



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Geometria do Táxi: A Táxi-Elipse

Edivaldo Oliveira da Cruz

Orientador
Prof. Dr. Newton Luís Santos

Teresina - 2015

Edivaldo Oliveira da Cruz

Geometria do Táxi: A Táxi-Elipse

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador

Prof. Dr. Newton Luís Santos

Teresina - 2015

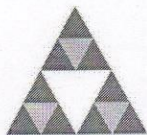
FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

C955g Cruz, Eivaldo Oliveira da.
Geometria do táxi: a táxi-elipse / Eivaldo Oliveira da
Cruz. – Teresina, 2015.
70 f. il. : color

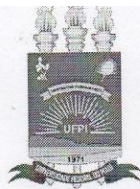
Dissertação (Mestrado Profissional) – Pós-Graduação
em Matemática, Universidade Federal do Piauí, 2015.
Orientador: Prof. Dr. Newton Luís Santos

1. Geometria. 2. Geometria Analítica Plana. 3. Elipse.
4. Matemática – Estudo e Ensino. I. Título

CDD 516.32



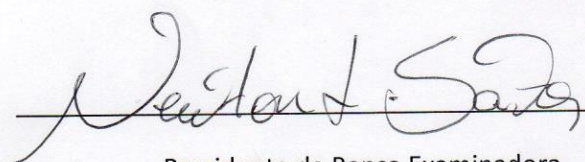
PROFMAT



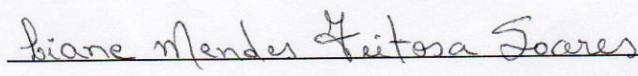
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



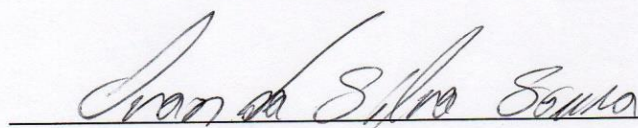
Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: **Geometria do Táxi: A Táxi-Elipse**, defendida por **Edivaldo Oliveira da Cruz** em **31/08/2015** e aprovada pela banca constituída pelos professores:



Presidente da Banca Examinadora



Examinador



Examinador Externo

À minha querida esposa Erinete, que conseguiu transformar um homem inerte em alguém capaz de realizar coisas que nem sabia que podia, inclusive pela insistência, que me fez querer cursar esse Mestrado. E agora mais ainda, por me conceder a graça de ser pai. Amo vocês duas.

Agradecimentos

Agradeço

À Universidade Federal do Piauí, principalmente aos professores do PROFMAT, que contribuíram bastante para a minha formação,

À Coordenação Nacional do PROFMAT, por tornar possível o sonho de tantos professores,

À CAPES, pelo incentivo intelectual e financeiro,

Aos companheiros de trabalho das Escola Municipal Simões Filho, que sempre me incentivaram nessa luta e Unidade Escolar Enoque Moura, pelas felicitações e torcida,

Aos amigos de curso, pelas diversões do Domat e do Futebol, pelos almoços no Aeroporto, pelos sorvetes no Shopping e principalmente, pelos produtivos momentos de estudo,

À minha família, que sempre acreditou em meu potencial,

À minha amada esposa Erinete, companheira de vida, que acompanhou minhas angústias ao escrever esse trabalho,

Ao meu orientador Professor Newton Luís Santos, por todas as contribuições, que foram de suma importância para enriquecimento desse trabalho, bem como pela paciência durante a minha dura batalha contra a dúvida se conseguiria terminar essa dissertação, E principalmente a Deus, o Todo Poderoso que me rege, que rege minha vida. A Ti, Senhor, toda honra, glória e louvor.

Poderosa é a Geometria; unida à arte, irresistível.
(Eurípides)

*Mesmo que a luta seja difícil,
que árdua seja,
sofrida seja,
não desistirei,
pois Tu, Senhor, estarás comigo.*
(Edivaldo O. da Cruz)

Resumo

Neste trabalho são discutidos aspectos da Geometria do Táxi, uma geometria não-Euclidiana em que se mune o plano da distância da soma, também chamada de distância do táxi. São discutidas algumas aplicações relacionadas a esta geometria e alguns de seus aspectos que podem ser tratados pelo Professor do Ensino Básico em suas aulas. É feita a construção da cônica elipse nesta geometria. São apresentadas algumas propriedades geométricas das cônicas e condições de simetria que auxiliam no reconhecimento de propriedades da mesma.

Palavras-chave: Geometria do Táxi, Táxi-Elipse, Elipse, Cônicas, Métrica.

Abstract

In this work we discuss aspects of Taxicab Geometry, a non-Euclidean geometry in which one equips the plane with the sum metric, also known as taxicab distance. It is discussed some applications related to this geometry and some of its aspects that can be handled by a Basic Education Teacher in their classes. The construction of the conics ellipse is made in this geometry. It is presented some geometric properties of conics and symmetry conditions that helps in the recognition of its properties.

Keywords: Taxycab Geometry, Taxycab-Ellipse, Ellipse, Conics, Metric.

Lista de Figuras

1.1	Euclides de Alexandria	17
1.2	Reta do Táxi	17
1.3	Retas do Táxi Paralelas	18
1.4	Hermann Minkowski	19
1.5	Pierre de Fermat	19
1.6	René Descartes	19
1.7	Plano Cartesiano	20
1.8	Segmento de Reta AB	20
1.9	Triângulo ABC	21
1.10	Táxi-Distância	22
1.11	Pontos A e B Alinhados Horizontalmente	22
1.12	Pontos A e B Alinhados Verticalmente	22
3.1	Parte de uma Cidade	27
3.2	Parte de uma Cidade 2	29
3.3	Partes de um Bairro	30
3.4	Trabalho - Escola - Salão	31
4.1	Elipse Euclidiana	34
4.2	Táxi-Elipse	35
4.3	Táxi-Elipse de Focos F_1 e F_2	36
4.4	Intervalo Inadequado	37
4.5	Distância Focal da Táxi-Elipse de Focos F_1 e F_2	37
4.6	Reta Focal de Centro (m, k) e Focos F_1 e F_2	40
4.7	Translação da Reta Focal	41
4.8	Táxi-Elipses Transladadas	42
4.9	Ângulo de Rotação da Reta Focal	43
4.10	Ângulo de Rotação da Reta Focal grau 0	44
4.11	Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/16$	45
4.12	Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/8$	45
4.13	Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/6$	46
4.14	Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/4$	46
4.15	Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/3$	47

4.16	Ângulo de Rotação da Reta Focal $3\pi/8$	47
4.17	Ângulo de Rotação da Reta Focal $7\pi/16$	48
4.18	Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/2$	48
4.19	Distância: Caso (i)	50
4.20	Distância: Caso (ii)	52
4.21	Distância: Caso (iii)	55
4.22	Táxi-Elipse 1	58
4.23	Táxi-Elipse 2	60
4.24	Táxi-Elipse 3	62
4.25	Táxi-Elipse 4	64
A.1	Focos Simétricos	69

Lista de Tabelas

4.1	Análise de Sinais	37
4.2	Análise de Sinais da Equação 4.10	49
4.3	Análise de Sinais da Equação 4.16	57
4.4	Análise de Sinais da Equação 4.17	59
4.5	Análise de Sinais da Equação 4.18	61
4.6	Análise de Sinais da Equação 4.19	63

Sumário

Introdução	13
1 As Diferentes Geometrias	16
1.1 Breve Histórico da Geometria do Táxi	18
1.2 Analisando distâncias	19
2 A Métrica na Geometria do Táxi	23
2.1 O Conceito de Métrica	23
2.2 A Métrica do Táxi	24
3 Relacionando Distâncias	27
3.1 Métrica do Táxi e Combinatória	27
3.2 Confiando na Métrica do Táxi	31
3.3 Relação entre a Táxi-Distância e a Distância na Métrica Euclidiana	32
4 A Táxi-Elipse	34
4.1 Elipse Euclidiana e Táxi-Elipse	34
4.2 Análise e Construção de Uma Táxi-Elipse	36
4.2.1 Movimentos de Translação e Rotação da Reta Focal (euclidiana) da Táxi-Elipse	40
4.2.1.1 Movimento de Translação da Reta Focal	40
4.2.1.2 Movimento de Rotação da Reta Focal	42
4.2.2 Análise da Táxi-Elipse com Reta Focal Paralela ao Eixo Ox	57
4.2.3 Análise da Táxi-Elipse com Reta Focal Paralela ao Eixo Oy	59
4.2.4 Análise da Táxi-Elipse com Reta Focal Oblíqua aos Eixos Coordenados	61
4.2.4.1 Reta Focal com Coeficiente Angular Positivo	61
4.2.4.2 Reta Focal com Coeficiente Angular Negativo	63
5 Considerações Finais	66
Referências	68

Introdução

Geometria é uma palavra de origem grega: *geo* = terra e *metria* = medida. Geometria significa, então, medida da terra. Tal nomenclatura vem do Egito antigo, onde os egípcios cultivavam terras que eram divididas em lotes, nas margens do rio Nilo. Devido ao transbordamento do rio, a água acabava apagando as divisórias desses lotes. Então, vinham funcionários do faraó e refaziam as divisões da terra. Para isso, mediam comprimentos, larguras, ângulos, e outras medidas necessárias a uma boa divisão. A partir disso, os gregos aprenderam e aprimoraram esses conceitos, e os nomearam “*Geometria*”.

As propriedades e as relações entre os números são estudadas na área da matemática denominada Teoria dos Números. O estudo destes conceitos é tratado com maior ênfase nos cursos de graduação, principalmente na graduação em Matemática. [8]

Apesar de trazer no próprio nome “medida”, a Geometria tem muito mais a ver com formas geométricas. Tais formas instigam o interesse dos homens desde o começo da história.

Um grande problema encontrado em salas de aula acerca do ensino da Geometria é o pouco destaque que se dá a seu ensino. Isso é observado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's)[3]:

No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (BRASIL, 1998)

O ensino da Geometria na Educação Básica às vezes é deixado de lado porque alguns livros trazem os conteúdos da mesma na parte final do livro, e outras vezes porque os próprios professores julgam os conteúdos de outras áreas da Matemática, como Cálculo e Álgebra, mais importantes que a Geometria. Com isso o aluno perde algumas capacidades de raciocínio que só o ensino desta oferece.

Desenvolvida pelo matemático russo Hermann Minkovski (1864–1909), a Geometria

do Táxi é uma geometria aplicada em uma malha quadriculada, as linhas horizontais e as verticais se confundem com ruas de uma “cidade ideal” ou “cidade imaginária”. [8]

Por ser uma geometria de fácil compreensão, pois pode ser empregada no cotidiano das pessoas, nos seus deslocamentos a pé ou em um transporte, a Geometria do Táxi pode trazer uma ótima contribuição ao aprendizado de uma forma bem mais flexível e criativa que a Geometria Euclidiana. Mesmo sendo pouco conhecida, faz parte do dia a dia de todos nós em quase todo o tempo. [8]

Por essa quase obrigatoriedade das pessoas viajarem por ruas e calçadas, tal geometria é um útil modelo na geografia urbana.

Veja o que afirma Krauze [7]:

A Geometria do Táxi é quase o mesmo que a Geometria Euclidiana. Os pontos são os mesmos, as linhas são as mesmas, e os ângulos são medidos da mesma maneira. Somente a função de distância é diferente. (KRAUSE, 1986)

Uma Geometria semelhante, mais acessível, com pouca diferença da Geometria Euclidiana, base dos estudos geométricos no Ensino Básico, sendo introduzida antes da Euclidiana, tornaria fácil a transição para esta e ainda ajudaria em suas interpretações mais complexas.

Sabe-se que uma elipse é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano em que a soma das distâncias de cada um deles a dois outros pontos fixos, chamados focos é constante e maior que a distância entre tais focos. O objeto principal desse estudo é a Táxi-Elipse, elipse inserida na Geometria do Táxi, que é um tipo de geometria “não-Euclidiana”. Tal expressão surge do fato de que essa está em desacordo com alguns princípios (que uma Geometria Euclidiana deve satisfazer) estabelecidos por Euclides, em seu Livro “Elementos”, como por exemplo, o *axioma das paralelas*. Um dos objetivos deste trabalho consiste em discutir a importância do conceito de distância quando se discute lugares geométricos, considerando o caso particular da elipse. Como uma análise criteriosa de módulos é imprescindível, esta é uma importante aplicação daquele conceito.

Por ser definida em uma geometria não-Euclidiana, podem surgir algumas indagações: E a Táxi-Elipse tem a mesma forma que a Elipse definida na Geometria Euclidiana? Se não, então qual é a forma? Ao fim desse trabalho essas respostas serão respondidas.

O desenvolvimento desse estudo se dará em 4 capítulos, divididos da seguinte forma:

Capítulo 1: É feito um histórico das geometrias não-Euclidianas, dando ênfase à Geometria do Táxi, traçando um paralelo entre esta e a Geometria Euclidiana.

Capítulo 2: Mostra-se que na Geometria do Táxi, o conceito de distância utilizado respeita todas as propriedades de uma métrica, o que faculta, a partir de então, chamá-la apenas de Métrica do Táxi.

Capítulo 3: Serão comparadas, a Geometria Euclidiana e a do Táxi, estabelecendo, por exemplo, a diferença entre distância em cada uma delas.

Capítulo 4: Construção geométrica e analítica da Táxi-Elipse, mostrando o comportamento gráfico e analítico da mesma, dando essencial importância ao movimento de rotação da reta focal da Táxi-Elipse, bem como sua interferência no comportamento gráfico desta.

É frequente da parte dos alunos, a cobrança de uma maior aplicabilidade do que se ensina na Matemática em sala de aula. A apresentação deste tema durante as aulas de geometria, no contexto do estudo de cônicas, pode servir como um motivador do estudo das demais cônicas e das propriedades de módulo. Como antes foi dito, é uma geometria que faz parte da vida desse aluno, o que a torna mais adequada a uma contextualização, abrindo portas a compreensões abstratas antes inatingíveis.

1 As Diferentes Geometrias

Até meados do século *XIX* a comunidade científica acreditava que não existia outra forma de interpretar o espaço em que vivemos se não pela Geometria Euclidiana, ou pela Geometria Esférica. Houve então uma grande revolução no mundo matemático quando foi descoberta a primeira Geometria não-Euclidiana e diferente da Geometria Esférica, a Geometria Hiperbólica.

A Geometria Euclidiana exerceu, durante séculos, o domínio da visão do mundo real e da noção de distância por uma *linha reta*. Ela ainda é a geometria mais ensinada nas escolas e seu nome é homenagem a **Euclides de Alexandria**, matemático grego que viveu entre os séculos *III* e *IV* a.C, e é conhecido como o “Pai da Geometria”. É de Euclides o mais famoso trabalho de geometria já publicado: “Os Elementos”. Desde sua publicação, muitos matemáticos acreditavam que o V Postulado poderia ser demonstrado utilizando como subsídio os quatro postulados anteriores, e muitos tentaram, sem sucesso, realizar tal demonstração, o que, no séc. *XIX* levou a suspeitas de que talvez pudessem ser desenvolvidas outras geometrias consistentes e que contradissem o V Postulado (das paralelas) sendo então, impossível demonstrá-lo utilizando os quatro anteriores, levando a interpretação de que tal postulado não era consequência dos quatro primeiros. Poderia, com isso, criar-se outras geometrias tão consistentes quanto a Euclidiana, contradizendo o V Postulado. Matemáticos da época, como *N. I. Lobachevsky* (1792–1856), *J. Bolyai* (1802–1860) e *C. F. Gauss* (1777–1855) axiomatizaram que ou não existiam retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto fora dela, ou que por esse ponto poderiam passar mais de uma paralela a tal reta. Iniciava-se assim o estudo sistemático das Geometrias não-Euclidianas.

