Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Noções de Cálculo Diferencial e Aplicações

Daniel Ribeiro da Fonsêca

Relatório para o Exame Geral de Qualificação apresentado ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

2015

515.33 Fonsêca, Daniel Ribeiro da
F676n Noções de Cálculo Diferencial e Aplicações/ Daniel Ribeiro da Fonsêca- Teresina: [s.n.], 2015.
33 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - UniversidadeFederal do Piauí, Pós Graduação em Matemática.
Orientador: Jurandir de Oliveira Lopes

1. Cálculo Diferencial. 2. Teoremas. 3. Aplicações. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da UFPI
Câmpus Teresina

À minha filha Isabel Isabelly, sempre a bebê do papai.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, primeiramente, e ao IMPA e UFPI por ofertar o curso em Teresina, minha terra natal.

Agradeço à minha família, esposa, filha e tias-mães, pelo apoio e incentivo; e aos amigos, antigos e aos novos, que formam a turma PROFMAT-PI 2013, pelo companheirismo a cada instante dessa jornada.

Agradeço aos professores do programa pelos ensinamentos, e em especial ao Dr. Jurandir, pelas orientações tão necessárias ao êxito desse trabalho.

A Matemática é o alfabeto com o qual
Deus escreveu o Universo.
Galileu Galilei

Resumo

O presente trabalho busca mostrar de forma bem acessível a teoria inicial do estudo de Cálculo Diferencial, ciência iniciada por Newton e Leibniz no século XVIII, bem como algumas de suas inúmeras aplicações no nosso cotidiano. Vale salientar que a matemática é utilizada desde os primórdios da humanidade para buscar resolver situações enfrentadas no dia-a-dia e ganhou essa ferramenta facilitadora há cerca de 300 anos que torna capaz a resolução de problemas nas mais diversas áreas, otimizando tempo, espaço e dinheiro. Iremos iniciar com a parte teórica onde abordaremos a base da cálculo como sequências, limites e derivadas, explanando e demonstrando alguns dos principais teoremas que norteam o estudo. Em seguida, buscaremos mostrar o quanto essa ferramenta é importante no cotidiano, elencando aplicações em situações-problemas antes bem complexas e de complicada resolução e que agora são possíveis e diretas através do uso do Cálculo.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial, Teoremas, Aplicações.

Abstract

This study aims to show in an easily accessible form, the initial theory Calculation study, a science initiated by Newton and Leibniz at the 18th century as well as some of its many applications in our routines. It should be pointed that a science like Mathematics is used since the early days of humanity, solving daily faced situations and it has earned this facilitating tool for about three thousand years that makes it able to solve problems in several areas , optimizing time, space and money. We are going to start with the theoretical part where we discuss the basis of calculation as sequences, limits and derivatives, explaining and demonstrating some of the main theorems that guide the study . Then we would like to show how this tool is important to daily, listing applications in some difficult complex situations presenting a complicated solving and that nowadays they are now possible and direct through the Calculation of use.

Keywords: Calculus, Endpoints, Aplications.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Desde a Antiguidade a Matemática está presente nas mais diversas áreas e o homem a utiliza para facilitar a vida e organizar a sociedade, pois a Matemática é a ciência dos números e dos cálculos usada pelos egípcios na engenharia (pirâmides e diques) e astronomia; passando pelos gregos que a utilizaram como ciência lógica e chegando aos dias atuais. Com o surgimento e sistematização do Cálculo por Newton e Leibniz no início do século XVIII criaram-se infinitas possibilidades de novas descobertas e aplicações da Matemática, pois essa ferramenta estende-se a todos os campos das ciências, sejam exatas, sejam humanas.

Calcular os pontos de máximo e mínimo de funções quaisquer é uma das dificuldades enfrentadas pelos analistas em diversas áreas, como economia, administração, medicina, ciências biológicas, engenharias e licenciaturas em exatas; onde quase sempre é necessário definir e encontrar esses pontos extremos. Pensando como um administrador ou um economista, devemos sempre maximizar os lucros e minimizar os prejuízos para decidir sobre aquisição adequada de matéria-prima, quantidade ideal a ser produzida e expectativas reais de venda. Pensando como um engenheiro de trânsito que precisa saber o tempo ideal de um semáforo para otimizar o fluxo. Pensando como um médico que precisa avaliar peso e altura ideal para acompanhar o crescimento sadio de uma criança. Ou então, pensando como um matemático que busca resolver problemas e equações gerais, sem maiores dificuldades. O cálculo é uma das principais ferramentas para facilitar a resolução de problemas dessa natureza. Mais especificamente quando se trabalha com a resolução de equações do tipo $f(x) = 0$ e define-se f' como a primeira derivada de uma função contínua. Porém, tais problemas geram equações de longa resolução, sendo portanto necessário utilizar métodos numéricos, que conseguem gerar uma sequencia numérica que converge para a real solução desses problemas.

Com relação ao ensino médio, temos que os PCN's recomendam um maior aprofundamento dos conhecimentos matemáticos adquiridos no ensino fundamental de forma integrada a outras áreas de conhecimento. E o cálculo é capaz de fazer essa contextualização tão necessária com outras áreas, pois o domínio de tópicos como sequencia, limite e derivada possibilita a alunos dessa etapa da educação básica matematizarem problemas do cotidiano e consequentemente conseguir obter a sua resolução. Portanto, a noção do Cálculo Diferencial é uma ferramenta necessária para compreensão da Física, Química, Biologia, Geografia e da própria Matemática, presentes no Ensino Médio e a falta desse tópico neste nível de ensino torna para o aluno tais ciências mais difíceis do que realmente parecem ser, podendo ocasionar uma rejeição desnecessária às áreas.

2 Noções Preliminares

2.1 Sequências de números reais

O principal objetivo desta seção é estudar a convergência de sequências numéricas infinitas, em outras palavras, determinar o que ocorre com os termos dessas listas de números quando n tende ao infinito. Iremos considerar o conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$ com o menor elemento sendo o número 1.

Definição 2.1. *Uma sequência de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, ...$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $f(n)$ será representado por x_n, para todo $n \in \mathbb{N}$, e chamado o termo geral, ou n-ésimo termo da sequência. É comum usarmos as notações $(x_n), (x_n)_n \in \mathbb{N}, (x_1, x_2, x_3, ...)$ ou simplesmente x_n para reprensentar uma sequência. Usaremos ainda a notação x_n para indicar o conjunto de valores da sequência. Essa distinção é importante, pois uma sequência pode possuir infinitos elementos, mesmo que seu conjunto de valores seja finito.*

Exemplo 2.1. A sequência dos números naturais $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $x_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$ ou mais simplesmente $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo 2.2. A sequência de fibonacci $x_0 = 1, x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \forall n \in N, com n \geq 2$.

