

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

EMILENE FUNEZ ROZANSKI

**METODOLOGIA DE ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO
EXPONENCIAL À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**PATO BRANCO - PR
2015**

EMILENE FUNEZ ROZANSKI

**METODOLOGIA DE ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO
EXPONENCIAL À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS**

Projeto de Pesquisa apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Pato Branco, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Teodora Pinheiro Figueroa

**PATO BRANCO - PR
2015**

Rozanski, Emilene Funez.

R893m Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas / Emilene Funez Rozanski. – Pato Branco. UTFPR, 2015.

117 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Matemática. Pato Branco, 2015.

Bibliografia: f. 114-117.

Orientadora: Teodora Pinheiro Figueroa.

1. Teorias das situações didáticas. 2. Registro de representações semióticas. 3. Erros e obstáculos. 4. Função exponencial. I. Título.

CDD: 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Admeire da Silva Santos
Graduada em Biblioteconomia, UFMT.

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 012

“Metodologia de Ensino do Conceito de função exponencial à luz da Teoria das Situações Didáticas”.

por

Emilene Funez Rozanski

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná-UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 08h00 do dia 05 de agosto de 2015. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof^a. Teodora Pinheiro Figueroa, Dr^a.
(Presidente - UTFPR/Pato Branco)

Prof. Saddo Ag Almouloud, Dr.
(PUC-SP)

Prof^a. Janecler Aparecida Amorin
Colombo, Dr^a.
(UTFPR/Pato Branco)

Assinatura da Coordenação: _____

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

*Dedico este trabalho aos meus
dois amores Gabriel e Andrei.
E aos meus amados pais
Nelson e Soeli.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me dado a vida, e saúde para suportar a correria do dia-a-dia.

A todos que cuidaram do meu filho, enquanto eu estava estudando.

Ao meu filho Gabriel, que apesar de não lembrar do sofrimento, teve que ir comigo desde seu primeiro mês de vida até seu sexto mês para poder ser alimentado. E agradeço a ele também pelo amor incondicional de filho que sempre me amou e demonstrou me amar apesar de minha ausência necessária.

Ao meu esposo que sempre me fez companhia durante os dias de aula, para que eu não retornasse à noite sozinha.

Aos meus pais Nelson Funez e Soeli Volff Funez que sempre me incentivaram a estudar e cuidaram de meu filho durante o tempo em que precisei.

Ao meu irmão Edenilson pelas dicas e auxílios matemáticos.

À Professora Doutora Teodora Pinheiro Figueroa, pela orientação, ajuda, apoio e paciência manifestados durante o desenvolvimento deste trabalho.

À banca examinadora, Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e Prof^a. Dr^a. Janecler Aparecida Amorin, por suas indispensáveis contribuições.

A todos os professores que tive desde o ensino básico, fundamental e médio, até a Graduação e Mestrado, pois se cheguei até aqui foi por que cada um contribuiu um pouquinho.

À Direção do Colégio Estadual José de Anchieta, por permitir a realização da pesquisa.

Aos alunos do 1º ano do Colégio Estadual José de Anchieta que colaboraram para o desenvolvimento da pesquisa.

À UTFPR Câmpus Pato Branco, ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT e a CAPES pelo auxílio financeiro.

A todos os meus colegas de Mestrado, que dividiram comigo alegrias, sofrimentos e dificuldades em sala de aula. Desejo a todos muito sucesso e quero que saibam que foram indispensáveis durante esta caminhada.

E por último, mas não menos importante, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes". (*Isaac Newton*).

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de metodologia do objeto matemático Função Exponencial, que possibilite o desenvolvimento de habilidades interpretativas e criativas de potencial significado para os alunos, a partir de uma sequência didática estruturada à luz da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e, dos Registros de Representações Semiótica de Duval, proporcionando interações entre o aluno, o professor e o meio em um ambiente de aprendizagem cooperativo, onde os alunos se sintam livres para expressar as suas ideias e para sugerir as suas próprias abordagens. A metodologia proposta foi desenvolvida de acordo com o conhecimento a priori do aluno, valorizando as suas diferentes formas de registros, os quais são de extrema importância durante os processos de ensino e de aprendizagem. A proposta foi aplicada a alunos do primeiro ano do ensino médio do Colégio Estadual José de Anchieta Ensino Fundamental e Médio, localizado na Cidade de Dois Vizinhos – Paraná. Para o desenvolvimento da pesquisa utilizou-se a ferramenta metodológica Engenharia Didática de Artigue, uma metodologia originada especificamente para a pesquisa com situações didáticas. A princípio o objetivo proposto foi atingido, o qual consistia de trabalhar a parte conceitual, do significado da Função Exponencial, da relação de dependência e sua principal característica, ou seja, que a parte variável se encontra no expoente. E, sem imposição, mas a partir de situações didáticas apropriadas, segundo a teoria das situações didáticas, os alunos foram capazes de perceber essa característica, de resolverem problemas que envolviam a função exponencial e, além disso, de inventarem problemas (de acordo com o seu universo) modelados por este tipo de função. Acredita-se que a metodologia à luz da teoria das situações didáticas, análises dos registros dos alunos, observações sobre os erros e obstáculos e reflexões sobre aspectos do contrato didático são de fundamental importância para a prática docente e, determinantes durante o processo de ensino aprendizagem.

Palavras-chave: Teoria das situações didáticas. Registros de representação semiótica. Erros e Obstáculos. Contrato Didático. Função exponencial.

ABSTRACT

This essay presents a proposal on methodology over the mathematical object Exponential Function which enables the development of interpretative and creative skills with potential meaning to the students starting from a didactic sequence structured on the light of The Theory of Didactic Situations from Guy Brousseau and, from the Records of Semiotic Representation of Duval, providing interactions among the students, the teacher and the environment of cooperative learning where the students feel free to express their own ideas as well as to suggest their own approaches. The methodology presented has been developed according to the students first knowledge, valuing their different ways of registering, which have such an important role during the teaching and learning processes. The proposal has been applied to the students from the first year of high school of Colégio Estadual José de Anchieta Ensino Fundamental e Médio, located in a town called Dois Vizinhos – Paraná. In order to the development of the research the methodological tool Didactic Engineering Artigue which consists in a methodology developed only to the research with didactic situations. The main goal has been reached at first, which was to work on the conceptual part of the Exponential Function, the relation of dependence and its main characteristic so that the variable part is in the exponent. Moreover with no imposition but starting from suitable didactic situations, the students were able to realize that they could solve the problems which involve the exponential function and furthermore create new problems (according to their universe) modeled by this kind of function. Its believed that the methodology based on the theory of didactic situations, analysis of students registers, observation on mistakes and obstacles as well as reflections over the aspects of the didactic contract are of fundamental importance to the teaching practice and determinant during the teaching-learning process.

Key words: Theory of Didactic Situations. Registers of Semiotic Representation. Mistakes and obstacles. Didactic Contract. Exponential Function

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: SITUAÇÃO DIDÁTICA COMO FERRAMENTA	42
FIGURA 2: ESTRUTURA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	60
FIGURA 3: SD I – MO I - ATIVIDADE 1	61
FIGURA 4: ESTRUTURA DE ANÁLISE DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I - MOMENTO I	61
FIGURA 5: INSTITUCIONALIZAÇÃO.....	68
FIGURA 6: ATIVIDADE 2	72
FIGURA 7: ESTRUTURA DE ANÁLISE DA SD I – MO II	72
FIGURA 8: ATIVIDADE 3.....	75
FIGURA 9: ESTRUTURA DE ANÁLISE DA SD I - MO III	76
FIGURA 10: ATIVIDADE 4.....	82
FIGURA 11: ATIVIDADE 5.....	87
FIGURA 12: ATIVIDADE 6.....	92
FIGURA 13: ATIVIDADE 7 – GRUPO 1	96
FIGURA 14: ATIVIDADE 7 – GRUPO 2	97
FIGURA 15: ATIVIDADE 7 – GRUPO 3	97
FIGURA 16: ATIVIDADE 8.....	101
FIGURA 17: ATIVIDADE 9.....	106

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: ESTRUTURAÇÃO DO MEIO DE MARGOLINAS (1998, P.16)	46
QUADRO 2: TIPOS DE REGISTROS SEMIÓTICOS	49
QUADRO 3: TRANSFORMAÇÃO DE UMA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	50
QUADRO 4: ENCONTROS E TEMPO GASTO PARA A APLICAÇÃO DO PROJETO	60
QUADRO 5: ESTRUTURA DO MILIEU – SITUAÇÃO DIDÁTICA I – MOMENTO I.....	62
QUADRO 6: ESTRUTURA DO MILIEU – SITUAÇÃO DIDÁTICA I – MOMENTO II.....	73
QUADRO 7: DIÁLOGO ENTRE OS ALUNOS (P _i : PERGUNTAS DA PROFESSORA, R _i : RESPOSTAS E/OU PERGUNTAS DOS ALUNOS, D _i : DEVOLUÇÕES DA PROFESSORA).....	74
QUADRO 8: ESTRUTURA DO MILIEU – SD I – MO III.....	76
QUADRO 9: ESTRUTURA DO MILIEU – SD I – MO IV	83
QUADRO 10: ESTRUTURA DO MILIEU – SD I – MO V	88
QUADRO 11: ESTRUTURA DO MILIEU – SD II	92
QUADRO 12: ESTRUTURA DO MILIEU – SD III.....	98
QUADRO 13: ESTRUTURA DO MILIEU – SD IV	102
QUADRO 14: ESTRUTURA DO MILIEU – SD V	107

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS.....	28
TABELA 2: RESULTADO DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS (ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA)	33
TABELA 3: RESULTADO DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS (ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA).....	35
TABELA 4: RESULTADOS (ATIVIDADE 1)	63
TABELA 5: RESULTADOS (VALIDAÇÃO - ATIVIDADE 1).....	66
TABELA 6: RESULTADOS (ATIVIDADE 2)	73
TABELA 7: RESULTADOS (ATIVIDADE 3)	77
TABELA 8: RESULTADOS (VALIDAÇÃO - ATIVIDADE 3).....	78
TABELA 9: DESENVOLVIMENTO NO QUADRO DA SD I - MO III	79
TABELA 10: RESULTADOS (ATIVIDADE 4, LETRA C)	84
TABELA 11: RESULTADOS (ATIVIDADE 5)	88
TABELA 12: RESULTADOS (ATIVIDADE 6)	93
TABELA 13: RESULTADOS (ATIVIDADE 8, LETRA A).....	102
TABELA 14: RESULTADOS (ATIVIDADE 8, LETRA B).....	104
TABELA 15: RESULTADOS (ATIVIDADE 9)	108

LISTA DE PROTOCOLOS

PROTOCOLO 1: ESCOLA LEONARDO DA VINCI	38
PROTOCOLO 2: COLÉGIO ESTADUAL MONTEIRO LOBATO	39
PROTOCOLO 3: COLÉGIO ESTADUAL DE DOIS VIZINHOS	39
PROTOCOLO 4: COLÉGIO ESTADUAL JOSÉ DE ANCHIETA	39
PROTOCOLO 5: COLÉGIO ESTADUAL DOIS VIZINHOS	40
PROTOCOLO 6: COLÉGIO ESTADUAL DOIS VIZINHOS	40
PROTOCOLO 7: RESPOSTA SD I – MO I	63
PROTOCOLO 8: RESPOSTA SD I – MO I	63
PROTOCOLO 9: RESPOSTA SD I – MO I	64
PROTOCOLO 10: RESPOSTA SD I – MO I	64
PROTOCOLO 11: RESPOSTA SD I – MO I	64
PROTOCOLO 12: RESPOSTA SD I – MO I	64
PROTOCOLO 13: RESPOSTA SD I – MO I	65
PROTOCOLO 14: RESPOSTA SD I – MO I	65
PROTOCOLO 15: RESPOSTA SD I – MO I	65
PROTOCOLO 16: SD I - MO I – REGISTRO GRÁFICO - VALIDAÇÃO	67
PROTOCOLO 17: SD I - MO I – REGISTRO SIMBÓLICO - VALIDAÇÃO	67
PROTOCOLO 18: SD I - MO I – REGISTRO SIMBÓLICO - VALIDAÇÃO	67
PROTOCOLO 19: SD I - MO I – REGISTRO DE DESENHO - VALIDAÇÃO	67
PROTOCOLO 20: RESPOSTA SD I – MO II	74
PROTOCOLO 21: RESPOSTA SD I – MO II	74
PROTOCOLO 22: RESPOSTA SD I – MO II	74
PROTOCOLO 23: RESPOSTA SD I – MO III	77
PROTOCOLO 24: RESPOSTA SD I – MO III	77
PROTOCOLO 25: RESPOSTA SD I – MO III	77
PROTOCOLO 26: RESPOSTA SD I – MO III	78
PROTOCOLO 27: RESPOSTA SD I – MO III	78
PROTOCOLO 28: RESPOSTA SD I – MO III	78
PROTOCOLO 29: RESPOSTA SD I – MO III (VALIDAÇÃO)	78
PROTOCOLO 30: RESPOSTA SD I – MO III (VALIDAÇÃO)	78
PROTOCOLO 31: RESPOSTA SD I – MO III (VALIDAÇÃO)	79
PROTOCOLO 32: RESPOSTA SD I – MO III (VALIDAÇÃO)	79
PROTOCOLO 33: RESPOSTA SD I – MO IV	84
PROTOCOLO 34: RESPOSTA SD I – MO IV	85
PROTOCOLO 35: RESPOSTA SD I – MO IV	85
PROTOCOLO 36: RESPOSTA SD I – MO V	88
PROTOCOLO 37: RESPOSTA SD I – MO V	89
PROTOCOLO 38: RESPOSTA SD I – MO V	89
PROTOCOLO 39: RESPOSTA SD I – MO V	89
PROTOCOLO 40: RESPOSTA SD I – MO V	89
PROTOCOLO 41: RESPOSTA SD I – MO V	89
PROTOCOLO 42: RESPOSTA SD I – MO V	89
PROTOCOLO 43: RESPOSTA SD I – MO V	89
PROTOCOLO 44: RESPOSTA SD II	93
PROTOCOLO 45: RESPOSTA SD II	93
PROTOCOLO 46: RESPOSTA SD II	94
PROTOCOLO 47: RESPOSTA SD II	94
PROTOCOLO 48: RESPOSTA SD III - LETRA (A)	99
PROTOCOLO 49: RESPOSTA SD III - LETRA (B)	99
PROTOCOLO 50: RESPOSTA SD III - LETRA (A)	100
PROTOCOLO 51: RESPOSTA SD III - LETRA (B)	100
PROTOCOLO 52: RESPOSTA SD III - LETRA (A)	100
PROTOCOLO 53: RESPOSTA SD III - LETRA (B)	100
PROTOCOLO 54: RESPOSTA SD IV - LETRA (A)	103
PROTOCOLO 55: RESPOSTA SD IV - LETRA (A)	103

PROCOLO 56: RESPOSTA SD IV - LETRA (A)	103
PROCOLO 57: RESPOSTA SD IV - LETRA (A)	103
PROCOLO 58: RESPOSTA SD IV - LETRA (B)	104
PROCOLO 59: RESPOSTA SD IV - LETRA (B)	104
PROCOLO 60: RESPOSTA SD IV - LETRA (B)	105
PROCOLO 61: RESPOSTA SD V.....	108
PROCOLO 62: RESPOSTA SD V.....	108
PROCOLO 63: RESPOSTA SD V.....	109
PROCOLO 64: RESPOSTA SD V.....	109

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
CAPÍTULO I	18
1 ANÁLISES PRÉVIAS	18
1.1 UMA BREVE CARACTERIZAÇÃO DO ENSINO PÚBLICO NO BRASIL	18
1.2 UM BREVE ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO	20
1.3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES	25
1.4 UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM DO ENSINO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NOS LIVROS DIDÁTICOS	26
1.4.1 Teoria Antropológica do Didático	27
1.4.2 Livros selecionados para análise	28
1.4.3 Análise praxeológica dos livros selecionados	29
1.4.4 Descrição e análise praxeológica didática	29
1.4.5 Descrição e análise praxeológica matemática	33
CAPÍTULO II	36
2 PROBLEMÁTICA	36
2.1 JUSTIFICATIVA	36
2.2 RELATO DE ALGUNS PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DE ENSINO DA CIDADE DE DOIS VIZINHOS (PR)	38
CAPÍTULO III	41
3 REFERENCIAL TEÓRICO	41
3.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DAS SITUAÇÕES	41
3.1.1 A Modelagem das situações didáticas	43
3.1.2 Estruturação do Milieu	46
3.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO	48
3.3 ERROS E OBSTÁCULOS	52
3.4 CONTRATO DIDÁTICO	53
CAPÍTULO IV	55
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	55
4.1 ENGENHARIA DIDÁTICA	55
4.2 ETAPAS DA PESQUISA	57
4.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA	58
CAPÍTULO V	59
5 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD)	59
5.1 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) – MOMENTO I (MO I) (ENCONTRO 1)	60
5.1.1 Aplicação da Situação Didática I (SD I) – Momento I (MO I) (Encontro 1) - Experimentação ...	62
5.1.2 Análise a Posteriori da Situação Didática I (SD I) – Momento I (MO I) (Encontro 1)	68
5.2 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA (SD I) – MOMENTO II (MO II) (ENCONTRO 1)	72
5.2.1 Aplicação da Situação Didática (SD I) – Momento II (MO II) (Encontro 1)	73
5.2.2 Análise a Posteriori da Situação Didática (SD I) – Momento II (MO II) (Encontro 1)	74
5.3 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) - MOMENTO III (MO III) (ENCONTRO 1)	75
5.3.1 Aplicação da Situação Didática (SD I) – Momento III (MO III) (Encontro 1)	77
5.3.2 Análise a Posteriori da Situação Didática (SD I) – Momento III (MO III) (Encontro 1)	80
5.4 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) - MOMENTO IV (MO IV) (ENCONTRO 2)	81
5.4.1 Aplicação da Situação Didática (SD I) – Momento IV (MO IV) (Encontro 2)	83
5.4.2 Análise a Posteriori da Situação Didática I (SD I) - Momento IV (MO IV) (Encontro 2)	85
5.5 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) - MOMENTO V (MO V) (ENCONTRO 3)	87
5.5.1 Aplicação da Situação Didática I (SD I) - Momento V (MO V) (Encontro 3)	88
5.5.2 Análise a Posteriori da Situação Didática I (SD I) - Momento V (MO V) (Encontro 3)	90
5.6 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA II (SD II) (ENCONTRO 4)	91
5.6.1 Aplicação da Situação Didática II (SD II) (Encontro 4)	92
5.6.2 Análise a Posteriori da Situação Didática II (SD II) (Encontro 4)	95

5.7 ANÁLISE A PRIORII DA SITUAÇÃO DIDÁTICA III (SD III) (ENCONTRO 5)	96
5.7.1 Aplicação da Situação Didática III (SD III) (Encontro 5)	98
5.7.2 Análise a Posteriori da Situação Didática III (SD III) (Encontro 5).....	101
5.8 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA IV (SD IV) (ENCONTRO 6)	101
5.8.1 Aplicação da Situação Didática IV (SD IV) (Encontro 6)	102
5.8.2 Análise a Posteriori da Situação Didática IV (SD IV) (Encontro 6).....	105
5.9 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA V (SD V) (ENCONTRO 7)	106
5.9.1 Aplicação da Situação Didática V (SD V) (Encontro 7)	107
5.9.2 Análise a Posteriori da Situação Didática V (SD V) (Encontro 7).....	109
CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	113

INTRODUÇÃO

É notável o baixo desempenho dos alunos em testes como o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes), no qual o Brasil ficou no 58º lugar em 2012, em testes de raciocínio rápido e de problemas ligados ao dia-a-dia.

Esses resultados levam a reflexões sobre o ensino de matemática. E, a partir dessas reflexões surgem uma série de questionamentos: Qual o motivo desse baixo desempenho? Qual o motivo dessas dificuldades? Diante desta situação e, após discussões concluímos que na maioria das vezes as dificuldades estão relacionadas ao não entendimento do conceito ou mais precisamente a falta de significado dos mesmos para os alunos.

A palavra matemática deriva da palavra grega "matemathike". "máthema" = compreensão, explicação, ciência, conhecimento, aprendizagem; "thike" = arte. Portanto, a matemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender os números e as formas geométricas. E, a partir do século XIX a matemática passou a ser vista como a ciência dos padrões (DEVLIN, 2002). Mas, será que os alunos percebem real significado? Notamos que para isso é preciso dar autonomia ao aluno durante o processo de construção do conhecimento e, propor situações didáticas que levem o aluno a refletir sobre os significados, os conceitos, os quais são mais importantes do que cálculos efetuados sem significados.

A fim de colocar em prática esta abordagem, este trabalho apresenta uma proposta de metodologia do objeto matemático Função Exponencial, mais autônoma, que possibilite o desenvolvimento de habilidades interpretativas e criativas de potencial significado para os alunos a partir de uma sequência didática estruturada à luz da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986 apud ALMOULOU, 2007, p.31) e dos Registros de Representações Semiótica de Duval (1999 apud ALMOULOU, 2007, p.71), proporcionando interações entre o aluno, o professor e o meio em um ambiente de aprendizagem cooperativo, onde os alunos se sintam livres para expressar as suas ideias e para sugerir as suas próprias abordagens.

Esta proposta foi aplicada a alunos do primeiro ano do Ensino Médio do Colégio Estadual José de Anchieta Ensino Fundamental e Médio, localizado na Cidade de Dois Vizinhos – Paraná.

O trabalho foi dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo traz uma breve caracterização sobre o ensino público no Brasil, um breve estudo histórico e epistemológico sobre o conceito de função exponencial, algumas considerações sobre o ensino de matemática e a aprendizagem de funções e, uma análise de como a função exponencial é abordada nos livros didáticos do ensino médio segundo a organização praxeológica de Chevallard (1992, apud ALMOULOU, 2007).

No segundo capítulo, apresentamos nossas justificativas e relato de alguns professores, que já lecionaram no 1º ano do ensino médio da rede pública de ensino da cidade de Dois Vizinhos – Paraná, sobre o entendimento e as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conceito formal da função exponencial.

No terceiro capítulo apresentamos elementos da Teoria das Situações de Guy Brousseau que possibilitaram a construção da sequência didática, elementos da Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval, mostrando a importância de se utilizar vários registros de representação para um mesmo objeto matemático, noções sobre erros e obstáculos e, aspectos do contrato didático.

No quarto capítulo apresentamos os procedimentos metodológicos, o qual foi desenvolvido com base nos princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue, as etapas e os participantes da pesquisa.

No quinto capítulo mostramos a análise de nossa sequência didática. Neste capítulo em cada atividade proposta, fizemos a análise a priori da sequência didática à luz da teoria das situações. Em cada atividade proposta também fizemos a análise a posteriori, onde relatamos a experimentação da sequência didática e as respostas dos alunos em cada uma das atividades.

CAPÍTULO I

1 ANÁLISES PRÉVIAS

Este capítulo é dividido em quatro seções. A seção 1.1 tem por objetivo apresentar uma breve caracterização do ensino público no Brasil. A seção 1.2 apresenta um estudo histórico e epistemológico do conceito de função exponencial. A seção 1.3 traz algumas considerações sobre o ensino de matemática e a aprendizagem de funções e a seção 1.4 faz uma análise de como o conceito da função exponencial é abordado nos livros didáticos do ensino médio.

1.1 UMA BREVE CARACTERIZAÇÃO DO ENSINO PÚBLICO NO BRASIL

A educação é necessária para o desenvolvimento humano e é direito de todos garantida pela constituição da república de 1988. De acordo com a Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, a qual estabelece as Diretrizes e Bases da educação nacional, o Artigo 2º descreve que:

Art. 2º A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (LDB, 2005, p).

Conforme artigo 2º a educação é dever da família e do estado. A falta da educação familiar reflete diretamente na educação escolar.

Um dos fatores a considerar, é que a maioria dos alunos matriculados em escolas públicas enfrenta dificuldades em casa, o que reflete na falta de limites e falta de interesse pela aprendizagem.

E quando falta esta educação em casa, o professor tem uma tarefa a mais na escola, além de ensinar o conteúdo, deve tentar educar o aluno para o exercício da cidadania, pois muitas vezes o professor é a única fonte de conhecimento para alguns alunos. E uma das consequências disso, é o não cumprimento do conteúdo

programático, onde muitas vezes a carga horária que já não é suficiente, tem uma parte de seu tempo destinada para a educação que deveria ser dada no ambiente familiar, o que afeta diretamente diversos indicadores da educação pública no Brasil tais como, IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica).

Outro problema enfrentado é a falta de estímulo dos alunos em relação ao ambiente escolar, principalmente em relação aos conteúdos desenvolvidos na escola, sem sentido ou utilidade prática. Tem-se a impressão que a maior motivação dos alunos diante da escola está no relacionamento entre os colegas.

Salatino (2014) descreve mudanças em nossa sociedade capitalista que produzem uma cultura individualista, imediatista, consumista. Nessa sociedade em que se buscam a qualquer preço os prazeres imediatos, deseja-se também aprender apenas aquilo que será “usado”.

Aluno L: Cara, (se corrigindo) professor, é muita conta pra pouca cabeça”, responde o aluno. Professor: “L. você tem que por todo o seu caderno em ordem antes de falar que é complicado”. O aluno L. retruca: “Nóis vai usar no futuro?”. “Vai depender do Sr.”, responde o professor. Aluno G: “Vai depender do L.(ironicamente).... hoje em dia ninguém mais quer trabalhar. Roubar tá mais fácil, a escola não dá mais futuro pra ninguém”. (SALATINO, 2014, p. 43)

Neste diálogo, percebe-se que o aluno busca sair da condição atual “de dificuldades”, mas não vê futuro na escola.

