Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Parábola: Análise, Abordagens e Propostas no Ensino Básico.

Lucas Silva de Carvalho

Orientador
Prof. Dr. Newton Luis Santos

2015

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

Parábola: Análise, Abordagens e Propostas no Ensino Básico.

Lucas Silva de Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Newton Luis Santos

2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

C331p Carvalho, Lucas Silva de.
Parábola: Análise, abordagens e propostas no ensino básico / Lucas Silva de Carvalho. – Teresina, 2015.
51f. il.: color

Dissertação (Mestrado Profissional) – Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Piauí, 2015.
Orientador: Prof. Dr. Newton Luís Santos

1. Geometria. 2. Geometria Analítica Plana. 3. Parábola. 4. Matemática – Estudo e Ensino. I. Título

CDD 516.32

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Parábola: Análise, Abordagens e Propostas no Ensino Básico**, defendida por **Lucas Silva de Carvalho** em **31/08/2015** e aprovada pela banca constituída pelos professores:

____

Presidente da Banca Examinadora

____

Examinador

Alvaro Pereira de Carvalho

Examinador Externo

Dedico este trabalho à minha esposa Alda e filhos João Gabriel e Matheus Henrique.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força concedida nos momentos difíceis e por colocar no meu caminho pessoas que me ajudaram nessa jornada. Aos meus pais Luiz e Silvana que souberam me dar uma boa educação e que juntos a Dona Remédios (minha sogra), a quem também sou muito grato, sempre nos deram o apoio necessário quando possível. A minha mulher Alda que sempre me incentivou e me apoiou em todos os momentos para a resolução deste trabalho, também aos meus filhos João Gabriel e Matheus Henrique pela graça de existirem. Aos colegas de curso que com certeza foram de grande ajuda para resolução de trabalhos e também pela amizade fortalecida e criada dentro e fora do ambiente de estudo. Aos professores que souberam cumprir com seu papel, passando de maneira simples e eficaz os assuntos de cada disciplina ministrada. Encerro esse mestrado sabendo que em outras situações posso, com a mais absoluta certeza, contar com essas pessoas que foram e são especiais e que sempre me ajudarão nas horas que precisar.

Matemática não é apenas números, e sim envolve letras e toda a capacidade que o ser humano conseguir expressar.

Fraçois Viéte

Resumo

Neste trabalho é discutido o ensino da cônica parábola no Ensino Básico. São apresentadas propriedades gerais desta cônica e propriedades de simetria. São discutidas técnicas de construções utilizando-se materiais concretos como um apoio ao ensino deste tópico no Ensino Básico e são apresentadas algumas aplicações, procurando com isto tornar o ensino deste tópico mais interessante, estimulante e acessível.

Palavras-chave: Geometria, Parábola, Material Concreto.

Abstract

In this work it is discussed the teaching of the conic parabola in Basic Education. General properties of this conic and symmetry properties are presented. Construction techniques are discussed using concrete materials as a support for the teaching of this topic in Basic Education and some applications are presented, in order to make the teaching of this topic more interesting, stimulating and accessible.

Keywords: Geometry, Parable, Concrete Material .

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

O Ensino da Matemática, entre os muitos desafios que enfrenta, está o fato de que a maioria dos seus conceitos é de caráter abstrato que dificulta a compreensão dos conteúdos por parte dos alunos. Dessa forma é bastante conhecida entre os educadores a contribuição dos dados da realidade concreta na hora de abordar assuntos mais complexos e abstratos.

É com base nesse conhecimento e a partir de experiências na docência que o presente trabalho se propõe a analisar e discutir propostas de abordagem no estudo da parábola dentro do ensino básico, uma vez ser esse um tema rico em aplicações práticas que, no entanto, são pouco exploradas. Nos Ensinos Fundamental e Médio (excetuando o 3º ano do Ensino Médio) a Parábola aparece, via de regra, dentro do estudo da função polinomial do segundo grau, como gráfico desta, sendo pouco explorado a noção de Parábola como uma cônica com inúmeras aplicações práticas e facilmente observáveis no cotidiano dos alunos.

A presente análise e discussão tem o objetivo de propor formas de abordagem do Estudo da Parábola, sua construção e que explore suas aplicações cotidianas tornando assim mais interessante seu estudo e de mais fácil apreensão, bem como de outros assuntos a ela relacionados como é o caso da função quadrática.

Para abordar o tema primeiramente será apresentado um breve histórico e origem dos estudos da geometria, nomes que se destacaram e primeiros usos. E dentro desse histórico os nomes e como se deu o estudo das cônicas, em especial a Parábola.

O capítulo seguinte apresenta a abordagem usual para o Ensino das Parábolas encontrada nos livros de Ensino Fundamental e Médio.

No terceiro capítulo é feito o estudo algébrico e geométrico da Parábola, as equações, suas propriedades, estudo da rotação e translação dos eixos coordenados, além de homotetia.

No quarto capítulo há uma breve discussão teórica sobre a importância do uso de materiais concretos no contexto do Ensino de Parábolas, as origens dessa discussão e as vantagens do uso dessa metodologia.

No quinto capítulo é destinado à apresentação de propostas de abordagens para o Ensino Básico em consonância com a perspectiva inicial deste trabalho, ou seja, a partir do uso de materiais concretos e /ou inserção na vida cotidiana.

O sexto e último capítulo aborda algumas aplicações na Parábola em várias áreas, além de alguns exemplos que nos permite visualizar a Parábola em tarefas cotidianas.

1 DA GEOMETRIA ÀS CÔNICAS/PARÁBOLAS

Segundo Boyer (1996) a geometria tem suas origens, possivelmente, ainda com o homem pré-histórico uma vez que

> seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar. [5]

No entanto devido a ausência de provas históricas sobre essa conjectura o autor concentra-se na história da Geometria encontrada em documentos escritos que chegaram até a atualidade. Estes mostram que a origem da Geometria estaria na civilização egípcia, segundo Heródoto, pela necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio e segundo Aristóteles ela estava relacionada ao lazer de uma classe sacerdotal.

> Egípcios e babilônios, há mais de 3000 anos, já utilizavam a geometria nas regiões inundáveis dos rios Nilo, Tigre e Eufrates, na demarcação das terras afim de organizar o plantio e facilitar a cobrança de impostos. Segundo o historiador grego Heródoto com o apagamento das demarcações de terras pelas inundações do Nilo tornou-se necessário a criação de uma classe de trabalhadores, os chamados "estiradores de corda" que faziam as mensurações novamente. [5]. Quando Ptolomeu assumiu o governo do Egito, escolheu Alexandria como sua capital e lá construiu a Universidade de Alexandria a qual tinha Euclides como o chefe do Departamento de Matemática. Nessa universidade outro nome que se destaca é o de Apolônio, que foi um dos maiores estudiosos das cônicas, um ramo da Geometria Analítica. [17].

A Geometria Analítica concebida por Eves (2004) "como um poderoso método para enfrentar problemas geométricos" tem sua origem incerta no que diz respeito a quem a inventou e em que época aconteceu. Para Bourbaki (1974) a última contribuição essencial da matemática grega foi à Teoria das Cônicas. O autor ressalta que mesmo os gregos não tendo ideia dos princípios fundamentais da Geometria Analítica, eles faziam uso de "coordenadas" para o estudo de figuras particulares, em relação a dois eixos no plano.

> Apolônio, como já foi citado, desenvolveu a sua geometria das secções cônicas "a partir de equivalentes geométricos de certas equações cartesianas dessas curvas, uma idéia que parece ter-se originado com Menaecmos" [11].

Foi, portanto, uma realização importante de Menaecmus ter descoberto que curvas com a propriedade desejada estavam à disposição. Na verdade, havia uma família de curvas adequadas, que podiam ser obtidas de uma mesma fonte, cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone. Isto é, parece ter descoberto que mais tarde foram chamadas, elipse, parábola e hipérbole. [5]. Em um artigo publicado por Jacir J. Venturi, mostra um pouco da história e confirma a participação de Menaecmus na descoberta das cônicas.

> Conta uma lenda que, em 429 a.C., durante o cerco espartano na Guerra do Peloponeso, uma peste dizimou um quarto da população de Atenas, matando inclusive Péricles, e que uma plêiade de sábios fora enviada ao oráculo de Apolo, em Delfos, para inquirir como a peste poderia ser eliminada. O oráculo respondeu que o altar cúbico de Apolo deveria ser duplicado. Os atenienses celeremente dobraram as medidas das arestas do cubo. A peste, em vez de se amainar, recrudesceu. Qual o erro? Em vez de dobrar, os atenienses octuplicaram o volume do altar, pois: para $a = 1$ temos que $V_{cubo} = 1^3 = 1$ e para $a = 2$ temos que $V_{cubo} = 2^3 = 8$. A complexidade do problema deve-se ao fato de que os gregos procuravam uma solução geométrica, usando régua (sem escala) e compasso. Ainda no século IV a.C., o geômetra grego Menaecmus resolveu o problema com o traçado de uma parábola e de uma hipérbole. Hodiernamente, tal solução é facilmente compreensível por meio da Geometria Analítica: Menaecmus obteve geometricamente o ponto de interseção da parábola $x^2 = 2y$ com a hipérbole $xy = 1$. A solução é $x = \sqrt[3]{2}$. Foi razoável o sucesso de Menaecmus entre os seus compatriotas, já que não se valeu apenas de régua (sem escala) e compasso. [21].

Outro estudioso que entra nessa disputa é Nicole Oresme (1323-1382), uma vez que antecipou outros aspectos da Geometria Analítica ao representar graficamente certas leis: "confrontando a variável dependente (latitudo) com a independente (longitudo), à medida que se permita que esta última sofresse pequenos acréscimos". [11].

A essência da Geometria Analítica como observa Eves (2004) é a possibilidade de transferir uma investigação geométrica para uma investigação algébrica. Mas antes da Geometria se desenvolver plenamente e poder exercer esse papel, resolver problemas geométricos por meios algébricos, foi necessário esperar o desenvolvimento da álgebra, motivo pelo qual Eves (2004) considera ser mais correto concordar com a maioria dos historiadores, os quais defendem que as contribuições feitas pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat teriam de fato dado ao assunto.

Segundo Boyer(1996) Descartes e Fermat estudavam exaustivamente assuntos relacionados a Geometria Analítica,

> ...Fermat acrescentou “A Solução de Problemas Sólidos por meio de Lugares”, em que observa que equações determinadas cúbicas ou quárticas podem ser resolvidas por meio de cônicas, o tema que tomava tão grandes propoções na geometria de Descartes. [5]

No Renascimento as cônicas começam a ser utilizadas de uma forma bem mais prática, auxiliando o homem em diferentes áreas, como é o caso de artistas e arquitetos que passam a utilizá-la na construção dos seus projetos. O próprio Leonardo da Vinci (1452- 1519) utilizou largamente destas curvas, tanto em seus desenhos como nas construções de suas “máquinas” e, além disso, é possível afirmar que o mesmo Da Vinci inspirou Alpoin ao escrever seu livro Exame de Bombeiros, que foi adotado nas Aulas de Artilharia e Fortificação em 1699, primeiro livro adotado, que se tem notícia, na escola militar do Brasil, onde as cônicas, principalmente a Parábola, aparecem como trajetória de projéteis. [16]

2 ABORDAGEM USUAL

Nesse capítulo apresentaremos como o Estudo das Parábolas é feito, no Ensino Fundamental a partir de pesquisa feita com onze livros desse ciclo e no Ensino Médio a partir de pesquisa em outros seis livros, além de informações advindas da própria experiência em sala de aula.

