ANA MARY FONSECA BARRETO DE ALMEIDA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE POLINÔMIOS USANDO APLICATIVOS EM *TABLETS*

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

AGOSTO DE 2015

ANA MARY FONSECA BARRETO DE ALMEIDA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE POLINÔMIOS USANDO APLICATIVOS EM ***TABLETS***

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Dr. Geraldo de Oliveira Filho

Coorientador: Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

AGOSTO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **58/2015**

Almeida, Ana Mary Fonseca Barreto de
Registros de representações semióticas no estudo de polinômios usando aplicativos em *tablets* / Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida. – Campos dos Goytacazes, 2015.
x, 213 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.
Orientador: Geraldo de Oliveira Filho.
Coorientador: Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 139-144.
1. POLINÔMIOS 2. REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 3. TECNOLOGIA DIGITAL I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 512.942

ANA MARY FONSECA BARRETO DE ALMEIDA

REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE POLINÔMIOS USANDO APLICATIVOS EM *TABLETS*

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 27 de Agosto de 2015.

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. - UENF

Prof^a^. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFFluminense

Dra. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IFFluminense
(COORIENTADORA)

Dr. Geraldo de Oliveira Filho
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho às minhas filhas Ana Carolina, Ana Luiza e Ana Laura, ao meu marido Alexandre e a meus pais Antônio José (in memorian) e Vilma que incentivaram, apoiaram e compreenderam os momentos de ausência.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre me conceder sabedoria nas escolhas dos melhores caminhos, coragem para acreditar, força para não desistir e proteção para me amparar.

Às minhas filhas Ana Carolina, Ana Luiza e Ana Laura e ao meu marido Alexandre pelo amor, apoio, confiança e motivação incondicional, que sempre me impulsionam em direção às vitórias dos meus desafios.

Aos meus pais Antônio José (in memorian) e Vilma e minha irmã Flávia que me ensinaram o carinho, o respeito e a admiração. Referências em minha formação.

Aos meus familiares e amigos que compreenderam minhas ausências e me apoiaram, proporcionando momentos de lazer aos meus filhos.

Ao meu orientador Geraldo Filho e à minha coorientadora Gilmara Barcelos pela competência, dedicação, apoio e inúmeros ensinamentos.

Aos professores pelos ensinamentos e colaboração. De forma especial, ao professor Rigoberto Sanábria pela paciência em resolver minhas dúvidas no Latex.

À minha amiga e cunhada Márcia Valéria Almeida pelas inúmeras contribuições ao longo de todo o mestrado.

À professora e amiga Carla Fontes pelas sugestões feitas em relação à sequência didática.

Às amigas Maridelma Pourbaix e Ana Lúcia Tavares pelas contribuições e leitura dos dois primeiros capítulos dessa dissertação.

Aos colegas do mestrado pela companhia e apoio durante as disciplinas cursadas.

Aos colegas de trabalho Tiago Samaha, Willian Vianna e Fábio Duncan que, de forma incansável, elucidaram os erros de programação nas referências.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização dessa pesquisa. De maneira especial, agradeço aos colegas de trabalho Carlos Márcio Viana, Joelma Lima e Fernanda Ribeiro; e aos alunos, sujeitos da pesquisa.

Enfim, a todos que, de alguma forma, estiveram ao meu lado me apoiando e auxiliando na realização desse trabalho.

"Todo ponto de vista é a vista de um ponto.
Ler significa reler e compreender, interpretar.
Cada um lê com os olhos que tem.
E interpreta a partir de onde os pés pisam."
Leonardo Boff

Resumo

Algumas dificuldades que os alunos vivenciam na Matemática ocorrem pela ausência da conversão entre registros de representação semiótica. Em particular, no estudo de Polinômios é privilegiado o registro algébrico em relação aos registros numérico e gráfico. Considerando a importância da conversão entre registros, o objetivo geral desta dissertação foi analisar se a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico e vice-versa influenciam no processo de ensino e aprendizagem de polinômios. Para atingir esse objetivo tornou-se necessária uma revisão bibliográfica sobre Polinômios, Tecnologias Digitais e Registro de Representação Semiótica. A pesquisa foi de caráter qualitativo por meio da metodologia de pesquisa denominado Engenharia Didática. Ciente de que o significado do saber matemático escolar é fortemente influenciado pela forma didática pela qual o conteúdo lhe é apresentado, decidiu-se, nesta pesquisa, por elaborar uma sequência didática a qual contenha atividades investigativas que utilizem o aplicativo para *tablets*, denominado *xGraphing*. Para a análise dos dados, além da revisão bibliográfica, foram utilizados como instrumentos de coletas de dados, essencialmente, observação participante, questionários, avaliação diagnóstica e respostas das atividades da sequência didática. A experimentação da sequência ocorreu em quatro momentos, nos meses de novembro e dezembro de 2014, com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Campos dos Goytacazes, que já tinham estudado o tema Polinômios. A análise de todos os dados sinalizou que o uso do plotador gráfico *xGraphing* contribuiu de forma significativa para a compreensão do comportamento gráfico das funções polinomiais, acelerou os tratamentos e permitiu um potencial de manipulações, propiciando uma aprendizagem heurística. A conversão entre os registros algébricos e gráficos e vice-versa, por meio da sequência didática, influenciou positivamente a aprendizagem de Polinômios

Palavras-chaves: Polinômios. Registro de Representação Semiótica. Tecnologia Digital.

Abstract

Some of the difficulties students have in Mathematics are due to the lack of conversion of semiotic representations registers. In the study of Polynomials, in particular, the algebraic register is emphasized over numeric and graphic registers. Taking into consideration the relevance of register conversion, this dissertation aimed at analyzing whether conversion between graphic registers and algebraic registers and vice versa influence in the teaching and learning polynomials. To achieve this, it was necessary to do a literature review of Polynomials, Digital Technologies, and Semiotic Representation Register. The qualitative study was made using the Didactic Engineering research methodology. Considering that mathematical knowledge is strongly influenced by the didactics used to present contents, this study aimed developing a didactic sequence with investigative activities using the xGraphing app for tablets. For data analysis, in addition to the literature review, data was collected mostly via participant observation, questionnaires, diagnostic evaluation, and answers given in the didactic sequence. The experiment with the sequence took place in four different occasions during the months of November and December of 2014, with 12th grade students of a public school in the Municipality of Campos dos Goytacazes who had previously studied polynomials. Data analysis show that the use of the xGraphing graph plotter contributed significantly for the understanding of the graphic behavior of polynomial functions, accelerated treatments, and allowed a great amount of manipulations, thus enabling heuristic learning. The conversion between algebraic and graphic registers, and vice versa, by means of a learning sequence, facilitated learning of polynomials.

Key-words: Polynomials. Semiotic Representation Registers. Digital Technology.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de Quadros

Lista de abreviaturas e siglas

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação e Cultura
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PDA	Assistentes Digitais Pessoais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Aluno
SAERJ	Sistema de Avaliação do Estado do Rio de Janeiro
TD	Tecnologias Digitais
TIC	Tecnologias da Comunicação e Informação
UNESCO	Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\in$	Pertence
$<$	Menor do que
$>$	Maior do que
$\neq$	Diferente
$\cong$	Aproximadamente igual
$\exists$	Existe
Σ	Somatório

Sumário

Introdução

Os resultados do Brasil no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA)[1] nos cinco exames (2000, 2003, 2006, 2009 e 2012) sinalizaram que a aprendizagem de Matemática não está ocorrendo de forma satisfatória. Numa escala de 0 (zero) a 800 (oitocentos), os alunos brasileiros obtiveram uma média na prova de Matemática em 2000 de 334 pontos, em 2003 de 356, em 2006 de 356, em 2009 de 386 e em 2012 de 391 pontos (INEP, s.d.). Mesmo tendo ocorrido um aumento na média de Matemática, consideram-se as notas baixas. O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) mostrou que a média de proficiência em Matemática dos alunos matriculados no 3º ano do Ensino Médio da rede pública de ensino teve um crescimento pouco satisfatório, a média de 3,1, em 2005, para 3,4 em 2013 (RABELO, 2013, p. 38). Em 1999, 11,9% dos alunos do 3º ano do Ensino Médio possuíam aprendizado de Matemática adequado a seu ano de escolaridade, em 2011, 10,3% apenas tiveram desempenho satisfatório (RABELO, 2013, p. 38). A meta para o Ensino Médio das escolas públicas representa, respectivamente, um patamar de 70% em 2021 (INEP, s.d.). Em relação ao desempenho dos alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, os resultados mostram um crescimento satisfatório suplantando a meta de 2011, 35,4%, sugerindo que práticas pedagógicas aplicadas nesse nível de escolaridade têm dado resultado satisfatório, o que sugere que as práticas adotadas em nível médio não têm dado resultado (RABELO, 2013, p. 38).

Segundo Rabelo (2013, p. 38), os resultados das avaliações nos mostram a necessidade de implantação de ações pedagógicas eficazes que contribuam para a reversão do quadro crítico da Educação Básica em Matemática. Para isso, é necessário um planejamento do trabalho pedagógico, de forma a orientar melhor os processos de construção de conhecimento, além de, conscientizar os docentes de Matemática da contribuição deste componente curricular para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, análise e visualização, objetivos principais do ensino de Matemática na Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1999, p. 40) ressaltam a importância de se adotarem métodos de aprendizagem ativo e interativo, criando situações em que o aluno é desafiado a participar, questionar e refletir sobre suas ações ressaltando

[1] O PISA é um programa de avaliação internacional padronizada aplicada a alunos de 15 anos. As avaliações ocorrem a cada três anos, por amostragem de escolas, nas áreas de Linguagem, Matemática e Ciências.

a importância de se incorporar ao seu ensino os recursos das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). Além disso, os PCN destacam que, em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, formando no aluno a capacidade de resolver problemas e gerando hábitos de investigação.

Para Duval (2003, p. 29), os bloqueios que muitos alunos vivenciam se dão, dentre outros motivos, à grande variedade de registros de representações utilizados na Matemática. Afirma, ainda, que a compreensão da Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.

Para Lima (2003, p. 171), a Matemática do Ensino Médio, conforme praticada nas escolas brasileiras, enfatiza os aspectos manipulativos e fórmulas e que o livro didático é, muitas vezes, o recurso em que o professor aprende o que vai transmitir a seus alunos. Portanto, o nível da qualidade do ensino e, consequentemente, a formação adquirida pelo aluno dificilmente serão superiores ao nível e à qualidade média dos livros didáticos disponíveis (LIMA, 2003, p. 171). Daí a importância de que os mesmos tenham boa qualidade.

A motivação desta pesquisa está relacionada à pouca ênfase e, até mesmo, ausência da representação gráfica de polinômios no Ensino Médio, conforme é ratificado por Morgado et al. (2001, p. 76), quando afirmam que a maior parte dos livros didáticos trabalham os polinômios apenas pelo ponto de vista algébrico (operações, divisibilidade, equações) deixando de explorar o aspecto geométrico (estudo de suas propriedades por meio dos seus gráficos) e até mesmo numérico (cálculo aproximado de suas raízes, interpolação, dentre outros). Os referidos autores afirmam, ainda, que essa riqueza de interpretações possíveis poderia ser explorada com grandes méritos didáticos. Vale ressaltar, ainda, que o estudo de Oliveira e Pereira (2010) sobre a interpretação geométrica das raízes reais dos polinômios, foi fator primordial para a escolha do tema dessa pesquisa, visto que a pesquisadora participou do teste exploratório das atividades desenvolvidas. Um outro estudo sobre polinômios foi desenvolvido por Dazzi e Dullius (2013, p. 382) que, pela experiência em cursos pré-vestibulares e no Ensino Médio, destacaram a dificuldade que os alunos tinham na resolução de exercícios, envolvendo gráficos de funções polinomiais de grau maior do que dois.

Com o desenvolvimento das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) e, em especial os dispositivos móveis, estudo e pesquisas têm sido realizados analisando como as tecnologias digitais podem contribuir para a aprendizagem. Batista (2011, p. 19), em sua pesquisa, destaca que a habilidade que os jovens têm para lidar com dispositivos móveis, a popularização dos mesmos e o desenvolvimento de aplicativos são fatores que contribuem para a introdução destes recursos nas práticas pedagógicas. Batista (2011, p.137) destaca, ainda, que a possibilidade de usar aplicativos gratuitos para fins educacionais deve ser considerada como prioridade. Sendo, ainda, os dispositivos móveis mais baratos e mais facilmente gerenciáveis do que os computadores fixos (UNESCO, 2014, p. 23), opta-se, nesta pesquisa, pelo uso pedagógico do aplicativo para *tablet* denominado *xGraphing*. O referido aplicativo é um plotador gráfico gratuito que permite o traçado de gráficos de forma rápida, dinâmica e com inúmeras potencialidades (DUVAL, 2011, p. 137). Desse modo, a escolha pelo plotador gráfico possibilita mais tempo e mais variedade de exemplos a serem analisados.

Em busca de um referencial teórico que fundamentasse a importância da interpretação geométrica das funções polinomiais, identificou-se a teoria de Raymond Duval, os registros de representações semióticas, em que enfatiza a importância da diversidade de registros e a articulação entre eles nas atividades matemáticas. Com base nessa teoria e no referencial teórico, fundamentou-se a pergunta fundamental desta pesquisa: *Qual é a influência da conversão em diferentes registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios?*

Pelo exposto, consideram-se que os polinômios constituem um conteúdo importante nos currículos escolares da Educação Básica e o seu estudo não deve focalizar apenas, o aspecto algébrico, mas também o numérico e o geométrico. Sendo assim, expõe-se, como objetivo geral desta pesquisa, analisar se a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico, e vice-versa, influenciam no processo de ensino e aprendizagem de polinômios.

Para atingir o objetivo geral desta pesquisa, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: i) investigar trabalhos que abordam o uso pedagógico de *tablets*, a teoria do registro de representações semióticas e o ensino de Polinômios; ii) averiguar o conhecimento prévio dos alunos participantes do estudo sobre o conteúdo de Polinômios; iii) verificar a experiência dos alunos participantes quanto ao uso pedagógico de dispositivos móveis, como *smarthphones* e *tablets*; iv) promover o processo de avaliação do aplicativo e da sequência didática; v) analisar os resultados diagnosticados na aplicação da sequência didática. Esta pesquisa encontra-se estruturada em quatro capítulos além desta Introdução e das Considerações Finais.

No Capítulo 1, intitulado *Polinômios*, são abordados a questão histórica e os estudos correlatos. Os conceitos principais que envolvem os estudos de polinômios, fundamentos teóricos básicos para a realização deste trabalho, encontram-se no Apêndice A.

No Capítulo 2, intitulado *Aporte Teórico*, são apresentadas as seções *Registros de representações semióticas* e *A Sociedade do conhecimento e as tecnologias digitais em Educação Matemática*. Na primeira seção, aborda-se a questão cognitiva e o papel das representações no conhecimento matemático e, na segunda seção, são apresentadas as principais considerações acerca da importância das tecnologias digitais na educação, em especial o uso pedagógico dos *tablets* e, sua importância para a realização desta pesquisa.

No Capítulo 3, intitulado *Configuração da pesquisa: aspectos metodológicos* descrevem-se a metodologia adotada e a trajetória da pesquisa.

No Capítulo 4, intitulado *Apresentação e análise dos dados*, apresentam-se os resultados, por meio da análise das atividades que compõem a sequência didática e das observações.

Finalizando com as *Considerações Finais*, destacam-se resumidamente a relevância do estudo, fazendo uma breve retrospectiva focalizando nos principais resultados, as limitações e dificuldades vivenciadas na pesquisa, bem como algumas sugestões de continuidade da pesquisa.

Capítulo 1

Polinômios

1.1 Aspectos Históricos

A história dos polinômios tem início com a evolução dos métodos de resolução de equações algébricas. A Teoria das Equações representa uma das mais belas páginas da História da Matemática na qual as equações algébricas mais simples surgiram, quase que naturalmente, à medida que o homem começou a calcular (KNUDSEN, 1985, p. 26).

Dentre os antigos documentos matemáticos que se têm conhecimento, dois dos mais famosos são o Papiro de Ahmes (ou Rhind) e o Papiro de Moscou, sendo o primeiro datado de 1650 a.C. Em ambos, problemas relacionados a equações algébricas do 1º grau estão presentes. Neles, os problemas eram enunciados somente usando palavras, método que se estende até o século XV. Só no século XVI, na Europa, desenvolvem-se pesquisas dedicadas à Álgebra empregando uma grande quantidade de simbolismos. No entanto, não havia um padrão comum na notação algébrica, como acontece hoje em dia. Segundo Roque e Carvalho (2012, p. 194), "nesta época, os problemas que exigiam equação eram enunciados usando somente palavras, de modo poético o que equivalia a um enunciado", ou seja, a Álgebra Retórica.

Segundo Roque e Carvalho (2012, p. 189), o passo decisivo para a constituição da álgebra como disciplina pode estar na sua organização em torno da classificação e da resolução de equações, o que teve lugar pela primeira vez no século IX, com os trabalhos de al-Khwarizmi e de outros matemáticos. Sua obra intitulada "Al-Kitab Al-jabr wa'l Muqabalah", título que pode ser traduzido por "O Livro da Restauração e do Balanceamento", é considerada a obra que maior influência exerceu no Mundo da Matemática durante a Idade Média (GARBI, 1997, p.22).

Entre os séculos VIII e XII, Bagdá era um dos maiores centros científicos da época, mas paralelamente ao que vinham desenvolvendo os árabes, os hindus também avançavam em suas pesquisas. O matemático indiano Bháskara viveu no século XII (1114-

1185) e foi responsável pela disseminação do método para a solução de equações algébricas do 2º grau, método esse descoberto um século antes pelo matemático hindu Sridhara (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 189).

Segundo Roque e Carvalho (2012, p. 195), o método de resolução da equação algébrica do 2º grau fundamentou-se na ideia de reduzir o grau da equação pelo processo denominado por Bháskara "extração do termo médio", equivalente ao método de completar quadrados. O método tinha por objetivo diminuir o grau da equação, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, conforme apresentado a seguir.

Considere a equação da forma $p(x) = 0$, sendo $p(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c ϵ $\mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividindo ambos os membros por a e, isolando o termo independente, tem-se:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Somando a ambos os membros $\frac{b^2}{4a^2}$, obtém-se um trinômio quadrado perfeito. Assim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraindo as raízes quadradas tem-se:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, chegando à famosa fórmula resolutiva da equação algébrica do 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A ideia de reduzir o grau de uma equação algébrica com o objetivo de facilitar a determinação de suas raízes é útil, mas nem sempre muito simples de resolução, o que já era de conhecimento dos babilônios. Perto de 2000 a.C., os babilônios já resolviam equações quadráticas bem como já discutiam algumas cúbicas (EVES, 2004, p. 61, 62), o detalhe que escapou aos babilônios é que extrações de raízes quadradas de números não nulos geram sempre duas alternativas, uma positiva e a outra negativa, o que não escapou aos matemáticos hindus que já tinham conhecimento dos números negativos nos últimos séculos antes de Cristo (GARBI, 1997, p. 24).

Tendo resolvido o modo de encontrar as raízes das equações algébricas de grau 2, os matemáticos tinham como desafio as equações de 3º grau, cuja solução só foi descoberta por matemáticos italianos no século XVI motivada fortemente por intrigas e rivalidades (GARBI, 1997, p. 26).

De acordo com Eves (2004, p. 302), por volta de 1515, Scipione del Ferro, então professor da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + px + q = 0$ presumidamente baseado em fontes árabes. Embora não tenha publicado o resultado, Scipione revelou sua descoberta ao discípulo Antonio Fior.

Torneios matemáticos eram frequentes naquele período e, com o objetivo de ter notoriedade no meio acadêmico, por volta de 1535, Antonio Fior desafiou Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido por Tartaglia, para uma disputa pública. O desafio consistia na solução de diversos problemas que um deveria propor ao outro, envolvendo a resolução de equações cúbicas (GARBI, 1997, p. 33). Fior, valendo-se da descoberta do mestre Scipione, propôs problemas que dependessem daquele tipo de equação do 3º grau, haja vista que se considerava o único detentor da solução. Tartaglia aceitou o desafio e resolveu, corretamente, todos os problemas propostos. Além de resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, também achou a fórmula geral para as equações algébricas do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, que Fior não conhecia e, portanto, não conseguiu resolver nenhum dos problemas propostos pelo seu oponente (GARBI, 1997, p. 33).

A notícia do triunfo de Tartaglia chegou a Gerônimo Cardano (1501-1576), que logo convidou o vencedor a vir à sua casa, insinuando que trataria de arranjar um encontro entre ele e um possível patrono (BOYER, 1996, p. 195). Após juramento solene de segredo, conseguiu que Tartaglia revelasse a cobiçada chave de solução da cúbica. Em 1545, quando publicou a *Ars Magna*, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia para as equações algébricas de 3º grau ficando, assim, conhecida como Fórmula de Cardano (EVES, 2004, p. 303).

Conforme descrito por Eves (2004, p. 303), a resolução da cúbica $x^3 + px = q$ dada por Cardano em sua *Ars Magna* é essencialmente a seguinte:

Considerando a identidade

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3.$$

Se escolhermos a e b de modo que

$$3ab = p,$$

$$a^3 - b^3 = q$$

então x é dado por $a - b$. Resolvendo para a e b o sistema formado pelas duas últimas equações se obtém:

$$a = \sqrt[3]{(\frac{q}{2}) + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}},$$

$$b = \sqrt[3]{(-\frac{q}{2}) + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}},$$

e assim x fica determinado.

Vale lembrar que Cardano não usava o simbolismo algébrico e não empregava um raciocínio puramente algébrico na dedução da fórmula.

E quando a resolução das cúbicas se dava a partir da equação geral $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, Garbi (1997, p. 35) propunha que a mesma fosse facilmente transformada em um dos tipos especiais, ou seja, $x^3 + px + q = 0$, tomando $x = y + m$ e calculando m de modo a anular o termo de 2º grau.

Desse modo, considerando $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e $x = y + m$, tem-se:

$$a(y + m)^3 + b(y + m)^2 + c(y + m) + d = 0$$

$$ay^3 + y^2(b + 3m) + y(3am^2 + 2bm + c) + (m^3a + bm^2 + cm + d) = 0$$

Assim, para que se anule o termo de grau 2, $b + 3m = 0$ e, portanto, fica:

$$m = -\frac{b}{3a}.$$

Menos de uma década depois da resolução da equação cúbica, encontrou-se também a resolução da equação quártica geral. Segundo Eves (2004, p. 303), em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs um problema a Cardano que recaía numa equação quártica. Após inúmeras tentativas sem êxito, Cardano passou a questão a seu discípulo Luigi Ferrari que, além de resolver o problema, encontrou o método geral para a solução das equações algébricas de 4º grau. Tal método, também, foi publicado por Cardano em *Ars Magna* (EVES, 2004, p. 303).

Conforme apresentado por Eves (2004, p. 305), pelo método de Ferrari, as equações algébricas de 4º grau, em termos algébricos atuais e por meio de transformações simples, podem ser reduzidas à forma:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

A seguir, conforme afirmado por Boyer (1996, p. 196), somando suficientes quadrados e números a ambos os membros da equação, para que o primeiro fique um quadrado perfeito, obtém-se:

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2.$$

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$$

Somando a ambos os membros da equação termos, envolvendo uma nova incógnita y de modo que o primeiro membro permaneça um quadrado perfeito, obtém-se:

$$\begin{aligned}(x^2 + p + y)^2 &= px^2 - qx + p^2 - r + 2y(x^2 + p) + y^2 \\ &= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2)\end{aligned}$$

O passo crucial seguinte consiste em escolher y de modo que o trinômio no segundo membro fique um quadrado perfeito. Isso se faz, igualando a zero o discriminante.

$$q^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) = 0$$

Desenvolvendo a expressão, chega-se a uma equação cúbica conhecida como *equação resolvente* da equação quártica, cuja resolução fica determinada pelas regras de resolução das equações cúbicas, determina-se y. O valor de y reduz o problema original à extração de raízes quadradas, determinando o valor de x (BOYER, 1996, p. 196).

O passo decisivo para transformar as regras em fórmulas foi a introdução de um simbolismo para os coeficientes da equação, conforme afirmam Roque e Carvalho (2012, p. 223-224):

> Este foi justamente o passo dado pelo matemático francês François Viète, que viveu entre os anos de 1540 e 1603, no qual introduziu uma representação padrão para os "coeficientes"de uma equação. As incógnitas serão representadas pelas vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas. [...] Chegamos, assim, a uma concepção próxima da álgebra que conhecemos atualmente, sobretudo após o século XVII, quando algumas notações serão sugeridas, como a substituição das vogais, para representar as incógnitas, pelas últimas letras do alfabeto como $x, y, z, w, ...$; e a representação dos coeficientes pelas primeiras letras do alfabeto.

A convenção do uso das primeiras letras de nosso alfabeto para indicar constantes e as últimas letras para indicar incógnitas começou com René Descartes em *La géométrie*, um dos três apêndices do tratado filosófico sobre a ciência universal *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências), publicado em 1637 (EVES, 2004, p. 384). Deve-se a ele, ainda, a atual notação para as potências e a percepção que a letra poderia representar quantidades positivas ou negativas (EVES, 2004, p. 384). Conforme descrevem Roque e Carvalho (2012, p. 224), é importante observar que há uma diferença de natureza fundamental entre uma "incógnita" e um "coeficiente". A incógnita é um valor desconhecido cuja determinação depende das condições estabelecidas pela equação e o coeficiente é um valor conhecido que determina a equação (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 224).

Quatro anos após a publicação do referido tratado, nasce na Inglaterra Isaac Newton (1642-1727), cujas contribuições à teoria das equações algébricas podem ser classificadas em três grupos: i) métodos algébricos aproximados para o encontro das raízes reais; ii) um método aproximado não algébrico conhecido como Método de Newton que utiliza conhecimentos de Cálculo Diferencial ; iii) um conjunto de critérios numéricos para a pesquisa de raízes. Nestes, restringem-se os intervalos numéricos dentro dos quais as raízes devem ser procuradas (GARBI, 1997, p. 83).

Os algebristas da Renascença tinham por objetivo resolver equações e, apesar de não aceitarem certas quantidades como resultado da equação, admitiam que estas aparecessem nos cálculos (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 214). O século XVIII foi permeado de discussões sobre os números negativos, período em que apenas os números absolutos eram aceitos, pois eram justificados geometricamente. Para avançar, era preciso mudar o conceito de número subordinado à quantidade, conforme afirmam Roque e Carvalho (2012, p. 297-298):

> No desenvolvimento da álgebra, a resolução de equações já fazia aparecer números indesejáveis que não possuíam um estatuto definido na Matemática. Depois disso, a teoria das curvas, nos séculos XVII e XVIII, e a proliferação de métodos infinitos, para resolver problemas do cálculo infinitesimal, como o das quadraturas, enfatizaram a necessidade de ultrapassar a noção de número como quantidade.

A transição do conceito de quantidade para o de número foi importante para o rigor matemático constituído no século XIX. Para dar consistência às práticas da análise, foi necessário introduzir um conceito abstrato para o número, independente das ideias de quantidade e grandeza. Essa é uma época em que a Matemática foi marcada por uma concepção geral das curvas. As curvas passavam a descrever movimento ou eram expressas por equações algébricas ampliando, desse modo, o universo dos objetos geométricos (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 244, 298).

Desde a solução para as equações quárticas, grandes esforços foram empreendidos para se encontrar a solução geral da equação de 5º grau. Em 1824, o matemático norueguês Niels Abel mostrou que é impossível resolvê-las em sua forma geral e, esse fato foi comprovado, em 1830, pelo francês Evariste Galois. Galois encontrou um método que determinava quando uma equação de grau qualquer é resolúvel com as operações elementares (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 258).

Um dos primeiros matemáticos a oferecer uma sistematização das propriedades dos números (inteiros, racionais e reais) foi George Peacock. George, em seu *Tratado de Álgebra*, publicado em 1830, explicitou as diversas propriedades satisfeitas por esses números, porém, apenas no início do século XX estas foram sistematizadas na forma das definições gerais que são utilizadas hoje (KATZ, 1998, p. 678, 679). O matemático e físico irlandês Willian Rowan Hamilton (1805-1865), influenciado pelas pesquisas de Peacock e De Morgan[1], justificou o uso dos números negativos e imaginários na Álgebra em sua publicação , *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples: with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*[2], data de 1837 (KATZ, 1998, p. 681).

O início do século XX é o momento em que os problemas algébricos passam a ser considerados sob uma ótica dinâmica e o seu ente matemático deixa de ser visto como número e, sim, como uma lei de variação, uma função. Para Hadamard (s.d., p. 146), a Matemática não foi apenas enriquecida pelos novos métodos, mas foi transformada em seu objeto.

Embora no final do século XVII, Johann Bernoulli já empregasse a palavra função, esta só foi definida pelo próprio Bernoulli em 1718 num artigo apresentado à Academia de Ciências em Paris: "Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes"(BERNOULLI, 1742, p. 241).

Toda essa discussão, reacendida na metade do século XIX, com a fundamentação mais rigorosa da noção de funções contínuas, ainda não dava conta de demonstrar a noção do número real vigente. A teoria dos números reais que atende aos desafios postos pelo desenvolvimento atual da Matemática, foi então construída por Richard Dedekind (Alemanha, 1831 - 1916) e Georg Cantor (Rússia e Alemanha, 1845 - 1918) (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 53).

Paralelamente aos avanços no estudo dos números reais, corre a história dos números complexos. Ainda no século XVI, Cardano descobriu que algumas equações do terceiro grau - chamadas por ele de caso irredutível - possuíam raízes reais, mas em cujas equações de resolução era impossível evitar expressões com radicais quadráticos de números negativos (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 53, 54). Essa dificuldade motivou Bombelli (Itália, 1526 - 1572) a criar novos números, posteriormente batizados por Gauss (Alemanha, 1777 - 1855), de números complexos. No início do século XIX, com a representação geométrica dada aos números complexos e às suas operações e, com o seu emprego por Gauss para

[1] Augustus De Morgan, nasceu na Índia em uma família de oficial militar inglês. Estudou em Cambridge na década de 1820. Em 1828, foi selecionado para a cadeira de Matemática da Universidade de Londres (KATZ, 1998, p. 681).