Salatino (2014) explica que a maioria dos alunos observados não se socializa nem contra, nem pela escola, mas paralelamente à escola, tendo uma postura apática com relação ao conhecimento, apenas seguindo os rituais que lhes são impostos.

A escola termina por se tornar secundária em face de outros agentes de socialização, especialmente a mídia de massas, ou daqueles que marcam regulações de conduta (como a moda), a partir dos quais os jovens passam a buscar exemplos e grupos de referência para imitar. (SALATINO, 2014, p. 43)

Outro fator que pode desestimular os alunos é com relação às dificuldades em conteúdos, os quais não são esclarecidos e, ao passar para os anos seguintes carregam estas dificuldades, que muitas vezes não são supridas por professores de sequência. E como consequência, este aluno, que está de certa forma atrasado com o conteúdo, acaba por não compreender os conteúdos de sequência, porque falta a base para essa aprendizagem, o que ocasiona uma bola de neve de dificuldades, que por sua vez causam desinteresse nesses alunos.

Este é o cenário atual da escola pública que vivenciamos no dia-a-dia. É importante comentar sobre o que ocorre de fato, a fim de deixar claro que não existe um grupo apenas responsável pela situação atual do ensino.

Enfim, diante de tantos fatores que influenciam a aprendizagem do aluno, o mais preocupante é a falta de interesse dos mesmos, que reflete em seu comportamento, como por exemplo, a indisciplina, o qual como comentado acarreta sérios problemas ao professor em sala de aula. Mas, qual seria a causa principal desta falta de interesse?

Diante desta situação fizemos uma pausa para uma reflexão: para os professores, os alunos são indisciplinados, desatentos e, para os alunos, existem queixas dos professores em relação à metodologia, à falta de significados dos conteúdos e até mesmo diante da evolução das tecnologias de massa. De certa forma, uma grande parte de professores demonstra que perderam a confiança nesses alunos e, segundo a pesquisa que fizemos com os professores da cidade de Dois Vizinhos (PR), os professores apenas criticam a postura dos alunos, seja em relação a falta de concentração ou as dificuldades que os mesmos apresentam. Será que o tipo de metodologia adotada pela maioria dos professores está levando em consideração a valorização do conhecimento que esses alunos já apresentam?

Com tantos problemas que esses alunos podem se deparar em seu dia-a-dia, problemas familiares inclusive, acreditamos que é preciso valorizar o conhecimento desses alunos a partir de uma nova abordagem metodológica de ensino, à luz da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, a fim de despertar o prazer de aprender e raciocinar e, assim contribuir para a formação de um aluno crítico e reflexivo.

1.2 UM BREVE ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO

O desenvolvimento da matemática ocorreu da necessidade de subsistência e sobrevivência do homem de acordo com o seu processo de evolução histórico cultural.

Atualmente muitos povos e culturas continuam fazendo matemática em seu cotidiano, sem perceber que se apropriam desse conhecimento estabelecendo relações e analogias conforme a sua necessidade e de acordo com a sua linguagem.

É importante deixar claro que a história da matemática ainda continua sendo desenvolvida pelo homem e para o homem. Tudo que existe de matemática hoje, destacando o conceito de função exponencial, tema do nosso trabalho, é resultado da curiosidade, percepção e questionamento do ser humano e não foi desenvolvido em um momento único, mas dentro de um contexto sócio-cultural e a partir das influências do mesmo. Para melhor compreensão segue um breve resumo dos períodos da história da matemática e as supostas primeiras noções de função e o contexto histórico mundial.

Segundo Zuffi (2001), não parece haver um consenso entre os autores para a origem do conceito de função. Alguns consideram que os Babilônios já possuíam um “instinto de funcionalidade”, cerca de 2000 a.C., observado através de seus cálculos de tabelas sexagesimais de quadrados e raízes. Também os gregos, tinham tabelas, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, onde percebiam a ideia de dependência funcional. Há indícios também, na França, de ideias primárias de função anteriores a 1361, quando Nicole Oresme descreveu graficamente um corpo movendo-se com aceleração constante.

Para Youschkevitch (1976, apud ZUFFI, 2001) há três fases principais do desenvolvimento da noção de função:

1- A Antiguidade, na qual o estudo de casos de dependência entre duas quantidades ainda não havia isolado as noções de variável e de função.

2- A Idade Média, onde as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam, em cada caso concreto, as descrições verbais ou gráficas;

3- O período Moderno, a partir do século XVII, onde começam a prevalecer as expressões analíticas de função. Este método analítico de introdução à função revoluciona a matemática devido a sua extraordinária eficácia, e a matemática toma um lugar de destaque em todas as ciências exatas.

“Estes estágios refletem, na realidade o caminho percorrido pelo homem através da história rumo à generalização e à formalização do conceito de funções. O processo de abstração demonstra uma real e profunda compreensão do conceito ao mesmo tempo em que é fator de construção desta compreensão.” (MOURA; MORETTI, 2003, p.69).

Galileu Galilei (1564-1642), de acordo com Zuffi (2001), deu sua contribuição quando introduziu o tratamento quantitativo nas suas representações gráficas. Descartes (1696-1650) introduziu a relação de dependência entre quantidades

variáveis, com o auxílio de equações em x e y , possibilitando o cálculo de valores de uma delas, a partir dos valores de outra. Newton utilizou-se do termo "fluentes", para descrever suas ideias de funções, que estavam ligadas às taxas de mudanças.

Segundo Eves (2011, p. 660-661) a palavra função parece ter sido utilizada pela primeira vez por Leibniz em 1694 para expressar qualquer quantidade associada a uma curva. Em 1718 Johann Bernoulli chegou a considerar função como uma expressão qualquer formada por uma variável e algumas constantes. Euler considerou função como uma fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes. A definição de Euler permaneceu inalterada até Fourier considerar em suas pesquisas as séries trigonométricas que envolveu uma forma mais geral entre as variáveis estudadas anteriormente.

Na tentativa de dar uma definição para função ampla e suficiente para englobar esta relação, Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou a seguinte formulação:

...Uma *variável* é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma *função* (unívoca) de x . A variável x , à qual se atribuem valores à vontade, é chamada *variável independente* e a variável y , cujos valores dependem dos valores de x , é chamada *variável dependente*. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição* da função e os valores assumidos por y constituem o *campo de valores* da função. (EVES, 2011, p. 661, grifos do autor)

Esta se trata de uma definição muito ampla que acentua a ideia de relação entre dois conjuntos de números.

Na teoria dos conjuntos temos a seguinte definição para função:

Uma *função* f é, por definição, um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, pares esses sujeitos à condição seguinte: se $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $a_1 = a_2$, então $b_1 = b_2$. O conjunto A dos primeiros elementos dos pares ordenados chama-se *domínio* da função e o conjunto B de todos os segundos elementos dos pares ordenados se diz *imagem* da função. Assim, uma função é simplesmente um tipo particular de subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Uma função f se diz *injetora* se, de $(a_1, b_1) \in f$, $(a_2, b_2) \in f$ e $b_1 = b_2$, decorre $a_1 = a_2$. Se f é uma função e $(a, b) \in f$, escreve-se $b = f(a)$. (EVES, 2011, p. 661, grifos do autor)

Em relação à função exponencial, é observável que seu principal desenvolvimento ocorreu durante a Idade Moderna. Segundo Maor (2008, p.41), "Central em qualquer consideração sobre o dinheiro, encontra-se o conceito de juros, ou o valor pago sobre um empréstimo. A prática de cobrar uma taxa sobre o dinheiro emprestado recua até o início da história escrita". Grande parte da literatura

matemática traz questões de juros desde épocas mais antigas. Embora os mesopotâmicos não conhecessem os conceitos de cálculo de logaritmos, já efetuavam operações para determinar, por exemplo, quanto tempo levaria para um determinado valor de dinheiro dobrar a uma determinada taxa de juros compostos anualmente. Eles não sabiam calcular o logaritmo de um número, exemplo $1,2^x = 2$, mas sabiam fazer aproximações, eles observavam que $1,2^3 = 1,728$, e $1,2^4 = 2,0736$, logo x deveria ser um número entre 3 e 4, e utilizando interpolação linear, encontravam um valor aproximado de x , o que para eles também não era uma tarefa simples, pois não tinham as técnicas de álgebra linear que temos hoje.

Segundo Maor (2008):

“As grandes invenções geralmente se encaixam em duas categorias: algumas são o produto da mente criativa de uma única pessoa, caindo sobre o mundo subitamente como um relâmpago num dia claro; outra – que formam um grupo bem maior – são o produto final de uma longa evolução de ideias que fermentaram dentro de muitas mentes, ao longo de décadas, quando não séculos. A invenção do logaritmo pertence ao primeiro grupo, a do cálculo ao segundo”. (MAOR; 2008, p. 61)

Ainda segundo Maor (2008), as principais ideias referentes ao cálculo já eram conhecidas na comunidade matemática. Apesar de não possuir uma base certa, o método dos indivisíveis de Johannes Kepler (1571-1630) já havia sido aplicado com sucesso em várias curvas e sólidos, e o método de exaustão de Arquimedes, resolvia a quadratura da família de curvas $y = x^n$. Mas foram Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) que desenvolveram um algoritmo que permitia resolver esse problema com facilidade e eficiência. Este método era chamado por Newton de “método das fluxões”.

O ponto de partida de Newton foi considerar duas variáveis que se relacionavam através de uma equação, digamos $y = x^2$ (hoje chamamos esse tipo de relacionamento de *função*, e para indicar que y é uma função de x escrevemos $y = f(x)$). Tal relação é representada por um gráfico no plano xy , em nosso exemplo uma parábola. Newton imaginou o gráfico de uma função como uma curva gerada por um ponto móvel $P(x, y)$. À medida que P traça a curva, ambas as coordenadas, x e y , variam continuamente com o tempo; imaginava-se o próprio tempo como “fluido” a uma taxa uniforme – daí a palavra *fluente*. Newton então partiu para encontrar as taxas de mudanças de x e y em relação ao tempo, isto é, suas fluxões. Ele conseguiu isso considerando a diferença, ou a mudança, nos valores de x e de y entre duas ocasiões “adjacentes”, então, dividindo essa diferença pelo intervalo de tempo transcorrido. O passo final, e crucial, foi fazer o intervalo de tempo transcorrido igual a 0 – ou, mais precisamente, pensar nele como tão pequeno a ponto de ser desprezível. (MAOR, 2008, p. 104-105, grifos do autor).

Este método de Newton não era algo inteiramente novo, pois já era usado por Fermat e Descartes em vários casos particulares, mas fornecia um algoritmo para calcular a taxa de variação de praticamente qualquer função.

Leibniz desenvolveu um conjunto de regras para trabalhar com a diferenciação de diversas combinações de funções, e do mesmo modo, desenvolveu um conjunto de regras para a integração.

O cálculo desenvolvido por Newton e Leibniz foi aplicado primeiramente nas curvas cujas equações são polinômios ou proporções entre polinômios. Mas em aplicações do cotidiano, encontramos também outras curvas, estas chamadas por Leibniz de transcendentais, onde a principal delas era a curva exponencial.

A taxa de crescimento de uma curva exponencial é de certa forma assustadora:

...Uma famosa lenda sobre o inventor do jogo de xadrez, diz que, quando chamado à presença do rei e indagado que recompensa desejava por sua invenção, ele humildemente pediu que um grão de trigo fosse colocado no primeiro quadrado do tabuleiro, dois grãos no segundo quadrado, quatro grãos no terceiro e assim por diante, até que todos os sessenta e quatro quadrados do tabuleiro estivessem cobertos. O rei, surpreso com a modéstia do pedido, imediatamente ordenou que fosse trazido um saco de grãos e seus servos pacientemente começaram a colocar os grãos no tabuleiro. Para seu espanto, logo ficou claro que nem mesmo todos os grãos de trigo do reino seriam suficientes para atender ao pedido, já que o número de grãos no último quadrado, 2^{63} , é 9.223.372.036.854.775.808 (aos quais devemos somar os grãos de todos os quadrados anteriores, o que torna o número total o dobro desta quantidade). (MAOR, 2008; p133).

O gráfico da função exponencial é uma curva chamada curva exponencial, que de certa forma, podemos considerá-lo simples em relação ao gráfico das principais funções algébricas, pois o mesmo não possui pontos de máximo e/ou mínimo e pontos de inflexão, não toca o eixo x , é ilimitado superiormente, não possuindo assíntotas verticais. No entanto, a função exponencial apresenta uma característica única, sua derivada é proporcional a própria função exponencial.

Mas até este momento, a função exponencial era considerada o inverso da função logarítmica, e não uma função independente. Foi Leonhard Euler (1707-1783), que começou a pensar na função exponencial como uma função, e não simplesmente como o inverso da função logarítmica.

A definição de função de Euler é basicamente a que usamos hoje: “Uma função de uma quantidade variável é qualquer expressão analítica formada por essa

quantidade variável e por números ou quantidades constantes” (MAOR, 2008). Sendo Euler quem introduziu a notação $f(x)$ que utilizamos hoje, para a função de x .

Do ponto de vista do processo de construção deste conceito pelo aluno, percebe-se que o mesmo se inicia na infância com a associação de objetos e ou símbolos seguindo durante toda a sua vida. Por isso, na fase escolar o processo de construção deste conceito pelos alunos deveria levar em consideração o conhecimento que estes já possuem deste conceito a fim de que ocorra de forma significativa a conversão da linguagem natural para a linguagem Matemática.

1.3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES

Os PCN (BRASIL, 1999, p. 111) afirmam que "o conhecimento matemático é necessário em uma grande variedade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, sendo também instrumento para lidar com situações cotidianas, ou como forma de desenvolver habilidades de pensamento". No Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano, essencial para a formação de todos os jovens, proporcionando a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

As atuais Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) destacam que a forma de trabalhar os conteúdos matemáticos deve, sempre, agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático.

[...] parte-se do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o “pensar matematicamente”. Neste sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2006, p.70).

Nesse sentido a nossa proposta metodológica tem como foco o desenvolvimento do pensar matematicamente, a partir de um processo investigativo e criativo por parte dos alunos levando em consideração os conhecimentos que os alunos possuem sobre os conceitos.

Outro ponto importantíssimo quando nos referimos ao objeto matemático Função e, abordado nas Diretrizes Curriculares (PARANÁ, 2008) no Ensino Fundamental, na abordagem do Conteúdo Estruturante Funções, é que é necessário que o aluno elabore o conhecimento da relação de dependência entre duas grandezas. É preciso que compreenda a estreita relação das funções com a Álgebra, o que permite a solução de problemas que envolvem números não conhecidos. O aluno do Ensino Fundamental deve conhecer as relações entre variável independente e dependente, os valores numéricos de uma função, a representação gráfica das funções afim e quadrática, perceber a diferença entre função crescente e decrescente. Uma maneira de favorecer a construção de tais conhecimentos é a utilização de situações-problema. As abordagens do Conteúdo Funções no Ensino Médio devem ser ampliadas e aprofundadas de modo que o aluno consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados à Matemática e a outras áreas do conhecimento.

Desta forma, procuraremos investigar a princípio as bases do ensino fundamental, ou seja, se de fato os alunos se apropriaram, por exemplo, das relações entre variável independente e dependente, algo considerado primordial para descrever e expressar funções em uma situação problema.

1.4 UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM DO ENSINO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NOS LIVROS DIDÁTICOS

A análise de livros didáticos é de fundamental importância para a pesquisa, tendo em vista que o livro didático desempenha grande influência no planejamento do professor, na forma de organização de suas aulas, na escolha do conteúdo e na forma de abordar este conteúdo. Sendo assim, buscamos averiguar como o objeto matemático função exponencial é abordado em relação aos tipos de atividades que são utilizadas para a construção do conhecimento, quais formas de representação de

registros são privilegiadas e os tipos de tarefas envolvidas nos problemas e exercícios propostos.

O guia de livros didáticos PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) é composto de avaliações das coleções de livros didáticos aprovadas. Estas avaliações são feitas por docentes de diversas instituições educacionais do país, com experiências nas questões de ensino e aprendizagem. Logo para uma melhor escolha do livro didático, o professor pode contar com este guia.

A análise foi feita com livros didáticos escolhidos no PNLD 2012, para o ensino médio das turmas de 2012, 2013 e 2014, e; Livros didáticos escolhidos no PNLD 2015, para o ensino médio das turmas de 2015, 2016 e 2017.

Para nossa análise, chamamos os livros referentes ao PNLD de 2012 de Livro A, Livro B e Livro C. Os livros referentes ao PNLD de 2015 foram chamados na sequência de Livro D e Livro E.

Como referencial teórico adotamos a Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard (1992, apud ALMOULOU, 2007).

1.4.1 Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi desenvolvida por Chevallard (1992, apud ALMOULOU, 2007), a qual estuda o homem diante de situações matemáticas, situando a atividade matemática e o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

Na TAD a atividade matemática pode ser modelada através das noções de (tipo de) tarefa, (tipo de) técnica, tecnologia e teoria. A noção de tarefa é identificada como um verbo de ação (calcular, resolver, determinar, etc), a técnica está relacionada a uma maneira de fazer determinada tarefa e a teoria e a tecnologia permitem modelar a atividade matemática e a prática social. Este conjunto de técnicas, tecnologias e teorias organizadas para um determinado tipo de tarefa forma uma organização praxeológica.

Segundo Almouloud (2007, p.117), “A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, *práxis* e *logos*, que significam, respectivamente, prática e razão”. Desse modo, temos que em uma atividade matemática, as tarefas e as técnicas são

chamadas prática e as tecnologias e teorias que permitem justificar e refletir sobre a prática, é a razão.

Segundo Almouloud (2007, p. 123), “A praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (Técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico)”, ou seja, o saber-fazer, é identificado como uma tarefa e uma técnica, e o saber está relacionado a tecnologia, a qual descreve e justifica uma técnica, de modo a cumprir corretamente uma tarefa, assim temos que o bloco tarefa/técnica vem sempre acompanhado de alguma tecnologia. Seguindo essa linha e analisando o conceito da função exponencial procuraremos estabelecer uma organização em relação ao conceito de função exponencial, ou seja, buscaremos identificar a praxeologia presente nos livros-texto relativo ao conceito de Função exponencial.

Segundo Chevallard (1999, apud ALMOULOU, 2007, p.123), as praxeologias associadas a um saber são matemáticas ou didáticas, onde as organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que pode ser construída para ser desenvolvida em sala de aula, e as organizações didáticas referem-se a maneira como se faz essa construção. De acordo com a TAD, as duas praxeologias podem ser descritas e analisadas por meio de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

1.4.2 Livros selecionados para análise

Os livros analisados constam na Tabela 1:

Tabela 1: Livros Didáticos Analisados

Livro	Título	Autor	Editora	Referência
A	Conexões com a Matemática	Juliane Matsubara Barroso	Moderna	(BARROSO, 2010)
B	Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	(DANTE, 2010)
C	Matemática: Ciências, linguagem e tecnologia	Jacson Ribeiro	Scipione	(RIBEIRO, 2010)
D	Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo	Moderna	(LEONARDO, 2013)
E	Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	(DANTE, 2013)

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

1.4.3 Análise praxeológica dos livros selecionados

Na Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999, apud ALMOULOUD, 2007), existe uma relação entre as tarefas didáticas e matemáticas. Neste trabalho, pretende-se descrever e analisar as organizações matemática e didática propostas nos livros selecionados, que constam na Tabela 1. A primeira refere-se aos conteúdos matemáticos apresentados pelo autor e a segunda, o modo como esse conteúdo é desenvolvido. De acordo com a Teoria Antropológica do Didático, as duas praxeologias podem ser descritas e analisadas por meio de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Dessa forma, alguns aspectos, de interesse neste trabalho, que são considerados variáveis importantes para a construção do conhecimento do objeto matemático Função Exponencial, serão organizados em tarefa, técnica e bloco tecnológico/teórico que nortearão a análise dos livros didáticos selecionados; não se pretende fazer nenhum juízo de valor quanto à qualidade dos livros, mas discuti-los sob o olhar das tarefas criadas. É importante deixar claro que analisaremos apenas algumas questões que pretendemos abordar em nosso trabalho, ou seja, a análise é limitada a apenas a questão do significado da função exponencial e a sua formulação matemática.

1.4.4 Descrição e análise praxeológica didática

Neste tópico, pretende-se descrever e analisar as praxeologias didáticas feitas pelos autores dos livros selecionados em relação ao conceito de Função Exponencial.

Uma praxeologia didática, em relação a um objeto matemático, é organizada em tarefas didáticas a serem executadas e as técnicas didáticas escolhidas, no caso, pelos autores dos livros didáticos; o bloco tecnológico/teórico refere-se as explicações e justificativas relacionadas às técnicas adotadas. Analisamos três tipos de tarefas propostas:

Questão 1. Como introduzir o conceito de Função Exponencial?

Técnica 1.1 A partir de um problema aplicado (contextualizado) deixando claro que o crescimento é exponencial e, em seguida revisando conceitos de potenciação.

Técnica 1.2 A partir de um problema aplicado (contextualizado) e, caracterizando a forma de uma função exponencial, ou a simbologia matemática e, em seguida propõe atividades para reforçar o conceito a partir de material concreto.

Técnica 1.3 A partir de um problema aplicado (contextualizado) e, caracterizando a forma de uma função exponencial, ou a simbologia matemática, propondo um diálogo sobre a função exponencial e, em seguida revisão de potenciação.

Bloco tecnológico/teórico 1:

A opção de considerar esta tarefa fundamenta-se na importância de como introduzir um conceito matemático de tal forma que o aluno realmente compreenda e, dessa forma obtenha uma aprendizagem significativa. Em nossa pesquisa compreender algum conceito matemático significa que o aluno tenha a capacidade de explicar o mesmo conceito com suas palavras e, sob a forma de algum tipo de registro.

A técnica 1.1 consiste de uma situação motivadora seja relacionado à Explosão Demográfica (livro A) e (Livro D), Desintegração da Matéria e Crescimento de uma Cultura de Bactéria (Livro B), Crescimento Populacional em uma Cultura de Bactérias e Juros Compostos (livro E) e Cálculo de Juros Compostos (livro C). Nesta técnica é apresentado o problema e, o comportamento do mesmo, de forma a deixar explícito o crescimento exponencial, mas não deixa explícito a forma de uma função exponencial, apenas deixa claro o comportamento da situação proposta, ou seja, que os dados crescem exponencialmente. Em seguida propõe uma revisão de potenciação, evidenciando uma ruptura no processo de apropriação do saber dando lugar às revisões sobre potenciação.

A técnica 1.2 consiste de uma situação motivadora a partir de um problema aplicado (contextualizado) e, o autor aproveita o problema e introduz a caracterização da forma de uma função exponencial, ou seja, a simbologia matemática e, em seguida propõe uma atividade para reforçar o conceito a partir de manipulação de material concreto (atividade envolvendo dobraduras em uma folha de papel A4). Este tipo de

atividade é de extrema importância, pois neste momento o aluno tem a oportunidade de agir, refletir e, tentar construir o seu conhecimento.

A técnica 1.3 consiste de uma situação motivadora a partir de um problema aplicado (contextualizado) e, caracterizando a forma de uma função exponencial, ou a simbologia matemática e, em seguida propõe um diálogo sobre a função exponencial. Este tipo de diálogo é de extrema importância para o aluno refletir se realmente entendeu o comportamento da função exponencial e, em seguida propõe uma revisão de potenciação.

Questão 2. Como definir o conceito de Função Exponencial?

Técnica 2.1 Revisão sobre os conceitos de potenciação, descrição de um problema contextualizado, explanação e resolução do problema e em seguida a definição formal.

Técnica 2.2 Revisão sobre os conceitos de potenciação e definição formal.

Bloco tecnológico/teórico 2:

Com a questão 2 pretende-se investigar como os autores introduzem e definem o conceito de função exponencial. Observa-se que após a introdução do conceito abordado na Questão 1, são realizados pouquíssimos exercícios que coloquem o aluno em uma situação de aprendizagem, de autonomia para a apropriação deste novo conceito.

A técnica 2.1 consiste primeiramente de uma revisão sobre os conceitos de potenciação. Em seguida é realizada uma descrição de um problema e, a interpretação do mesmo do ponto de vista da matemática, fazendo a tradução e interpretação do problema para a linguagem matemática. Em seguida é realizada a formalização do conceito.

A técnica 2.2 consiste de uma revisão dos conceitos de potenciação e, logo em seguida a formalização do conceito.

Questão 3 Como são apresentados os problemas sobre o conceito de função exponencial?

Técnica 3.1 Não propõe exercícios sobre o conceito e introduz o conceito de gráfico de uma função exponencial.

Técnica 3.2 Propõe exercícios do tipo problema resolvido em que o aluno deve determinar a função que modela o problema e, em seguida vários exercícios propostos em que é dada a fórmula para o aluno.

Técnica 3.3 Apresenta exercícios propostos sobre a determinação do valor funcional.

Bloco tecnológico/teórico 3:

De uma forma geral, percebe-se uma preocupação de ambos os autores em propor uma situação contextualizada para introduzir o conceito de Função Exponencial, mas apenas os autores B, C e E utilizam a situação para introduzir a definição. E, mesmo assim nota-se uma ruptura no processo de apropriação do saber dando lugar às revisões de potenciação. A mudança se apresenta de forma drástica, de uma situação didática para outra situação com uma abordagem completamente diferente.