No Ensino Fundamental o Estudo das Cônicas se restringe apenas ao Estudo da Parábola. No último ano desse ciclo, a maioria dos livros didáticos aborda o tema Parábola apenas como o gráfico de uma função quadrática além de apresentar alguns dos seus pontos notáveis como zeros, máximo ou mínimo, concavidade e o estudo do sinal. Dante (2012) em seu livro didático, inicia o estudo de funções polinomiais de 2º grau afirmando que função quadrática é aquela cuja lei de formação pode ser indicada por: $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$. Após alguns exemplos apresenta os zeros de uma função quadrática, casos em que os valores reais de x anulam y na função apresentada acima, depois ensina como construir o gráfico atribuindo valores em x, encontrando os valores de y correspondentes e ligando os pontos no plano cartesiano. Em seguida mostra a figura de um cone sendo seccionado por um plano e uma antena parabólica, acrescentando que é da palavra parábola que vem o nome antena parabólica. Menciona ainda que essa curva aparece quando fazemos, de determinada maneira, a secção de um cone por um plano. Após isso trabalha com os coeficientes a, b e c da função quadrática mostrando geometricamente suas funções, em seguida os casos de intersecções com os eixos x e y, vértice da parábola e valor máximo ou valor mínimo da função quadrática.

Outro assunto menos usual, mas igualmente importante em livros do 9º ano do Ensino Fundamental é o foco e a reta diretriz. Tem-se ainda a equação geral que, de modo algum, é trabalhada no Ensino Fundamental.

Entende-se que trabalhar com a equação geral pode ser complexo nesse nível do ensino, no entanto em se tratando de foco e reta diretriz, por serem partes fundamentais e construtoras da própria definição de parábola, acredita-se que deveriam aparecer com mais frequência nos livros didáticos, mesmo que apresentados por meio de suas características ou de sua funcionalidade, uma vez que sem eles não se compreende as aplicações práticas da parábola.

Dos livros pesquisados apenas Bonjorno & Ayrton (2006), menciona foco e reta diretriz. Segundo o autor

> a Parábola é uma figura formada pelos pontos de um plano que equidistam (estão à mesma distância) de uma reta r e de um ponto F dados. Veja a figura 2.1 e confira

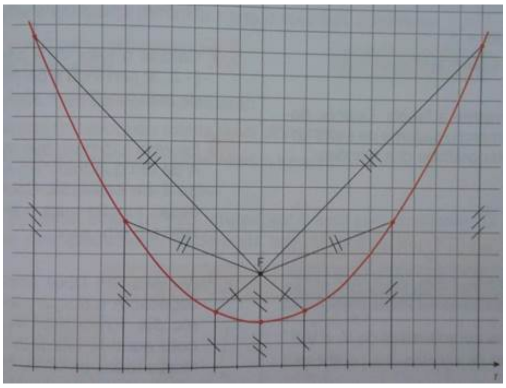

Figura 2.1: Parábola
Fonte: Bonjorno & Ayrton (2006)

> O ponto F é denominado foco da parábola e tem sua importância prática em objetos que apresentam a forma parabólica, como espelhos e antenas.)
> O autor acrescenta ao estudo outras informações práticas, de como uma lâmpada colocada no foco de um espelho de superfície parabólica reflete seus raios de luz paralelamente. O que acontece, por exemplo, no farol de um automóvel.

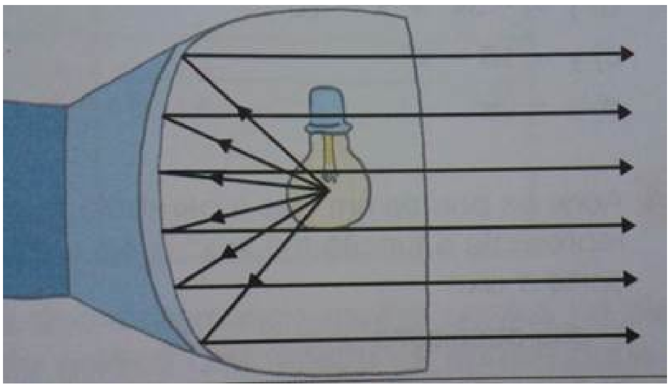

Figura 2.2: Lanterna
Fonte: Bonjorno & Ayrton (2006)

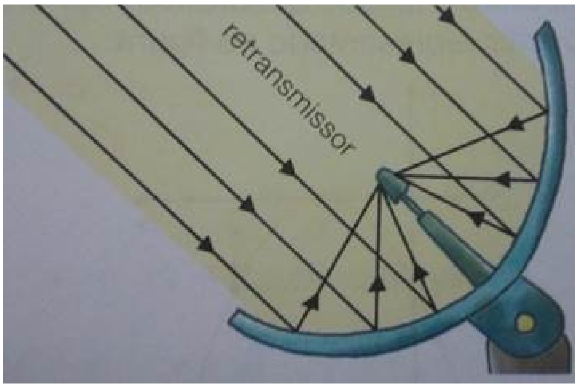

Figura 2.3: Antena Parabólica
Fonte: Bonjorno & Ayrton (2006)

> Numa antena parabólica, as ondas captadas refletem-se na superfície parabólica e dirigem-se para o foco onde está localizado o retransmissor. [4].

Esses e outros exemplos nos permitem afirmar que pelo fato da Parábola no Ensino Fundamental ser abordada dentro do estudo da função quadrática, a maioria dos livros didáticos apenas ilustra a importância dela para o mundo em face de suas propriedades refletoras. Essa metodologia pode representar uma dificuldade na apreensão do assunto por parte do aluno, pois este pode até visualizar as parábolas em antenas, faróis, satélites, pontes e trajetórias de objetos, mas, provavelmente não compreenderá "como funcionam", uma vez que não estudou o foco da parábola, elemento fundamental para o sucesso de tais criações humanas.

Observando os anos seguintes temos que no 1º ano do Ensino Médio a Parábola é tratada praticamente da mesma forma que no Ensino Fundamental. Já no 2º ano os livros didáticos nem abordam a temática das Parábolas. Só no 3º ano do Ensino Médio a Parábola é vista como parte da Geometria Analítica especificamente parte do Estudo de Cônicas. Nesta etapa, os livros didáticos fazem um desenvolvimento de modo mais abrangente, apresentando sua origem, definição, elementos (foco, diretriz, vértice, eixo de simetria, parâmetro) e equações obtidas com relação aos eixos e origem.

Quaranta et al. (2007) apud Pereira (2013), nos confirma essas observações ao expor que o Ensino das Cônicas ficou restrito ao Ensino Médio, apesar de ter uma importância histórica. Sendo abordado, no entanto, de forma analítica e trabalhado somente com manipulação e memorização de fórmulas, levando os alunos e até os professores a não quererem trabalhar com as cônicas. Segundo a autora em uma pesquisa com vários livros didáticos, verificou "que alguns trazem um pequeno resumo histórico e tratam as cônicas de forma analítica resumindo-se à manipulação de fórmulas" [17].

A Parábola como gráfico de uma função quadrática é tratada como uma parte específica do estudo de parábolas, diferente do ensino fundamental e 1º ano do Ensino Médio em que se usa apenas a lei de formação função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3 PARÁBOLA: ABORDAGEM ANALÍTICA

3.1 Definição

Segundo Steinbrunch & Winterle (1997), considerando em um plano uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Define-se a Parábola de foco F e reta diretriz d, como o lugar geométrico dos pontos do plano que são *equidistantes* de F e d.

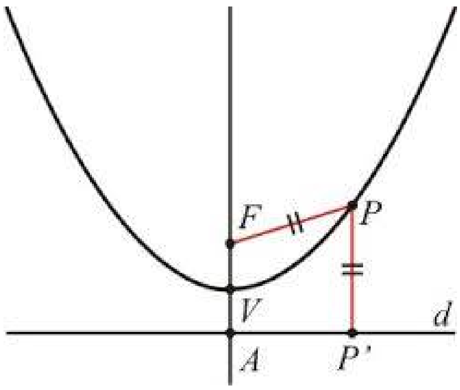

Figura 3.1: Parábola como lugar geometrico
Fonte: Arquivo próprio

Sendo P' o pé da perpendicular baixada de um ponto P do plano sobre a reta d, de acordo com a definição acima, P pertence à parábola se, e somente se, $D(P, F) = d(P, P')$, ou também:

$$\overline{PF} = \overline{PP'}$$

Segundo Lehmann (1998), uma Parábola é o lugar geométrico de um ponto que se move num plano de maneira que sua distância a uma reta fixa no plano é sempre igual à sua distância a um ponto fixo no plano e não situado sobre a reta.

O ponto fixo é denominado foco e a reta fixa é denominada diretriz da parábola. A definição exclui o caso em que o foco se encontre sobre a diretriz.

Sejam designados, respectivamente, pelo ponto F e pela reta l, conforme a figura abaixo, o foco e a diretriz de uma parábola e seja A o pé da perpendicular baixada de F a l. A reta a que passa por F e é perpendicular a l é denominada Eixo Focal. Então, se V é o ponto médio do segmento retilíneo $\overline{AF}$, pela definição, V pertence à Parábola, tal ponto é denominado o vértice da Parábola. O segmento retilíneo tal como $\overline{BB'}$, ligando quaisquer dois pontos distintos sobre a Parábola é denominado corda; em particular, uma corda que passa pelo foco, tal como $\overline{CC'}$, é denominada corda focal. A corda focal $\overline{LL'}$ perpendicular ao eixo é denominada *latus rectum*. Se P é qualquer ponto sobre a Parábola, a reta $\overline{FP}$, traçada desde o foco F a P, é denominada raio focal de P.

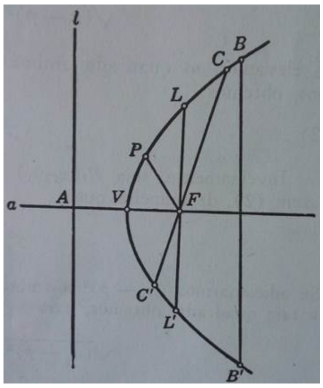

Figura 3.2: Parábola com cordas e *latus rectum*
Fonte: Lehmann (1998)

A definição de Lehmann (1998) nos dá o mesmo conteúdo de informação que Steinbrunch & Winterle (1997), acrescentando na definição elementos como corda, corda focal e *lattus rectum.*

Segundo Youssef (2005), pode-se também definir parábola como um lugar geométrico dos pontos do plano β que são equidistantes de um ponto F e de uma reta r desse plano. Veja que na Figura 3.3 é possível perceber a Parábola e alguns de seus pontos e as distâncias desses pontos da parábola à F e à r. De acordo com a Figura 3.3 os elementos de uma parábola são:
a) F é o foco da parábola;
b) A reta r é a diretriz da parábola;
c) A reta e, perpendicular a r, passando pelo foco, é o eixo da parábola, também chamado de eixo de simetria;
d) A distância p entre o foco e a diretriz é o parâmetro da parábola;
e) O ponto V é o vértice da Parábola e está no ponto médio entre o foco e o ponto M, em que o eixo cruza a diretriz da parábola. Como V é um ponto da Parábola, tem-se, pela definição: $\overline{VF} = \overline{VM} = \dfrac{p}{2}$, com $\overline{FM} = p$.