Afim de bem entender o que será explanado lembremos quais os cinco Postulados de Euclides [2], e que servem de base para a Geometria Euclidiana.

1. Uma única reta pode ser traçada passando por dois pontos distintos, quaisquer.
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.
4. Todos os ângulos retos são iguais.

5. Por um ponto P , exterior a uma reta r , consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta r , passando por P .



Figura 1.1: Euclides de Alexandria

Fonte: www.dec.ufcg.edu.br/biografias/EuclAlex

A Geometria do Táxi contradiz o V Postulado, e em seu lugar afirma que, por um ponto dado P , exterior à reta r , ambos em um mesmo plano, existem mais de uma reta paralela a esta reta r .

Veja na figura 1.2, a ideia de reta segundo a Geometria do Táxi:

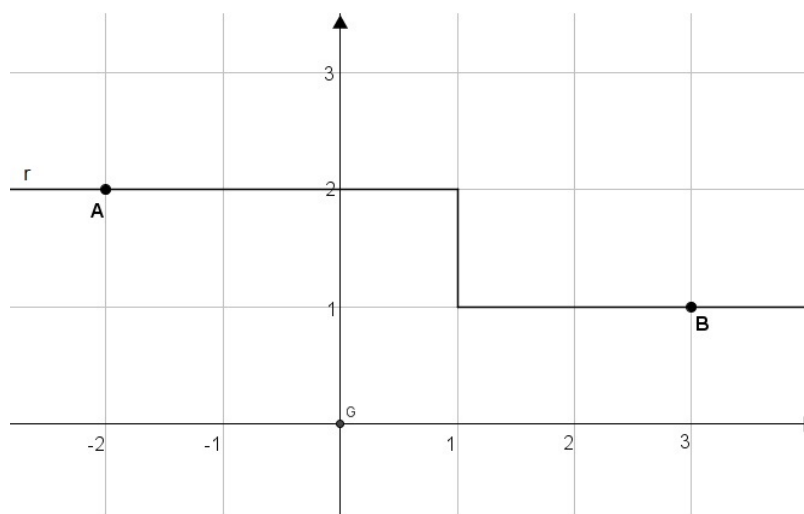


Figura 1.2: Reta do Táxi

Fonte: Geogebra

Perceba que a ideia de reta na Geometria do Táxi é a mesma da Geometria Euclidiana, isto é, uma linha que passa por dois pontos sem que haja curvas. A quebra que há nessa reta é bem aceita por essa geometria.

Observe na figura 1.3 a contradição ao V Postulado, apontada pela Geometria do Táxi:

Observe que pelo ponto K fora da reta r passam as retas s e t , paralelas a r .

A figura 1.3 nos diz também que a Geometria do Táxi não é de Incidência, lembrando que uma Geometria de Incidência respeita os axiomas[1], que são:

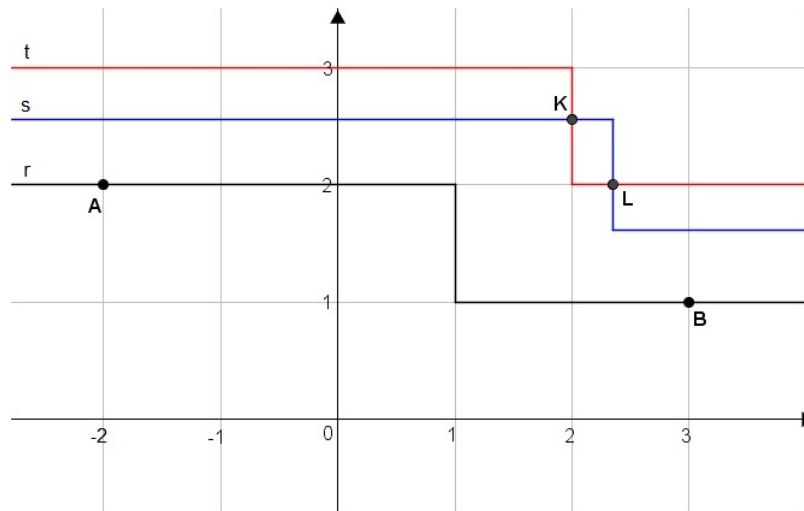


Figura 1.3: Retas do Táxi Paralelas

Fonte: Geogebra

Axioma I_1 : Qualquer que seja a reta , existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem a ela.

Axioma I_2 : Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

Note que a Geometria do Táxi contradiz o Axioma I_2 , pois as retas s e t , distintas, contém os pontos K e L .

Convém lembrar que hoje existem inúmeras Geometrias não-Euclidianas, como por exemplo, a Geometria Hiperbólica, a Geometria Elíptica, a Geometria Riemanniana,... Tais geometrias foram criadas em meados do século XIX (exceto pela Geometria Esférica, que tem suas origens na Grécia Antiga) e desde então vêm abrindo grandes perspectivas para o desenvolvimento da Matemática.

1.1 Breve Histórico da Geometria do Táxi

A Geometria do Táxi foi desenvolvida pelo matemático russo Hermann Minkowski (1864–1909). É uma geometria aplicada em uma malha quadriculada, na qual linhas horizontais e verticais correspondem às ruas de uma “cidade ideal” ou “cidade imaginária”.

Esta Geometria fornece um modelo útil na vida urbana, pois modela suas trajetórias através de quebras de linhas, onde pessoas e veículos se deslocam entre quadras, ao longo de ruas e avenidas. Na Geometria do Táxi, diferentemente do que afirma a Geometria Euclidiana, a menor distância nem sempre se dá em uma linha reta, sendo apenas quando se desloca em uma mesma direção. Tal distância é medida como em uma corrida de táxi nas ruas de uma cidade, onde as ruas são horizontais e verticais, e é daí que vem o seu nome. [8]



Figura 1.4: Hermann Minkowski

Fonte: www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Minkowski

1.2 Analisando distâncias

A Geometria Analítica moderna foi descoberta de forma independente e quase simultânea por **Pierre de Fermat** (1601 – 1665) em 1629 (num trabalho publicado apenas em 1679) e por **Renè Descartes** (1596 – 1650) em 1637 num trabalho denominado *La Géométrie* publicado no mesmo ano como apêndice da sua obra *Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências*. [5]



Figura 1.5: Pierre de Fermat

Fonte: mathforeurope.digibel.be/pierredefermat

Figura 1.6: René Descartes

Fonte: ecalculo.if.usp.br/historia/descartes

A Geometria Analítica agrega os conceitos da Álgebra e da Geometria e pode ser vista como um modelo para a realização da Geometria Euclidiana.

Para estudar a Geometria Analítica, utiliza-se o Plano Cartesiano, um sistema formado por dois eixos ortogonais, como na figura 1.7.

No plano, Ox representa o eixo das abscissas e Oy , o eixo das ordenadas. Cada ponto do plano possuirá uma abscissa e uma ordenada, e será indicado por um par ordenado do tipo (x, y) , onde x e y são chamadas *coordenadas cartesianas*.

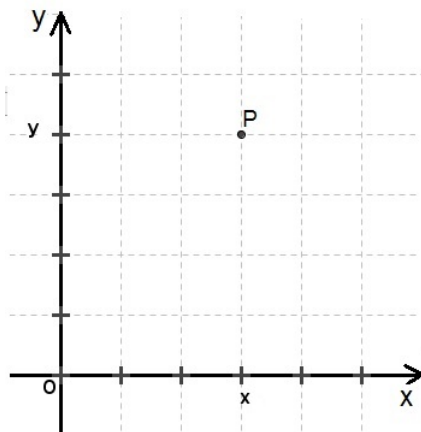


Figura 1.7: Plano Cartesiano

Fonte: Geogebra

Para se calcular a distância entre dois pontos, segundo a Geometria Euclidiana, pode-se considerar os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, representados na figura 1.8:

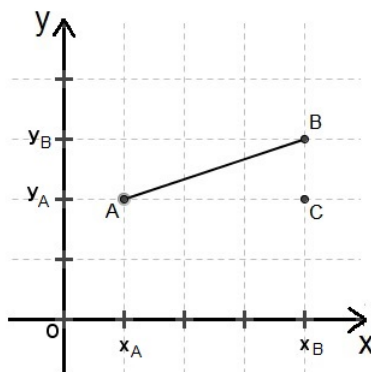


Figura 1.8: Segmento de Reta AB

Fonte: Geogebra

Sendo a distância Euclidiana entre os pontos A e B a medida do segmento \overline{AB} , e que é possível construir um triângulo retângulo ABC , conforme a figura 1.9, ao utilizar-se o Teorema de Pitágoras obtém-se:

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 \text{ ou } d_E^2(A, B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Assim, a distância Euclidiana entre pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ quaisquer do plano, é dada por

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

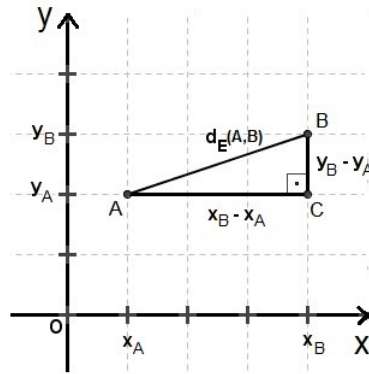


Figura 1.9: Triângulo ABC

Fonte: Geogebra

Na Geometria do Táxi pode-se pensar no plano cartesiano como um piso de cerâmicas quadradas, sendo que a maneira de localizar os pontos é semelhante à Geometria Analítica. A diferença está na observação do caminho de menor distância entre dois pontos. Diferentemente de como é feito na Geometria Euclidiana, na Geometria do Táxi, essa menor distância só será um segmento de reta se ambos os pontos estiverem na mesma horizontal ou na mesma vertical. Em uma cidade planejada, desconsiderando obviamente a largura das ruas, casas, prédios, etc., pessoas e veículos se deslocam horizontalmente e verticalmente nas ruas e podemos considerar casas e prédios representações de pontos. Dessa forma, para calcular distância entre dois pontos que não estão em uma mesma rua, é preciso somar as medidas dos segmentos horizontais e verticais percorridos.

De um ponto de vista metodológico para uma primeira apresentação desses conceitos aos alunos, pode-se considerar apenas os pontos de coordenadas inteiras, tornando qualquer distância entre dois pontos sempre números inteiros, pois tal distância é medida em número de blocos que o táxi ultrapassa para se deslocar de um ponto a outro da cidade, número esse que será representado por um número inteiro.

Desse modo, assim como na Geometria Analítica, a distância horizontal x entre dois pontos é dada pelo valor absoluto da diferença entre os valores das abscissas desses pontos. Analogamente, a distância vertical y entre esses pontos é o módulo da diferença entre os valores das ordenadas correspondentes.

Considerando dois pontos distintos não-alinhados $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, veja a figura 1.10.

Logo, fica claro que a Táxi-Distância (como é chamada a distância na Geometria do Táxi) entre os pontos A e B será:

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|,$$

em que $d_T(A, B)$ representa a Táxi-Distância entre os pontos A e B .

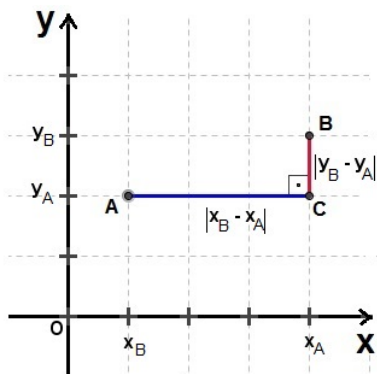


Figura 1.10: Táxi-Distância
Fonte: Geogebra

Observe que mesmo no caso em que A e B estão na mesma linha horizontal ou vertical vale a fórmula acima. Veja nas figuras 1.11 e 1.12.

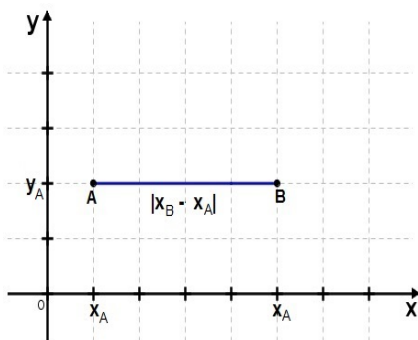


Figura 1.11: Pontos A e B Alinhados Horizontalmente
Fonte:Geogebra

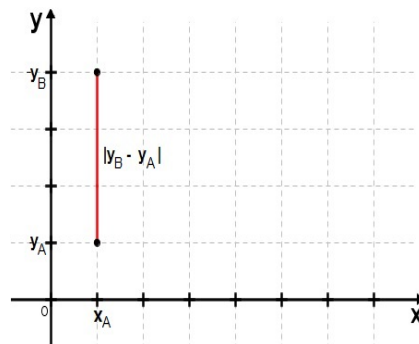


Figura 1.12: Pontos A e B Alinhados Verticalmente
Fonte:Geogebra

Na figura 1.11, $y_A = y_B$ e na figura 1.12, $x_A = x_B$.

2 A Métrica na Geometria do Táxi

Um conjunto para ser considerado um espaço métrico precisa obedecer às propriedades próprias de uma métrica, que serão lembradas na seção seguinte. Logo após, na seção 2.2 será mostrado que a Táxi-Distância obedece essas propriedades, e por isso, pode ser chamada métrica, mais precisamente, Métrica do Táxi.

2.1 O Conceito de Métrica

Seja um conjunto \mathbb{M} . Uma métrica em \mathbb{M} é uma função[6]

$$d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades:

- i. É sempre não-negativa, ou seja,

$$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

- ii. É nula, apenas quando os pontos coincidem, ou seja,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

- iii. É simétrica, ou seja, é tal que

$$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{M}.$$

- iv. Obedece a *Desigualdade Triangular*, ou seja,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in \mathbb{M}.$$

A distância Euclidiana, por exemplo, verifica todas as condições acima.

2.2 A Métrica do Táxi

A distância na Geometria do Táxi, para ser considerada uma métrica, deverá obedecer às quatro propriedades básicas listadas acima. Mostremos que essas propriedades são satisfeitas por tal geometria.

Para demonstrar essas propriedades, usaremos a definição de **módulo** ou **valor absoluto**, que segue:[11]

Definição 2.1. *Seja $x \in \mathbb{R}$. O valor absoluto de x , denotado por $|x|$ é tal que*

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0, \\ x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Definido valor absoluto, vejamos:

Sendo três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ em um plano cartesiano, a distância-Táxi d_T de A até B , por exemplo, é assim definida

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|.$$

Provaremos que essa equação obedece as propriedades de métrica.

i. $d_T(A, B) \geq 0$ De fato,

A distância representada por

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

será sempre não-negativa, pois

$$|x_B - x_A| \geq 0$$

e

$$|y_B - y_A| \geq 0.$$

Logo, $d_T \geq 0$.

ii. $d_T(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

(\Rightarrow) Sendo $d_T(A, B) = 0$, tem se

$$|x_B - x_A| + |y_B - y_A| = 0 \Rightarrow |x_B - x_A| = -|y_B - y_A|.$$

Como $|x_B - x_A|$ e $|y_B - y_A|$ são ambos não negativos, a igualdade acima só se verifica se

$$x_B - x_A = 0 \text{ e } y_B - y_A = 0.$$

Daí,

$$x_B = x_A \text{ e } y_B = y_A.$$

Logo, $A = B$.