Exemplo 2.3. A sequência $1, 1/4, 1/9, 1/16, ...$ é uma forma de representar $x_0 = 1, x_1 = \dfrac{1}{2^2}, x_2 = \dfrac{1}{3^2}, x_3 = \dfrac{1}{4^2}, \ldots$ ou seja, $x_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

Definição 2.2. *Uma sequência x_n é dita ser limitada superiormente se existir um número real β tal que , para todo número natural n, temos $x_n \leq \beta$. De maneira análoga dizemos que uma sequência x_n é limitada inferiormente se existir um número real α tal que, para todo número natural n, temos $x_n \geq \alpha$. Se existirem reais α e β tais que, para todo número natural n, temos $\alpha \leq x_n \leq \beta$, dizemos que x_n é uma sequência limitada. Note que uma sequência é limitada se, e somente se, ela é limitada superiormente e inferiormente. Em outra palavras, uma sequência é limitada se todos os seus termos pertencem ao intervalo $[\alpha, \beta]$.*

Exemplo 2.4. A sequência cujo termo geral é $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, com $n \in \mathbb{N}$, tem todos os seus termos contidos no intervalo $[0,1]$. Portanto, limitada.

Exemplo 2.5. A sequência cujo termo geral é $x_n = n$, com $n \in \mathbb{N}$, é limitada inferiormente por zero mas não é limitada superiormente, pois o conjunto dos números naturais é ilimitado.

Definição 2.3. *Uma subsequência de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma função $f : \mathbb{N}' \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}'$ é infinito. A notação usual para representar uma subsequência é $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$.*

Como $\mathbb{N}'$ é enumerável, seus elementos podem ser escritos como $\{n_1, n_2, ..., n_k, ..\};$, e ainda podemos escolher a enumeração de forma com que $n_i < n_j$, se $i < j$. Então podemos identificar uma subsequência com uma sequência escrevendo $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Portanto, todos os teoremas que valem para sequências valem para subsequências.

Exemplo 2.6. Sejam a e q números naturais. Considere a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = a \cdot q^{n-1}$, $n \geq 1$. Observe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q.

A progressão geométrica $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de termo inicial a e razão q^2 é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pois, tomando $n_k = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos:

$$x_{n_k} = a \cdot q^{n_k - 1} = a \cdot q^{(2k-1)-1} = a \cdot q^{2k-2} = a \cdot (q^2)^{k-1}.$$

Definição 2.4. *Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que (x_n) é crescente se $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n...$, isto é, se $x_n < x_n + 1$. Agora se $x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n...$, isto é, se $x_n > x_n + 1$ dizemos que a sequência é decrescente. A sequência (x_n) é não-crescente se $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n...$ e não-decrescente se $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n...$ Se uma sequência satisfaz qualquer uma dessas propriedades ela é dita monótona.*

Definição 2.5. *Diz-se que uma sequência (x_n) converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer número $\epsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número n_o tal que $n > no \to |a_n - L| < \epsilon$. Para dizer que (x_n) converge para a L, normalmente escrevemos $(x_n) \to L$, ou $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ ou apenas $\lim x_n = L$, quando não houver dúvida que o limite trata de n tendendo ao infinito. Em outras palavras, a sequência (x_n) fica arbitrariamente próxima de a desde que se tome um n suficientemente grande. Em linguagem simbólica: $lim x_n = L \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, n_o \mathbb{N} : n > n_o \to |x_n - L| < \epsilon$*

Caso contrário a sequência se diz divergente.

Exemplo 2.7. A sequência cujo termo geral é $x_n = \dfrac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, converge para zero.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Temos então $0 < \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Mas se $n \in \mathbb{N}$ e $n > n_0$, então $x_n = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} = x_{n_0} < \varepsilon$. Logo, temos que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon.$$

Teorema 2.1. *Sejam os números reais p e q e uma sequência (x_n). Se $lim\, x_n = p$ e $lim\, x_n = q$, então $p = q$.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que ocorra $lim\, x_n = p$ e $lim\, x_n = q$ com $p \neq q$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{|q-p|}{2} > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\forall\, n > n_1 \;\Rightarrow\; |x_n - p| < \varepsilon$$

$$\forall\, n > n_2 \;\Rightarrow\; |x_n - q| < \varepsilon.$$

Escolha $n_0 = max\{n_1, n_2\}$. Sendo assim, para todo $n > n_0$ temos que:

$$|p-q| = |(x_n - p) - (x_n - q)| \leq |x_n - p| + |x_n - q| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow |p-q| < |p-q|.$$

Um absurdo. Portanto, temos que $p = q$. □

Teorema 2.2. *Se $lim\, x_n = \ell$ então toda subsequência de (x_n) converge para ℓ.*

Demonstração. Sendo $lim\, x_n = \ell$, segue que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_0 \Rightarrow x_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon). \tag{2.1}$$

Seja $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência qualquer de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Observe que para todo natural n sempre que existe um natural k tal que $n_k > n$. Deste fato e de 2.1 tem-se que:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n > n_0,\, \exists\, n_k > n > n_0 \Rightarrow x_{n_k} \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \Rightarrow lim\, x_{n_k} = \ell.$$

□

Teorema 2.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente e $x = lim_{n\to\infty} x_n$. Tomando $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, então $x_n \in (x-1, x+1)$. Além disso, o conjunto $X = \{x_0, x_1, ..., x_{n_0 - 1}\}$ forma um conjunto não-vazio limitado, então existe s = min X e S = max X , definindo $m = min\{s, x-1\}$ e $M = \max\{S, x+1\}$, temos que $x_n \in (m, M)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 2.4. *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona, digamos não-decrescente. Então o conjunto $A = \{x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots\}$ possui supremo, pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Seja $\beta = \sup A$, sendo assim, dado um $\varepsilon > 0$, existe um natural n_0 tal que $\forall\, n > n_0$ temos

$$\beta - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < \beta + \varepsilon.$$

O que prova que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para β. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for monótona não-crescente, o raciocínio é similar. □

Teorema 2.5. (Teorema de Bolzano Weierstrass). *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada. Considere o conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N};\, x_n > x_m \text{ para todo natural } m > n\}$$

Se A for finito, existe um natural $n_1 \notin A$ que é cota superior de A. Sendo assim, existe $n_2 \notin A$, com $n_1 < n_2$ e $x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$. Como $n_2 \notin A$, existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_2} \leqslant x_{n_3}$. Logo, por indução, definimos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monótona. Portanto, pelo Teorema 2.4, esta subsequência é convergente.