Em relação a preocupação com a contextualização, nota-se que isso se faz presente na introdução de qualquer conceito em matemática e, corre-se o risco de nessas contextualizações não ficarem em evidência os parâmetros mais importantes relativos ao conteúdo abordado.

As conexões dos conteúdos estudados com o contexto sócio cultural contemporâneo têm sido uma das recomendações mais freqüentes e amparadas em pesquisas acadêmicas. Com isso, a contextualização passou a ser um dos requisitos presentes na avaliação de currículos e livros didáticos. Tem sido observado, no entanto, desvios na busca em atender tal requisito. O mais freqüente é tentar encontrar para todos os conceitos um vínculo direto com situações do dia-a-dia dos alunos, o que tem sido fonte de muitas contextualizações artificiais e inadequadas. (PNLD, 2005, p. 205).

As revisões de conteúdos exercem o papel de pré-requisito para o estudo de Função Exponencial. Mas, surge a seguinte questão: será que a revisão deve ser apresentada entre a introdução do conteúdo e a definição do mesmo? Pois, é exatamente neste ponto que existe a ruptura da construção do conhecimento.

A definição formal é apresentada por ambos os autores, mas será que há realmente aprendizagem do conceito de Função Exponencial e de suas propriedades? Será que as mesmas não deveriam ser exploradas de forma empírica pelo aluno a fim de proporcionar mecanismos para a construção e formalização do conceito?

A análise dos livros didáticos e as questões abordadas são extremamente importantes para a reflexão e, para o desenvolvimento de uma sequência didática em que o aluno possa evoluir na construção de seu conhecimento por iniciativa própria.

A Tabela 2 apresenta um resumo das praxeologias didáticas feita pelos autores dos livros didáticos (Tabela 1).

Tabela 2: Resultado da Análise de Livros Didáticos (organização didática)

Tarefa	Técnica	Livro A	Livro B	Livro C	Livro D	Livro E
<u>Questão 1:</u> Como introduzir o conceito de função exponencial.	1.1	x			x	
	1.2		x			
	1.3			x		x
<u>Questão 2:</u> Como definir o conceito de Função Exponencial.	2.1	x		x	x	
	2.2		x			x
<u>Questão 3:</u> Como são apresentados os problemas sobre o conceito de função exponencial.	3.1	x			x	
	3.2			x		
	3.3		x			x

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

1.4.5 Descrição e análise praxeológica matemática

Neste item, serão descritas e analisadas as praxeologias matemáticas que podem ser construídas em relação ao conceito da Função Exponencial. Neste caso, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático, pode-se valer da organização em tarefa, técnica e bloco tecnológico/teórico, que pode ser diferente, de acordo com a técnica adotada (CHEVALLARD, 1999, apud ALMOULOU, 2007).

Questão 1: Como é construído o conceito da função exponencial?

Técnica 1.1 A partir de uma contextualização e atividades com material concreto.

Técnica 1.2 A partir da contextualização e a definição formal.

Bloco tecnológico/teórico 1:

Com a questão 1 pretende-se investigar a forma como os autores abordam do ponto de vista da matemática a construção do conhecimento da função exponencial.

A técnica 1.1 é caracterizada pela contextualização e, atividades com material concreto, algo de extrema importância em um processo de ensino-aprendizagem que vise a autonomia do aluno.

A técnica 1.2 propõe a contextualização e a definição formal da função exponencial.

É extremamente comum a construção do conceito da função exponencial a partir de aplicações a problemas selecionados pelos autores. Porém a maioria dos autores de livros didáticos não propõem atividades que levem o aluno a um processo de autonomia durante a construção do conhecimento.

A partir de uma sequência de atividades que levem em consideração o conhecimento prévio dos alunos a fim de que haja a conversão da linguagem natural para a linguagem formal.

A forma de introduzir o conceito proposta em nosso trabalho leva em consideração o conhecimento prévio dos alunos a fim de que haja a conversão da linguagem natural para a linguagem formal. Ou seja, leva em consideração a ideia que o aluno tem sobre o conceito e, propõe atividades a fim de que o aluno seja capaz de conceituar o objeto matemático, neste caso a Função Exponencial, com suas palavras de forma que ocorra naturalmente a conversão da linguagem natural para a linguagem matemática. Para isso, situações didáticas são propostas a partir de questões e respostas dissertativas, que leve em consideração a subjetividade do aluno, situações didáticas a partir de material concreto, situações didáticas a partir de problemas propostos pelos alunos, em que o mesmo tem a autonomia de propor um problema e a resolução do mesmo. E para fixar mais ainda o conceito, situações problemas em grupo a fim de permitir a discussão e o compartilhamento de ideias entre os colegas e, respostas a algumas dúvidas que ainda persistem em relação ao conteúdo. Acreditamos que todas estas práticas reforçam ainda mais a construção da definição formal.

O que os livros propõem talvez contextualizem situações que estão distantes da realidade e da linha de raciocínio dos alunos. É como se os livros apresentassem um universo em que os alunos não se sentem inseridos e, a falta de oportunidade do aluno propor e dialogar sobre o seu universo, pode ser a causa do desinteresse dos alunos em relação ao conteúdo.

A Tabela 3 apresenta um resumo da praxeologia matemática adotada pelos autores dos livros didáticos (Tabela 1).

Tabela 3: Resultado da Análise de livros didáticos (organização matemática)

Tarefa	Técnica	Livro A	Livro B	Livro C	Livro D	Livro E
Questão 1: Como é construído o conceito da função exponencial	1.1		x			
	1.2	x		x	x	x

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

CAPÍTULO II

2 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos na seção 2.1 nossas justificativas e na seção 2.2 o relato de professores da rede pública de ensino da cidade de Dois Vizinhos (PR), cidade de aplicação do projeto.

2.1 JUSTIFICATIVA

Através de minha experiência como professora, pude perceber que os alunos sentem muita dificuldade em relação ao conteúdo de funções, principalmente no que diz respeito ao significado de função, a relação de dependência, variável dependente e independente.

Percebo em minhas aulas, que os alunos estão acostumados a resolver problemas de forma mecanizada, no qual o processo consiste em o professor explicar o conteúdo, resolver exemplos e em seguida passar atividades para os alunos. Ao mesmo tempo, percebo uma série de dificuldades dos alunos. Fica muito claro que os mesmos apresentam estas dificuldades devido ao não entendimento do significado dos conteúdos abordados. Com isso, senti a necessidade urgente de mudar a minha metodologia de ensino e, decidi pensar seriamente sobre isso ao ingressar no PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional).

Ao conversar com a professora Dra. Teodora com relação a orientação, ela comentou sobre a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986, apud ALMOULOUD, 2007), pois a mesma busca criar interações entre os alunos, o saber e o meio no qual se desenvolve a aprendizagem, esta teoria baseia-se no fato de que o conhecimento pode ser determinado por uma situação entendida como uma ação. É necessário que o aluno mobilize os conhecimentos correspondentes para solucioná-la. O professor deve propor um problema para que os alunos possam agir, pensar, refletir, criar, falar e evoluir por iniciativa própria. Desta forma, o aluno tem um papel

ativo no processo de aprendizagem, para que o mesmo possa descobrir e ter autonomia de pensamento, criando estratégias e habilidades para resolver problemas e como consequência, construir os conceitos matemáticos.

Sendo assim, vi a possibilidade de mudar a minha situação atual e, realmente proporcionar aos meus alunos situações de aprendizagem significativa, pois por intermédio da Teoria das Situações de Guy Brousseau (1986, apud ALMOULOU, 2007), o aluno tem a possibilidade de se confrontar com situações-problema, propostas pelo professor, que sejam capazes de estimular o mesmo a relacionar conhecimentos já adquiridos com a possibilidade de criar novos conhecimentos, desenvolvendo estratégias e habilidades para a resolução.

A princípio senti que não seria uma tarefa fácil, inclusive para mim, no que diz respeito à mudança de postura em sala de aula, mas vi uma possibilidade de aprender e colocar em prática uma teoria nova para mim, a fim de melhorar o ensino e facilitar a aprendizagem.

Em nossa conversa também, comentamos sobre a necessidade de levar em consideração o aspecto cognitivo, que analisa os meios pelos quais o aluno pode ter acesso ao objeto matemático. E da mesma forma a professora comentou sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (1999, apud ALMOULOU, 2007), teoria que investiga os aspectos cognitivos dos processos de ensino e de aprendizagem.

E, além disso, ela me indicou a leitura do livro do professor Saddo Ag Almouloud, Didática da Matemática, o qual relata sobre essas Teorias e, também a fim de que eu pudesse ter conhecimento de aspectos relacionados ao Contrato Didático, Erros e Obstáculos, assuntos extremamente importantes na relação professor-aluno e vice-versa.

Diante de todas essas possibilidades de aprendizagem e, de proporcionar aos meus alunos diferentes situações didáticas, menos cópias de conteúdo e, mais participação dos mesmos durante os processos de ensino e de aprendizagem, decidi estudar estas teorias e, pesquisar o impacto das mesmas em sala de aula, no relacionamento entre os meus alunos e o saber matemático Função Exponencial.

2.2 RELATO DE ALGUNS PROFESSORES DA REDE PÚBLICA DE ENSINO DA CIDADE DE DOIS VIZINHOS (PR)

A seguir segue alguns relatos de professores da rede pública de ensino da cidade de Dois Vizinhos (PR), local de aplicação deste projeto.

A pesquisa foi realizada com professores do 1º ano do ensino médio das seguintes escolas do município de Dois Vizinhos:

- Colégio Estadual José de Anchieta – Ensino Fundamental e Médio;
- Colégio Estadual de Dois Vizinhos – Ensino Fundamental, Médio e Profissional;
- Colégio Estadual Monteiro Lobato – Ensino Fundamental e Médio;
- Colégio Estadual Leonardo da Vinci – Ensino Fundamental, Médio e Profissional.

- Você acha que os alunos conseguem entender de forma clara o conceito formal de Função Exponencial descrito na imagem abaixo? Comente sobre isso.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ chama-se **função exponencial** de base a quando existe um número real a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

As dificuldades são várias;

- O não entendimento sobre potenciação e suas propriedades.
- Muitas dificuldades no processo de resolução exponencial (confundem dobro-tríplo com os exponenciais, quadrado, cubo...)

embora se dê ênfase na diferenciação entre os dois processos;

- Leitura e interpretação do conceito formal, pois muitos não detêm conceitos como:
- maior - menor ($> \leq$) igual, pertence, não-pertence, igual diferente, função f : elementos algébricos - representações de conjuntos.

Não devido o entendimento das situações expostas acima;

Você acha que os alunos conseguem entender de forma clara o conceito formal de Função Exponencial descrito na imagem abaixo? Comente sobre isso.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ chama-se **função exponencial** de base a quando existe um número real a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

não. Os alunos apresentam sérios problemas de concentração na explicação do conteúdo. Por isso dificulta o aprendizado.

Protocolo 2: Colégio Estadual Monteiro Lobato

Fonte: Elaborado pelo Professor B

Você acha que os alunos conseguem entender de forma clara o conceito formal de Função Exponencial descrito na imagem abaixo? Comente sobre isso.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ chama-se **função exponencial** de base a quando existe um número real a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Geralmente precisam de intermédio do professor até se familiarizarem com a linguagem matemática. A compreensão fica mais acessível quando verificam sua aplicabilidade de em situações problema.

Protocolo 3: Colégio Estadual de Dois Vizinhos

Fonte: Elaborado pelo Professor C

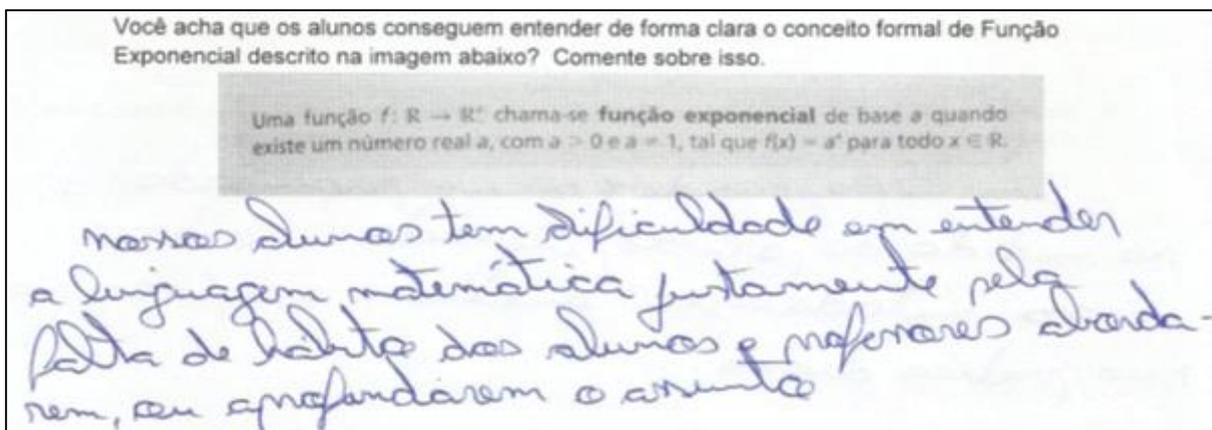
Você acha que os alunos conseguem entender de forma clara o conceito formal de Função Exponencial descrito na imagem abaixo? Comente sobre isso.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ chama-se **função exponencial** de base a quando existe um número real a , com $a > 0$ e $a \neq 1$, tal que $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Não. Primeiro eles tem pré-conceito em relação a linguagem matemática formal; eles podem entender a ideia intuitiva e aplicá-la na resolução de exercícios, mas apresentam uma resistência grande em sair do senso comum e formalizar os conceitos.

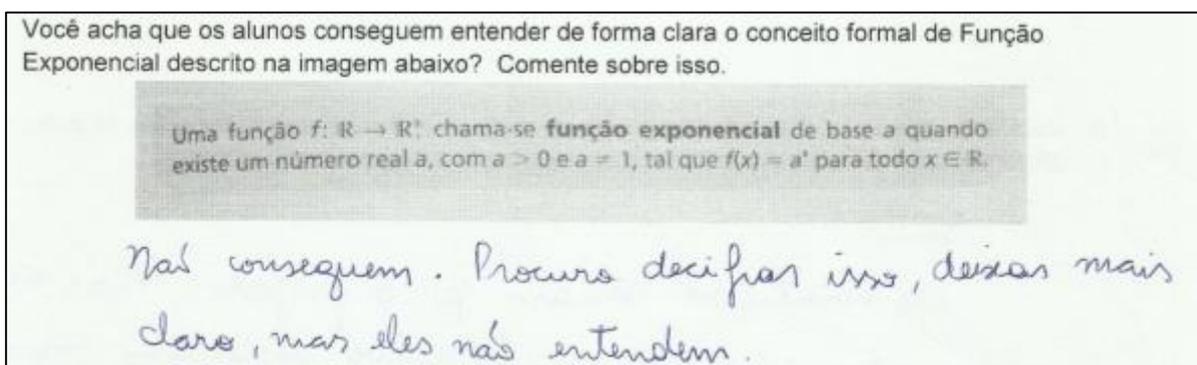
Protocolo 4: Colégio Estadual José de Anchieta

Fonte: Elaborado pelo Professor D



Protocolo 5: Colégio Estadual Dois Vizinhos

Fonte: Elaborado pelo Professor E



Protocolo 6: Colégio Estadual Dois Vizinhos

Fonte: Elaborado pelo Professor F

Os relatos dos professores mostram a dificuldade dos alunos em entender a linguagem matemática. Dessa forma, observa-se a necessidade de propor uma metodologia de ensino a fim de que os alunos possam compreender a linguagem matemática e assim superar as dificuldades existentes.

Esses relatos nos auxiliaram no sentido de delimitar o tema de nossa pesquisa, uma vez que o estudo da Função Exponencial envolve a parte conceitual e gráfica. Optamos em trabalhar com a parte conceitual, do significado da Função Exponencial, da relação de dependência e sua principal característica, ou seja, que a parte variável representada por x se encontra no expoente. Porém o grande desafio de nossa proposta é que os alunos percebam essa característica sozinhos, a partir de situações didáticas apropriadas propostas pelo professor. E, que dessa forma sejam não apenas capazes de resolver problemas que envolvam a função exponencial, mas, também de inventarem problemas que sejam modelados por este tipo de função.

CAPÍTULO III

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo é dividido em quatro seções. Na seção 3.1 apresentamos uma Introdução à Teoria das Situações, uma vez que nosso ambiente de estudo é uma sala de aula, onde são propostas Situações Didáticas, a partir das quais ocorrem as relações didáticas, que são as trocas organizadas entre professor, aluno e saber. Na seção 3.2 apresentamos a noção de Registro de Representação Semiótica, os quais são de fundamental importância na análise dos registros dos alunos e tratamento dos mesmos. Na seção 3.3 apresentamos noções de Erros e Obstáculos e na seção 3.4 aspectos do contrato didático.

3.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DAS SITUAÇÕES

A Teoria das Situações Didáticas começou a ser elaborada no ano de 1970 pelo matemático francês, Guy Brousseau. Esta teoria busca criar interações entre os alunos, o saber e o meio no qual se desenvolve a aprendizagem.

Brousseau (2008) se apoiava nos dispositivos piagetianos que tornava visível que a capacidade de adaptação e desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos poderiam ocorrer a partir de conhecimentos prévios. Segundo ele, o meio considerado como um sistema, deve ser modelado de modo que os comportamentos dos alunos mostrem seu funcionamento, no qual um problema não seja considerado uma formulação do conhecimento, mas um sistema autômato, antagônico ao sujeito, que responde ao sujeito por meio de algumas regras.

Para Brousseau (2008, p.53), “Uma interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)”.

Na Teoria das Situações Didáticas, o ensino acontece com a interação entre professor, os alunos e o meio didático. O professor utiliza o meio como ferramenta para facilitar a construção do conhecimento pelo aluno. Para Brousseau (2008), o esquema ideal para representar a situação didática como ferramenta é o esquema mostrado na Figura 1.

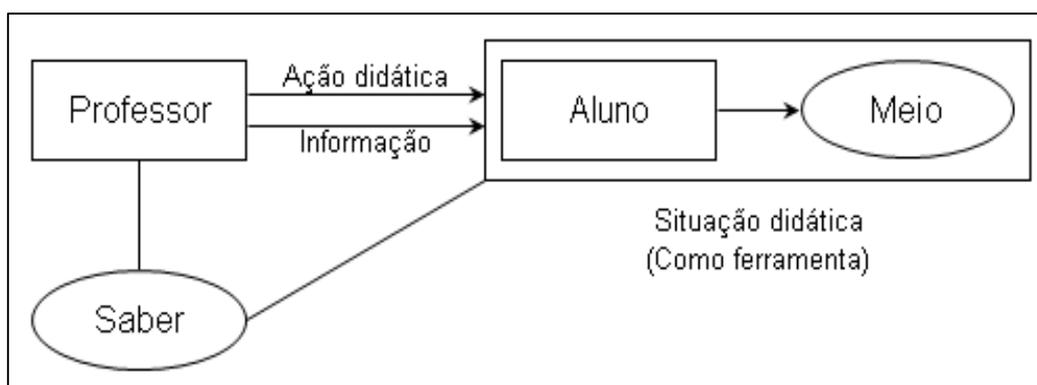


Figura 1: Situação didática como ferramenta
Fonte: (BROUSSEAU, 2008, p. 54)

Neste esquema:

A intervenção do professor evoca, necessariamente, em relação aos conhecimentos que ensina, um funcionamento possível em outras circunstâncias, não apenas nas "situações com fins didáticos" (exercícios ou problemas) que ele propõe. Cria, então, fictícia ou efetivamente, um outro "meio", em que o aluno atua de forma autônoma. (BROUSSEAU, 2008, p. 54)

As observações das interações do aluno com o milieu (meio) são de fundamental importância durante o processo de ensino e aprendizagem, pois o milieu produz incertezas, contradições, atitudes e emoções que levam à aprendizagem.

Segundo Almouloud (2007, p. 32), a teoria das situações didáticas apóia-se em três hipóteses:

- O aluno aprende adaptando-se a um milieu que é fator de dificuldade, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno manifesta-se pelas respostas novas, que são a prova da aprendizagem (Brousseau, 1986, p.49). Essa hipótese é uma referência à epistemologia construtivista de Piaget, segundo a qual a aprendizagem decorre de processos de adaptação, no sentido biológico do termo, desenvolvido pelo sujeito diante de situações problemáticas.
- O milieu não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um milieu no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essa aprendizagem.

- A terceira hipótese postula que esse milieu e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

3.1.1 A Modelagem das situações didáticas

Uma Situação Didática é caracterizada por um modelo de interação de um sujeito com um meio específico, que mostra um certo conhecimento o qual é uma ferramenta que o sujeito dispõe para permanecer ou alcançar esse meio em um estado favorável. E as Situações Didáticas descrevem as atividades do professor e do aluno.

Segundo Brousseau (2008) as concepções atuais de ensino exigem que o professor desenvolva atividades que provoquem no aluno as adaptações desejadas, de modo que o aluno atue, fale, reflita e evolua através da própria dinâmica. O professor não deve intervir como fornecedor dos conhecimentos que espera que surjam, desde o momento que o aluno recebeu o problema, até o momento em que produz a resposta. O professor atua como o mediador. Esta situação denomina-se *adidática*.

Segundo Brousseau (2008), a situação *didática* ocorre a partir de situações *fundamentais*, através de um jogo de variantes, variáveis e suas contas.

Como o aluno não pode resolver, de pronto, qualquer situação adidática, o professor apresenta as que ele é capaz de solucionar. As situações adidáticas elaboradas com fins didáticos determinam o conhecimento transmitido em um determinado momento e o sentido particular que ele assumirá, em razão das restrições e deformações adicionadas à situação fundamental.

Essa situação – ou problema – escolhida pelo professor o envolve em um jogo com o sistema de interações do aluno e seu meio. Esse jogo mais amplo é a *situação didática*. (BROUSSEAU, 2008, p. 35-36, grifos do autor)

Brousseau destaca que “a situação fundamental não desacredita nenhuma forma de aprendizagem. Admite todas elas e permite combiná-las: complementa as aprendizagens parciais, que são úteis e provavelmente necessárias, e, sobretudo, lhes dá sentido”. (BROUSSEAU, 2008, p. 41)

A *situação didática* é caracterizada como um jogo de interações entre o professor e o aluno, o professor devolve para o aluno uma situação adidática dando

responsabilidade ao aluno na construção do conhecimento. A princípio, o aluno não distingue o que é adidático ou didático na situação.

Segundo Brousseau (2008), as situações didáticas podem ser classificadas em situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização.

Situação de ação: O autor cita o exemplo de um jogo, a partir do instante que a criança joga mais partidas, desenvolve novas estratégias, são necessárias várias partidas, até que cada aluno consiga formular uma tática, justificá-la e tirar conclusões. “A sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema”. (BROUSSEAU, 2008, p.25). Segundo o autor o aluno pode usar determinada tática sem ser capaz de formulá-la, esse conjunto de regras onde o aluno usa determinada tática sem ter consciência dela é denominada modelo implícito.

Segundo Almouloud (2007, p. 37),

Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *Milieu*. Assim, o aluno pode melhorar ou abandonar seu modelo para criar um outro: a situação provoca assim uma aprendizagem por adaptação.

Segundo Brousseau (2008, p. 28),

Para um sujeito, “atuar” consiste em escolher diretamente os estados do *meio* antagonista em função de suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (*feed-back*), antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. Os conhecimentos permitem produzir e mudar essas “antecipações”. A aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados. Podemos representar esses conhecimentos por meio de descrições de táticas (ou procedimentos) que o indivíduo parece seguir ou pelas declarações daquilo que parece levar em consideração, mas tudo são só projeções. (Grifos do autor)

Situação de formulação: Segundo Brousseau (2008), nesta fase, o aluno deve saber comunicar aos colegas sua estratégia, pois é a única maneira que tem de agir sobre a situação proposta. Esta comunicação tem duas maneiras de agir sobre o jogo proposto: A primeira, na qual os colegas aceitam ou não a estratégia e a segunda, através do meio, ao jogar novamente a partida a estratégia resulte em vencedora ou perdedora.

Segundo Brousseau (2008, p. 29), “O *meio* que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação”. (Grifos do autor)

Situação de validação: Segundo Brousseau (2008), nesse tipo de situação, os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias, aprendem a convencer os demais e se deixam ser convencidos sem autoridade, intimidação, etc.

Brousseau descreve que:

As razões que um aluno possa fornecer para convencer o outro, ou as que possa aceitar para mudar de opinião, serão progressivamente elucidadas, construídas, testadas, debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração. (BROUSSEAU, 2008, p. 27)

Para Brousseau (2008), os sujeitos que possuem as mesmas informações necessárias para lidar com a questão proposta, na validação:

Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. Juntos, encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele. Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio. (BROUSSEAU, 2008, p. 30).

A validação é um momento de socialização do saber, o professor espera que o aluno comunique por escrito ou oralmente suas estratégias e produções com o intuito de provar, justificar, corrigir ou evoluir nas suas produções.

Situação de institucionalização: Segundo Brousseau, nesta fase, o professor analisa as produções dos alunos, descreve os fatos observados, e o que está vinculado ao conhecimento em questão. E institui o estatuto cognitivo do saber. Este novo saber construído e validado é institucionalizado com a turma de alunos da classe.

Segundo Brousseau (2008, p. 31),

...o fato de garantir a consistência do conjunto das modelagens, eliminando as que são contraditórias, exige um trabalho teórico – mostram a necessidade de considerar as fases de *institucionalização* que deram a determinados conhecimentos o *status* cultural indispensável de saber. (Grifos do autor).