[2] Teoria das Funções Conjugadas, ou Pares Algébricos: com um ensaio preliminar e elementar da Álgebra como a ciência do puro tempo (KATZ, 1998, p. 681).

deduzir propriedades dos números inteiros, é que os números complexos foram conquistando legitimidade (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 54).

O estudo das curvas algébricas deu origem no século XIX à geometria algébrica. Combinando métodos algébricos de Descartes aos espaços multidimensionais, os matemáticos do século XIX começaram a estudar objetos geométricos definidos por equações polinomiais. No final do século XX e início do século XXI, a geometria algébrica é considerada um tópico central da Matemática e tem encontrado aplicações em áreas que vão da robótica e computação gráfica à teoria de cordas (COUTINHO, 2012, p. 30, 31).

1.2 Estudos correlatos

O currículo de Matemática adotado no Ensino Médio brasileiro é essencialmente determinado pelos exames de ingresso aos cursos superiores das carreiras de Ciências Exatas e Tecnologia, sendo ponte de ligação entre os conhecimentos básicos aprendidos no Ensino Fundamental e os estudos avançados a serem realizados nas universidades. O conteúdo a ser trabalhado no Ensino Médio não difere, substancialmente, daqueles adotados em muitos países europeus (LIMA, 2003, p. 169). Para Lima (2003, p. 169, 170), a proposta curricular de Matemática para o Ensino Médio é bastante aceitável, mas considera que os grandes problemas estão na sua execução, muito pela qualidade dos livros destinados ao Ensino Médio, em que sua maioria trazem definições, raciocínios e métodos de resolução de problemas inadequados e até desprovidos de significado.

Lima (2003, p. 177) afirma que a Matemática deve se constituir em três componentes básicas: Conceituação, Manipulação e Aplicação, para a construção de uma base sólida no ensino da Matemática. Para Lima (2003, p. 140, 141), a Conceituação compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas; a Manipulação é o desenvolvimento de habilidades técnicas no manuseio de equações, fórmulas e construções geométricas e a Aplicação é o emprego das noções e das teorias da Matemática para obter resultados e previsões nas áreas técnicas, científicas e sociais. Além disso, cada tema estudado na matemática deve ser visto sob esses três aspectos e a dosagem adequada deles é o fator de equilíbrio no processo de aprendizagem (LIMA, 2003, p. 139).

Na tentativa de identificar os possíveis questionamentos acerca do estudo de polinômios, obteve-se o apoio das discussões publicadas em trabalhos como os de Morgado et al. (2001), Lima (2001), Lima (2003), Oliveira e Pereira (2010), Dazzi e Dullius (2013), Fonseca (2014), dentre outros. Tais trabalhos contribuíram e elucidaram a escolha do tema da presente pesquisa: o estudo de polinômios no Ensino Médio.

Os estudos de polinômios são de natureza muito simples e devem ser analisados tanto do ponto de vista algébrico (operações, divisibilidade, equações) quanto geométrico (estudo das suas propriedades por meio de seus gráficos) ou numérico (cálculo aproximado de suas raízes, interpolação, etc.). Entretanto, constata-se que sua riqueza de interpretações nem sempre é explorada (MORGADO et al., 2001, p. 76). Em seu livro de análise de livros textos, Morgado et al. (2001, p. 44) apontam que os livros didáticos, em geral, não trazem gráficos de polinômios de grau superior a 2 e, muito menos, trazem problemas contextuais que requeiram uma resolução de uma equação de grau maior do que 2. Afirmam, ainda, que os livros didáticos não utilizam métodos numéricos (como o de Newton), que são eficientes e estão ao alcance dos alunos, principalmente com o auxílio de uma boa calculadora ou um computador (LIMA, 2001, p. 50, 51). Observa-se que das três componentes básicas do ensino da Matemática - Conceituação, Manipulação e Aplicação, a ênfase é dada à manipulação.

Oliveira e Pereira (2010, p. 15, 59, 60) elaboraram um trabalho de conclusão de curso de uma Licenciatura em Matemática, ofertado em um Instituto Federal de Educação, intitulado *Raízes de Polinômios: um enfoque geométrico.* A motivação para tal pesquisa se deu a partir da ausência do tratamento gráfico dado aos estudos de polinômios no Ensino Médio, destacado por Morgado et al. (2001) e pelo resultado de uma pesquisa realizada em livros didáticos de nível médio. Esse trabalho objetivava preparar e aplicar atividades que permitissem identificar, graficamente, as raízes de polinômios de coeficientes reais, analisando a relação entre a multiplicidade da uma raiz e o comportamento gráfico nas suas vizinhanças. As atividades foram aplicadas em um turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Campos dos Goytacazes em Laboratório de Informática. Para alcançar os objetivos propostos, foi utilizado o *software Winplot* e, assim, os alunos conseguiram determinar graficamente as raízes reais dos polinômios e, identificar, graficamente, as raízes de multiplicidade par ou ímpar. As presentes autoras verificaram que o uso da tecnologia aliado ao estudo das implicações geométricas das raízes de multiplicidade par e ímpar se revelou como algo novo para os alunos, agilizando o trabalho e permitindo comparações e retomadas dos traçados gráficos quantas vezes fossem necessárias.

Um outro estudo foi desenvolvido por Dazzi e Dullius (2013, p. 382) que, pela experiência em cursos pré-vestibulares e no ensino médio, destacaram a dificuldade que os alunos tinham na resolução de exercícios, envolvendo gráficos de funções polinomiais de grau maior do que 2. Em seu artigo intitulado *Ensino de funções polinomiais de grau maior que dois através da análise de seus gráficos, com auxílio do software Graphmatica* foram elaboradas atividades a serem desenvolvidas com o auxílio do plotador de gráficos, visto que, para os autores, as construções manuais dos gráficos exigem muito tempo, desviando o foco principal do trabalho que seria a análise do comportamento desses gráficos. Os referidos autores desenvolveram 12 atividades com objetivos muito similares aos desta pesquisa, visando a analisar o comportamento do gráfico: quando a função é par ou ímpar; quando seu coeficiente dominante é positivo ou negativo; no termo independente; na vizinhança de suas raízes, sejam elas simples, de multiplicidade par ou ímpar. Porém, o seu trabalho explorou apenas um sentido de conversão, o sentido algébrico para o gráfico, embora não tenham trabalhado segundo a teoria dos registros de representação semiótica. Para avaliar os conhecimentos, foram selecionadas 11 questões de provas de vestibulares de universidades do Rio Grande do Sul, locais onde os alunos integrantes da pesquisa prestam vestibular. O teste elaborado com as 11 questões foi aplicado a um grupo de 150 alunos, do qual nenhuma questão foi deixada em branco e, por métodos estatísticos concluiu uma média de rendimento de 78%, o que levou a deduzir que os objetivos propostos pela pesquisa foram alcançados. Observou-se, ainda, que as raízes complexas não reais não foram exploradas na pesquisa.

O estudo de Fonseca (2014, p. 39), embora não tenha uma relação direta com o tema desta pesquisa, aborda o ensino de polinômios pelo ponto de vista numérico, a interpolação polinomial, fazendo uma correlação da interpretação geométrica a partir de pontos dados e do comportamento das curvas. Em sua publicação intitulada *Interpolação polinomial com uso de softwares, uma atividade para laboratório de Matemática* foram propostas atividades investigativas, nas quais os alunos tiveram que utilizar a solução de sistemas lineares para interpolar curvas, utilizando planilhas eletrônicas e plotadores gráficos, o que tornou exitoso o ferramental, sugerindo-o como prática permanente de ensino.

As pesquisas descritas têm em comum a preocupação em investigar mudanças e melhorias no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios, seja de um ponto de vista geométrico, algébrico ou numérico. O presente estudo tem em comum com as pesquisas descritas a abordagem do Polinômios, sendo neste estudo tratado sob o ponto de vista geométrico e aplicado em uma turma de 3º ano do Ensino Médio.

De forma análoga às pesquisas descritas, o presente estudo também utilizou Tecnologias Digitais (TD) para o ensino de funções polinomiais. No entanto, diferentemente dos trabalhos propostos por Oliveira e Pereira (2010), Dazzi e Dullius (2013) e Fonseca (2014), esta pesquisa não fez uso de recursos digitais por meio de computador e, sim, por *tablet*, e teve por foco o estudo do comportamento do gráfico de funções polinomiais.

1.3 O objeto de estudo desta pesquisa

Este capítulo, neste trabalho, justifica-se pela ênfase que dá ao estudo de Polinômios nos mais diversos enfoques, visto a riqueza de interpretações e de exploração didático-metodológica do tema. Conforme apresentado nos estudos correlatos, grande parte dos teóricos parecem concordar com a importância da interpretação geométrica no estudo de Polinômios. Desse modo, a pesquisadora situa o estado da questão fundamental: *qual é a influência da conversão em diferentes registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios?*

Cabe ressaltar que, neste trabalho, não faremos distinção entre polinômio e função polinomial, sendo representados pelo mesmo símbolo e chamados, indiferentemente, de polinômios ou de função polinomial. Todas as definições e teoremas, conceitos fundamentais para embasamento deste trabalho, estão constantes do Apêndice A.

Dando continuidade à revisão bibliográfica, focaliza-se, no próximo capítulo, o aporte teórico sobre os Registros de Representação Semiótica e as Tecnologias Digitais na Educação.

Capítulo 2

Aporte Teórico

A aprendizagem da Matemática constitui um campo privilegiado para análise das atividades cognitivas e, a presente pesquisa procura verificar, segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, se a compreensão conceitual de polinômios está intimamente ligada à mobilização e articulação de diferentes registros. Segundo Duval (2009, p. 29), não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação; para este autor, não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.

Historicamente, a noção de representação teve início com o estudo de Piaget sobre a representação mental (1924-1926), e num segundo momento, como representação interna ou computacional, a partir de 1955-1960. Por último, nas últimas décadas, como representação semiótica (DUVAL, 2009, p. 30-32).

O termo semiótica, de origem grega, denomina a ciência dos signos ou ciência de todas as linguagens. Tal ciência se originou a partir de três modelos que apareceram quase ao mesmo tempo e, especialmente, de maneira independente, nos Estados Unidos, em Genebra e na União Soviética (DUVAL, 2011, p. 28). Esses três modelos na realidade não têm nada em comum, porém todos os trabalhos posteriores de semiótica partem das contribuições destes três autores: Pierce, Saussure e Frege (DUVAL, 2011, p. 28, 29). A diferença entre esses três modelos se explica, primeiramente, pelas disciplinas que serviram de domínios de referência para a análise dos signos e de sua utilização. Para Peirce, são as ciências em geral; para Saussure, a linguística e para Frege, a matemática (DUVAL, 2011, p. 28, 29). Embora, cada modelo tenha sua contribuição, nenhum deles é suficiente para esclarecer o funcionamento semicognitivo do pensamento e das atividades matemáticas. Para Duval (2011, p. 36), um modelo de análise que permite descrever os processos de compreensão e as causas das dificuldades recorrentes à aprendizagem da Matemática deve responder a três questões:

1. Quais processos de discriminação permitem *reconhecer as unidades de sentido mate-*

maticamente pertinentes em uma expressão ou em uma representação semiótica?

2. Em função de quais critérios podemos classificar todos os tipos de representações utilizáveis em Matemática e no ensino de Matemática?

3. Quais são os mecanismos de substituição ou de transformação próprios a cada tipo de representação utilizada em Matemática?

Essas questões são reformulações das diretrizes do modelo de Saussure, Peirce e Frege, respectivamente (DUVAL, 2011, p. 36).

Para Duval (2011, p. 30), a grande contribuição de Sausurre foi considerar que os signos só podem ser reconhecidos como tal a partir das relações de oposição que eles têm com outros signos no interior de um sistema semiótico, os chamados 'valores de oposição'. Duval (2009, p. 14) afirma, ainda, que não se pode ter compreensão em Matemática, se não se distingue um objeto de sua representação, ou seja, confundir, por exemplo, a função polinomial e sua representação gráfica, porque um mesmo objeto matemático pode ser dado por meio de representações muito diferentes. Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca com o tempo, uma perda de compreensão (DUVAL, 2009, p. 14). Sem a distinção do objeto e sua representação, os conhecimentos adquiridos tornam-se, rapidamente, inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: seja por falta de atenção, seja porque eles tornam-se representações inertes (DUVAL, 2009, p. 14).

A variedade de tipos de signos e como podem ser utilizados são fenômenos importantes para a compreensão do papel da *semiosis*[1], no modo como funciona o pensamento (DUVAL, 2009, p. 35). Duval (2009, p. 32) afirma que:

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro.

Nesta pesquisa, exploram-se, principalmente, as conversões entre os registros gráficos e algébricos no estudo de polinômios, pois, como afirma Duval (2003, p. 14-15) , a originalidade da atividade matemática e sua compreensão está na mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Para Duval (2009, p. 39), a questão de coordenação dos registros e os fatores suscetíveis de favorecer esta coordenação aparecem como questões centrais para as aprendizagens intelectuais. Duval (2009, p. 39) afirma,

[1] É a apreensão ou a produção de uma representação semiótica.

ainda, que a coordenação dos registros possibilita uma análise do conhecimento não só pela natureza do objeto matemático estudado, mas também, pela forma como esses objetos serão apresentados, pois não existe objeto matemático se não há suas diferentes representações.

Nesta pesquisa, considera-se como objeto matemático tudo aquilo que pode ser indicado, sinalizado ou que pode fazer referência quando se faz, comunica ou aprende Matemática (GODINO, 2002, p. 5).

Para criação e exploração gráfica, com o objetivo de realizar correspondências entre os valores visuais dos gráficos e os termos da representação algébrica dos polinômios, a presente pesquisa utiliza o aplicativo *xGraphing*, aplicativo de plotagem gráfica própria para *tablets*, fundamentada nos conceitos das Tecnologias Digitais na Educação Matemática. As Tecnologias Digitais serão apresentadas, com maiores detalhes, neste capítulo.

2.1 Registros de Representações Semióticas

Muitos historiadores consideram que é com Descartes que a álgebra se constituiu, e foi a criação de um simbolismo que marcou uma nova etapa no desenvolvimento do pensamento matemático. Segundo Duval (2011, p. 16; 24-25), o ponto crucial para a análise do conhecimento matemático está na consideração ou não da *semiosis*, cuja revolução teve início nos séculos XIX e XX com a emergência da álgebra. A introdução das letras representando grandezas e números evoca qual é o papel dos signos no pensamento matemático, conforme afirma Duval (2003, p. 13, 14):

> A diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento deve ser procurada [...] na importância primordial das representações semióticas[...] e na grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. [...] Para designar os diferentes tipos de representações semióticas utilizados em matemática, falaremos, parodiando Descartes, de "registro" de representação.

Para se tratar da articulação dos registros, aspecto considerado essencial por Duval (2003, p. 14) para a compreensão do saber matemático, devem-se considerar quatro tipos diferentes de registros mobilizáveis no funcionamento matemático, conforme destacado no quadro 2.1.

Quadro 2.1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

REGISTROS	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural Associações Verbais (conceituais). Forma de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras Geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). Apreensão operatória e não somente perspectiva; construção com instrumentos.
MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Cálculo e sistemas de escritas: numéricas (binária, decimal, fracionária,...); algébricas; simbólicas (línguas formais).	Gráficos cartesianos: mudanças de sistema de coordenadas; interpolação e extrapolação.

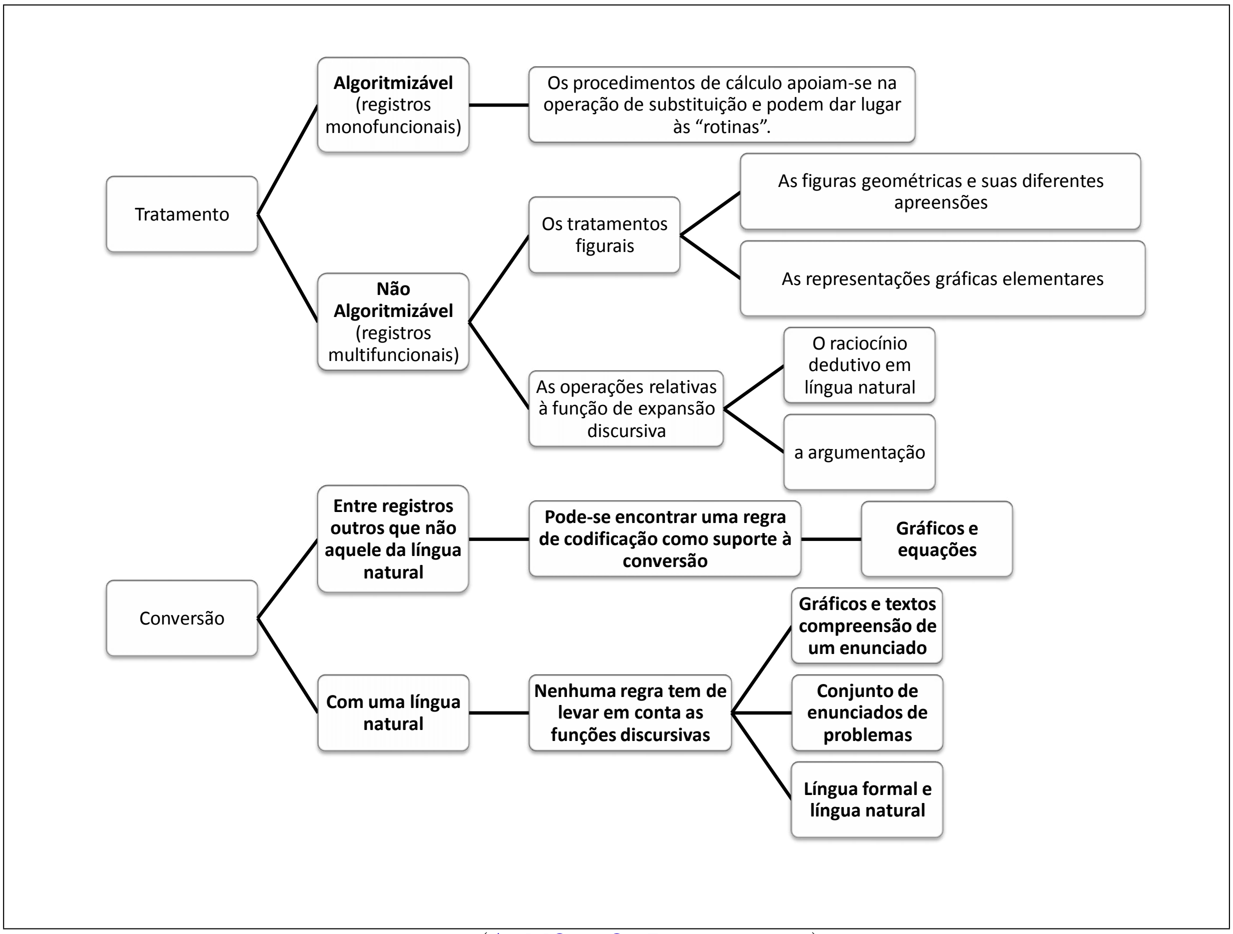
Fonte: (DUVAL, 2003, p. 14)

Segundo Almouloud (2007, p. 72), em qualquer atividade intelectual, na elaboração e na transformação de representações semióticas, é necessário distinguir os dois tipos heterogêneos de transformação das representações: o tratamento e a conversão.

Os tratamentos são transformações de representações em outras dentro do mesmo registro como, por exemplo, resolver as equações polinomiais de segundo grau para determinação de suas raízes pela fórmula resolutiva. Por outro lado, as conversões são transformações de um objeto num outro registro como, por exemplo: passar da escrita algébrica de uma função polinomial à sua representação gráfica (DUVAL, 2003, p. 16).

A análise cognitiva em investigações matemáticas necessita da distinção do que é tratamento e o que é conversão, mais precisamente, é necessário distinguir: dois tipos de tratamento e dois tipos de conversão, assim como evidencia o esquema apresentado na figura 1.

Figura 1 – Tipos de Tratamento e Tipos de Conversão



Fonte: (ALMOULOUD, 2007, p. 73)

Segundo Almouloud (2007, p. 73), para um bom entendimento do que é uma conversão, aspecto fundamental desta pesquisa, devem ser observados, criteriosamente, os seguintes aspectos:

1. Toda conversão tem um sentido a ser considerado. Realizar a conversão em um sentido não significa que seja possível realizá-la no sentido inverso. Por essa razão, é necessário sempre indicar qual o registro de partida e qual o de chegada.

2. Não se deve confundir o conteúdo da representação com o objeto representado. Embora o registro permita explicitar ou revelar propriedades do objeto.

Segundo Duval (2009, p. 59), sem a percepção da diferença entre o que Frege [2] chamava de sentido e a referência dos símbolos ou dos signos, ou entre o conteúdo de uma representação e aquilo que representa, a atividade de conversão torna-se impossível ou incompreensível. Duval (2009, p. 60, 61) ainda afirma, que:

[2] Filósofo e matemático alemão que desenvolveu o modelo em que explica o processo semiótico como produtor de novos conhecimentos (IEP, s.d.).

> E mesmo quando as regras de conversão podem ser claramente definidas, as dificuldades e as ambiguidades não são todas para tanto. É o caso, por exemplo, para a passagem entre a escritura simbólica (algébrica) de relações e os gráficos cartesianos correspondentes. A regra que associa um ponto do plano ajustado a uma dupla de números permite construir, conforme um procedimento muito simples, as representações gráficas das relações anotadas algebricamente.

Existem dificuldades inerentes à conversão e, sua importância está muitas vezes escondida por duas razões, conforme destaca Duval (2010, p. 138):

1. Todo e qualquer ensinamento deve se ater aos casos de congruência (correspondência entre o início das unidades de desempenho e os da representação de chegada; isso parece tão imediato que ele se assemelha com codificação), enquanto que uma ligeira variação na representação de partida pode fazer a conversão incongruente, e criar um bloqueio.

2. As conversões são sempre solicitadas na mesma direção, ou apenas invertidas de modo que já não há qualquer reconhecimento pelo aluno. Um exemplo clássico que ilustra essa razão é a passagem dos gráficos cartesianos para as escritas algébricas.

De modo geral, o ensino privilegia a aprendizagem das regras concernentes aos tratamentos, como é o caso do ensino da Álgebra, a visão mais habitual é o tratamento de regras de transformação de expressões (monômios, polinômios, frações algébricas, expressões com radicais) e processos de resolução de equações (PONTE, 2006, p. 6). Mas, sobretudo, o lugar reservado à conversão das representações de um registro em um outro é praticamente mínimo, se não, praticamente nulo (DUVAL, 2009, p. 62).

Refletindo dessa maneira, pode-se admitir que mudar de registro uma representação dada ou obtida após um tratamento muito elementar é o primeiro gesto do pensamento em Matemática (DUVAL, 2011, p. 119). E basta abrir qualquer livro para se constatar o vai e vem incessante entre frases em língua natural, fórmulas literais, expressões em língua formal, figuras geométricas ou gráficos cartesianos, ou seja, recorre-se à atividade cognitiva de conversão das representações como uma atividade natural ou adquirida naturalmente por todos os alunos. Porém, a atividade de conversão é menos imediata e menos simples e, portanto, é de suma importância a análise dos procedimentos de correspondência sobre o qual repousa toda conversão de representação (DUVAL, 2009, p. 64).

Para determinar se duas representações são congruentes ou não, é preciso segmentá-las em suas unidades significantes[3] respectivas, de tal maneira que elas possam

[3] Considera-se como unidade significante elementar toda unidade que se destaca do "léxico" de um registro (DUVAL, 2009, p. 68). Uma palavra, uma expressão, uma figura ou um coeficiente são exemplos de unidades significantes.

ser colocadas em correspondência (DUVAL, 2009, p. 66-69). Para uma melhor análise, destacam-se os três critérios de congruência:

1. A *possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes*;

   Por exemplo, a expressão seguinte e sua conversão em escritura algébrica:

   "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa"

   $$y > x$$

   Observa-se que uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes é suficiente para a realização da conversão (DUVAL, 2009, p. 64).

2. A *univocidade "semântica" terminal*;

   A cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de chegada (DUVAL, 2009, p. 69), o que pode ser observado no exemplo anterior.

3. A *ordem dentro da organização das unidades que compõem cada uma das duas representações.*

   É pertinente apenas quando as representações têm a mesma dimensão e é, sobretudo, importante na comparação de frases e fórmulas literais (DUVAL, 2009, p. 69).

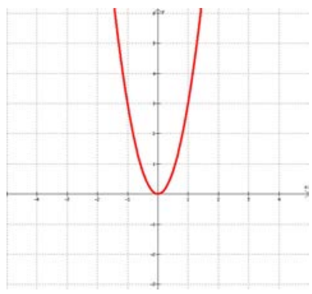
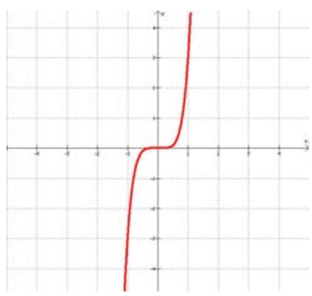
Mas é quando as transformações nos dois diferentes registros não são congruentes, que uma mudança de registro se torna mais interessante e fecunda (DUVAL, 2009, p. 72). Como, por exemplo, a tarefa de conversão entre a escritura algébrica e os gráficos cartesianos apresentados no quadro 2.2. Nessa passagem, não há correspondência semântica entre as unidades significantes, também definidas como variáveis cognitivas (DUVAL, 2009, p. 77). Para Duval (2009, p. 101):

> A discriminação de unidades significantes nos registros de representação constitui então um problema análogo àquele da procura de diferentes fatores de variação na análise de um conjunto de fatores que, na ocorrência de um fenômeno, intervêm simultaneamente e não podem ser apreendidos isoladamente: para dissociá-las é preciso recorrer ao "método consistindo em fazer variar um só fator a cada vez, os outros estando todos mantidos invariáveis". Em outros termos, a discriminação das unidades significantes de uma representação, e então a possibilidade de uma apreensão daquilo que ela representa, depende da apreensão de um campo de variações possíveis relativamente à significância num registro.

As unidades significantes, ou seja, as variáveis cognitivas visuais ou escalares, no estudo dos Polinômios, estão destacadas em quadros constantes no Capítulo 4. Vale ressaltar que as unidades significantes do registro gráfico não são separáveis, pois são integradas numa única forma e, ainda que, para cada variação no registro gráfico obtém-se uma variação concomitante no registro algébrico (DUVAL, 2009, p. 103, 104).

Para avaliar as conversões em que os registros de partida são representações cartesianas, as variáveis cognitivas são puramente visuais, e correspondem às unidades significantes no reconhecimento visual da forma do gráfico, de sua orientação e de sua posição em relação aos eixos (DUVAL, 2011, p. 109). Assim, cada registro gráfico de uma função polinomial tem diversas qualidades visuais que devem ser discriminadas pelo aluno e, só assim, o aluno será capaz de *ler* o que o registro gráfico *diz*. É esse trabalho de observação das variações visuais dos gráficos e das covariações de valores categoriais na representação algébrica da função polinomial que irá permitir ao aluno tomar consciência do que é matematicamente pertinente no conteúdo visual dos gráficos (DUVAL, 2011, p. 111).

Quadro 2.2 – Identificação das unidades significantes no processo de conversão da escritura algébrica para o gráfico cartesiano

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis Escalares)**	**Registro de Chegada**	**Descrição da tarefa de reconhecimento**
$p(x) = 3x^2$	grau par		Quando x cresce ou x decresce ilimitadamente, os valores de $y = p(x)$ crescem ilimitadamente.
$p(x) = 3x^5$	grau ímpar		Quando x cresce ilimitadamente, o $y = p(x)$ cresce ilimitadamente e quando x decresce ilimitadamente, o $y = p(x)$ decresce ilimitadamente.

Fonte: elaboração própria

Em relação à análise dos procedimentos de correspondência das conversões de representação, Duval (2009, p. 69) afirma que:

> Duas representações são congruentes quando há correspondência semântica entre suas unidades significantes, univocidade semântica terminal e mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações. Naturalmente, pode não haver correspondência para nenhum desses três critérios, para dois ou somente para um. A não-congruência entre duas representações pode então ser maior ou menor. A dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida a representação de chegada.

Nota-se, assim, que as dificuldades criadas pela não congruência para a conversão das representações está presente não só nos registros de linguagem natural como também na conversão entre a escritura algébrica e sua representação gráfica (DUVAL, 2009, p. 75).

Portanto, segundo Duval (2009, p. 83), a atividade conceitual não pode ser mais isolada da atividade semiótica, isso porque para ele, a apreensão dos conceitos matemáticos está, intrinsecamente, ligada à descoberta de uma invariância entre representações semioticamente heterogêneas.

A noção dos registros de representação semiótica na aprendizagem da Matemática teve início no Brasil na década de 1990 e, nesse contexto, os estudos de Duval começaram a ser considerados nas linhas de pesquisa em Educação Matemática (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 41). Colombo, Flores e Moretti (2008, p. 47, 49) mostram, no artigo *Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências* um interesse crescente pela noção dos registros de representação semiótica como forma de investigação dos problemas de aprendizagem da Matemática. Esses autores analisaram 30 trabalhos de pesquisa publicados no período de 2001 a 2005, verificaram que todos os trinta partiam de um pressuposto de ensino e aprendizagem pautados na necessidade de atribuir significado ao objeto matemático em estudo por meio de suas diferentes representações. Em suas análises, concluíram que pensar o ensino da Matemática a partir dos pressupostos da diversidade de representações e das operações de tratamento e conversão entre esses registros, pode ser um caminho que leve a facilitar a compreensão da Matemática pelo aluno e, ainda, a auxiliar, significativamente, o professor de matemática na busca de estratégias que amenizem as dificuldades de aprendizagem desta área do conhecimento (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008, p. 61, 62).

Conceição Junior (2011, p. 187, 188), em sua pesquisa, motivada por sua experiência com alunos de Ensino Médio e a dificuldade encontrada por eles na compreensão dos conceitos de inequações, concluiu que a abordagem funcional gráfica, envolvendo o tratamento e a conversão de registros de representação semiótica, favoreceu o entendimento dos conceitos de inequações.