Por outro lado, se A for infinito, escrevamos $A = \{n_1 < n_2 < n_3 < ...\}$. Assim, se $i < j$, $n_i < n_j$ e, como $n_i \in N$, obtemos $x_{n_i} > x_{n_j}$. Donde concluímos que a $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona. Portanto, convergente. □

Proposição 2.1. *Se uma sequência monótona tem uma subsequência convergente, ela própria é convergente.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona, digamos não-decrescente e $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por ser convergente, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, logo existe $A > 0$ tal que $x_{n_k} < A$ para todo k natural.

Pela definição de subsequência, para todo natura n existe um natural k tal que $n_k > n$. Como (x_n) é monótona não-decrescente, temos então que $x_n \leq x_{n_k} < A$. Logo, podemos concluir que, além de monótona não-decrescente, (x_n) é limitada superiormente por A. Nesse caso, segue, pelo Teorema 2.4, que (x_n) é convergente.

Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for monótona não-crescente, o raciocínio é similar. □

Proposição 2.2. *Se uma subsequência de uma sequência monótona converge para um número real α, a sequência também convergente para α.*

Seque imediatamente do Teorema 2.2 e da Proposição 2.1.

Definição 2.6. *Diz-se que um real x_0 é um ponto de acumulação do conjunto $D \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhançaa de x_0 contém algum ponto de D diferente do próprio x_0. Isto quer dizer que para todo real $\varepsilon > 0$ tem-se $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap (D - \{x_0\}) \neq \emptyset$.*

Teorema 2.6. *Dados $D \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in R$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) x_0 é um ponto de acumulação de D;

(2) x_0 é o limite de uma sequência de pontos $x_n \in D - \{x_0\}$;

(3) Todo intervalo aberto de centro x_0 contém uma infinidade de pontos D.

Demonstração. Supondo (1), para todo natural n podemos achar um ponto $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, na vizinhança $\left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$. Logo $lim\, x_n = x_0$, o que prova (2). Por outro lado, supondo (2), então, para qualquer natural n_0 o conjunto $\{x_n;\, n > n_0\}$ é infinito porque do contrário existiria um termo x_{n_1}, que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma sequência constante com limite $x_{n_1} \neq x_0$. O que é um absurdo de acordo com o Teorema 2.2. Pela definição de limite, vê-se portanto que (2) $\Rightarrow$ (3). Finalmente, a implicação (3) $\Rightarrow$ (1) segue imediatamente da definição de ponto de acumulação. □

Teorema 2.7. *Todo conjunto infinito limitado de números reais admite ao menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $D \subset R$ infinito limitado. Como todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável, assim D possui um subconjunto enumerável $D' = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Fixando esta enumeração, temos uma sequência (x_n) de termos dois a dois distintos, pertencentes a D, portanto uma sequência limitada, a qual pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência (x_{n_j}) convergente. Seja $x_0 = lim\, x_{n_j}$. Como os termos x_{n_j} são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a x_0. Descartando-o, caso exista, teremos x_0 como limite de uma sequência de pontos $x_{n_j} \in D - \{x_0\}$. Logo, pela Definição 2.6, x_0 é um ponto de acumulação de D. □

2.2 Limites, Continuidade e Derivada de Funções Reais

Nesta seção procura-se fornecer uma base teórica para a demonstração da existência e unicidade de um mínimo global de uma função coerciva e convexa. Para tanto, abordaremos alguns dos principais conceitos e teoremas envolvendo a teoria dos limites e continuidade de funções. Enunciaremos o Teorema de Weiertrass, o Teorema do valor intermediário, o Teorema de Rolle e o Teorema do valor médio.

Definição 2.7. *Diz-se que um número real L é limite de $f(x)$ quando x tende para x_0, e escreve-se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica em $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

Teorema 2.8. *Sejam dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e os reais a, L_1 e L_2. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$, então $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2$ e $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$.*

a) Para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ implica em } |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$0 < |x-a| < \delta_2 \text{ implica em } |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $0 < |x-a| < \delta$ implica em:

$$L_1 - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < L_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad L_2 - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somando membro a membro essas duas últimas desigualdades temos:

$$L_1 + L_2 - \varepsilon < f(x) + g(x) < L_1 + L_2 + \varepsilon \Rightarrow |f(x) + g(x) - (L_1 + L - 2)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2.$$

b) Sabe-se que existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta_1$ implica em:

$$|f(x) - L_1| < 1 \Rightarrow L_1 - 1 < f(x) < L_1 + 1 \Rightarrow -|L_1| - 1 \leq f(x) \leq |L_1| + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |L_1| + 1.$$

Também existem $\delta_2 > 0$ e $\delta_3 > 0$ tais que para todo $\varepsilon = p + k$, com p, $k > 0$, temos:

$$|f(x) - L_1| < \frac{p}{|L_2| + 1} \quad \text{e} \quad 0 < |x-a| < \delta_2$$

e

$$|g(x) - L_2| < \frac{k}{|L_1| + 1} \quad \text{e} \quad 0 < |x-a| < \delta_3$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, para $0 < |x-a| < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - f(x)L_2 + f(x)L_2 - L_1L_2| \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)(g(x) - L_2) + L_2(f(x) - L_1) \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &\leq |f(x)(g(x) - L_2)| + |L_2(f(x) - L_1)| \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &\leq |f(x)| \cdot |(g(x) - L_2)| + |L_2| \cdot |(f(x) - L_1)| \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &< |f(x)| \cdot \frac{k}{|L_1| + 1} + L_2 \cdot \frac{p}{|L_2| + 1} \Rightarrow \\
|f(x)g(x) - L_1L_2| &< (|L_1| + 1) \cdot \frac{k}{|L_1| + 1} + (L_2 + 1) \cdot \frac{p}{|L_2| + 1}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $|f(x)g(x) - L_1L_2| < k + p = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x)g(x) = L_1 \cdot L_2$.

Definição 2.8. *Diz-se que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *quando dado* $M > 0$ *existe um real positivo* x_1 *tal que para todo* $x > x_1$ *temos que* $f(x) > M$.

Definição 2.9. *Diz-se que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, *quando dado* $M > 0$ *existe um real positivo* x_2 *tal que para todo* $x < -x_2$ *temos que* $f(x) > M$.

Exemplo 2.8. Vamos mostrar que $\lim\limits_{|x|\to\infty} x^2 = +\infty$.

Solução. Sendo $f(x) = x^2$ e um $M > 0$, basta tomarmos $x_0 = \sqrt{M} > 0$. Pois nesse caso, temos que:

$$|x| > x_0 \Rightarrow x^2 > {x_0}^2 \Rightarrow f(x) > M. \tag{2.2}$$

Da equação anterior e das definições 2.8 e 2.9 segue o que queríamos mostrar.