Segundo Almouloud (2007, p.40), “Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos”.

3.1.2 Estruturação do Milieu

Almouloud (2007) descreve que Brousseau, introduziu em sua teoria das situações a *estruturação do meio (milieu)*, a qual envolve as posições do professor e do aluno diante de um meio. Esta estruturação tem como objetivo analisar, por um lado, as relações entre os alunos, os saberes e as situações, e por outro lado, as relações entre os conhecimentos próprios e as relações entre as situações. Margolinas (1995a) apoiando-se em Brousseau (1986;1990, apud ALMOULOU, 2007), mudou esse modelo buscando valorizar o caráter central da situação didática e permitir as análises ascendente e descendente. A análise ascendente, caracteriza as atividades do aluno em uma situação didática e a análise descendente, caracteriza a atividade do professor nos diversos níveis de estruturação do meio. Podemos analisar no Quadro 1 a estruturação do meio de Margolinas (1998, p.16) apresentada por Almouloud (2007, p.43).

M+3 M – de construção		P+3 P – noosfera	S+3 S – noosfera
M+2 M – de projeto		P+2 P – construtor	S+2 S – de construção
M+1 M – didático	E+1 E – reflexivo	P+1 P – planejador	S+1 S – de projeto
M0 M – de aprendizagem	E0 Aluno	P0 Professor	S0 S – didática
M-1 M – de referência	E-1 E – aprendiz	P-1 P – observador	S-1 S – aprendizagem
M-2 M – objetivo	E-2 E – agindo		S-2 S – de referência
M-3 M – material	E-3 E – objetivo		S-3 S – objetiva

Quadro 1: Estruturação do meio de Margolinas (1998, p.16)
Fonte: (ALMOULOU, 2007, p. 43)

Nesta estruturação do meio, temos que M são as posições relativas ao meio, E são as posições relativas ao aluno e P são as posições relativas ao professor. S representa a situação didática.

O nível +3 da noosfera caracteriza a atividade do professor que reflete de modo geral sobre o ensino da matemática e/ou de certo tema.

O nível +2 de construção é onde o professor traça ideias de como ensinar certo tema. Nesse nível o professor procura as situações didáticas.

O nível +1 de projeto, corresponde ao planejamento da aula.

O nível 0 (didático) é caracterizado pela ação do professor em sala de aula. É onde ocorre a institucionalização.

O nível -3 é o momento onde o professor faz a devolução do problema, é o momento onde o aluno toma conhecimento do problema que lhe é proposto.

O nível -2 é caracterizado pela situação de referência (S-2) que se refere ao aluno (E-2) agindo perante o meio material (M-3). Neste momento o professor (P-3) age como observador e mediador das ações dos alunos.

O nível -1 é caracterizado pela observação da atividade do aluno. É onde ocorre a situação de aprendizagem (S-1). Segundo Almouloud (2007, p. 45) é o meio onde os conhecimentos dos alunos se transformam em saber e o aluno começa a identificar os conhecimentos que deve compreender e validar no ponto de vista científico. Neste nível, o meio permite ao aluno fazer tentativas, mas não permite concluir o trabalho por falta de conhecimento. Esta conclusão é feita no nível 0 onde ocorre a institucionalização. A situação S0 é formada pelas interações M0, E0, P0.

Essa estruturação do meio permite que o aluno aprenda a partir de sua ação, tornando-se responsável por sua aprendizagem.

Os meios, material, objetivo, de referência e de aprendizagem não possuem intenção didática, mas os meios, didático, de projeto e de construção, sim.

O meio material é o meio que o professor organiza quando prepara as suas aulas, é composto pelos alunos e pelo meio material dos alunos. Neste momento, o professor é responsável pela adequação do meio e utilização desse meio pelos alunos. O par aluno/meio mostra-se antagônico ao professor pois refere-se ao meio material que o professor controla, e as reações dos alunos que muitas vezes não podem ser controladas.

O meio objetivo constitui-se das ações dos alunos, nesta categoria, as situações de formulação ou validação são consideradas situações de ação. A ação do

professor deve levar em consideração as tentativas e conjecturas dos alunos, assumindo posição de observador das ações dos alunos.

O meio de referência é um momento de reflexão sobre a ação. É onde os conhecimentos do aluno se transformam em saber, permitindo identificar novos conhecimentos, os quais deverão ser compreendidos e validados do ponto de vista científico. O meio de referência do professor é formado pelas tentativas, erros, sucessos, conjecturas, formulações e estratégias dos alunos. O professor neste momento é obrigado a agir sobre as formulações e validações dos alunos.

A análise descendente permite que o professor reflita sobre o tema, analise a estrutura matemática do conceito visado, reflita como ensinar tal conteúdo, planeje suas aulas e finalmente aplique as atividades.

Com base na Teoria das Situações, em nossa pesquisa, procuramos fazer a análise descendente refletindo sobre o conceito de função exponencial, como explicar esse conteúdo, planejando as situações didáticas e aplicando as atividades elaboradas, ou seja, a Teoria das Situações nos permitiu fazer a análise a priori e também a análise a posteriori de cada atividade, de cada situação didática proposta, em relação ao conceito da função exponencial.

3.2 REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Um dos principais pesquisadores na área de Registros de Representações Semiótica é Raymond Duval, sua teoria, tem sido instrumento de pesquisa de grande relevância para diversos projetos de pesquisa em diversas áreas da Educação Matemática em relação a organização de situações de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos. Sua teoria serve de apoio teórico para nossa pesquisa, Duval desenvolveu várias pesquisas relacionadas ao funcionamento cognitivo, principalmente quanto aos problemas de aprendizagem na matemática.

Várias pesquisas por nós analisadas Maia (2007), Oliveira & Pires (2012), Pelho (2003), Bonoto, Soares & Martins (2010), Dominoni (2005) mostram a importância de se utilizar vários registros de representação para um mesmo objeto matemático, neste caso funções. De acordo com as pesquisas realizadas e, visando compreender a partir dos registros dos alunos as dificuldades e obstáculos existentes

durante o processo de ensino aprendizagem de Função Exponencial, escolhemos a Teoria de registros de representação de Raymond Duval.

Duval (2013, p.11) salienta que para compreender as dificuldades que os alunos têm em compreender a matemática:

... É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhe serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Para Duval (2013), a abordagem cognitiva busca descrever o funcionamento cognitivo que possibilita ao aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade de processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

No ponto de vista cognitivo, o autor enfatiza que para a compreensão em matemática, não podemos nos restringir ao campo matemático ou a sua história, mas sim a importância das representações semióticas e a grande variedade destas representações utilizadas em matemática.

Duval classifica a grande variedade de representações semióticas, em quatro tipos diferentes de registros de representação:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: <ul style="list-style-type: none"> argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas. 	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). <ul style="list-style-type: none"> apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: <ul style="list-style-type: none"> numéricas (binária, decimal, fracionária...); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. <ul style="list-style-type: none"> mudanças de sistema de coordenadas; interpolação, extrapolação.

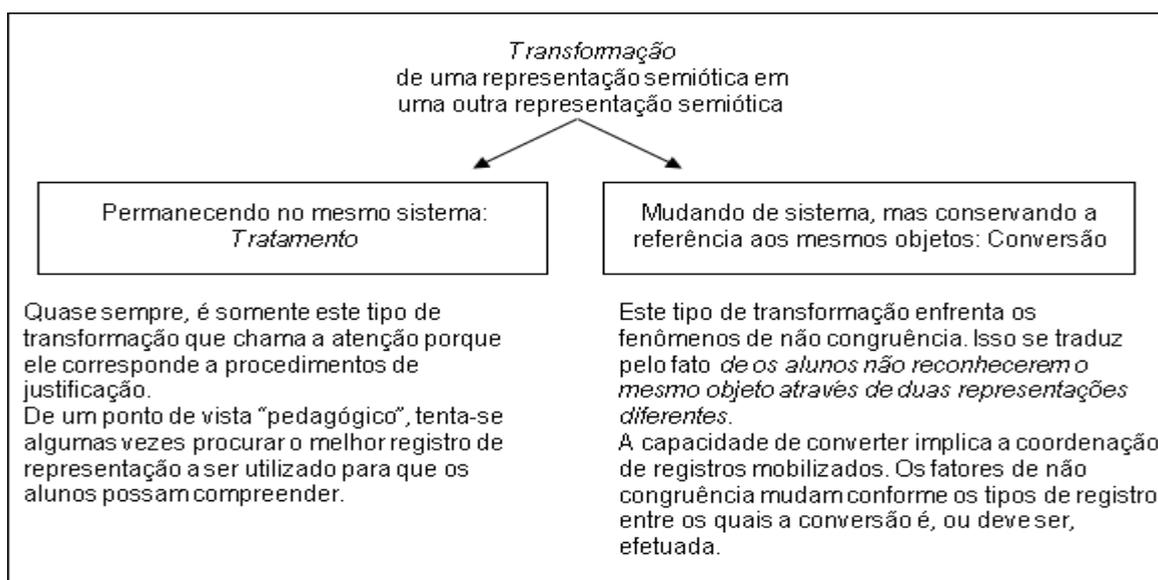
Quadro 2: Tipos de registros semióticos

Fonte: (DUVAL, 2013, p.14)

Conforme podemos observar no Quadro 2, Duval (2013) classifica as representações semióticas na matemática em: Língua Natural, Figuras geométricas planas ou em perspectiva, Sistemas de escritas, e Gráficos cartesianos.

A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. (DUVAL, 2013, p. 14).

Os diferentes tipos de registros permitem a mudança de registro. Essa transformação entre os registros, ocorre segundo Duval (2013), através da transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica, o que ocorre através de dois tipos de transformações semióticas principais: o Tratamento e a Conversão, conforme podemos observar no quadro 3.



Quadro 3: Transformação de uma representação semiótica
Fonte: (DUVAL, 2013, p.15)

Quanto ao tratamento, Duval (2009, p.56-57) expõe que:

Um **tratamento** é a transformação de uma representação obtida como dado inicial em uma representação considerada terminal em relação a uma questão, a um problema ou a uma necessidade, os quais fornecem o critério de parada na série de transformações efetuadas. Um tratamento é uma **transformação de representação interna a um registro** de representação ou a um sistema. (Grifos do autor)

Ou ainda:

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria. (DUVAL, 2013, p. 16)

Quanto à conversão, Duval (2009, p. 58) expõe que:

Converter é transformar a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro. [...] A conversão é então uma **transformação externa em relação ao registro da representação de partida.** (Grifos do autor)

Do mesmo modo, Duval (2013, p. 16) descreve que “As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica”.

Como exemplo para diferenciar um tratamento e uma conversão de representações semióticas, podemos usar o seguinte exemplo em função exponencial. Quando escrevemos a função $y + 1 = 3^x$ e mudamos para $y = 3^x - 1$, estamos fazendo um tratamento, pois não mudamos a representação semiótica, continuamos no registro algébrico. Quando passamos da escrita algébrica para a representação gráfica ou vice-versa, estamos fazendo uma conversão, ou seja, ao representar a função $y = 3^x - 1$ no sistema de eixos cartesianos temos uma conversão de representação semiótica.

Duval (2013) salienta que do ponto de vista matemático, a conversão interfere na escolha do melhor registro onde os tratamentos a serem efetuados são mais eficazes. Mas no ponto de vista cognitivo, a conversão é uma atividade representacional fundamental a qual conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Geralmente a conversão é considerada como uma operação simples e local reduzindo-a a uma “codificação” onde seria suficiente aplicar regras de correspondência para “traduzir”. No entanto, a conversão não ocorre de modo instantâneo:

Porém, mais frequente, a atividade de conversão é menos imediata e menos simples do que se tende a crer. Para se ter idéia, é preciso analisar como pode se efetuar o procedimento de correspondência sobre o qual repousa toda conversão de representação. O procedimento de correspondência de duas representações pertencentes a registros diferentes pode ser estabelecido localmente por uma correspondência associativa das unidades significantes elementares constitutivas de cada um dos dois registros. (DUVAL, 2009, p.64)

Em seus estudos Duval (2013, p. 21) descreve que:

Numerosas observações nos permitem colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes.

Segundo Duval (2013), as duas formas de representação são importantes para compreender um conceito matemático, mas é a conversão que conduz a compreensão.

Observando os vários registros de representações, é possível perceber que um complementa o outro, pois é na coordenação entre os diferentes tipos de registros que o aluno pode manipular o objeto matemático, e assim a aprendizagem ocorre de modo significativo.

Em nossa pesquisa procuramos elaborar uma sequência didática para o ensino da Função Exponencial, com base na Teoria dos Registros de Representação Semióticos de Raymond Duval. As atividades foram elaboradas de forma a analisar os tipos de registros mais utilizados pelos alunos e, a partir das atividades propostas promover a conversão destes registros.

3.3 ERROS E OBSTÁCULOS

Brousseau (2008, p.48) descreve que algumas das concepções adquiridas, ou seja, as noções matemáticas adquiridas não desaparecem imediatamente em benefício de uma concepção melhor: resistem, provocam erros, tornando-se, então “obstáculos”.

Segundo Almouloud (2007, p.131), a análise do erro apóia-se na noção de obstáculo, desenvolvida por Bachelard e na teoria da desequilíbrio, devida a Piaget. Esses dois autores inspiraram Brousseau (1983) a elaborar uma classificação dos obstáculos.

Almouloud (2007, p.132) coloca uma definição de erro importantíssima e, muito diferente de como é trabalhado a questão do erro nas escolas de uma forma em geral.

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso [...], mas o efeito de um conhecimento anterior que por um tempo, era interessante e conduzia ao sucesso, mas agora se mostra falso, ou simplesmente inadaptável, os erros deste tipo não são erráticos e imprevisíveis, mas se constituem em obstáculos. Tanto na ação do mestre como na do aluno, o erro é constitutivo do sentido do conhecimento adquirido (BROUSSEAU, 1983, p.171 apud ALMOULOU, 2007, p. 132)

Por isso é de fundamental importância o professor ficar atento aos erros dos alunos, eles podem dizer muita coisa sobre o que está ocorrendo durante o processo de ensino e aprendizagem e, dar uma direção ao mesmo. Neste sentido noções de contrato didático se faz valer, no sentido que o mesmo se alterado tem como objetivo trabalhar os obstáculos e, em consequência os erros dos alunos, a fim de que novas concepções possam ser adquiridas e, obstáculos sejam superados.

3.4 CONTRATO DIDÁTICO

Segundo Almouloud (2007), Brousseau define contrato didático como o conjunto de comportamentos do professor esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos esperados do aluno pelo professor, ou seja, contrato didático são as relações estabelecidas entre professor, alunos e o saber, não só na institucionalização, mas em todos os momentos da situação didática.

Conforme afirma Brousseau (1986), citado por Almouloud (2007, p.89), esse contrato é,

Uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor a aluno, tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro. (BROUSSEAU, 1986, p. 51 apud ALMOULOU, 2007, p.89)

Para Almouloud (2007), é importante destacar nas afirmações de Brousseau a diferença existente entre o contrato didático e o contrato pedagógico. Segundo o mesmo, a diferença entre os dois tipos de contrato está no fato de que o contrato pedagógico não considera o saber como um dos elementos da relação didática, privilegiando as relações sociais, atitudes, regras e convenções. O contrato pedagógico se mantém estável enquanto o contrato didático pode ser mudado, analisando que os conhecimentos evoluem e se transformam.

Em relação ao funcionamento do contrato didático, Almouloud (2007, p. 90) considera que este depende dos diversos contextos adotados no processo de ensino e aprendizagem. São determinantes essenciais do contrato didático, as escolhas pedagógicas, os objetivos de formação, o tipo de trabalho entregue aos alunos, as condições de avaliação, entre outros.

Para Almouloud (2007), um contrato didático mal administrado, tanto por parte dos alunos quanto por parte do professor, pode ser fonte de dificuldades para a aprendizagem. Quando isso ocorre, temos uma ruptura do contrato didático, onde é necessária uma renegociação do contrato didático.

Almouloud (2007) destaca que os alunos têm dificuldades em adaptar-se a uma ruptura de contrato. Mas, a ruptura e a renegociação do contrato podem provocar um avanço no processo de aprendizagem.

O contrato didático é a justificativa que o professor tem para apresentar a situação didática, no entanto, a evolução da situação, modifica o contrato no momento em que ocorrem outras situações. O aluno é responsável por controlar sua interação com o saber nas fases de ação, formulação e validação, enquanto o professor, é responsável pela fase de institucionalização.

Desta forma, a Teoria das Situações Didáticas pode permitir uma contribuição significativa para o encaminhamento de nossa proposta metodológica em sala de aula, reduzindo as mediações do professor e a valorizando a interação do aluno com o meio antagonista, buscando que obstáculos sejam superados.

Em nossa proposta, professor e aluno são colocados em um conjunto de relações, que envolvem o conceito de função exponencial, procurando a síntese desse conhecimento. Dessa forma, o professor assume o papel de mediador, não revelando suas intenções didáticas, permitindo que o aluno se dedique na busca do conhecimento, tornando-se responsável no seu processo de aprendizagem.

CAPÍTULO IV

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa, buscamos uma ferramenta metodológica de acordo com os nossos objetivos, a qual nos pareceu ser a Engenharia Didática de Artigue (1988, apud ALMOULOU, 2007), uma metodologia originada especificamente para a pesquisa com situações didáticas. Neste capítulo, explanamos na seção 4.1 os principais aspectos da Engenharia Didática, na seção 4.2 descrevemos as etapas da pesquisa e na seção 4.3 apresentamos os participantes da pesquisa.

4.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia didática é uma metodologia de pesquisa, desenvolvida na década de 1980, pela pesquisadora francesa Michèle Artigue.

Segundo Almouloud (2007, p171),

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, é caracterizada, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na construção, realização, observação e análise de sessões de ensino. Caracteriza-se também como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pelos modos de validação que lhe são associados: a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Tal tipo de validação é uma das singularidades dessa metodologia, por ser feita internamente, sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou de um pós-teste.

A engenharia didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que o suporte seja o ensino de um certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer). (Grifos do autor)

A metodologia de pesquisa engenharia didática considera 4 fases em seu desenvolvimento: Análise preliminar, análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação.

A análise preliminar tem por objetivo identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo, elaborando as questões de pesquisa, hipótese e fundamentação teórica e metodológica para a pesquisa. É onde ocorre a organização matemática, a análise da organização didática do objeto matemático escolhido e se define as questões de pesquisa.

Almouloud (2007, p.173-174), descreve que:

Segundo Artigue (1988) cada uma dessas fases é retomada e aprofundada ao longo do trabalho de pesquisa, em função das necessidades emergentes. Isso significa que a expressão “análises preliminares” não implica que após o início da fase seguinte não se possa retomá-las, visto que a temporalidade identificada pelo termo “preliminar” ou “prévia” é relativa, pois se refere apenas a um primeiro nível de organização. Na realidade, deve ser um trabalho concomitante com as demais fases da pesquisa. Estas análises preliminares devem permitir ao pesquisador a identificação das variáveis didáticas potenciais que serão explicitadas e manipuladas nas fases que se seguem: a construção da sequência de ensino e análise *a priori*. (Grifos do autor).

Para a construção da análise a priori, Almouloud (2007, p.175) destaca que:

Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis potenciais manipuladas pelo pesquisador:

- as *variáveis macrodidáticas* ou *globais* relativas a organização global da engenharia; e
 - as *variáveis microdidáticas* ou *locais*, relativas à organização local da engenharia, isto é, a organização de uma sessão ou de uma fase.
- (Grifos do autor)

Ainda segundo Artigue (1988, apud ALMOULOU, 2007), o objetivo da análise a priori é determinar como as escolhas feitas pelo professor, podem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido. A qualidade da análise a priori define o sucesso da situação-problema, pois permite ao professor controlar as realizações das atividades feitas pelos alunos e observar as conjecturas formadas as quais podem promover um debate científico em sala de aula.

Nesta fase, o professor deve descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática a ser desenvolvida, analisar a importância dessa situação para o aluno, as possibilidades de ação e estratégias que os alunos podem tomar diante da situação proposta. O professor como mediador do processo organiza a situação adidática de tal forma que o aluno se torne responsável por sua aprendizagem.

A experimentação é o momento de colocar em prática a situação adidática desenvolvida, podendo corrigi-lo se as varáveis locais identificam essa necessidade, resultando em um retorno na análise a priori, complementando-a.

A análise a posteriori é o conjunto de informações que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos na experimentação e que contribui para a melhoria dos conhecimentos didáticos que se tem em relação as condições da transmissão do saber em jogo. É feita a luz da análise a priori e da análise preliminar.

Segundo Almouloud (2007, p.177)

Assim, a análise *a posteriori* depende das ferramentas técnicas (material didático, vídeo) ou teóricas (teoria das situações, contrato didático, etc.) utilizadas com as quais se coletam os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados profundamente pelo pesquisador e as informações daí resultantes serão confrontadas com a análise *a priori* realizada. O objetivo é relacionar as observações com os objetivos definidos *a priori* e estimar a reprodutibilidade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados. (Grifos do autor).

Na Engenharia Didática, o confronto entre a análise a priori e a análise a posteriori é que representa a validação da metodologia usada para esta situação.

4.2 ETAPAS DA PESQUISA

A realização de nossa pesquisa foi dividida nas seguintes etapas:

Etapa I: Estudos preliminares: Revisão da literatura, estudo histórico e epistemológico, considerações sobre o ensino de matemática e a aprendizagem de funções e análise dos livros didáticos

Etapa II: Estudo da Teoria das Situações com foco sobre as situações adidáticas, contrato didático, erros e obstáculos;

Etapa III: Com base nesses estudos, elaboração de uma Sequência Didática apropriada de forma a considerar o conhecimento a priori do aluno e as suas diversas formas de registro, cientes de que mudanças poderão ocorrer durante a aplicação desta sequência, ou seja, rupturas do contrato didático de acordo com as análises de erros e obstáculos.

Etapa IV: Experimentação dessa sequência didática a uma turma pequena de alunos do primeiro ano do ensino médio, a fim de identificar de forma mais precisa os erros e obstáculos enfrentados pelos alunos;

Etapa V: Análise dos resultados da experimentação dessa sequência didática, norteados pelos referenciais teóricos e pelos objetivos, especificados anteriormente.

Os objetivos da sequência consistem em propor atividades que permitam ao aluno compreender o significado e comportamento da Função Exponencial, de forma a ser capaz de não apenas resolver um problema que envolva a função exponencial, mas também de criar um problema que seja modelado por uma função exponencial. As atividades foram planejadas de acordo com as respostas dos alunos a cada situação didática proposta.

4.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Participaram da pesquisa 12 alunos do 1º ano do ensino médio, do Colégio José de Anchieta localizado em um bairro de classe baixa da Cidade de Dois Vizinhos, Paraná.

A turma é composta de alunos com idade entre 15 e 16 anos, sendo que dentre eles temos uma aluna grávida, mãe solteira e, dois alunos que frequentam a sala de recursos, pois apresentam déficit de aprendizagem.

A experimentação ocorreu durante as aulas de Matemática, sendo o conteúdo Função Exponencial, parte da programação regular da disciplina. Os encontros para a realização da sequência didática foram previstos dentro da carga horária da disciplina. Foi colocado para os alunos que eles colaborariam com uma pesquisa, esclarecendo que suas identificações seriam preservadas.

Como pesquisadora e professora da turma, ressalto que os alunos já haviam tido aulas da parte introdutória de funções, características e definição, o conteúdo de função do 1º grau, 2º grau e função modular.

Porém, apesar disto decidimos verificar o conhecimento dos alunos em relação ao significado de Função. A partir deste diagnóstico, elaboramos a nossa sequência didática. É importante analisar que durante a prática em sala de aula, como professora, não utilizava esta metodologia de ensino, sendo então algo novo, mas que pude considerar muito importante ao observar a participação e evolução dos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem.

CAPÍTULO V

5 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA (SD)

Neste capítulo apresentamos uma SD elaborada para alunos do primeiro ano do ensino médio visando a compreensão do significado da Função Exponencial.

A pesquisa é de caráter qualitativo, na qual professor e aluno, numa situação didática interativa, são levados a uma reflexão permanente sobre suas atividades em sala de aula.

A metodologia de nossa pesquisa tem como referencial a construção de uma SD desenvolvida nas seguintes etapas: Análise a Priori, Aplicação da Sequência e Análise a Posteriori.

Cada Situação Didática (SD) proposta é centrada no aluno, como agente ativo, protagonista da situação e o professor, o mediador dos processos de ensino e de aprendizagem. Sendo assim, a metodologia proposta tem como foco o conhecimento a priori que o aluno tem sobre cada conceito, levando em consideração as diferentes formas de linguagem do aluno, as quais são de extrema importância durante o processo de ensino e aprendizagem.

As SD têm as seguintes características: a) são situações adidáticas, as quais envolvem reflexões sobre o conceito, algo fundamental no desenvolvimento de nossa pesquisa, uma vez que nosso objetivo principal é que os alunos consigam ter autonomia no processo de construção do conhecimento, b) promovem uma radical ruptura do contrato didático, que até então era padrão, pois até a aplicação deste projeto a metodologia de ensino nesta turma de alunos era tradicional, ou seja, todo o raciocínio era desenvolvido pelo professor, o qual transmitia ao aluno, cabendo ao mesmo realizar cópias e reproduzir técnicas.

