente.

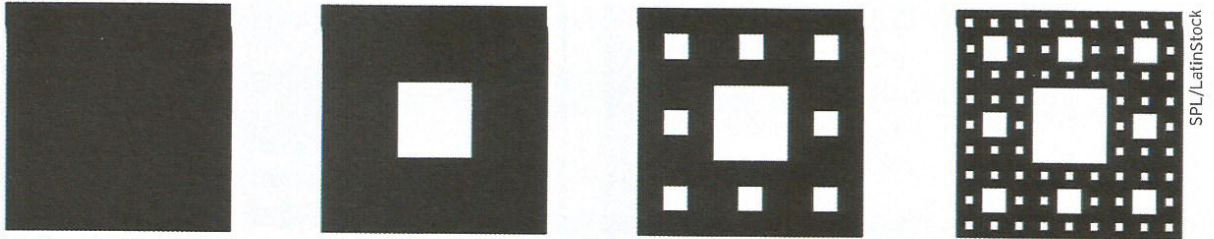
A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma sequência de números.

Como podemos descrever essa sequência?

PARA LER

Se você já está lendo o livro *O diabo dos números*, de Hans Magnus Enzensberger (Cia. das Letras), indicado na unidade 3, não deixe de ler a 5ª e a 6ª noites. Elas ajudarão você a pensar mais sobre as sequências que estudará nesta unidade.

Observe agora o que fez o matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969). Ele construiu seu "tapete" dividindo um quadrado de lado 1 em nove quadrados congruentes e retirando o quadrado central. Esse processo se repete em cada um dos quadrados restantes na etapa anterior.



Qual é a sequência dos números com as medidas dos lados dos quadrados retirados em cada etapa?

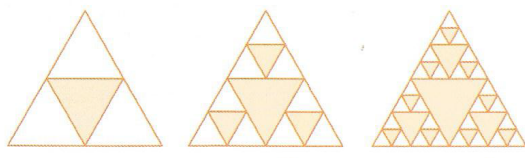
Para discutir problemas como esse é que vamos estudar, nesta unidade, sequências e progressões.

Figura 48 – Livro *MATEMÁTICA de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.*

Na seção PARA SABER MAIS do livro citado acima, nas páginas 168 e 169 da unidade 6, que tem como objetivo trazer um novo conteúdo que permitirá melhor a compreensão do tema, apresentando uma curiosidade ou aplicação do que está sendo estudado, as autoras destacam a Geometria Fractal como um novo ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a ciência, que permite explicar fenômenos para os quais a Geometria Euclidiana e a Física de Newton se mostraram ineficazes. As autoras também relacionam a Geometria fractal com aplicações em outras ciências, podendo, assim, apresentar um vasto campo de contextualização nas aulas de Matemática, tornando-as mais dinâmicas e enriquecedoras para o conhecimento do aluno, mostrando, desse modo, mais uma vez a importância de incluí-la na matriz curricular do Ensino Médio.

PARA SABER MAIS

Sequências na era do computador



Fractal de Sierpinski



Fractal de Von Koch

Zapf

...

...

...

De sequências de imagens como estas, definidas por regras muito simples, quando desenhadas a mão conseguimos obter apenas meia dúzia de termos, mesmo recorrendo aos melhores instrumentos de desenho. Mas, com um computador, o processo pode continuar indefinidamente, obtendo-se figuras com pormenores invisíveis a olho nu. Ora, aí entra em cena a enorme capacidade de ampliação dos modernos computadores, que torna possível visualizar os termos avançados dessas sucessões, fornecendo imagens incrivelmente belas.

O limite de uma sequência de figuras como as anteriores é um **fractal**.

A Geometria fractal é um novo ramo da Matemática, ou uma nova forma de encarar a Ciência, que está permitindo explicar certos fenômenos de turbulência para os quais a Geometria euclidiana e a Física de Newton se mostraram ineficazes.