Definição 2.10. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em um ponto $x_0 \in D$, se:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Observação 2.1. Se x_0 pertence ao conjunto D e ao conjunto dos pontos de acumulação de D, então f é contínua em x_0 se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definição 2.11. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto $D \subset \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em D se f for contínua em todos os pontos de D.*

Proposição 2.3. *A soma e o produto de funções contínuas são funções contínuas.*

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ contínuas em D e $x_0 \in D$. A demonstração segue-se de maneira similar a demonstração do Teorema 2.8 substituindo L_1 e L_2 por $f(x_0)$ e $g(x_0)$, respectivamente. Logo $f + g$ e fg são contínuas em D.

Definição 2.12. *Dada uma função f, seja $c \in D(f)$*

i. f possui um máximo local em c se existe um intervalo aberto I contendo c, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x em $I \cap D(f)$.

ii. f possui um mínimo local em c se existe um intervalo aberto I contendo c, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x em $I \cap D(f)$.

iii. Se f possui um máximo ou mínimo local em c, dizemos que f possui um extremo local em c.

Definição 2.13. *Dado $c \in D(f)$, dizemos que f possui:*

i. máximo absoluto ou global em c se e somente se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D(f)$,

ii. mínimo absoluto ou global em c se e somente se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D(f)$.

Teorema 2.9. (Teorema de Weierstrass). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$, fechado e limitado da reta. Então, existem números c e d em $[a, b]$, tais que, para todo $x \in [a, b]$, tem-se que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.*

Daremos mais adiante condições e propriedades para obtenção dos pontos de mínimo e máximo locais.

Definição 2.14. *A derivada de uma função f definida em um intervalo aberto D, e denotada por f', é dada em cada $x \in D$ por:*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

se este limite existir e for finito.

Se em algum ponto x_0 de D este limite não existir ou for infinito, diz-se que a função não é derivável em x_0.

Teorema 2.10. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Temos que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h.$$

Passando o limite com h tendendo a zero, temos:

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h$$

Porém, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0} h = 0$. Logo,

$$\lim_{h\to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = f'(x) \cdot 0 = 0 \Rightarrow f \text{ é contínua em } x_0.$$

□

Definição 2.15. *Dada uma função f definida em um intervalo $[a, b]$ e seja $c \in]a, b[$, dizemos que c é um ponto crítico para f quando $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe. Os pontos críticos são candidatos a pontos nos quais f tem extremo local; entretanto, cada ponto crítico deve ser testado para verificar se é ou não extremo local de f.*

Teorema 2.11. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b). Se f tem um mínimo (ou máximo) local em $x_0 \in (a, b)$, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Suponha que f tenha um mínimo local em x_0. Como f é derivável em x_0, então:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Como x_0 é mínimo local em (a, b) segue que $f(x_0) \leq f(x)$, o que implica que $f(x) - f(x_0) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Se $x < x_0$ então $x - x_0 < 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ para $x_0 \in (a, b)$, logo,

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{2.3}$$

Por outro lado, $x > x_0$ então $x - x_0 > 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ para $x_0 \in (a, b)$, logo,

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{2.4}$$

Comparando as desigualdades 2.3 e 2.4 e sabendo que são o mesmo número, resulta em:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0.$$

□

Analogamente podemos demonstrar para máximo local.

Teorema 2.12. (Teste da Primeira Derivada) *Seja f uma função derivável sobre um conjunto $D(f)$, possuindo um ponto crítico $x = c$ no interior de $D(f)$, isto é, $f'(c) = 0$. Se a derivada de f é positiva à esquerda de $x = c$ e é negativa à direita de $x = c$, então $x = c$ é um ponto de máximo para f. Se a derivada de f é negativa à esquerda de $x = c$ e é positiva à direita de $x = c$, então $x = c$ é um ponto de mínimo para f.*

Teorema 2.13. (Teste da Segunda Derivada) *Seja f uma função duas vezes derivável sobre um conjunto $D(f)$, possuindo um ponto crítico $x = c$ no interior de $D(f)$, isto é, $f'(c) = 0$. Se $f''(c) < 0$ então $x = c$ é um ponto de máximo para a função f; e se $f''(c) > 0$ então $x = c$ é um ponto de mínimo para a função f.*

De forma geral, em resumo, para se determinar extremos absolutos de uma função contínua em intervalo fechado $[a, b]$, devemos seguir o seguinte roteiro:

1. Ache todos os pontos críticos c para função f no intervalo aberto $]a, b[$.
2. Calcule $f(c)$ para cada ponto crítico c obtido no item 1.
3. Calcule $f(a)$ e $f(b)$
4. O maior dos valores dos itens 2. e 3. é o valor máximo absoluto, e o menor dos valores dos itens 2. e 3. é o valor mínimo absoluto.

Teorema 2.14. (Teorema do Valor Intermediário).
Seja$f : [a, b] \to R$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demonstração. Seja $A = x \in [a, b]; f(x) < d$. O conjunto A não é vazio pois $f(a) < d$. Afirmamos que nenhum elemento de A é maior do que todos os outros. Com efeito seja $\alpha \in A$. Como $f(\alpha) < d$, vemos que $\alpha \neq b$ e, portanto, $\alpha < b$. Tomando $\epsilon = d - f(\alpha)$, a continuidade de f no ponto α nos dá um $\delta > 0$ (que tomaremos pequeno, de modo a ter $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$) tal que, para todo $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$ tem-se $f(x) < f(\alpha) + \epsilon$, ou seja, $f(x) < d$. Assim, todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha + \delta)$ pertencem a A. Agora ponhamos $c = supA$. Como c é limite de uma sequência de pontos $x_n \in A$, temos:

$$f(c) = \lim f(x_n) \leq d.$$

Como A não possui maior elemento, não se tem $c \in A$. Logo não vale $f(c) < d$, o que nos obriga a concluir que $f(c) = d$. □

Teorema 2.15. (Teorema de Rolle). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Pelo Teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo m e seu valor máximo M em pontos de $[a, b]$. Se esses pontos forem a e b então $m = M$ e f será constante, daí $f'(x) = 0$ qualquer que seja $x \in (a, b)$. Se um desses pontos, digamos c, estiver em (a, b) então $f'(c) = 0$.

Teorema 2.16. (Teorema do Valor Médio). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Demonstração. Consideremos primeiramente, a reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Essa reta é o gráfico da função

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Seja g a função que é a diferença entre f e h, ou seja, $g(x) = f(x) - h(x)$. Assim,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

Quando $x = a$, temos:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a)\right] = f(a) - f(a) = 0$$

e, quando $x = b$, temos:

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right] = f(b) - [f(b) - f(a) + f(a)] = 0.$$

Além disso, como g é a diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b), ela própria é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b).

Logo, pelo Teorema de Rolle, conclui-se que existe um número c no intervalo (a, b), tal que $g'(c) = 0$.

Como $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, temos que $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e, portanto, $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, ou seja, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, como queríamos provar. $\square$

Observação 2.2. Uma importante consequência do Teorema do Valor Médio é a relação do sinal da primeira derivada da função com o seu crescimento.