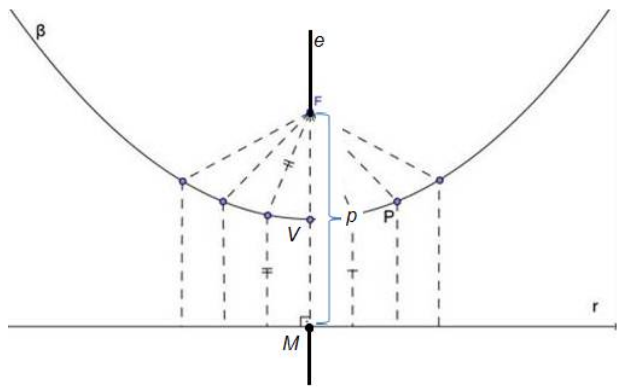

Figura 3.3: Parábola
Fonte: Arquivo Próprio

Chama-se Excentricidade de uma Parábola ao número real positivo que é definido como o quociente entre a distância da diretriz a um ponto qualquer da Parábola e a distância deste ponto da Parábola ao foco. Como na Parábola estas distâncias são sempre iguais, tem-se que a excentricidade é sempre igual a 1.

A definição de Youssef (2005) também traz o mesmo conteúdo de informação que Steinbrunch & Winterle (1997), acrescentando que a excentricidade da parábola é sempre igual a 1.(Nas outras Cònicas, chamando excentricidade de e, na Elipse teremos $0 < e < 1$ e na Hipérbole teremos $e > 1$).

3.2 Equação Geral da Parábola

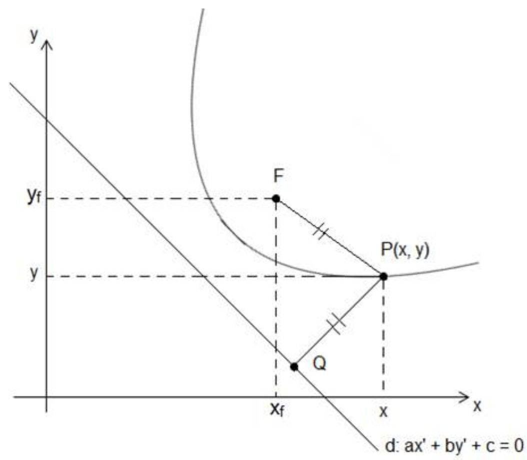

Figura 3.4: Figura de uma parábola qualquer
Fonte: Arquivo próprio

Pela definição de Parábola temos que: Fixado um sistema coordenado xOy, seja uma Parábola de foco $F(x_f, y_f)$ e reta diretriz $d = \{(x', y')/ax' + by' + c = 0\}$, então é sabido que a distância de um ponto $Q(u,v)$ a reta d é dada por $D(Q,d) = \dfrac{|au+bv+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, assim se P é um ponto da Parábola, temos:

$$D(F,P) = D(P,d)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_f-x)^2+(y_f-y)^2} &= \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ (x_f-x)^2+(y_f-y)^2 &= \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}, resolvendo: \end{aligned}$$

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0}$$

onde:
$A = b^2$
$B = a^2$
$C = -2ab$
$D = -2(a^2+b^2)x_f - 2ac$
$E = -2(a^2+b^2)y_f - 2bc$
$F = (a^2+b^2)(x_f^2+y_f^2) - c^2$

Com a equação do tipo $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$, podemos notar que para ser equação da Parábola tem-se que obedecer a seguinte relação:

$$C^2 - 4AB = 0$$

Proposição 3.1. *Caracterização das Cônicas*
Partindo da definição de Parábola encontramos o discriminante $C^2 - 4AB = 0$ que caracteriza não só a Parábola, mas todas as cônicas. Essa caracterização é mostrada por Reis(1996) e Sato(2005).

> *Dada a equação*
>
> $$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0,(I)$$
>
> *o número*
>
> $$\Delta = C^2 - 4AB$$
>
> *é invariante por rotação ou translação, isto é, se*
>
> $$A_1x_1^2+B_1y_1^2+C_1x_1y_1+D_1x_1+E_1y_1+F_1=0$$
>
> *é a equação que se obtém de (I) efetuando-se rotação ou translação de eixos, então*
>
> $$\Delta = {C_1}^2 - 4A_1B_1 = C^2 - 4AB.$$
>
> *E ainda conforme Δ seja menor, maior ou iual a zero, o gráfico de (I) é, respectivamente, uma elipse ou um ponto, uma hipérbole ou um par de retas concorrentes, uma parábola ou um par de retas paralelas ou uma única reta. [18]*

Segundo Sato(2005) temos que:
i) Se $\Delta < 0$ temos que A e B possuem sinais iguais, e trata-se de uma cônica do gênero elipse;
ii) Se $\Delta > 0$ temos que A e B possuem sinais contrários, e trata-se de uma cônica do gênero hipérbole;
iii) Se $\Delta = 0$ temos que $C^2 = 4AB$, e trata-se de uma cônica do gênero parábola.

3.3 Rotação e Translação de Eixos Coordenados

Neste capítulo será apresentado um meio para facilitar o estudo analítico da parábola. A translação ou rotação dos eixos nos permite escolher muitas vezes os eixos certos que tornam a equação a ser trabalhada mais simples quando se trabalha com cônicas.

Para Lehmann (1998) um dos principais objetivos da Geometria Analítica é a determinação das propriedades de várias curvas e configurações geométricas. Entretanto, à medida que aprofundamos nosso estudo, verificamos que as curvas e suas equações se tornam mais complicadas e mais difíceis de serem analisadas. Assim é mais conveniente introduzir a noção de mudança de coordenadas, um recurso que nos possibilita simplificar as equações de muitas curvas.

Ainda para Lehmann (1998) uma transformação é uma operação por meio da qual uma relação, expressão ou figura se transforma em outra seguindo uma lei dada. Analiticamente, a lei se expressa por uma ou mais equações chamadas equações de transformações.

3.3.1 Rotação de eixos

Considere um plano de eixos coordenados xOy. Girando os eixos de um ângulo θ em torno da origem O, encontraremos um novo sistema de eixos coordenados $x'Oy'$, com isso, um ponto qualquer P no plano terá coordenadas (x, y) e (x', y') antes e depois da rotação, respectivamente, como mostra a figura 3.5.

Na figura acima, fazendo $\overline{OP} = r, \overline{OA} = x, \overline{PA} = y, \overline{OA'} = x', \overline{PA'} = y'$ e o ângulo

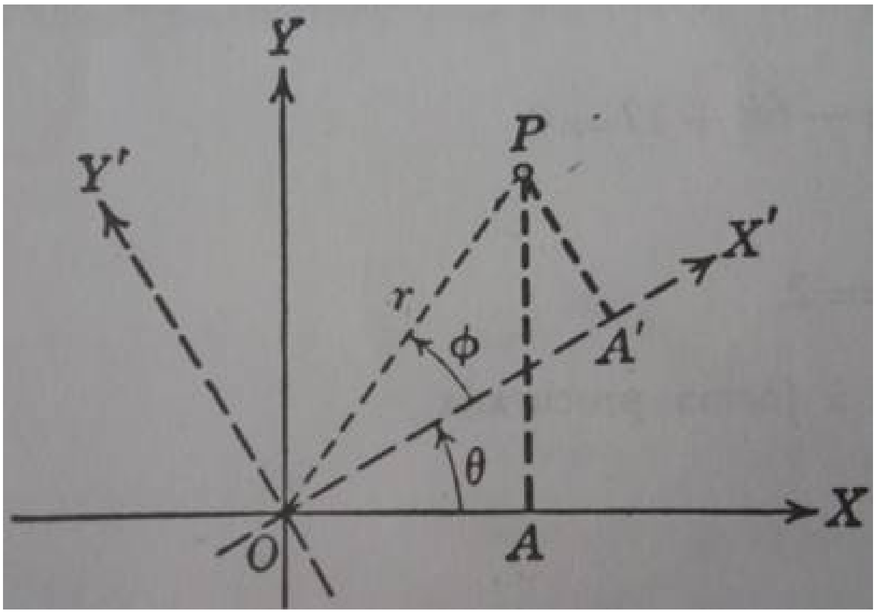

Figura 3.5: Rotação de eixos coordenados
Fonte: Lehmann (1998)

$\widehat{POA'} = \phi$, podemos obter analisando no triângulo retângulo POA:

$$\begin{aligned} x &= rcos(\theta + \phi) \\ &= [(cos\theta)(cos\phi) - (sen\theta)(sen\phi)] \\ &= r(cos\theta)(cos\phi) - r(sen\theta)(sen\phi)(1), \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} y &= rsen(\theta + \phi) \\ &= [(sen\theta)(cos\phi) + (sen\phi)(cos\theta)] \\ &= r(sen\theta)(cos\phi) + r(sen\phi)(cos\theta)(2) \end{aligned}$$

E analisando o triângulo retângulo POA':

$$x' = rcos\phi \text{ e } y' = rsen\phi \text{ (3)}$$

Substituindo (3) em (1) e (2), obtemos a transformação das antigas para as novas coordenadas, dadas por:

$$x = x'cos\theta - y'sen\theta \text{ e } y = x'sen\theta + y'cos\theta \text{ (*)}$$

Para Lehmann (1998), o principal emprego para a rotação de eixos é a remoção do termo em xy das equações de segundo grau.