(\Leftarrow) Se $A = B$, então, $(x_A, y_A) = (x_B, y_B) \Rightarrow x_A = x_B$ e $y_A = y_B$. Dessa forma, sendo

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| = |x_A - x_A| + |y_A - y_A| = |0| + |0| = 0.$$

Logo, $d_T(A, B) = 0$.

Portanto, $d_T(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

□

iii. $d_T(A, B) = d_T(B, A)$

Com efeito,

$$\begin{aligned} d_T(A, B) &= |x_B - x_A| + |y_B - y_A| \\ &= |-(x_A - x_B)| + |-(y_A - y_B)| \\ &= |-1| \cdot |x_A - x_B| + |-1| \cdot |y_A - y_B| \\ &= 1 \cdot |x_A - x_B| + 1 \cdot |y_A - y_B| \\ &= |x_A - x_B| + |y_A - y_B| = d_T(B, A) \end{aligned}$$

iv. $d_T(A, C) \leq d_T(A, B) + d_T(B, C)$

Antes de demonstrar a desigualdade acima, recordemos a seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Sejam a e b números reais quaisquer, então (cf [11])*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Dem.: Como $x \leq |x|$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, se $a + b \geq 0$, então

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|.$$

Caso contrário, se $a + b < 0$, então

$$|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|.$$

Vamos à demonstração da propriedade *iv* de métrica para a Geometria do Táxi:

Seja

$$\begin{aligned}d_T(A, C) &= |x_C - x_A| + |y_C - y_A| \\ &= |(x_C - x_B) + (x_B - x_A)| + |(y_C - y_B) + (y_B - y_A)|.\end{aligned}$$

Usando a proposição 3.1, temos que,

$$\begin{aligned}d_T(A, C) &= |(x_C - x_B) + (x_B - x_A)| + |(y_C - y_B) + (y_B - y_A)| \\ &\leq |x_C - x_B| + |x_B - x_A| + |y_C - y_B| + |y_B - y_A| \\ &= (|x_B - x_A| + |y_B - y_A|) + (|x_C - x_B| + |y_C - y_B|) \\ &= d_T(A, B) + d_T(B, C)\end{aligned}$$

Logo,

$$d_T(A, C) \leq d_T(A, B) + d_T(B, C).$$

□

Portanto, a Geometria do Táxi satisfaz às quatro propriedades de métrica, podendo ser chamada simplesmente de “Métrica do Táxi”.

3 Relacionando Distâncias

Diferentemente do que acontece na Geometria Euclidiana, em que a menor distância entre dois pontos é determinada apenas pela medida do segmento de reta de extremidades iguais a esses pontos, na Geometria do Táxi a Táxi-Distância mínima entre dois pontos pode ser calculada traçando qualquer um de vários caminhos.

3.1 Métrica do Táxi e Combinatória

Observemos a figura 3.1, representando uma parte de uma cidade, em que as quadras são representadas pelos quadrados, todos de iguais dimensões, e entre essas quadras estão ruas e avenidas.

Exemplo 3.1. Um passageiro entra em um Táxi no ponto A e descerá no ponto O , segundo a figura 3.1. Quantos seriam os caminhos mínimos possíveis?

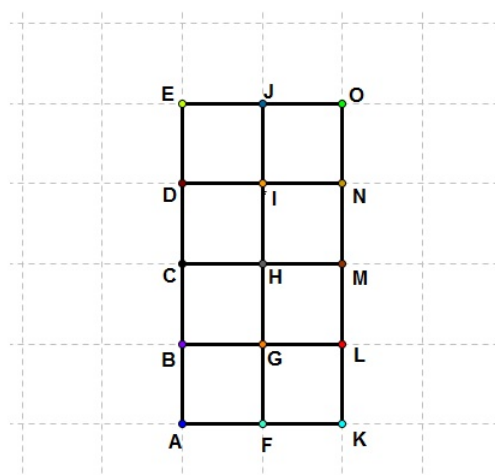


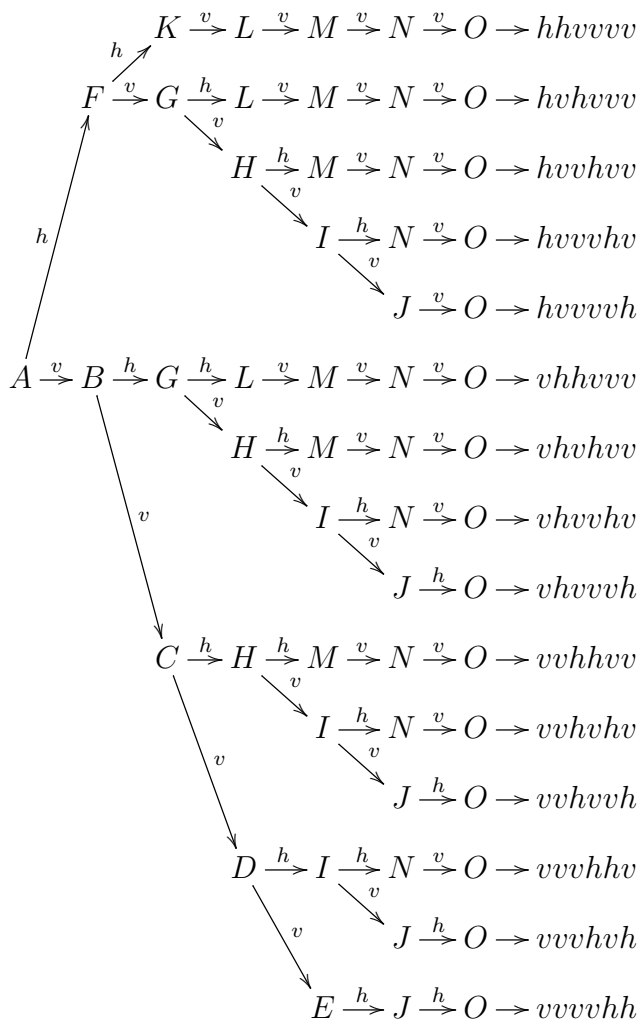
Figura 3.1: Parte de uma Cidade

Fonte: Geogebra

Observe que os pontos marcados são cruzamentos de ruas ou avenidas. Por se tratar de uma cidade, o Táxi não poderá seguir um caminho reto que vá de A até O , pois existem casas, terrenos fechados, prédios, etc. Ele precisa seguir por ruas e avenidas, considerando movimentos na vertical (v) e na horizontal (h) até chegar em seu destino.

Assim sendo, observe o diagrama na página seguinte detalhando os caminhos mínimos que esse Táxi pode seguir:

(Note que a linha do diagrama abaixo $A \rightarrow F \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow O$ é o caminho de soma $\overline{AF} \cup \overline{FK} \cup \overline{KL} \cup \overline{LM} \cup \overline{MN} \cup \overline{NO}$. As demais linhas seguem o mesmo padrão).



Portanto, para o Táxi percorrer de A até O ele tem 15 possíveis caminhos mínimos. E se esse mesmo Táxi tivesse que percorrer 15 quadras na horizontal e 10 quadras na vertical dentro dessa cidade?(veja figura 3.2)

Demoraríamos bastante para escrever todos os possíveis trajetos. Daí a inviabilidade de resolver esse tipo de problema sempre usando o raciocínio da escrita dos caminhos para só depois sabermos quantos eles são.

Se observarmos bem o exemplo 3.1, todos os caminhos têm exatamente 2 quadras horizontais (h) e 4 quadras verticais (v), mudando-se apenas a ordem dos mesmos. Percebe-se ali um problema de Permutação com repetição, isto é, um problema de Combinatória, em que deve-se escolher os trechos horizontais e os trechos verticais, dentre todos os trechos.



Figura 3.2: Parte de uma Cidade 2

Fonte: Geogebra

Sabe-se que a fórmula da Permutação com repetição em que dois elementos se repetem é (cf [9]):

$$P_n^{a,b} = \frac{n!}{a!b!}, \quad (3.1)$$

onde n é o total de elementos permutados e a e b são os números de vezes em que cada elemento distinto se repete.

E nesse caso como em qualquer outro citado, a e b serão números de trechos horizontais e verticais, respectivamente, do plano. Como os movimentos só podem ser nessas direções, então, $a + b = n$.

Dessa forma o problema 3.1 seria facilmente resolvido da seguinte forma:

Para percorrer a menor distância possível o Táxi terá 2 trechos horizontais e 4 trechos verticais, totalizando 6 trechos. Utilizando a equação 3.1, fazemos da seguinte forma:

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Portanto, são 15 os caminhos de distância mínima possível, confirmando a quantidade de configurações encontradas.

Assim fica “fácil” resolver o caso de 15 movimentos horizontais e 10 verticais:

$$P_{25}^{15,10} = \frac{25!}{15!10!} = 3268760 \text{ caminhos possíveis.}$$

Veja outro exemplo:

Exemplo 3.2. Considere a figura 3.3 em que cada quadrado tracejado é uma quadra de certa parte de um bairro:

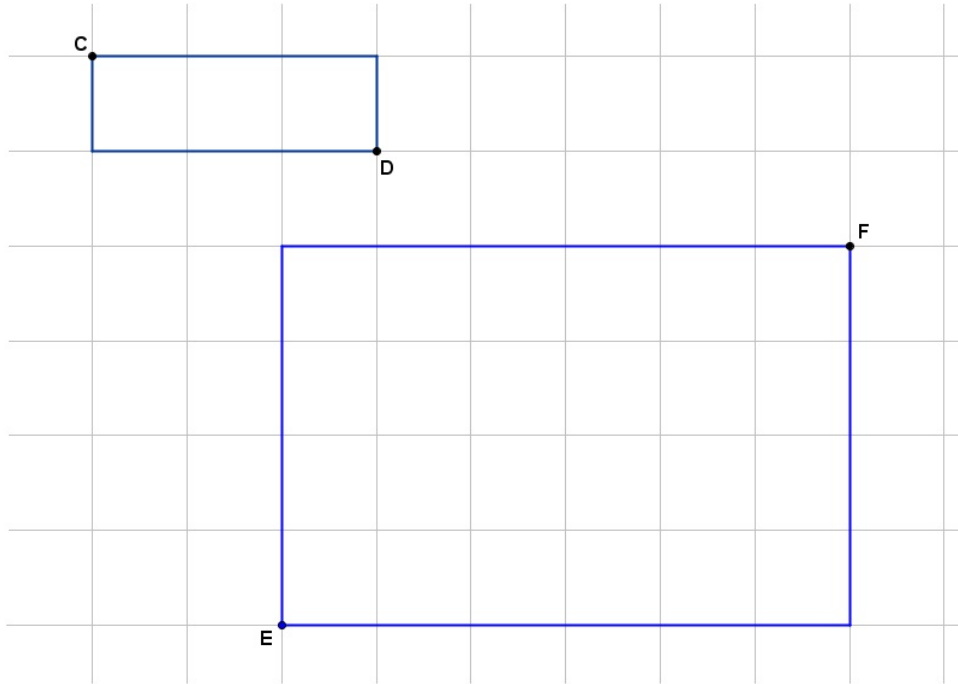


Figura 3.3: Partes de um Bairro

Fonte: Geogebra

Quantos são os caminhos possíveis para uma pessoa percorrer da esquina C até a esquina D ? E da esquina E até a esquina F ?

Solução 3.1. Em ambos os casos, basta utilizarmos a equação 3.1.

i. De A a B ela percorrerá 3 trechos horizontais e 1 vertical. Assim,

$$P_4^{3,1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!1!} = \frac{4}{1} = 4.$$

Serão 4 caminhos possíveis.

ii. De C a D ela percorrerá 6 trechos horizontais e 4 verticais. Assim,

$$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210.$$

Serão 210 caminhos possíveis.

Nota-se, pelos exemplos, que sendo dois pontos A e B , quanto mais pontos os separem horizontal e verticalmente, o número de caminhos possíveis de A a B também é aumentado, segundo a Métrica do Táxi. Diferente do que ocorre na Geometria Eucliana, em que só haverá um caminho, o segmento de reta entre os dois pontos extremos.

3.2 Confiando na Métrica do Táxi

Em se tratando de aplicação cotidiana, em que as pessoas precisam ter uma noção mais “correta” da distância que separa dois lugares em uma cidade ou um bairro, de acordo como o seu interesse, a Métrica do Táxi é mais confiável que a Métrica Euclidiana. Veja um exemplo:

Exemplo 3.3. Jéssica está na escola localizada na esquina $A(1, 1)$. Seu pai trabalha no prédio localizado na esquina $B(2, 6)$ e sua mãe está em seu Salão de Beleza, que fica localizado na esquina $C(5, 4)$, como ilustrada na figura 3.4. Sabendo que pai e mãe saem ao mesmo tempo dos respectivos locais, com a mesma velocidade e com mesmo tipo de trânsito, para qual dos dois é mais viável buscar Jéssica?

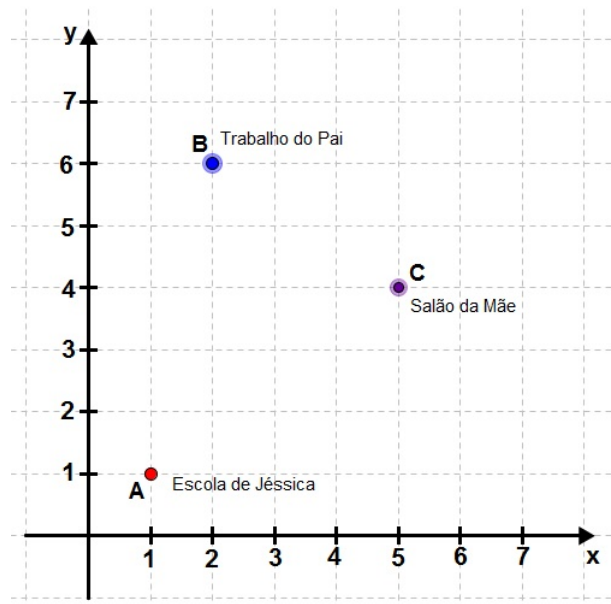


Figura 3.4: Trabalho - Escola - Salão
 Fonte: Geogebra

Solução 3.2. *i. Pela Geometria Euclidiana:*

Distância da Escola ao Trabalho do Pai:

$$d_E(A, B) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26} \cong 5,10$$

Distância da Escola ao Salão da Mãe:

$$d_E(A, C) = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Logo, o Mãe está mais perto que o Pai.

ii. Pela Geometria do Táxi:

Distância da Escola ao Trabalho do Pai:

$$d_T(A, B) = |2 - 1| + |6 - 1| = |1| + |5| = 6$$

Distância da Escola a Salão da Mãe:

$$d_T(A, C) = |5 - 1| + |4 - 1| = |4| + |3| = 7$$

Logo, é mais viável que o Pai vá buscar Jéssica na Escola.

Observe que por mais que a mãe esteja “euclidianamente” mais perto da Escola que o pai se ambos pudessem dirigir em linha reta, o pai chegara primeiro, pelo fato que o tráfego de veículos se dá por ruas e/ou avenidas.