Jordão (2011, p. 176), em sua pesquisa, elaborou uma sequência didática, utilizando *software* de plotagem gráfica denominado *Winplot*, permitindo uma experimentação para resolução de sistemas lineares de três equações e três incógnitas com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Concluiu, assim, que a abordagem de conversão e tratamento de registros de representação aliada a um ambiente computacional favoreceram a compreensão dos conceitos do presente tema. Sugeriu, ainda, em sua pesquisa, que estudos futuros favoreçam os dois sentidos da conversão, isto é, casos de congruência e de não congruência, privilegiando o registro gráfico como ponto de partida. Vê-se, então, que o que embasa esse trabalho de pesquisa, cujas atividades tiveram como ponto principal o estudo das conversões, principalmente do registro gráfico para o registro algébrico dos sistemas lineares, são questões relativas ao olhar semiótico.

As pesquisas, aqui descritas, têm em comum, com o estudo em questão, o fundamento teórico de suas investigações que se baseiam nos pressupostos teóricos do registro de representações semióticas para o ensino e aprendizagem em Matemática.

2.2 A Sociedade do Conhecimento e as Tecnologias Digitais em Educação Matemática

2.2.1 Sociedade e Tecnologia

A história do homem se confunde com a história das técnicas, com o uso dos objetos, evoluindo em complexidade e em consonância com o processo de construção das sociedades humanas. É analisando a evolução do homem e o desenvolvimento das técnicas, na percepção do seu contexto histórico e social, que se pode enriquecer o conceito que temos do termo tecnologia (VERASZTO, 2004, p. 23).

Desse modo, torna-se notório conhecer que as palavras técnica e tecnologia têm origem comum na palavra grega *techné*. A palavra tecnologia provém da junção do termo *tecno* do grego *techné*, que significa saber fazer, com o sufixo *logia*, do grego *logus*, razão, estudo. Portanto, tecnologia é o estudo da técnica, a razão do saber fazer (VERASZTO, 2004, p. 24). Veraszto (2004, p. 24) afirma , ainda, que é difícil estabelecer uma definição precisa para a palavra tecnologia tendo em vista que, ao longo da história, o seu conceito é interpretado de diferentes maneiras no âmbito dos mais variados contextos sociais, uma vez que a tecnologia, em sua origem, consistiu muito mais em se alterar o mundo de forma prática do que, efetivamente, compreendê-lo. Portanto, o dilema do determinismo tecnológico é infundado, dado que a tecnologia é a sociedade e a sociedade não pode ser entendida ou representada sem suas ferramentas tecnológicas (CASTELLS, 1999, p. 43).

Embora técnica e tecnologia tenham a mesma raiz etimológica, conhecimentos técnicos e conhecimentos tecnológicos têm significados distintos. No caso do conhecimento técnico, seu eixo principal é a experiência prévia acumulada, o saber fazer, a operacionalização. É um saber especializado e específico que se esmera na aplicação de todos os outros saberes que lhe possam ser úteis (CORREIA, 2009). Já o conhecimento tecnológico tem atributos reflexivos que fundamentam a atividade, o qual lhe proporciona uma base argumentativa que permite sua explicação, o que demanda uma relação entre teoria e prática de forma indissolúvel (VERASZTO, 2004, p. 52).

O desenvolvimento da tecnologia, ao longo dos anos, acarretou inúmeras transformações na sociedade contemporânea, principalmente nas últimas décadas. Uma revolução tecnológica concentrada nas Tecnologias da Informação começou a remodelar a base material da sociedade em ritmo acelerado. Castells (1999, p. 67), por exemplo, define tecnologias da informação como todo o conjunto convergente de tecnologias em microeletrônica, computação (*software* e *hardware*), telecomunicações/radiodifusão e optoeletrônica [4].

Castells (1999, p. 69, 82) afirma que:

> o que caracteriza a atual revolução tecnológica não é a centralidade de conhecimento e informação, mas a aplicação desses conhecimentos e dessa informação para a geração de conhecimentos e dispositivos de processamento/comunicação da informação, em um ciclo de realimentação cumulativo entre a inovação e seu uso. [...] as novas tecnologias da informação não são simplesmente ferramentas a serem aplicadas, mas processos a serem desenvolvidos. [...] Cada grande avanço em um campo tecnológico específico amplifica os efeitos das tecnologias da informação conexas. A convergência de todas essas tecnologias eletrônicas no campo da comunicação interativa levou à criação da Internet, talvez o mais revolucionário meio tecnológico da Era da Informação.

Conforme destacam Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 17-34), as inovações tecnológicas têm permeado o ensino da Matemática e, no Brasil, destacam seus aspectos e caracterizações em quatro fases. A *primeira fase* se caracteriza, fundamentalmente, pelo uso do *software* LOGO, que teve início por volta de 1985. A *segunda fase* teve início na primeira metade dos anos 1990, a partir da acessibilidade e popularização do uso de computadores pessoais. A *terceira fase* teve início por volta de 1999 com o avento da Internet. Consideram que, atualmente, estamos vivendo a quarta fase com relação ao uso das tecnologias em Educação Matemática, fase iniciada em meados de 2004, com o advento da Internet rápida. Nessa fase, tornou-se comum o uso do termo *tecnologias digitais* (TD), caracterizada por diversos aspectos: GeoGebra, Multimodalidade, Novos *designs* e interatividade, Tecnologias móveis ou portáteis, Performance e Performance Matemática Digital (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014, p. 35-37). A TD é uma tecnologia baseada em circuitos eletrônicos que se fundamentam em uma lógica binária, ou seja, todas as informações (dados) são guardadas e processadas a partir de dois valores lógicos (0 e 1) (AMARAL, 2008, p. 15). Amaral (2008, p. 15) esclarece, ainda, que se referem à

[4] É a interação entre radiação luminosa e matéria, entre fótons e elétrons

convergência digital do vídeo, textos e gráficos, ou seja, uma nova materialidade das imagens, textos e sons. Os inúmeros aspectos destacados tornam a quarta fase um cenário exploratório, fértil ao desenvolvimento de investigações e à realização de pesquisas.

2.2.2 Tecnologias Digitais

As TD, na educação, contribuem para a mudança das práticas educativas, sejam essas nas relações tempo e espaço, ensino e aprendizagem, nos materiais pedagógicos, na organização e representação de informações pelas múltiplas linguagens. Passaram a fazer parte da cultura, tomando lugar nas práticas sociais e ressignificando as relações educativas (ALMEIDA; SILVA, 2011, p. 3, 4).

As TD e as mídias sociais têm acelerado o ritmo das transformações da aprendizagem, do entretenimento, das vidas das pessoas, seja em casa ou no trabalho (NASCIMENTO, 2013, p. 45).

Conforme afirmam Garcia et al. (2011, p. 82), os materiais digitais educacionais são ferramentas que possibilitam novas práticas pedagógicas, permitindo a interatividade entre o aluno e uma determinada atividade com o objetivo de aprendizagem. Afirmam, ainda, que agregar à prática docente as tecnologias digitais contribui para o seu desenvolvimento de forma a estabelecer uma nova metodologia educativa que incorpora em seu *modus operandi* as tecnologias contemporâneas disponíveis na sociedade digital.

O uso das TD no processo de aprendizagem é uma oportunidade para ajudar as escolas a se transformarem e, consequentemente, engajar os alunos nas atividades, seja por meio de jogos, por meio de simulações ou vídeos, criando contextos interessantes para explorar um assunto (NASCIMENTO, 2013, p. 48).

O uso da tecnologia na educação não garante o sucesso no processo de ensino e aprendizagem, principalmente quando essa é apenas uma outra ferramenta para reprodução de uma concepção *bancária* de educação. Essa concepção para Freire (2005, p. 67) é definida como o ato de depositar, transferir, de transmitir valores e conhecimentos de forma passiva e unilateral. Em contraposição, Freire (2005, p. 77, 80) enfatiza que a educação deve ser problematizadora, de caráter altamente reflexivo. Portanto, a utilização das TD na educação deve assumir uma característica interativa, colaborativa e dialógica, dentro ou fora da escola. Os materiais digitais educacionais são ferramentas que possibilitam novas práticas pedagógicas, pois possibilitam a interatividade entre o aluno e uma determinada atividade com o objetivo de aprendizagem (GARCIA et al., 2011, p. 82).

Ao integrar as TD à sala de aula, os educadores devem ter a consciência da importância no processo de escolha da tecnologia mais adequada para a ação didática que pretende, de forma a harmonizar a inclusão da tecnologia digital na prática educativa (ZEDNICK et al., 2014, p. 508).

Zednick et al. (2014, p. 508) recomenda ainda que:

> as Tecnologias Digitais Educacionais, empregadas como meio de apoio ao trabalho docente e submetidas à exploração por parte dos alunos em processo de aprendizagem, sejam frequentemente e coletivamente avaliadas, dentro de critérios definidos por professores de cada área.

Dentre as TD, destacam-se as tecnologias móveis sem fio. A utilização educativa desses dispositivos móveis é tratada por um campo de pesquisa denominado *m-learning* (*mobile learning*). Batista (2011, p. 54) afirma que desconsiderar as potencialidades educacionais que as tecnologias móveis têm a oferecer seria como tentar manter a educação fora do contexto atual de mudanças. As pesquisas da Unesco (2014, p. 18) revelaram que os aparelhos móveis podem auxiliar os professores a usarem o tempo de aula de forma mais efetiva, proporcionando mais tempo para as atividades de construção dos conceitos, discussão de ideias e interpretações alternativas, trabalhos em grupo, entre outros.

Embora seja objeto de pesquisa há alguns anos, o conceito de *m-learning* ainda não é muito óbvio, como afirma Traxler (2005, p. 261). Para Wains e Mahmood (2008, p. 31), *m-learning* é um campo que engloba tecnologias sem fio e computação móvel de forma a permitir uma aprendizagem sem limite de tempo e lugar. Batista (2011, p. 57, 62) afirma que, o *m-learning* é a aprendizagem por meio de dispositivos móveis, considerando todos os fatores envolvidos na questão.

Traxler (2005, p. 262) definiu *m-learning* como qualquer oferta educativa em que as únicas tecnologias ou as dominantes, sejam dispositivos portáteis. Para ele, essa definição pode significar que a aprendizagem móvel pode incluir *smartphones*, assistentes digitais pessoais (PDA) e seus periféricos, *tablets* e PC portáteis.

Destaca-se, nesta presente pesquisa, o dispositivo móvel denominado *tablet*, por considerar de extrema importância para a pesquisa a mobilidade, a interatividade e o favorecimento do processo investigativo, ou seja, a construção do conhecimento pela interação com a ferramenta tecnológica. Segundo pesquisa realizada pela Unesco (2014, p. 7), atualmente, um volume crescente de evidências sugere que os aparelhos móveis, presentes em todos os lugares - especialmente telefones celulares e, mais recentemente, *tablets* - são utilizados por alunos e educadores em todo o mundo para acessar informações, racionalizar e simplificar a administração de suas atividades, além de facilitar a aprendizagem de maneiras novas e inovadoras.

2.2.3 Uso Pedagógico dos Tablets

Os *tablets* são dispositivos móveis com um conjunto de recursos que podem favorecer e estimular a proposição de inúmeras atividades pedagógicas, a visualização de conteúdos cognitivos, as atividades cooperativas e o desenvolvimento de projetos (SEABRA, 2012, p. 2).

Segundo Clarke, Svanaes e Zimmermann (2013, p. 11), *tablets* podem ser vistos como caixas portáteis de ferramentas pedagógicas. As referidas autoras consideram que algumas dessas ferramentas são próprias para organização, revisão de informações e registro. Consideram, ainda, que algumas ferramentas podem contribuir em atividades que desenvolvam o pensamento crítico e a autoconfiança, além de motivar e envolver o aluno no processo de aprendizagem.

Silva et al. (2014, p. 13) realizaram um estudo de caso intitulado *Utilização de Aplicativos em Tablets na Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares: Proposta de uma Sequência Didática*. A pesquisa foi realizada com alunos do 6º período da Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação, matriculados no componente curricular de Álgebra Linear. Nesse estudo, foram utilizados dois aplicativos gratuitos para *tablets*: o *xGraphing* e *TriPlot 3D Graphing Free*, que foram usados para a construção de gráficos gerados em duas dimensões (2D), com o objetivo de avaliar a percepção dos licenciandos sobre a sequência didática elaborada. Destacaram o encantamento pela manipulação dos gráficos na tela do *tablet*, em que os licenciandos puderam experimentar ampliando, girando a partir do toque, considerado um artifício facilitador para a análise e conclusões propostas pela sequência didática. Esse fato é confirmado por Marés (2012, p. 8) em seu estudo pela rede Lationamericana de Portais Educativos intitulado *Tablets in Education: Opportunities and Challenges in one-to-one programs*. Nesse estudo, a autora confirma que os benefícios do uso dos *tablets* provêm da tela sensível ao toque e da interatividade.

Marés (2012, p. 2, 5) avaliou o potencial do uso dos *tablets*, como objeto de uma educação inclusiva e de qualidade. Em seus primeiros relatórios, constatou que o uso pedagógico dos *tablets* motiva os alunos e influencia positivamente sua vontade de aprender, embora reconheça que isso se deve muito ao aspecto lúdico com que veem o recurso tecnológico. Outro aspecto apontado no estudo de Marés (2012, p. 5, 6) são os benefícios da interatividade, proporcionando novas e ricas experiências aos alunos, quando estes estão acessando os conteúdos escolares. A portabilidade e a conectividade oferecidas pelos *tablets* encorajam a colaboração e a interação entre os alunos na sala de aula. Recursos educacionais são muitos os desenvolvidos hoje, mas Marés (2012, p. 6, 7) afirma que, em muitos casos observados, o sucesso depende apenas das habilidades do professor em encontrar, adaptar e implementar tais recursos.

Outra pesquisa sobre o uso educacional de *tablets* foi realizada por Barcelos et al. (2013) que, por meio de um estudo de caso, com alunos do 4º período da Licenciatura em Matemática de uma Instituição Federal de Educação matriculados no componente curricular Geometria IV, com participação de dez alunos, mostrou como os *tablets* podem ser utilizados para a elaboração de mapas mentais por meio do *software* Mindomo. Os autores concluíram que alguns alunos apresentaram dificuldades devido à pouca familiarização com o dispositivo, visto que os mesmos sentiam a falta dos recursos habituais acessíveis via teclado do computador/*notebook*.

Assim, de acordo com as considerações apresentadas, observa-se que os *tablets* podem ser utilizados no apoio às atividades pedagógicas não o entendendo apenas como ferramenta, mas sim, como essência de um projeto de transformação, levando-se em consideração as ponderações apresentadas nesta seção, ou seja, o planejamento adequado, a formação do professor e o conhecimento das potencialidades dos recursos a serem utilizados no processo de ensino e aprendizagem em atividades investigativas.

Com base no aporte teórico apresentado nos itens anteriores, assim como motivada pelos estudos correlatos; propõe-se, neste trabalho, analisar se a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico, e vice-versa, influenciam na construção do conceito de polinômio. Visando a motivar e permitir uma diversidade de experimentações, optou-se, neste trabalho de pesquisa, pelo uso do *tablet* como ferramenta, haja vista os estudos de caso descritos neste capítulo.

As atividades desenvolvidas nessa pesquisa foram propostas com base no aplicativo para *tablets* denominado *xGraphing* em sua versão gratuita 1.0, que requer dispositivos Android 2.2 ou superior. O *xGraphing* é um plotador de gráficos em duas dimensões (2D), cujos comandos podem ser dados a partir de pontos marcados no sistema cartesiano, sejam por meio de toques na tela ou a partir da lei de formação da função. Esse aplicativo, assim como, os aspectos metodológicos serão discutidos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Configuração da Pesquisa: aspectos metodológicos

Antecedendo à descrição dos caminhos metodológicos percorridos para o levantamento, análise e interpretação dos dados desta pesquisa, evidenciam-se novamente, a seguir, a questão principal e o objetivo geral.

A questão proposta nesta dissertação é: qual é a influência da conversão em diferentes registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios?

Para buscar a resposta da questão proposta, estabeleceu-se que o objetivo geral desta dissertação é analisar se a conversão entre o registro gráfico e o registro algébrico e vice-versa influenciam no processo de ensino e aprendizagem de polinômios. Para isso, desenvolveu-se uma sequência didática baseada na Teoria da Situação Didática utilizando como ferramenta aplicativo de plotagem gráfica para *tablets* denominado *xGraphing*.

A Teoria da Situação Didática, desenvolvida por Brousseau (1986, p. 18), baseia-se no princípio de que "cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação", entendida como uma ação entre duas ou mais pessoas. Uma situação em que se possibilite a construção do conhecimento é definida por Pais (2011, p. 65) como uma Situação Didática:

> formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico.

Trata-se de um referencial que valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático e, por outro, reconhece o trabalho do professor que cria condições para a apreensão dos conhecimentos matemáticos específicos (FREITAS, 2008, p. 78).

O significado do saber matemático escolar, para o aluno, é fortemente influenciado pela forma didática pela qual o conteúdo lhe é apresentado. A situação didática sempre irá existir quando ficar caracterizada uma intenção do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo (FREITAS, 2008, p. 80).

Nessa concepção, o professor deve efetuar, não a simples comunicação de conhecimento, mas a "devolução" de um problema, e essa consiste no conjunto de condições que permitam ao aluno se apropriar da situação. Para isso, é necessária a análise de certos tipos de situações didáticas que possibilitem a progressão de aprendizagem (FREITAS, 2008, p. 83-85).

As situações, assim concebidas, distanciam-se dos exercícios clássicos que, apenas, exigem a operacionalização de um procedimento conhecido. Organizar e dirigir situações de aprendizagem é manter um espaço justo para tais procedimentos. São situações amplas, abertas, carregadas de sentido e de regulação, as quais requerem um método de pesquisa, de identificação e de resolução de problemas (PERRENOUD, 2000, p. 25, 26).

Perrenoud (2000, p. 26), afirma que a concepção, organização e animação de situações didáticas mobiliza várias competências mais específicas: i) conhecer os conteúdos a serem ensinados e sua tradução em objetivos de aprendizagem; ii) trabalhar a partir das representações do aluno; iii) trabalhar a partir de erros e dos obstáculos de aprendizagem; iv) construir e planejar dispositivos e sequências didáticas; v) envolver os alunos em atividades de pesquisa, em projeto de conhecimento.

Uma situação de aprendizagem não ocorre ao acaso e é delineada por situações didáticas que colocam os alunos diante de atividades investigativas[1], em que a construção do conhecimento é uma *trajetória coletiva* a qual o professor orienta, criando situações e dando auxílio, sem ser o especialista que transmite o saber, nem o guia que propõe a solução do problema (PERRENOUD, 2000, p. 33, 35).

Para Zabala (1998, p.18), Sequência Didática é "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Uma Sequência Didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa (PAIS, 2011, p. 102). Utiliza-se a sequência didática construída, precisamente, por procedimentos investigativos e estruturados em uma ordem específica, objetivando o registo e a análise de como o conhecimento é construído (BROUSSEAU, 1986, p. 19).

Optou-se por uma pesquisa não experimental e qualitativa, por meio da me-

[1] Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 13).

todologia de pesquisa denominada Engenharia Didática[2], considerando que as pesquisas experimentais não são recomendadas na educação e nas ciências sociais conforme afirmado por Moreira e Caleffe (2008, p. 73), pois compreendem que é impossível manipular certas variáveis. Para Alves (2007, p. 103):

> métodos de índole quantitativa não eram capazes de captar os fenômenos sociais, como é o caso da educação, que se encontram dependentes de contextos, não se podendo isolar, quantificar, generalizar e prever resultados nestas situações. Além disso, e uma vez que o ser humano é caracterizado pela sua subjetividade, tornou-se impossível que o investigador se colocasse numa posição neutra face ao objeto de estudo.

A opção pela Engenharia Didática justifica-se pelo fato de que as técnicas tradicionais de pesquisa, muitas vezes, são insuficientes para abranger a complexidade do fenômeno didático, sobretudo, em nível de sala de aula (PAIS, 2011, p. 108). A Engenharia Didática caracteriza uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa e, cuja avaliação é baseada na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (ARTIGUE; DOUADY; MORENO, 1995, p. 37). Possibilita uma sistematização metodológica para a prática da pesquisa considerando as relações de dependência entre teoria e prática (PAIS, 2011, p. 99). Assim, torna-se importante ressaltar que a singularidade da Engenharia Didática não está nos seus objetivos e, sim, em suas características de funcionamento metodológico (MACHADO, 2008, p. 237).

A interpretação dos dados, segundo a metodologia de pesquisa Engenharia Didática, busca responder às questões de investigação, levando em consideração a complexidade dos fenômenos da sala de aula, desde a concepção, a realização, a observação e a análise das sequências de ensino (ARTIGUE; DOUADY; MORENO, 1995, p. 36). Para Pais (2011, p. 99, 103), a Engenharia Didática permite uma sistematização metodológica para a pesquisa levando em consideração teoria e prática, cuja avaliação é interna, circunscrita ao contexto da pesquisa realizada, ou seja, específicas de um lugar e de um determinado tempo.

A Engenharia Didática como metodologia de pesquisa tem seu processo delimitado em quatro fases: a fase 1 das análises preliminares; a fase 2 da concepção e análise *a priori* das situações didáticas; a fase 3 da aplicação da sequência didática e a fase 4 da análise *a posteriori* e a avaliação (PAIS, 2011, p. 101).

Essas afirmações reforçam a adequação da Engenharia Didática para a pesquisa aqui descrita, uma vez que está diretamente associada à intenção de colocar o aluno numa situação que envolve a produção do conhecimento (FREITAS, 2008, p. 87).

[2] A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa caracterizada por um experimento baseado em realizações didáticas em sala de aula, ou seja, baseada na concepção, implementação, observação e análise de sequências de ensino (ARTIGUE; DOUADY; MORENO, 1995, p. 36)

No presente estudo, os instrumentos de coleta de dados foram, essencialmente, observação participante, questionários, avaliação diagnóstica e registros da sequência didática.

A observação participante é um instrumento de coleta de dados que possibilita o pesquisador entrar no mundo social dos participantes do estudo e tem sido usada por pesquisadores com várias visões em relação à natureza da realidade social (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p. 201, 202). Para Severino (2007, p. 120), a observação participante é aquela em que o pesquisador, para observar os fenômenos, compartilha a vivência dos sujeitos pesquisados, participando, de forma sistemática e permanente, ao longo do tempo da pesquisa, das suas atividades. Moreira e Caleffe (2008, p. 202-205) afirmam que:

> a maioria das pesquisas qualitativas têm se concentrado nas interações verbais entre professores e alunos, que incluem questões como a influência do estilo de ensino do professor na aprendizagem do aluno. [...] a observação participante proporciona melhor maneira de obter uma imagem válida da realidade social. [...] proporciona estudos mais aprofundados que podem servir a vários propósitos úteis, em particular para gerar novas hipóteses. [...] poderá seguir direções inesperadas e, assim, proporcionar ao pesquisador novas visões e ideias.

Esse instrumento tem algumas limitações: frequentemente consome muito tempo; a pesquisadora pode apenas estudar grupos pequenos de observados; a pesquisadora tem que estar presente para que a pesquisa prossiga. Por considerar amostras muito pequenas e não atípicas, qualquer conclusão pode apenas ser aplicada ao grupo específico que está sendo estudado. É importante ressaltar que, durante a observação participante, nem sempre é possível o registro completo e preciso dos dados, como acontece na observação sistemática, o que pode levar a pesquisadora a distorções e omissões no registro dos dados (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p. 196, 205). Embora esse instrumento apresente limitações, Moreira e Caleffe (2008, p. 204) afirmam que, comparado com outros instrumentos de pesquisa, a observação participante é o instrumento em que o pesquisador menos impõe sua realidade ao mundo social que está tentando entender.

Complementando a observação participante, foram utilizados questionários[3] contendo questões fechadas[4] e abertas[5]. Esses instrumentos foram importantes para confirmar, ou refutar, aspectos considerados na análise dos resultados.

O questionário foi utilizado como instrumento de coleta de dados por permitir, entre outras vantagens, o anonimato nas respostas e a possibilidade de alta taxa de

[3] Conjunto de questões, sistematicamente articuladas, que se destinam a levantar informações escritas por parte dos sujeitos pesquisados, com vistas a conhecer a opinião sobre os assuntos em estudo (SEVERINO, 2007, p. 125).

[4] As respostas serão escolhidas dentre as opções predefinidas pelo pesquisador (SEVERINO, 2007, p. 124, 125).

[5] O sujeito pode elaborar as respostas, com suas próprias palavras, a partir de sua elaboração pessoal (SEVERINO, 2007, p. 125)

retorno, visto que estas foram aplicadas em momentos convenientes. Teve-se o cuidado de a pesquisadora não estar presente no momento da aplicação, objetivando um distanciamento entre a pesquisadora e o sujeito da pesquisa e, propiciando um ambiente favorável à produção de respostas mais francas e menos influenciadas por essa relação. Como todos os instrumentos, os questionários têm suas limitações e, uma delas, é a produção de dados superficiais que poderiam ser ampliadas com outras abordagens metodológicas (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p. 95-104).

Segundo Bloom, Hastings e Madaus (1983, p. 97), avaliação diagnóstica é aquela que, antes de qualquer instrução, dado à diversidade de saberes, o professor deve verificar o conhecimento prévio dos alunos com a finalidade de constatar os requisitos necessários de conhecimento ou habilidades imprescindíveis para a consecução dos objetivos da unidade planejada.

Em seguida, foram definidas as três grandes etapas da pesquisa: preparação, desenvolvimento e análise dos dados. Na *preparação*, foram definidas as subetapas da pesquisa: revisão bibliográfica; levantamento dos sujeitos da pesquisa; elaboração, distribuição e coleta do questionário inicial; elaboração e aplicação da avaliação diagnóstica e; elaboração da sequência didática e das variáveis locais da observação. A segunda etapa, *desenvolvimento*, consistiu na aplicação e registro da sequência didática e distribuição e coleta do questionário final. Na terceira etapa, *análise de dados*, os dados coletados foram analisados e avaliados considerando o referencial teórico e as variáveis locais descritas na análise *a priori*. Nas seções seguintes, busca-se descrever as duas primeiras etapas da pesquisa (preparação e o desenvolvimento), a terceira (análise dos dados) é apresentada no capítulo quatro (apresentação e análise dos dados).

Este capítulo se divide em três seções, sendo a primeira intitulada *Preparação: análises preliminares, concepções e análise a priori das situações didáticas*, a segunda intitulada *Desenvolvimento: Aplicação da sequência didática*. A primeira seção se subdivide em: i) análises preliminares; ii) concepções e análise *a priori* das situações didáticas e foi estruturada, tanto em relação ao conceito matemático de Polinômios quanto da análise do processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo. Levou em consideração o referencial teórico e as dimensões que definem o estudo de polinômios no sistema de ensino, tais como a epistemológica, a cognitiva e a pedagógica (PAIS, 2011, p. 101). Nesta seção, são descritas todas as variáveis de comando que são pertinentes à pesquisa, consideradas como entrave no processo de ensino e aprendizagem de polinômios e base para todos os procedimentos metodológicos adotados. São descritas, ainda, a seleção dos sujeitos da pesquisa; o processo de elaboração e aplicação dos instrumentos das coletas de dados. A segunda seção consiste na descrição do momento de contato da pesquisadora/observadora com os sujeitos da pesquisa/alunos ou observados explicitando os objetivos e as condições de realização da pesquisa, o estabelecimento do contrato didático, a aplicação da sequência didática e o registro das observações realizadas (MACHADO, 2008, p. 244, 245). Para Pais (2011, p. 102), a escolha do tipo de registro da sequência são as variáveis priorizadas na análise *a priori*, relacionando o conteúdo a ser estudado e as atividades a serem desenvolvidas para apreensão dos conceitos em questão. Essa é a etapa que garante a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica. A terceira e última seção consiste na descrição dos procedimentos de análise dos dados.

3.1 Preparação: análises preliminares, concepções e análise a priori das situações didáticas

Em uma investigação fundamentada na Engenharia Didática, a fase da concepção se baseia não só nas considerações sobre o quadro teórico e os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, mas também em um determinado número de análises preliminares que levam em consideração: a análise epistemológica dos conteúdos contemplados; a análise do ensino atual e seus efeitos; a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; a análise do campo das restrições ou entraves nos quais vai se situar a efetiva realização didática (ARTIGUE; DOUADY; MORENO, 1995, p. 38).

A etapa de preparação desta pesquisa foi dividida em nove subetapas a saber: i) revisão bibliográfica; ii) levantamento dos sujeitos da pesquisa; iii) elaboração do questionário inicial; iv) elaboração das variáveis globais da observação; v) elaboração da avaliação diagnóstica; vi) distribuição e coleta do questionário inicial; vii) aplicação da avaliação diagnóstica; viii) elaboração das variáveis locais da análise *a priori* da observação e; ix) elaboração da sequência didática.

3.1.1 Análises preliminares

A revisão bibliográfica iniciou-se com a definição do problema e se estendeu até a conclusão deste trabalho. A decisão pelo estudo de Polinômios se deu pela análise das restrições desse campo matemático, seja em relação ao aspecto algébrico, aritmético ou geométrico, levando em consideração as dimensões epistemológica, cognitiva e pedagógica.