Assim substituindo (*) na equação geral da parábola obtemos:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

$$A(x'cos\theta - y'sen\theta)^2 + B(x'sen\theta + y'cos\theta)^2 +$$
$$+C(x'cos\theta - y'sen\theta)(x'sen\theta + y'cos\theta) +$$
$$+D(x'cos\theta - y'sen\theta) + E(x'sen\theta + y'cos\theta) + F = 0$$

Colocando em evidência os termos x' e y', obteremos:

$$[Acos^2\theta + Bsen^2\theta + C(cos\theta)(sen\theta)]x'^2 +$$
$$+Asen^2\theta + Bcos^2\theta - C(sen\theta)(cos\theta)]y'^2 +$$
$$+[-2A(cos\theta)(sen\theta) + 2B(sen\theta)(cos\theta) + Ccos^2\theta - Csen^2\theta]x'y' +$$
$$+(Dcos\theta + Esen\theta)x' +$$
$$+(-Dsen\theta + Ecos\theta)y' + F = 0$$

Substituindo os valores:
$A = b^2$
$B = a^2$
$C = -2ab$
$D = -2(a^2 + b^2)x_f - 2ac$
$E = -2(a^2 + b^2)y_f - 2bc$
$F = (a^2 + b^2)(x_f^2 + y_f^2) - c^2$, temos:

$$(bcos\theta - asen\theta)^2x'^2 +$$
$$+(bcos\theta + asen\theta)^2y'^2 +$$
$$+[(-2b^2 + 2a^2)(cos\theta)(sen\theta) - 2abcos^2\theta + 2absen^2\theta]x'y' +$$
$$+[-2(a^2x_f + b^2x_f + ac)cos\theta - 2(a^2y_f + b^2y_f + bc)sen\theta]x' +$$
$$+[2(a^2x_f + b^2x_f + ac)sen\theta - 2(a^2y_f + b^2y_f + bc)cos\theta]y' +$$
$$+(a^2x_f^2 + a^2y_f^2 + b^2x_f^2 + b^2y_f^2 - c^2) = 0$$

Assim obtemos a equação $A'x'^2 + B'y'^2 + C'x'y' + D'x' + E'y' + F = 0$ (*), com:

$A' = bcos\theta - asen\theta$
$B' = bcos\theta + asen\theta$
$C' = (-2b^2 + 2a^2)(cos\theta)(sen\theta) - 2abcos^2\theta + 2absen^2\theta$
$D' = -2(a^2x_f + b^2x_f + ac)cos\theta - 2(a^2y_f + b^2y_f + bc)sen\theta$
$E' = 2(a^2x_f + b^2x_f + ac)sen\theta - 2(a^2y_f + b^2y_f + bc)cos\theta$
$F = a^2x_f^2 + a^2y_f^2 + b^2x_f^2 + b^2y_f^2 - c^2$

Anulando o coeficiente de $x'y'$ encontramos:

$(-2b^2+2a^2)(cos\theta)(sen\theta)-2abcos^2\theta+2absen^2\theta=0$, usando $(cos\theta)(sen\theta)=\dfrac{1}{2}sen2\theta$ e $cos^2\theta - sen^2\theta = cos2\theta$, encontramos:

$$\begin{aligned}
(-2b^2+2a^2)\frac{1}{2}sen2\theta - 2abcos2\theta &= 0\\
(-b^2+a^2)sen2\theta - 2abcos2\theta &= 0\\
\frac{sen2\theta}{cos2\theta} &= \frac{2ab}{(-b^2+a^2)}\\
tg2\theta &= \frac{2ab}{(-b^2+a^2)}\\
tg2\theta &= \frac{C}{A-B}
\end{aligned}$$

com $A \neq B$, assim temos: $\boxed{\theta = \frac{1}{2}arctg\frac{C}{A-B}}$

Obteremos agora o valor do $sen\theta$ e $cos\theta$, para substituirmos na equação e chegarmos à rotação.

Sabendo que,

$$\begin{aligned}
tg2\theta &= \frac{2ab}{(-b^2+a^2)} = \frac{C}{A-B}, temos:\\
tg2\theta &= \frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} = \frac{2ab}{(-b^2+a^2)}assim,
\end{aligned}$$

$ab(tg\theta)^2+(-b^2+a^2)tg\theta-ab=0$, resolvendo essa equação encontramos, para $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

$$tg\theta = \frac{b}{a}, \text{ assim:}$$

$\dfrac{sen\theta}{cos\theta} = \dfrac{b}{a}$, e ainda $sen\theta = \dfrac{b}{a}cos\theta$, aplicando na relação fundamental da trigonometria:

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 cos^2\theta + cos^2\theta = 1 \text{ o que implica que para } 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \text{ temos:}$$

$$cos\theta = \frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}} \text{ e } sen\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}, \text{ substituindo em (*):}$$

$$B'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0(**), \text{ onde:}$$

$A' = 0$

$B' = \dfrac{2ba}{\sqrt{b^2+a^2}}$

$C' = 0$
$D' = \dfrac{-2a(a^2x_f + b^2x_f + ac) - 2b(a^2y_f + b^2y_f + ac)}{\sqrt{b^2 + a^2}}$
$E' = \dfrac{2b(a^2x_f + b^2x_f + ac) - 2a(a^2y_f + b^2y_f + ac)}{\sqrt{b^2 + a^2}}$
$F = a^2x_f^2 + a^2y_f^2 + b^2x_f^2 + b^2y_f^2 - c^2$

Na equação $B'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0$, completando os quadrados encontraremos:

$$\boxed{(y' - y_0)^2 = 2p(x' - x_0)} \text{ (I), onde:}$$

$$y_0 = -\frac{E'}{B'};\ 2p = -\frac{D'}{B'} \text{ e } x_0 = -\frac{F}{D'} + \frac{E'^2}{4B'D'}$$

3.3.2 Translação de eixos

Considerando um plano cartesiano de eixos ortogonais Ox e Oy, dado um ponto qualquer desse plano O' de coordenadas (a, b), construiremos um novo sistema ordenado cartesiano de eixos $O'x'$ e $O'y'$, ou seja, um sistema $x'O'y'$. Considere os eixos $O'x'$ e $O'y'$ paralelos aos eixos Ox e Oy, respectivamente, de mesma unidade de medida, direção e sentido. Desta maneira podemos obter um sistema a partir do outro realizando a transição dos eixos.

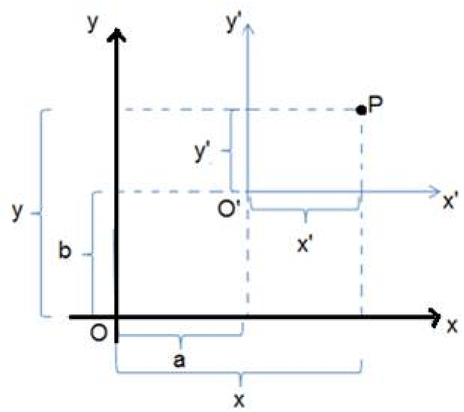

Figura 3.6: Translação de eixos coordenados
Fonte: Arquivo próprio

Seja um ponto P qualquer do plano com coordenadas:

$$x \text{ e } y \text{ em } xOy \text{ e } x' \text{ e } y' \text{ em } x'O'y'.$$

Analisando a figura acima, temos que:

$x = x' + a$ e $y = y' + b$ ou ainda, $x' = x - a$ e $y' = y - b$. (i)

Em (i) se encontram as relações de translação que nos permite transformar coordenadas de um sistema para o outro.

Voltando a equação (I) da secção 3.3.1, considerando-se agora uma translação de fator (pelo vetor $\overrightarrow{v} = (-x_0, -y_0)$), teremos que:

$x' = x_o + \overline{x}$ e ainda $y' = y_o + \overline{y}$ ou $\overline{x} = x' - x_0$ e ainda $\overline{y} = y' - y_0$, onde $\overline{x}$ e $\overline{y}$, são as coordenadas dos pontos após a translação de $x'Oy'$ para $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$, com $\overline{O} = (x_0, y_0)$

Desse modo a equação (I) da secção 3.3.1, após a translação ficará:

$$(y' - y_0)^2 = 2p(x' - x_0)$$

$$\overline{y}^2 = 2p\overline{x} \text{ (II)}$$

3.3.3 Homotetia

Segundo Shine (2008) homotetia de uma figura F com centro O e razão k, um número real positivo, é uma transformação geométrica que associa a cada ponto P de F o ponto P' sobre a semi-reta $\overrightarrow{OP}$, de origem O, tal que $\overline{OP'} = k\overline{OP}$

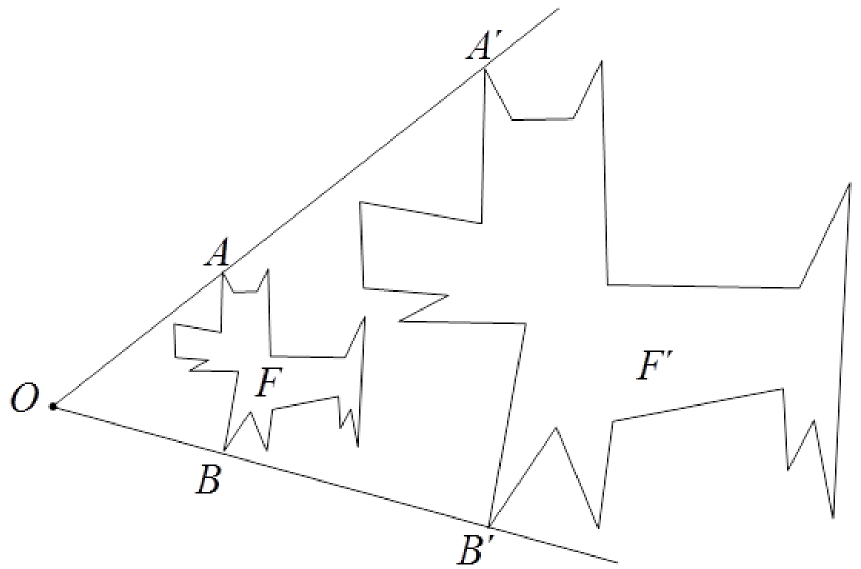

Figura 3.7: Homotetia
Shine (2008)

Podemos perceber que com a homotetia podemos dilatar ou contrair gráficos ou figuras a partir de uma mudança de coordenadas, via homotetia.

Assim, considerando uma homotetia de fator $\lambda > 0$, na equação (II) da secção 3.3.2, com:

$$\overline{x} = \lambda x \text{ e } \overline{y} = \lambda y \text{ , encontraremos:}$$

$$(\overline{y})^2 = 2p(\overline{x})$$
$$(\lambda y)^2 = 2p(\lambda x)$$
$$y^2 = \frac{2p}{\lambda}x, \text{ assim encontraremos:}$$
$$\boxed{y^2 = x} \text{ (III), onde } \frac{2p}{\lambda} = 1, \text{ ou seja, } \lambda = 2p$$

Observação 3.1. No caso em que o parâmetro p é negativo, $p < 0$, tomando como fator de homotetia $\lambda = -2p$ e transformamos a equação da parábola $y^2 = 2px$ em $y^2 = -x$. Em seguida basta aplicamos uma reflexão em torno do eixo das ordenadas

$$(x, y) \to (-x, y)$$

O conceito de homotetia corresponde ao conceito de semelhança, na geometria Euclidiana plana e que qualquer parábola que esteja na forma canônica $y^2 = 2px$ sempre pode ser convertida ao formato $y^2 = x$ ou $y = x^2$.

A secção 3.3 nos permite concluir que todas as parábolas são semelhantes, diferindo apenas por uma questão de escala, ou seja, a equação de qualquer parábola pode ser escrita da forma $y^2 = x$, utilizando os métodos de rotação, translação ou homotetia.

Exemplo 3.1. Simplifique a equação $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$ por uma translação dos eixos coordenados.