Detalhe de um fractal de Mandelbrot.

imagebroker/Alamy/Other Images

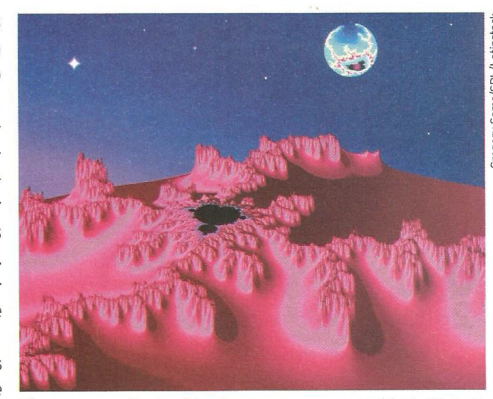
168 | PARTE 1 NÚMEROS, ESTATÍSTICA E FUNÇÕES

Figura 49 – Livro *MATEMÁTICA* de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.

Uma imagem obtida por técnicas fractais pode se parecer com coisas estranhas – um vírus ao microscópio ou paisagens de outro planeta –, mas é sempre estranhamente bela.

As aplicações da noção de fractal revelaram-se vastíssimas em Meteorologia, Hidráulica, Física, Geologia, Geografia e até em História, Economia e Linguística. Os linguistas, por exemplo, começaram a aplicar a teoria dos fractais no estudo da evolução dos dialetos. Já na Medicina, foram reconhecidas características fractais em fenômenos cardíacos e pulmonares.

Imagens fractais também têm sido usadas em filmes de ficção, como em *O retorno de Jedi*.



Gregory Sams/SPL/LatinStock

Observe esse outro fractal: veja como parece um cenário de filme de ficção científica.

Figura 50 – Livro *MATEMÁTICA* de Kátia Stocco Maria Ignez Diniz, volume 1.

Devemos mencionar a grande importância do NOVO ENEM. Atualmente, a sua




proposta tem como principais objetivos democratizar as oportunidades de acesso às vagas federais de Ensino Superior, possibilitar a mobilidade acadêmica e induzir a reestruturação dos currículos do Ensino Médio. Novamente, destacamos a questão 54 da página 16 da prova amarela do ENEM 2008 (figura 50), que é referente aos fractais. O interessante é que o próprio ENEM traz no contexto da questão a definição e informações sobre fractais. Acreditamos que essa atitude seja uma maneira de sanar a deficiência de conhecimento apresentada pelos alunos, pois o conteúdo referido acima não consta na matriz curricular, e, na maioria das vezes, não é sequer trabalhado em sala de aula.

Questão 54

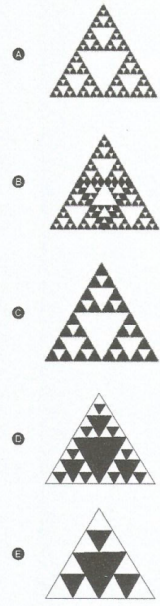
Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é



Questão 55

A contagem de bois

Em cada parada ou pouso, para jantar ou dormir, os bois são contados, tanto na chegada quanto na saída. Nesses lugares, há sempre um poteiro, ou seja, determinada área de pasto cercada de arame, ou mangueira, quando a cerca é de madeira. Na porteira de entrada do poteiro, rente à cerca, os peões formam a seringa ou funil, para afinar a fila, e então os bois vão entrando aos poucos na área cercada. Do lado interno, o condutor vai contando; em frente a ele, está o marcador, peão que marca as reses. O condutor conta 50 cabeças e grita: — Talha! O marcador, com o auxílio dos dedos das mãos, vai marcando as talhas. Cada dedo da mão direita corresponde a 1 talha, e da mão esquerda, a 5 talhas. Quando entra o último boi, o marcador diz: — Vinte e cinco talhas! E o condutor completa: — E dezoito cabeças. Isso significa 1.268 bois.

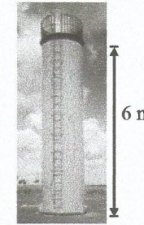
Boiada, comitivas e seus peões. In: O Estado de São Paulo, ano VI, ed. 63, 21/12/1952 (com adaptações).