Considerado o referencial teórico deste trabalho, constatou-se que, no plano epistemológico, a riqueza das interpretações no estudo dos Polinômios em seus diversos registros: algébrico (operações, divisibilidade, equações); geométrico (estudo de suas propriedades por meio de seus gráficos) e; numérico (cálculo aproximado de suas raízes, interpolação, etc.); nem sempre são exploradas no contexto da sala de aula (MORGADO et al., 2001, p. 76). Morgado et al. (2001, p. 50, 51) destacam que, no estudo de Polinômios, há um privilégio do aspecto algébrico em relação aos demais. Em seu plano cognitivo, consideram-se, não só a exploração dos diferentes registros, mas a importância da mobilidade permanente entre estes, ou seja, a transição entre os diferentes registros de representação semiótica no estudo de Polinômios. Considerando o aspecto didático, destaca-se a necessidade de reconstruir os procedimentos envolvidos na produção dos conhecimentos (BRASIL, 2006, p. 8), uma vez que as dificuldades no ensino de Polinômios se apresentam quando não se conhecem as suas raízes e muito menos o comportamento do seu gráfico, conforme destacam nas Orientações Curriculares de Matemática para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 74):

> Funções polinomiais mais gerais de grau superior a 2 podem ilustrar as dificuldades que se apresentam nos traçados de gráficos, quando não se conhecem os "zeros" da função. Casos em que a função polinomial se decompõe em um produto de funções polinomiais de grau 1 merecem ser trabalhados. Esses casos evidenciam a propriedade notável de que, uma vez se tendo identificado que o número c é um dos zeros da função polinomial $y = P(x)$, esta pode ser expressa como o produto do fator $(x - c)$ por outro polinômio de grau menor, por meio da divisão de P por $(x - c)$.

Uma vez destacados os principais aspectos a serem considerados no estudo de Polinômios e, paralelamente, à revisão bibliográfica, iniciou-se o procedimento de seleção dos participantes que contribuiriam na obtenção das respostas às questões a serem levantadas, levando em consideração o objeto de estudo que é Polinômios, o local de observação e o tempo disponível. Os sujeitos da pesquisa teriam, então, que estar cursando o quarto bimestre do terceiro ano do Ensino Médio, preferencialmente, em escolas públicas e já terem conhecimento de Polinômios.

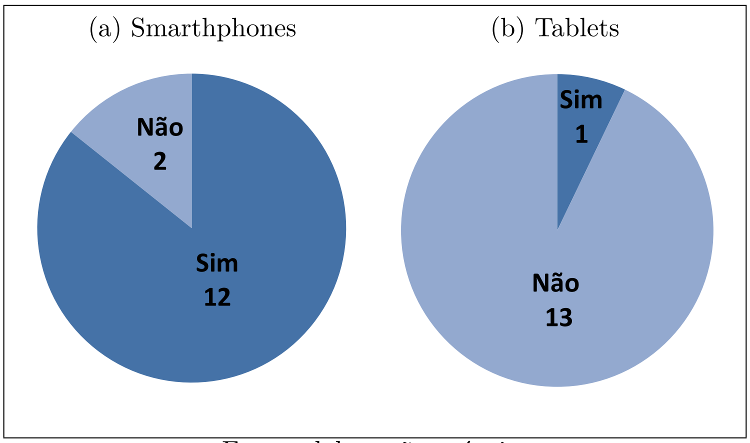
Optou-se por realizar a observação em uma escola estadual situada na zona urbana de Campos dos Goytacazes, na qual a pesquisadora não teve dificuldades em obter permissão para observar uma turma de 22 alunos, sendo que desses, apenas 19 frequentavam e sendo, majoritariamente, alunos do sexo masculino (63%). A decisão pela escola e turma foi determinada por uma pessoa-chave, a professora de Matemática da própria turma que, também, atua em uma outra instituição de ensino e, é colega de trabalho da observadora. Portanto, a escolha se deu por conveniência, visto que a pesquisadora não atuava na educação básica no momento da pesquisa.

Foi elaborado um questionário inicial, constante do Apêndice B, com o objetivo de levantar o perfil dos alunos, sujeitos da pesquisa, bem como sobre o uso de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, foram elaboradas as questões principais a serem abordadas na avaliação diagnóstica (Apêndice C) uma vez levantadas as definições e os teoremas (Apêndice A), requisitos imprescindíveis para a construção dos conceitos a serem abordados na pesquisa.

O questionário foi aplicado pela professora da turma, visto que Moreira e Caleffe (2008, p. 95) consideram importante que a pesquisadora não esteja presente quando o questionário está sendo preenchido. O referido instrumento de coleta de dados foi respondido por 17 alunos, porém foram analisadas as repostas de apenas 14 alunos, presentes a todos os encontros e resolvendo todas as atividades propostas e aqui identificados como sujeitos da pesquisa. Os alunos foram identificados pela letra maiúscula do alfabeto latino (A a S) e sendo considerados para análise os alunos A, B, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e P. Dos 14 alunos, sujeitos da pesquisa, 11 alunos têm entre 17 e 18 anos, tendo os demais 19, 20 e 21 anos, respectivamente. Dos 14, 10 são do sexo masculino. Um aspecto destacado no questionário é relativo à afirmação de que dos 14 alunos, 12 possuem *smarthphone* com sistema Android e apenas três possuem *tablet*.

No questionário, foram levantados dados acerca do uso pedagógico do *smarthphone* e do *tablet* pelos alunos, sujeitos da pesquisa, conforme apresentado na figura 2 em que se destacam que 12 alunos responderam que já utilizaram pedagogicamente o *smarthphone* e destes, 11 o usaram com a finalidade de realizar trabalhos por orientação do professor e para apoiar a resolução de exercícios e/ou atividades, sendo que todos os 12 consideraram essa experiência positiva. Em relação ao uso pedagógico dos *tablets*, apenas um aluno afirmou tê-lo utilizado com a finalidade de realizar trabalhos por orientação do professor.

Figura 2 – O uso pedagógico de *smarthphones* e *tablets* pelos alunos



Fonte: elaboração própria

Observou-se que, embora se tratando de uma escola pública, dos 14 alunos, sujeitos da pesquisa, 12 possuíam *smarthphone* e, além disso, desses, 11 já o utilizaram com finalidade pedagógica, o que é confirmado por Batista (2011, p. 19):

> A habilidade que os jovens têm para lidar com estas tecnologias, a popularização das mesmas e o desenvolvimento de aplicativos específicos são fatores que podem contribuir para introdução destes recursos nas práticas pedagógicas. A utilização destas tecnologias pode ser importante em escolas que tenham dificuldades relacionadas a laboratórios de informática ou por alunos que não possuam computadores em casa ou, ainda, para aqueles que precisam aproveitar seu tempo para estudar onde estiverem. Não se trata, no entanto, de optar pelos computadores ou pelos dispositivos móveis, e sim, de analisar criticamente o potencial educacional e motivacional destes dispositivos na educação de jovens.

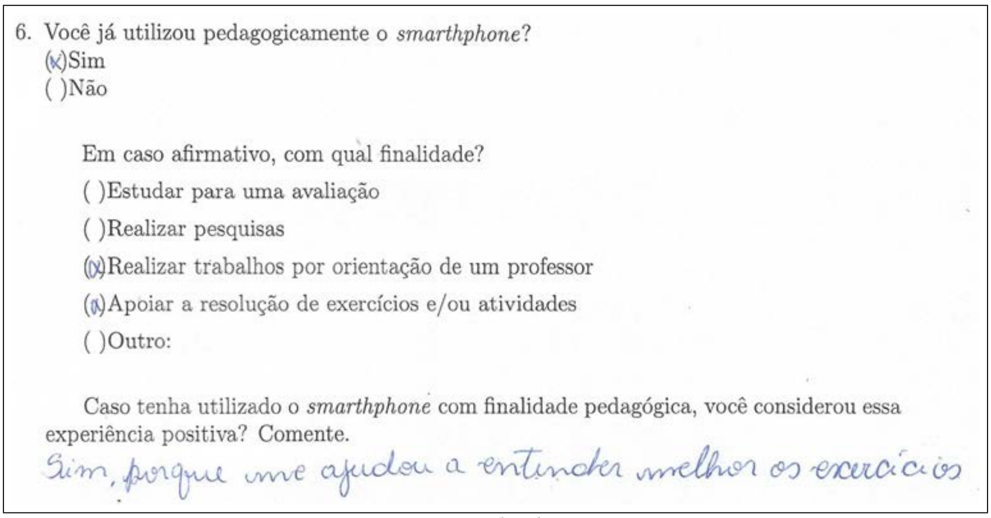
As tecnologias digitais (TD) passaram a fazer parte da cultura, tomando lugar nas práticas sociais e ressignificando as relações educativas (ALMEIDA; SILVA, 2011, p. 3). Pôde-se verificar, por meio do questionário e, constatado por Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 77), que a utilização das tecnologias móveis como *laptops*, telefones celulares ou *tablets* tem se popularizado consideravelmente nos últimos anos em todos os setores da sociedade e que, o uso dessas tecnologias já modificou a sala de aula, criando novas situações e transformando a inteligência coletiva. Moreira, Barcelos e Batista (2013, p. 1), ressaltam ainda, que:

> [...] apenas a inclusão de TD em escolas e a disponibilização de conteúdos na rede não garantem mudanças positivas no processo de ensino e aprendizagem. O momento e a forma como os professores adotam tecnologias são aspectos que influenciam, diretamente, na ocorrência, ou não, de melhorias nesse processo.

Portanto, estar conectado, saber ler e poder participar do mundo digital e da rede de comunicação são condições prévias e alimentadoras da liberdade - e por ela alimentadas (ALMEIDA, 2011, p. 11).

Com o objetivo de coletar outras informações, optou-se, na questão 6, por uma pergunta aberta para conhecer o porquê da escolha da finalidade de uso, entretanto, não se previu que apenas um aluno comentasse a respeito, conforme apresentado na figura 3 e confirmado por Moreira e Caleffe (2008, p. 101). Os referidos autores, Moreira e Caleffe (2008, p. 101), afirmam que, ao elaborarem questões abertas, a pesquisadora dá aos alunos a oportunidade de escreverem as razões pessoais acerca do tema, e que com isso, não deve desconsiderar a possibilidade de respostas breves que podem levantar mais questões.

Figura 3 – Resposta do aluno K referente ao uso pedagógico do *smarthphone*


6. Você já utilizou pedagogicamente o *smarthphone*?
(x)Sim
( )Não

Em caso afirmativo, com qual finalidade?
( )Estudar para uma avaliação
( )Realizar pesquisas
(x)Realizar trabalhos por orientação de um professor
(x)Apoiar a resolução de exercícios e/ou atividades
( )Outro:

Caso tenha utilizado o *smarthphone* com finalidade pedagógica, você considerou essa experiência positiva? Comente.
Sim, porque me ajudou a entender melhor os exercícios

Fonte: protocolo de pesquisa

Diante do exposto, e considerando a superficialidade das respostas, a pesquisadora arguiu a professora da turma a respeito da representatividade das respostas ao item sobre o uso pedagógico do *smarthphone* e, com isso, pôde verificar que as respostas procediam. A professora do componente curricular de Matemática relatou que havia utilizado um plotador gráfico denominado *Função de gráfico plotter*[6] para análise do comportamento dos gráficos das funções estudadas.

3.1.2 Concepções e análise a priori das situações didáticas

Conhecidas as restrições ou entraves acerca do estudo de Polinômios no Ensino Médio, sejam no seu aspecto epistemológico, cognitivo ou didático, julga-se necessário levantar algumas variáveis de comando pertinentes ao problema em estudo. Para facilitar a análise, Artigue, Douady e Moreno (1995, p. 42) consideram importante distinguir os tipos de variáveis de comando: as *variáveis macrodidáticas* ou *globais* e as *variáveis microdidáticas* ou *locais*. As *globais* dizem respeito à organização integral da Engenharia Didática e as *locais* dizem respeito à organização local da engenharia, ou seja, de uma sequência ou ainda, de uma fase dela. Essas variáveis são importantes, pois são articuladas e observadas em detalhes no decorrer da sequência didática.

Após as análises dos entraves no ensino de Polinômios, foram tomadas as primeiras decisões e, que dizem respeito às *variáveis globais*. Nesse caso, destacam-se:

1. desenvolvimento de um instrumento de análise dos requisitos e habilidades imprescindíveis para o estudo do comportamento gráfico de uma função polinomial, denominado neste estudo como avaliação diagnóstica;

2. utilização de aplicativos gráficos para *tablets*, optando-se pelo *xGraphing* por ser gratuito e bem avaliado, conforme apresentado no referencial teórico;

3. limitação da complexidade da pesquisa ao estudo das conversões entre os registros gráfico e algébrico e vice-versa;

4. exploração do trabalho em grupos;

5. elaboração da sequência didática, numa perspectiva de construção dos conceitos, que possibilitem investigar o comportamento dos gráficos de funções polinomiais quanto: ao grau do polinômio; à multiplicidade de suas raízes reais e às propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais;

6. elaboração de uma atividade de verificação, por meio de questões de Concursos Vestibulares, dos conceitos apreendidos com o estudo do comportamento do gráfico dos polinômios;

[6] Aplicativo gratuito para plotagem gráfica e calculadora matemática

7. levantamento, por meio de questionário, da percepção dos alunos a respeito do aplicativo *xGraphing*, das atividades desenvolvidas e da própria participação.

A partir da definição das principais dimensões a serem analisadas no estudo de Polinômios, foram delineadas as *variáveis locais* que dizem respeito ao planejamento específico da sequência didática, restrita a uma fase da pesquisa. É sobre o conjunto dessas variáveis que se inicia a análise *a priori* (PAIS, 2011, p. 101, 102).

A Sequência Didática, nesta pesquisa, é composta entre outros itens, de atividades denominadas por Atividade 1 (Apêndice D), Atividade 2 (Apêndice E), Atividade 3 (Apêndice F) e Atividade 4 (Apêndice G). Todas com a finalidade de observar situações de aprendizagem dos conceitos de polinômios (Quadro 3.1).

Quadro 3.1 – Sequência Didática

1) Conteúdo
Polinômios
2) Competência
Identificar as relações existentes entre a representação algébrica e gráfica dos polinômios.
3) Habilidades
1. Plotar gráficos no aplicativo para *tablets* denominado *xGraphing*; 2. Discriminar as variáveis cognitivas referentes: i. ao grau do polinômio; ii. ao sinal do coeficiente líder do polinômio; iii. ao termo independente do polinômio; iv. às raízes reais; v. à paridade da multiplicidade das raízes reais; vi. às raízes complexas não reais; vii. ao polinômio de grau ímpar e suas raízes reais.
4) Material necessário
11 *tablets*, projetor multimídia, aplicativo *xGraphing*, apostila com as atividades, quadro branco.

5) Procedimentos Metodológicos

1ª Etapa: Atividade 1

A Atividade 1 deve ocorrer em um encontro de 100 min com o objetivo de desenvolver as quatro primeiras habilidades descritas neste quadro, ou seja, as habilidades 1, 2i, 2ii e 2iii. A atividade deve ser realizada em pares, dos quais cada dupla[a] deve receber um *tablet*. A opção pelo trabalho em dupla se justifica pela possibilidade de um trabalho colaborativo e na troca de ideias na resolução das atividades. A pesquisadora deve ter um *tablet* ligado a um projetor multimídia, cuja finalidade é facilitar a visualização dos gráficos plotados e promover a discussão do tema. Ao entregar o *tablet*, os alunos devem ser orientados a ligá-lo e manipulá-lo de acordo com o seu interesse. Em seguida, devem ser distribuídas a todos os alunos presentes a apostila elaborada.

A apostila elaborada, dividida em 5 partes, tem em suas 1ª e 2ª partes o objetivo de apresentar o aplicativo *xGraphing*. Neste momento, os alunos devem ser orientados a identificarem na área de trabalho o ícone do *xGraphing* e tocarem para abri-lo. A pesquisadora deve apresentar o aplicativo, informando que o mesmo é gratuito e apresentando o endereço eletrônico em que pode ser obtido. Deve deixá-los manipular livremente por poucos minutos e, depois, solicitar que realizem a atividade exploratória (2ª parte da apostila). No momento em que os alunos estão manipulando livremente o aplicativo, a pesquisadora deve colocar os nomes dos alunos de cada dupla em etiquetas e colá-las nos respectivos *tablets*. Esse procedimento irá facilitar na identificação dos arquivos a serem criados pelos alunos.

Em seguida, deve solicitar que os alunos resolvam a 3ª parte da apostila, que é composta de 8 questões (1 a 8), cuja finalidade é fazer o aluno discriminar, uma a uma, as variáveis cognitivas (ou unidades significantes) e analisar, posteriormente, sua relação no comportamento do gráfico. Nessa parte da apostila, o aluno terá que discriminar as seguintes variáveis cognitivas: i) grau par e coeficiente líder positivo, ii) grau par e coeficiente líder negativo, iii) sinal do termo independente e verificar o comportamento no gráfico. Após concluir as questões, os gráficos devem ser plotados e o aluno deve capturar a tela[b]. Esse procedimento tem por objetivo formar um banco de dados para futuras análises pelo pesquisador.

A 4ª parte, composta de 8 questões (9 a 16), tem a finalidade de fazer o aluno discriminar as seguintes variáveis cognitivas: i) grau ímpar e coeficiente líder positivo, ii) grau ímpar e coeficiente líder negativo, iii) sinal do termo independente e o seu comportamento no gráfico. Nesta parte da apostila, os procedimentos são similares aos da parte anterior.

A 5ª parte, composta de duas questões (17 e 18), tem a finalidade de verificar se os alunos desenvolveram as habilidades propostas. Nessa parte, os alunos não devem utilizar o *tablet* para resolver os problemas, momento a ser utilizado pela pesquisadora para recolher os mesmos, tomando o cuidado de verificar se todos estão, devidamente, identificados.

Ao final, todas as atividades devem ser recolhidas e arquivadas para análise. Antes de aplicar a Atividade seguinte, a pesquisadora deve analisar as respostas para sanar possíveis dúvidas.

[a] A distribuição do *tablet* é feita de acordo com a relação aluno e *tablet*, visto que, quando sentados em trios eram entregues dois *tablets* para o grupo.

[b] Esta ação varia de acordo com a marca do *tablet* e, para tirar fotos da tela na marca utilizada nesta pesquisa, deve-se clicar, ao mesmo tempo, o botão Liga/Desliga e o botão (-) do volume.

2ª Etapa: Atividade 2
Ao início de cada encontro, devem ser discutidas as respostas das questões da Atividade anterior, por meio de questionamentos orais, numa atitude de observação contínua. Essa ação tem por objetivo gerir a progressão das aprendizagens de forma a contribuir para as estratégias a serem desenvolvidas nas atividades seguintes. A Atividade 2 deve ocorrer em um encontro de 100 min com o objetivo de desenvolver as habilidades 2iv e 2v neste quadro. A atividade deve ser realizada em pares, dos quais cada dupla deve receber um *tablet*. Neste momento, os *tablets* já podem receber a identificação dos alunos do grupo, conforme realizado na Atividade 1. Na Atividade 2, como na anterior, a pesquisadora também deverá ter um *tablet* para uso próprio, e este deve estar conectado a um projetor multimídia. Nesse momento, os alunos já estão mais familiarizados com o dispositivo e, portanto, não será necessário o reconhecimento. A pesquisadora deve pedir que liguem o dispositivo e, em seguida, devem ser distribuídas a todos os alunos presentes a apostila elaborada. A apostila elaborada é dividida em 3 partes: a 1ª parte é composta por uma questão contendo 10 itens de (a) a (i), cujo objetivo é fazer o aluno discriminar as variáveis cognitivas (ou unidades significantes) das raízes reais de multiplicidade ímpar, e analisar, posteriormente, sua relação no comportamento do gráfico. Nessa parte, bem como na seguinte, o aluno deve utilizar o aplicativo *xGraphing* para plotar os gráficos para análise e posterior resolução das questões. Os alunos, mais uma vez, devem ser orientados a tirarem fotos da tela antes de passarem para a outra parte da atividade. A 2ª parte, como a primeira, é composta por uma questão contendo 10 itens, porém estas raízes são de multiplicidade par e os procedimentos são os mesmos adotados na 1ª parte. Na 1ª e 2ª partes, todos os procedimentos de elaboração devem ser mediados pela pesquisadora, ficando a 3ª parte mais livre, estando a pesquisadora junto ao aluno, apenas quando solicitado. A 3ª parte é composta de duas questões (1 e 2) cuja finalidade é verificar se os alunos desenvolveram as habilidades propostas para essa atividade. Neste momento, os alunos não devem utilizar o *tablet*, momento em que a pesquisadora deve recolhê-los tomando o cuidado de verificar se foram identificados. Ao final, todas as atividades devem ser recolhidas e arquivadas para análise, tomando o mesmo procedimento de verificar possíveis dúvidas para serem sanadas.
3ª Etapa: Atividade 3
A Atividade 3 deve ocorrer em um encontro de 100 min com o objetivo de desenvolver as habilidades 2vi e 2vii descritas neste quadro. A atividade deve ser realizada com o auxílio do aplicativo *xGraphing* e, portanto, os alunos devem sentar em duplas. A pesquisadora deve entregar às duplas, os *tablets*, tomando o cuidado de realizar o procedimento de identificação. A pesquisadora deve solicitar que liguem o dispositivo e, nesse momento, deve ser distribuída a apostila. A apostila é dividida em 3 partes: a 1ª parte composta por três questões, sendo que as duas primeiras contêm sete itens de (a) a (g) e a terceira contém seis de (a) a (f), cujo objetivo é possibilitar o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes complexas não reais. A 2ª parte é composta de quatro questões, sendo as duas primeiras compreendidas por cinco e quatro itens, respectivamente, enquanto a questão 3 é de múltipla escolha com três alternativas, com apenas uma correta e, a última questão é discursiva. Essa parte tem por objetivo favorecer o reconhecimento de duas importantes propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais: as raízes não reais ocorrem aos pares e os polinômios de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes reais.

O *tablet* deve ser utilizado, apenas, para a resolução das questões das 1ª e 2ª partes, bem como a ocorrência da mediação da pesquisadora. Ao recolher os *tablets*, a pesquisadora deve ter o cuidado de verificar se foram corretamente identificados. A 3ª parte é composta por uma única questão, cuja finalidade é verificar se os alunos desenvolveram as habilidades propostas para a referida atividade. Nesse momento, mesmo sentados em duplas, os registros devem ser individuais. Ao final, todas as atividades devem ser recolhidas e arquivadas para análise.
4ª Etapa: Atividade 4
A Atividade 4 deve ocorrer em um encontro de 100 min com o objetivo de verificar se os alunos desenvolveram as habilidades descritas no item 2 deste quadro. Para isso, a apostila elaborada contém sete questões numeradas de 1 a 7, das quais três são discursivas e, as demais, de múltipla escolha com cinco alternativas, sendo apenas uma correta. As questões são de concursos vestibulares nacionais em conformidade com os objetivos propostos. Nesta atividade, os alunos não fazem uso do *tablet*. Devem realizar a atividade individualmente e a pesquisadora deve dar esclarecimentos apenas quando solicitada. À medida que os alunos forem concluindo, a apostila deve ser recolhida para análise.

Fonte: elaboração própria

A análise *a priori* compreende uma parte de descrição das *variáveis locais* e das características das situações didáticas a serem criadas e aplicadas aos alunos; uma parte de análise da importância dessa situação para o aluno, em função das possibilidades de ação e estratégias na construção da aprendizagem e; uma parte de previsões de comportamentos, aqui denominados hipóteses, na perspectiva do desenvolvimento do conhecimento pretendido pela aprendizagem (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p. 67).

Neste trabalho, foram definidas as seguintes hipóteses:

1. o uso do aplicativo para *tablets*, denominado *xGraphing*, contribui para o estudo do comportamento gráfico de Funções Polinomiais;

2. a Atividade 1 possibilita a identificação da paridade [7] e o sinal do coeficiente do termo de maior grau de um polinômio a partir da análise do comportamento do gráfico quando x assume valores muito pequenos ou muito grandes, bem como identificar o comportamento gráfico do termo independente de um polinômio;

3. a Atividade 2 possibilita o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes reais e, na vizinhança de suas raízes reais, quando estas têm multiplicidade par ou ímpar;

4. a 1ª parte da Atividade 3 permite o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes complexas;

[7] Propriedade de ser par ou de ser ímpar.

5. a 2 ª parte da Atividade 3 favorece o reconhecimento de duas importantes propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais: as raízes não reais ocorrem aos pares e os polinômios de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes reais;
6. os alunos são capazes de responder corretamente, no mínimo, a 70% das questões de Concursos Vestibulares propostas na Atividade 4.

Traçadas as variáveis globais e as hipóteses gerais da pesquisa, foi necessário construir uma avaliação diagnóstica (Apêndice C) para verificar se os alunos, sujeitos da pesquisa, possuíam os conhecimentos mínimos imprescindíveis para as novas aprendizagens (CALEJON; LUGLI, 2012, p. 59). Portanto, a avaliação diagnóstica foi elaborada visando a verificar as seguintes habilidades:

1. classificar expressões algébricas como *polinômios* ou *não polinômios*;
2. determinar o grau de polinômios;
3. identificar os termos desconhecidos de polinômios por meio do Teorema do Resto;
4. decompor polinômios em produtos de fatores mônicos a partir do Teorema de D'Alembert;
5. determinar as raízes, e suas respectivas multiplicidades, de polinômios em sua forma fatorada.

3.1.2.1 Avaliação Diagnóstica

A avaliação diagnóstica (Apêndice C) foi elaborada com base nas definições e teoremas constantes do Apêndice A deste trabalho, levando em consideração as habilidades apresentadas nesta seção e necessárias para o estudo. Nesta subseção, são descritas as etapas de aplicação e análise da avaliação diagnóstica.

A avaliação diagnóstica foi aplicada a 16 alunos da turma participante da pesquisa em 06 de novembro de 2014 das 7h às 8h40min, durante a aula de Matemática. A professora de Matemática da turma havia realizado, na mesma semana, uma revisão dos principais conceitos de Polinômios, pois a mesma relatou que os alunos da turma em questão, em sua maioria, não têm o hábito de estudar em casa, por isso em suas avaliações se torna necessária uma revisão. São considerados como sujeitos da pesquisa, apenas os 14 alunos que participaram de todas as etapas desse estudo, respondendo a todas as atividades propostas.

A questão 1, apresentada na figura 4 teve por objetivo avaliar se os alunos seriam capazes de identificar se as expressões algébricas apresentadas se classificavam como *polinômios* ou *não polinômios*.

Figura 4 – Questão 1 da Avaliação Diagnóstica

1. Classifique as expressões algébricas a seguir em **POLINÔMIOS** ou **NÃO POLINÔMIOS** no conjunto $\mathbb{C}[x]$. Justifique sua resposta quando classificar as expressões algébricas como não polinomiais.

   (a) $f(x) = 2ix^3 + 3x^2 + 1$

   (b) $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 - 1$

   (c) $g(x) = 3\sqrt{x} - 6x + 1$

   (d) $u(x) = 7$

   (e) $m(x) = 3x^{-2} + ix^{-1} - 1$

   (f) $n(x) = 7x^5 + 2x^3 - \frac{1}{x}$

   (g) $o(x) = 0x^3 + 0x^2$

Fonte: elaboração própria

O resultado da análise do número de acertos dos itens da questão 1 da Avaliação Diagnóstica estão apresentadas na tabela 1:

Tabela 1 – Acertos da questão 1 da Avaliação Diagnóstica

ITEM	QUANT. DE ACERTOS	DESCRIÇÃO DO ERRO
(a) $f(x) = 2ix^3 + 3x^2 + 1$	13	Um aluno classificou como *não polinômio*, pois não identificou a possibilidade dos números imaginários como coeficientes.
(b) $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 - 1$	10	Quatro alunos classificaram como *não polinômio*, um justificou por considerar, equivocadamente, que o x estava no denominador; um não reconheceu o $\frac{\pi}{4}$ como número; um justificou que o x estava junto à fração e o outro justificou que era porque o número estava negativo.
(c) $g(x) = 3\sqrt{x} - 6x + 1$	13	Um aluno classificou como *polinômio* equivocadamente, mas não justificou sua resposta, desconsiderando o que os demais perceberam: "o x não pode estar dentro da raiz".
(d) $u(x) = 7$	12	Dois alunos classificaram como *não polinômio*, desconsiderando o polinômio constante.
(e) $m(x) = 3x^{-2} + ix^{-1} - 1$	11	Três alunos classificaram como *polinômio* não reconhecendo o que os demais apresentaram na justificativa, ou seja, que o expoente não pode assumir valores negativos.
(f) $n(x) = 7x^5 + 2x^3 - \frac{1}{x}$	11	Três alunos classificaram como *polinômio*. Dos 11, apenas 9 justificaram, indicando que o x não pode estar no denominador.
(g) $o(x) = 0x^3 + 0x^2$	13	Apenas um aluno classificou como *não polinômio*, não reconhecendo o polinômio identicamente nulo.

Fonte: elaboração própria

A questão 1 foi elaborada levando em consideração os possíveis entraves na identificação do Polinômio, confirmando as previsões para os possíveis raciocínios realizados pelos alunos. Foi diagnosticado que a maioria dos alunos sabia identificar um polinômio, visto que houve um rendimento de aproximadamente 85%[8] da questão 1.

A questão 2 teve por objetivo avaliar se o aluno seria capaz de determinar o grau de um polinômio constante, nulo ou na sua forma fatorada, bem quando fosse necessário desenvolver os termos para chegar à sua forma mais simples. Isso pode ser melhor verificado, analisando os itens que compõem a questão 2 (Figura 5).

[8] O valor do rendimento (R) foi dado por $R = \dfrac{0,93 \cdot 3 + 0,86 + 0,79 \cdot 2 + 0,71}{7} \cong 0,849$

Figura 5 – Questão 2 da Avaliação Diagnóstica

2. Determine o grau dos seguintes polinômios:

(a) $f(x) = x^2 - (x+2)^2 + x$

(b) $g(x) = 7$

(c) $h(x) = x^6 - 4x^2 + 3x^7$

(d) $n(x) = 0$

(e) $p(x) = 2(x-1)^7(x+2)^5$

Fonte: elaboração própria

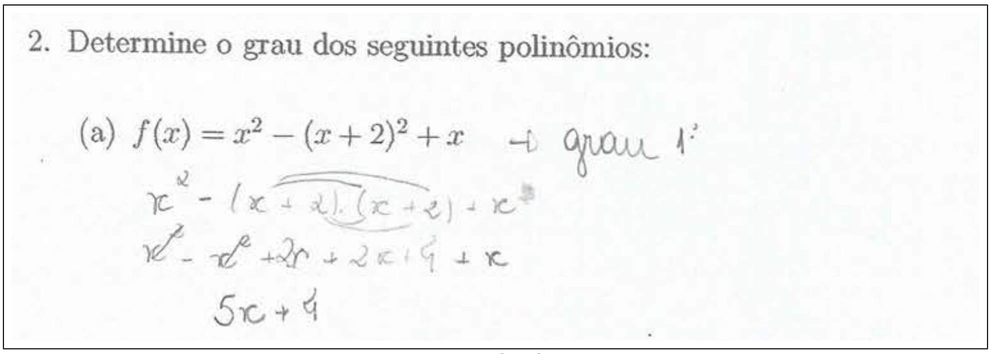
Alguns comportamentos eram esperados em cada um dos itens propostos: no item (a), esperava-se que o aluno percebesse que deveria desenvolver a potência da soma e simplificar; no item (b), esperava-se que o aluno soubesse que o grau de um polinômio constante é zero; no item (c), esperava-se que o aluno percebesse que o grau independe da posição dos termos; no item (d), esperava-se que o aluno identificasse que o polinômio era nulo e, portanto, não se define o grau de um polinômio nulo; no item (e), esperava-se que o aluno percebesse que o polinômio estava na sua forma fatorada e, portanto, o grau era a soma dos expoentes. A análise das respostas se encontra na Tabela 2.