Dessa forma, as SD são caracterizadas pelos seguintes focos de estudo: a) as dialéticas de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização, no que diz respeito as posições do aluno de acordo com a sua interação com o meio (milieu) e as posições do professor, b) rupturas e negociações inerentes ao contrato didático, as quais acredita-se que podem promover uma relação mais propícia entre aluno e professor, inserindo o aluno a uma posição mais ativa no que diz respeito a evolução dos

conhecimentos matemáticos, c) reflexões sobre erros, obstáculos didáticos gerados pelo ensino proposto pelos livros didáticos e pelo professor.

A Figura 2 se refere às SD realizadas, onde cada SD está associada a um saber, a um Milieu, o qual estabelece as interações entre professor, aluno e saber.

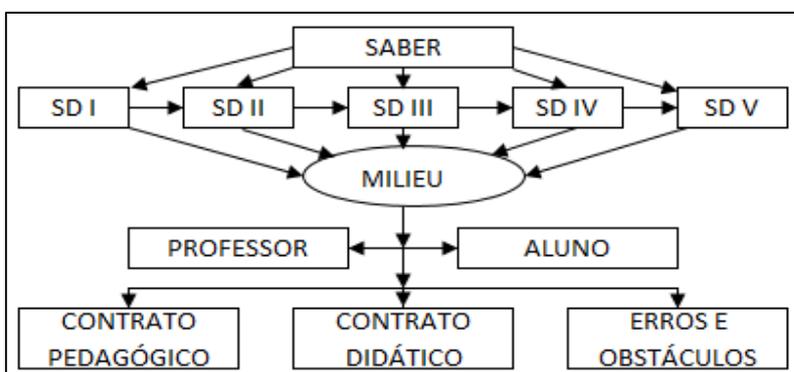


Figura 2: Estrutura da Sequência Didática
Fonte: Elaborado pelos próprios autores

A aplicação do projeto foi realizada em 7 encontros. O Quadro 4 refere-se as atividades aplicadas em cada encontro, bem como o tempo utilizado em cada um desses encontros.

Situação Didática (SD)	Tempo (horas/aula)
SD-I Momento I, II, III (Encontro 1) – Atividades 1, 2 e 3	2 horas – aulas (90 minutos)
SD-I Momento IV (Encontro 2) – Atividade 4	1 hora – aula (45 minutos)
SD-I Momento V (Encontro 3) – Atividade 5	30 minutos
SD-II (Encontro 4) – Atividade 6	2 horas – aulas (90 minutos)
SD-III (Encontro 5) – Atividade 7	2 horas – aulas (90 minutos)
SD-IV (Encontro 6) – Atividade 8	2 horas – aulas (90 minutos)
SD-V (Encontro 7) – Atividade 9	2 horas – aulas (90 minutos)

Quadro 4: Encontros e tempo gasto para a aplicação do projeto

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.1 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) – MOMENTO I (MO I) (ENCONTRO 1)

A SD I – MO I (Figura 4) é caracterizada por ser uma avaliação diagnóstica devido ao fato de que os alunos já haviam tido aula durante um mês sobre alguns tópicos de Funções, tais como: a parte introdutória de funções, características e

definição, conteúdo de função do 1º grau, 2º grau e função modular. Sendo assim, espera-se que os alunos escrevam algo que deixe explícito a ideia que eles têm do conceito de função, através da utilização de qualquer forma de registro. Por isso na Atividade 1 (Figura 3) é permitido que os alunos utilizem o recurso de desenhos, figuras, etc. E, de certa forma, existe uma expectativa de que os alunos expressem a ideia deste conceito na forma de registro de tabelas, fórmulas, simbólico, gráfico ou desenho.

i. Diga tudo o que você sabe sobre a palavra:

FUNÇÃO

Utilize o recurso que achar necessário para descrevê-la: desenhos, figuras...

Figura 3: SD I – MO I - Atividade 1

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Apesar da SD I – MO I ser caracterizada por uma atividade diagnóstica, foi aplicada como uma situação de aprendizagem, respeitando as dialéticas de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização, as quais são esquematizadas na Figura 4 e, detalhadas no Quadro 5. Durante as fases destas dialéticas a professora atuou como observadora e/ou mediadora com intervenções de maneira a não prejudicar a participação do aluno durante o processo.

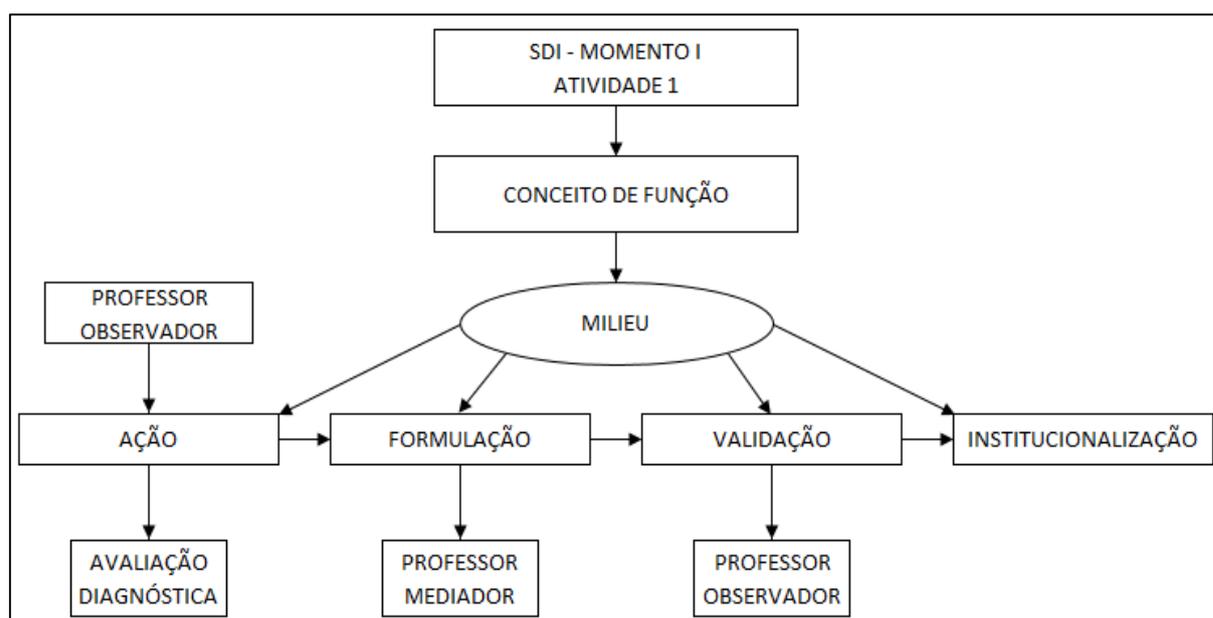


Figura 4: Estrutura de Análise da Situação Didática I - Momento I

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática Sistematização do tratamento, conversão e mudança de registro.
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador	S -1 Aprendizagem Mudança de Registro
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência
Ação	M -3 Milieu Material SDI: MO I – Avaliação Diagnóstica	E -3 Analisar os saberes relacionados ao MO I	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva, situação de reflexão

Quadro 5: Estrutura do Milieu – Situação Didática I – Momento I

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.1.1 Aplicação da Situação Didática I (SD I) – Momento I (MO I) (Encontro 1) - Experimentação

Na SD I – MO I a professora propôs a Atividade 1 (Figura 3) aos alunos e, estabeleceu o contrato pedagógico a partir das seguintes regras: a) atividade de caráter individual, sem consulta ao colega, a professora e a qualquer tipo de material didático, b) tempo de 15 minutos para resolução da atividade, a qual deve ser entregue a professora para iniciar uma discussão sobre as respostas da Atividade.

Para a determinação da situação objetiva (S-3) tem-se o meio material (M-3), organizado pela professora como um meio a fim de provocar uma situação adidática motivadora, a partir da Atividade 1 (Milieu, Figura 3) que induzirá o aluno a usar o seu conhecimento sobre a ideia que ele tem do que seja função. A partir da situação (S-3) ocorrem situações de desestabilização/reconstrução de acordo com as sequências didáticas e as interações em grupo, necessárias para a aquisição do conhecimento.

Ação: Situação autônoma de cada um dos alunos, posicionados como sujeitos E-3, inseridos no milieu M-3, o qual é constituído dos objetos da situação

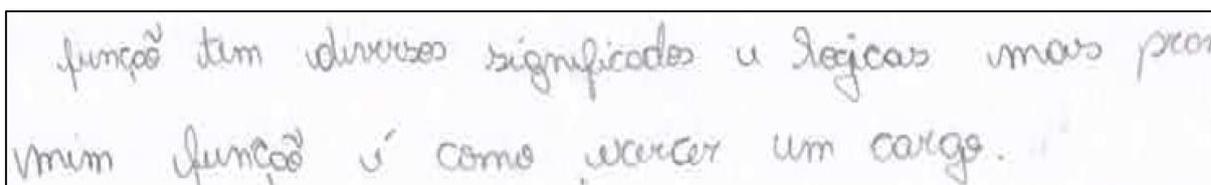
objetiva S-3, com os quais E-3 estabelece uma relação. Nesta etapa, E-3 age, tentando responder a Atividade 1 (Figura 3) por intermédio do conhecimento prévio.

A Tabela 4 apresenta os tipos de registros utilizados pelos alunos na Atividade 1 (Figura 3).

Tabela 4: Resultados (Atividade 1)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolos
Linguagem Natural (LN) e Linguagem Matemática (LM)	A ₁ e A ₂	2	14 e 15
Linguagem Natural (LN)	A ₃ , A ₄ , A ₅ , A ₆ , A ₇ , A ₈ , A ₁₁ , A ₁₂	8	7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13
Deixou questão em branco (B)	A ₉ e A ₁₀	2	
Total		12	

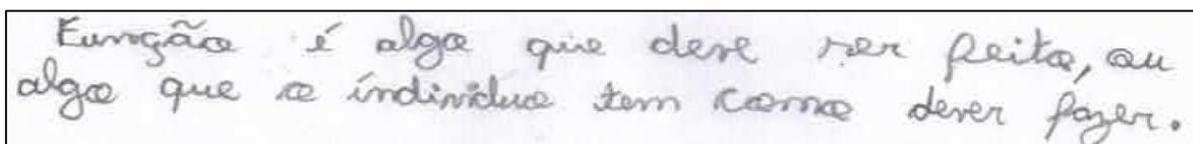
Fonte: Elaborado pelos próprios autores



função tem diversos significados e logicas mas para mim função é como exercer um cargo.

Protocolo 7: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁₁



Função é algo que deve ser feito, ou algo que o indivíduo tem como dever fazer.

Protocolo 8: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁₂

Função tem muitas formas de entendê-la.
 a palavra função é muito utilizada no matemático apesar
 que muitos alunos não entendem.
 Já em português tem vários tipos de funções que
 se encaixam em textos e etc...
 Mas a função mais conhecida é a obrigação do dia a dia
 de fazer os cursos em casa no serviço, e até mesmo na
 escola. O professor tem a função de dar aula ao aluno, já o
 aluno tem a função de estudar o professor.
 Isso é o que entendo sobre funções.

Protocolo 9: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₇

É muito utilizada na Matemática, acho que é um tipo de Equação
 em português significa algo a que você foi designado.

Protocolo 10: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₅

A Palavra Função tem muitos significados: É algo que agente
 tem como dever no vida, alguma utilidade em algo, e até mesmo
 no matemática. Há Fórmulas de Função e diversos tipos de função.

Protocolo 11: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₃

Existem vários tipos de função tem função de 1º grau
 função de 2º grau, função ^{na matemática} modular etc. na língua
 portuguesa a função pode ser o que uma pessoa faz,
 dentro de uma determinada empresa, e na vida real
 tem uma função é necessário que pessoas moram por
 outras fiquem raras e cada um tem uma função.

Protocolo 12: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₈

Função é algo que você executa como um trabalho ou algo que você tá fazendo só por fazer ou sendo na matemática tem diversos tipos função para estudar e aprender durante os estudos.

Protocolo 13: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₄

É a sua função, por exemplo no seu trabalho a sua função é exercer a sua obrigação, no colégio os alunos tem a função de estudar, na matemática é algo que está presente em nosso cotidiano. Por exemplo em um gráfico a sua função está definida se para cada elemento do eixo x a uma única imagem correspondente no eixo y . Também por exemplo comprei algo e paguei a função era o preço desse algo que comprei.

Protocolo 14: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁

É a função aplicada na vida é como se fosse algo para você fazer, por exemplo a função do professor é dar aula, ou seja o professor tem que dar aula. Função é algo que dentro que fazer, é, você exercer sua função.



A função é uma área da matemática. Essa área é praticamente uma coisa muito simples. Cada função, por um nível que pareça sempre está em gráfico. Tem a função de 5º grau. Ex: $x - 4 = -10$
 Função ao ². Ex: $x^2 - 4 \cdot 5$ - Função Modular. Ex: $|5| = 5$ ou $| -4 | = 4$
 Função na matemática é fácil fazer, mas um tanto quanto difícil de descrever.

Protocolo 15: Resposta SD I – MO I

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₂

Formulação: A partir da resposta dos alunos iniciou-se um diálogo estimulado por perguntas da professora, respostas e/ou perguntas dos alunos e devoluções da professora. Neste diálogo os alunos comentaram sobre as suas respostas conforme os protocolos 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 e, a troca de ideias entre os alunos provocou a conversão da linguagem natural para a linguagem matemática, a partir da observação de um dos alunos sobre a dependência de y em relação a x em uma função. A fim de reforçar este conceito e, com o objetivo de conversão do registro da linguagem natural (usada pela maioria dos alunos) para o registro de tabelas de valores, registro de fórmulas, registro gráfico ou desenho e registro simbólico, estabeleceu-se o seguinte Milieu M-1: Comentamos que a partir de mudanças na variável x , ocorrem mudanças na variável y e, que estas mudanças são realizadas através de uma função. Então, como descrever estas funções e, como estas mudanças ocorrem a partir de um desenho gráfico?

Os alunos posicionados como sujeito E-1, em uma situação de aprendizagem, formularam e descreveram as suas funções $f(x)$ utilizando diversas formas de registros (Protocolos 16,17,18 e 19).

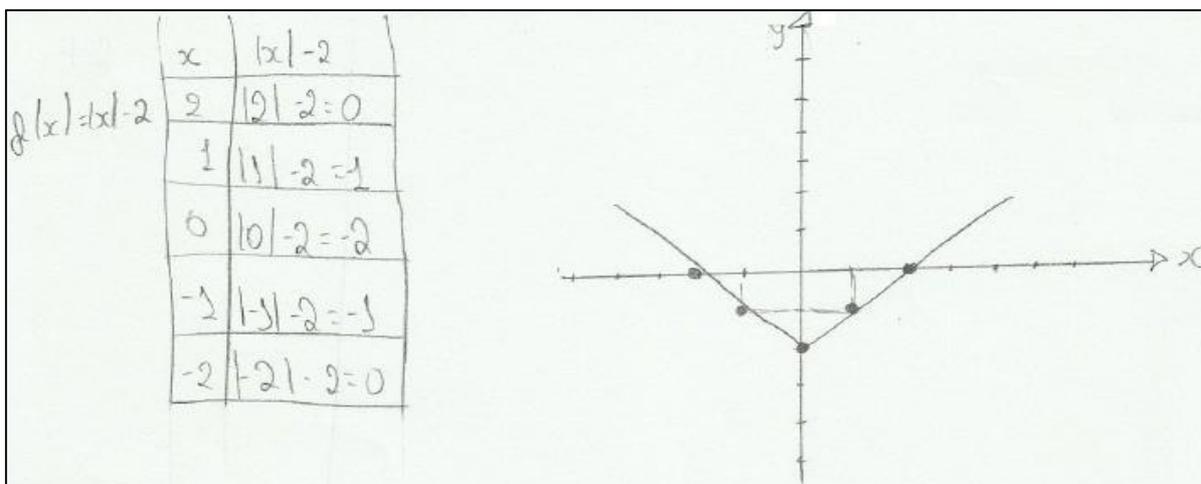
Validação: Nesta etapa, cada aluno posicionado como sujeitos E-1, argumentou, de forma a justificar o que assimilaram na situação S-1, ou seja, que uma função pode ser representada por um determinado registro e, que y varia em função de x , ou seja, y depende de x .

A Tabela 5 mostra os tipos de registros utilizados pelos alunos na Validação. Ao compararmos com as respostas dos protocolos anteriores (Protocolos 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15) nota-se que ocorreu uma mudança de registro da linguagem natural para a linguagem matemática, a partir de registros gráficos, simbólicos e de desenho, algo que eles não tinham expressado em suas respostas anteriores (Protocolos 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15).

Tabela 5: Resultados (Validação - Atividade 1)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolo
Linguagem gráfica (LG)	A ₁ , A ₄ , A ₅ , A ₂ , A ₉ , A ₇ , A ₈	7	16
Linguagem Simbólica (LS)	A ₁₁ , A ₃ , A ₁₂	3	17 e 18
Linguagem de Desenho (LD)	A ₆	1	19
Deixou questão em branco (B)	A ₁₀	1	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores



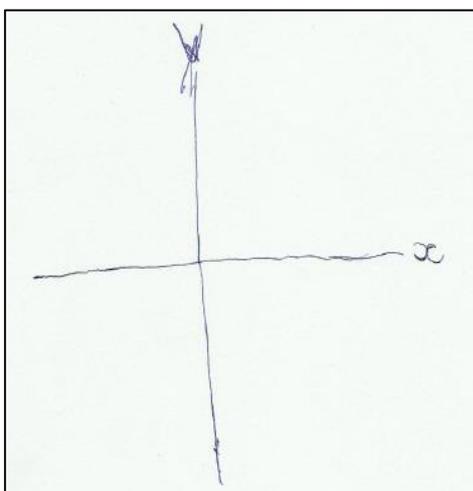
Protocolo 16: SD I - MO I – Registro Gráfico - Validação
 Fonte: Elaborado pelo aluno A₂

Handwritten record for Protocol 17 showing the equation $F = x$.

Protocolo 17: SD I - MO I – Registro Simbólico - Validação
 Fonte: Elaborado pelo aluno A₃

Handwritten record for Protocol 18 showing the mapping $x \rightarrow y$.

Protocolo 18: SD I - MO I – Registro Simbólico - Validação
 Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₂



Protocolo 19: SD I - MO I – Registro de Desenho - Validação
 Fonte: Elaborado pelo aluno A₆

Institucionalização: Nesta etapa a professora a partir dos registros dos alunos, fez a institucionalização, conforme a Figura 5.

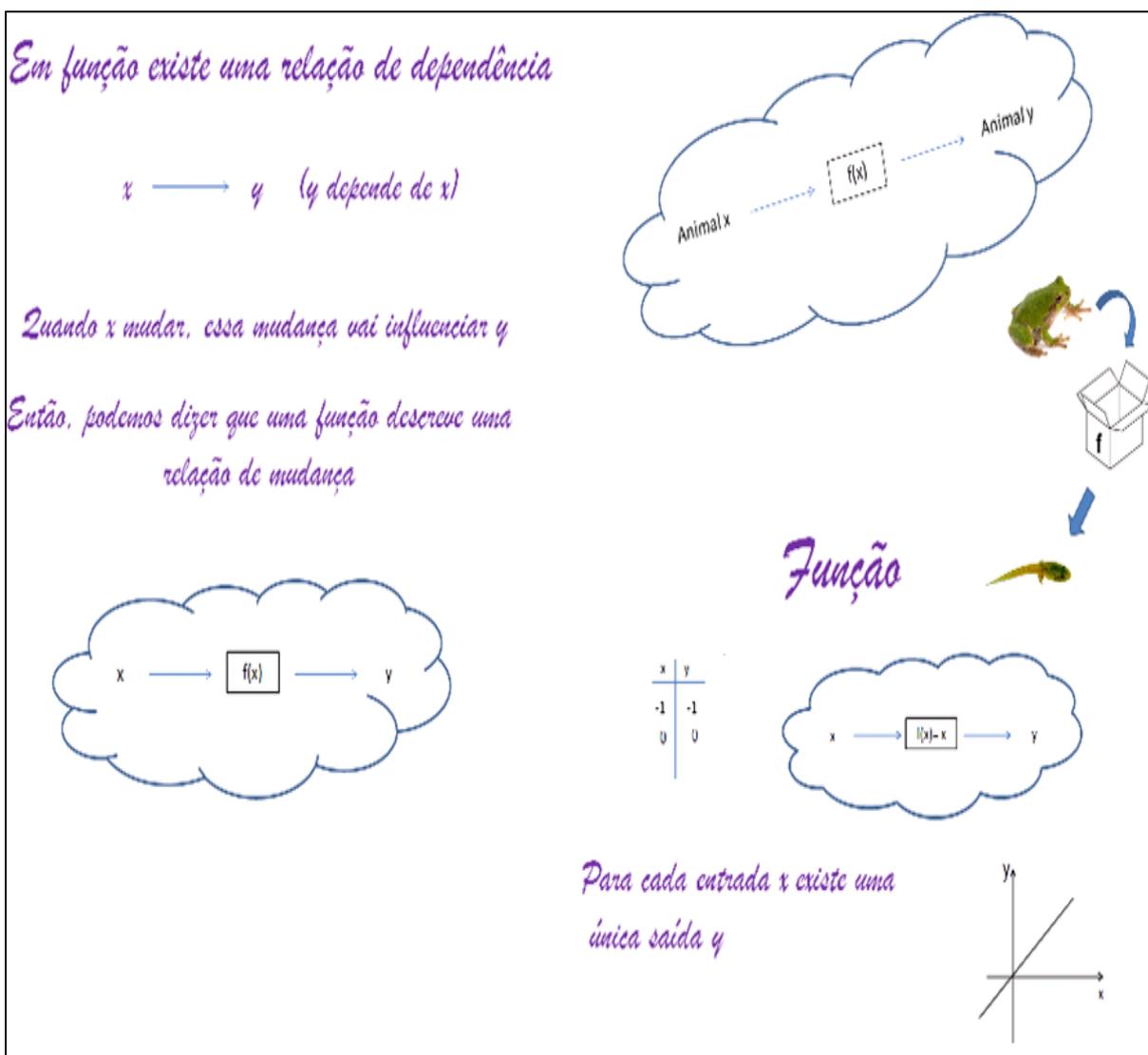


Figura 5: Institucionalização
Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.1.2 Análise a Posteriori da Situação Didática I (SD I) – Momento I (MO I) (Encontro 1)

As expectativas esperadas na Análise a Priori não foram contempladas nas respostas dos alunos à Atividade 1 (Figura 3). Observou-se uma dificuldade dos alunos em escrever o conceito de Função na linguagem matemática (Protocolos 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13) exceto os Protocolos 14 e 15, que apesar de definir em uma linguagem natural, também associaram “função” a partir da “existência de um gráfico”. De uma forma geral, os resultados foram surpreendentes, devido a duas observações

importantes: a) a maioria dos alunos não relacionou a palavra função ao conceito matemático e, sim a “cargo que uma pessoa exerce”, houve uma tendência em associar o conceito de função a definição na língua portuguesa, b) nenhum aluno utilizou algum registro sugerido no enunciado da Atividade: “Utilize o recurso que achar necessário para descrevê-la: desenhos, figuras...”

Nota-se uma questão de linguagem, segundo Vigotsky (1987) é através da linguagem que são expressados e internalizados os significados constituídos por meio da vivência e das interações sociais que a criança ou o adolescente estabelece durante sua trajetória. Dessa forma, compreende-se que em um primeiro momento a ideia que os alunos trouxeram de Função refere-se ao significado que eles tinham na linguagem natural.

De uma forma muito rigorosa, a maioria das respostas poderiam ser classificadas como erradas, mas em processos de ensino e de aprendizagem, qual é a noção de erro? Nosso trabalho de pesquisa é fundamentado na definição de erro de Brousseau (1983 apud ALMOULOU, 2007, p.131), para ele, o erro é a expressão, ou a manifestação explícita, de um conjunto de concepções espontâneas, ou reconstruídas, que, integradas em uma rede coerente de representações cognitivas, tornam-se obstáculo à aquisição e ao domínio de novos conceitos.

Sendo assim, surge a seguinte preocupação: Existem obstáculos a serem superados, pois mesmo depois de um mês de aula sobre Funções, os alunos ainda não abandonaram o conceito intuitivo, originário da linguagem natural. Tentaremos a partir dos resultados desta pesquisa fazer algumas reflexões sobre possíveis obstáculos.

Brousseau (1983, apud ALMOULOU, 2007, p.136) afirma que:

Organizar a superação de um obstáculo consistirá em propor uma situação suscetível de evoluir e de fazer evoluir o aluno, segundo uma dialética conveniente. Não se trata de comunicar as informações que se quer ensinar, mas em encontrar uma situação em que somente elas satisfaçam ou atinjam a obtenção de um resultado satisfatório – [...] - no qual o aluno se investiu.

Na mesma linha de pensamento, concordamos com Pozo (2002), que o primeiro grande passo para o sucesso nos processos de ensino e aprendizagem é criar condições para o professor pensar sobre os resultados de sua ação pedagógica.

Cabe ao professor refletir sobre a sua ação pedagógica para tentar compreender e identificar os obstáculos e procurar adaptar a situação didática, principalmente no que diz respeito ao contrato didático.

Com o objetivo de atingir as metas estipuladas na Análise a Priori (seção 5.1) iniciou-se uma discussão na fase da formulação. Esse tipo de discussão é uma das características do tipo de metodologia abordada em nossa pesquisa e, que se insere na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986 apud ALMOULOU, 2007, p.31), a qual busca criar um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o milieu (ou meio) no qual a aprendizagem deve se desenrolar. E, que nessa perspectiva, a matemática deixe de ser considerada apenas como regras mecânicas, mas como uma linguagem possível de ser compreendida. O objetivo é procurar dar significado para as situações matemáticas e, construir um ambiente favorável ao jogo didático, criando espaços de diálogos entre os elementos de uma relação didática.