Para contar os 1.268 bois de acordo com o processo descrito acima, o marcador utilizou

- A) 20 vezes todos os dedos da mão esquerda.
- B) 20 vezes todos os dedos da mão direita.
- C) todos os dedos da mão direita apenas uma vez.
- D) todos os dedos da mão esquerda apenas uma vez.
- E) 5 vezes todos os dedos da mão esquerda e 5 vezes todos os dedos da mão direita.

Questão 56

A figura ao lado mostra um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, com 6 m de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 litros de água.



Suponha que, um certo dia, após uma campanha de conscientização do uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito economia de 10% no consumo de água. Nessa situação,

- A) a quantidade de água economizada foi de $4,5 \text{ m}^3$.
- B) a altura do nível da água que sobrou no reservatório, no final do dia, foi igual a 60 cm.
- C) a quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo diário fosse de 450 litros.
- D) os moradores dessas casas economizariam mais de R\$ 200,00, se o custo de 1 m^3 de água para o consumidor fosse igual a R\$ 2,50.
- E) um reservatório de mesma forma e altura, mas com raio da base 10% menor que o representado, teria água suficiente para abastecer todas as casas.

ENEM 2008
PROVA 1 — AMARELA — PÁGINA 16
ENEM 2008

Figura 51 – Questão 54 do ENEM 2008.

Apresentamos anteriormente questões de vestibulares, Enem e livros didáticos atu-

ais que divulgam o conhecimento sobre fractais, afim de modernizar as aulas de Matemática, proporcionando uma maior aproximação da teoria com a realidade do aluno. Não podemos deixar de destacar a importância da relação dos fractais com as progressões geométricas, pois ambos trabalham na mesma linha de pensamento, podendo construir uma contextualização enriquecedora para a aprendizagem do aluno.

5.3 Fractais na sala de aula

A prática pedagógica utilizada atualmente no ensino da Matemática procura aproximar cada vez mais os fundamentos teóricos da realidade do aprendiz, correlacionando, para isso, conhecimentos empíricos a aspectos observados no mundo em que vivemos para construção do conhecimento.

Dentro desta perspectiva, trazer para a sala de aula atividades que, ao mesmo tempo, desenvolvam o raciocínio lógico-matemático e utilizem elementos do mundo concreto do aluno, satisfaz plenamente à expectativa que a metodologia aplicada impõe.

Reforçando a ideia de que alunos precisam experimentar a Matemática por caminhos diferentes do que aplicar algoritmos de papel e lápis a exercícios rotineiros, a Geometria Fractal vem permiti-los explorar os conceitos matemáticos trabalhando com as mãos, tanto na construção de modelos, quanto no desenho de quadros das consecutivas interações dos fractais.

Contudo, acreditamos que o professor do Ensino Médio encontrará muitas outras razões e justificativas num rápido crescente ao trabalhar a geometria da natureza ou fractais na sala de aula, pois, assim, temos a pretensão de captar o interesse do aluno para a inserção adequada dos temas voltados para o cotidiano.

A introdução dos fractais na sala de aula ocorreu por meio da proposta do professor de trabalhar objetos fora dos padrões da Geometria Euclidiana, surgindo, então, uma pesquisa aplicada com o tema fractal. O tema foi abordado inicialmente pelo professor por meio do desenvolvimento de uma oficina com alunos do Ensino Médio, denominada “Conhecendo a Geometria Fractal”, a qual contou com a aplicação de diferentes atividades, exposições de trabalhos, construção de diferentes fractais e cálculo de perímetro, área e volume, na intenção de permitir aos alunos a compreensão da existência e da aplicação da Geometria Fractal. Sabemos que essas atividades envolvendo fractais possibilitam ao aluno o desenvolvimento do raciocínio-lógico matemático, a integração entre conceitos matemáticos e elementos do cotidiano, desenvolvimento do senso estético, criatividade, dentre outras habilidades.

De acordo com Sallum (2005, p.1.):

"A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curi-

osidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométrica e estímulo ao uso de tabelas."

A seguir, apresentamos evidências do desenvolvimento da pesquisa realizada pelos alunos do 2º ano do Ensino Médio sobre "Conhecendo a Geometria fractal".