3.3 Relação entre a Táxi-Distância e a Distância na Métrica Euclidiana

Convém notar que $d_E(A, B) \leq d_T(A, B)$, valendo a igualdade apenas quando ambos os pontos estiverem na mesma horizontal ou na mesma vertical. Pode-se então afirmar que:

A Táxi-distância é sempre maior ou igual que a distância na Métrica Euclidiana. [10]

Vamos verificar tal afirmação.

Verificação 3.1. *Sejam os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. De fato, é verdade que*

$$2 \cdot |x_B - x_A| \cdot |y_B - y_A| \geq 0, \quad (3.2)$$

*pela definição 3.1,
e também é verdade que*

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \geq 0. \quad (3.3)$$

Somando a expressão 3.3 a ambos os membros da desigualdade 3.2, tem-se que

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + 2 \cdot |x_B - x_A| \cdot |y_B - y_A| \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad (3.4)$$

O primeiro membro da inequação 3.4 é um trinômio quadrado perfeito cujos termos são $|x_B - x_A|$ e $|y_B - y_A|$. Então, a essa inequação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2 \geq (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad (3.5)$$

Como os dois membros da inequação 3.5 são não-negativos, ao se extrair as raízes quadradas de ambos, a desigualdade continua válida, ou seja,

$$\sqrt{(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|)^2} \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (3.6)$$

Logo,

$$|x_B - x_A| + |y_B - y_A| \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (3.7)$$

Portanto,

$$d_T(A, B) \geq d_E(A, B).$$

□

4 A Táxi-Elipse

Neste capítulo define-se a Táxi-Elipse, na qual a distância, denominada Táxi-Distância, é determinada pela Geometria do Táxi ou simplesmente, Métrica do Táxi. Aqui, as regiões internas às Táxi-ElipSES são bem diferentes daquelas ovais internas à Elipse da Geometria Analítica, como veremos.

A equação da Táxi-Elipse também tem um formato diferente do da equação da Elipse Euclidiana, como é de se esperar. Faremos um estudo dessa equação e seu comportamento gráfico.

4.1 Elipse Euclidiana e Táxi-Elipse

A Elipse na Geometria Analítica Euclidiana é definida da seguinte forma:

Definição 4.1. *Uma elipse ε_{F_1, F_2}^E de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$ (cf [5]),*

$$\varepsilon_{F_1, F_2}^E = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\} \quad (4.1)$$

Veja a figura 4.1 que retrata o gráfico de uma Elipse segundo a Geometria Analítica (com distância Euclidiana).

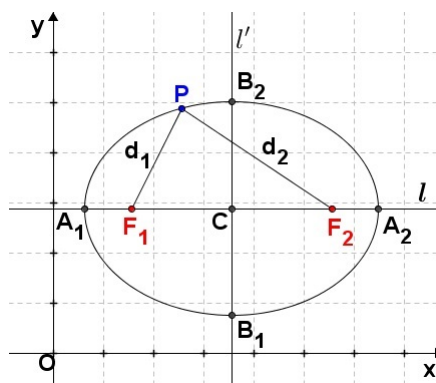


Figura 4.1: Elipse Euclidiana

Fonte: Geogebra

Seja $P(x, y)$ e focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, a equação geral dessa elipse, com base em sua definição é dada pela expressão:

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \quad (4.2)$$

A definição de Táxi-Elipse é a mesma da Elipse na Geometria Analítica, ou seja,

Definição 4.2. Uma elipse ε_{F_1, F_2}^T de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\varepsilon_{F_1, F_2}^T = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\} \quad (4.3)$$

Dessa forma, para $P(x, y)$ e focos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, a equação geral da Táxi-Elipse é dada pela expressão (cf [4]):

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a \quad (4.4)$$

Veja um exemplo de um gráfico de uma Táxi-Elipse, mostrado na figura 4.2:

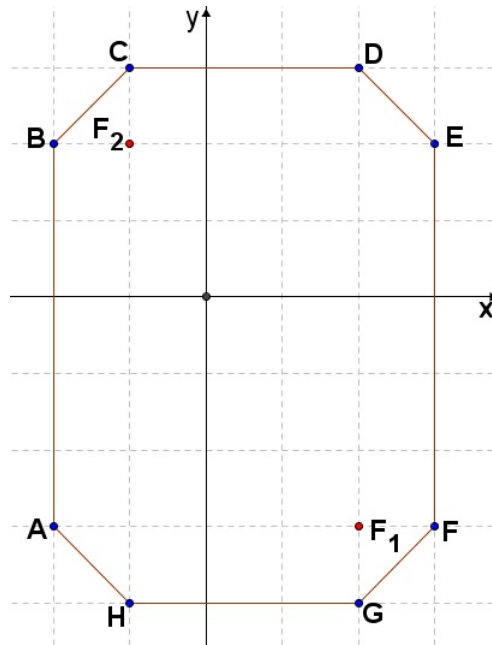


Figura 4.2: Táxi-Elipse

Fonte: Geogebra

Olhando para o gráfico acima pode até parecer estranho em se tratando de uma elipse, mas isso é devido a definição de elipse nesta métrica, pois se baseia em somas de módulos envolvendo linearmente as coordenadas de $P \in \varepsilon_{F_1, F_2}^T$. Daí, o motivo do gráfico ser formado por segmentos de reta.

A seção seguinte tem como objetivo, observar o comportamento gráfico da Táxi-Elipse de acordo com a posição da reta focal (nota-se aqui que falamos da reta segundo a métrica euclidiana), além da análise da equação modular que a representa.

4.2 Análise e Construção de Uma Táxi-Elipse

Observe a equação geral da Táxi-Elipse,

$$\varepsilon_{F_1, F_2}^T : |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a.$$

Por se tratar de uma equação modular, faz-se necessária uma análise dos valores que suas coordenadas podem assumir.

Sejam $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$ os focos da Táxi-Elipse, como na figura 4.3:

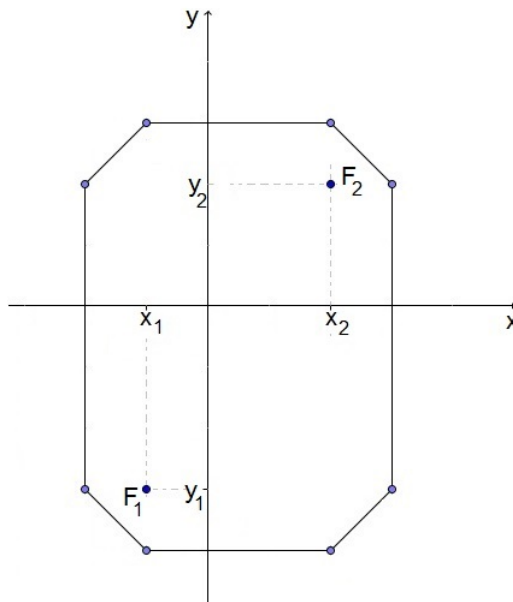


Figura 4.3: Táxi-Elipse de Focos F_1 e F_2

Fonte: Geogebra

Considere $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$.

Veja que:

$$\begin{aligned} |x - x_1| \leq 2a. & \text{ Logo, } -2a \leq x - x_1 \leq 2a \text{ ou } x_1 - 2a \leq x \leq x_1 + 2a, \\ |x - x_2| \leq 2a. & \text{ Logo, } -2a \leq x - x_2 \leq 2a \text{ ou } x_2 - 2a \leq x \leq x_2 + 2a, \\ |y - y_1| \leq 2a. & \text{ Logo, } -2a \leq y - y_1 \leq 2a \text{ ou } y_1 - 2a \leq y \leq y_1 + 2a \text{ e} \\ |y - y_2| \leq 2a. & \text{ Logo, } -2a \leq y - y_2 \leq 2a \text{ ou } y_2 - 2a \leq y \leq y_2 + 2a. \end{aligned}$$

Pela a equação da Táxi-Elipse acima, faz-se as seguintes análises dos sinais com base nas coordenadas dos focos:

Análise de sinais de x e y		
(a) $x < x_1$ e $y < y_1$	(b) $x < x_1$ e $y_1 \leq y < y_2$	(c) $x < x_1$ e $y \geq y_2$
(d) $x_1 \leq x < x_2$ e $y < y_1$	(e) $x_1 \leq x < x_2$ e $y_1 \leq y < y_2$	(f) $x_1 \leq x < x_2$ e $y \geq y_2$
(g) $x \geq x_2$ e $y < y_1$	(h) $x \geq x_2$ e $y_1 \leq y < y_2$	(i) $x \geq x_2$ e $y \geq y_2$

Tabela 4.1: Análise de Sinais

Existem outras 7 possibilidades para o estudo desses sinais, mas não são convenientes, pois não há interseção entre os valores das abscissas e/ou ordenadas, como nesse caso:

$$x < x_1 \text{ e } x \geq x_2 \text{ e } y < y_1.$$

Aqui os valores de x em relação a x_1 e x_2 têm sentidos contrários. Veja a figura 4.4:

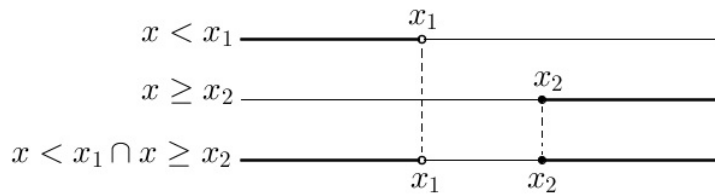


Figura 4.4: Intervalo Inadequado

Fonte: Geogebra

Sabe-se ainda que $2a > d_T(F_1, F_2)$. Chamemos d_f (distância focal) a distância entre F_1 e F_2 .

Tal distância é facilmente calculada pela expressão

$$d_f := d_T(F_1, F_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \tag{4.5}$$

Por exemplo, uma Táxi-Elipse de focos $F_1(1, 3)$ e $F_2(-2, 2)$ terá distância focal $d_f = |-2 - 1| + |2 - 3| = 3 + 1 = 4$. Veja a figura 4.5:

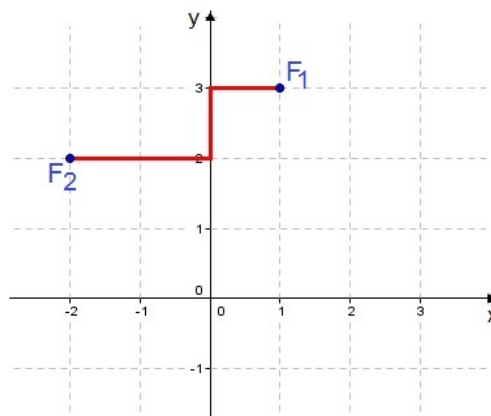


Figura 4.5: Distância Focal da Táxi-Elipse de Focos F_1 e F_2

Fonte: Geogebra

Cada possibilidade citada resultará em uma equação de reta diferentes uma da outra. Veja os casos gerais para qualquer Táxi-Elipse, considerando em todas elas $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$ e utilizando a definição 2.1:

- Caso (a): $x < x_1, y < y_1$.

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x_1 - x) + (y_1 - y) + (x_2 - x) + (y_2 - y) = (x_1 + x_2 - 2x) + (y_1 + y_2 - 2y)$$

ou

$$x + y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) - a$$

- Caso (b): $x < x_1, y_1 \leq y < y_2$.

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x_1 - x) + (y - y_1) + (x_2 - x) + (y_2 - y) = (x_1 + x_2 - 2x) + (y_2 - y_1)$$

ou

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_2 - y_1) - a$$

- Caso (c): $x < x_1, y \geq y_2$

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x_1 - x) + (y - y_1) + (x_2 - x) + (y - y_2) = ((x_1 + x_2 - 2x) + (2y - y_1 - y_2))$$

ou

$$x - y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2) - a$$

- Caso (d): $x_1 \leq x < x_2, y < y_1$

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x - x_1) + (y_1 - y) + (x_2 - x) + (y_2 - y) = (x_2 - x_1) + (y_1 + y_2 - 2y)$$

ou

$$y = \frac{1}{2}(x_2 - x_1 + y_1 + y_2) - a$$

- Caso (e): $x_1 \leq x < x_2, y_1 \leq y < y_2$

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x - x_1) + (y - y_1) + (x_2 - x) + (y_2 - y) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1). \text{ A equação não possui solução, pois } (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 2c < 2a$$

- Caso (f): $x_1 \leq x < x_2, y \geq x_2$

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x - x_1) + (y - y_1) + (x_2 - x) + (y - y_2) = (x_2 - x_1) + (2y - y_1 - y_2)$$

ou

$$y = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + y_1 + y_2) + a$$

- Caso (g): $x \geq x_2, y < y_1$

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x - x_1) + (y_1 - y) + (x - x_2) + (y_2 - y) = (2x - x_1 - x_2) + (y_1 + y_2 - 2y)$$

ou

$$x - y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - y_1 - y_2) + a$$

- Caso (h): $x \geq x_2, y_1 \leq y < y_2$

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x - x_1) + (y - y_1) + (x - x_2) + (y_2 - y) = (2x - x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)$$

ou

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 - y_2) + a$$

- Caso (i): $x \geq x_2, y \geq y_2$

$$2a = |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2|$$

implica que

$$2a = (x - x_1) + (y - y_1) + (x - x_2) + (y - y_2) = (2x - y_1 - y_2) + (2y - y_1 - y_2)$$

ou

$$x + y = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) + a$$

Observações:

- O Caso (e) não possuirá solução, independentemente de qual equação da Táxi-Elipse seja;
- Os segmentos definidos pelos casos (a) e (i), (b) e (h), (c) e (g), (d) e (f) são paralelos (do ponto de vista euclidiano) e a distância entre cada tal par de segmentos paralelos é $2a$.

Dessa forma, usando os valores das coordenadas dos focos e o valor de a na Táxi-Elipse, encontra-se todas as equações possíveis para a construção de seu gráfico.

Antes de construir gráficos de Táxi-Elipses baseados na análise de sinais acima, convém uma discussão acerca dos movimentos de translação e rotação da reta focal de uma Táxi-Elipse.

4.2.1 Movimentos de Translação e Rotação da Reta Focal (euclidiana) da Táxi-Elipse

As análises dos movimentos de Translação e Rotação da Reta Focal e as suas interferências na equação e no comportamento gráfico da Táxi-Elipse são convenientes antes de se construir gráficos desta.

4.2.1.1 Movimento de Translação da Reta Focal

Observe, na figura 4.6, a reta focal de uma Táxi-Elipse de focos F_1 e F_2 centrada em (m, k) :

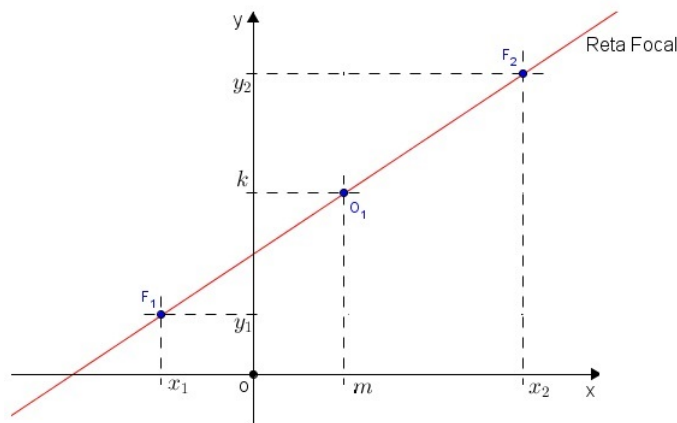


Figura 4.6: Reta Focal de Centro (m, k) e Focos F_1 e F_2

Fonte: Geogebra

Veja que não há perda de generalidade em se considerar sempre que as elipses possuem seu centro (ponto médio do segmento que liga os focos) coincidindo com a origem do sistema de coordenadas. Como consequência as coordenadas dos focos podem ser tomadas como sendo $F_1(-x_0, -y_0)$ e $F_2(x_0, y_0)$ com $x_0, y_0 \geq 0$ e $x_0^2 + y_0^2 > 0$ (quer dizer x_0, y_0 não são simultaneamente nulos).