Tabela 2 – Acertos da questão 2 da Avaliação Diagnóstica

ITEM	QUANT. DE ACERTOS	DESCRIÇÃO DO ERRO
(a) $f(x) = x^2 - (x+2)^2 + x$	3	Um dos três alunos que acertaram o item (a) encontrou a resposta correta por meio de uma resolução errada (Figura 6). Pôde-se verificar que o mesmo desconsiderou o oposto de todo o resultado da potência da soma, realizando a operação apenas para o primeiro termo. Sete alunos responderam que o grau era 2 e quatro alunos que o grau era 4, mostrando que somaram as potências como se o polinômio estivesse em sua forma fatorada.
(b) $g(x) = 7$	6	Cinco alunos responderam que o grau de um polinômio constante é 1; um respondeu que o grau era 5; outro que o grau era 7, o valor do termo independente e um não respondeu.
(c) $h(x) = x^6 + -4x^2 1 + 3x^7$	7	Três alunos responderam que o grau era 6 mostrando que consideraram que o termo de maior grau é o primeiro (Figura 7); um não respondeu; um respondeu que o grau era 15, ou seja, somou os expoentes como havia realizado também no item (a); outro respondeu 3, o coeficiente do termo de maior grau e outro 2.
(d) $n(x) = 0$	7	Cinco alunos responderam que o grau do polinômio nulo era zero e dois identificaram como grau 1.
(e) $p(x) = 2(x-1)^7(x+2)^5$	7	Quatro responderam que o grau era 7, considerando apenas o expoente do primeiro fator que era de maior grau; um respondeu 2 e outro 4 e um deixou em branco.

Fonte: elaboração própria

Figura 6 – Resolução incorreta do aluno E para a questão 2, item (a) da Avaliação Diagnóstica



2. Determine o grau dos seguintes polinômios:

(a) $f(x) = x^2 - (x+2)^2 + x$ → grau 1°

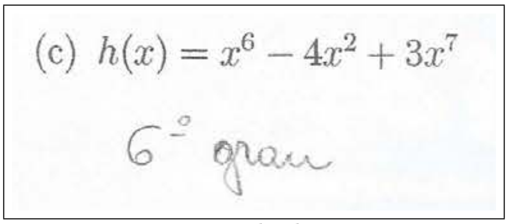
$x^2 - (x+2).(x+2) + x$

$x^2 - x^2 + 2x + 2x + 4 + x$

$5x + 4$

Fonte: protocolo de pesquisa

Figura 7 – Resolução incorreta do aluno H para a questão 2, item (c) da Avaliação Diagnóstica



(c) $h(x) = x^6 - 4x^2 + 3x^7$

6° grau

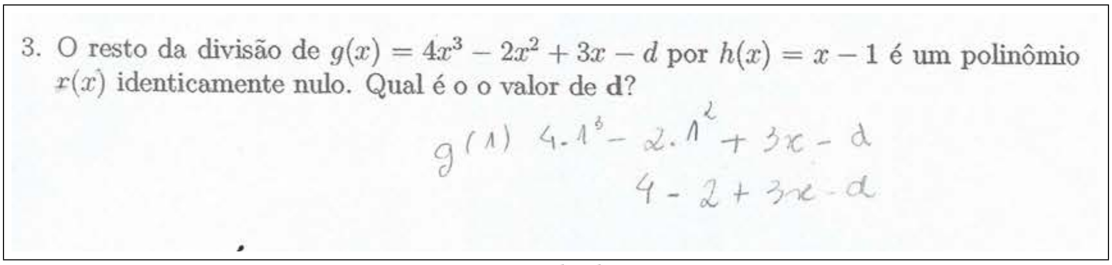
Fonte: protocolo de pesquisa

Foi diagnosticado que, aproximadamente, 43% dos alunos não reconhecem que o grau de um polinômio constante é zero e, metade não reconhece que o grau de um polinômio nulo é indeterminado. Vale ressaltar que o nível de acerto em relação às respostas relativas ao grau de um polinômio em sua forma geral foi a mesma obtida para o polinômio em sua forma fatorada, 50%. Avaliando de forma global, pode-se afirmar que a turma teve uma aproveitamento inferior ao esperado, visto que o rendimento foi de aproximadamente 43%[9].

A questão 3 teve por objetivo identificar se os alunos utilizariam o Teorema do Resto para resolver a questão, porém dos 14 alunos que responderam à avaliação diagnóstica, apenas um tentou substituir o valor de x por 1, esquecendo-se de substituir um dos valores de x e não igualando a 0. Portanto, não se pode afirmar que tenha utilizado o conceito do Teorema do Resto, conforme pode ser verificado na figura 8. Dos 13 restantes, 11 deixaram a questão em branco; dois usaram a divisão de Polinômios. Apenas um dos dois alunos que usaram o método das chaves para a divisão de polinômios encontrou o resultado correto (Figura 9).

9 O valor do rendimento (R) foi obtido a partir do cálculo $R = \dfrac{0,21 + 0,42 + 3 \cdot 0,5}{5} \cong 0,426$

Figura 8 – Resolução do aluno A para a questão 3 da Avaliação Diagnóstica



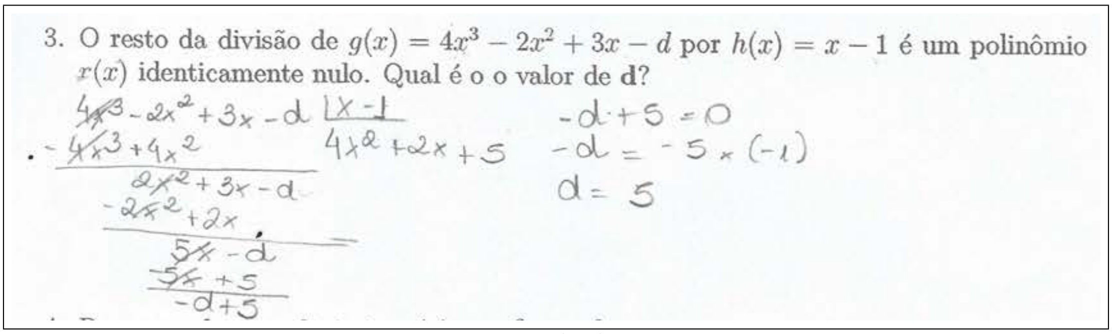
3. O resto da divisão de $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - d$ por $h(x) = x - 1$ é um polinômio $r(x)$ identicamente nulo. Qual é o o valor de **d**?

$g(1)\ 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3x - d$

$4 - 2 + 3x - d$

Fonte: protocolo de pesquisa

Figura 9 – Resolução do aluno J para a questão 3 da Avaliação Diagnóstica



3. O resto da divisão de $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - d$ por $h(x) = x - 1$ é um polinômio $r(x)$ identicamente nulo. Qual é o o valor de **d**?

$4x^3 - 2x^2 + 3x - d \quad | \underline{x - 1}$

$-4x^3 + 4x^2 \quad 4x^2 + 2x + 5$

$2x^2 + 3x - d$

$-2x^2 + 2x$

$5x - d$

$-5x + 5$

$-d + 5$

$-d + 5 = 0$

$-d = -5 \times (-1)$

$d = 5$

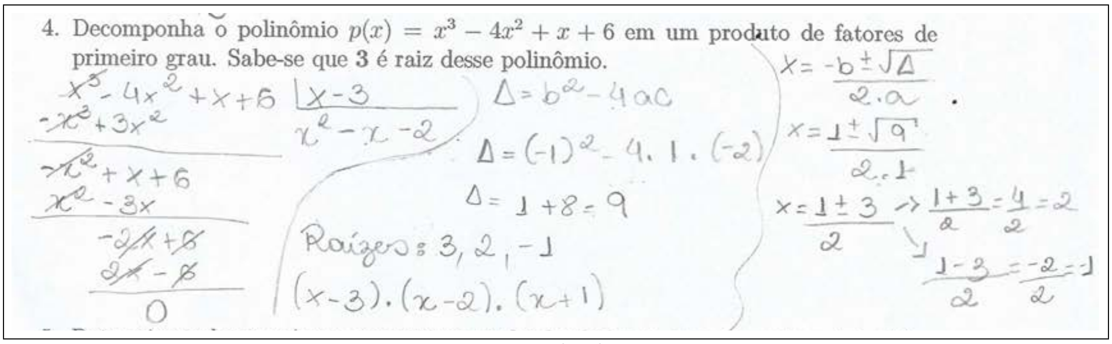
Fonte: protocolo de pesquisa

Foi diagnosticado que os alunos não se lembraram do Teorema do Resto, embora fosse de conhecimento da turma, visto que a professora apresentou todo o conteúdo trabalhado, por meio do caderno de um aluno. Embora fosse apenas necessário encontrar $g(1) = 0$ para determinar o valor de d, foi considerado correto o cálculo elaborado pelo aluno J e, portanto, a turma obteve um rendimento de, aproximadamente, 7%[10] nessa questão.

A questão 4 tinha por objetivo verificar se os alunos seriam capazes de decompor o polinômio em um produto de fatores de primeiro grau, conhecendo-se apenas uma de suas raízes. Verificou-se que 10 alunos não responderam; um aluno esboçou o início de uma divisão de polinômios identificando corretamente dividendo e divisor; um esboçou o início do cálculo, usando o dispositivo de Briot-Ruffini; três realizaram a divisão pelo método das chaves sendo que, dois de forma incompleta e apenas um aluno concluiu corretamente a divisão, encontrando as raízes do polinômio e os fatores solicitados esquecendo-se, apenas, de igualar a $p(x)$ (Figura 10).

[10] O valor do rendimento (R) foi obtido a partir do cálculo $R = \dfrac{1}{14} \cong 0,071$

Figura 10 – Resolução do aluno J para a questão 4 da Avaliação Diagnóstica


4. Decomponha o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ em um produto de fatores de primeiro grau. Sabe-se que **3** é raiz desse polinômio.

$x^3 - 4x^2 + x + 6 \,|\, x-3$

$-x^3 + 3x^2 \qquad x^2 - x - 2$

$-x^2 + x + 6$

$x^2 - 3x$

$-2x + 6$

$2x - 6$

0

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 . 1 . (-2)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

Raízes: 3, 2, -1

$(x-3).(x-2).(x+1)$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2.1}$

$x = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

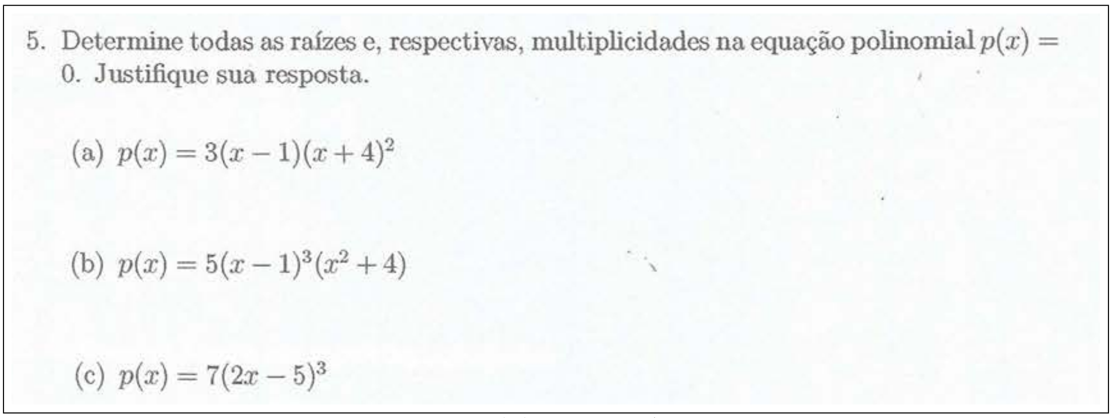
$\frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Fonte: protocolo de pesquisa

A partir da análise das respostas da questão 4, foi diagnosticado que a questão teve um rendimento de, aproximadamente, 7%[11]. Portanto, a maioria dos alunos não é capaz de decompor o polinômio em um produto de fatores de primeiro grau, conhecendo-se uma de suas raízes.

A questão 5 (Figura 11) teve por objetivo avaliar se os alunos seriam capazes de determinar as raízes dos Polinômios em sua forma fatorada e indicar as multiplicidades de cada uma delas.

Figura 11 – Questão 5 da Avaliação Diagnóstica


5. Determine todas as raízes e, respectivas, multiplicidades na equação polinomial $p(x) = 0$. Justifique sua resposta.

(a) $p(x) = 3(x-1)(x+4)^2$

(b) $p(x) = 5(x-1)^3(x^2+4)$

(c) $p(x) = 7(2x-5)^3$

Fonte: elaboração própria

O resultado da análise do número de acertos dos itens da questão 5 da Avaliação Diagnóstica estão apresentadas na Tabela 3:

[11] O valor do rendimento (R) foi obtido a partir do cálculo $R = \frac{1}{14} \cong 0,071$.

Tabela 3 – Acertos da questão 5 da Avaliação Diagnóstica

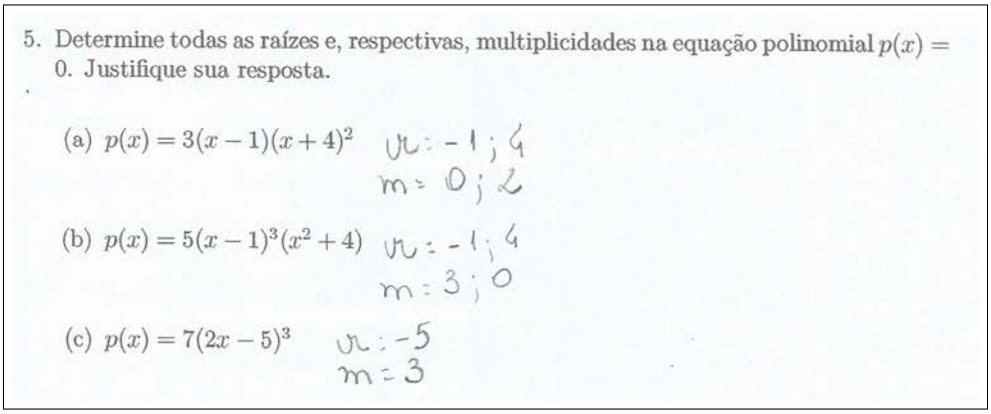
ITEM	QUANT. DE ACERTOS	DESCRIÇÃO DO ERRO
(a) $p(x) = 3(x-1)(x+4)^2$	8	Um aluno acertou as raízes dos polinômios, porém errou a multiplicidade, afirmando que era 3, levando a observadora a entender que tenha somado os expoentes e considerado o grau do polinômio como a multiplicidade. Quatro deixaram a questão em branco e um aluno, apenas, respondeu de forma equivocada que as raízes eram -1 e 4, exatamente o oposto das raízes e as multiplicidades 0 e 2, assim demonstrando não identificar que na ausência do expoente, este seria o grau 1.
(b) $p(x) = 5(x-1)^3(x^2+4)$	0	Verificou-se que os mesmos 9 alunos que acertaram as raízes do item (a) responderam que as raízes eram 1 e -4, não observando que, no item (b), o fator (x^2+4) não era de 1º grau. Os mesmos quatro alunos que deixaram em branco o item (a), deixaram o item (b) e, o estudante que respondera o oposto da raiz, repetiu o mesmo erro.
(c) $p(x) = 7(2x-5)^3$	0	Verificou-se que nenhum aluno respondeu que a raiz era $\frac{5}{2}$ no item (c), não identificando que o fator não era mônico, sendo que 3 alunos acertaram a multiplicidade da raiz, respondendo corretamente que era 3. Os mesmos quatro alunos que deixaram em branco o item (a) e (b), deixaram o item (c).

Fonte: elaboração própria

Ao realizar a análise do erro relativo à multiplicidade do fator de 1º grau realizada pelo aluno E, porque os considerou de grau 0 (Figura 12) , verificou-se que nas habilidades avaliadas relativas ao grau do polinômio, o grau 1 não foi explorado, ficando aqui como sugestão para futuras pesquisas. A partir da análise dos erros e acertos da questão 5, pode-se afirmar que o rendimento médio nesta questão foi de 19%[12]

[12] O valor do rendimento (R) foi obtido a partir do cálculo $R = \dfrac{0,57+0+0}{3} \cong 0,19$.

Figura 12 – Resolução do aluno E para a questão 5 da Avaliação Diagnóstica


5. Determine todas as raízes e, respectivas, multiplicidades na equação polinomial $p(x) = 0$. Justifique sua resposta.

(a) $p(x) = 3(x-1)(x+4)^2$ r: -1 ; 4
m= 0 ; 2

(b) $p(x) = 5(x-1)^3(x^2+4)$ r: -1 ; 4
m: 3 ; 0

(c) $p(x) = 7(2x-5)^3$ r: -5
m= 3

Fonte: protocolo de pesquisa

Considerando a avaliação dos erros e acertos apresentados nas questões e realizando uma análise global da Avaliação Diagnóstica, considerou-se uma aproveitamento aproximado de 32%[13]. Embora os alunos já tenham estudado sobre Polinômios e, inclusive, a professora tenha realizado uma revisão com os alunos, a avaliação permitiu perceber a existência de lacunas, o que torna o trabalho importante para o processo de ensino e aprendizagem do tema em questão. Cabe ressaltar ainda que, após análise das respostas, um pouco menos da metade conseguiu identificar o grau do polinômio em sua forma fatorada e, um pouco mais da metade dos alunos conseguiu identificar corretamente as raízes e suas multiplicidades quando o polinômio se apresenta em fatores mônicos de 1º grau. Portanto, a partir dessa análise, a pesquisadora decidiu privilegiar em seu estudo, os polinômios apresentados em forma de fatores mônicos de 1º grau.

A avaliação diagnóstica teve por objetivo identificar requisitos de certos conceitos necessários para a compreensão dos novos conhecimentos de Polinômios a serem explorados nesta pesquisa. Numa pesquisa em que se privilegia a compreensão e não os resultados certos, é importante buscar procedimentos que permitam compreender o fenômeno a ser estudado (BORBA; ARAÚJO, 2006, p. 44). Na análise das resposta dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si, mas o modo em que o aluno se apropria do conhecimento, o que surge na produção escrita evidenciando facilidades e/ou dificuldades no processo de ensino e aprendizagem (CURY, 2007, p. 63).

A análise dos resultados da avaliação diagnóstica, sejam os erros, acertos e até mesmo a ausência de respostas, auxiliou a pesquisadora a aprofundar algumas questões, sugerindo mudanças na concepção da sequência didática a ser aplicada e na forma como as observações seguintes seriam realizadas. Uma das observações que mereceram ser destacadas foi a decisão por trabalhar, preferencialmente, com polinômios em sua forma fatorada, visto que facilita a identificação das raízes reais.

[13] O valor do aproveitamento (A) foi obtido por $A = \dfrac{0,85 + 0,43 + 0,07 \cdot 2 + 0,19}{5} \cong 0,322$.

3.1.2.2 A Sequência Didática: análise a priori

Os procedimentos investigativos na Matemática, denominados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 10) como investigações matemáticas, envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas e, para os referidos autores, investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento e, na Matemática, como em qualquer outro componente curricular, o envolvimento do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

3.1.2.2.1 Análise a priori da Atividade 1

A atividade 1 foi, inicialmente, estruturada em 3 partes: a 1ª parte correspondente ao reconhecimento do aplicativo *xGraphing*; a 2ª parte, com atividades exploratórias utilizando o aplicativo *xGraphing* e a 3ª parte, contendo atividades de interpretação do comportamento dos gráficos das funções polinomiais, a partir das variações das unidades significantes, como o grau do polinômio e o sinal do coeficiente dominante, conforme mencionado no quadro 3.1. A Atividade 1, em sua versão preliminar (Apêndice I), foi aplicada, em 05 de novembro de 2014, a duas professoras de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino a fim de verificar a adequação das atividades pedagógicas a seus objetivos e ao público alvo. Para, a seguir, realizar as melhorias que se fizerem necessárias, para aplicá-las a alunos do Ensino Médio. As alterações sugeridas no teste exploratório tiveram por objetivo separar as unidades significantes, ou seja, as variáveis cognitivas a serem investigadas, tais como o grau do polinômio e o sinal do coeficiente líder, de forma que cada variação fosse estudada separadamente, fazendo variar uma de cada vez, pois essas estavam todas em uma única questão.

A Atividade 1, após o teste exploratório, foi reestruturada e sua versão final (Apêndice D) foi dividida em cinco partes, considerando que, em cada uma delas, as atividades propostas tiveram um objetivo específico, ou seja, uma habilidade específica a ser desenvolvida.

A 1ª e 2ª partes da Atividade 1 foram estruturadas de forma a apresentar o aplicativo para *tablets* denominado *xGraphing*. Primeiramente, foi apresentado ao aluno que *xGraphing* é um aplicativo para dispositivos com sistema operacional Android, gratuito, desenvolvido pela empresa Propane e que possibilita plotagem de gráficos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e que se encontra disponível em português, no endereço eletrônico:

<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pierwiastek.xgraphing&hl=pt_BR>

Foi apresentado, ainda, que para utilizar o aplicativo *xGraphing*, quando o mesmo já está instalado no dispositivo móvel que, no caso deste estudo, é o *tablet*, o aluno teria que tocar no ícone (Figura 13) na área de trabalho (Figura 14) do *tablet*.

Figura 13 – Ícone do *xGraphing*

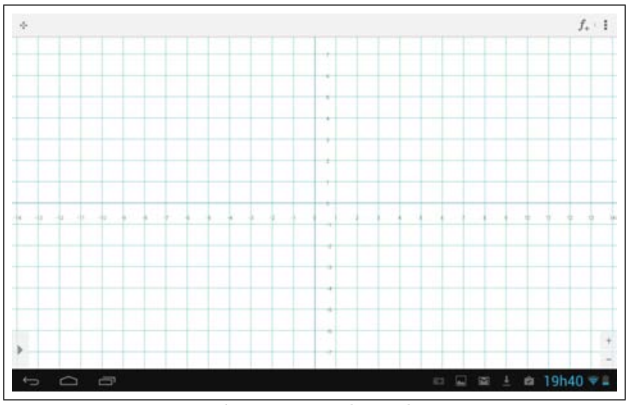
Fonte: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pierwiastek.xgraphing&hl=pt_BR>

Figura 14 – Área de Trabalho do *tablet*

Fonte: tela capturada pela autora

Ao tocar o ícone do *xGraphing* na área de trabalho, o aluno acessa a tela inicial apresentada na figura 15.

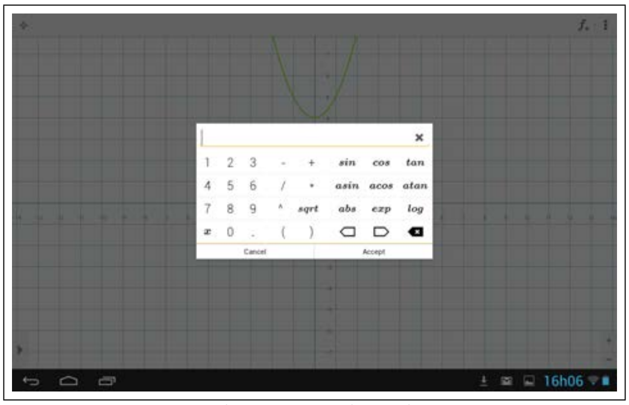
Figura 15 – Tela Inicial do Aplicativo *xGraphing*



Fonte: tela capturada pela autora

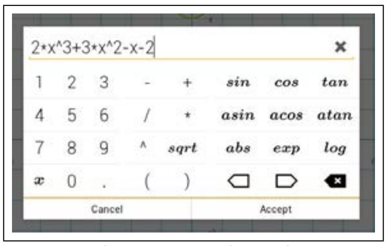
Os alunos foram deixados livres para manipular a ferramenta da forma que quisessem e, depois, por meio de atividades direcionadas, conheceram algumas funções das ferramentas do *xGraphing*, necessárias para a resolução das futuras atividades, tais como os comandos da multiplicação e da potência no momento da digitação (Figura 16), a plotagem de gráficos por meio de pontos determinados com o toque na tela ou pela lei de formação como, por exemplo, digitar $2x^3 + 3x^2 - x - 2$ (Figura 17) e solicitar a plotagem.

Figura 16 – Tela capturada do *xGraphing* para edição



Fonte: tela capturada pela autora

Figura 17 – Edição no *xGraphing* do polinômio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 2$



Fonte: tela capturada pela autora

A 3ª parte foi elaborada com a finalidade de ampliar os conhecimentos de polinômios por meio da análise do comportamento do gráfico de um polinômio, de grau par, para valores de x tais que $|x|$ fosse um número suficientemente grande ou suficientemente pequeno. As atividades propostas nessa parte foram divididas em dois momentos: o primeiro para o estudo do comportamento do gráfico de polinômios de grau par com o coeficiente do termo de maior grau positivo e o segundo para o estudo do comportamento do gráfico de polinômios de grau par com o coeficiente do termo de maior grau negativo. Foi esperado, nessa etapa, que o aluno compreendesse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$:

1. se n é par então, para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n, ou seja, quando $a_n > 0$, $p(x)$ assume valores positivos tanto para valores de x muito grandes, quanto para valores de x muito pequenos e, quando $a_n < 0$, $p(x)$ assume valores negativos tanto para valores de x muito grandes quanto para valores de x muito pequenos;

2. os termos independentes representam os valores de $p(x)$ quando $x = 0$, ou seja, o gráfico de $p(x)$ intersecta o eixo y no ponto de abscissa 0 e ordenada igual ao termo independente.

A 4ª parte foi elaborada com a finalidade de ampliar os conhecimentos de polinômios por meio da análise do comportamento do gráfico de um polinômio, de grau ímpar, para valores de x tais que $|x|$ assume valores suficientemente grandes ou suficientemente pequenos. As atividades propostas nessa parte foram divididas em dois momentos: o primeiro para o estudo do comportamento do gráfico de polinômios de grau ímpar com o coeficiente do termo de maior grau positivo e o segundo para o estudo do comportamento do gráfico de polinômios de grau ímpar com o coeficiente do termo de maior grau negativo. Foi esperado, nessa etapa, que o aluno compreendesse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$: se n é ímpar então, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos de x muito pequenos, ou seja, quando $a_n > 0$, $p(x)$ assume valores positivos para valores de x muito grandes e negativo para valores de x muito pequenos e, quando $a_n < 0$, $p(x)$ assume valores negativos para valores de x muito grandes e positivo para valores de x muito pequenos.

A 5ª parte foi elaborada com a finalidade de verificar a aprendizagem dos conceitos relativos ao comportamento do gráfico das funções polinomiais quanto ao sinal do coeficiente do termo de maior grau, quanto ao grau do polinômio, para valores de x tais que $|x|$ é um número suficientemente grande ou suficientemente pequeno. Foi esperado, nessa etapa, que o aluno verificasse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$:

1. se n é par então, para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n, ou seja, quando $a_n > 0$, $p(x)$ assume valores positivos tanto para valores de x muito grandes quanto para valores de x muito pequenos e, quando $a_n < 0$, $p(x)$ assume valores negativos tanto para valores de x muito grandes quanto para valores de x muito pequenos;

2. os termos independentes representam os valores de $p(x)$ quando $x = 0$, ou seja, o gráfico de $p(x)$ intersecta o eixo y no ponto de abscissa 0 e ordenada igual ao termo independente;

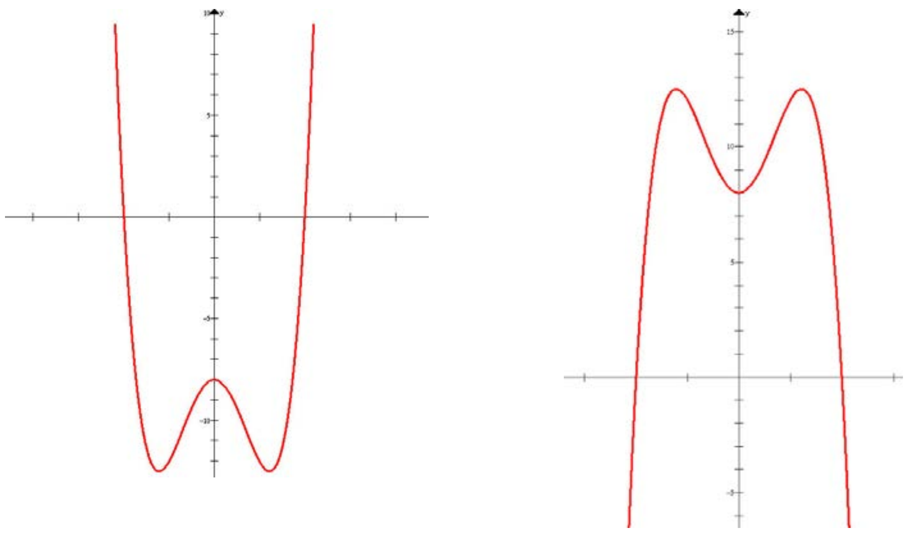
3. se n é ímpar então, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos muito grandes, em módulo, de x, ou seja, quando $a_n > 0$, $p(x)$ assume valores positivos para valores de x muito grandes e negativo para valores de x muito pequenos e, quando $a_n < 0$, $p(x)$ assume valores negativos para valores de x muito grandes e positivo para valores de x muito pequenos.