Figura 52 – *Introduzindo a ideia de fractal.*



Figura 53 – Apresentando o Conjunto de Cantor.

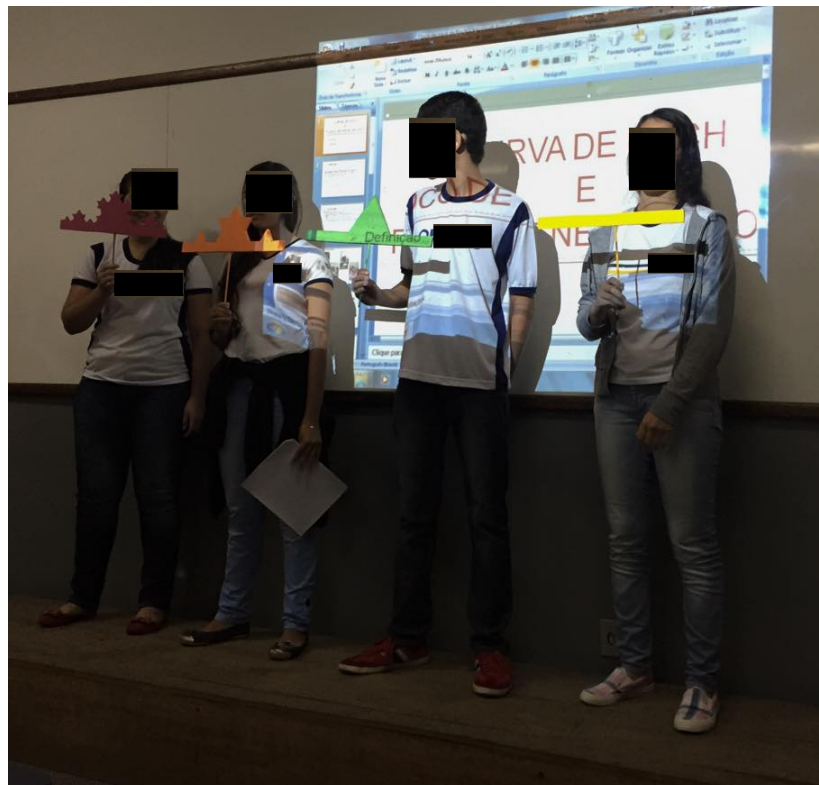


Figura 54 – Apresentando a Curva de Koch.