Para transladar a reta focal para uma posição tal que o centro da nova Táxi-Elipse seja a origem dos eixos coordenados, é preciso que todos os pontos desta reta também sejam transladados. Para isso, basta transladar dois pontos. Translade, então, os focos.

Sendo (x'_1, y'_1) e (x'_2, y'_2) os novos focos depois da translação da reta focal, tem-se

que:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - m \\ y'_1 = y_1 - k \\ x'_2 = x_2 - m \\ y'_2 = y_2 - k \end{cases}$$

É claro que sendo P um ponto da Táxi-Elipse transladada, suas coordenadas x' e y' serão:

$$\begin{cases} x' = x - m \\ y' = y - k \end{cases}$$

ou seja,

$$P(x - m, y - k)$$

Veja a figura 4.7 esclarecendo o que foi dito:

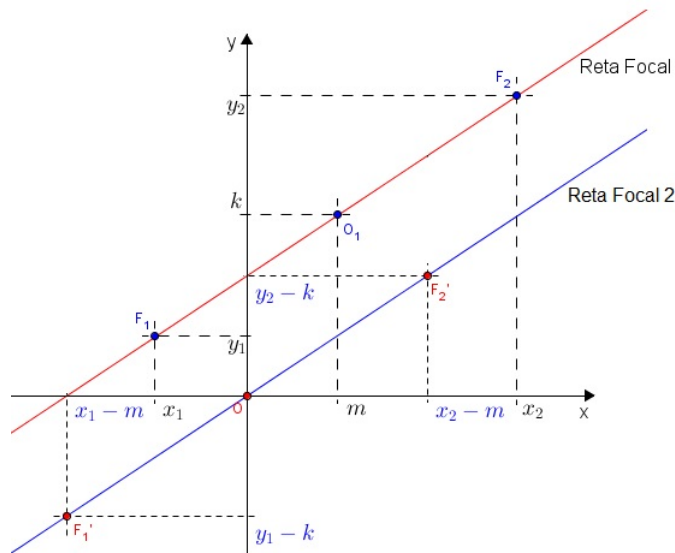


Figura 4.7: Translação da Reta Focal

Fonte: Geogebra

Como k e m são constantes, a translação não mudará o comportamento gráfico da elipse, pois às coordenadas dos focos da nova Táxi-Elipse serão diminuídos (ou acrescidos) os respectivos valores k e m . Suas respectivas equações serão:

$$\varepsilon^T : |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a$$

donde

$$|(x - m) - (x_1 - m)| + |(y - k) - (y_1 - k)| + |(x - m) - (x_2 - m)| + |(y - k) - (y_2 - k)| = 2a.$$

Como $x - m = x'$, $y - k = y'$, $x_1 - m = x'_1$, $y_1 - k = y'_1$, $x_2 - m = x'_2$ e $y_2 - k = y'_2$,

então,

$$\varepsilon'^T : |x' - x'_1| + |y' - y'_1| + |x' - x'_2| + |y' - y'_2| = 2a.$$

Veja as duas Táxi-ElipSES ilustradas na figura 4.8:

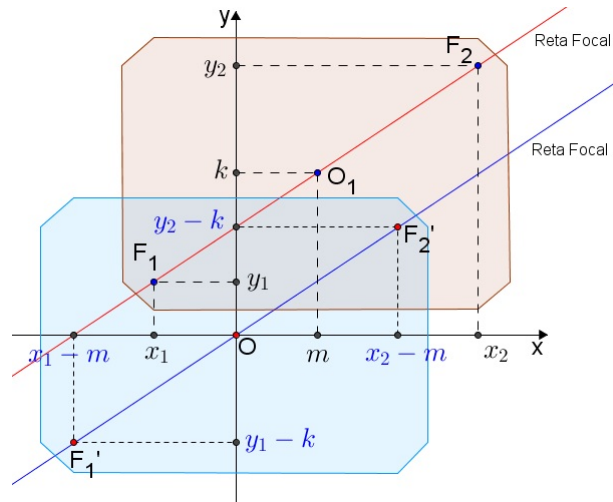


Figura 4.8: Táxi-ElipSES Transladadas

Fonte: Geogebra

4.2.1.2 Movimento de Rotação da Reta Focal

Tomando como base o Sistema de Coordenadas xOy , o ângulo de rotação que a reta focal da Táxi-Elipse ε_T realiza com um dos eixos é parte importante para a análise de sua equação, bem como do seu comportamento gráfico.

Seja θ o ângulo de rotação da reta focal em relação ao eixo Ox , no sentido positivo.

Observe a figura 4.9, onde a Circunferência de Centro $(0, 0)$ e raio c passa nos pontos $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$:

Note que F_1 e F_2 têm coordenadas opostas, isto é,

$$x_2 = -x_1$$

e

$$y_2 = -y_1$$

Veja que ΔAOF_1 é retângulo em A . Daí,

$$\text{sen } \theta = \frac{y_1}{c} \Rightarrow y_1 = c \cdot \text{sen } \theta$$

e

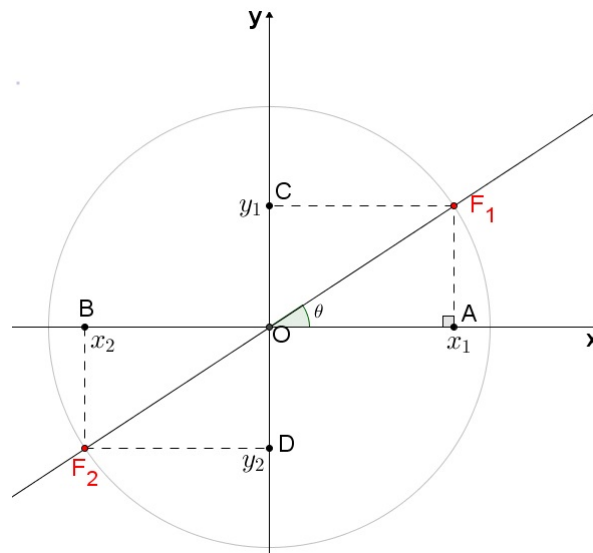


Figura 4.9: Ângulo de Rotação da Reta Focal

Fonte: Geogebra

$$\cos \theta = \frac{x_1}{c} \Rightarrow x_1 = c \cdot \cos \theta.$$

Assim,

$$F_1(c \cdot \cos \theta, c \cdot \sin \theta)$$

e

$$F_2(-c \cdot \cos \theta, -c \cdot \sin \theta)$$

Pela definição, uma Táxi-Elipse de Focos F_1 e F_2 é representada pela equação:

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a,$$

que substituindo as coordenadas de F_1 e F_2 encontradas, tem-se:

$$|x - c \cdot \cos \theta| + |y - c \cdot \sin \theta| + |x + c \cdot \cos \theta| + |y + c \cdot \sin \theta| = 2a \quad (4.6)$$

Sabe-se que:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ e } -1 \leq \cos \theta \leq 1.$$

elo Estudo de Simetrias em relação ao centro da Táxi-Elipse e em relação aos eixos coordenados (veja *Apêndice*), a análise do comportamento da Táxi-Elipse pode ser feita apenas em um quadrante. Escolha o primeiro, ou seja,

$$0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Dessas forma, temos

$$0 \leq \text{sen } \theta \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \text{cos } \theta \leq 1.$$

Para se verificar o comportamento gráfico de uma Táxi-Elipse, a diminuição ou aumento do seu número de lados, será feita uma análise do ângulo entre a sua reta focal e um dos eixos coordenados em um dos quadrantes. Escolha o eixo Ox e o primeiro quadrante.

Considere, sem perda de generalidade, na equação 4.6, $c = 1$ e $a = 2$ (lembre-se que $a > c$), donde

$$|x - \text{cos } \theta| + |y - \text{sen } \theta| + |x + \text{cos } \theta| + |y + \text{sen } \theta| = 4. \quad (4.7)$$

Observe o comportamento da Táxi-Elipse na equação 4.7 com alguns valores de θ , tal que $0 \leq \theta \leq \pi/2$:

- Caso (1) : $\theta = 0$

$$\theta = 0 \Rightarrow \text{sen } \theta = 0 \quad \text{e} \quad \text{cos } \theta = 1.$$

Assim, a equação será $|x - 1| + |y| + |x + 1| + |y| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.10.

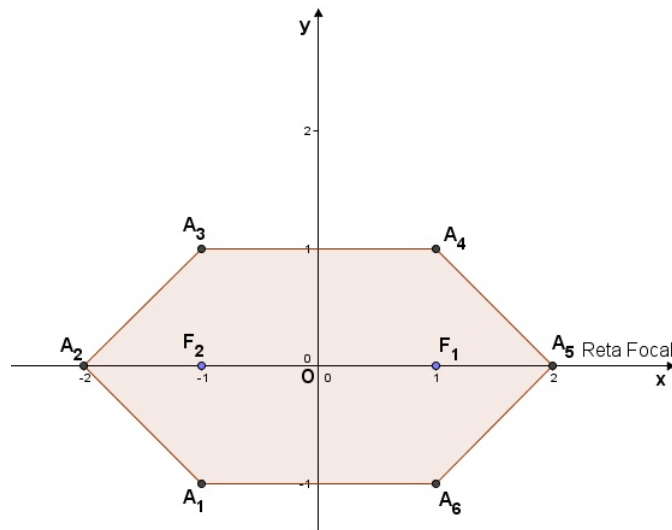


Figura 4.10: Ângulo de Rotação da Reta Focal grau 0

Fonte: Geogebra

- Caso (2) : $\theta = \frac{\pi}{16}$

$$\theta = \frac{\pi}{16} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0,20 \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = 0,98.$$

Assim, a equação será $|x - 0,98| + |y - 0,20| + |x + 0,98| + |y + 0,20| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.11.

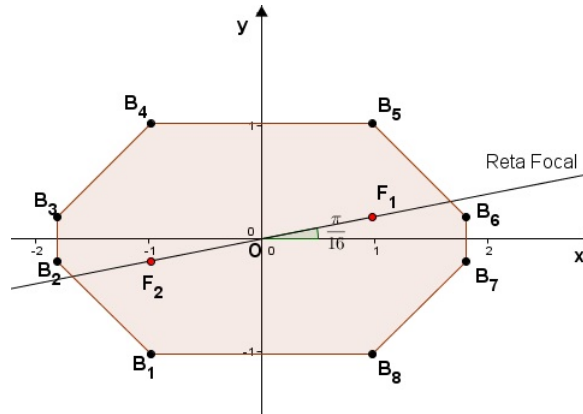


Figura 4.11: Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/16$

Fonte: Geogebra

- Caso (3) : $\theta = \frac{\pi}{8}$

$$\theta = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0,38 \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = 0,92.$$

Assim, a equação será $|x - 0,92| + |y - 0,38| + |x + 0,92| + |y + 0,38| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.12.

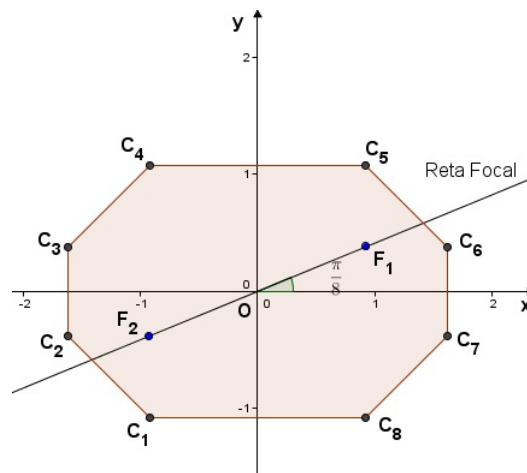


Figura 4.12: Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/8$

Fonte: Geogebra

- Caso (4) : $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{cos } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a equação será $|x - \frac{\sqrt{3}}{2}| + |y - \frac{1}{2}| + |x + \frac{\sqrt{3}}{2}| + |y + \frac{1}{2}| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.13.

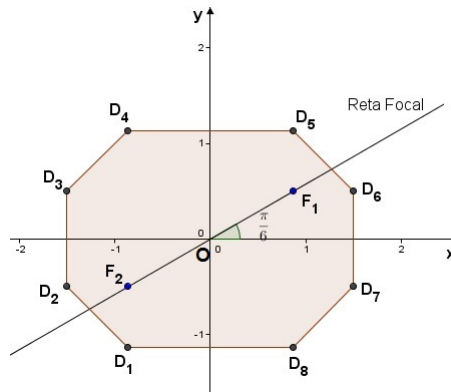


Figura 4.13: Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/6$
Fonte: Geogebra

- Caso (5) : $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{cos } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Assim, a equação será $|x - \frac{\sqrt{2}}{2}| + |y - \frac{\sqrt{2}}{2}| + |x + \frac{\sqrt{2}}{2}| + |y + \frac{\sqrt{2}}{2}| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.14.

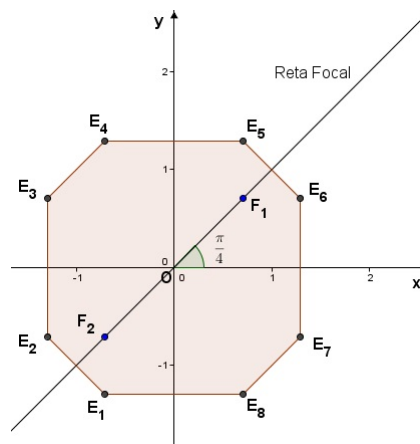


Figura 4.14: Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/4$
Fonte: Geogebra

- Caso (6) : $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = \frac{1}{2}.$$

Assim, a equação será $|x - \frac{1}{2}| + |y - \frac{\sqrt{3}}{2}| + |x + \frac{1}{2}| + |y + \frac{\sqrt{3}}{2}| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.15.

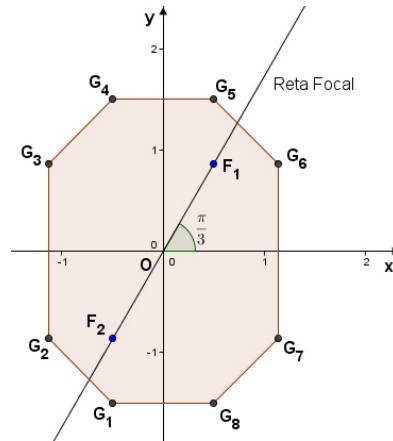


Figura 4.15: Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/3$

Fonte: Geogebra

- Caso (7) : $\theta = \frac{3\pi}{8}$

$$\theta = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0,92 \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = 0,38.$$

Assim, a equação será $|x - 0,38| + |y - 0,92| + |x + 0,38| + |y + 0,92| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.16.