A figura 18 ilustra o comportamento do gráfico de polinômios de grau par (n é par) com coeficientes dominantes positivo (a) e negativo (b) ($a_n > 0$ ou $a_n < 0$).

Figura 18 – Registro gráfico das funções polinomiais $p(x) = 2(x-2)(x+2)(x^2+1)$ e $g(x) = -2(x-2)(x+2)(x^2+1)$

(a) $p(x)$ de grau par ($n = 4$) e coeficiente líder positivo ($a_n = 2 > 0$)

(b) $g(x)$ de grau par ($n = 4$) e coeficiente líder negativo ($a_n = -2 < 0$)



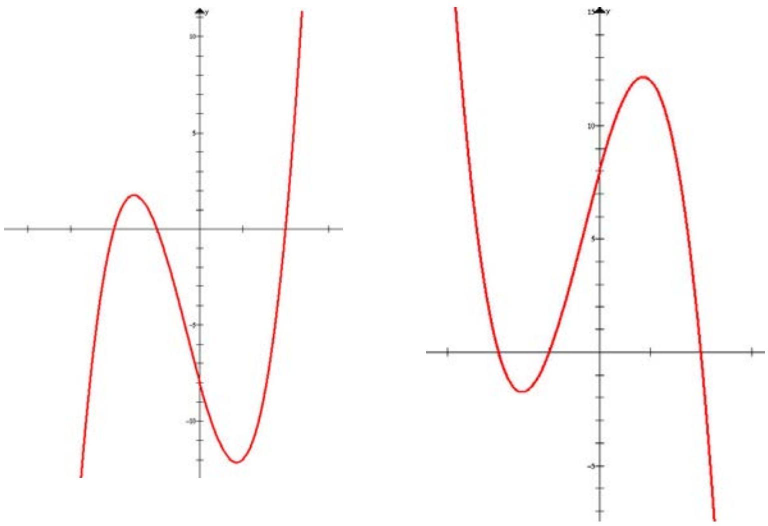
Fonte: elaboração própria

A figura 19 ilustra o comportamento do gráfico de polinômios de grau ímpar (n é ímpar) com coeficientes dominantes positivo (a) e negativo (b) ($a_n > 0$ ou $a_n < 0$).

Figura 19 – Registro gráfico das funções polinomiais $f(x) = 2(x-2)(x+2)(x+1)$ e $h(x) = -2(x-2)(x+2)(x+1)$

(a) $f(x)$ de grau ímpar ($n = 3$) e coeficiente líder positivo ($a_n = 2 > 0$)

(b) $h(x)$ de grau ímpar ($n = 3$) e coeficiente líder negativo ($a_n = -2 < 0$)



Fonte: elaboração própria

Observando as figuras 18 e 19, é possível identificar o ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos y. Será representado, aqui, apenas a interpretação geométrica para o polinômio $p(x)$. Para isso, será necessário desenvolver a expressão $p(x) = 2(x-2)(x+2)(x^2+1)$:

$$p(x) = 2(x-2)(x+2)(x^2+1) = 2(x^2-4)(x^2+1) = 2(x^4-3x^2-4)$$
$$p(x) = 2x^4 - 6x^2 - 8$$

Sendo o termo independente igual a -8, identifica-se no gráfico de $p(x)$ que esse intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -8)$.

Vale ressaltar que todas as funções polinomiais de que tratam a Atividade 1 e a 2 são da forma:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
$$ou$$
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

3.1.2.2.2 Análise a priori da Atividade 2

A atividade 2 foi estruturada em 3 partes, tomando-se o cuidado de trabalhar a variação das unidades significantes uma de cada vez. A Atividade 2, em sua versão preliminar (Apêndice J), foi aplicada às mesmas professoras de Matemática que realizaram o teste exploratório da Atividade 1. O teste da Atividade 2 aconteceu em 07 de novembro de 2014 e, após o mesmo, a atividade sofreu pequenas alterações como, na questão 1 da versão preliminar, a pesquisadora tinha explorado apenas três polinômios com fatores mônicos de grau 1. Foi sugerido que a questão tivesse quatro polinômios e que alguns desses possuíssem raízes reais de multiplicidade superior a 1.

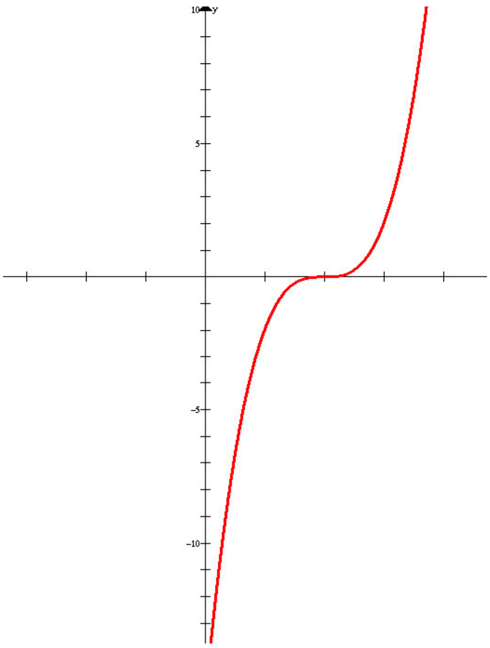
A Atividade 2, após o teste exploratório, foi reestruturada e sua versão final (Apêndice E), permaneceu dividida em três partes, considerando que, em cada uma delas, as atividades propostas tiveram um objetivo específico, ou seja, uma habilidade específica a ser desenvolvida.

A 1ª parte teve por objetivo favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes reais e na vizinhança de suas raízes reais, quando estas têm multiplicidade ímpar. Nessa etapa, as atividades foram realizadas com auxílio do *xGraphing* e, foi esperado que o aluno verificasse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$: se as raízes de $p(x)$ têm multiplicidade ímpar, o sinal dos valores de $y = p(x)$, nas vizinhanças de suas raízes, são diferentes, ou seja, os valores de $y = p(x)$ quando x se aproxima da raiz real por valores de x à esquerda tem sinal contrário aos valores de $y = p(x)$ quando x se aproxima da raiz real por valores de x à direita. Graficamente, representa que a curva corta o eixo dos x.

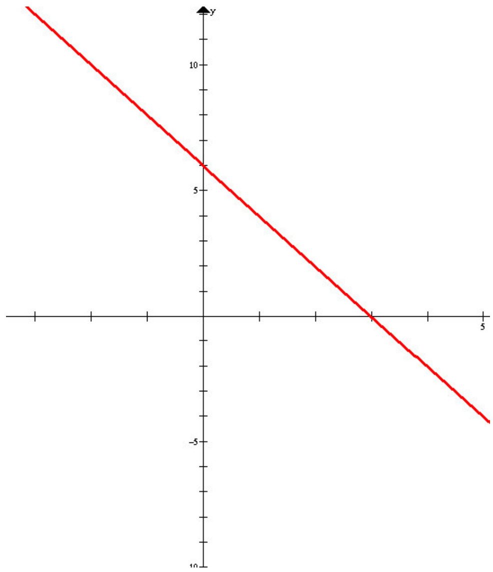
A figura 20 ilustra o comportamento do gráfico na vizinhança de suas raízes de multiplicidade ímpar, com coeficiente líder positivo (a) e com coeficiente líder negativo (b).

Figura 20 – Registro gráfico das funções polinomiais $t(x) = 2(x-2)^3$ e $v(x) = -2(x-3)$

(a) A raiz 2 de $t(x)$ tem multiplicidade 3 que é ímpar e coeficiente líder positivo ($a_n = 2 > 0$)



(b) A raiz 3 de $v(x)$ tem multiplicidade 1 que é ímpar e coeficiente líder negativo ($a_n = -2 < 0$)



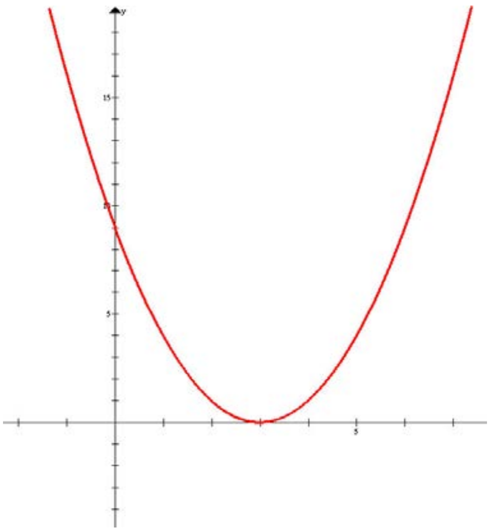
Fonte: elaboração própria

A 2ª parte teve por objetivo favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes reais e na vizinhança de suas raízes reais, quando estas têm multiplicidade par. Nessa etapa, as atividades foram realizadas com auxílio do *xGraphing* e, foi esperado que o aluno verificasse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$: se as raízes de $p(x)$ têm multiplicidade par, o sinal dos valores de $y = p(x)$, nas vizinhanças de suas raízes, são iguais, ou seja, os valores de $y = p(x)$ quando x se aproxima da raiz real por valores de x à esquerda tem o mesmo sinal dos valores de $y = p(x)$ quando x se aproxima da raiz real por valores de x à direita. Graficamente, representa que a curva toca, sem cortar eixo dos x.

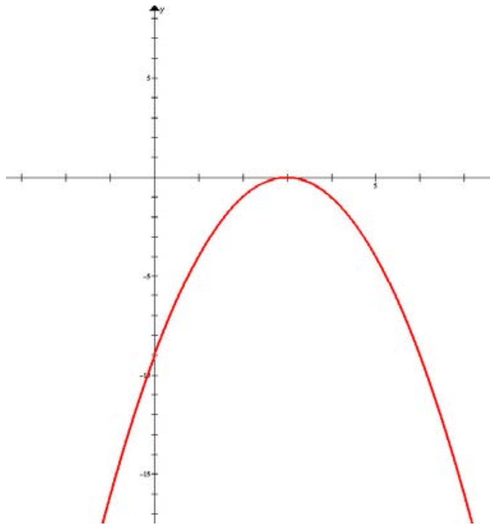
A figura 21 ilustra o comportamento do gráfico na vizinhança de suas raízes de multiplicidade par, com coeficiente líder positivo (a) e com coeficiente líder negativo (b).

Figura 21 – Registro gráfico das funções polinomiais $r(x) = (x-3)^2$ e $u(x) = -(x-3)^2$

(a) A raiz 3 de $r(x)$ tem multiplicidade 2 que é par e coeficiente líder positivo ($a_n = 1 > 0$)



(b) A raiz 3 de $u(x)$ tem multiplicidade 2 que é par e coeficiente líder negativo ($a_n = -1 < 0$)



Fonte: elaboração própria

A 3ª parte foi elaborada com a finalidade de verificar a aprendizagem dos conceitos relativos ao comportamento do gráfico das funções polinomiais quanto ao grau do polinômio e quanto à multiplicidade de suas raízes reais. Conceitos construídos por meio das atividades desenvolvidas nas 1ª e 2ª partes.

3.1.2.2.3 Análise a priori da Atividade 3

A atividade 3 foi testada no dia 10 de novembro de 2014 por duas professoras de Matemática que participaram também do teste exploratório das Atividades 1 e 2 com o propósito de avaliar a mesma. As professoras experimentaram a Atividade 3 que não sofreu nenhuma alteração. A referida atividade foi estruturada em três partes, considerando que, em cada uma delas, as questões tinham um objetivo específico, ou seja, uma habilidade específica a ser desenvolvida (Apêndice F).

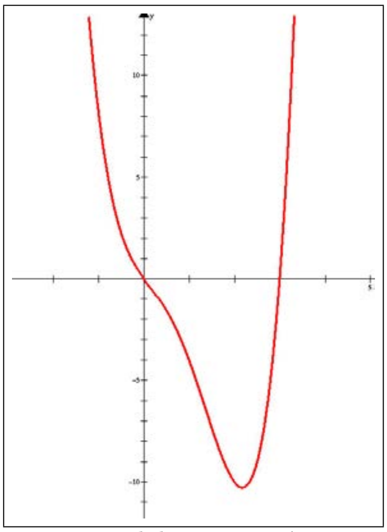
A 1ª parte teve por objetivo favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes complexas não reais. Foi esperado, nessa etapa, que o aluno verificasse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$:

1. o número de raízes é o mesmo número que representa o grau do polinômio;
2. a contagem das raízes de um polinômio leva em consideração a multiplicidade das mesmas;

3. o gráfico da função polinomial intersecta o eixo dos x apenas nos pontos cujas abscissas correspondem aos valores das raízes reais do polinômio.

A figura 22 ilustra o comportamento do gráfico da função polinomial $q(x) = x(x-3)(x^2+1)$ em relação às suas raízes complexas não reais e reais. Nesse polinômio, podemos identificar que são duas as raízes reais, ou seja, 0 e 3 e que o polinômio é de grau 4 e, portanto, as demais raízes são números complexos não reais.

Figura 22 – Gráfico da função polinomial $q(x) = x(x-3)(x^2+1)$



Fonte: elaboração própria

A 2ª parte teve por objetivo favorecer o reconhecimento de duas importantes propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais: as raízes não reais ocorrem aos pares e os polinômios de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes reais. Foi esperado, nessa etapa, que o aluno verificasse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$:

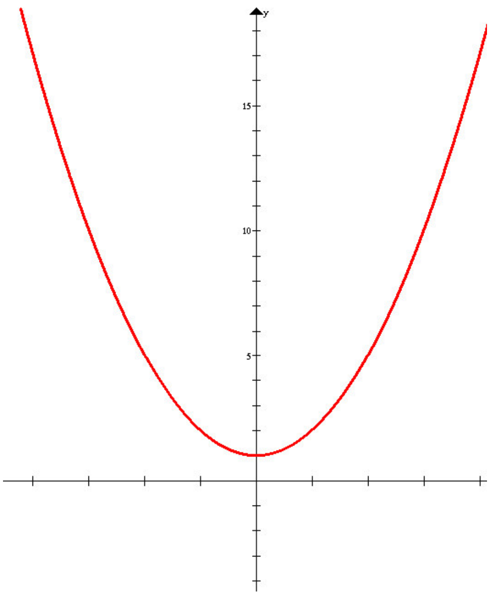
1. as raízes complexas não reais acontecem aos pares, ou seja, se um número complexo é raiz de um polinômio, o seu conjugado também o será;

2. se o grau do polinômio for ímpar, pelo menos uma raiz será real, ou seja, o gráfico cortará o eixo x pelo menos uma vez.

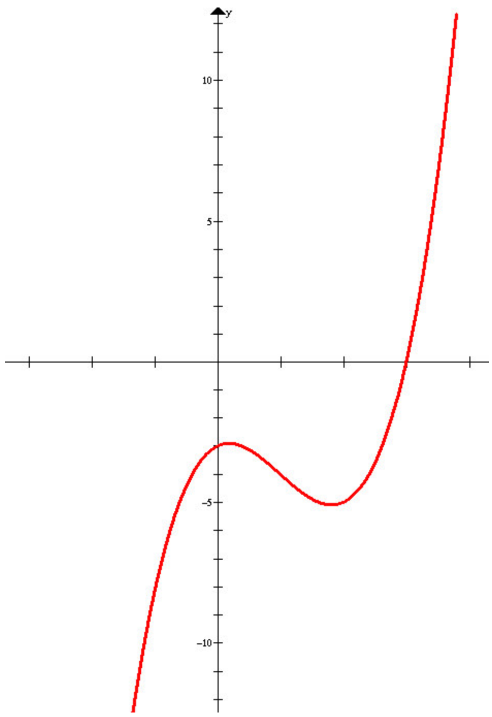
A figura 23 ilustra o comportamento do gráfico em relação a duas importantes propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais: as raízes não reais ocorrem aos pares e os polinômios de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes reais.

Figura 23 – Gráfico das funções polinomiais $m(x) = x^2 + 1$ e $n(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$

(a) $m(x)$ tem grau 2 (par) e não possui raízes reais, apenas duas raízes complexas não reais i e $-i$



(b) $n(x)$ tem grau 3 (ímpar) e possui uma raiz real 3 e duas raízes complexas não reais i e $-i$



Fonte: elaboração própria

A 3ª parte foi elaborada com a finalidade de verificar os conceitos relativos ao comportamento do gráfico das funções polinomiais quanto às suas raízes complexas não reais, quanto às raízes não reais ocorrerem aos pares e quanto aos polinômios de grau ímpar possuírem um número ímpar de raízes reais. Foi esperado, nessa etapa, que o aluno verificasse que num polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$:

1. o número de raízes é o mesmo número que representa o grau do polinômio;
2. a contagem das raízes de um polinômio leva em consideração a multiplicidade das mesmas;
3. o gráfico da função polinomial intersecta o eixo dos x apenas nos pontos cujas abscissas correspondem aos valores das raízes reais do polinômio.
4. as raízes complexas não reais acontecem aos pares, ou seja, se um número complexo é raiz de um polinômio, o seu conjugado também o será;
5. se o grau do polinômio for ímpar, pelo menos uma raiz será real, ou seja, o gráfico cortará o eixo x, pelo menos, uma vez.

Vale ressaltar que as funções polinomiais de que tratam a Atividade 3 são da forma:

$$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$ou$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$com$$

$$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \epsilon \mathbb{R}$$

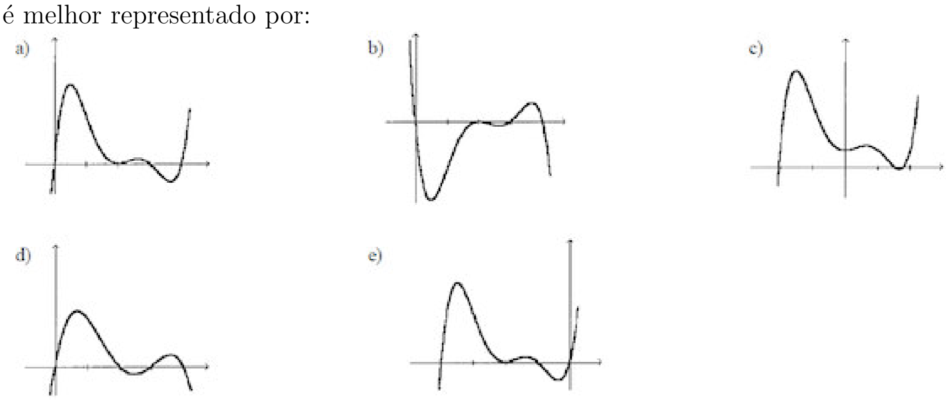
3.1.2.2.4 Análise a priori da Atividade 4

A Atividade 4 (Apêndice G) foi elaborada com a finalidade de verificar, por meio de questões de Concursos Vestibulares, todos os conceitos estudados sobre o comportamento do gráfico de polinômios, sendo apresentado em sua versão original, visto que não foi objeto de análise do teste exploratório. Optou-se pela não realização do teste exploratório por se tratar de questões revisadas e elaboradas por reconhecidas instituições de educação superior.

Na 1ª questão, foi dado um polinômio $p(x)$ e solicitou-se que o aluno identificasse, dentre os cinco itens apresentados, o gráfico que representava o polinômio $p(x-2)$, conforme apresenta a figura 24.

Figura 24 – Questão 1 da Atividade 4

1. (Fuvest-2002) Dado o polinômio $p(x) = x^2(x-1)(x^2-4)$, o gráfico da função $y = p(x-2)$ é melhor representado por:



Fonte: elaboração própria

Nesta atividade, foi esperado que o aluno: identificasse que o polinômio $p(x)$ é um polinômio de grau 5 e, portanto, tem 5 raízes; desenvolvesse a expressão algébrica do polinômio $p(x) = x^2(x-1)(x^2-4)$, obtendo a expressão $p(x) = x^2(x-1)(x+2)(x-2)$ e;

substituísse, na expressão, todos as variáveis de x por $x-2$ determinando $p(x-2)$, ou seja $p(x-2) = (x-2)^2(x-3)x(x-4)$. Com isso, ele deve ser capaz de:

1. identificar as raízes reais e suas multiplicidades:
   $x_1 = 2$ com multiplicidade 2;
   $x_2 = 3$ com multiplicidade 1;
   $x_3 = 0$ com multiplicidade 1;
   $x_4 = 4$ com multiplicidade 1;

2. verificar que todas as raízes dos polinômios são reais, pois o grau do polinômio é igual ao número de raízes reais;

3. identificar que o gráfico da função polinomial $p(x-2)$ corta o eixo dos x nos pontos de abscissa 3, 0 e 1, que representam as raízes de multiplicidade ímpar, aqui representadas por raízes simples;

4. identificar que o gráfico da função polinomial $p(x-2)$ toca o eixo dos x no ponto de abscissa 2, que representa a raiz de multiplicidade par, aqui representada por uma raiz dupla;

5. verificar que apenas os itens (a) e (b) da questão atendem às condições estabelecidas nos itens anteriores;

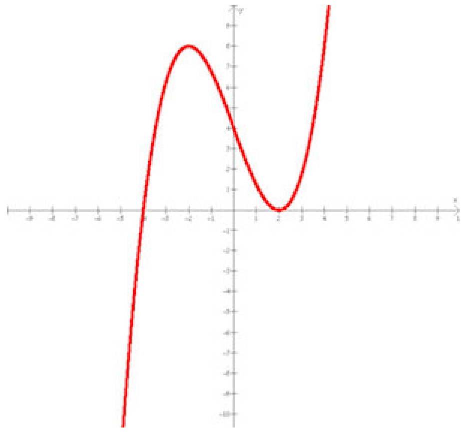
6. escolher, entre os itens (a) e (b) da questão, o item (a) como o registro gráfico que melhor representa o registro algébrico $p(x-2) = 1 \cdot (x-2)^2(x-3)x(x-4)$, a partir da análise do sinal do seu coeficiente líder. Nesse caso, o coeficiente líder é 1 e o seu sinal é positivo, portanto, o sinal de $p(x-2)$, quando x assume valores positivos muito grandes, é positivo e, o sinal de $p(x-2)$, quando x assume valores negativos cada vez maiores em módulo, é negativo.

A questão 1 avalia se o aluno desenvolveu as habilidades 2i, 2ii, 2iii, 2iv e 2v descritas no quadro 3.1. Vale ressaltar que, para concluir corretamente a referida questão, o aluno deverá encontrar as raízes reais para $p(x)$ e depois transladar duas unidades para a direita, encontrando as raízes reais de $p(x-2)$ ou substituir $x-2$ na expressão de $p(x)$, ou seja, realizar primeiramente o tratamento para depois converter.

Na 2ª questão, foi apresentado o registro gráfico de um polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e, a partir da análise do gráfico, o aluno deveria determinar os valores de a, b, c e d (Figura 25).

Figura 25 – Questão 2 da Atividade 4

2. (PUC-RS - 2001) Na figura, tem-se o gráfico de $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Os valores de a, b, c e d são respectivamente.



(a) $-4, 0, 4$ e 2

(b) $-4, 0, 2$ e 4

(c) $\frac{1}{4}, 2, 10$ e 4

(d) $\frac{1}{4}, 0, -3$ e 4

(e) $1, 0, -12$ e 16

Fonte: elaboração própria

Nessa atividade, foi esperado que o aluno:

1. identificasse o grau de $p(x)$ que é 3;
2. determinasse as raízes reais e suas multiplicidades a partir da observação do gráfico: $x_1 = -4$ com multiplicidade ímpar e $x_2 = 2$ com multiplicidade par;
3. comparasse o grau e as multiplicidades das raízes e verificasse que a raiz $x_1 = -4$ tem multiplicidade 1 e $x_2 = 2$ tem multiplicidade 2;
4. identificasse que todo polinômio $p(x)$ com coeficientes complexos e grau $n \geq 1$, se escreve na forma fatorada como $p(x) = a(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdot ...(x - \alpha_s)^{r_s}$, em que $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ é o coeficiente líder de $p(x)$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ são raízes complexas distintas e $r_1, r_2, ..., r_s$ são inteiros positivos tais que $r_1 + r_2 + ... + r_s = n$, ou seja, todo polinômio complexo pode ser escrito como o produto do seu coeficiente líder por polinômios irredutíveis mônicos distintos. O que representa nesta questão que $p(x) = a(x + 4)(x - 2)^2$;
5. identificasse graficamente o termo independente d, ou seja, verificasse no gráfico a ordenada do ponto em que a curva intersecta o eixo y, nesse caso $d = 4$;
6. desenvolvesse a expressão algébrica até a sua forma mais simples como $p(x) = ax^3 - 12ax + 16a$;
7. determinasse a considerando que, na expressão algébrica $p(x) = ax^3 - 12ax + 16a$, $16a$ representa o termo independente d, logo $16a = 4$ então $a = \frac{1}{4}$;

8. verificasse que o coeficiente b do termo de grau 2 é 0;

9. determinasse o coeficiente c do termo de grau 1 considerando $b = -12a = -12 \cdot \dfrac{1}{4} = -3$

10. identificasse que os coeficientes corretos estão representados no item (d).

A questão 2 avalia se o aluno desenvolveu as habilidades 2i, 2ii, 2iii, 2iv e 2v descritas no quadro 3.1. Mas para resolvê-la corretamente, necessita escrever o polinômio como o produto do coeficiente líder desconhecido (a) por polinômios irredutíveis mônicos distintos e depois, desenvolver a expressão. Isso demonstra que a questão exige um nível alto de habilidade de tratamento algébrico.

A 3ª questão consistiu num problema de ordem prática em que o aluno teve que identificar, dentre cinco itens, o gráfico que melhor representasse a função polinomial $p(x) = -0,7182 + 0,1451x - 0,00068x^2 + 0,0000014x^3$ em que define a endomorfia em relação às medidas de dobras cutâneas, conforme apresentado na figura 26.

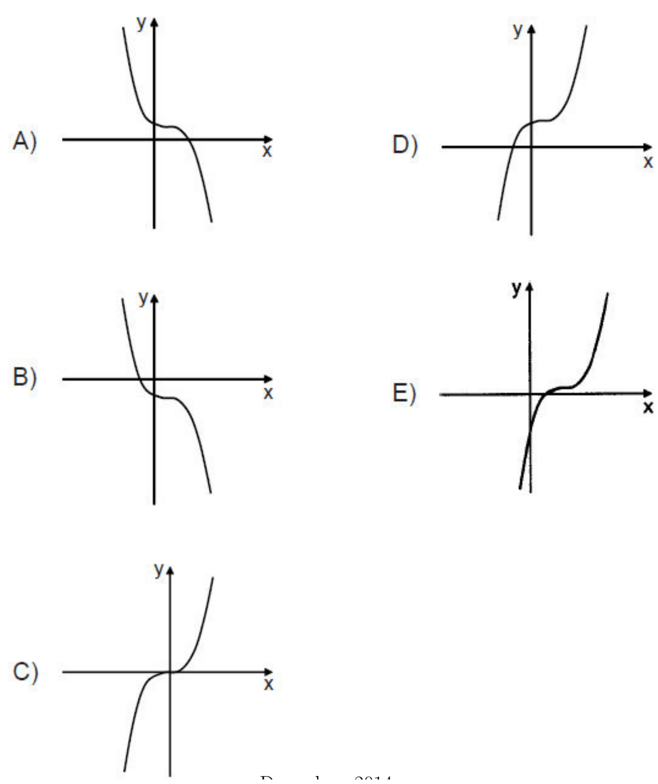
Figura 26 – Questão 3 da Atividade 4

3. (PUC-RS 2010) Na classificação do tipo corporal de cada indivíduo, pela técnica conhecida como somatotipo, a condição referente à adiposidade (gordura) é chamada endomorfia e é calculada pela fórmula:

$$ENDO(x) = -0,7182 + 0,1451x - 0,00068x^2 + 0,0000014x^3$$

onde x é obtido a partir de medidas de dobras cutâneas.

O gráfico que melhor pode representar a função $y = ENDO(x)$ é:



Fonte: elaboração própria

Nessa atividade, foi esperado que o aluno:

1. identificasse que o grau do polinômio é ímpar e que o coeficiente líder é positivo e, portanto, os valores de y crescem à medida que x assume valores muito grandes e, portanto, verificando que os itens corretos poderiam ser apenas (C), (D) ou (E);
2. identificasse que o termo independente é negativo e, portanto, o gráfico da função polinomial intersecta o eixo dos y abaixo da origem do sistema cartesiano, constatando que isso só ocorre nos itens (B) e (E);
3. identificasse que o único item que atende às condições estabelecidas anteriormente é o item (E).

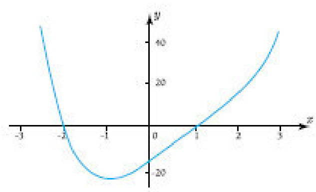
A questão 3 avalia se o aluno desenvolveu todas as habilidades descritas no quadro 3.1. Essa questão mobiliza apenas a conversão, não sendo necessário nenhum tratamento algébrico.

Na 4ª questão, o aluno deve determinar o valor do termo independente m do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 16x + m$ a partir do registro gráfico da função polinomial $p(x)$ apresentada na figura 27 a seguir:

Figura 27 – Questão 4 da Atividade 4

4. (UERJ - 2011) O gráfico representa uma função polinomial P de variável rel, que possui duas raízes inteiras e é definida por:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 16x + m$$



Determine o valor da constante representada por m e as quatro raízes do polinômio.

Fonte: elaboração própria

Nessa questão, foi esperado que o aluno:

1. identificasse que as raízes reais dos polinômios a partir da observação da intersecção do gráfico com o eixo x;
2. determinasse os fatores mônicos determinados pelas raízes reais;
3. determinasse um polinômio de grau 2 a partir do produto dos fatores mônicos encontrados;

4. dividisse $P(x)$ pelo polinômio de grau 2 previamente encontrado, determinando o quociente que, também, é um polinômio de segundo grau cujo resto vale $m + 16$;

5. identificasse que a divisão é exata e, portanto, o resto é zero;

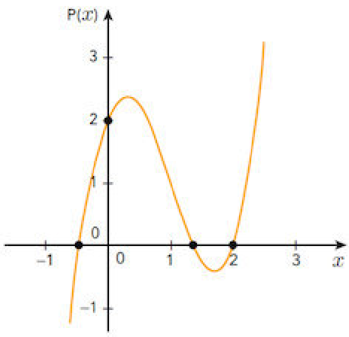
6. igualasse $m + 16$ a 0 determinando $m = -16$.