Completando um quadrado perfeito com relação a x encontraremos:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 3y + 10 &= 0 \\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 3y + 10 &= 0 \\ (x + 4)^2 - 3y - 6 &= 0 \\ (x + 4)^2 - 3(y - 2) &= 0 \end{aligned}$$

fazendo $x' = x + 4$ e $y' = y - 2$, temos:

$$x'^2 - 3y' = 0$$

onde o centro do novo eixo coordenado após a translação é $O' = (-4, 2)$

Exemplo 3.2. Usando as técnicas estudadas na seção 3.3, transforme a equação $4x^2 + y^2 + 4xy + x - 2y = 0$ em uma do tipo $y^2 = x$.

Faremos primeiramente uma rotação usando:
$x = x'cos\theta - y'sen\theta$ e $y = x'sen\theta + y'cos\theta$, substituindo na equação dada, obtemos:

$$\begin{aligned}&4(x'cos\theta - y'sen\theta)^2 + (x'sen\theta + y'cos\theta)^2 + \\ &+4(x'cos\theta - y'sen\theta)(x'sen\theta + y'cos\theta) + \\ &+(x'cos\theta - y'sen\theta) - 2(x'sen\theta + y'cos\theta) = 0\end{aligned}$$

desenvolvendo encontramos:

$$\begin{aligned}&(4cos^2\theta + sen^2\theta + 4cos\theta sen\theta)x'^2 + \\ &+(4sen^2\theta + cos^2\theta - 4sen\theta cos\theta)y'^2 + \\ &+(-6cos\theta sen\theta + 4cos^2\theta - 4sen^2\theta)x'y' + \\ &+(cos\theta - 2sen\theta)x' + (-sen\theta - 2cos\theta)y' = 0(1)\end{aligned}$$

Como a intenção é eliminar o produto $x'y'$, faremos seu coeficiente igual à zero, ou seja: $-6cos\theta sen\theta + 4cos^2\theta - 4sen^2\theta = 0$ (2)

Note que: $sen(2\theta) = 2sen\theta cos\theta$, ou seja, $cos\theta sen\theta = \frac{1}{2}sen2\theta$ e ainda $cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta$, obtemos substituindo em (2)

$$\begin{aligned}-3sen2\theta + 4cos2\theta &= 0 \\ 3sen2\theta &= 4cos2\theta \\ \frac{sen2\theta}{cos2\theta} &= \frac{4}{3} \\ tg2\theta &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

substituindo na relação fundamental da trigonometria, $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, temos que:

$cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $sen\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e substituindo em (1), obtemos:

$$y' = \sqrt{5}x'^2$$

O gráfico dessa equação é uma parábola e esta representada juntamente com os dois sistemas de coordenadas da equação anterior.

Observe que esta parábola é também o gráfico da equação $4x^2+y^2+4xy+x-2y = 0$, em relação ao sistema xy.

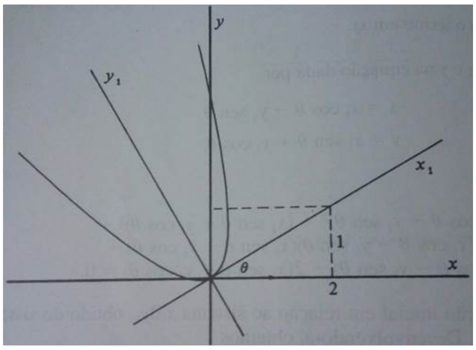

Figura 3.8: Rotação de eixos coordenados
Fonte: Lehmann

Agora tendo $y' = \sqrt{5}x'^2$, usaremos homotetia:

Seja $y' = \lambda y''$ e $x' = \lambda x''$, teremos:

$$y' = \sqrt{5}x'^2 \Rightarrow \lambda y'' = \sqrt{5}(\lambda x'')^2 \Rightarrow \boxed{y'' = x''^2} \text{ (3) , onde } \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Note que (3) ainda não é a equação desejada. Para encontrarmos essa equação basta fazermos uma rotação, com $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Assim, fazendo $x'' = \overline{x}cos\theta - \overline{y}sen\theta$ e $y'' = \overline{x}sen\theta + \overline{y}cos\theta$, obteremos:

$\overline{x}sen\theta + \overline{y}cos\theta = (\overline{x}cos\theta - \overline{y}sen\theta)^2$, como $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, então $sen\theta = 1$ e $cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\overline{y}^2 = \overline{x}}$

Note pela figura abaixo, que o gráfico da equação original e de $\overline{y}^2 = \overline{x}$, é o mesmo.

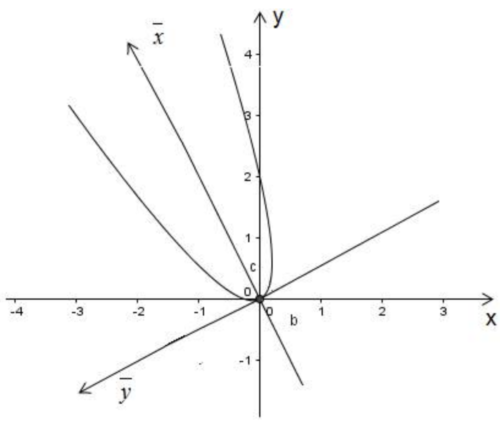

Figura 3.9: Gráfico após rotação
Fonte: Arquivo Próprio

3.4 Proposição das retas tangentes à uma Parábola

Definição 3.1. *Dizemos que uma reta r é tangente a uma parábola em um ponto P desta, se r intercepta a parábola apenas em P deixando a parábola inteiramente contida em um único semiplano definido por r.*

Um critério prático para a determinação das retas tangentes a uma parábola é dado pela proposição abaixo (cf. Sato (2004)) que observa que uma reta tangente a uma parábola é sempre mediatriz de um segmento que liga o foco a um ponto da reta diretriz.

Proposição 3.2. *(Caracterização de retas tangentes a uma parábola - Sato (2004)) Seja P um ponto de uma parábola de foco F e diretriz d e t a reta bissetriz do ângulo $\angle FPD$, em que D é pé da perpendicular à reta d passando por P. Temos que t é reta tangente à parábola C no ponto P sendo também a mediatriz do segmento $\overline{FD}$.*

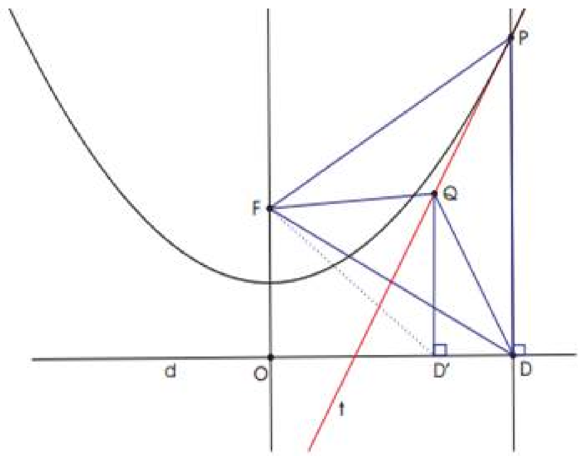

Figura 3.10: Reta tangente a parábola
Fonte: Sato (2004)

Demonstração 3.1.
Observamos que uma parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância do foco menor que sua distância à diretriz (interior da curva) e outra onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à diretriz (exterior da curva). Sendo P um ponto da parábola, no triângulo $\triangle PFD$ temos $\overline{PF} = \overline{PD}$. Assim, a reta t, bissetriz do ângulo $\angle FPD$, é também mediana e altura do triângulo $\triangle PFD$. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento $\overline{FD}$. Seja agora Q um ponto da reta t, distinto de P. Se D' é pé da perpendicular à reta d passando por Q temos que $m(\angle QDD') < m(\angle QD'D)$ e, portanto, $\overline{QF} = \overline{QD} > \overline{QD'}$, ou seja, Q é exterior à parábola. Logo, concluímos que a reta t é tangente à parábola em P.
$\blacksquare$ [19].

4 USO DE MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Tendo em vista que o presente trabalho vem buscando refletir sobre formas de melhorar o ensino da geometria, considerando o caso particular do estudo da parábola, e o aprendizado dos alunos por meio de seus exemplos concretos e usos do dia-a-dia, nota-se a importância de discorrer sobre em que medida essa metodologia realmente pode contribuir no binômio ensino-aprendizagem.

Lorenzato (2012) faz uma revisão dos teóricos do Ensino de Matemática e filósofos que ao longo dos anos afirmaram a importância do apoio visual ou do visual-tátil para facilitar a aprendizagem. Cita, por exemplo, Comenius, que defendia que o ensino deveria ir do concreto ao abstrato, pois segundo esse teórico, conhecimento começa pelos sentidos. Locke e Rousseau, em épocas distintas afirmaram a importância da experiência concreta e sensitiva para se alcançar o conhecimento. O autor cita ainda Pestalozzi e Froebel em 1800, Herbart, Piaget, Vygotsky entre muitos outros, que de formas diferentes afirmavam a importância da experiência concreta com o mundo real na apreensão de um conhecimento. Em termos de sala de aula essa importância recai sobre o material didático (MD) que é qualquer instrumento útil no processo de ensino-aprendizagem da Matemática e que pode compor o Laboratório de Ensino da Matemática (LEM).

> Inicialmente poderia ser um local para guardar materiais essenciais [...]. Ampliando essa concepção de LEM, ele é um local da escola reservado preferencialmente não só para aulas regulares de matemática, mas também para tirar dúvidas de alunos; para os professores de matemática planejarem suas atividades [...]; um local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais, inclusive de produção de materiais instrucionais, [13]

O laboratório é uma estratégia sobre a qual pesam muitas discussões contra e a favor, mas que de qualquer maneira é um ambiente propício para o aprendizado da matemática.

Segundo Lorenzato (2012) existe uma grande variedade de materiais didáticos, mas estes constituem apenas um dos fatores que interferem no rendimento dos alunos, não vão além de um meio auxiliar de ensino à disposição do professor e por isso mesmo não o substituem. O autor recomenda que a escolha do material didático deve se dar com base nos objetivos do professor e ressalta que além de manipular um material concreto o aluno deve ser estimulado a pensar para que a aprendizagem ocorra. Recomenda ainda ao professor que antes de utilizar um MD planeje sua aula para verificar a necessidade do MD, qual o mais indicado e como utilizá-lo.

O Ensino da Matemática em geral sempre aparece em destaque nas escolas, seja pela importância, seja pela dificuldade na hora de transmitir e apreender os conteúdos. Por isso a utilização de materiais concretos/manipuláveis por parte de professores do ensino fundamental "na esperança de que as dificuldades de ensino possam ser amenizadas pelo suporte da materialidade" [13]. No entanto a autora reforça que essa utilização não deve ser uma simples manipulação de objetos, deve levar o aluno a um processo reflexivo. Segundo Lorenzato (2012) "as novas demanda sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno".