Proposição 2.4. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em (a, b) então:*

i) f é não-decrescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo x em (a, b). Além disso, se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.

ii) f é não-crescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo x em (a, b). Além disso, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Suponha que f seja não-decrescente em $[a,b]$ e vamos determinar o sinal de $f'(x)$. Se $h > 0$, temos que $x+h > x$ e, usando o fato de que f é não decrescente:

$$f(x+h) \geq f(x) \Rightarrow f(x+h) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Em ambos os casos, tem-se que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$. Portanto,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

.

Suponha que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Sejam x_0, $x_1 \in [a,b]$ com $x_0 < x_1$. Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_0, x_1]$, temos que existe $x \in (x_0, x_1)$ tal que;

$$f'(x) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Como $x_1 - x_0 > 0$ e $f'(x) \geq 0$ então $f(x_1) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_0)$ e, portanto, f é não-decrescente. De maneira análoga pode-se provar o item (ii).

Corolário 2.1. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e duas vezes derivável em (a,b) então:*

i) f' é não-decrescente em $[a,b]$ se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo x em (a,b). Além disso, se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f' é crescente em $[a,b]$.

ii) f' é não-crescente em $[a,b]$ se, e somente se, $f''(x) \leq 0$ para todo x em (a,b). Além disso, se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$ então f' é decrescente em $[a,b]$.

3 Aplicações Básicas

Nesse capítulo mostraremos algumas aplicações do cálculo no cotidiano das pessoas, de economistas, engenheiros, médicos, professores, etc. facilitando sobremaneira a resolução de situações-problemas nas mais diversas áreas.

3.1 NA MATEMÁTICA

Aplicação 1. Quais os zeros da equação $x^2 = 2^x$?

Solução:

A Equação $x^2 = 2^x$ é um problema na qual sua solução é feita essencialmente com cálculo, não é difícil ver que ela tem três soluções, bastando para isso construirmos o gráfico da função $f(x) = x^2$ que é uma parábola com vértice na origem e concavidade voltada para cima e o gráfico da função $g(x) = 2^x$ que é uma curva que tem como assíntota o eixo x e toca o eixo y no ponto $(0, 1)$, essa técnica de construção de gráfico torna a álgebra, envolvida em tal problema, mais significativa, no entanto a construção do gráfico de uma função só é bem sucedida com o auxílio do cálculo. Observamos que o gráfico das duas funções se interceptam em três pontos distintos, sendo um deles com abcissa negativa. Observe a figura:

É fácil ver que 2 e 4 são soluções da mesma, de fato:

$$2^2 = 2^2 \text{ e } 4^2 = 2^4.$$

Para encontrarmos as soluções positivas dessa equação usando cálculo tomaremos duas funções auxiliares a função $\varphi(x) = 2^x - x^2$ e a função $\psi(x) = \dfrac{ln(x)}{x}$, observe:

$$\psi'(x) = \frac{1 - ln(x)}{x^2} \to \begin{cases} \psi'(e) = 0 \\ \psi'(x) > 0, & \text{se} \quad 0 < x < e \\ \psi'(x) < 0, & \text{se} \quad x > e \end{cases}$$

Portanto ψ é (estritamente) crescente em $(0, e)$ e decrescente em (e, ∞), e como 2 $\in (0, e)$, segue-se:

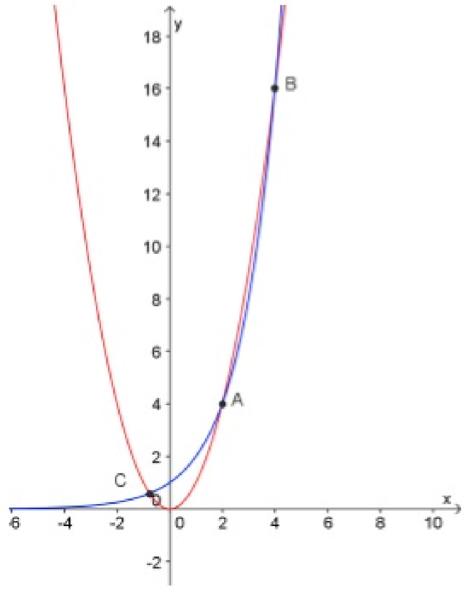

Figura 3.1: Gráfico de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$

$$\begin{cases} \dfrac{ln(x)}{x} < \dfrac{ln(2)}{2}, & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\[2ex] \dfrac{ln(x)}{x} > \dfrac{ln(2)}{2}, & \text{se} \quad 2 < x < e \\[2ex] \dfrac{ln(x)}{x} > \dfrac{ln(4)}{4} = \dfrac{ln(2)}{2}, & \text{se} \quad e < x < 4 \\[2ex] \dfrac{ln(x)}{x} < \dfrac{ln(2)}{2}, & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$$

Nota-se, por serem valores positivos e aplicando-se propriedade de expoente do logaritmando, que $\dfrac{ln(x)}{x} < \dfrac{ln(2)}{2} \Rightarrow 2ln(x) < xln(2) \Rightarrow ln(x)^2 < ln(2)^x \Rightarrow x^2 < 2^x$. Analogamente nas demais desigualdades, observa-se que os únicos zeros positivos da função $\varphi(x) = 2^x - x^2$ são $x = 2$ e $x = 4$

Tomando x < 0, tem-se $\varphi'(x) = (ln(2))2^x - 2x > 0$, logo $\varphi(x)$ é estritamente crescente em $(-\infty, 0)$. Também $\varphi(-1) = \dfrac{-1}{2} < 0$ e $\varphi\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{4} > 0$, logo pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), f tem um zero entre -1 e $\dfrac{-1}{2}$. Vamos mostrar que essa raiz não é um número racional, e portanto é irracional e que esse número não é algébrico, ou seja, ele não é raiz de um polinômio $p(x)$ de coeficientes inteiros, logo tal raiz é um número transcendente; o número e citado acima é transcendente.

De fato, suponhamos por absurdo, que a fração irredutível e positiva $\dfrac{p}{q}$ fosse tal que

$2^{\frac{-p}{q}} = \left(\dfrac{-p}{q}\right)^2$. Eliminando denominadores e elevando ambos os membros, à potência q, teríamos então:

$$2^p.p^{2q} = q^{2q} \ ;$$

Ora, se p for ímpar, o primeiro membro da igualdade acima é um número inteiro que contém um número ímpar de fatores iguais a 2 enquanto o segundo membro contém um número par (talvez zero) de fatores 2. Se, entretanto, p for par então q será ímpar, logo o primeiro membro é divisível por 2 mas o segundo não é. Então de qualquer forma tem-se uma contradição: concluímos que não existe um número racional $r = \frac{p}{q} > 0$ tal que $2^{-r} = (-r)^2$. Para mostrar que a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ é um número transcendente utilizaremos o Teorema de Gelfond-Schneider, cujo enunciado é o seguinte:

Se a, b são números algébricos e b é irracional entao a^b é transcendente (exceto, evidentemente, quando $a = 0$ ou $a = 1$).