A questão 4 avalia se o aluno desenvolveu todas as habilidades descritas no quadro 3.1, além do conhecimento do Teorema do Resto.

A 5ª questão (Figura 28) teve por objetivo verificar se o aluno seria capaz de identificar o sinal da função polinomial a partir da análise do registro gráfico e a partir do conhecimento do Teorema de D'Alembert, o qual afirma que um polinômio p é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, a é raiz de p, conforme disposto no Apêndice A. A questão explora a necessidade de dividir $p(x)$ por $(x - 2)$ com o objetivo de determinar as raízes complexas não reais.

Figura 28 – Questão 5 da Atividade 4

5. (UERJ-2014) Observe o gráfico da função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.



Determine o conjunto solução da inequação $P(x) > 0$.

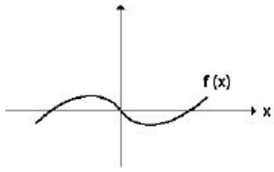
Fonte: elaboração própria

A questão 5 avalia se o aluno desenvolveu a habilidade 2iv e 2v, 2vi e 2vii descritas no quadro 3.1. Vale ressaltar que, para concluir corretamente a referida questão, o aluno deve verificar que a única raiz inteira é 2 e, portanto, utilizando o Teorema de D'Alembert será capaz de encontrar as demais raízes e, portanto, determinando $P(x) > 0$.

A 6ª questão consistiu na identificação do registro algébrico que melhor representasse o registro gráfico conforme apresentado na figura 29.

Figura 29 – Questão 6 da Atividade 4

6. (Fuvest - 1999) O gráfico



Pode representar a função $f(x) =$

(a) $x(x-1)$

(b) $x^2(x^2-1)$

(c) $x^3(x-1)$

(d) $x(x^2-1)$

(e) $x^2(x-1)$

Fonte: Elaboração própria

Nessa questão, foi esperado que o aluno:

1. identificasse que o polinômio $f(x)$ tem três raízes reais eliminando, assim, a possibilidade dos itens (a) e (c) serem verdadeiras, pois as mesmas apresentam, em sua forma fatorada, apenas duas raízes reais;

2. identificasse que 0 é raiz e que sua multiplicidade é ímpar, eliminando os itens (b) e (e);

3. identificasse que o item (d) é o correto por exclusão e, mais que isso, que as demais raízes reais têm sinais contrários e que, também, têm multiplicidade ímpar.

A questão 6 avalia se o aluno desenvolveu todas as habilidades descritas no quadro 3.1. Para resolver corretamente a referida questão, o aluno deverá mobilizar apenas os conceitos de conversão trabalhados na pesquisa.

A 7ª questão (Figura 30) teve por objetivo avaliar o conhecimento do Teorema do Resto, bem como de uma importante propriedade: raízes complexas não reais de um polinômio com coeficientes reais ocorrem aos pares, ou seja, se $a+bi$ é uma raiz complexa não real de um polinômio, então seu complexo conjugado $a-bi$ também é raiz.

Figura 30 – Questão 7 da Atividade 4

7. (Fuvest - 2015) Os coeficientes a, b e c do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais. Sabendo que -1 e $1 + \alpha i$, com $\alpha > 0$, são raízes da equação $p(x) = 0$ e que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 1)$ é 8, determine

   (a) o valor de α;

   (b) o quociente de $p(x)$ por $(x + 1)$.

Fonte: elaboração própria

Nessa questão, foi esperado que o aluno:

1. identificasse que as raízes são -1, $1 + \alpha i$ e $1 - \alpha i$, com $\alpha \neq 0$;
2. identificasse que $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ é igual ao produto do seu coeficiente líder 1 pelos três polinômios irredutíveis mônicos determinados pelas raízes reais e pelas raízes complexas não reais;
3. determinasse a, b e c em função de α, por meio do desenvolvimento do produto;
4. determinasse α ao considerar $p(1) = 8$, conforme disposto no Teorema do Resto constante do Apêndice A.

A questão 7 avalia se o aluno desenvolveu todas as habilidades descritas no quadro 3.1 e o conhecimento do Teorema do Resto, requerendo mobilizar as duas transformações inerentes aos registros de representação semiótica. Portanto, todas as questões da Atividade 4 avaliaram os temas investigados nas Atividades 1, 2 e 3 da sequência didática.

3.2 Desenvolvimento: aplicação da sequência didática

Nesta seção, é descrito o processo de aplicação da sequência didática, ação que compreende a segunda etapa desta pesquisa. Conforme já retratado, a pesquisa foi realizada em uma escola estadual situada na zona urbana de Campos dos Goytacazes, na qual, a pesquisadora não teve dificuldades em obter permissão para observar uma turma de 22 alunos, sendo que destes, apenas 19 frequentavam. Os 19 alunos foram identificados pela letra maiúscula do alfabeto latino de A a S, porém foram considerados para efeito de análise, apenas os 14 alunos que participaram de todos os quatro encontros: A, B, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e P.

O objetivo dessa etapa é descrever todas as estratégias e ações da sequência didática, cuidadosamente planejada, com a finalidade de obter informações para desvelar o fenômeno a ser investigado, ou seja, a conversão entre o registro gráfico e o algébrico, e vice-versa, e como estas influenciam no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios.

A sequência didática foi planejada para ser realizada em quatro encontros de 100 minutos denominados Encontro 1, Encontro 2, Encontro 3 e Encontro 4, ocorridos nos dias 13, 18 e 25 de novembro de 2014 e 02 de dezembro de 2014, respectivamente, sempre no horário de 7h às 8h40min. Os encontros ocorreram sempre às terças e quintas no horário da aula de Matemática cedido pela professora da turma. Os encontros não puderam acontecer nos dias 20 e 27 de novembro porque os alunos da escola estavam realizando o processo de avaliação do Sistema de Avaliação do Estado do Rio de Janeiro (SAERJ).

Antecedendo os encontros, algumas convenções foram estabelecidas, tais como:

1. os alunos trabalhariam em dupla em todas as atividades;
2. seriam necessários 10 *tablets* para os alunos e um para o observador;
3. os *tablets* seriam utilizados pedagogicamente nos três primeiros encontros;
4. o projetor multimídia seria utilizado para ilustrar as situações gráficas em todos os encontros;
5. os encontros seriam registrados por meio de uma máquina fotográfica;
6. todos os encontros e as atividades aplicadas pelo observador nessa turma seriam instrumento de avaliação do professor de Matemática da escola;
7. seriam realizadas anotações/registros no diário de campo;
8. dos 11 *tablets* que seriam utilizados na pesquisa, oito pertencem ao Projeto Pró-Docência[14], vinculado a um Instituto Federal de Educação adquiridos com recursos financeiros da Fundação Capes/MEC. Todos os 11 *tablets* utilizados na pesquisa têm sistema operacional *Android* e tela de 10,1 polegadas. Dois *tablets* utilizados eram de propriedade da pesquisadora e um outro era um *tablet* educacional cedido pelo MEC para professores da Educação Básica da rede pública de ensino;
9. todos os gráficos construídos pelos alunos no aplicativo *xGraphing* deveriam ser registrados por meio de foto da tela para futuras análises;
10. ao final de cada encontro, as atividades seriam recolhidas e identificadas.

[14] Programa de Consolidação das Licenciaturas com finalidade de fomento à inovação e à elevação da qualidade dos cursos de formação para o magistério da Educação Básica, na perspectiva de valorização da carreira docente (Capes/MEC).

Ciente da importância do papel da observadora/pesquisadora no processo de aplicação da sequência didática, optou-se pelo equilíbrio entre dois polos de uma aula investigativa: dar autonomia ao aluno para não comprometer a sua autoria no estudo e, garantir a fluidez dos trabalhos e do processo de significação dos conceitos a serem apreendidos, privilegiando uma postura interrogativa (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 47). A gestão da sequência didática, promovendo a participação equilibrada dos alunos no estudo, foi um aspecto considerado de forma a garantir que os objetivos estabelecidos para cada atividade fossem atingidos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 51). Em todos os encontros, foi fundamental garantir a motivação dos alunos para a realização das atividades, propondo tarefas e elaborando questões que constituíssem desafios para os alunos.

3.2.1 Descrevendo o Encontro 1: Aplicação da Atividade 1

O Encontro 1 aconteceu numa quinta-feira, dia 13 de novembro de 2014, e conforme previsto, iniciou às 7h. Este foi o primeiro contato da observadora/pesquisadora e os sujeitos da pesquisa e, iniciou-se estabelecendo as condições em que todo o estudo estava estruturado e, principalmente, da importância da participação deles, visto que a pesquisa estava inteiramente apoiada nas produções pessoais. Estavam presentes nesse primeiro encontro, a pesquisadora, a professora de Matemática da turma e 16 alunos. Os 16 alunos foram organizados em cinco duplas e dois trios, visto que um dos alunos chegou atrasado. Foram distribuídos a Atividade 1, para cada um dos 16 alunos, e o *tablet* para cada grupo de dois ou três alunos. Eles aparentavam calma e bastante entusiasmo durante toda a aplicação da Atividade 1 (Figura 31), atuando de forma participativa e colaborativa. Esse comportamento era esperado, visto que Moreira, Barcelos e Batista (2013, p. 3) afirmam que o uso de dispositivos móveis melhora o engajamento e a motivação dos alunos. Os alunos foram orientados a elaborarem suas próprias respostas, mesmo que a Atividade 1 tenha sido discutida nos grupos entre os colegas.

Figura 31 – Alunos realizando a Atividade 1

(a) Foto 1 (b) Foto 2 (c) Foto 3

Fonte: elaboração própria

Após a entrega dos *tablets* e da Atividade 1, a observadora deixou que os grupos realizassem livremente as 1ª e 2ª partes da Atividade 1, atendendo os grupos quando solicitada.

Embora a Atividade 1 tenha sido elaborada, inicialmente, para 100 minutos, foi necessária a cessão das duas aulas seguintes referentes ao componente curricular de Física e, portanto, o Encontro 1 foi realizado no horário de 7h às 10h30min. Ainda que o tempo de aplicação da Atividade 1 tenha ocorrido de forma diferente do previsto, os alunos participaram ativamente. Mesmo que a aplicação tenha ocorrido normalmente, sugere-se que a Atividade 1 seja desmembrada em duas atividades, uma contendo as 1ª, 2ª e 3ª partes e a outra contendo as 4ª e 5ª partes.

3.2.2 Descrevendo o Encontro 2: aplicação da Atividade 2

O Encontro 2 aconteceu na terça-feira da semana seguinte ao primeiro encontro, dia 18 de novembro de 2014. Nesse segundo contato, estavam presentes a pesquisadora, a professora de Matemática da turma e 18 alunos que foram dispostos em grupos. Foram distribuídos a Atividade 2, para cada um dos 18 alunos, e o *tablet* para cada grupo. Mais uma vez, optou-se por nomear os grupos e os alunos, considerando que os grupos estabelecidos para essa atividade não foram os mesmos da atividade anterior. O aluno C, presente no Encontro 1 não compareceu ao Encontro 2 e outros três alunos que não compareceram ao Encontro 1, estavam presentes para a aplicação da Atividade 2, sendo identificados nesta pesquisa como alunos Q, R e S. Embora os trabalhos fossem realizados em grupo, os alunos foram orientados a elaborarem suas próprias respostas.

Após a entrega da Atividade 2 e do *tablet*, os alunos foram orientados a responder a 1ª parte da Atividade 2 (Figura 32). Em seguida, a pesquisadora levantou algumas perguntas de forma que os mesmos refletissem em relação às suas respostas, auxiliando-os, também, na compreensão dos objetivos propostos na atividade, ou seja, analisar o comportamento do gráfico da função polinomial na vizinhança de uma raiz de multiplicidade ímpar.

Figura 32 – Alunos realizando a Atividade 2

(a) Foto 1 (b) Foto 2 (c) Foto 3

Fonte: elaboração própria

A 2ª parte foi realizada logo em seguida, respeitando-se as mesmas ações da 1ª parte, sendo que estes tinham como objetivo analisar o comportamento do gráfico da função polinomial na vizinhança de uma raiz de multiplicidade par.

A 3ª parte da Atividade 2 consistiu em duas questões com a finalidade de verificar a aprendizagem dos conceitos relativos ao comportamento do gráfico das funções polinomiais, quanto ao grau do polinômio e quanto à multiplicidade de suas raízes reais. Embora esse momento fosse de produção individual, algumas intervenções foram realizadas pela pesquisadora de modo que não ocorressem conflitos na apreensão de alguns conceitos relativos ao conteúdo.

3.2.3 Descrevendo o Encontro 3: aplicação da Atividade 3

O Encontro 3 aconteceu na terça-feira, dia 25 de novembro de 2014. Neste encontro, estavam presentes a pesquisadora, a professora de Matemática da turma e 18 alunos que foram dispostos em pequenos grupos, cujo objetivo foi partilhar o *tablet*, embora as suas respostas fossem individuais. Estavam presentes nesse encontro os alunos A, B, C, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R e S.

Iniciou-se o encontro distribuindo os *tablets* e a Atividade 3. Em seguida, os alunos foram orientados a responderem, inicialmente, a 1ª parte da atividade (Figura 33). Após a resolução, a pesquisadora solicitou que alguns alunos descrevessem, oralmente, o que observaram no gráfico dos polinômios, quando este tem raízes complexas não reais. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 53) a procura de justificações matemáticas para as conjecturas é uma das formas que ajuda a dar sentido à investigação. Essa 1ª parte teve por finalidade favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes complexas não reais.

Figura 33 – Alunos realizando a Atividade 3

(a) Foto 1 (b) Foto 2 (c) Foto 3

Fonte: elaboração própria

Logo depois, os alunos foram orientados a responder à 2ª parte da Atividade 3, que teve por finalidade favorecer o reconhecimento de duas importantes propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais: as raízes não reais ocorrem aos pares e os polinômios de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes reais. A 3ª parte foi composta por uma única questão que consistiu na verificação dos conceitos trabalhados nas duas primeiras partes.

A importância do registro escrito foi interiorizada pelos alunos, de forma que estes tentaram escrever os seus resultados o mais fielmente possível, embora a professora da turma tenha relatado que muitos têm dificuldades no processo de justificação. Esse fato é ressaltado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 35) quando afirmam que os alunos tendem a apresentar conjecturas não completamente explícitas, apresentando uma linguagem não verbal apoiada nos gestos e na observação dos dados. Essa característica foi, então, incorporada pela pesquisadora, que passou a utilizar dos mesmos gestos e linguagens de forma a estabelecer um bom ambiente de aprendizagem.

3.2.4 Descrevendo o Encontro 4: aplicação da Atividade 4

O Encontro 4 ocorreu na terça-feira, dia 02 de dezembro de 2014. A Atividade 4 foi realizada individualmente pelos 18 alunos presentes. Essa atividade consistiu na verificação, por meio de questões de Concursos Vestibulares, dos conceitos apreendidos com o estudo do comportamento do gráfico de polinômios ocorridos nos encontros anteriores, como já mencionado. A pesquisadora estimulou que a Atividade 4 fosse realizada individualmente e, sugeriu que todos começassem juntos a questão 1. Na fase inicial, todos pareciam bastante concentrados na resolução do problema, mas como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 48), nessa fase, é imprescindível observar como os alunos reagem à tarefa, pois estas podem ser desafiadoras. Embora a pesquisadora esperasse uma grande motivação por parte dos alunos na realização das questões de vestibulares, visto que se tratava de uma turma de 3º ano do Ensino Médio, o mesmo não ocorreu. Foi necessária uma intervenção da pesquisadora que, com perguntas certas, levou os alunos a realizarem a questão 1 com tranquilidade. Estavam presentes na aplicação da Atividade 4 os alunos A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R e S, sendo que o C chegou com muito atraso, não participando de forma efetiva da Atividade em questão (Figura 34).

Figura 34 – Alunos realizando a Atividade 4

(a) Foto 1 (b) Foto 2 (c) Foto 3

Fonte: elaboração própria

As questões 1, 3 e 6 da Atividade 4 foram realizadas pelos alunos com pequenas intervenções da pesquisadora, porém as questões 2 e 4 foram realizadas com auxílio direto da pesquisadora, pois os alunos apresentaram bastante dificuldade. As questões 5 e 7 não foram realizadas; pois, pelas dificuldades apresentadas na questão 2, a pesquisadora avaliou que não seriam elementos fundamentais para a pesquisa, além do tempo para a resolução. Numa rápida avaliação da professora de Matemática da turma, a mesma afirmou considerar que as questões propostas na Atividade 4 tinham um nível muito alto de dificuldade para a turma em questão. Essa condição ficou de ser avaliada por meio do questionário final.

3.3 Análise dos Dados

A análise dos dados levará em consideração as soluções apresentadas pelos alunos às questões da sequência didática, procurando entender as formas como estes produzem a resposta, certa ou errada, de modo a contribuir para a construção de novos patamares de conhecimento (CURY, 2007, p. 63). Vale ressaltar que, para a organização de uma sequência didática fundamentada nos registros de representação, é necessário que se tenha identificado, preliminarmente, as variáveis cognitivas próprias do registro cujo funcionamento se quer fazer descobrir. Na análise fundamentada nos registros de representação, a escolha do segundo registro é essencial e, no caso das representações gráficas, a relação inversa, escrita algébrica, impõe-se de forma natural, mesmo que isso não seja colocado em prática no ensino (DUVAL, 2011, p. 115).

As análises das respostas de todas as atividades promoveram uma verificação do processo em que se estabelece a construção do conceito de Polinômios por meio das suas diferentes formas de representação, sendo, neste estudo, privilegiado a conversão do registro algébrico para o geométrico e vice-versa.

Como mencionado no Capítulo 2, as conversões são transformações de representações que se constituem em mudanças de registro, conservando os objetos denotados, ou seja, passagem da escrita algébrica de um polinômio para a sua representação gráfica. Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão (DUVAL, 2003, p. 16).

Para uma análise cognitiva das atividades desenvolvidas, em que abordam mudanças de registros, a regra fundamental é tomar, simultaneamente, dois registros de representação, e não cada um isoladamente (DAMM, 2008, p. 187), ou seja, é durante a passagem de um registro de representação a outro é que podemos observar a importância da forma das representações.

Para analisar uma atividade de conversão, deve-se, ainda, comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada (DUVAL, 2003, p. 19). Para isso, foi necessário possibilitar, ao aluno, a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro, fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes de representação no outro registro (DUVAL, 2009, p. 101).

Para uma avaliação dos resultados desta pesquisa, levou-se em consideração a conversão entre gráficos e expressões algébricas, no que se refere às variáveis visuais próprias dos gráficos de funções polinomiais e, os valores escalares dos polinômios, ou seja, de suas unidades significantes, permitindo uma apreensão global e qualitativa. Para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, deve haver uma articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros (DUVAL, 2003, p. 17). Quando os diferentes valores das variáveis cognitivas visuais pertinentes a um gráfico não são discriminados, as confusões clássicas para a interpretação dos gráficos são inevitáveis e, além disso, faz com que parte dos tratamentos efetuados no registro algébrico perca o sentido (DUVAL, 2009, p. 99, 100). Ao avaliar, confrontando os dados obtidos na análise *a priori* com os dados obtidos na análise *a posteriori* (PAIS, 2011, p. 103), propõe-se verificar os problemas recorrentes de incompreensão na interpretação geométrica das funções polinomiais, privilegiando, de um ponto de vista cognitivo, as tarefas de reconhecimento que são realizadas em função das variáveis cognitivas definidas nas Atividades.

Para categorizar e organizar as respostas coletadas, levaram-se em consideração os dados obtidos na resolução da sequência didática, respeitando-se as etapas e objetivos propostos. Porém, do ponto de vista cognitivo, os acertos elementares não são determinados por cada item separadamente, mas por reagrupamentos de itens, ou seja, se o aluno reconhece o comportamento do gráfico de, por exemplo, $p(x) = 3x^2$ e não reconhece o comportamento do gráfico de $p(x) = -3x^2$, significa que esse aluno ainda não está no ponto de *discriminar* o que as funções polinomiais, realmente, representam (DUVAL, 2003, p. 27).

Capítulo 4

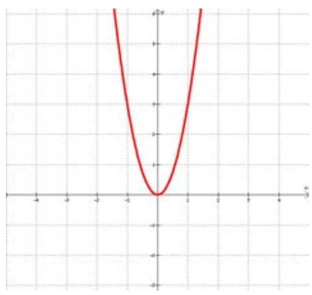
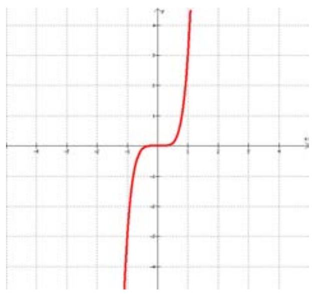
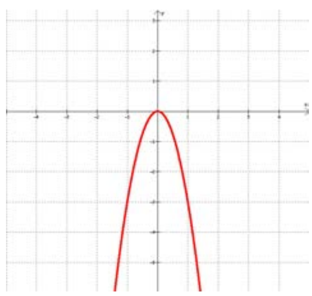
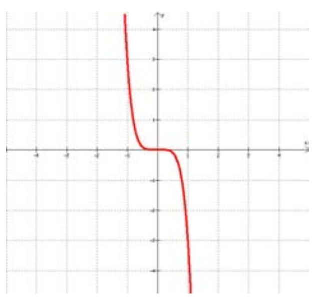
Apresentação e Análise dos Dados

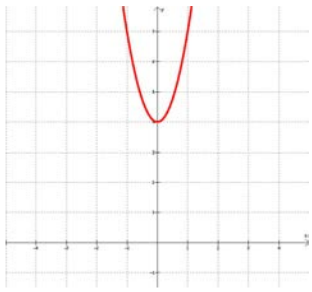
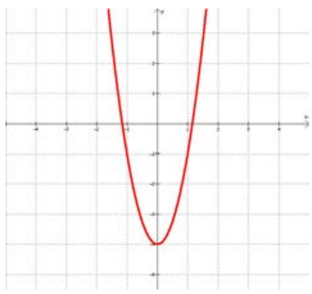
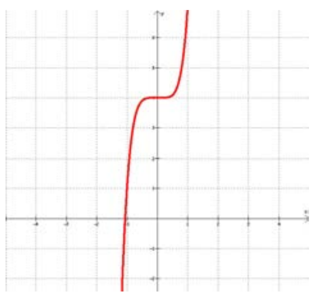
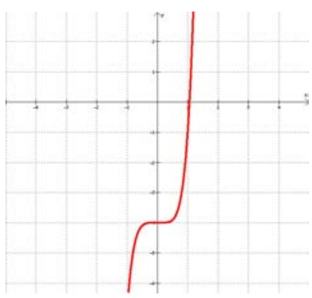
Este capítulo apresenta a análise dos dados. Os dados coletados são analisados e avaliados considerando o referencial teórico e as análises *a priori* das atividades. Este se divide em cinco seções. A seção *Encontro 1: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 1* a qual se divide em cinco subseções: *1ª e 2ª partes*; *3ª parte*; *4ª parte*; *5ª parte* e *Avaliação*. A segunda, *Encontro 2: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 2* a qual se divide em quatro subseções: *1ª parte*; *2ª parte*; *3ª parte* e *Avaliação*. A seção *Encontro 3: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 3* que se divide em quatro subseções: *1ª parte*; *2ª parte*; *3ª parte* e *Avaliação*. A seção *Encontro 4: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 4* consiste na apresentação e análise das questões de verificação. A quinta e última seção intitulada *Análise das respostas do questionário final: percepção dos alunos* apresenta a percepção dos alunos quanto à sequência didática.

4.1 Encontro 1: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 1

Com o objetivo de analisar o uso pedagógico do *tablet* e a pertinência cognitiva das 18 questões, que compõem a Atividade 1, foram analisadas as unidades significantes destacadas nos quadros 4.1 e 4.2.

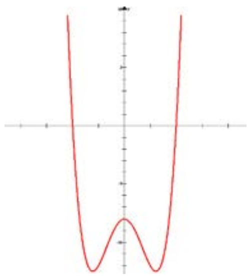
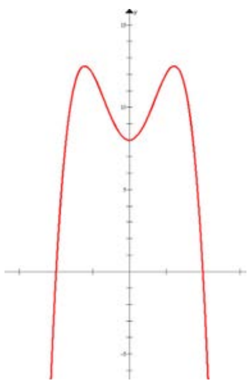
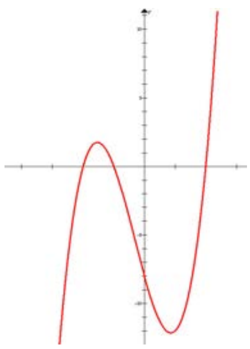
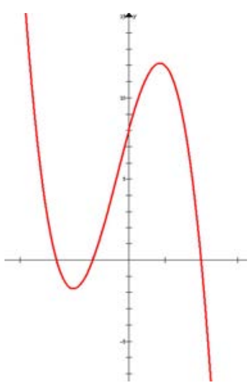
Quadro 4.1 – Identificação das variáveis cognitivas para análise da Atividade 1 - Conversão do registro algébrico para o registro gráfico

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis Escalares)**	**Registro de Chegada**	**Observações Esperadas** O aluno deve perceber que:
$p(x) = 3x^2$	grau par		quando x cresce ou x decresce ilimitadamente, os valores de $y = p(x)$ crescem ilimitadamente;
$p(x) = 3x^5$	grau ímpar		quando x cresce ilimitadamente o $y = p(x)$ cresce ilimitadamente e quando x decresce ilimitadamente o $y = p(x)$ decresce ilimitadamente;
$p(x) = -3x^2$	grau par, coeficiente líder negativo		quando x cresce ou x decresce ilimitadamente, os valores de $y = p(x)$ decrescem ilimitadamente;
$p(x) = -3x^5$	grau ímpar, coeficiente líder negativo		quando x cresce ilimitadamente o $y = p(x)$ decresce ilimitadamente e quando x decresce ilimitadamente o $y = p(x)$ cresce ilimitadamente.

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis Escalares)**	**Registro de Chegada**	**Observações Esperadas** O aluno deve perceber que:
$p(x) = 3x^2 + 4$	grau par, coeficiente líder positivo e termo independente positivo e igual a 4		o gráfico corta o eixo y no ponto de ordenada 4;
$p(x) = 3x^2 - 4$	grau par, coeficiente líder positivo e termo independente negativo e igual a -4		o gráfico corta o eixo y no ponto de ordenada -4;
$p(x) = -3x^2 + 4$	grau par, coeficiente líder negativo e termo independente positivo e igual a 4		o gráfico corta o eixo y no ponto de ordenada 4;
$p(x) = -3x^2 - 4$	grau par, coeficiente líder negativo e termo independente negativo e igual a -4		o gráfico corta o eixo y no ponto de ordenada -4.

Fonte: elaboração própria

Quadro 4.2 – Identificação das variáveis cognitivas para análise da Atividade 1 - Conversão do registro gráfico para o registro algébrico

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis visuais)**	**Observações Esperadas** O aluno deve concluir que:
	Quando o x cresce ou x decresce ilimitadamente, os valores de $y = p(x)$ crescem ilimitadamente; o gráfico corta o eixo y num ponto com ordenada negativa	o grau do polinômio é par, que o seu coeficiente líder é positivo e que o termo independente é negativo;
	Quando o x cresce ou x decresce ilimitadamente, os valores de $y = p(x)$ decrescem ilimitadamente; o gráfico corta o eixo y num ponto com ordenada positiva	o grau do polinômio é par, que o seu coeficiente líder é negativo e que o termo independente é positivo;
	Quando o x cresce ilimitadamente os valores de $y = p(x)$ crescem ilimitadamente e quando x decresce ilimitadamente, os valores de $y = p(x)$ decrescem ilimitadamente; o gráfico corta o eixo y num ponto com ordenada negativa	o grau do polinômio é ímpar, que o seu coeficiente líder é positivo e que o termo independente é negativo;
	Quando o x cresce ilimitadamente os valores de $y = p(x)$ decrescem ilimitadamente e quando x decresce ilimitadamente, os valores de $y = p(x)$ crescem ilimitadamente; o gráfico corta o eixo y num ponto com ordenada positiva	o grau do polinômio é ímpar, que o seu coeficiente líder é negativo e que o termo independente é positivo.

Fonte: elaboração própria

4.1.1 Análise a posteriori e avaliação das 1ª e 2ª partes

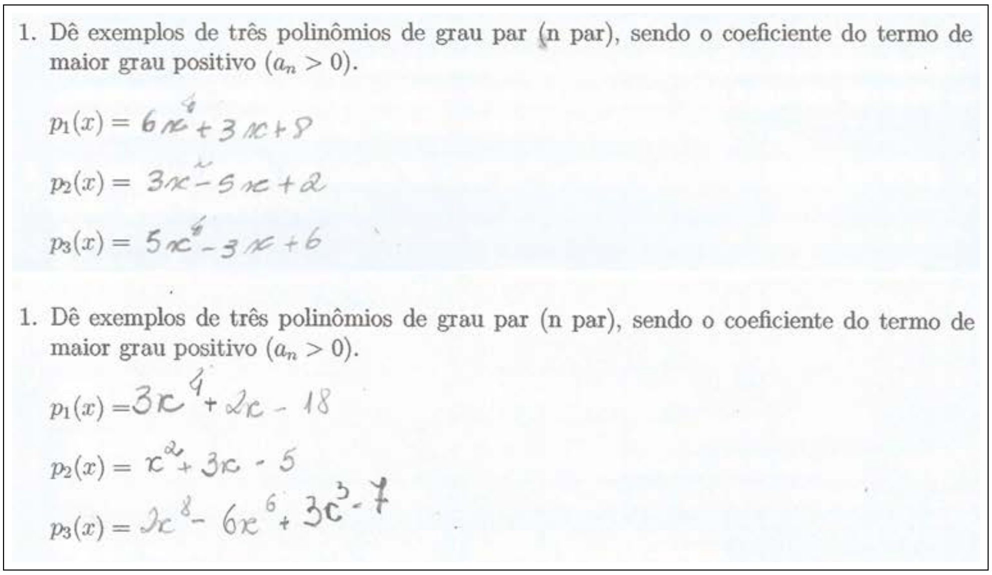
Os alunos receberam com entusiasmo os *tablets* e, embora nunca tivessem trabalhado com o aplicativo *xGraphing*, não apresentaram muitas dúvidas. Constatou-se, ainda, que a familiaridade dos alunos com as telas sensíveis ao toque, como já havia sido afirmado por Moran (s.d., p. 1) permitiu uma navegação mais intuitiva e mais fácil do que com o *mouse*.