Os materiais concretos podem auxiliar os professores e alunos em seu processo de formação uma vez que sua utilização requer deles conhecimentos sobre como esse recurso didático ao ser utilizado irá contribuir no aprendizado dos alunos. Para corresponder de forma eficaz a essa exigência Lorenzato (2012) acredita que desde sua formação inicial o professor de matemática deverá discutir e refletir sobre o papel histórico do ensino da matemática e sobre a potencialidade dos materiais manipuláveis na sua escolha.

Culturalmente generalizou-se que a matemática é difícil, que é uma ciência para poucos. Muitos não a entendem e acreditam que pode viver muito bem sem ela. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> [...] a Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. A matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. A atividade matemática não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. [6]

5 PROPOSTAS DE ABORDAGENS

Para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º e 3º anos do Ensino Médio seria interessante abordagens que desperte o interesse dos alunos no Estudo das Parábolas e os leve a compreender melhor sua forma, elementos e propriedades. Neste capítulo estão propostas de abordagens com materiais didáticos que podem levar os alunos a alcançarem esses objetivos.

5.1 PROPOSTA 01: Construção Geométrica da Parábola com Régua e Compasso

Objetivo: Construção de uma Parábola utilizando régua e compasso através da definição, mostrando geometricamente o foco, vértice, diretriz, pontos da parábola e simetria.

Público alvo: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio.

Materiais necessários: Folha em branco, régua, compasso e lápis.

Construção:

Segundo Kilhian (2011), podemos construir a parábola, pela definição, utilizando-se apenas de régua e compasso. Vamos iniciar com a reta diretriz d e um foco F qualquer. O vértice é o ponto médio do segmento $\overline{FA}$, onde o ponto A é o pé da perpendcular baixada de F a d (construtível), satisfazendo a definição de parábola:

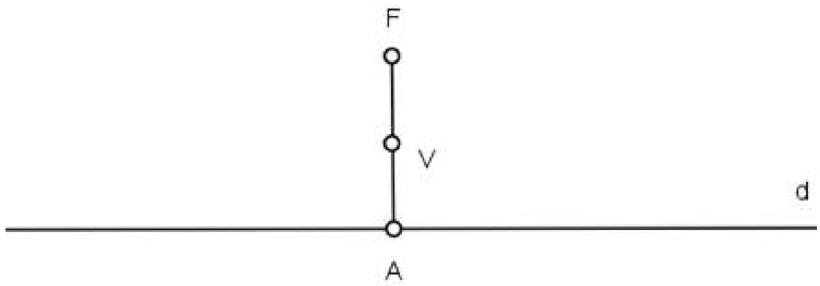

Figura 5.1: Reta diretriz, foco e vértice
Fonte: Pereira (2003)

Vamos agora traçar uma reta r_1 paralela a reta d a uma distância h_1; com $h_1 > \overline{VA} = \dfrac{p}{2}$

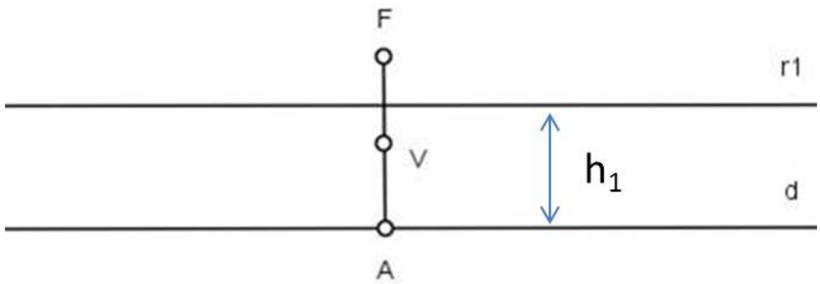

Figura 5.2: Reta diretriz, foco, vértice e r_1
Fonte: Arquivo próprio

Em seguida, trace quantas retas desejar: $r_2, r_3, ..., r_n$ igualmente espaçadas entre si, onde $h_2 = 2h_1, h_3 = 3h_1, ..., h_n = nh_1$, paralelas a reta d cujas distâncias à ela são respectivamente iguais a $h_2, h_3, ..., h_n$:

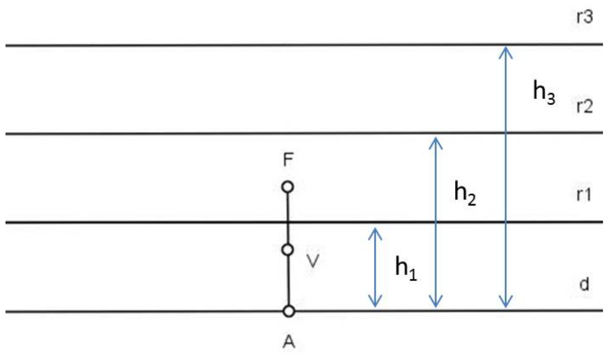

Figura 5.3: Reta diretriz, foco, vértice e r_1, r_2 e r_3
Fonte: Arquivo próprio

Com a ponta seca do compasso em F e raio igual a h_1 , descreva um arco interceptando r_1 nos pontos P_1 e P_1' . Em seguida, com raio igual a h_2 , descreva outro arco interceptando r_2 em P_2 e P_2' , e assim sucessivamente, n vezes, encontrando os pontos $P_1, P_1', P_2, P_2', P_3, P_3', ..., P_n, P_n'$:

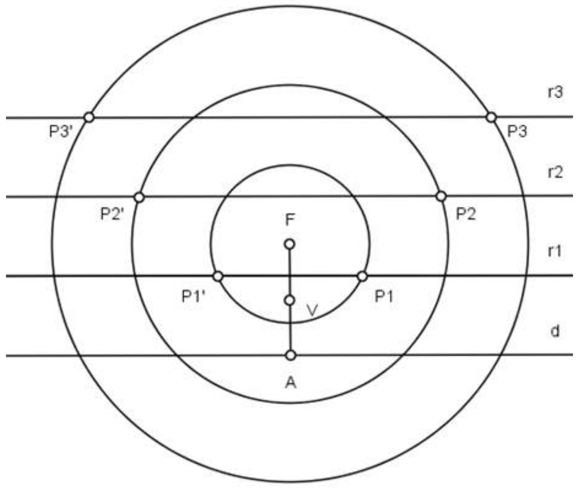

Figura 5.4: Encontrando os pontos P_n e P_n'
Fonte: Pereira (2003)

Note que traçando-se os segmentos $\overline{P_n'P_{n-1}'}, \overline{P_{n-1}'P_{n-2}'}, ..., \overline{P_3'P_2'}, \overline{P_2'P_1'}, \overline{P_1'V}, \overline{VP_1}, \overline{VP_2}, ...,$ $\overline{P_{n-1}P_n}$ obtem-se uma curva poligonal que aproxima-se ao traço da parábola (quanto mais pontos melhor a aproximação).

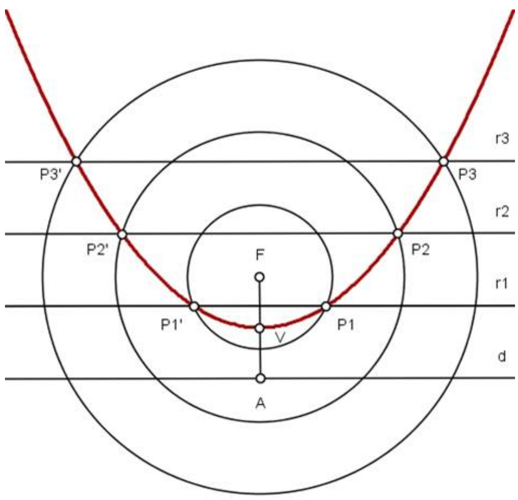

Figura 5.5: Parábola construída passando pelos pontos P_n e P_n'
Fonte: Pereira (2003)

Desta forma, fica fácil observar que o eixo da parábola divide-a em duas partes simétricas:

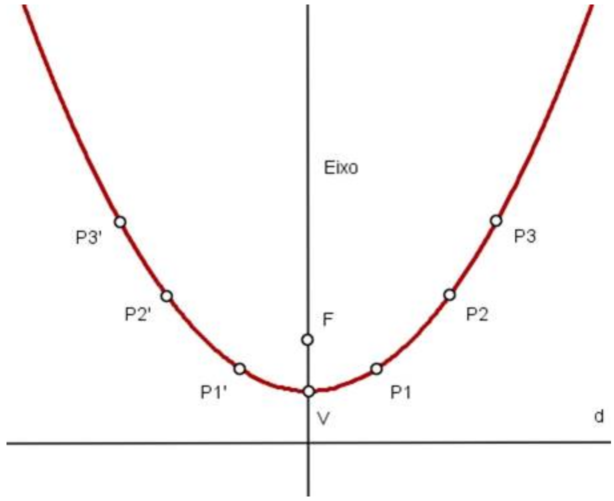

Figura 5.6: Parábola construída passando pelos pontos P_n e P'_n, eixo focal(eixo de simetria)

Fonte: Pereira (2003)

Com essa construção podemos mostrar para o aluno que além da simetria, o fato de pegarmos sempre a distância entre as retas paralelas à diretriz e usarmos como raio das circunferências construídas sempre obteremos pontos $P_1, P'_1, P_2, P'_2, P_3, P'_3, ..., P_n, P'_n$ nas retas r_1, r_2, ...,r_n em que a distância para o foco será a mesma para a reta diretrtiz, logo são pontos pertencentes a parábola.

5.2 PROPOSTA 02: Construção Geométrica da Parábola com Dobraduras

Objetivo: Construção de uma Parábola utilizando apenas dobraduras de papel, lápis e caneta ou pincel, mostrando que as retas achadas através das dobraduras são tangentes a parábola a ser construida.

Público alvo: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio.

Materiais necessários: Folha em branco, lápis e caneta ou pincel

Segundo Hartung (2010), temos 5 passos para a construção de uma parábola por dobraduras. São eles:

1) Trace uma linha horizontal (diretriz da parábola), marque vários pontos nessa reta e marque também um ponto fora da reta (foco da parábola):

2) Dobre o papel de forma que o ponto "A"coincida com o foco;

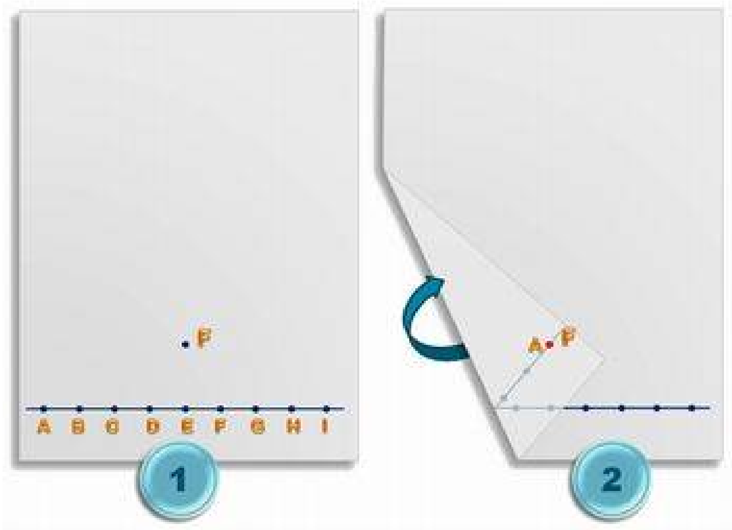

Figura 5.7: Parábola por dobraduras: Passos 1 e 2
Fonte: Hartung (2010)

3) Repita o passo anterior para todos os pontos;

4) O resultado é um conjunto de dobras tangentes à parábola e que permitem vizualizá-la.