Ora, 2 é claramente algébrico e, como vimos, a raiz negativa x de nossa equação é irracional. Se x fosse algébrico então, pelo Teorema de Gelfond-Scheider 2^x seria transcendente. Mas se x é algébrico, x^2 também será. Logo não pode ser $2^x = x^2$.

Conclusão a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ é um número irracional e transcendente. Agora vejamos um método para aproximar numericamente a raiz negativa da equação $2^x = x^2$. Consideremos a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definida por $f(x) = 2^{\frac{-x}{2}}$. Se $a \geq 0$ for tal que $f(a) = a$, então $-a$ será a raiz negativa de $2^x = x^2$. Para resolver equações da forma $f(x) = x$, existe um método, chamado "das aproximações sucessivas", que funciona muito bem quando a derivada da função cumpre uma condição do tipo $|f'(x)| \leq \lambda < 1$, onde λ é constante.

No nosso caso, temos $f'(x) = \dfrac{-ln(2)}{2}.e^{\frac{-x}{2}}$. Como o valor de $ln(2) \cong 0,69$, e podemos escrever $\lambda = \dfrac{ln(2)}{2}$ e como $0 < \lambda < 1$. O método das aproximações sucessivas opera assim: começamos com qualquer número $x_0 > 0$. A sequência de aproximações $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_n + 1 = f(x_n)$,... convergirá para um limite $a \geq 0$, o qual é a única solução da equação $f(x) = x$.

Então $-a$ será a única solução negativa de $2^x = x^2$. Fazendo os cálculos, e começando com $x_0 = 0$, obtemos as aproximações sucessivas: $x_1 = 1, x_2 = f(x_1) = 0,7071067811, x_3 = f(x_2) = 0,7826540277, ..., x_{18} = 0,7666646959$. E apartir daí, vêm $x_{18} = x_{19} = x_{20}$ e etc. Isto signfica que aproximações melhores para a solução procurada só podem ser obtidas com 11 ou mais casas decimais. Na verdade, x_{18} é uma excelente aproximação para tal raiz; até mesmo exagerada para a maioria dos usos. Então a raiz negativa da equação $2^x = x^2$ é $x \cong -0,7666646959$.

Aplicação 2. Da folha circular corta-se setor circular de modo que se obtenha o funil conforme mostra a figura abaixo. Se o funil tem volume máximo, então o ângulo central α, em radianos, é igual a:

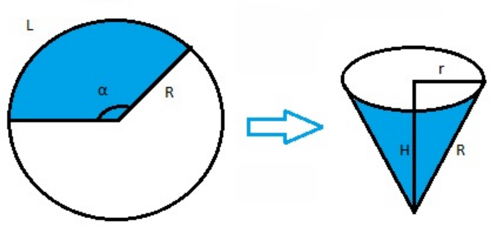

Figura 3.2: Folha circular e funil

Como sabemos que $L = R\alpha$ e na circunferência do cone $L = 2\pi r$ é fácil concluir que $r = \dfrac{R\alpha}{2\pi}$

Aplicando Pitágoras no triangulo retângulo interno do funil teremos:

$$r^2 + H^2 = R^2 \Rightarrow \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2} + H^2 = R^2$$
$$H^2 = \frac{R^2}{4\pi^2}(4\pi^2 - \alpha^2) \Rightarrow H = \frac{R}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$$

Agora vamos obter o volume do cone, dado pela terça parte do produto da aréa da base (círculo) pela altura H encontrada.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 . \frac{r}{2\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}$$

Tomando-se $\dfrac{\alpha}{2\pi} = y$, vamos obter V'

$$V' = \frac{r^3}{6}\left[2y\sqrt{1-y^2} + \frac{y^2(-2y)}{2\sqrt{1-y^2}}\right]$$

Igualando $V' = 0$ para se obter os pontos críticos teremos (observa-se que é suficiente igualar o valor entre colchetes a zero):

$$\left[2y\sqrt{1-y^2} + \frac{y^2(-2y)}{2\sqrt{1-y^2}}\right] = 0 \Rightarrow y\left[2\sqrt{1-y^2} - \frac{y^2}{2\sqrt{1-y^2}}\right] = 0$$
$$\frac{y^4}{1-y^2} = 4(1-y^2) \Rightarrow y^4 = 4(1 - 2y^3 + y^4)$$

Portanto os valores que zeram V' são $y = 0$ e as raízes dessa equação bi-quadrática, $y = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Os dois primeiros valores não servem para a solução pois zeram e tornam maior que 1, respectivamente, a razão entre o ângulo central α e o círculo completo. Logo $\frac{\alpha}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e, portanto, o ângulo que maximiza o volume do cone é dado por $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Aplicação 3. Determine os pontos da curva $xy = 1$ mais próximos da origem.

Seja (x, y) um ponto da curva e $(0, 0)$ a origem. Assim a distância d entre eles é dada por: $d((0, 0), (x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Minimizar d é equivalente a minimizar $d^2((0, 0), (x, y)) = x^2 + y^2$; mas como (x, y) pertence à curva, temos que $y = x^{-1}$; logo, obtemos a seguinte função:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Derivando e igualando a zero obtemos:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} = 0,$$

obtém-se $x = \pm 1$. Calculando a segunda derivada de f: $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$,que é sempre positiva; logo, $x = \pm 1$ são pontos de mínimo; concluimos então que os pontos mais próximos da origem são $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

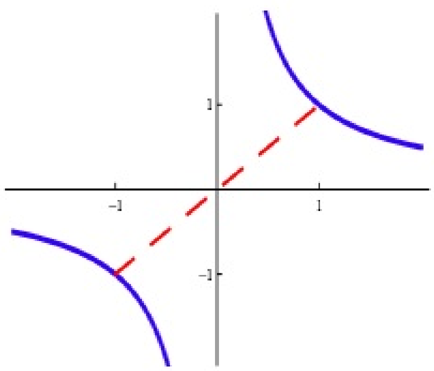

Figura 3.3: Curva $xy = 1$

3.2 NA ENGENHARIA DE TRÂNSITO

Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20 km/h$ onde t é o número de horas após o meio-dia.

Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?