No momento em que é definido o Milieu M-1, estabelece-se a ruptura do contrato didático. Implicitamente a professora deixa claro que almeja que os alunos façam a mudança de registro, ou seja, da linguagem natural para a linguagem matemática.

Essa ruptura de contrato ocasionada pela intervenção da professora estabelecerá um momento de reflexão pelos alunos e, é uma tentativa proposta pela professora enquanto mediadora e responsável pela aprendizagem do aluno, a expectativa é que durante esse momento ocorra a desconstrução do que já está previamente construído/internalizado pelos alunos.

Neste caso, esta situação é caracterizada por um tipo de obstáculo ontogênico. A complexidade em se entender o conceito de função pode estar acima da capacidade de atenção do aluno, em face de um conhecimento intuitivo antigo que foi eficiente em certas situações. Por isso mesmo são resistentes e vão ressurgir várias vezes, mesmo depois do aluno ter rejeitado o modelo “errado”.

Garcia (1998) apoia-se em Pozo (1994), para apontar que o conhecimento que entendemos por intuitivo, muito dificilmente é abandonado, pois apresenta raízes fortes em função de ser constituído, muitas vezes, historicamente e socialmente.

Porém, existe um fato importantíssimo e, que o professor deveria saber e refletir sobre o mesmo: existem diversos obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de função. A própria evolução histórica do conceito de função sugere que não deve ser fácil para os estudantes aprenderem este conceito. Muitos estudos realizados na área de Educação Matemática apontam que o conceito de função tem se revelado de difícil assimilação por parte dos alunos, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior.

As investigações de diversos pesquisadores, (SIERPINSKA, 1992; VINNER, 1992; RÉGO, 2000) têm mostrado que as ideias de variável, domínio, contradomínio e imagem, que permeiam a compreensão do conceito, já trazem grande complexidade para a aprendizagem pelos alunos.

Segundo Sierpinska (1992), muitos alunos não fazem a discriminação entre variáveis dependentes e independentes quando estão diante de uma fórmula de função, representadas por letras como x ou y . Este é um obstáculo epistemológico à construção do conceito de função uma vez que a ordem das variáveis é vista como irrelevante. Há uma forte convicção de que quando uma fórmula que representa uma função é dada, em que aparece x e $f(x)$, deve-se substituir o valor da variável independente “ x ” pelo número dado. Aqui, a ordem das variáveis não tem importância. A fixação do aluno no raciocínio puramente algorítmico de que na fórmula sempre deve ser encontrado o valor da variável dependente $f(x) = y$ é de tal forma determinante, que não consegue perceber que a variável que está sendo procurada é a variável independente “ x ”. Para Sierpinska (1992), uma condição necessária para a aprendizagem do conceito de funções consiste na discriminação entre as variáveis dependentes e independentes.

Constatamos este fato ao analisarmos os Protocolos 17, 18 e 19, nos quais é explícito o grau de dificuldade dos alunos ao relacionar as variáveis dependentes e independentes e em estabelecer uma lei de formação.

A partir dos resultados apresentados na Tabela 5, observa-se que a ruptura do contrato didático, ocasionada quando é definido o Milieu M-1, estabeleceu um momento de reflexão pelos alunos e, foi algo determinante na mudança de registro dos alunos, favorecendo a ação do mesmo durante o seu processo de aprendizagem.

Apesar da Atividade 1 ser uma atividade a princípio diagnóstica, o fato de ter sido desenvolvida à luz da Teoria das Situações Didáticas, favoreceu a uma análise e reflexão tanto da postura da professora diante de sua metodologia anterior, quanto da postura do aluno durante o processo de ensino e aprendizagem.

Observando as respostas dos alunos na Tabela 4 e as respostas dos alunos na Tabela 5, pode-se notar que o aluno foi capaz de se expressar matematicamente e validar a sua resposta.

5.2 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA (SD I) – MOMENTO II (MO II) (ENCONTRO 1)

Espera-se que o aluno escreva a ideia que ele tem da palavra exponencial e, que associe a palavra expoente de alguma forma, lembrando que expoente tem a ver com potência, assunto do ensino fundamental: potência com expoente natural, potência com expoente inteiro. A situação ideal seria que o aluno refletisse sobre potência e expoente e que de forma intuitiva associasse a palavra exponencial a algo que aumenta muito ou diminui muito.

ii. Diga tudo o que você sabe sobre a palavra:

EXPONENCIAL

Utilize o recurso que achar necessário para descrevê-la: desenhos, figuras...

Figura 6: Atividade 2

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Na SD I – MO II (Figura 6), o Milieu e as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas são esquematizadas na Figura 7 e detalhadas no Quadro 6.

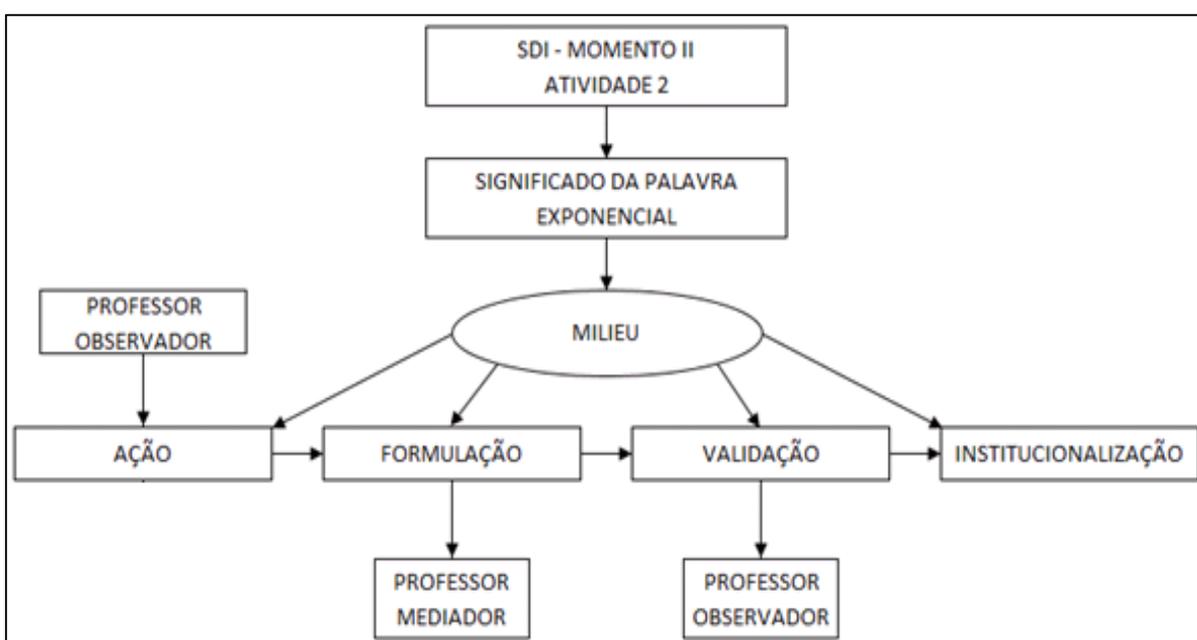


Figura 7: Estrutura de Análise da SD I – MO II

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática, Sistematização do tratamento, conversão da linguagem natural para a linguagem matemática.
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Mediador, Diálogo transcrito no Quadro 6	S -1 Aprendizagem
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador: consulta ao colega e ao dicionário	S -2 Situação de exposição do saber
Ação	M -3 Milieu Material SDI: MO II: Exponencial	E -3 Analisar os saberes relacionados a palavra exponencial	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva situação de reflexão, conhecimento prévio do significado da palavra exponencial

Quadro 6: Estrutura do Milieu – Situação Didática I – Momento II

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.2.1 Aplicação da Situação Didática (SD I) – Momento II (MO II) (Encontro 1)

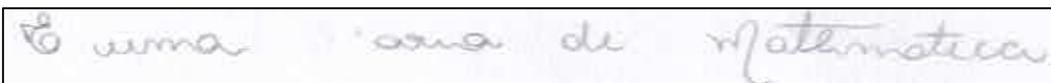
Na SD I – MO II é estabelecido o Milieu, Atividade 2 (Figura 6) aos alunos e, o mesmo contrato pedagógico da SD I – MO I, seção 5.1.

A Tabela 6 apresenta os resultados da Atividade 2 (Figura 6).

Tabela 6: Resultados (Atividade 2)

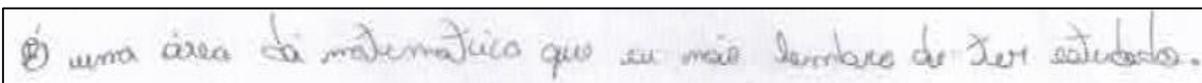
Casos	Alunos	Qtd	Protocolos
Relacionado ao cálculo de crescimento e decréscimo de população (IBGE)	A ₁	1	22
Comentaram que é área da matemática	A ₅ , A ₂ , A ₉ , A ₈	4	20, 21
Deixaram a questão em branco	A ₁₁ , A ₁₀ , A ₃ , A ₄ , A ₆ , A ₇ , A ₁₂	7	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores



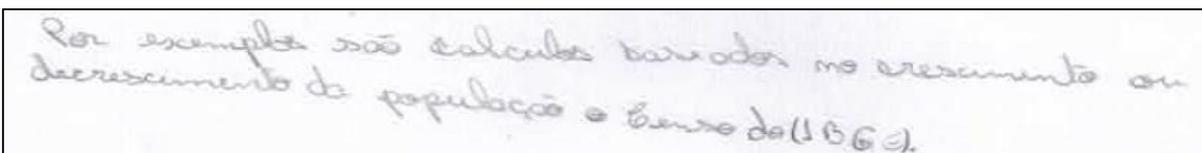
Protocolo 20: Resposta SD I – MO II

Fonte: Elaborado pelo aluno A₉



Protocolo 21: Resposta SD I – MO II

Fonte: Elaborado pelo aluno A₂



Protocolo 22: Resposta SD I – MO II

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁

P₁ - Pessoal, então no dicionário, exponencial significa, o que constitui um expoente, relativo a expoente.
 R₁ - Professora, o que é um expoente?
 P₂ - O que é um expoente? Quem lembra o que é um expoente?
 R₂ - Por exemplo, em 2², o 2 é o expoente”
 D₁ - Isso mesmo, em 2², o 2 é o expoente. O 2 que está em cima é o expoente.

Quadro 7: Diálogo entre os alunos (P_i: perguntas da professora, R_i: respostas e/ou perguntas dos alunos, D_i: devoluções da professora)

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.2.2 Análise a Posteriori da Situação Didática (SD I) – Momento II (MO II) (Encontro 1)

As expectativas esperadas na Análise a Priori não foram contempladas nas respostas dos alunos à Atividade 2 (Figura 6).

Com a análise dos resultados foi possível observar que os alunos não tinham conhecimento do significado da palavra exponencial mesmo na linguagem natural. Percebe-se que apesar de potenciação ser um conteúdo já estudado pelos alunos no ensino fundamental, os mesmos não associaram a palavra exponencial à expoente, conforme o esperado.

Após ler o significado da palavra no dicionário foi possível perceber que uma boa parte dos alunos não sabia o que era expoente e talvez por isso não expressaram uma possível relação entre as palavras. Mas, a fase de validação foi caracterizada por

um diálogo mediado pela professora, onde os alunos que não lembravam o que era expoente, tiveram a oportunidade de lembrar a partir da resposta de colegas da turma. Sendo assim, validaram as suas respostas associando a palavra exponencial a expoente conforme a consulta ao dicionário.

Na fase de institucionalização a professora discutiu com os alunos o significado de expoente em matemática, inclusive realizando algumas revisões do conceito.

Percebemos que os alunos ficaram surpresos com esse tipo de atividade por não ser algo comum em uma aula de matemática. Mas, acreditamos que é de fundamental importância os alunos refletirem sobre os significados das palavras, e, que essa passagem da linguagem natural para a linguagem matemática deve ocorrer a partir de ações/reflexões do aluno e, não através de imposições do professor. O professor deve ser apenas o mediador. Pois partimos do princípio de que a aprendizagem ocorre de fato quando é dado ao aluno o tempo necessário para refletir sobre os seus conceitos e, fica muito claro que para isso o aluno deve interagir com o meio nas diferentes relações com o saber.

5.3 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) - MOMENTO III (MO III) (ENCONTRO 1)

Espera-se que a partir da Atividade 3 (Figura 8) o aluno utilize os conhecimentos adquiridos na SD I MO I e MO II, seção 5.1 e seção 5.2 e, expresse a ideia que eles têm a respeito da função exponencial. A estrutura de análise da SD I – MO III, pode ser verificada na Figura 9.

iii. Tente juntar de forma resumida o que você escreveu nos itens I e II para dizer o que você acha que significa:

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Figura 8: Atividade 3

Fonte: Elaborado pelos próprios autores



Figura 9: Estrutura de Análise da SD I - MO III

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Na SD I – MO III estabeleceu-se o Milieu e as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas, as quais são apresentadas no Quadro 8.

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática Sistematização do tratamento, conversão e mudança de registro
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador	S -1 Aprendizagem Mudança de Registro, da linguagem natural para a linguagem matemática, registro simbólico
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência
Ação	M -3 Milieu Material SD I – MO III Atividade 3	E -3 Analisar os saberes relacionados a ideia de Função Exponencial	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva situação de reflexão

Quadro 8: Estrutura do Milieu – SD I – MO III

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.3.1 Aplicação da Situação Didática (SD I) – Momento III (MO III) (Encontro 1)

Na SD I – MO III é estabelecido o Milieu, Atividades 3 (Figura 8) aos alunos e, o mesmo contrato pedagógico da SD I – MO I, seção 5.1.

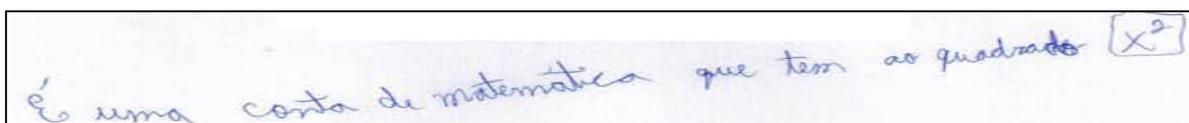
Em muitas das respostas notou-se uma tendência dos alunos em expressar a função exponencial como uma função quadrática, na tentativa de formalização genérica, pois em suas concepções “ao quadrado” é expoente, ou seja, associaram o nome exponencial a expoente, conforme pesquisado no dicionário (SD I, MO II, Atividade 2).

A Tabela 7 apresenta os resultados da Atividade 3 (Figura 8).

Tabela 7: Resultados (Atividade 3)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolos
Relacionou a uma função quadrática	A ₅ , A ₁₁	2	23, 24
É uma função que tem um expoente	A ₃ , A ₄ , A ₂ , A ₉ , A ₇ , A ₈	6	25, 26, 27
Está relacionado ao cálculo de crescimento e decrescimento	A ₁	1	28
Deixaram questão em branco	A ₆ , A ₁₀ , A ₁₂	3	
Total		12	

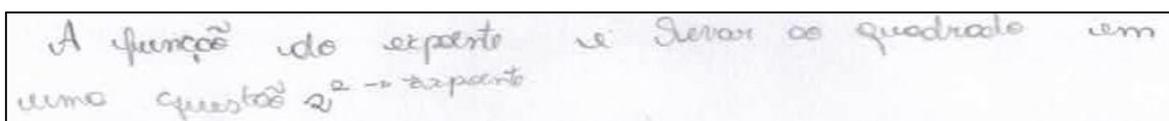
Fonte: Elaborado pelos próprios autores



É uma conta de matemática que tem ao quadrado x^2

Protocolo 23: Resposta SD I – MO III

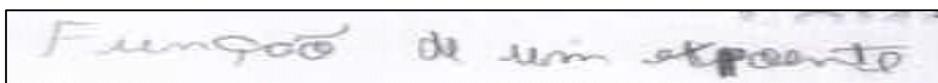
Fonte: Elaborado pelo aluno A₅



A função do expoente se chama ao quadrado em uma questão $2^2 \rightarrow$ expoente

Protocolo 24: Resposta SD I – MO III

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₁



Função de um expoente

Protocolo 25: Resposta SD I – MO III

Fonte: Elaborado pelo aluno A₃

É uma função com o Exponente

Protocolo 26: Resposta SD I – MO III

Fonte: Elaborado pelo aluno A₄

É uma função que tem um expoente. Ex: $x \cdot 4^3$

Protocolo 27: Resposta SD I – MO III

Fonte: Elaborado pelo aluno A₂

Na matemática pode ser o cálculo de crescimento e decréscimo de habitantes.

Protocolo 28: Resposta SD I – MO III

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁

Na fase de Formulação ocorreu a troca de informações entre os alunos.

Os alunos posicionados como sujeito E-1, em uma situação de aprendizagem, formularam e descreveram as suas funções utilizando fórmulas matemáticas. O milieuo M-1 é definido pela questão: Como você representaria uma função exponencial?

A Tabela 8 apresenta os resultados da fase de Validação da Atividade 3 (Figura 8).

Tabela 8: Resultados (Validação - Atividade 3)

Casos	Alunos	Qtd	Porcentagem (%)	Protocolos
Não conseguiram escrever um exemplo de função exponencial	A ₁₁ , A ₁ , A ₄ , A ₅ , A ₂ , A ₉ , A ₇ , A ₈	8	66,67	29, 30, 31 e 32
Deixaram a questão em branco	A ₁₀ , A ₃ , A ₆ , A ₁₂	4	33,33	
Total		12	100	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

$(3^2 + 4^3)$

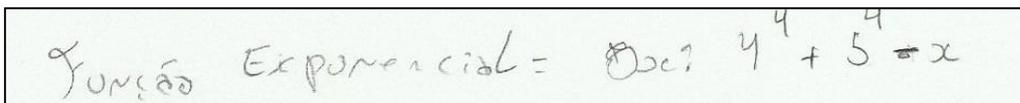
Protocolo 29: Resposta SD I – MO III (Validação)

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₁

$(5^2 + 1)^3$

Protocolo 30: Resposta SD I – MO III (Validação)

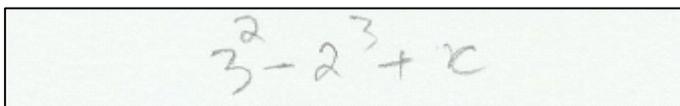
Fonte: Elaborado pelo aluno A₁



Função Exponencial = Base? $4^4 + 5^4 = x$

Protocolo 31: Resposta SD I – MO III (Validação)

Fonte: Elaborado pelo aluno A₂



$3^2 - 2^3 + x$

Protocolo 32: Resposta SD I – MO III (Validação)

Fonte: Elaborado pelo aluno A₄

Na Atividade 3 (Figura 8) os alunos validaram as suas respostas da maneira como compreenderam o significado de função exponencial. Observa-se que os alunos não refletiram sobre o conceito de função, no que diz respeito a variável independente e variável dependente. Associaram exponencial a expoente e, função exponencial a uma função que apresenta um número elevado a um expoente. Em algumas respostas (Protocolo 31 e Protocolo 32) colocaram o x na expressão.

Dessa forma, a professora ao analisar as respostas dos alunos, decidiu fazer a institucionalização usando os registros dos alunos e, mostrando a diferença entre uma função exponencial e uma função quadrática. E, deixando bem claro que o Protocolo 29 e Protocolo 30 não caracterizam uma função e, sim um número. E, que o Protocolo 31 e Protocolo 32 caracterizam uma função linear.

Apesar dos alunos terem estudado estes conceitos anteriormente (antes da aplicação deste projeto), houve a necessidade de se fazer uma revisão dos mesmos, adotando como ponto de partida as respostas dos Protocolos.

Em seguida em função dos resultados da Tabela 7 e Tabela 8, a professora promoveu uma discussão de cada resposta dos alunos e, propôs a Atividade da Tabela 9 e, além disso revisou algumas propriedades de potência tais como:

“Todo número diferente de zero elevado a zero é igual a 1”.

“Todo número elevado a 1 é igual a ele mesmo”

Tabela 9: Desenvolvimento no quadro da SD I - MO III

x	$f(x) = 2^x$
0	$f(0) = 2^0 = 1$
1	$f(1) = 2^1 = 2$
2	$f(2) = 2^2 = 4$

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Ao completar esta tabela a professora discutiu com os alunos os resultados e o comportamento da Função Exponencial. Ao realizar esta atividade, os alunos concluíram que a palavra exponencial lembra “expoente” e, que o que caracteriza a Função Exponencial é o fato de apresentar um expoente. Através dos resultados encontrados ao completar a Tabela 9, observaram que é o expoente que varia resultando em novos valores de $f(x)$. E, que nesta função a base é um número fixo.

5.3.2 Análise a Posteriori da Situação Didática (SD I) – Momento III (MO III) (Encontro 1)

As expectativas esperadas na Análise a Priori não foram contempladas nas respostas dos alunos à Atividade 3 (Figura 8).

Segundo os resultados apresentados na Tabela 7, 50% dos alunos formularam a ideia de que uma função exponencial é uma função que tem um expoente. Mas, não tem a ideia de como é expressa matematicamente a função exponencial.

Em função das respostas dos alunos surgiu um questionamento: Será que os alunos entenderam o conceito de função, ou será que os alunos ainda têm uma resistência em relação a esse conceito? Se ainda apresentam alguma resistência, o que tem se tornado um obstáculo a aprendizagem do mesmo?

Sabe-se do grau de abstração que envolve o conceito de função e, na maioria das vezes, o mesmo é simplesmente colocado para os alunos como um conceito pronto e acabado. Sendo assim, é necessário refletir sobre quais obstáculos podemos (ou devemos) evitar? Quais obstáculos não devemos evitar? Como então superá-los? (BROUSSEAU, 1986 apud ALMOULOU, 2007, p.153)

Neste caso, seguem alguns questionamentos, os quais podem ser considerados obstáculos didáticos que podemos (ou devemos) evitar.

I. Será que o planejamento de aula do professor está levando em consideração o tempo de aprendizagem do aluno?

II. Será que os exercícios em sala de aula e exercícios propostos nos livros didáticos levam o aluno a aprendizagem do significado do conceito, ou são exercícios que de certa forma induzem a um processo de mecanização, de automatização?

III. Que tipo de exercícios é importante para uma aprendizagem significativa? Quantidade ou qualidade?

Durante o desenvolvimento de nossa pesquisa e a partir de observações do processo de ensino aprendizagem dos alunos, procuraremos contribuir com algumas respostas para esses questionamentos.

Temos observado que a fase de validação é de fundamental importância para que os alunos desenvolvam a capacidade de comunicar-se matematicamente e de refletir sobre sua resposta, aumentando seu poder de argumentação. Quando o professor dá a oportunidade ao aluno de validar a sua resposta, ele é capaz de compreender as reais dificuldades dos alunos e, dessa maneira poderá contribuir de forma efetiva para a aprendizagem do mesmo, a partir de situações reprodutíveis conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa, conforme relata Almouloud (2007, p. 31).

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), na primeira parte do capítulo “Caracterização da Área de Matemática” nas considerações preliminares, dentre outras coisas, relatam: “A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade” (BRASIL, 1997, p.19).

É importante ressaltar que as Atividades propostas na SD I, MO I, II e III são atividades investigativas, de reflexão do aluno e, interações com o milieu, importantíssimas no planejamento das próximas SDs. Dessa forma, o conhecimento não é imposto, mas antes experimentado pelo aluno.

5.4 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) - MOMENTO IV (MO IV) (ENCONTRO 2)

É importante ressaltar que todo o planejamento das SDs é reavaliado a fim de elaborar situações didáticas que promovam uma ação do aluno em busca do conhecimento. Sendo assim, em função dos resultados das atividades anteriores no

Encontro 2 a professora passou uma apresentação de slides a qual consistiu de uma apresentação de forma animada e interativa sobre os conceitos de função e de função exponencial. A apresentação caracterizou-se pelo diálogo entre os alunos e a professora, estabelecendo uma ligação entre aluno, professora e saber.

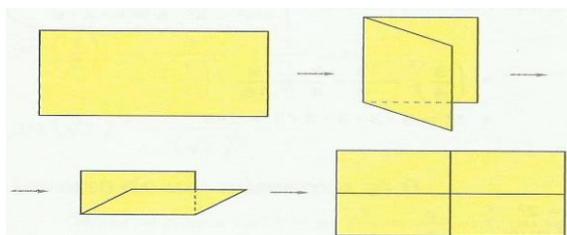
A SD I, MO IV refere-se a uma atividade proposta no livro Contexto & Aplicações (DANTE, 2010, p. 229), o qual propõe uma atividade com dobraduras, a fim de que os alunos possam refletir sobre a construção do conceito de Função Exponencial e seu comportamento (Atividade 4, Figura 10).

Espera-se que a partir do material concreto o aluno identifique o padrão e, consiga escrever usando o registro de símbolos, ou seja, a função $f(x)$ que rege o problema proposto.

Percebeu-se que os alunos ficaram surpresos com esse tipo de atividade, pois até então as SDs anteriores eram investigativas sem o auxílio de material concreto. Espera-se que esta ruptura do contrato didático provoque no aluno uma reflexão sobre o comportamento de uma função exponencial e, que ocorra a mudança de registro da linguagem natural para a linguagem matemática, neste caso utilizando o registro simbólico (a expressão da função).