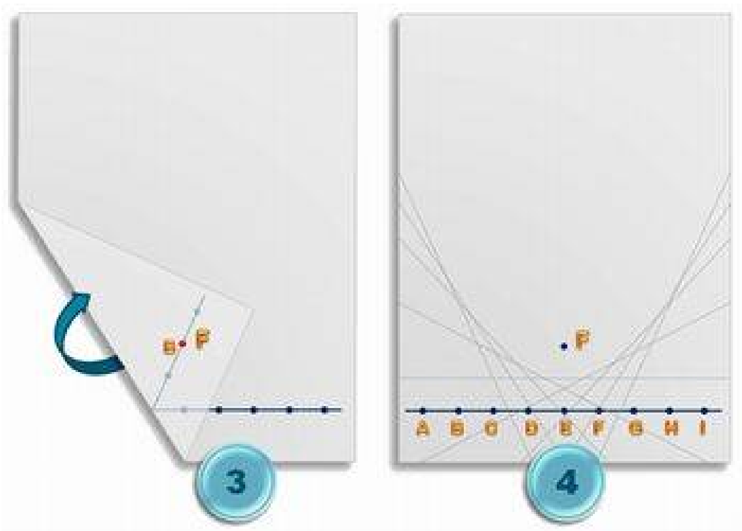

Figura 5.8: Parábola por dobraduras: Passos 3 e 4
Fonte: Hartung (2010)

Por fim trace a parábola com caneta hidrocor (o traço deve ser o mais próximo possível da envoltória). Faça uma análise desse procedimento, com os alunos, relacionando-o com os conceitos da construção da parábola pela reta geratriz e pelo foco.

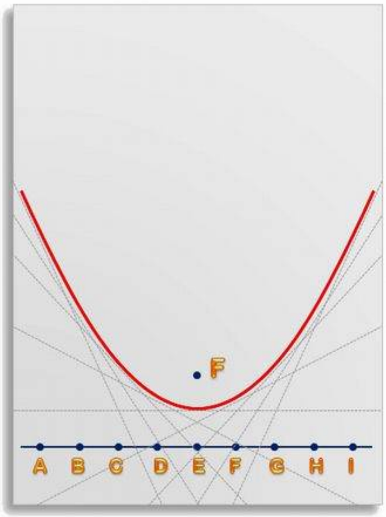

Figura 5.9: Parábola a partir de dobraduras
Fonte: Hartung (2010)

Mostrar também que essa construção gera uma parábola pois está usando o teorema das retas tangentes a uma parábola, onde cada marca da dobradura é mediatriz de um segmento que liga o foco a um ponto da reta diretriz.

5.3 PROPOSTA 03: Parábola obtida a partir do cone de papel

Objetivos: Desenvolver a visão espacial do aluno e ampliar o raciocínio lógico dando mais significado ao conteúdo.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Materiais necessários: Planificação do cone, tesoura, cola e régua.

Recomendações metodológicas: Devemos trabalhar em grupo, entregando para cada grupo planificação do cone, ressaltando as características da elipse, hipérbole e parábola. Utilizando o cone, mostre as curvas por meio dos cortes feitos no mesmo. Durante o trabalho faça algumas perguntas relacionando as cônicas com conteúdos estudados anteriormente. Deixe também que os alunos dêem suas opiniões, interferindo se necessário e tirando as dúvidas que forem surgindo. Dificuldades previstas: Alguns alunos podem não ter muita habilidade para montar o cone.

Segundo Pereira (2013) antes do corte é interessante que os próprios alunos construam o cone e para isso o professor entrega a planificação do cone, assim os alunos deverão montar o cone. Depois deverão achatá-lo e fazer um risco com a régua paralela a geratriz do cone e cortar o cone no risco. Ao voltar o cone a sua forma normal eles verão a parábola no corte como mostra abaixo.

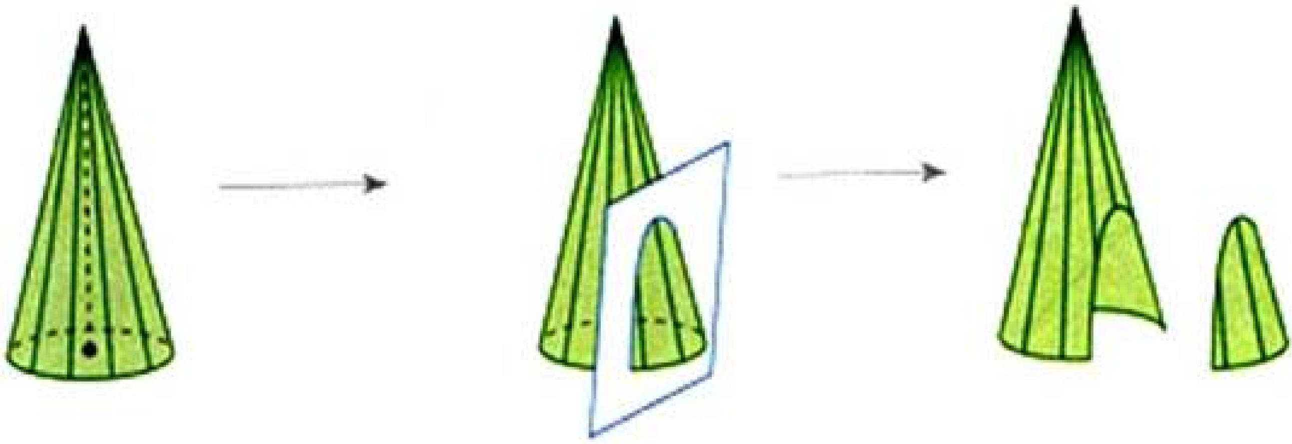

Figura 5.10: Corte no cone
Fonte: Pereira (2013)

Ressalta Carneiro(2007) que as propostas curriculares matemáticas contidas no CBC (Currículo Básico Comum) sugerem que as atividades melhorem a criatividade dos alunos tanto do ensino fundamental como médio, e também que o professor use o espaço em sala de aula para os alunos sanarem suas dúvidas e fazerem observações e relatos escritos ou orais sobre as matérias. Em todos os níveis de ensino o professor deve levar os alunos a justificar os processos e conclusão dos problemas, mesmo que não tenha instrumentos formais para isso. No Ensino Fundamental as justificativas são muitas vezes intuitivas, já no Ensino Médio, deve se focar mais nas justificativas formais, levando o aluno a uma linguagem mais rigorosa, não esquecendo as metodologias aplicadas no ensino fundamental.

Segundo Quaranta et al.(2007), para se aprender matemática, especialmente geometria o aluno deve passar por todas as etapas de exploração concreta, experimentação, resolução de problemas, elaboração de conjecturas, justificativas informais e provas. Cita também que de acordo com Guimarães, Belfort e Bellemain(2002), estas etapas não sãomuito bem assimiladas pelos alunos, embora seja super natural vista por quem já as superou.

5.4 PROPOSTA 04: Construção de Parabolóides - Fogão Solar

Segundo HARTUNG (2010) o experimento é simples. Usando a cola quente cubra a superfície da antena com os espelhos. Pronto, basta um dia de sol para testar o fogão. Posicione o fogão de forma que o eixo fique paralelo aos raios de sol (vértice, foco e sol tem que estar alinhados). Tenha cuidado, pois a concentração de raios solares no foco pode provocar queimaduras.

Figura 5.11: Modelo de forno solar
Fonte: HARTUNG (2010)

Uma dificuldade em se trabalhar com a antena parabólica é de determinar o foco. Mas ao mesmo tempo que gera essa dificuldade também é uma oportunidade de mostrar para os alunos como obter o foco de uma parábola ou parabolóide já construídos.

Para obter o foco de uma parábola já construída podemos usar a propriedade das retas tangentes. Já para obter o foco do parabolóide podemos usar planos tangentes e aplicar a mesma idéia da propriedade das retas tangentes a uma parábola. Ou seja, apoiando o parabolóide (no caso a antena parabólica) em dois planos e colocando um eixo ortogonal ao plano tangente de seu centro, pega as retas ortogonais a cada plano e encontraremos um ponto de intersecção dessas retas(possível foco), como nos mostra a figura 5.12.

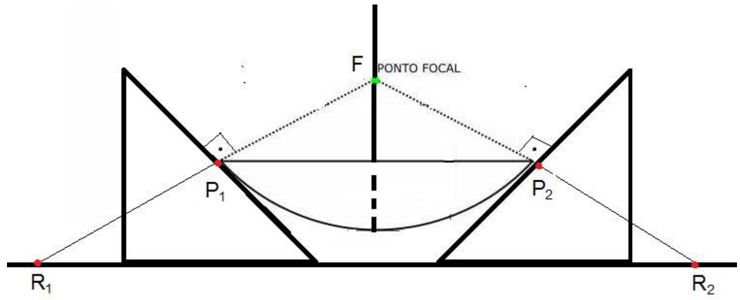

Figura 5.12: Modelo para achar o foco de uma antena parabólica
Fonte: Arquivo próprio

Para que o ponto F seja o foco, necessita que $\overline{R_1P_1} = \overline{FP_1}$ e $\overline{R_2P_2} = \overline{FP_2}$

5.5 PROPOSTA 05: Construção de Parabolóide - Parabofone

Objetivos: Desenvolver a visão espacial do aluno e ampliar o raciocínio lógico dando mais significado ao conteúdo.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio

Materiais necessários: Duas antena parabólica pequena (aquela de TV por assinatura, lojas de manutenção podem oferecer antenas fora de uso); Papel cartão e fita adesiva para cobrir as antenas parabólicas.

Também com a antena parabólica é possível construir um Parabofone(Parabolóides que até uma certa distância podem servir de meio de comunicação auditiva, utilizando seus focos).

Segundo HARTUNG (2010) este experimento é mais complexo, porém muito interessante, pois demonstra as duas propriedades:

Propriedade 5.1. Todo raio incidente (onda sonora, eletromagnética ou outros) na curva parabólica, paralela ao seu eixo, reflete passando pelo foco.

Propriedade 5.2. Todo raio que passa pelo foco e atinge a curva parabólica, reflete paralelamente ao seu eixo.

A idéia é criar dois parabolóides, colocá-los um virado para o outro a certa distância (uns 30 metros) e usá - lo como instrumento de comunicação. Enquanto uma pessoa fala no foco de um parabolóide, outra escuta com a orelha no foco do outro parabolóide.

Sugiro como alternativa o uso de antenas parabólicas revestidas de papel cartão. Para se achar o foco pode-se usar a mesma idéia apresentada na proposta 4.