Solução: O objetivo é determinar o máximo e o mínimo absoluto da função $v(t)$ no intervalo $1 \leq t \leq 6$. Para isso, inicialmente calculamos a primeira derivada e igualamos-na a zero para encontrar os pontos críticos:

$$v'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 0 \leftrightarrow t = 2 \text{ ou } t = 5.$$

Portanto, estes são os pontos críticos de v, ambos pertencentes ao intervalo $(1, 6)$. Para verificar se são pontos de máximo ou mínimo locais, usamos o teste da segunda derivada:

$$v''(t) = 6t - 21 \Rightarrow \begin{cases} v''(2) = -9 < 0 \to t = 2, & \text{é ponto de máximo local de } v \\ v''(5) = 9 > 0 \to t = 5 & \text{é ponto de mínimo local de } v \end{cases}$$

Para determinar os pontos de máximo e mínimo globais de v em $[1, 6]$, precisamos comparar os valores que v assume nos pontos críticos, com os respectivos valores nos extremos do intervalo, pois como v é uma função contínua definida em um intervalo fechado, pode assumir seus valores máximo e mínimo globais ou nos pontos críticos, ou nos extremos do intervalo. Assim, temos:

$$\begin{aligned} v(1) &= 40,5 \\ v(2) &= 46 \\ v(5) &= 32,5 \\ v(6) &= 38. \end{aligned}$$

Com isso concluímos que $t = 2$ é ponto de máximo global e $t = 5$ é ponto de mínimo global de v no intervalo de interesse $[1, 6]$. Isso significa que o trânsito é mais rápido às 14h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 46 km/h e o trânsito é mais lento as 17h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 32,5 km/h.

3.3 NA ECONOMIA

O preço da produção de n unidades de carpetes para sala de estar é dado pela função $f(n) = 30 + 20n$. Se o preço de venda de cada um é $60 - \dfrac{n}{1000}$, para $n < 50.000$, determine o número de carpetes que devem ser fabricados e vendidos para que o lucro seja máximo.

SOLUÇÃO:

A função lucro será denotada pela diferença entre o valor total das vendas (receita) e o custo de produção, ou seja, $L(n) = R(n) - f(n) \to L(n) = n.\left(60 - \dfrac{n}{1000}\right) - f(n)$

Logo:

$$\begin{aligned} L(n) &= n.\left(60 - \frac{n}{1000}\right) - (30 + 20n) \\ &= 60.n - \frac{n^2}{1000} - (30 + 20n) \\ &= \frac{1}{1000}.(40000n - n^2 - 30000) \end{aligned}$$

Derivando a função Lucro e igualando a zero para determinar o ponto crítico: $L'(n) = 40000 - 2.n$

Igualando a zero, temos: $L'(n) = 0 \to 40000 - 2n = 0 \to n = 20000$. Nota-se que a segunda derivada $L''(n) = -2 < 0$ para qualquer valor de n, logo 20000 é ponto de máximo da função lucro. Sendo assim, o número de carpetes fabricados para que o lucro seja máximo é de 20.000.

3.4 NA MEDICINA

O modelo Count é uma fórmula empírica usada para predizer a altura de uma criança em idade pré-escolar. Se $h(x)$ denota a altura (em centímetros) na idade x (em anos) para $\frac{1}{4} \leq x \leq 6$, então $h(x)$ pode ser aproximada por $h(x) = 70,228 + 5,104x + 9,222lnx$.

a) Construa o gráfico da função e da sua derivada, que representa a taxa de crescimento da criança.

b) Estime a altura e a taxa de crescimento quando uma criança atinge a idade 2 anos.

c) Quando a taxa de crescimento é máxima e mínima? Quanto valem estas taxas?

Solução:

a)

b) Substituindo achamos $h(2) = 86,83$, ou seja, quando uma criança atinge 2 anos, mede aproximadamente 87 cm. A taxa de crescimento é dada pela derivada de h, a qual é $h'(x) = 5,104 + \frac{9,222}{x}$. Assim, quando $x = 2$, temos $h'(2) = 9,715$, ou seja, aos dois anos uma criança cresce cerca de $9,7cm/ano$.

c) Pelo gráfico observamos que a taxa de crescimento é decrescente no intervalo considerado, o que pode ser confirmado pela derivada de $h'(x)$, dada por $h''(x) = \frac{-9,222}{x} < 0$ para todo x. Assim, a taxa de crescimento será máxima no menor valor de x, ou seja, em $x = \frac{1}{4}$ e será mínima, no maior valor de x, ou em $x = 6$. O valor máximo da taxa de crescimento é, portanto, $h'\left(\frac{1}{4}\right) = 41,99cm/ano$ e o valor mínimo, $h'(6) = 6,64cm/ano$.

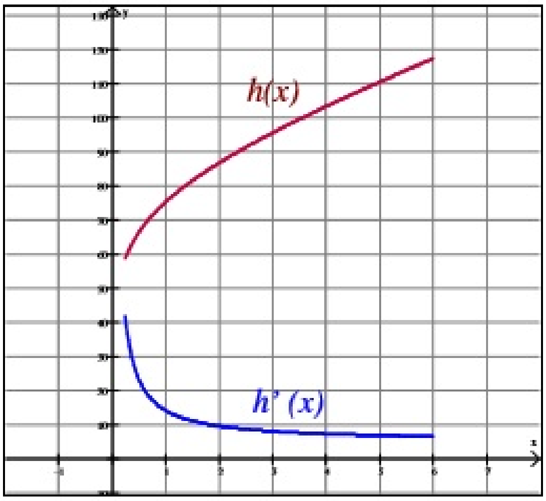

Figura 3.4: Altura e taxa de crescimento da criança

3.5 NA FÍSICA

Antes de mencionarmos alguma aplicação vale ressaltar que o padrão espacial da onda se desloca no espaço com o passar do tempo. Na figura abaixo, representamos a onda no instante de tempo considerado como inicial ($t = 0$) e num instante posterior genérico ($t \neq 0$).

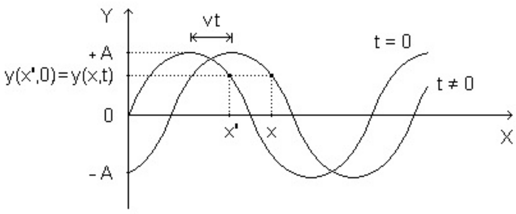

Figura 3.5: Deslocamento da onda

Assim, para $t = 0$, escrevemos: $y(x, 0) = Asen(bx)$ em que A representa a amplitude da onda. Esta equação representa uma situação particular porque, nela, condição $y = 0$ para $x = 0$ e $t = 0$ A equação geral da onda que se propaga sobre o eixo X no mesmo sentido que aquele considerado positivo para esse eixo é:

$$y(x, t) = A.sen(mx - nt)$$

Aplicação 1. Um móvel desloca-se sobre um seguimento de reta obedecendo à equação horária $s = sent$ (Unidades do SI). Determine:

a) Sua velocidade instante $t = \frac{\pi}{4}$ segundos

b) Sua aceleração no instante $t = \frac{\pi}{6}$ segundos

Solução:

Portanto a questão trata-se de uma aplicação da equação geral, onde $A = 1$ e $m = 0$. Derivando-se a função $s(t) = sent$, obtém-se:

$$s'(t) = v(t) = cost$$
$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos\frac{\pi}{4}$$
$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}ms$$

Derivando a velocidade em função do tempo tem-se:

$$v'(t) = a(t) = -sent$$

$$a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -sen\frac{\pi}{6}$$

$$a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}ms^2$$

Logo sua velocidade e sua aceleração são, respectivamente, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{1}{2}$

Aplicação 2. Um fóton (raio de luz) parte de um ponto A para um ponto B sobre um espelho plano, sendo repetido quando passa pelo ponto P. Estabeleça condições para que o caminho APB seja o mais curto possível.