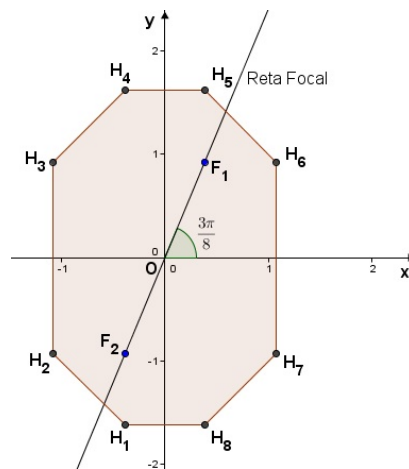


Figura 4.16: Ângulo de Rotação da Reta Focal $3\pi/8$

Fonte: Geogebra

- Caso (8) : $\theta = \frac{7\pi}{16}$

$$\theta = \frac{7\pi}{16} \Rightarrow \text{sen } \theta = 0,98 \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = 0,20.$$

Assim, a equação será $|x - 0,20| + |y - 0,98| + |x + 0,20| + |y + 0,98| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.17.

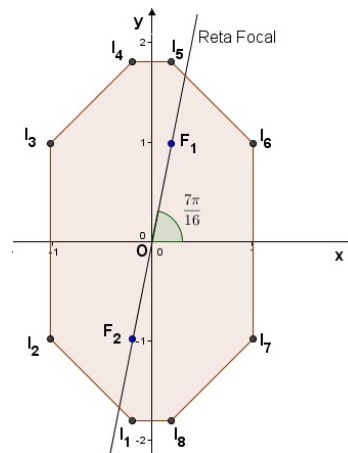


Figura 4.17: Ângulo de Rotação da Reta Focal $7\pi/16$

Fonte: Geogebra

- Caso (9) : $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen } \theta = 1 \quad \text{e} \quad \text{cos} \theta = 0.$$

Assim, a equação será $|x| + |y - 1| + |x| + |y + 1| = 4$, cujo gráfico está representado na figura 4.18.

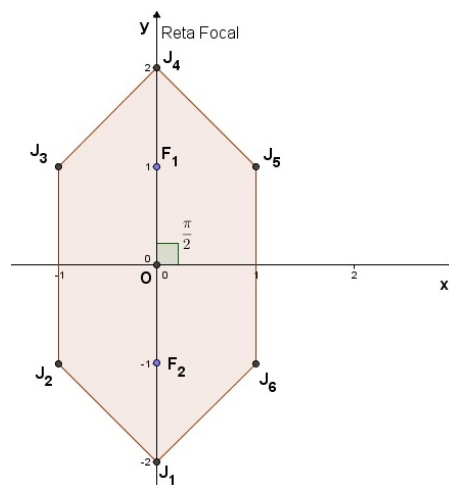


Figura 4.18: Ângulo de Rotação da Reta Focal $\pi/2$

Fonte: Geogebra

Com esses casos particulares se observam certos comportamentos gráficos da Táxi-Elipse. Afim de generalizar tais comportamentos, faz-se necessária uma análise mais apurada. Observe:

Sabe-se que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$. Substituindo na equação 4.7, tem-se

$$|x - \cos \theta| + |y - \sqrt{1 - \cos^2 \theta}| + |x + \cos \theta| + |y + \sqrt{1 - \cos^2 \theta}| = 4. \quad (4.8)$$

Note que $x + \cos \theta$ e $y + \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ são não negativos. Daí, tem-se

$$|x - \cos \theta| + |y - \sqrt{1 - \cos^2 \theta}| + x + \cos \theta + y + \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = 4. \quad (4.9)$$

Considere $\delta = \cos \theta$. Daí, $\delta \in [0, 1]$. A equação acima torna-se

$$|x - \delta| + |y - \sqrt{1 - \delta^2}| + x + \delta + y + \sqrt{1 - \delta^2} = 4. \quad (4.10)$$

O estudo de sinais da equação 4.10 será resumido segundo a tabela abaixo:

Análise de Sinais de x e y	
(i) $x \geq \delta$ e $y \geq \sqrt{1 - \delta^2}$	(ii) $x \geq \delta$ e $y < \sqrt{1 - \delta^2}$
(iii) $x < \delta$ e $y \geq \sqrt{1 - \delta^2}$	(iv) $x < \delta$ e $y < \sqrt{1 - \delta^2}$

Tabela 4.2: Análise de Sinais da Equação 4.10

Acompanhe a análise de cada caso acima:

- Caso(i): $x \geq \delta$ e $y \geq \sqrt{1 - \delta^2}$

$$4 = x - \delta + y - \sqrt{1 - \delta^2} + x + \delta + y + \sqrt{1 - \delta^2} = 2x + 2y \Rightarrow \mathbf{x + y = 2}$$

$$x = \delta \Rightarrow y = 2 - \delta$$

e

$$y = \sqrt{1 - \delta^2} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{1 - \delta^2}.$$

Observe a figura 4.19:

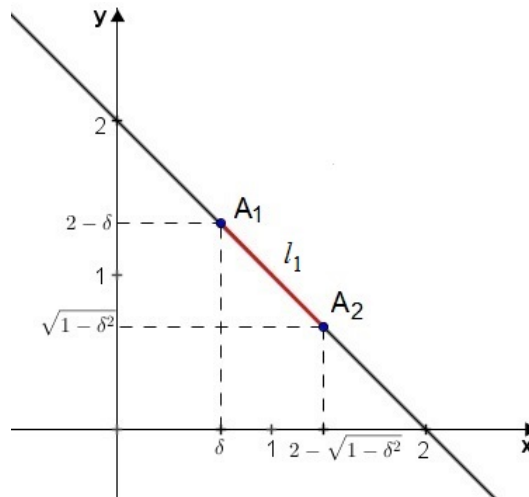


Figura 4.19: Distância: Caso (i)

Fonte: Geogebra

Veja que $A_1(\delta, 2 - \delta)$ e $A_2(2 - \sqrt{1 - \delta^2}, \sqrt{1 - \delta^2})$.

A parte da reta que interessa é a que corresponde aos intervalos deste caso, isto é, segmento $\overline{A_1A_2}$ de distância l_1 . Assim,

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(2 - \sqrt{1 - \delta^2} - \delta)^2 + (\sqrt{1 - \delta^2} - 2 + \delta)^2} \\ &= \sqrt{2}(2 - \sqrt{1 - \delta^2} - \delta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Note que l_1 está em função de δ e que $2 - \sqrt{1 - \delta^2} - \delta$ é positivo. Então,

$$l_1(\delta) = \sqrt{2}(2 - \sqrt{1 - \delta^2} - \delta)$$

Observe que $l_1(\delta)$ é contínua e derivável. Uma pergunta que podemos fazer é: quão grande ou quão pequeno pode ser o segmento \overline{AB} ? Vamos utilizar o critério da primeira derivada para encontrar os pontos críticos de $l_1(\delta)$.

Cálculo da primeira derivada:

$$\begin{aligned} l_1'(\delta) &= \sqrt{2} \left(-\frac{(-2\delta)}{2\sqrt{1 - \delta^2}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Para calcular os pontos críticos faça $l_1'(\delta) = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} - 1 \right) = 0 &\Rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} = 1 \Rightarrow \delta = \sqrt{1-\delta^2} \Rightarrow \\ \delta^2 = 1 - \delta^2 &\Rightarrow 2\delta^2 = 1 \Rightarrow \delta^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o ponto crítico de $l_1(\delta)$.

Usando agora o teste da segunda derivada, sabe-se se o ponto crítico é de máximo ou de mínimo.

Cálculo da segunda derivada:

$$\begin{aligned}l_1''(\delta) &= \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{1-\delta^2} - \delta \cdot \frac{(-2\delta)}{2\sqrt{1-\delta^2}}}{1-\delta^2} \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{1-\delta^2 + \delta^2}{(1-\delta^2) \cdot \sqrt{1-\delta^2}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(1-\delta^2) \cdot \sqrt{1-\delta^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(1-\delta^2)}{(1-\delta^2)^2}\end{aligned}$$

Substituindo $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ em $l_1''(\delta)$, tem-se

$$\begin{aligned}l_1''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right)}{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 > 0\end{aligned}$$

Logo, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é ponto de mínimo, ou seja $l_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é a distância mínima do lado oblíquo.

Calculando $l_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} l_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \sqrt{2} \left(2 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Como $\delta = \cos \theta$, a distância mínima do lado oblíquo acontecerá quando $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

- Caso(ii): $x \geq \delta$ e $y < \sqrt{1 - \delta^2}$

$$4 = x - \delta + \sqrt{1 - \delta^2} - y + x + \delta + y + \sqrt{1 - \delta^2} = 2x + 2\sqrt{1 - \delta^2}.$$

Donde,

$$x = 2 - \sqrt{1 - \delta^2}$$

Observe a figura 4.20:

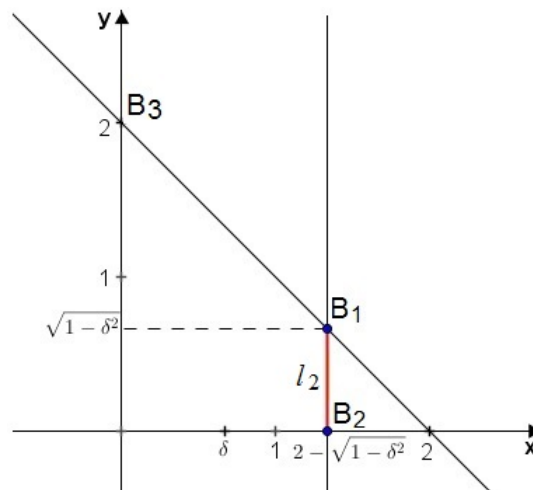


Figura 4.20: Distância: Caso (ii)

Fonte: Geogebra

Veja que $B_1(2 - \sqrt{1 - \delta^2}, \sqrt{1 - \delta^2})$ e $B_2(2 - \sqrt{1 - \delta^2}, 0)$.

A parte da reta $x = 2 - \sqrt{1 - \delta^2}$ que interessa é a que corresponde aos intervalos deste caso, isto é, segmento $\overline{B_1B_2}$ de distância l_2 . Assim,

$$\begin{aligned}
 l_2 &= \sqrt{(2 - \sqrt{1 - \delta^2} - 2 + \sqrt{1 - \delta^2})^2 + (\sqrt{1 - \delta^2} - 0)^2} \\
 &= \sqrt{1 - \delta^2}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Note que l_2 está em função de δ . Então,

$$l_2(\delta) = \sqrt{1 - \delta^2}$$

Observe que $l_2(\delta)$ é contínua e derivável. Novamente perguntamos quão grande ou quão pequeno pode ser este segmento. Fazendo uso mais uma vez do critério da primeira derivada, encontra-se os pontos críticos de $l_2(\delta)$.

Cálculo da primeira derivada:

$$\begin{aligned}
 l_2'(\delta) &= \frac{(-2\delta)}{2\sqrt{1 - \delta^2}} \\
 &= -\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}
 \end{aligned}$$

Para calcular os pontos críticos faça $l_2'(\delta) = 0$. Daí,

$$-\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \Rightarrow \delta = 0$$

$\delta = 0$ é o ponto crítico de $l_2(\delta)$.

Usando agora o teste da segunda derivada, sabe-se se o ponto crítico é de máximo ou de mínimo.

Cálculo da segunda derivada:

$$\begin{aligned}
 l_2''(\delta) &= -\frac{\sqrt{1 - \delta^2} - \delta \cdot \frac{(-\delta)}{\sqrt{1 - \delta^2}}}{1 - \delta^2} \\
 &= -\frac{1 - \delta^2 + \delta^2}{\sqrt{1 - \delta^2}} \\
 &= -\frac{1}{(1 - \delta^2)\sqrt{1 - \delta^2}} \\
 &= -\frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{(1 - \delta^2)^2}
 \end{aligned}$$

Substituindo $\delta = 0$ em $l_2''(\delta)$ tem-se

$$l_2''(0) = -\frac{\sqrt{1-0}}{1-0} = -1 < 0$$

Logo, $\delta = 0$ é ponto de máximo, ou seja $l_2(0)$ é a distância mínima do lado oblíquo.

Calculando $l_2(0)$:

$$l_2(0) = \sqrt{1-0^2} = 1$$

Logo, o comprimento máximo do lado vertical da Táxi-Elipse no primeiro quadrante é 1. Pela simetria da Táxi-Elipse, o comprimento do lado vertical no quarto quadrante também é 1. É imediato verificar que o comprimento mínimo deste segmento para a Táxi-Elipse se dá quando $\delta = 1$, neste caso, o segmento se degenera a um ponto. Daí o comprimento máximo de todo o lado vertical da Táxi-Elipse é 2.

Como $\cos \theta = \delta = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo, a distância horizontal será nula, ou seja, a Táxi-Elipse terá vértice no eixo das ordenadas no ponto $B_3(0, 2)$ (veja a figura 4.11). Além disso, o comprimento do lado oblíquo será máximo. Para encontrar esse comprimento, deve-se calcular a $d(B_1, B_3)$, quando $\delta = 0$. Antes, lembre que $B_1(2 - \sqrt{1 - \delta^2}, \sqrt{1 - \delta^2})$, que para $\delta = 0$, tem-se $B_1(1, 1)$.

Calculando $d(B_1, B_3)$:

$$d(B_1, B_3) = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

- Caso(iii): $x < \delta$ e $y \geq \sqrt{1 - \delta^2}$

$$4 = \delta - x + y - \sqrt{1 - \delta^2} + x + \delta + y + \sqrt{1 - \delta^2} = 2y + 2\delta$$

Donde,

$$y = 2 - \delta$$

Observando a figura 4.21 temos que $C_1(\delta, 2 - \delta)$ e $C_2(0, 2 - \delta)$.

A parte da reta $y = 2 - \delta$ que interessa é a que corresponde aos intervalos deste caso, isto é, segmento $\overline{C_1C_2}$ de distância l_3 . Assim,

$$\begin{aligned}
 l_3 &= \sqrt{(0 - \delta)^2 + (2 - \delta - 2 + \delta)^2} \\
 &= \sqrt{\delta^2} = \delta
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Note que l_3 está em função de δ . Então,

$$l_3(\delta) = \delta$$

Observe que $l_3(\delta)$ é contínua e derivável. Como nos casos anteriores, perguntamos quão grande ou quão pequeno pode ser este segmento. Novamente fazendo uso do critério da primeira derivada para encontrar os pontos críticos de $l_3(\delta)$.

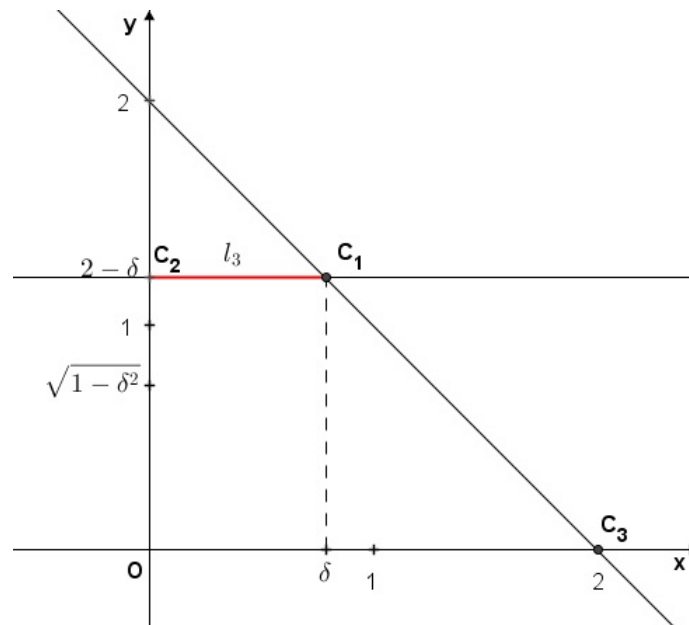


Figura 4.21: Distância: Caso (iii)

Fonte: Geogebra

Cálculo da primeira derivada:

$$l'_3(\delta) = 1 > 0 \tag{4.14}$$

$l_3(\delta)$ não possui ponto crítico, mas é crescente. Ela será mínima no extremo esquerdo e máxima no extremo direito. Como $\delta \in [0, 1]$. Então,

$l_3(0) = 0$ é mínima e $l_3(1) = 1$ é máxima.