Vamos fazer uma experiência com dobraduras:

Dobre uma folha retangular pela metade, paralelamente à sua largura e, em seguida, abra-a e anote o número de retângulos que aparecem marcados; Continue dobrando sucessivamente o retângulo encontrado, sempre pela metade e no mesmo sentido. E, a cada etapa, abra totalmente a folha e anote a quantidade de retângulos menores que aparecem marcados nela. O esquema abaixo dá uma ideia do processo:



- a) Complete a seguinte tabela com os resultados obtidos. Vamos chamar de número de dobraduras a quantidade de vezes que o papel foi dobrado a cada etapa.

Número de dobraduras	Número de retângulos resultantes
0	1
1	2
2	
3	
4	

- b) Se forem feitas 6 dobraduras, quantos retângulos ficarão marcados na folha?
 c) Generalize, encontrando a expressão que dá o número de retângulos para n dobraduras.

Figura 10: Atividade 4
Fonte: (DANTE, 2010, p. 229)

Na SD I – MO IV estabeleceu-se o Milieu e as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas, apresentadas no Quadro 9.

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática; Sistematização do tratamento, conversão do problema na linguagem matemática encontrando a função matemática $f(x) = 2^x$.
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador	S -1 Aprendizagem, como descrever o fenômeno que está acontecendo através de um registro matemático.
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses (executar as dobraduras propostas e anotar dados na tabela)	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência
Ação	M -3 Milieu Material SDI-MO IV	E -3 Objetivo: Utilizar objeto manipulável (Folha de sulfite) e analisar quantidade de retângulos a cada dobradura proposta pela atividade.	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva a manipulação da folha, situação de reflexão e atenção.

Quadro 9: Estrutura do Milieu – SD I – MO IV

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.4.1 Aplicação da Situação Didática (SD I) – Momento IV (MO IV) (Encontro 2)

Na SD I – MO IV a professora propôs a Atividade 4 (Figura 10) aos alunos e entregou uma folha de sulfite, leu a atividade para os alunos e, se dispôs a tirar as

possíveis dúvidas referentes ao enunciado da atividade. Estabeleceu o contrato pedagógico a partir das seguintes regras: a) atividade de caráter individual, sem consulta ao colega, à professora e a qualquer tipo de material didático, b) tempo de 20 minutos para resolução da atividade, a qual deve ser entregue a professora para iniciar uma discussão sobre as respostas da Atividade.

Nesta atividade estavam presentes 10 alunos e todos conseguiram desenvolver as letras (a) e (b) da atividade, com exceção do aluno A₅, (Protocolo 33), mas o mesmo respondeu corretamente o item (c). Dessa forma, conclui-se que deve ter se atrapalhado no momento da resolução.

b) Se forem feitas 6 dobraduras, quantos retângulos ficarão marcados na folha?
 ficou com 32 retângulos.

Protocolo 33: Resposta SD I – MO IV

Fonte: Elaborado pelo aluno A₅

A Tabela 10 apresenta os resultados da Atividade 4, letra c.

Tabela 10: Resultados (Atividade 4, letra c)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolo
Não conseguiu encontrar a função matemática.	A ₈	1	34
Encontrou a função matemática	A ₁₁ , A ₁ , A ₅ , A ₉ , A ₇	5	35
Não estava presente	A ₂ , A ₆	2	
Deixou questão em branco	A ₄ , A ₁₂ , A ₃ , A ₁₀	4	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

No Protocolo 34, percebe-se que o aluno completou corretamente a tabela da Atividade 4 (Figura 10), mas, devido a não ter compreendido o processo de potenciação, não conseguiu expressar 64 como 2^6 e assim por diante. Percebe-se que o aluno conseguiu perceber a característica do processo “ e vai fazendo vezes 2”, mas, não conseguiu expressar na forma de potenciação. Um fato que precisa ser trabalhado a fim de que o aluno alcance o nível de abstração necessária para a generalização em termos algébricos.

- c) Generalize, encontrando a expressão que dá o número de retângulos para n dobraduras.

$x = ?$
 $64 : 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$
 o numero e vai aumentando vez 2.

Protocolo 34: Resposta SD I – MO IV

Fonte: Elaborado pelo aluno A₈

$f(x) = 2^n$

Protocolo 35: Resposta SD I – MO IV

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₁

5.4.2 Análise a Posteriori da Situação Didática I (SD I) - Momento IV (MO IV) (Encontro 2)

Uma observação importante é que a falta de alguns alunos é um fator que prejudica a aprendizagem dos mesmos, pois interrompe o processo de aprendizagem. Nesta Atividade, por exemplo, faltaram dois alunos.

Um ponto positivo é que os alunos gostaram da Atividade 4 (Figura 10), pois é uma situação que diz respeito ao aprender fazendo.

Pode-se dizer que de certa forma as expectativas esperadas na Análise a Priori foram contempladas nas respostas dos alunos à Atividade 4 (Figura 10). Pois ao fazer uma comparação dos resultados da Tabelas 7 (SD I – MO III – Atividade 3, Figura 8) e da Tabela 10 (SD I-MO IV, Atividade 4, Figura 10, letra c) pode-se dizer que houve um aprendizado, dos oito alunos que não tinham conseguido escrever a lei da função exponencial (Tabela 8, SD I – MO III – Atividade 3, Figura 8), 5 alunos realizaram a Atividade 4 (Figura 10) e expressaram a lei da função exponencial referente ao problema proposto com um detalhe interessante: os alunos que conseguiram expressar a lei da função, escreveram conforme o Protocolo 35, ou seja, se confundiram com as letras n e x ; Algo considerado um erro comum; a mudança de variável de certa forma provoca uma ruptura do contrato. O aluno está acostumado a

escrever $f(x)$, ou seja, geralmente nos exercícios a variável independente é a variável x , não é comum o professor propor exercícios com variáveis independentes diferentes de x .

Nesta atividade dois alunos faltaram, quatro deixaram em branco e, um aluno tentou expressar a lei da função, mas não conseguiu (Protocolo 34).

Neste caso, observa-se que ainda é preciso refletir sobre o conceito de função exponencial e, colocar o aluno em ação diante de suas dificuldades para que as mesmas possam ser sanadas.

Para Malta (2004), muitas das dificuldades encontradas no estudo da Matemática estão intimamente ligadas à deficiência do uso da linguagem escrita, pois parte do pressuposto de que expressar de forma clara o raciocínio é equivalente à capacidade de entender resultados. O desenvolvimento da capacidade de expressar o seu próprio raciocínio irá promover o desenvolvimento da capacidade de compreensão da Matemática. E vai além, afirmando que:

Sem o desenvolvimento do domínio da linguagem necessária à apreensão de conceitos abstratos (e, portanto extremamente dependentes da linguagem que os constrói) nos seus diversos níveis, não pode haver o desenvolvimento do pensamento matemático (também em seus diferentes níveis) (MALTA, 2004, p. 44 e 45).

Dessa forma, observamos que a metodologia à luz da Teoria das Situações Didáticas, proporciona ao aluno condições de desenvolver a capacidade de expressar o seu raciocínio, algo extremamente importante.

Além disso, devemos levar em consideração que a abstração, generalização não é algo imediato. O processo de abstração, relativo ao ato de abstrair, por sua vez, segundo Dreyfus (2002), diz respeito à capacidade de separar pelo pensamento, ou considerar separadamente, o que não pode ser observado separadamente na realidade. O autor associa com a abstração os processos de generalização e de síntese. A generalização, relativa à habilidade de generalizar, diz respeito à capacidade de concluir a partir de particularidades, a fim de identificar aspectos comuns e expandir domínios de validade. A generalização torna-se importante na medida em que estabelece um resultado mais geral, válido para um grande número de casos, ou na medida em que determina a formulação de um conceito.

Dessa forma, conclui-se que a aprendizagem de um conceito, o que envolve o domínio da linguagem e a capacidade de comunicar-se a fim de expressar o seu raciocínio e ter a capacidade de argumentar defendendo as suas hipóteses, é algo

que demanda tempo, observação do professor e mediação do mesmo sem prejudicar a autonomia do aluno durante o processo. E, isso somente é possível se o professor planejar as situações didáticas, levando em consideração as dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização.

5.5 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA I (SD I) - MOMENTO V (MO V) (ENCONTRO 3)

Após uma atividade com material concreto, achamos importante saber a contribuição desta atividade referente a definição dos alunos em relação a Função Exponencial.

A SD I, MO V refere-se a uma atividade diagnóstica a fim de analisar o desenvolvimento dos alunos em relação a definição de Função Exponencial (Atividade 5, Figura 11).

Espera-se que o aluno reflita novamente sobre a definição identificando as suas dificuldades. Pois, Segundo Paulo Freire (1996, p.2): "... ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para sua própria produção ou sua construção." (FREIRE, 1996, p. 52).

<p>Tente escrever o que você acha que significa:</p> <p>FUNÇÃO EXPONENCIAL</p>

Figura 11: Atividade 5

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Na SD I – MO V estabeleceu-se o Milieu e as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas, apresentadas no Quadro 10.

(Continua)

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática; Sistematização do tratamento, conversação e mudança de registro.

(Conclusão)

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador	S -1 Aprendizagem, significado de função exponencial em matemática.
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência
Ação	M -3 Milieu Material SDI-MO V	E -3 Objetivo: Utilizar conhecimento adquiridos nas situações didáticas anteriores.	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva, situação de reflexão.

Quadro 10: Estrutura do Milieu – SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

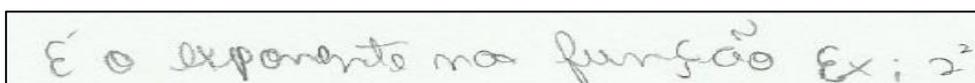
5.5.1 Aplicação da Situação Didática I (SD I) - Momento V (MO V) (Encontro 3)

Na Tabela 11 apresentamos os resultados da Atividade 5.

Tabela 11: Resultados (Atividade 5)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolos
É uma função que tem uma base e um expoente onde quem sofre mudanças é o expoente.	A ₄ , A ₂	2	39, 40
É uma função que tem um expoente	A ₁ , A ₃ , A ₅ , A ₁₁ , A ₁₂ , A ₁₀	6	36, 37, 38, 41, 42, 43
Não estava presente	A ₇ , A ₈	2	
Deixou questão em branco	A ₆ , A ₉	2	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores



É o expoente na função Ex: 2^2

Protocolo 36: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₃

A função exponencial tem que ter o expoente

Protocolo 37: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₀

função exponencial
é a função que
tem que alterar seu expoente
exemplo: 2^2

Protocolo 38: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₂

que muda o expoente e não a base
 $2^2 + 2^3 - x$

Protocolo 39: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₄

Função exponencial é uma função que tem um expoente, mas quem tem que mudar é o expoente e não a base.
Ex: 2^2

Protocolo 40: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₂

Precisa ter um expoente
Ex: $f(x) = 3^x$

Protocolo 41: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁

A função que o expoente tem 2^2 em elevar ao quadrado assim sucessivamente.

Protocolo 42: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₁

função com expoente
ex: os quadrados, os cubos, etc...

Protocolo 43: Resposta SD I – MO V

Fonte: Elaborado pelo aluno A₅

5.5.2 Análise a Posteriori da Situação Didática I (SD I) - Momento V (MO V) (Encontro 3)

É importante observar que é preciso levar em consideração o tempo de aprendizagem dos alunos. Dessa forma, conclui-se que a cada Atividade proposta há uma evolução considerável referente a ideia que os alunos têm da função exponencial. E, que a generalização, essencial para a formalização matemática é algo considerado extremamente difícil. E, por isso, se faz necessário uma série de atividades de reflexão sobre a definição, algo que procuramos aplicar em nosso projeto. Pois a ideia central de nosso trabalho é não impor o conceito ou formalizá-lo, mas que o aluno consiga se expressar matematicamente. E o ideal para a aprendizagem é que haja as retroações do *milieu*.

Analisando as respostas obtidas na SD I – MO III e SD I – Momento V, observa-se um progresso dos alunos, pois no momento V, nenhum aluno relacionou a função exponencial com uma função quadrática, algo considerado muito positivo.

Os dois alunos que relacionaram a função exponencial à função quadrática (A₁₁ - Protocolo 24 e A₅ – Protocolo 23) na SD I – MO III, na SD I – MO V escreveram que é uma função com expoente (Protocolos 42 e 43 respectivamente). Apesar dos alunos não terem conseguido escrever na forma algébrica, fica claro nas respostas que eles entenderam que o expoente varia, assumindo novos valores. Mais uma vez, fica claro como é difícil para os alunos abstrair um conceito e, que na maioria das vezes o professor não percebe o nível elevado desta dificuldade.

Outro resultado positivo é que os alunos A₃, A₁₀, A₁₂ que tinham deixado a questão em branco na SD I – MO III (Figura 8, Tabela 8) conseguiram expressar a ideia que eles têm da função exponencial nesta atividade, Protocolos 36, 37 e 38 respectivamente.

É interessante comparar a resposta do aluno A₄ (Protocolo 32) da Atividade 3 (Figura 8) e a resposta (Protocolo 39) da Atividade 5 (Figura 11). Apesar do aluno não ter escrito corretamente a lei da função exponencial, ele entendeu que a base não muda na lei de uma função exponencial, pois no Protocolo 32, ele tinha escrito a mesma expressão e, alterou a base. É interessante notar que cada aluno tem um processo de evolução do aprendizado e, este deve ser respeitado e, cada pequena evolução deve ser considerada.

Também é importante comparar as respostas do aluno A_2 (Protocolo 31) da SDI – MO III (Figura 8, Tabela 8) e a resposta deste aluno nesta atividade (Protocolo 40), apesar do mesmo ainda não ter conseguido expressar de forma algébrica. Não foi possível medir a evolução dos alunos (A_7 , A_8), pois faltaram na SD I – MO V.

Observa-se que o aluno A_9 e aluno A_6 (sala de recurso) apresentam respostas instáveis, quando pensamos que houve o aprendizado, em uma outra atividade eles deixam a questão em branco.

O aluno A_1 que na SD I - MO III relacionou ao cálculo de crescimento e decrescimento da população (Protocolo 28), mas, não conseguiu expressar um exemplo de função exponencial (Protocolo 30), nesta atividade escreveu que função exponencial é uma função com expoente e deu um exemplo correto de função exponencial (Protocolo 41).

Esta análise detalhada é possível devido a um número reduzido de alunos em sala de aula. Mas, entendemos que este é o papel do professor, acompanhar o desenvolvimento do aluno durante os processos de ensino e de aprendizagem nas situações didáticas, transformando a sala de aula em um campo de pesquisa, no sentido de identificar as dificuldades, os erros e obstáculos que ainda impedem ou favorecem a aprendizagem do aluno. E, além disso, é preciso refletir sobre a sua prática e, ao planejar a sua aula, ser consciente que na maioria das vezes é preciso ocorrer a ruptura do contrato didático, no sentido de favorecer a aprendizagem do aluno.

5.6 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA II (SD II) (ENCONTRO 4)

A SD II (Atividade 6, Figura 12) refere-se a uma atividade que dá autonomia ao aluno para criar uma situação problema e, ao mesmo tempo coloca a prova o conceito que o aluno adquiriu até o momento sobre a Função Exponencial.

Espera-se que o aluno reflita novamente sobre o conceito identificando as suas dificuldades em relação ao mesmo.

Invente um problema que pode ser representado pela lei de formação de uma função exponencial.

Figura 12: Atividade 6

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Na SD II estabeleceu-se o Milieu e as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas, apresentadas no Quadro 11.

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática; Sistematização do tratamento, conversão e mudança de registro
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador	S -1 Aprendizagem, escrever um problema matemático que envolva função exponencial e encontrar a lei da função referente a este problema.
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência
Ação	M -3 Milieu Material SDII	E -3 Objetivo: Utilizar conhecimentos adquiridos nas situações didáticas anteriores.	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva reflexão sobre o conceito de função exponencial.

Quadro 11: Estrutura do Milieu – SD II

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.6.1 Aplicação da Situação Didática II (SD II) (Encontro 4)

Estabeleceu o contrato pedagógico a partir das seguintes regras: a) atividade de caráter individual, sem consulta ao colega, à professora e a qualquer tipo de material didático, b) tempo de 30 minutos para resolução da atividade, a qual deve ser entregue a professora para iniciar uma discussão sobre as respostas da Atividade.

A Tabela 12 apresenta os resultados da Atividade 6 (Figura 12).

Tabela 12: Resultados (Atividade 6)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolo
Inventou o problema mas não conseguiu expressar a função	A ₁₁ , A ₁₀ e A ₄	3	44, 45, 46
Inventou o problema e conseguiu expressar a função	A ₃ , A ₁ , A ₅ , A ₂ , A ₇	5	47
Não estava presente	A ₉ , A ₈ , A ₁₂	3	
Deixou questão em branco	A ₆	1	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Invente um problema que pode ser representado por uma função exponencial.

fevereiro	0	$30\ 000 \cdot 3^0 = 30\ 000 \cdot 3^0$
março	1	$30\ 000 \cdot 3^1 = 90\ 000 \cdot 3^1$
abril	2	$30\ 000 \cdot 3^2 = 30\ 000 \cdot 3^2$
	3	$300\ 000 \cdot 3^3 = 30\ 000 \cdot 3^3$

Protocolo 44: Resposta SD II

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₀

Invente um problema que pode ser representado por uma função exponencial.

no ano 2000 tinha no Brasil 1 bilhão de população
 de 1.000.000 de pessoas a cada 5 anos
 ficou 50x mais

2000	1.000.000
2005	10.000.000
2010	100.000.000
2015	1.000.000.000

Protocolo 45: Resposta SD II

Fonte: Elaborado pelo aluno A₄

Invente um problema que pode ser representado por uma função exponencial.

no mês de janeiro 2 pessoas baixaram o ICW um aplicativo de Web e assim foram dobrando a cada mês o número de pessoas que baixaram.

Janaro	1	2
Fevereiro	2	4
março	3	8
abril	4	16

$$f(x) = 4 \cdot 2^x$$

Protocolo 46: Resposta SD II

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁₁

Invente um problema que pode ser representado por uma função exponencial.

no mês de julho 10 pessoas foram de estudar no colégio José de Anchieta, e no próximo mês isso dobrou vamos ver que aconteceu até novembro.

momento	n. de discentes
Julho	$10 \cdot 2^0$
Agosto	$10 \cdot 2^1$
Setembro	$10 \cdot 2^2$
Outubro	$10 \cdot 2^3$
Novembro	$10 \cdot 2^4$

$$f(x) = 10 \cdot 2^x$$

$$\text{Dominio} = \mathbb{N}$$

Protocolo 47: Resposta SD II

Fonte: Elaborado pelo aluno A₁

Como não houve intervenções da professora durante este processo, a professora em momento posterior, escolheu duas atividades das quais os alunos não expressaram a função que representava o problema e/ou não escreveram

corretamente a função (como por exemplo, o Protocolo 46) e discutiu a correção no quadro com a participação dos alunos.

5.6.2 Análise a Posteriori da Situação Didática II (SD II) (Encontro 4)

As expectativas em relação a Atividade 6 (Figura 12) foram alcançadas, como podemos observar nas respostas dos alunos A₃, A₁, A₅, A₂, A₇. Mas, ainda nota-se a dificuldade de alguns alunos em expressar matematicamente a lei da função exponencial. Em todo caso, percebe-se que os alunos entenderam o comportamento característico da função exponencial (Aluno A₄, Aluno A₁₀ e Aluno A₁₁), pois inventaram o problema, escreveram a evolução do mesmo, apenas não conseguiram expressar matematicamente a partir do registro simbólico. Inclusive o Protocolo 46 (Aluno A₁₁) ao tentar expressar a lei da função, acabou se confundindo, o que demonstra que ainda existem dificuldades. Sendo assim, nesta atividade ficou claro que o professor precisa planejar situações didáticas adequadas para que o aluno supere este obstáculo.

Outro fator interessante é que a partir deste tipo de atividade, podemos identificar o perfil dos alunos. Pois, eles inventaram problemas relacionados ao seu dia-a-dia (pessoas que acessam ao facebook, pessoas que baixam um determinado aplicativo, etc). E a partir das respostas destes Protocolos refletimos sobre os nossos exemplos de situações-problemas em sala de aula, será que não seriam mais atrativos se houvesse uma conexão com a realidade atual dos alunos? Quem sabe a partir de problemas como os problemas apresentados nos Protocolos acima, poderíamos trabalhar as situações-problemas como situações de pesquisa estabelecendo novas interações do aluno com o meio e o saber, a partir de questões desafiadoras.

É importante comentar que a falta do aluno A₆ na Atividade 4 (SD I – MO IV) prejudicou a sua aprendizagem, pois na Atividade 5 (SD I – MO V) o mesmo deixou a questão em branco e, nesta atividade foi o único aluno que deixou a questão em branco. O mesmo pode ocorrer com os alunos A₉, A₈, A₁₂, os quais não estavam presentes nesta atividade.

5.7 ANÁLISE A PRIORII DA SITUAÇÃO DIDÁTICA III (SD III) (ENCONTRO 5)

Na Atividade anterior observa-se que alguns alunos ainda apresentam algumas dificuldades. Dessa forma, como até então as Atividades têm sido realizadas de forma individual, refletiu-se sobre a proposta de uma Atividade em grupo, pois dessa forma, os alunos podem trocar ideias e, assim um favorecer a aprendizagem do outro, ou sanar as dúvidas que ainda existem, a fim de romper com os obstáculos que estão impedindo a aprendizagem.

A SD III (Atividade 7, Figura 13, Figura 14 e Figura 15) refere-se a uma atividade em grupo com o objetivo que haja uma maior interação entre os alunos e, que estes possam sanar as dúvidas que ainda existem em relação ao conceito da Função Exponencial. Além disso, se refere a uma situação adidática, no sentido de que até então os alunos citaram exemplos nos quais o comportamento da função exponencial era crescente e, nas Atividades desta SD irão se deparar com alguns problemas modelados por uma função decrescente, e problemas que envolvem cálculo de porcentagens. Esta atividade promove a ruptura do contrato na expectativa de que haja uma aprendizagem neste sentido.

Grupo 1:

1. Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendencia natural a se desintegrar (emitindo partículas e se transformando em outros elementos). Dessa forma, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Chamamos de meia-vida o tempo que o elemento radiotivo leva para desintegrar metade de sua massa radiotiva.
 - a) O antibiótico Axetil cefuroxina apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo após 12 horas de sua ingestão?



Fonte: <http://www.buscatemedio.com.br/medicamentos/principio-ativo/cefuroxima>

- b) Tente representar por meio de lei de função exponencial, a quantidade de antibiótico presente no organismo após x períodos de 3 horas de sua ingestão?

Figura 13: Atividade 7 – Grupo 1

Fonte: (DANTE, 2010, p.253, com adaptações nossas)

Grupo 2:

1. Ao contrário de um **imóvel**, que fica mais valorizado comercialmente dia após dia, um veículo começa a perder seu valor no instante em que sai da loja. Certo automóvel 0 km, cujo preço pago foi de R\$ 70000,00 tem uma taxa de desvalorização de 2% a cada mês de uso, ou seja, seu valor a cada mês será 98% do valor do mês anterior.
 - a) Com base nestas informações, quanto valerá o carro após 6 meses de sua compra.



Fonte: <http://revista.pensecarros.com.br/noticia/2012/06/depreciacao-entenda-a-logica-da-perda-de-valor-dos-automoveis-3795445.html>

- b) Tente representar através de uma função exponencial, o preço do carro após x meses de sua compra?

Figura 14: Atividade 7 – Grupo 2

Fonte: (BARBOZA, 2014, com adaptações nossas)

Grupo 3:

1. Você aplicou R\$ 2000,00 em uma caderneta de poupança que rende 1 % ao mês.
 - a) Calcule o saldo dessa caderneta após 5 meses.



Fonte: <http://portal730.com.br/eco-nomia/governo-preve-salario-minimo-de-r-78806-para-2015>

- b) Tente representar o saldo dessa caderneta após x meses através de uma função exponencial?

Figura 15: Atividade 7 – Grupo 3

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

As posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas são vistas no Quadro 12.

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática; Sistematização do tratamento, conversão e mudança de registro encontrando a função.
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador. Observa as conjecturas, estratégias e sucessos dos alunos.	S -1 Aprendizagem como encontrar a função matemática referente ao problema proposto.
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência, conjecturas sobre como encontrar a função que representa o problema proposto
Ação	M -3 Milieu Material SDV e Situações didáticas anteriores.	E -3 Conhecimentos adquiridos nas situações didáticas anteriores.	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva reflexão em grupo para encontrar a função que representa o problema

Quadro 12: Estrutura do Milieu – SD III

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.7.1 Aplicação da Situação Didática III (SD III) (Encontro 5)

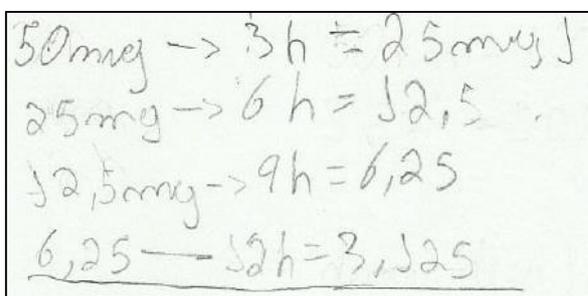
Estabeleceu-se o contrato pedagógico a partir das seguintes regras: a) atividade em grupo. Cada grupo recebeu uma atividade diferente, no entanto com as mesmas perguntas e objetivos. b) tempo de 35 minutos para resolução da atividade, a qual deve ser entregue a professora para iniciar uma discussão sobre as respostas da Atividade.