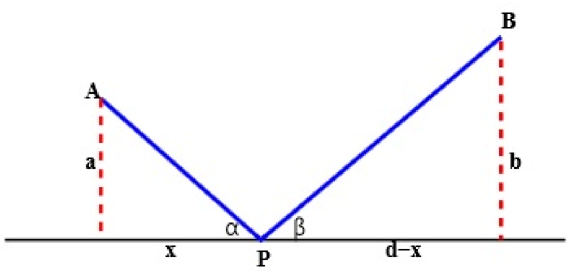

Figura 3.6: Trajetória do fóton

Devemos minimizar o comprimento L do percurso, considerando $0 \leq x \leq d$:

$$L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

Derivando em função de x, $L'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ e igualando a zero, obtemos:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

que é equivalente a $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{d-x}$, donde obtemos que $\alpha = \beta$. Esta é a condição para que o caminho APB seja o mais curto.

Vamos comprovar que o ponto crítico $x = \dfrac{ad}{a+b}$ é de mínimo. Para isso vamos obter $L(0)$, $L\left(\dfrac{ad}{a+b}\right)$, $L(d)$ e $L''(x)$ e em seguida mostrar que $L\left(\dfrac{ad}{a+b}\right)$ é menor que $L(0)$ e que $L(d)$:

$$L(0) = a + \sqrt{b^2 + d^2}$$

$$L(d) = \sqrt{a^2 + d^2} + b$$

$$L\left(\frac{ad}{a+b}\right) = \sqrt{a^2 + \frac{a^2.d^2}{(a+b)^2}} + \sqrt{b^2 + \left(d - \frac{ad}{(a+b)}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 + d^2} + \frac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 + d^2}$$

$$= \left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\right)\sqrt{(a+b)^2 + d^2}$$

$$= \sqrt{(a+b)^2 + d^2}$$

$$L''(x) = \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{((d-x)^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Observa-se que a segunda derivada é sempre positiva, em particular, $L''(\dfrac{ad}{a+b}) > 0$. Iremos agora mostrar que $L\left(\dfrac{ad}{a+b}\right) < L(0)$:

$$\sqrt{(a+b)^2 + d^2} < a + \sqrt{b^2 + d^2}$$
$$\rightarrow a^2 + 2ab + b^2 + d^2 < a^2 + 2a\sqrt{b^2 + d^2} + b^2 + d^2$$
$$\rightarrow b < \sqrt{b^2 + d^2}$$

que sempre é verdadeiro, como queríamos demonstrar. Analogamente podemos demonstrar que $L\left(\dfrac{ad}{a+b}\right) < L(d)$.

3.6 NAS CIÊNCIAS BIOLÓGICAS

Centenas de animais pertencendo a uma espécie em perigo estão colocadas numa reserva de proteção. Depois de anos a população desses animais na reserva é dada por $P = 100.\dfrac{t^2 + 50t + 25}{t^2 + 25}$. Após quantos anos a população é máxima?

SOLUÇÃO:

Derivando-se a expressão da população dessa espécie em relação ao tempo em anos e em seguida igualando a zero tem-se o tempo em que a população é máxima, assim:

$$P' = 100.\frac{(2t+5).(t^2+25)-(t^2+5t+25).2t}{[t^2+25]^2}$$

$$P' = 100.\frac{-5t^2+125}{[t^2+25]^2}$$

$$P' = 500.\frac{[25-t^2]}{[t^2+25]^2}$$

Fazendo $P' = 0$ teremos:

$$500.\frac{[25-t^2]}{[t^2+25]} = 0$$

$$25 - t^2 = 0 \rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5$$

Vamos obter agora a segunda derivada de P:

$$P'' = 500.\left[\frac{-2t(t^2+25)^2-(25-t^2).2t(t^2+25)}{(t^2+25)^4}\right] \Rightarrow \frac{1000t(t^2+25)}{(t^2+25)^4}[-25-25]$$

Observa-se que $P'' < 0, \forall t > 0$. Além disso temos que $P(0) = 100$, $\lim_{t\to\infty} P(t) = 100$ e $P(5) = 600$.

Portanto, em 5 anos a população dessa espécie em perigo será máxima.

4 Conclusão

Concluímos aqui esse trabalho na certeza de termos mostrado que com o surgimento do cálculo através dos estudos feitos por Newton e Leibniz, as mais complicadas situações são facilmente resolvidas aplicando-se conhecimentos básicos de sequencias e continuidade, sobretudo com o uso de derivadas.

Primeiramente foi feita uma explanação básica das principais teorias do cálculo diferencial, bem como anunciar e demonstrar teoremas que são bases dessa ciência. Por fim mostramos sua total aplicabilidade no cotidiano de profissionais que buscam sempre otimizar resultados positivos no desempenho de suas funções, e pra isso contam com o cálculo, ferramenta extremamente importante para facilitar essa busca.

Referente ao ensino médio, reportamos-nos aos PCN's que entende nessa etapa da educação básica a necessidade de aperfeiçoamento dos conhecimentos matemáticos previamente adquiridos, e podemos defender aqui uma pequena alteração do currículo de matemática com a implantação do tópico de Introdução ao Cálculo Diferencial nessa etapa do ensino básico.

5 Referências Bibliográficas

[1] Fundamentos de Cálculo, Coleção PROFMAT, SBM, em preparação.

[2] G., Ávila - Cálculo das funções de uma variável, vol. 1. LTC, 2003.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de C´alculo Volume 1. 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[4] Iezzi, Gelson, Carlos Murakami, Nilson José Machado - Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 8, 6a Edição, São Paulo, Atual, 2005.

[5] Lima, Elon Lages - Análise Real volume 1 Funções de Uma Variável. Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2009.

[6] Lima, Elon Lages - Curso de Análise vol. 1. Projeto Euclides - IMPA, 2009.

[7] LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. A Matem´atica do Ensino M´edio Volume 1. 5a ed. Rio de Janeiro: Solgraf, 2001.

[8] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN-EM). Brasil. MEC/SEMTEC - Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002.