Logo, o comprimento máximo do lado horizontal da Táxi-Elipse no primeiro quadrante é 1. Pela simetria da Táxi-Elipse, o comprimento do lado horizontal no terceiro quadrante também é 1. É imediato verificar que o comprimento mínimo

deste segmento para a Táxi-Elipse se dá quando $\delta = 0$, neste caso, o segmento se degenera a um ponto. Daí o comprimento máximo dos lados horizontais da Táxi-Elipse é 2.

Como $\cos \theta = \delta = 1$, então $\theta = 0$. Logo, a distância vertical será nula, ou seja, a Táxi-Elipse terá vertice no eixo das abscissas no ponto $C_3(2, 0)$ (veja a figura 4.12). Além disso, o comprimento do lado oblíquo será máximo. Para encontrar esse comprimento, deve-se calcular a $d(C_1, C_3)$, quando $\delta = 1$. Antes, lembre que $C_1(\delta, 2 - \delta)$, que para $\delta = 1$, tem-se $C_1(1, 1)$.

Calculando $d(C_1, C_3)$:

$$d(C_1, C_3) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Nos casos (ii) e (iii) os comprimento máximos dos lados oblíquos são iguais.

- Caso (iv): $x < \delta$ e $y < \sqrt{1 - \delta^2}$

$$4 = \delta - x + \sqrt{1 - \delta^2} - y + x + \delta + y + \sqrt{1 - \delta^2} = 2\delta + 2\sqrt{1 - \delta^2}$$

Donde,

$$\delta + \sqrt{1 - \delta^2} = 2.$$

Daí,

$$\sqrt{1 - \delta^2} = 2 - \delta \Rightarrow 1 - \delta^2 = (2 - \delta)^2 \Rightarrow 1 - \delta^2 = 4 - 4\delta + \delta^2 \Rightarrow 2\delta^2 - 4\delta + 3 = 0 \quad (4.15)$$

Resolvendo esta equação do segundo grau em δ , temos que

$$\Delta = -8.$$

Logo, $\delta \notin \mathbb{R}$

O que se pode observar com essas análises:

1. Quando $\theta = 0$ o gráfico da Táxi-Elipse não possui lados verticais, (isso é devido $y_1 = y_2$) tendo a forma hexagonal, sendo que os lados oblíquos e horizontais têm seus comprimentos máximos;
2. Quando $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ o gráfico da Táxi-Elipse possui lados verticais, além dos oblíquos e horizontais, tendo a forma octogonal. À medida que θ aumenta

- a) os lados verticais aumentam e os horizontais diminuem;
- b) os lados oblíquos diminuem até $\theta = \frac{\pi}{4}$, quando alcançam seus comprimentos mínimos. A partir daí, voltam a aumentar.
3. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ o gráfico da Táxi-Elipse não possui lados horizontais, (isso é devido $x_1 = x_2$) tendo a forma hexagonal, sendo que os lados oblíquos e verticais têm seus comprimentos máximos.
4. As rotações não são movimentos rígidos nessa geometria, pois se assim fossem a quantidade e os comprimentos dos lados, bem como a forma da Táxi-Elipse permaneceria a mesma, independente da medida de θ .

Em cada subseção que segue será resolvida uma equação de Táxi-Elipse utilizando a análise de sinais, findando com a construção de seu gráfico.

4.2.2 Análise da Táxi-Elipse com Reta Focal Paralela ao Eixo Ox

Para que o gráfico da Táxi-Elipse tenha reta focal r paralela ao eixo das abscissas, é necessário que as ordenadas dos focos coincidam, isto é, $y_1 = y_2$.

Exemplo 4.1. Seja uma Táxi-Elipse de equação

$$|x + 2| + |y - 1| + |x - 3| + |y - 1| = 8 \quad (4.16)$$

Analise os sinais da equação da Táxi-Elipse e construa seu gráfico.

Inicialmente, convém calcular d_f afim de saber se a equação está bem definida:

Os focos dessa Elipse são $F_1(-2, 1)$ e $F_2(3, 1)$. Assim,

$$d_f = |3 - (-2)| + |1 - 1| = |3 + 2| + 0 = 5$$

Como na equação acima, $2a = 8 > 5$, a elipse está bem definida.

Analisemos os sinais com base na seguinte tabela:

Análise de Sinais de x e y	
(a) $x < -2$ e $y < 1$	(c) $x < -2$ e $y \geq 1$
(d) $-2 \leq x < 3$ e $y < 1$	(f) $-2 \leq x < 3$ e $y \geq 1$
(g) $x \geq 3$ e $y < 1$	(i) $x \geq 3$ e $y \geq 1$

Tabela 4.3: Análise de Sinais da Equação 4.16

Observe que faltam as possibilidades b , e e h nas análises dos sinais. São justamente aquelas em que y estaria entre as ordenadas do foco. Como $y_1 = y_2$, estas opções não existem.

Vamos resolver a equação 4.16 em cada possibilidade acima:

- Caso (a): $x < -2, y < 1$
 $x + y = \frac{1}{2}(-2 + 3 + 1 + 1) - 4 \Rightarrow x + y = -2,5$
- Caso (c): $x < -2, y \geq 1$
 $x - y = \frac{1}{2}(-2 + 3 - 1 - 1) - 4 \Rightarrow x - y = -4,5$
- Caso (d): $-2 \leq x < 3, y < 1$
 $y = \frac{1}{2}(3 + 2 + 1 + 1) - 4 \Rightarrow y = -0,5$
- Caso (f): $-2 \leq x < 3, y \geq 1$
 $y = \frac{1}{2}(-2 - 3 + 1 + 1) + 4 \Rightarrow y = 2,5$
- Caso (g): $x \geq 3, y < 1$
 $x - y = \frac{1}{2}(-2 + 3 - 1 - 1) + 4 \Rightarrow x - y = 3,5$
- Caso (i): $x \geq 3, y \geq 1$
 $x + y = \frac{1}{2}(-2 + 3 + 1 + 1) + 4 \Rightarrow x + y = 5,5$

A seguir, vê-se o gráfico da Táxi-Elipse pedida na figura 4.22.

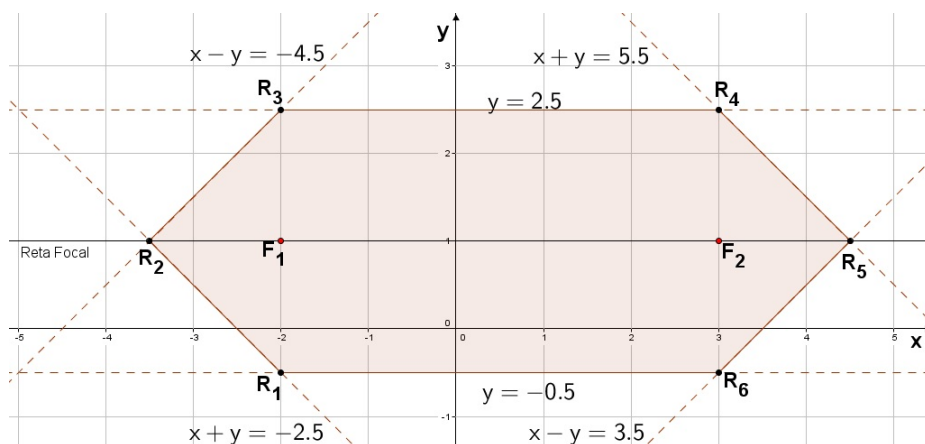


Figura 4.22: Táxi-Elipse 1

Fonte: Geogebra

4.2.3 Análise da Táxi-Elipse com Reta Focal Paralela ao Eixo Oy

Analogamente ao que foi feito na seção anterior, sendo que a reta focal r será paralela ao eixo das ordenadas. Quem devem coincidir dessa vez são as abscissas dos focos, isto é, $x_1 = x_2$.

Exemplo 4.2. Seja uma Táxi-Elipse de equação

$$|x| + |y - 2| + |x| + |y - 3| = 6 \quad (4.17)$$

Analise os sinais da equação da Táxi-Elipse e construa seu gráfico.

Como na subseção anterior vamos calcular d_f :

Os focos dessa Elipse são $F_1(0, 2)$ e $F_2(0, 3)$. Assim,

$$d_f = |0 - 0| + |3 - 2| = 1$$

Como na equação acima, $2a = 6 > 1$, a elipse está bem definida.

Analisemos os sinais com base na tabela abaixo:

Análise de Sinais de x e y		
(a) $x < 0$ e $y < 2$	(b) $x < 0$ e $2 \leq y < 3$	(c) $x < 0$ e $y \geq 3$
(g) $x \geq 0$ e $y < 2$	(h) $x \geq 0$ e $2 \leq y < 3$	(i) $x \geq 0$ e $y \geq 3$

Tabela 4.4: Análise de Sinais da Equação 4.17

Desta vez, as possibilidades que foram excluídas foram d , e e f . São aquelas em que x estaria entre as abscissas do foco, o que é impossível, pois $x_1 = x_2$.

Vamos resolver a equação 4.17 em cada possibilidade acima:

- Caso (a): $x < 0, y < 2$

$$x + y = \frac{1}{2}(0 + 0 + 2 + 3) - 3 \Rightarrow x + y = -0,5$$

- Caso (b): $x < 0, 2 \leq y < 3$

$$x = \frac{1}{2}(0 + 0 - 2 + 3) - 3 \Rightarrow x = -2,5$$

- Caso (c): $x < 0, y \geq 3$

$$x - y = \frac{1}{2}(0 + 0 - 2 - 3) - 3 \Rightarrow x - y = -5,5$$

- Caso (g): $x \geq 0, y < 3$
 $x - y = \frac{1}{2}(0 + 0 - 2 - 3) + 3 \Rightarrow x - y = 0,5$
- Caso (h): $x \geq 0, 2 \leq y < 3$
 $x = \frac{1}{2}(0 + 0 + 2 - 3) + 3 \Rightarrow x = 2,5$
- Caso (i): $x \geq 0, y \geq 3$
 $x + y = \frac{1}{2}(0 + 0 + 2 + 3) + 3 \Rightarrow x + y = 5,5$

Segue o gráfico da Táxi-Elipse pedida na figura 4.23.

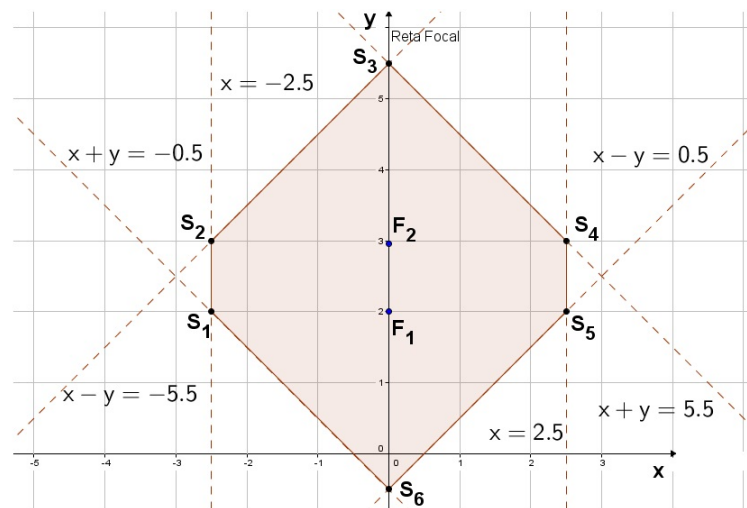


Figura 4.23: Táxi-Elipse 2

Fonte: Geogebra

Pelos focos estarem no eixo Oy a reta focal é o próprio eixo. Logicamente acontece a mesma coisa quando os focos estão no eixo Ox .

Percebe-se também que

- em ambos os casos, os gráficos das Táxi-Elipses têm a forma hexagonal segundo a Geometria Euclidiana;
- à medida que os focos se aproximam, o gráfico da Táxi-Elipse se aproxima de um quadrado segundo a Geometria Euclidiana, que, segundo a Métrica-Táxi, trata-se de uma circunferência, a “Táxi-Circunferência”.

4.2.4 Análise da Táxi-Elipse com Reta Focal Oblíqua aos Eixos Coordenados

Nessa subseção trataremos de Táxi-Elipse nas quais as retas focais, segundo a geometria euclidiana, são oblíquas aos dois eixos coordenados. Faz-se necessária a observação dos coeficientes angulares dessas retas.

4.2.4.1 Reta Focal com Coeficiente Angular Positivo

Toda reta com coeficiente angular positivo tem inclinação para a direita, ou seja, tem o comportamento de uma função afim crescente. O que equivale dizer que os focos da Táxi-Elipse, $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, são tais que $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$ ou $x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$.

Exemplo 4.3. Seja uma Táxi-Elipse de equação

$$|x - 3| + |y - 2| + |x - 2| + |y + 1| = 7 \quad (4.18)$$

Analise os sinais da equação da Táxi-Elipse e construa seu gráfico.

Vamos calcular d_f :

Os focos dessa Elipse são $F_1(3, 2)$ e $F_2(2, -1)$. Assim,

$$d_f = |2 - 3| + |-1 - 2| = 4$$

Como na equação acima, $2a = 7 > 4$, a elipse está bem definida.

Analisemos os sinais com base na tabela que segue:

Análise de Sinais de x e y		
(a) $x < 2$ e $y < -1$	(b) $x < 2$ e $-1 \leq y < 2$	(c) $x < 2$ e $y \geq 2$
(d) $2 \leq x < 3$ e $y < -1$	(e) $2 \leq x < 3$ e $-1 \leq y < 2$	(f) $2 \leq x < 3$ e $y \geq 2$
(g) $x \geq 3$ e $y < -1$	(h) $x \geq 3$ e $-1 \leq y < 2$	(i) $x \geq 3$ e $y \geq 2$

Tabela 4.5: Análise de Sinais da Equação 4.18

Aqui, temos as 8 possibilidades a testar, já que no Caso (e) não é necessário, de acordo com as análise gerais.