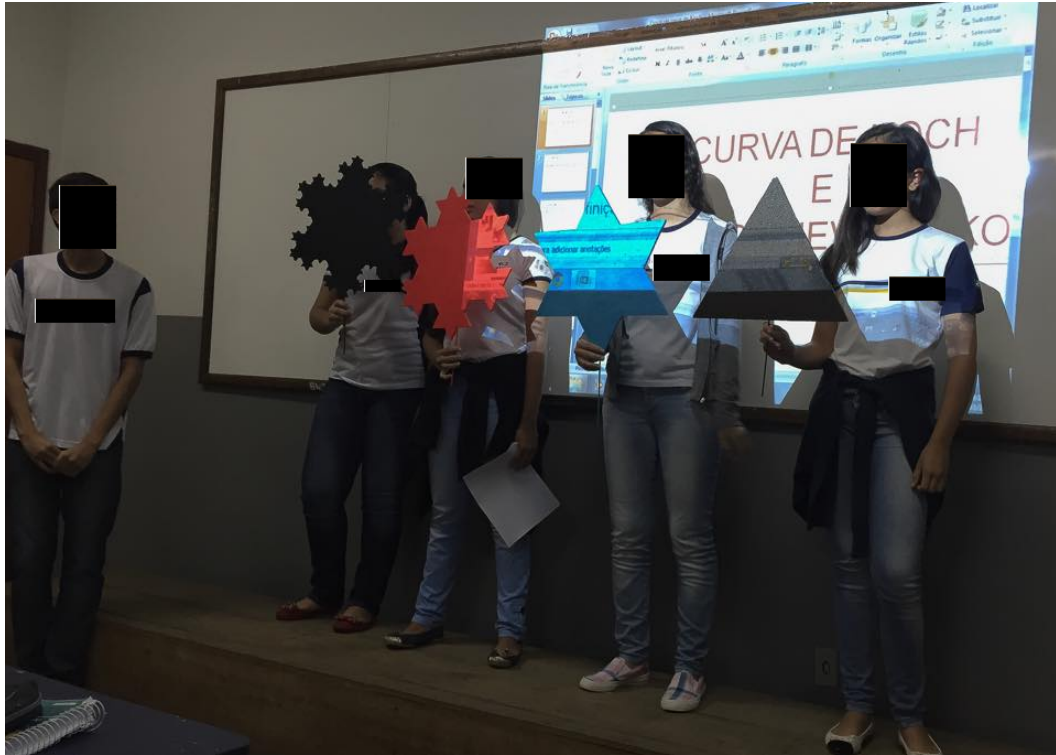


Figura 55 – Apresentando o Floco de neve de Koch.



Figura 56 – Triângulo e Tapete Sierpinski. Esponja de Menger.