Figura 5.13: Parabofone com antena parabólica
Fonte: Arquivo próprio

Outra opção é criar o seu próprio parabolóide com armação em madeira (folhas de compensado ou MDF) e revestimento de papel cartão. Veja o esquema:

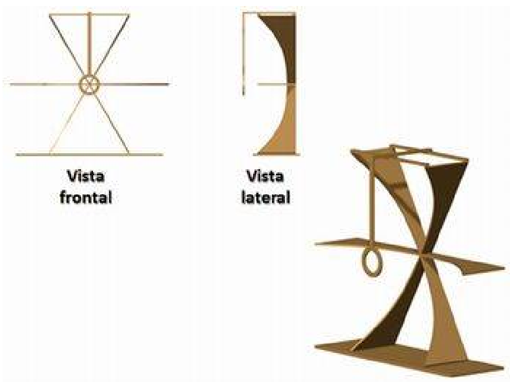

Figura 5.14: Armação para parabofone
Fonte: Hartung (2010)

Figura 5.15: Parabofone com armação em madeira
Fonte: HARTUNG (2010

Parabofone finalizado. Com dois conjuntos, e mesmo separados a grandes distâncias, a comunicação se torna possível.

6 APLICAÇÕES DA PARÁBOLA EM DIVERSAS ÁREAS

Além de construções em sala de aula de objetos que representem parábola, pode-se mostrar para os alunos as diversas aplicações que ela tem em outras áreas, mostrando assim a importância do Estudo da Parábola para a sua realidade.

Segundo Wagner (1997), as antenas que captam sinais do espaço e os espelhos dos telescópicos astronômicos devem ser parabólicos para capturar os sinais recebidos que são muito fracos como as ondas de rádio ou luz por exemplo. A área decaptura deve ser grande e concentrá-los num único foco para que sejam ampliados. Então, a superfície receptora (antena ou espelho) deve receber todos os sinais e direcioná-los para um único ponto após a reflexão.

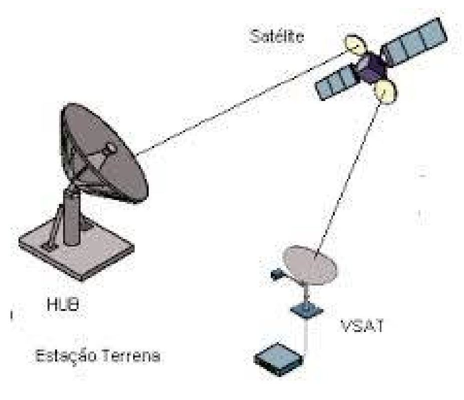

Figura 6.1: Parábolas em parabólicas e satélites
Fonte: Arquivo próprio

Na física, quando uma luz é refletida de um ponto P sobre uma superfície, o ângulo entre o raio incidente e a reta tangente em P é igual ao ângulo entre o raio de partida e a reta tangente em P. Por consequência, se uma superfície refletora tem seções transversais parabólicas com um foco e eixo em comum, onde todo raio de luz entrando em paralelo ao eixo será refletido pelo foco (Figura 6.2 a); inversamente se uma fonte de luz estiver localizada no foco, então os raios refletidos serão paralelos ao eixo (Figura 6.2 b). Este princípio é usado em certos telescópios para refletir os raios de luz aproximadamente paralelos, de estrelas e planetas de um espelho parabólico para uma lente no foco; e os refletores parabólicos de uma lanterna e os faróis de um carro utilizam este principio para formar um feixe paralelo de raios de luz a partir de uma lâmpada localizada no foco. O mesmo principio óptico é aplicado aos sinais de radares e ondas sonoras, o qual explica a forma de muitas antenas. [?]

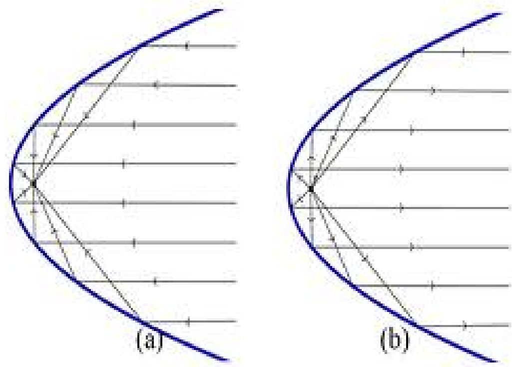

Figura 6.2: Raios refletidos no foco
Fonte: ANTON (2000)

Para Ribeiro (2010), a utilização doméstica da energia solar está aumentando porque é renovável e não agride o meio ambiente. Células fotovoltaicas e os fornos solares são exemplos de sua utilização. Nelas existem cerca de 10000 espelhos de forma parabólica, convergindo, assim, os raios do Sol para o chamado foco do espelho. Essa formação tem capacidade para atingir temperaturas superiores a 3000°C.

Figura 6.3: Forno Solar
Fonte: site portal São Francisco, 2010

A parábola também se encontra em engenharia automobilistica, como em faróis de automóveis.

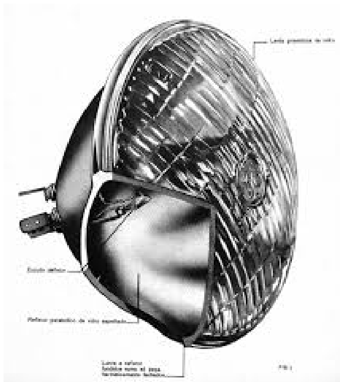

Figura 6.4: Farol de carro com secção lateral
Fonte: arquivo próprio

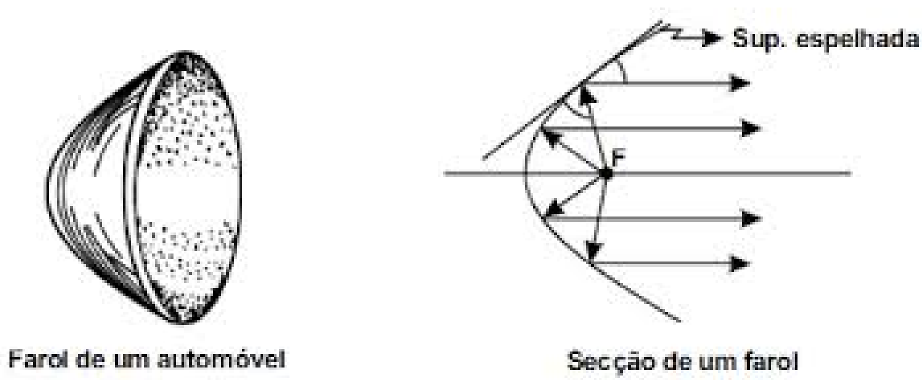

Figura 6.5: Esquema de como funciona o farol
Fonte: Schimidt (2012)

Além de servir para construir coisas que podem fazer a diferença e tornar a vida mais agradável, como vimos nos exemplos anteriores, a parábola também pode ser vista em vários momentos nas realizações de atividades diárias, como podemos ver nas imagens abaixo.

Figura 6.6: Curva parabólica da água que jorra
Fonte: Pereira (2013)

Figura 6.7: Trajetória de uma bola
Fonte: Pereira (2013)

Várias são as aplicações e observações da parábola no nosso cotidiano, cabe aos professores instigar os alunos a notarem onde se encontram tais curvas preciosas que tornaram possíveis inúmeras ivenções facilitando de algum modo nossa vida.

7 CONCLUSÃO

A motivação desse trabalho nasceu das experiências em sala de aula e pesquisa feita com vários livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, onde percebeu-se a carência de informações e aplicações do estudo da Parábola e o não uso de vários recursos que podem levar a facilitar o processo Ensino-Apredizagem.

O presente trabalho mostrou como se deu o Estudo da Parábola ao longo da história, mostrando cada etapa até o ponto onde seria seu início. Logo após dessa fundamentação histórica que mostra o "nascimento da parábola", mostra-se a problemática em questão, como é abordado o conteúdo Parábola nas séries do Ensino Básico. Para entender melhor a Parábola, sua definição e propriedades, o capítulo seguinte nos apresenta de maneira analítica esse estudo da Parábola de um modo geral, a partir de uma Parábola qualquer, objetivando uma assimilação e melhor compreensão de quem vai trabalhar com este tema. Na sequência é apresentada uma justificativa para o uso de materiais didáticos no Ensino da Matemática, em específico o tema Parábola, para tornar interessante esse estudo e despertar uma atenção maior do alunado, esperando com isso alcançar resultados satisfatórios. Após essa breve justificativa são propostas algumas abordagens de construção de Parábolas e Parabolóides com os alunos, com intenção de que essas atividades melhorem a criatividade dos alunos tanto do ensino fundamental como médio, e também que o professor use o espaço em sala de aula para que possam sanarem suas dúvidas e fazerem observações e relatos escritos ou orais sobre as matérias, a partir do que foi construido. Por fim para melhor representar a importância do Estudo da Parábola são expostos vários exemplos de aplicações da Parábola no nosso cotidiano, mostrando para os alunos que esse tema não esta distante da nosa realidade.

Referências

[1] ANTON, H.et al.Cálculo, um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000. v. 2, 552 p.

[2] BARBOSA, João Lucas M. Geometria Euclidiana Plana. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273 p. (Coleção do Professor de Matemática; 11)

[3] BEZERRA, M.J. Curso de Matemática - São Paulo - Companhia Ed. Nacional, 1974.

[4] BONJORNO, José R. Matemática: Fazendo a diferença. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2006.

[5] BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 1996.

[6] BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). MEC - Secretaria de Educação e Cultura. Brasília, 1997b.

[7] CAMARGO, Ivan de/ BOULOS, Paulo. 3ª ed. São Paulo: Pearson, 2005.

[8] CRUZ, Everton P. Trabalho de Quádricas. Blumenau: URB, 2012.

[9] DANTE, Luiz R. Projeto Teláres: Matemática. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2012.

[10] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 369p. (Coleção PROFMAT; 11)

[11] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. 1 ed. São Paulo: Unicamp, 2004.

[12] LEHMANN,Charles H. Geometria Analitica. 8ª ed.São Paulo: Globo, 1998.

[13] LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

[14] MACHADO, Mirtes T. G. Parábolas - As Curvas Preciosas. Londrina - PR, 2009.

[15] PALMA, Fábio A./ROSADO, Víctor O.G. Coletor Solar Construído com Espelho Parabólico de Baixo Custo. São Paulo:SINERGIA, 2012.

[16] PAQUES, Otília T. W. Uma História do Ensino das Cônicas na Matemática Escolar no Brasil. Campinas - SP. 2008.

[17] PEREIRA, Gisele P. R. O Ensino das Cônicas Através de Estudos Contextualizados até sua Concepção na Geometria Analítica. Lavras - MG, 2013.

[18] REIS, Genésio L./SILVA, Valdir V. Geometria Analítica. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[19] SATO, Juscelino. As Cônicas e suas Aplicações. Uberlândia - MG, 2004.

[20] SHINE,Carlos Y. Homotetias, composição de homotetias e o problema 6 da IMO 2008.

[21] VENTURI, Jacir J. Cônicas e Quádricas. 5ª ed. Curitiba - PR: ISBN, 1949.