Nesta atividade estavam presentes apenas 8 alunos, os quais foram divididos em grupos: Grupo 3: A₁ e A₁₂ e 2 grupos de três alunos, Grupo 1: A₄, A₅ e A₉ e Grupo 2: A₂, A₃ e A₈.

Em relação ao primeiro grupo, a professora teve que refazer a leitura do problema com os alunos para a compreensão do mesmo, pois o grupo entendeu que se em 3 horas metade da substância do antibiótico teria desaparecido do organismo,

mais 3 horas iria desaparecer a outra metade, não tendo mais substâncias no organismo do indivíduo que tomou o remédio. Ou seja, os alunos não tinham compreendido o significado de meia-vida em um processo de desintegração. Essa palavra, e este tipo de questão levou a uma desestabilização e, a discussão de significados, de processos. Depois de um tempo de conversa e discussão, os alunos compreenderam que a meia-vida é calculada sobre a quantidade de antibiótico ainda existente no organismo.

Após a compreensão do problema o grupo resolveu a letra (a) da atividade sem apresentar nenhuma dificuldade. (Protocolo 48)



Handwritten calculations showing the decay of 50mg of antibiotic over time:

$$50\text{mg} \rightarrow 3\text{h} = 25\text{mg}$$

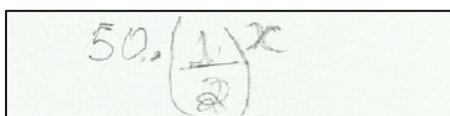
$$25\text{mg} \rightarrow 6\text{h} = 12,5$$

$$12,5\text{mg} \rightarrow 9\text{h} = 6,25$$

$$6,25 \rightarrow 12\text{h} = 3,125$$

Protocolo 48: Resposta SD III - Letra (a)
Fonte: Elaborado pelo Grupo 1

Na letra (b) o grupo também resolveu sem nenhuma dificuldade a questão proposta, mas esqueceu de colocar " $f(x) =$ " antes da função encontrada (Protocolo 49).



Handwritten mathematical expression: $50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Protocolo 49: Resposta SD III - Letra (b)
Fonte: Elaborado pelo Grupo 1

O segundo grupo também apresentou um pouco de dificuldade de interpretação do problema, visto que analisaram que a taxa de desvalorização era sempre aplicada ao valor inicial. A professora leu novamente o problema com os alunos, iniciou-se a discussão em grupo e, em seguida eles observaram que no texto está explícito que a desvalorização ocorria a cada mês de uso e não em relação ao valor inicial do carro. Na sequência os alunos resolveram a atividade.

A letra (a) foi resolvida corretamente de maneira algébrica (Protocolo 50).

$$\begin{aligned}
 70.000 \cdot 0,98 &= 68.600 \\
 68.600 \cdot 0,98 &= 67.228 \\
 67.228 \cdot 0,98 &= 65.883,44 \\
 65.883,44 \cdot 0,98 &= 64.565,77 \\
 64.565,77 \cdot 0,98 &= 63.274,45 \\
 63.274,45 \cdot 0,98 &= 62.008,96
 \end{aligned}$$

Protocolo 50: Resposta SD III - Letra (a)

Fonte: Elaborado pelo Grupo 2

Na letra (b) o grupo também não apresentou dificuldades, encontrando a função corretamente (Protocolo 51).

$$f(x) = 70.000 \cdot 0,98^x$$

Protocolo 51: Resposta SD III - Letra (b)

Fonte: Elaborado pelo Grupo 2

Quanto ao Grupo 3, não apresentou dificuldades na interpretação do problema, visto que a professora em momento anterior havia feito uma revisão de como calcular o juro de determinado valor.

A letra (a) e a letra (b) foram desenvolvidas corretamente. Respectivamente Protocolos 52 e 53.

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad 2000 &= 2020 \\
 2^\circ \quad 2.020 &= 2040,2 \\
 3^\circ \quad 2.060,602 &= 2060,602 \\
 4^\circ \quad 2.081,208 &= 2081,208 \\
 5^\circ \quad 2.102,020 &= 2102,020
 \end{aligned}$$

Protocolo 52: Resposta SD III - Letra (a)

Fonte: Elaborado pelo Grupo 3

$$f(x) = 2000 \cdot 1,01^x$$

Protocolo 53: Resposta SD III - Letra (b)

Fonte: Elaborado pelo Grupo 3

A professora sorteou um dos grupos para resolver a atividade no quadro e, neste momento a professora aproveitou para esclarecer possíveis dúvidas ainda existentes.

5.7.2 Análise a Posteriori da Situação Didática III (SD III) (Encontro 5)

Foi possível notar um crescimento dos alunos ao desenvolver o trabalho em grupo, pois todos os grupos conseguiram resolver a atividade proposta para alguns valores iniciais e encontrar a função matemática que representava o problema.

Na análise dos dados encontrados, notamos que os alunos A_4 , A_8 e A_{12} , podem ter sido beneficiados por se tratar de um trabalho em grupo, pois estes alunos não haviam conseguido expressar a função em linguagem matemática em nenhum dos momentos anteriores.

5.8 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA IV (SD IV) (ENCONTRO 6)

A SD IV (Atividade 8, Figura 16) refere-se a uma atividade diagnóstica em relação ao conceito que supostamente o aluno adquiriu até o momento sobre a Função Exponencial e, além disso se o mesmo consegue propor uma situação problema.

Espera-se que o aluno reflita novamente sobre o conceito identificando as suas dificuldades em relação ao mesmo.

- a) Defina a função exponencial e comente sobre suas características. Utilize o recurso que for necessário.
- b) Invente um problema que pode ser expresso por uma lei de função exponencial. Siga o modelo a seguir:

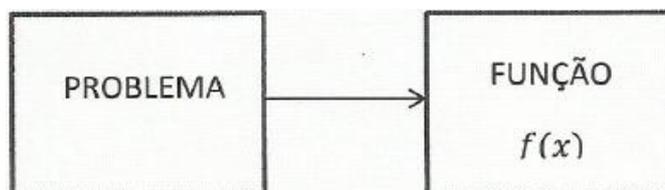


Figura 16: Atividade 8

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Na SD IV estabeleceu-se o Milieu e as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas, apresentadas no Quadro 13.

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática; Sistematização do tratamento.
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador	S -1 Aprendizagem, como definir função exponencial e inventar um problema modelado por esse tipo de função.
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência
Ação	M -3 Milieu Material SD IV	E -3 Objetivo: analisar conhecimentos adquiridos nas situações didáticas anteriores.	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva situação de reflexão e atenção.

Quadro 13: Estrutura do Milieu – SD IV

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.8.1 Aplicação da Situação Didática IV (SD IV) (Encontro 6)

Estabeleceu-se o contrato pedagógico a partir das seguintes regras: a) atividade individual, b) tempo de 30 minutos para resolução da atividade, a qual deve ser entregue a professora para iniciar uma discussão sobre as respostas da Atividade.

A Tabela 13 apresenta os resultados da Atividade 8, letra (a), Figura 16.

Tabela 13: Resultados (Atividade 8, letra a)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolos
É uma função que tem uma base e um expoente onde quem sofre mudanças é o expoente	A ₁₀ , A ₃ , A ₁ , A ₄ , A ₅ , A ₂ , A ₁₂	7	55, 56
É uma função que tem um expoente	A ₁₁ , A ₇	2	54
Apenas deu um exemplo de função exponencial	A ₈	1	57
Não estava presente	A ₉	1	
Deixou questão em branco	A ₆	1	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

No Protocolo 54, encontramos a resposta de um dos alunos que escreveu que é uma função que tem um expoente.

função exponencial a que pra ser exponencial precisa ter um expoente

Protocolo 54: Resposta SD IV - Letra (a)

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁₁

Dos sete alunos que escreveram que é uma função que tem uma base e um expoente onde quem sofre mudanças é o expoente, um dos alunos colocou um exemplo de função exponencial (Protocolo 55). Os demais alunos escreveram basicamente como no Protocolo 56.

$f(x) = 2^x$
precisa ter um expoente
o que muda é o expoente e não a base.

Protocolo 55: Resposta SD IV - Letra (a)

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁

função que possui o expoente e a base não pode mudar no expoente

Protocolo 56: Resposta SD IV - Letra (a)

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁₀

Um aluno apenas tentou escrever um exemplo de uma função exponencial. Protocolo 57.

$(F^x) = 2^2$

Protocolo 57: Resposta SD IV - Letra (a)

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₈

A Tabela 14 apresenta as respostas dos alunos na letra (b) da Atividade 8 (Figura 16).

Tabela 14: Resultados (Atividade 8, letra b)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolo
Inventou o problema, mas não conseguiu expressar a função	A ₁₂ , A ₁₀	2	
Inventou o problema e conseguiu expressar a função	A ₁₁ , A ₃ , A ₁ , A ₂ , A ₇ , A ₈	6	58, 59, 60
Inventou um problema que não envolve função exponencial	A ₄ , A ₅	2	
Não estava presente	A ₉	1	
Deixou questão em branco	A ₆	1	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Alguns dos problemas inventados pelos alunos (Protocolo 58, 59 e 60).

A cada 1 minuto 4 mulheres são agraciadas no Brasil a cada 1 minuto idêntico. Esta questão em x minutos quantos serão?

$f(x) = 4 \cdot 2^x$

1	0	4
2	1	$8 = 4 \cdot 2^1 = 8$
3	2	$16 = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2^2$
4	3	$32 = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2^3$
5	4	$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2^4$

Protocolo 58: Resposta SD IV - Letra (b)

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁₁

No mês 1 João tinha 10 reais, a cada mês ele duplica o valor anterior. Quanto João terá no mês 4?

1 mês	10
2 mês	$10 \cdot 3 = 30$
3 mês	$10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$
4 mês	$10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 270$

$f(x) = 10 \cdot 3^x$

Protocolo 59: Resposta SD IV - Letra (b)

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₂

10
 Jansen come ~~10~~ Bananas no mes de Janeiro e cada mes ele
 come o dobro quantas Bananas ele comeria no mes de maio?

$F = \text{Dobro}$ ele é crescente No mes de maio
 ele comeria 160
 Bananas.

$\text{Janeiro} = (F)^1 = 10$ $10 \cdot 2 = 20$
 $\text{Fevereiro} = (F)^2 = 20$ $20 \cdot 2 = 40$ $(F) = 10 \cdot 2^x$
 $\text{Março} = (F)^3 = 40$ $40 \cdot 2 = 80$
 $\text{Abril} = (F)^4 = 80$ $80 \cdot 2 = 160$
 $\text{Maio} = (F)^5 = 160$

Protocolo 60: Resposta SD IV - Letra (b)

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₈

5.8.2 Análise a Posteriori da Situação Didática IV (SD IV) (Encontro 6)

De forma geral, podemos dizer que os alunos conseguiram compreender o comportamento da função exponencial. Nesta Atividade um aluno faltou (A₉) e um aluno (A₆) deixou em branco (ambos alunos da sala de recursos).

Na situação didática IV (letra b) também é possível observar o crescimento dos alunos, no entanto alguns alunos (A₁₀, A₁₂) ainda têm dificuldades em encontrar a função matemática que representa o problema. Temos os alunos A₃, A₁, A₂ e A₇ que já haviam conseguido expressar a função em atividades anteriores e conseguiram nesta atividade também.

Podemos observar o avanço do aluno A₁₁ (Protocolo 58) que na SD II (Protocolo 46) inventou um problema, mas não conseguiu expressar matematicamente. Enquanto que nesta SD, percebe-se que o aluno A₁₁ superou os seus obstáculos e inventou um problema de acordo com a sua realidade.

Podemos observar também, o avanço do Aluno A₈ (Protocolo 60), que não havia conseguido ainda expressar a função matemática em nenhuma das atividades anteriores.

Alguns alunos ainda permanecem com dificuldades como o Aluno A₄ e Aluno A₅. Neste caso, durante a aplicação deste trabalho notamos que é de fundamental importância um número maior de encontros, a fim de respeitar o tempo de aprendizagem de cada aluno.

5.9 ANÁLISE A PRIORI DA SITUAÇÃO DIDÁTICA V (SD V) (ENCONTRO 7)

Na Situação Didática V a professora propôs a Atividade 9 (Figura 17) como uma atividade de reforço a fim de verificar se o aluno é capaz de escrever a função exponencial referente ao problema proposto.

Nesta atividade a professora espera que o aluno utilize os conhecimentos adquiridos nos momentos anteriores e resolva o problema proposto encontrando os valores iniciais do problema e a lei da função exponencial que representa o problema (Figura 17).

Número de Compartilhamento nas Redes Sociais



"Eu espero que no próximo ano, as pessoas compartilhem duas vezes o máximo de informações que foram compartilhadas este ano, e no ano que vem, eles estarão compartilhando o dobro do que eles fizeram no ano anterior." (Mark Zuckerberg)

Você entendeu a frase de Mark Zuckerberg? Se o número de compartilhamentos de informações a cada ano for da forma como ele projetou, ou seja, se o número de compartilhamentos a cada ano for sempre o dobro do ano anterior, é possível escrever uma fórmula matemática para prever as expectativas de Mark?

Figura 17: Atividade 9

Fonte: (GOMES, 2014, com adaptações nossas)

Na SD V estabeleceu-se o Milieu e as posições do professor e do aluno relativas ao meio, situação e dialéticas, apresentadas no Quadro 14.

Dialéticas	Milieu (M)	Aluno (E)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M 0 Milieu de Aprendizagem	E 0 Aluno Aprendizagem	P 0 Professor Institucionalização	S 0 Didática; Sistematização do tratamento, conversão do problema na linguagem matemática encontrando a lei da função matemática.
Validação	M -1 Milieu de Referência	E -1 Aprendiz, identificação de novos saberes.	P -1 Observador	S -1 Aprendizagem, como descrever o fenômeno que está acontecendo através de um registro matemático.
Formulação	M -2 Milieu Objetivo	E -2 Levantamento de hipóteses	P -2 Observador e Mediador	S -2 Referência
Ação	M -3 Milieu Material SD V	E -3 Objetivo: analisar conhecimentos adquiridos nas situações didáticas anteriores	P -3 Adequação do Milieu e utilização desse Milieu pelos alunos	S -3 Objetiva situação de reflexão e atenção.

Quadro 14: Estrutura do Milieu – SD V

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

5.9.1 Aplicação da Situação Didática V (SD V) (Encontro 7)

Estabeleceu-se o contrato pedagógico a partir das seguintes regras: a) atividade de caráter individual, sem consulta ao colega, à professora e a qualquer tipo de material didático, b) tempo de 30 minutos para resolução da atividade, a qual deve ser entregue a professora para iniciar uma discussão sobre as respostas da Atividade.

A Tabela 15 apresenta as respostas dos alunos na Atividade 9.

Tabela 15: Resultados (Atividade 9)

Casos	Alunos	Qtd	Protocolos
Encontrou a função matemática	A ₁₁ , A ₁₀ , A ₃ , A ₁ , A ₂ , A ₈ , A ₁₂ , A ₇	8	61, 62, 63, 64
Não conseguiu encontrar a função matemática.	A ₄ , A ₅	2	
Não estava presente	A ₉ , A ₆	2	
Total		12	

Fonte: Elaborado pelos próprios autores

Respostas de alguns alunos:

Handwritten student work for Protocolo 61. The student has written a table with the following entries:

	$f(x) = a \cdot 2^x$
1	$a \cdot 2^1 = 2a$
2	$a \cdot 2^2 = 4a$
3	$a \cdot 2^3 = 8a$
4	$a \cdot 2^4 = 12a$

Protocolo 61: Resposta SD V

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁

Handwritten student work for Protocolo 62. The student has written the function $f(x) = f \cdot 2^x$ and then expanded it for $x=1, 2, 3, 4$:

- 1 ano $f \cdot 2^1 = f \cdot 2 = 2f$
- 2 anos $f \cdot 2^2 = f \cdot 2 \cdot f \cdot 2 = 4f$
- 3 anos $f \cdot 2^3 = f \cdot 2 \cdot f \cdot 2 \cdot f \cdot 2 = 8f$
- 4 anos $f \cdot 2^4 = f \cdot 2 \cdot f \cdot 2 \cdot f \cdot 2 \cdot f \cdot 2 = 16f$

Protocolo 62: Resposta SD V

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₂

$$f(x) = 10 \cdot 2^x$$

$$10^0 \cdot 2 = 20$$

$$10^2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$$

$$10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 80$$

$$10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$$

Protocolo 63: Resposta SD V

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₃

0	$x \cdot 2^1$
2	$x \cdot 2^2$
3	$x \cdot 2^3$
4	$x \cdot 2^4$

$$f(x) = x \cdot 2^x$$

Protocolo 64: Resposta SD V

Fonte: Elaborado pelo Aluno A₁₀

Dos 8 alunos que encontraram a função matemática, alguns alunos (por exemplo, o Aluno A₁₀) usaram a letra x para designar o valor inicial, utilizando a mesma incógnita para o valor inicial (compartilhamentos) e para a variável de entrada da função, mas substituíram o valor de x somente no expoente, caracterizando que não se tratava de um “mesmo x ” (Protocolo 64).

5.9.2 Análise a Posteriori da Situação Didática V (SD V) (Encontro 7)

Em relação a atividade proposta é possível verificar que a maioria dos alunos conseguiram entender o problema proposto e encontrar os valores iniciais. Alguns alunos ainda têm dificuldades em encontrar a lei de formação da função que representa o problema.

Dois alunos (A_4 e A_5) ainda apresentam um pouco de dificuldades para escrever a função na linguagem matemática, no entanto em algumas das atividades o aluno A_5 conseguiu expressar a função matemática.

O aluno A_6 (Sala de recursos) não tentou fazer nenhuma das atividades e em relação ao aluno A_9 (sala de recursos) não conseguimos medir o seu aprendizado, pois faltou em várias aulas.

Com este problema podemos verificar o avanço dos alunos A_{10} e A_{12} , que ainda não tinham conseguido expressar a função matemática em nenhuma das atividades individuais, nesta atividade conseguiram. O aluno A_{12} conseguiu na atividade em grupo, o que caracteriza que a atividade em grupo auxiliou na aprendizagem desse aluno.

O aluno A_8 , já mostrou um avanço na SD IV, o que possivelmente foi caracterizado pela atividade em grupo, mostrando novamente que a atividade em grupo auxiliou na aprendizagem deste aluno.

Os alunos A_{11} , A_3 e A_7 , já haviam mostrado bom desempenho em algumas das atividades propostas anteriormente e nesta mostraram que realmente compreenderam o que lhe foi proposto.

E os alunos A_1 e A_2 apresentaram bom desempenho em praticamente todas as atividades.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Primeiramente é importante relatar que este trabalho contribuiu de forma significativa para a minha prática docente em sala de aula. O planejamento da aula à luz da teoria das situações didáticas permitiu uma série de reflexões sobre as interações dos alunos com o meio, o saber e o professor. Os alunos também se sentiram mais motivados, pois a aula não consistia apenas de cópias de definições e exemplos de exercícios. Cada aula era diferente da outra e, toda a aula era focada nas respostas dos alunos, a definição não era imposta, mas os alunos tinham autonomia para opinar, dialogar com os colegas, pois em cada atividade existia um momento de discussão.

A princípio, o objetivo proposto foi atingido, o qual consistia de trabalhar a parte conceitual, do significado da Função Exponencial, da relação de dependência e sua principal característica, ou seja, que na lei de formação da função exponencial a parte variável representada por x se encontra no expoente. E, sem imposição, mas a partir de situações didáticas apropriadas, segundo a teoria das situações didáticas, os alunos foram capazes de perceber essa característica, de resolverem problemas que envolviam a função exponencial e, além disso, de inventarem problemas (de acordo com o seu universo) modelados por este tipo de função.

Mas, um fator importante é o tempo. Chegamos a conclusão que é de fundamental importância respeitarmos o tempo de aprendizagem do aluno. Na maioria das vezes em sala de aula, o professor não dispõe de tempo para avaliar as reais dificuldades dos alunos, os erros e obstáculos, o quais são determinantes durante o processo de ensino e aprendizagem. E, através dos quais uma situação didática pode ser completamente diferente da outra, devido na maioria das vezes a ruptura de contrato didático a fim de favorecer o aprendizado do aluno.

Outro fator importante, são os tipos de exercícios propostos em livros didáticos, os quais na maioria das vezes não procuram reforçar o conceito da função exponencial. Com a nossa sequência didática, observamos que os alunos iniciaram o processo de apropriação do conceito, e constatamos que a partir do momento que damos autonomia aos alunos, os problemas inventados por eles são criativos e, interessantes para os mesmos, reforçando o conceito e, colocando em prática o aprender fazendo.

Sendo assim, com a metodologia proposta percebeu-se que os alunos realmente se apropriaram do saber, diferentemente da metodologia anterior em sala de aula. Aliás, este fato pôde ser constatado na primeira situação didática sobre o conceito de função, tópico já estudado em sala de aula pelos alunos.

Acredita-se que a metodologia à luz da teoria das situações didáticas, análises dos registros dos alunos, observações sobre os erros e obstáculos e reflexões sobre aspectos do contrato didático são de fundamental importância para a prática docente e, determinantes durante o processo de ensino aprendizagem dos alunos.

Sugere-se como perspectiva futura de investigação dar continuidade a esta metodologia de ensino e, trabalhar a parte gráfica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, Sado Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba. PR: Editora UFPR, 2007.

BARBOZA, Adriana. **Depreciação: entenda a lógica da perda de valor dos automóveis**. Pense Carro. Disponível em: <<http://revista.pensecarros.com.br/noticia/2012/06/depreciacao-entenda-a-logica-da-perda-de-valor-dos-automoveis-3795445.html>>. Acesso em: Nov. 2014

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a matemática**. 1. Matemática (Ensino médio) I. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BONOTO, Danusa de Lara; SOARES, Maria Arlita da Silveira; MARTINS, Maria Clailta Machado. **A análise dos Registros de Representação Semiótica no objeto de aprendizagem “Potencializando o seu conhecimento”**. Vivências. Vol.6, N.9: p.13-24, Maio/2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação média e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC; SEMTEC, 1999.

BRASIL, Senado Federal. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional: Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 2005.

BRASIL, MEC, SEB. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. Apresentação: Benedito Antonio da Silva, Consultoria técnica: José Carlos Miguel, Tradução: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & aplicações**. Volume 1: Matemática (Ensino Médio) I. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & aplicações**. Volume 1: Matemática (Ensino Médio) I. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

DEVLIN, Keith. **Matemática: A ciência dos padrões**. Porto Editora LDA, 2002

DOMINONI, Nilcéia Regina Ferreira. **Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina. Londrina – PR. 2005.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes**. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer, 2002, p. 25-41.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2009.

DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica*. 8ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2013. Pg. 11-33.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: Saberes necessário a pratica educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARCÍA, E. **A natureza do conhecimento escolar: transição do cotidiano para o científico ou do simples para o complexo?** In: Rodrigo, M. J.; Arnay, J. *Conhecimento Cotidiano, Escolar e Científico: Representação e Mudança* (75-102). São Paulo: Editora Ática, 1998.

GOMES, Thiago. **Facebook: A matemática do alcance**. Blog de Marketing Digital - Agência Soluções. 2014. Disponível em: <<http://agenciasolucoes.com.br/blog/facebook-matematica-alcance/>>. Acesso em: out. 2014

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a matemática**. 1. Matemática (Ensino médio) I. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2013.

MAIA, Diana. **Função quadrática: Um estudo didático de uma abordagem computacional**. Dissertação de Mestrado, PUC/SP. São Paulo. 2007

MALTA, Iaci. **Linguagem, leitura e matemática**. In: CURY, Helena Noronha (org.). Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

MAOR, Eli. **e: a história de um número**. Eli Maor; Tradução de Jorge Calife. 5ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Record, 2008. 291p.

MOURA, M.O. & MORETTI, V.D. **Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações**. Artigo, Ciência e Educação, v.9,n.1,p.67-82, 2003.

OLIVEIRA, Paulo César; PIRES, Rogério. **O Conceito de Função na Educação Básica via Registros de Representação Semiótica**; Revista Reflexão e Ação; Santa Cruz do Sul; v.20, n2, p.215-239, jul./dez.2012.

PARANÁ. Secretaria de estado da educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares Da Educação Básica Matemática**. Paraná: 2008.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de Função: A importância da compreensão das variáveis**. Dissertação de Mestrado: PUC/SP. São Paulo, 2003.

POZO, Juan Ignacio. **Aprendizes e Mestres: a nova cultura da aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO. 2005. Guia de livros didáticos 2005: matemática, V.3.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio. **Um estudo sobre a construção do conceito de função**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 2000.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. 1: Ensino médio. São Paulo: Scipione, 2010.

SALATINO, A.T. Entre laços e redes de sociabilidade. Sobre jovens, celulares e escola contemporânea. Dissertação de Mestrado: USP, 2014

SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function**. In: DUBINSKY, E; HAREL, G. (Ed.). The concept of function - aspects of function and pedagogy. Nova York: MAA Notes, 1992. v.25. p.195-213.

VINNER, S. **The function concept as a prototype for problems in mathematics learning**. In: DUBINSKY, E; HAREL, G. (Ed.). The concept of function - aspects of function and pedagogy. Nova York: MAA Notes. 1992. v.25. p. 195-213.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo. Martins Fontes, 1987.

ZUFFI, E.M. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de Função**. (Artigo). Educação Matemática em Revista – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – ano 8 – nº 9/10. Abril 2001.