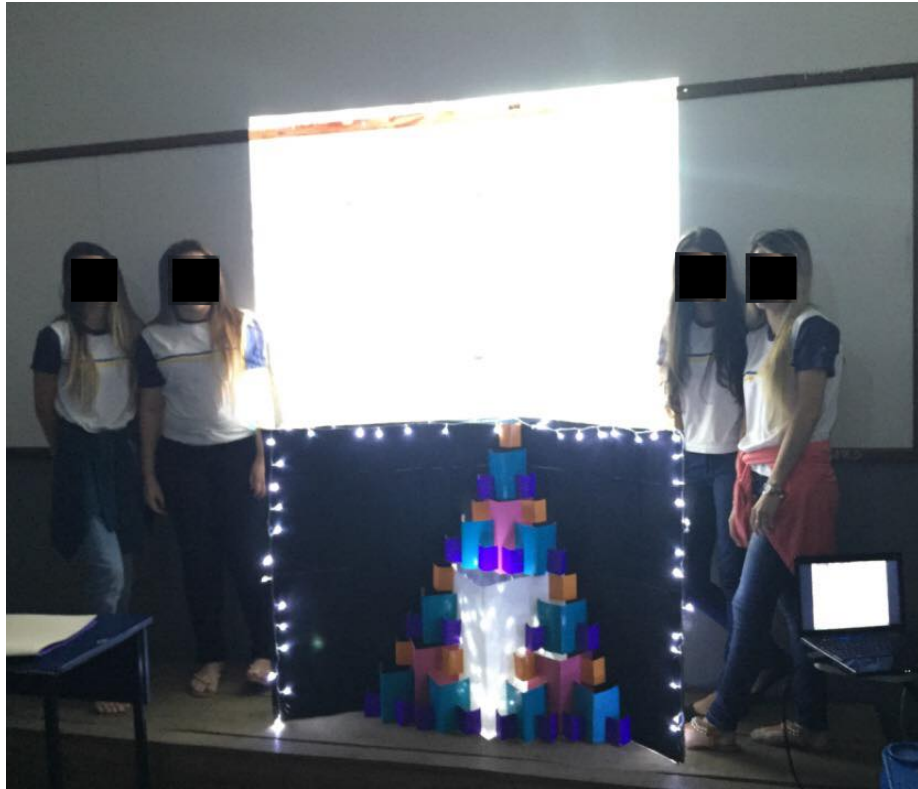


Figura 57 – *Cartão Triângulo Sierpinski.*

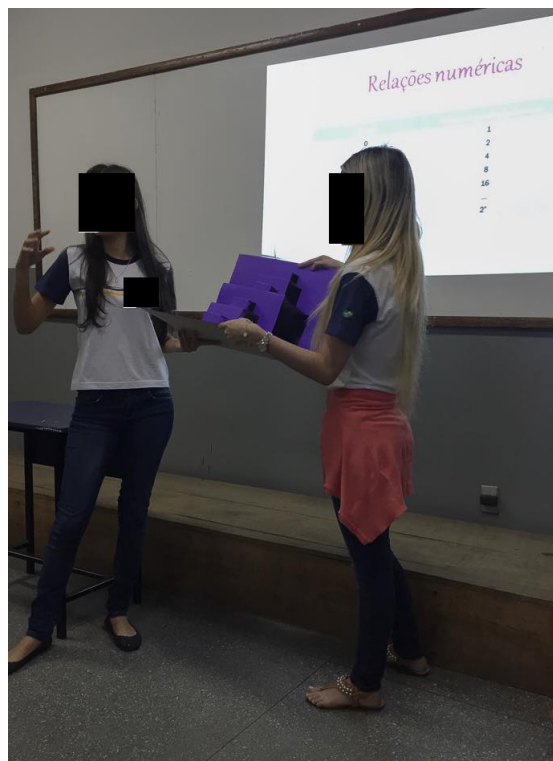


Figura 58 – *Cartão Degraus Centrais.*

Uma breve descrição dos procedimentos utilizados no resultado final da pesquisa “Conhecendo a Geometria Fractal”.

Antes de abordar o tema em sala de aula com os alunos do segundo ano do Ensino médio foi realizada a seguinte enquete: você conhece o termo fractal? Dos 64 alunos entrevistado apenas 1 disse que conhecia os restantes dos alunos não conhecia o termo fractal.

Após a pesquisa sobre geometria fractal realizada pelos alunos, onde enfocamos o conceito, a aplicação e características dos fractais, retornei com uma segunda enquete de forma simples e rápida. Por que é importante estudar fractais? Essas foram algumas das respostas citadas pelos alunos:

Aluno 1 - É importante para entender as formas geométricas existente na “vida real” e não apenas as formas engessadas em livros.

Aluno 2 - Porque em alguns caso, há problemas que não é possível de se resolver apenas com a geometria estudada em sala de aula, como por exemplo, o perímetro exato de um continente, quanto mais nos aproximamos mais falhas e irregularidades aparecerão.

Aluno 3 - Porque os fractais estão relacionados com as coisas do nosso dia a dia e não fica apenas no papel.

Aluno 4 - Porque é uma geometria mais perto da natureza. Os fractais nos leva a realidade, saímos do papel para algo concreto.

Aluno 5 - Porque compreendemos o que não é compreendido pela a geometria de Euclides, esta que estudamos na sala de aula, também é um lado muito interessante da matemática que nos faz pensar de forma diferente em relação a muitos conceitos já estudados.

Nota-se a importância das opiniões citadas pelos alunos acima, demonstrando a grande necessidade de trazer a geometria fractal para sala de aula, transformando- a numa versão mais significativa e motivadora para desenvolver habilidades e competências dos alunos em função de uma melhor aprendizagem.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria Fractal tem se tornado bastante difundida no meio científico, devido às suas características de representar a conexão de diversos temas da Matemática com outras áreas, desde as ciências naturais até as econômico-sociais e a tecnologia. Com isso percebe-se a necessidade de incluir a Geometria Fractal no contexto educacional permitindo desenvolver a capacidade intelectual e experimental dos alunos de forma a entender a importância da geometria de objetos não tradicionais e de compreender modelos matemáticos para melhor auxiliar os estudos dos fenômenos naturais.

É de grande importância ressaltar que, após ter feito a exploração da Geometria Fractal em contexto de sala de aula, concluímos que seu estudo proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da Matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume e, acima de tudo, mantém uma relação entre a teoria e a vivência do aluno.

Estudar fractais é ter outra visão da geometria convencional aplicada na sala de aula, é uma nova maneira de ver e organizar uma geometria não euclidiana, é buscar na Natureza formas que exprimem o significado da geometria para o aluno. Precisamos continuar trabalhando a Geometria Plana, Métrica e Posicional, mas não podemos nos esquecer da Geometria Fractal, uma geometria encontrada fora dos parâmetros regulares, aquela que enriquece e se apresenta de forma surpreendente no cotidiano do aluno.