Vamos resolver a equação 4.18 em cada possibilidade acima:

- Caso (a): $x < 2, y < -1$

$$x + y = \frac{1}{2}(2 + 3 - 1 + 2) - 3,5 \Rightarrow x + y = -0,5$$

- Caso (b): $x < 2, -1 \leq y < 2$

$$x = \frac{1}{2}(2 + 3 + 1 + 2) - 3,5 \Rightarrow x = 0,5$$

- Caso (c): $x < 2, y \geq 2$
 $x - y = \frac{1}{2}(2 + 3 + 1 - 2) - 3,5 \Rightarrow x - y = -1,5$
- Caso (d): $2 \leq x < 3, y < -1$
 $y = \frac{1}{2}(3 - 2 - 1 + 2) - 3,5 \Rightarrow y = -2,5$
- Caso (f): $2 \leq x < 3, y \geq 2$
 $y = \frac{1}{2}(2 - 3 - 1 + 2) + 3,5 \Rightarrow y = 3,5$
- Caso (g): $x \geq 3, y < -1$
 $x - y = \frac{1}{2}(2 + 3 + 1 - 2) + 3,5 \Rightarrow x - y = 5,5$
- Caso (h): $x \geq 3, -1 \leq y < 2$
 $x = \frac{1}{2}(2 + 3 - 1 - 2) + 3,5 \Rightarrow x = 4,5$
- Caso (i): $x \geq 3, y \geq 2$
 $x + y = \frac{1}{2}(2 + 3 - 1 + 2) + 3,5 \Rightarrow x + y = 6,5$

A seguir se vê o gráfico da Táxi-Elipse pedida na figura 4.24.

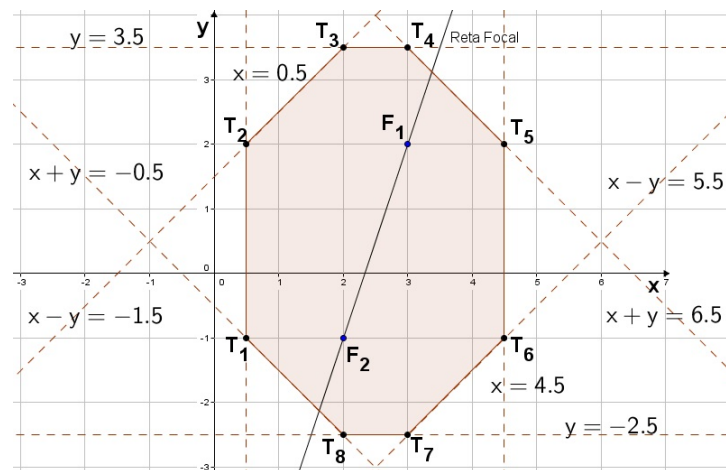


Figura 4.24: Táxi-Elipse 3

Fonte: Geogebra

4.2.4.2 Reta Focal com Coeficiente Angular Negativo

Toda reta com coeficiente angular negativo tem inclinação para a esquerda, ou seja, tem o comportamento de uma função afim decrescente. O que equivale dizer que os focos da Táxi-Elipse, $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$, são tais que $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$ ou $x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$.

Exemplo 4.4. Seja uma Táxi-Elipse de equação

$$|x + 1| + |y - 2| + |x - 3| + |y + 3| = 10 \quad (4.19)$$

Analise os sinais da equação da Táxi-Elipse e construa seu gráfico.

Vamos calcular d_f :

Os focos dessa Elipse são $F_1(-1, 2)$ e $F_2(3, -3)$. Assim,

$$d_f = |3 - (-1)| + |-3 - 2| = |3 + 1| + 5 = 4 + 5 = 9$$

Como na equação acima, $2a = 10 > 9$, a elipse está bem definida.

Analisemos os sinais com base na tabela abaixo:

Análise de Sinais de x e y		
(a) $x < -1$ e $y < -3$	(b) $x < -1$ e $-3 \leq y < 2$	(c) $x < -1$ e $y \geq 2$
(d) $-1 \leq x < 3$ e $y < -3$	(e) $-1 \leq x < 3$ e $-3 \leq y < 2$	(f) $-1 \leq x < 3$ e $y \geq 2$
(g) $x \geq 3$ e $y < -3$	(h) $x \geq 3$ e $-3 \leq y < 2$	(i) $x \geq 3$ e $y \geq 2$

Tabela 4.6: Análise de Sinais da Equação 4.19

Assim como na subsubseção anterior, aqui também temos as 8 possibilidades a testar.

Vamos resolver a equação 4.19 em cada possibilidade acima:

- Caso (a): $x < -1, y < -3$
 $x + y = \frac{1}{2}(-1 + 3 - 3 + 2) - 5 \Rightarrow x + y = -4,5$
- Caso (b): $x < -1, -3 \leq y < 2$
 $x = \frac{1}{2}(-1 + 3 + 3 + 2) - 5 \Rightarrow x = -1,5$
- Caso (c): $x < -1, y \geq 2$
 $x - y = \frac{1}{2}(-1 + 3 + 3 - 2) - 5 \Rightarrow x - y = -3,5$

- Caso (d): $-1 \leq x < 3, y < -3$
 $y = \frac{1}{2}(3 + 1 - 3 + 2) - 5 \Rightarrow y = -3,5$
- Caso (f): $-1 \leq x < 3, y \geq 2$
 $y = \frac{1}{2}(-1 - 3 - 3 + 2) + 5 \Rightarrow y = 2,5$
- Caso (g): $x \geq 3, y < -3$
 $x - y = \frac{1}{2}(-1 + 3 + 3 - 2) + 5 \Rightarrow x - y = 6,5$
- Caso (h): $x \geq 3, -3 < y < 2$
 $x = \frac{1}{2}(-1 + 3 - 3 - 2) + 5 \Rightarrow x = 3,5$
- Caso (i): $x \geq 3, y \geq 2$
 $x + y = \frac{1}{2}(-1 + 3 - 3 + 2) + 5 \Rightarrow x + y = 5,5$

A seguir, vê-se o gráfico da Táxi-Elipse pedida na figura 4.25.

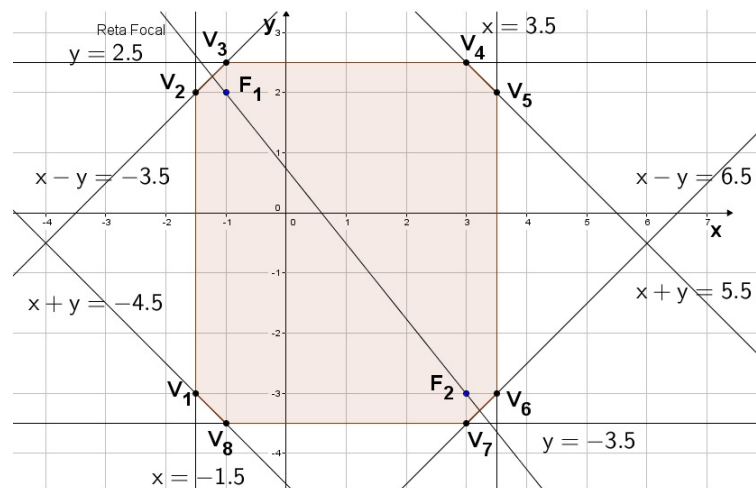


Figura 4.25: Táxi-Elipse 4

Fonte: Geogebra

Observações:

O que se pode perceber nos casos em que a Reta Focal é oblíqua aos eixos é que:

- A possibilidade e da análise dos sinais nunca terá solução, pois os sinais tanto de x quanto de y são opostos e teremos sempre uma falsidade;

- a Táxi-Elipse tem formato octogonal (euclidiano);
- a medida em que a distância entre os focos se aproxima da constante $2a$ a Táxi-Elipse vai se aproximando da forma de um retângulo (euclidiano).

Para resolver essas equações, foram utilizadas as expressões encontradas na análise dos casos gerais. Recomenda-se, porém, ao leitor, que as resolva da forma completa, utilizando a definição de módulo.

5 Considerações Finais

A Geometria do Táxi é de grande valia ao aprendizado, devido sua acessibilidade no dia a dia, não só na Matemática, mas também na Geografia, por tratar, de forma simples e direta, da distância entre dois pontos de uma cidade.

Tal Geometria não-Euclidiana, não foge ao conceito de métrica, respeitando, para isso, propriedades fundamentais, podendo ser chamada de Métrica do Táxi.

A Métrica do Táxi indica vários caminhos possíveis para se calcular a distância mínima entre dois pontos de um plano. Essa quantidade de caminhos pode ser interpretada como um problema de Combinatória, mas precisamente de permutação com repetição.

Por mais que quase sempre a Táxi-Distância entre dois pontos seja maior que a Distância euclidiana entre esses mesmos dois pontos, podendo, até ser igual, quando tais pontos estão em um mesmo eixo coordenado, quando se trata de movimentos em uma cidade, por exemplo, ela é mais viável, pois em uma cidade, temos que trafegar pelas ruas. É claro que estamos supondo que tais ruas tenham o comportamento de retas paralelas ou perpendiculares, segundo a Geometria euclidiana.

É interessante perceber como é descrito o gráfico de uma Táxi-Elipse. Ele é formado basicamente por segmentos de reta, bem diferente do que acontece com o gráfico da Elipse euclidiana. A explicação para isso está no fato de que na Geometria do Táxi, sua equação geral é definida pela soma de valores absolutos. Tais gráficos apresentam aparências de dois tipos de figuras planas euclidianas: o Hexágono e o Octógono, depende apenas da direção em que estiverem suas retas focais. Isso se dá ao fato de o movimento de rotação nessa Geometria não ser um movimento rígido, diferentemente do movimento de translação, que o é.

A construção desses gráficos se dá pela resolução da equação da Táxi-Elipse, que depende da análise de sinais das coordenadas de seus focos.

Por se tratar de uma cônica e ter esse comportamento em uma Geometria que difere da Euclidiana, convém se perguntar:

E com as demais cônicas? Acontecerá algo parecido se as tratarmos segundo a Geometria do Táxi?

Em um primeiro momento, pensa-se que sim, pois todas as cônicas, na Geometria Euclidiana, partem de uma mesma equação qual seja (cf [5]):

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Essas indagações podem ser objetos de estudos futuros.

Referências

- [1] BARBOSA, João Lucas M. Geometria Euclidiana Plana. 11 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273 p. (Coleção do Professor de Matemática; 11)
- [2] BICUDO, Irineu. Os Elementos: Euclides. 1 ed. São Paulo: UNESP, 2009. 593 p.
- [3] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental - Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.
- [4] CHICIU, Andrei. Conics in Different Metrics. Jacksonville, 2012.
- [5] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 369p. (Coleção PROFMAT; 11)
- [6] DOMINGUES, Hygino H. Espaços Métricos e Introdução à Topologia. São Paulo: Atual, 1982.
- [7] KRAUSE, Eugene F. Taxicab Geometry - An Adventure in Non-Euclidian Geometry. Nova York: Dover, 1986.
- [8] LEAL, Anna Paula S. A Circunferência na Geometria do Taxista. Anápolis, 2011.
- [9] LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Vol.2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 372 p. (Coleção do Professor de Matemática; 14)
- [10] LOIOLA, Carlos Augusto G. Um Táxi para Euclides: Uma Geometria Não-Euclidiana na Educação Básica. Rio de Janeiro, 2014.
- [11] OLIVEIRA, Krerley Irraciel M.; FERNÁNDES. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 295 p. (Coleção Olimpíadas de Matemática; 1)

A Simetrias em uma Táxi-Elipse

Simetria de uma Táxi-Elipse em Relação ao seu Centro e aos Eixos Coordenados

Segundo observação feita na página 52 não há perda de generalidade em assumir que os focos sejam simétricos em relação à origem, ou seja da forma $F_1(-x_0, -y_0)$ e $F_2(x_0, y_0)$ com $x_0^2 + y_0^2 > 0$ (quer dizer x_0, y_0 não são simultaneamente nulos)

Observe a figura A.1:

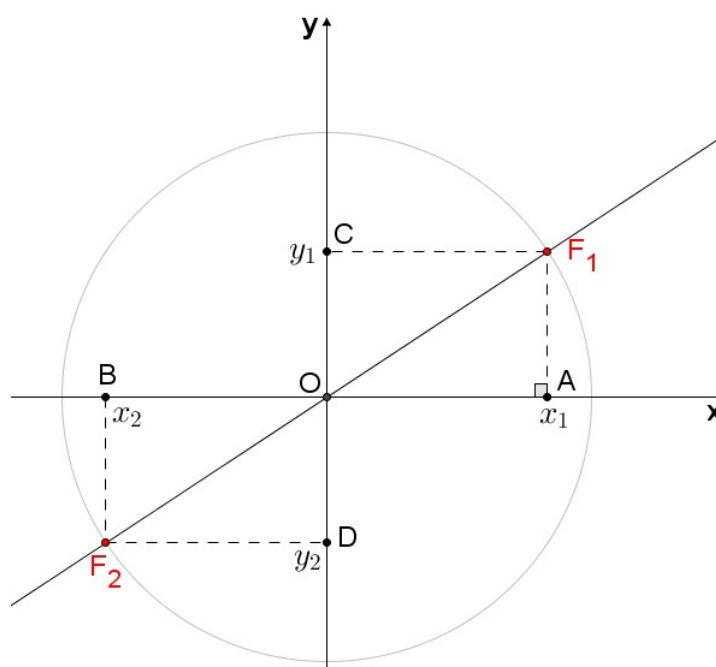


Figura A.1: Focos Simétricos

Fonte: Geogebra

Sabe-se que, de acordo com a figura acima, os focos de uma Táxi-Elipse ε^T de equação

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = 2a$$

são $F_1(x_1, y_1)$ e $F_2(x_2, y_2)$. Pela observação feita F_1 e F_2 são simétricos em relação

ao seu centro, isto é, $x_2 = -x_1$ e $y_2 = -y_1$. Tais focos estão nos primeiro e terceiro quadrantes, respectivamente. Daí,

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |x + x_1| + |y + y_1| = 2a. \quad (\text{A.1})$$

Para que a Táxi-Elipse ε^T seja simétrica em relação à origem é preciso que, sendo $P(x, y) \in \varepsilon$, tem-se $P'(-x, -y) \in \varepsilon$.

Vejamos:

$$\begin{aligned} 2a &= |-x - x_1| + |-y - y_1| + |-x + x_1| + |-y + y_1| \\ &= |-1||x + x_1| + |-1||y + y_1| + |-1||x - x_1| + |-1||y - y_1| \\ &= |x + x_1| + |y + y_1| + |x - x_1| + |y - y_1| \end{aligned}$$

que é essencialmente a equação de ε^T .

Da mesma forma, ela é simétrica tanto em relação ao eixo das abscissas como em relação ao eixo das ordenadas. Ser simétrica em relação ao eixo das abscissas significa que se $P(x, y)$ é um ponto da Táxi-Elipse, então $P'(x, -y)$ também o é. Vejamos:

$$\begin{aligned} 2a &= |x - x_1| + |-y - y_1| + |x + x_1| + |-y + y_1| \\ &= |x - x_1| + |-1||y + y_1| + |x + x_1| + |-1||y - y_1| \\ &= |x - x_1| + |y + y_1| + |x + x_1| + |y - y_1|. \end{aligned}$$

Se simétrica em relação ao eixo das ordenadas significa que se $P(x, y)$ é um ponto da Táxi-Elipse, então $P'(-x, y)$ também o é. Vejamos:

$$\begin{aligned} 2a &= |-x - x_1| + |y - y_1| + |-x + x_1| + |y + y_1| \\ &= |-1||x + x_1| + |y - y_1| + |-1||x - x_1| + |y + y_1| \\ &= |x + x_1| + |y - y_1| + |x - x_1| + |y + y_1|. \end{aligned}$$

Portanto, a análise do comportamento de uma Táxi-Elipse está totalmente determinada pelo seu comportamento no primeiro quadrante.