Neste trabalho, buscamos desenvolver a integração do ensino, envolvendo os conceitos de Geometria Euclidiana e Geometria Fractal, tendo em vista a orientação dos documentos que indicam a inserção da Geometria Fractal, no Ensino Médio, a fim de suprir a lacuna deixada pela Geometria Euclidiana, e também preparar os alunos para obter melhor desempenho nos vestibulares e ENEM.

Para finalizar, apresentamos, para reflexão, a seguinte citação de Marjorie Sénechal, "Shape", in *On the Shoulder of Giants*, org. por L. A. Steen (Veloso, 1998)

"O Estudo da forma tem estado historicamente esmagado debaixo da geometria, a qual durante muitos anos foi dominada pelos postulados, axiomas e teoremas de Euclides. Tal como Shakespeare não é suficiente para a literatura e Copérnico não é suficiente para a astronomia, também Euclides não é suficiente para a geometria..."

Referências

- ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino universitário**. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal – para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal para sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio (PCNEM)**. Parte III: *Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMT, 2000.
- CAPRA, F. **A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos**. São Paulo: Pensamento-Cultri x, 1996.
- CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática**. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Curso de Pós-Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.
- CRUZ, D. G. **Conceitos de Geometria não-Euclidianas - Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio**. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br>. Acesso em: 20/11/2014.
- EVES, H. **História da Geometria**. Tradução de Higinio H. Domingues. Tópicos de história da Matemática para o uso em sala de aula. São Paulo: Atual, 1992.
- FALCONER, K. **Fractal Geometry: mathematical foundations and applications**.

New York: John Wiley and Sons, Chichester, 1990.

FEDER, J. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.

FERNANDES, A. **Educação e Matemática**, APM 75, 2003: 16- 20. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em 12/08/2014

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

KASNER, E. ; NEWMAN, J. **Matemática e imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968.

MANDELBROT, B. P. **Objetos Fractais**. 2^a ed. (Coleção Ciência Aberta), Gradiva, 1998.

MANDELBROT, B. P. **The Fractal Geometry of Nature**. New York: Freeman, 1977.

MURR, C. et al. **Fractais: propriedades e construção**. Disponível em: [gauss.mat.ufpr.br /karas/geralic2003.pdf](http://gauss.mat.ufpr.br/karas/geralic2003.pdf). Acesso em 02/10/2014.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática Pura - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>. Acesso em 12/08/2014

OLIVEIRA, L. H. A. **Matemática do Delírio**. SUPERINTERESSANTE. São Paulo: Abril, ano 8, n.10, out. 1994. 92 p.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. 2^a ed. São Paulo: Moderna, 2013.

ROBOLD, A. I. **Geometria não euclidiana**. In: EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria**. São Paulo: Atual, 1992.

SALLUM, É. M. **Fractais no ensino médio**. RPM 57: SBM, 2005.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio**. 8^a ed. São Paulo : Saraiva, 2013.

SILVA, J. S. **Guia para a utilização do Compendio de Matemática**. Lisboa: Min. Educação/OCDE, 1965-66.

SIQUEIRA, R. **Introdução aos fractais**. Disponível em: < <http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php> > Acesso em 06/08/2014.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, 2008. Disponível em: < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes2009/out2009/matematica.pdf> > Acesso em 07/08/2014

VELOSO, E. **Geometria: Temas Actuais** Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.(1998)

Prova de Matemática do **Vestibular UFPR, 2008**. Fonte: prova vestibular UFPR, 2008. Acesso em 15/12/2014.

Vestibular UNICAMP de 2012, 1^a fase da prova de conhecimentos gerais. Acesso em 12/12/2014.

<http://vestibular.unesp.br/pdf/2011M/003CECiencNatMat.pdf>. Acesso em 10/12/2014.

<http://www.mackenzie.br/fileadmin/DecanatoAcademico/Vestibular/20111o/1610provaacamtam.pdf> Acesso em 10/12/2014.

<http://www.cops.uel.br/vestibular/2012/provas/fase11.pdf>. Acesso em 14/12/2014.

<http://download.inep.gov.br/educacaobasica/enem/provas/2008/2008amarela.pdf>. Acesso em 10/12/2014.