Para começar a resolução das atividades com o aplicativo *xGraphing*, a apresentação de algumas funcionalidades foi necessário tal como digitar a equação e apagar a mesma, plotar o gráfico, capturar a imagem da tela, entre outros. Essas funcionalidades foram apresentadas por meio de um projetor multimídia e um *tablet* conectado ao mesmo. Cada grupo possuía um *tablet* em mãos e, a partir disso, foi explicado, com auxílio da imagem projetada, o manuseio dos aplicativos. O projetor multimídia foi utilizado como facilitador da apresentação das ferramentas disponíveis, e o uso do *tablet* exerceu um papel fundamental na execução da atividade, intermediando a relação entre o sujeito e o objeto de conhecimento.

4.1.2 Apresentação e análise a posteriori da 3ª parte

A 3ª parte da Atividade 1 foi estruturada com questões abertas, de modo a permitir aos alunos várias alternativas de exploração e investigação no estudo do comportamento do gráfico de polinômios de grau par. Na questão 1, foi solicitado que cada grupo indicasse três exemplos de polinômios de grau par (n par) com o coeficiente do termo de maior grau positivo ($a_n > 0$), de forma a permitir serem explorados 24 exemplos de polinômios e suas representações gráficas, visto que foram apresentados e discutidos os exemplos dos sete grupos e o da pesquisadora. A figura 35 apresenta um exemplo de resolução desta questão, tendo sido exemplificado por todos os 14 alunos corretamente.

Figura 35 – Resolução da questão 1 pelo aluno A e pelo aluno E


1. Dê exemplos de três polinômios de grau par (n par), sendo o coeficiente do termo de maior grau positivo ($a_n > 0$).

$p_1(x) = 6x^4 + 3x + 8$

$p_2(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$p_3(x) = 5x^6 - 3x + 6$

1. Dê exemplos de três polinômios de grau par (n par), sendo o coeficiente do termo de maior grau positivo ($a_n > 0$).

$p_1(x) = 3x^4 + 2x - 18$

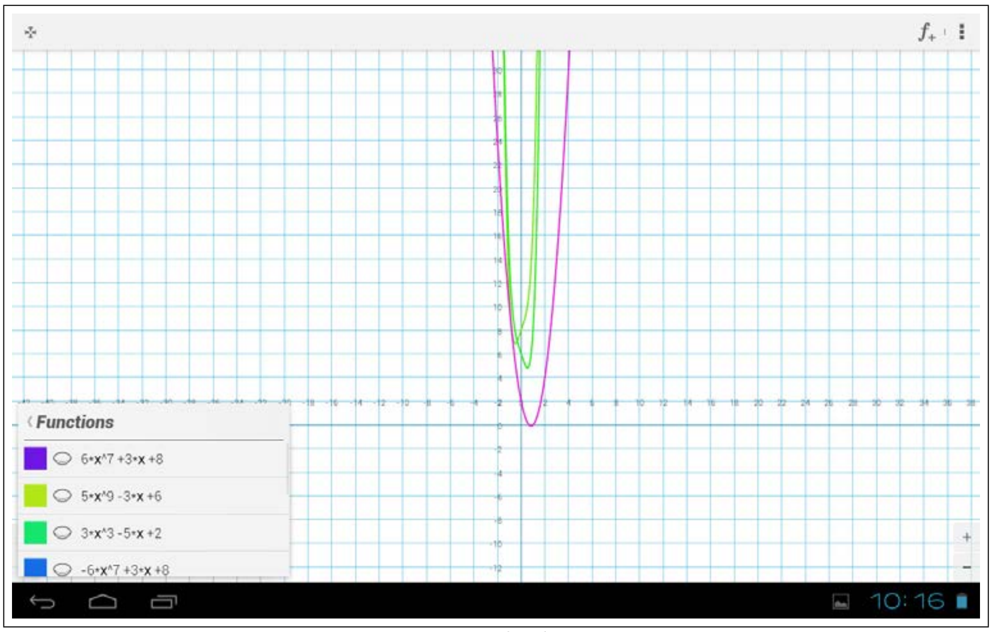
$p_2(x) = x^2 + 3x - 5$

$p_3(x) = 2x^8 - 6x^6 + 3x^3 - 7$

Fonte: protocolo de pesquisa

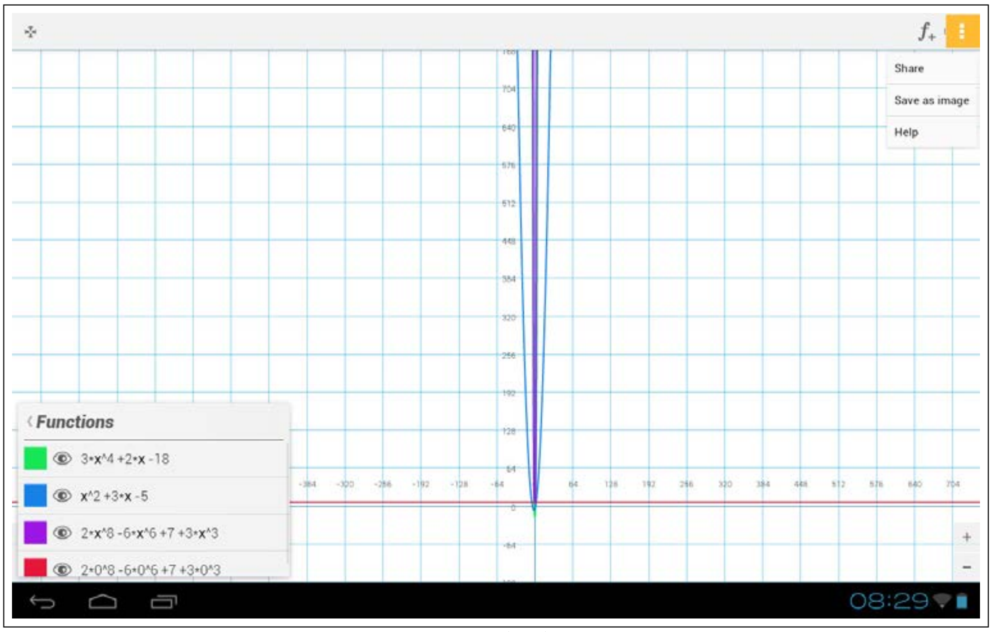
Na questão 2, foi solicitado que traçassem os respectivos gráficos, utilizando o aplicativo para *tablet*, *xGraphing* (Figuras 36 e 37) e, além disso, foi solicitado que analisassem o comportamento dos gráficos de forma a responderem os itens de (a) a (d). No momento de digitação das leis de associação da função no aplicativo, alguns alunos esqueciam-se de utilizar o asterisco (*) para multiplicar e o circunflexo (^) para representar potências. Esses problemas aconteceram de forma mais intensa na questão 2, o que não foi observado nas demais questões de construção de gráficos, visto que os próprios alunos, quando da referida ocorrência, identificavam imediatamente o erro.

Figura 36 – Gráficos apresentados pelo grupo 1



Fonte: protocolo de pesquisa

Figura 37 – Gráficos apresentados pelo grupo 2



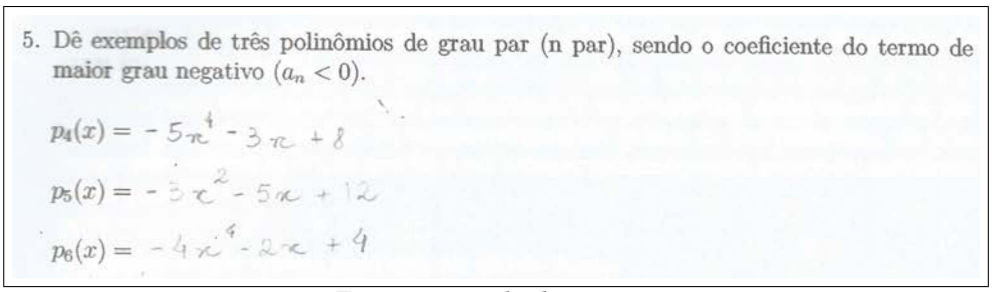
Fonte: protocolo de pesquisa

Observando os gráficos representados na questão, os alunos foram capazes de responder às questões 3 e 4. Todos os 14 alunos responderam corretamente que os termos independentes representavam a ordenada do ponto onde o gráfico cortava o eixo dos y, tanto quando o coeficiente líder era positivo, quanto quando o coeficiente líder era negativo.

Todos os 14 alunos, sujeitos da pesquisa, identificaram que, tanto quando x assumiu valores muito grandes ou quando x assumiu valores muito pequenos, o y cresceu ilimitadamente.

Na questão 5, foram solicitados três exemplos de polinômios de grau par (n par) com o coeficiente do termo de maior grau negativo ($a_n < 0$), que foram respondidos corretamente por todos os 14 alunos. Dos 14 alunos, 10 apresentaram todos os exemplos com três termos, ou seja, todos os polinômios de grau par, superior a 2, eram incompletos (Figura 38). O motivo da apresentação dos polinômios com três termos não foi identificado. Especula-se que seja pelo costume de estudar polinômios de 2º grau e estes, geralmente, têm três termos.

Figura 38 – Resolução da questão 5 da Atividade 1 pelo aluno G


5. Dê exemplos de três polinômios de grau par (n par), sendo o coeficiente do termo de maior grau negativo ($a_n < 0$).

$p_4(x) = -5x^4 - 3x + 8$

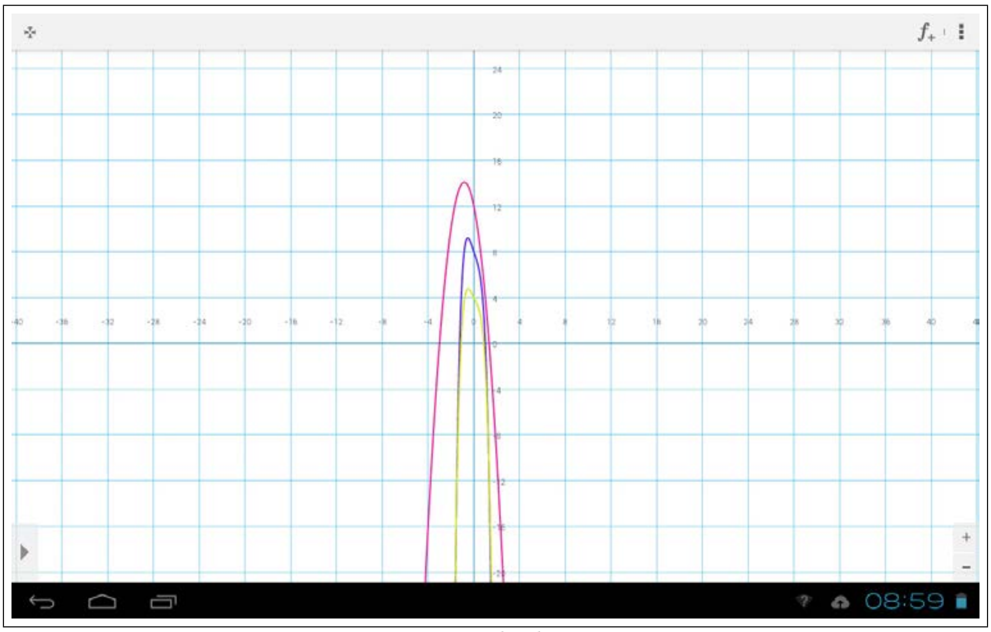
$p_5(x) = -3x^2 - 5x + 12$

$p_6(x) = -4x^4 - 2x + 4$

Fonte: protocolo de pesquisa

Na questão 6, foi solicitado que plotassem os gráficos dos exemplos apresentados na questão 5, utilizando o aplicativo para *tablet*, *xGraphing* (Figura 39).

Figura 39 – Gráfico apresentado pelo aluno G



Fonte: protocolo de pesquisa

Todos os 14 alunos, sujeitos da pesquisa, responderam corretamente que, tanto quando x assumiu valores muito grandes ou quando x assumiu valores muito pequenos, o y decresceu ilimitadamente.

Durante a resolução da questão 6, a pesquisadora observou que o aluno G repetia alguns gestos para o seu companheiro, enquanto parecia explicar ou conversar a respeito de suas conclusões. O aluno esticava os dois braços para cima e depois, esticava os dois braços para baixo repetindo o movimento. A pesquisadora se aproximou do grupo para saber a respeito e, um dos alunos explicou como havia entendido. Ele observou que, quando o grau do polinômio é par, desconsiderando os valores pequenos de x, o gráfico fica voltado todo para cima ou todo para baixo, conforme o sinal do coeficiente líder.

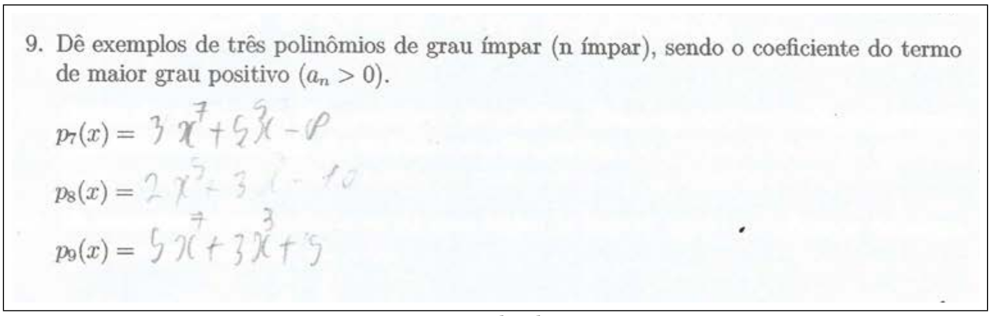
A pesquisadora solicitou que o aluno G apresentasse suas observações para toda a turma e, esse movimento foi, então, utilizado pela pesquisadora, que passou a fazer os mesmos gestos e linguagens, de forma a estabelecer um bom ambiente de aprendizagem. Essas condições são afirmadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 35) os quais mostram que os alunos tendem a elaborar conjecturas não completamente explícitas, apresentando uma linguagem não verbal apoiada nos gestos e na observação dos dados.

As questões 7 e 8 foram resolvidas a partir da observação dos gráficos traçados na questão 6, e todos os 14 alunos responderam corretamente que os termos independentes representavam a ordenada do ponto onde o gráfico cortava o eixo dos y, tanto quando o coeficiente líder era positivo, quanto quando o coeficiente líder era negativo.

4.1.3 Apresentação e análise a posteriori da 4ª parte

A 4ª parte da Atividade 1 também foi estruturada com questões abertas. Na questão 9, primeira questão da referida parte, foi solicitado que cada grupo indicasse três exemplos de polinômios de grau ímpar (n ímpar) com o coeficiente do termo de maior grau positivo ($a_n > 0$). Da mesma forma que o ocorrido no início da 3ª parte, os alunos foram dando exemplos, e estes eram escritos pela pesquisadora no quadro branco, de forma que os grupos apresentaram exemplos corretos e distintos. Ao observar a resolução do aluno M (Figura 40), pôde-se observar que os exemplos dados eram incompletos e os expoentes das variáveis, exceto do termo independente, eram todos ímpares, não só a variável do termo de maior grau. Outros exemplos ocorridos com polinômios incompletos, com a utilização do termo de maior grau ímpar superior a 1, tinham como termo seguinte um monômio de 1º grau. Dos 14 alunos que exemplificaram com polinômios incompletos de três termos na 3ª parte, 12 alunos exemplificaram do mesmo modo na 4ª parte. As referidas observações foram percebidas no momento da análise dos resultados.

Figura 40 – Resolução da questão 9 da Atividade 1 pelo aluno M


9. Dê exemplos de três polinômios de grau ímpar (n ímpar), sendo o coeficiente do termo de maior grau positivo ($a_n > 0$).

$p_7(x) = 3x^7 + 5x^5 - 8$

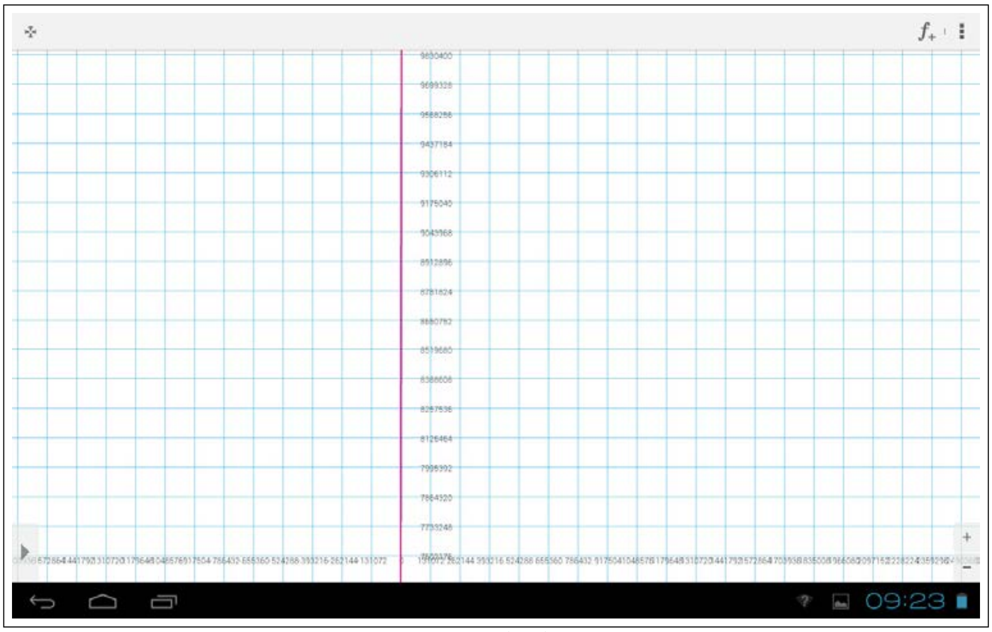
$p_8(x) = 2x^5 - 3x - 10$

$p_9(x) = 5x^7 + 3x^3 + 5$

Fonte: protocolo de pesquisa

Na questão 10, foi solicitado que plotassem os respectivos gráficos, utilizando o aplicativo para *tablet*, *xGraphing* e, além disso, foi solicitado que analisassem o comportamento dos gráficos e respondessem aos itens (a), (b), (c) e (d). Os alunos N, O e P tiveram dificuldade, inicialmente, para responder às questões, visto que, de forma não intencional, ampliaram a tela com o toque dos dois dedos, o que foi percebido pelos próprios alunos (Figura 41).

Figura 41 – Gráficos apresentados pelos alunos do grupo 7



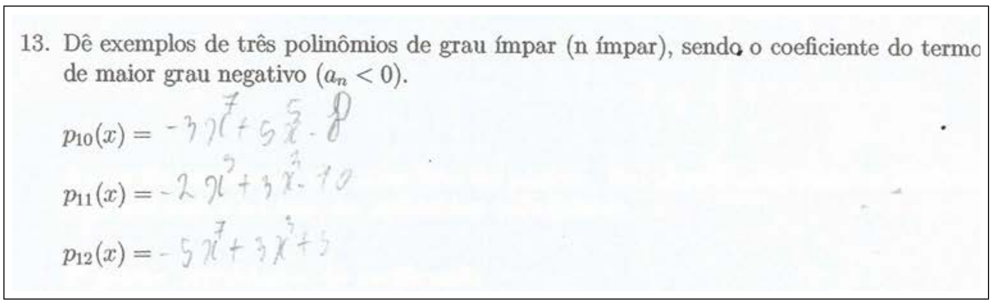
Fonte: protocolo de pesquisa

Cada aluno, analisando o gráfico construído por seu grupo, respondeu às questões 11 e 12. Todos os 14 alunos, sujeitos da pesquisa, responderam corretamente à questão.

Nesse momento, a pesquisadora perguntou se o comportamento do gráfico mudou quando comparado aos gráficos dos polinômios de grau par com coeficiente líder positivo, e todos responderam positivamente. Muitos, neste momento, fizeram um novo gesto com os braços, colocando, ao mesmo tempo, um braço esticado para cima e o outro esticado para baixo. Queriam mostrar, assim, que quando o x cresce o y também cresce, mas quando o x decresce, o y também decresce.

Na questão 13, os alunos deram exemplos de polinômios de grau ímpar (n ímpar) com o coeficiente do termo de maior grau negativo ($a_n < 0$), o aluno M utilizou os polinômios exemplificados na questão 9, alterando apenas o sinal do coeficiente líder (Figura 42), o que foi realizado por mais 7 alunos.

Figura 42 – Resolução da questão 13 da Atividade 1 pelo aluno M



13. Dê exemplos de três polinômios de grau ímpar (n ímpar), sendo o coeficiente do termo de maior grau negativo ($a_n < 0$).

$p_{10}(x) = -3x^7 + 5x^5 - 8$

$p_{11}(x) = -2x^3 + 3x^2 - 10$

$p_{12}(x) = -5x^7 + 3x^3 + 3$

Fonte: protocolo de pesquisa

Na questão 14, traçaram os gráficos dos polinômios de grau ímpar com coeficiente líder negativo. Analisando os gráficos obtidos na questão 14, todos os 14 alunos responderam corretamente que, quando x assumiu valores muito grandes, o y decresceu ilimitadamente e, quando x assumiu valores muito pequenos, o y cresceu ilimitadamente.

As questões 15 e 16 foram resolvidas a partir da observação dos gráficos traçados na questão 14. Todos os 14 alunos responderam corretamente que os termos independentes representavam a ordenada do ponto onde o gráfico cortava o eixo dos y, tanto quando o coeficiente líder era positivo, quanto quando o coeficiente líder era negativo.

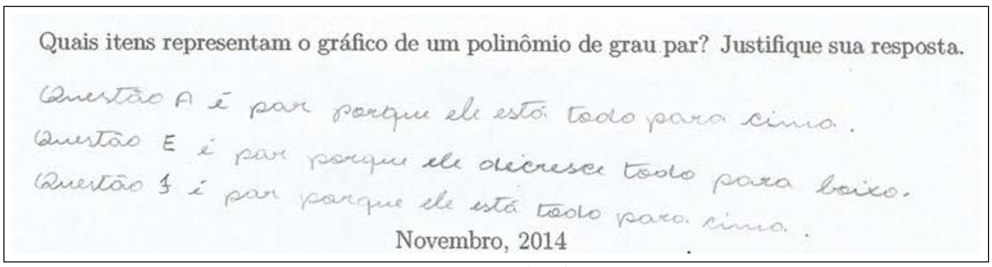
Embora na atividade exploratória (2ª parte da Atividade 1) tenham sido apresentados os comandos para multiplicação e potência, durante a resolução das questões da 3ª e 4ª partes, alguns alunos se esqueciam de digitar os referidos comandos das operações, mas imediatamente percebiam o erro. Como a construção dos gráficos foi realizada utilizando o aplicativo *xGraphing*, puderam-se analisar vários gráficos em pouco tempo, tornando mais ricas as observações relativas ao comportamento dos gráficos e suas relações com as expressões algébricas dos polinômios.

4.1.4 Apresentação e análise a posteriori da 5ª parte

A 5ª parte da Atividade 1 foi estruturada com duas questões fechadas correspondendo às questões 17 e 18 e, nesse momento, os alunos foram orientados a não utilizarem o aplicativo.

Embora os registros escritos não se apresentassem organizados e, suas justificativas não estivessem completamente explícitas, os registros das respostas retrataram a forma espontânea e genuína da apresentação dos pensamentos. Esses procedimentos foram estimulados no decorrer de todos os encontros, como pode ser verificado no registro realizado pelo aluno B, em que justifica suas escolhas para os gráficos que representam polinômios de grau par (Figura 43).

Figura 43 – Resolução da questão 17 item I pelo aluno B


Quais itens representam o gráfico de um polinômio de grau par? Justifique sua resposta.

Questão A é par porque ele está todo para cima.
Questão E é par porque ele decresce todo para baixo.
Questão I é par porque ele está todo para cima.

Novembro, 2014

Fonte: protocolo de pesquisa

Todos os 14 alunos responderam corretamente, identificando a paridade do grau dos polinômios representados e, o sinal do coeficiente líder. Contudo, uma dupla apresentou, inicialmente, dúvidas em relação à paridade do polinômio representado no item (e). Foi verificado que, como a figura foi cortada um pouco mais próxima ao eixo dos x, os alunos L e M não conseguiram identificar que os valores de y decresciam ilimitadamente, tanto para valores muito grandes, quanto para os valores muito pequenos de x. Foi necessária a intervenção da pesquisadora para sanar as possíveis dúvidas que ainda restavam, contudo, foi primordial a participação de um colega do grupo vizinho apresentando as suas conclusões a respeito. Essa situação pode ser atribuída ao fato de que, nos gráficos traçados no *xGraphing*, os alunos podiam ampliar ou reduzir o plano cartesiano apresentado na tela o quanto quisessem, tendo a certeza de que os valores de y continuariam crescendo ou decrescendo ilimitadamente.

Em relação ao sinal do termo independente, dos 14 alunos, apenas oito responderam corretamente; dois alunos deixaram os itens em branco. Os demais alunos acertaram o item em que identificava os gráficos que possuíam o termo independente igual a zero, mas apresentaram contradição nas respostas relativas ao termo independente positivo e negativo. Esse fato demonstra que os referidos alunos não discriminam a variável cognitiva referente ao valor do termo independente.

Na questão 18, dos 14 alunos, 11 responderam corretamente marcando o segundo gráfico; dois alunos marcaram, de forma incorreta, o primeiro gráfico que representava um polinômio de grau par. O aluno O marcou o terceiro gráfico que representava um polinômio de grau ímpar com coeficiente líder negativo.

4.1.5 Avaliação

A pesquisadora pôde observar que o uso do *tablet* contribuiu de forma significativa na realização da 1ª etapa da sequência didática, constituindo um importante meio para motivação, interatividade, mobilidade e facilidade na prática de trabalhos em grupos, conforme destacado por Silva et al. (2014, p. 2). A motivação e participação dos alunos, justificada pelo uso pedagógico dos *tablets*, também foi observada por Moreira, Barcelos e Batista (2013, p. 9) numa pesquisa com licenciandos em Matemática que utilizaram o aplicativo GeoGebra para um estudo de geometria dinâmica. Já Barcelos et al. (2013, p. 9) observaram uma dificuldade em utilizar *tablets* institucionais, pois os mesmos ficam com os alunos apenas no período de utilização em sala de aula. Observaram, ainda, que os alunos tiveram pouco tempo para experimentação dos recursos, visto que os mesmos não tinham familiaridade com o equipamento. O que não foi observado nesta pesquisa, embora apenas três alunos tenham respondido ao questionário que possuíam o *tablet*.

O uso do aplicativo *xGraphing* foi uma ferramenta importante no processo de aceleração dos tratamentos que envolveram produções de representações semióticas, uma vez que exibiram os registros na tela tão rapidamente quanto à produção mental, além de possibilitarem uma potência de tratamento ilimitada comparada ao que se teria obtido se as construções dos registros gráficos tivessem sido realizadas no papel. Uma outra vantagem é que os registros gráficos tornaram-se manipuláveis, podendo ser deslocados, ampliados ou reduzidos, criando um aspecto dinâmico e permitindo uma exploração heurística (DUVAL, 2011, p. 137). O que, também, foi observado por Silva et al. (2014, p. 13), no estudo da interpretação geométrica dos sistemas lineares, em que utilizaram três plotadores gráficos, sendo um deles o *xGraphing*.

As análises das 3ª, 4ª e 5ª partes da Atividade 1 foram realizadas em função das variáveis cognitivas definidas nos quadros 4.1 e 4.2 e, sua avaliação deverá confrontar as análises *a priori* e *a posteriori* com base nas variáveis cognitivas, ou seja, nas unidades significantes. As avaliações foram realizadas tomando como base cada sujeito da pesquisa e cada conjunto de unidades significantes que se contrapõem e/ou se mobilizam simultaneamente, de forma a permitir uma avaliação global e significativa.

Analisando as resoluções das questões da Atividade 1 realizadas pelos alunos e suas formas de converter os diferentes registros, a pesquisadora pôde avaliar o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos alunos no que concerne aos conceitos que envolvem o estudo de Polinômios.

Avaliando de forma global os registros dos alunos, observou-se que nove discriminaram corretamente as variáveis cognitivas referentes ao grau, ao sinal do coeficiente líder e ao termo independente dos polinômios, apresentando, assim, um rendimento de 100%. Os alunos A e B identificaram todas as variáveis visuais que caracterizam a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, mas na conversão inversa, ou seja, na identificação das variáveis escalares do registro algébrico, identificaram de forma incorreta o comportamento do gráfico de um polinômio de grau ímpar. No registro do aluno A, havia uma leve marcação apagada no gráfico certo, sugerindo que o referido aluno tenha interpretado, inicialmente, de forma correta. Esse resultado mostra que, embora o aluno possa ter sucesso num sentido da conversão, isso não garante o sucesso na conversão inversa. Dos dois pares de variáveis visuais, e dos quatro pares de variáveis escalares, pôde-se constatar que não houve discriminação em apenas um par de variáveis escalares, representando um rendimento médio desses alunos em cerca de 83%[1].

As dificuldades da conversão de uma representação dependem do grau de não congruência entre a representação de partida e a representação de chegada (DUVAL, 2009, p. 69). A variação de congruência e não congruência é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos problemas matemáticos propostos (DUVAL, 2009, p. 121). A conversão do registro gráfico para o registro algébrico e vice-versa, representa uma variação de não congruência e, como este trabalho privilegia esse tipo de conversão, pode-se afirmar que nenhuma das atividades da sequência didática promove a conversão congruente.

[1] O rendimento médio de cada estudante foi calculado por meio da razão percentual do número de pares de unidades significantes realizados corretamente pelo estudante e o total de pares de unidades significantes da Atividade 1. O cálculo para obtenção do rendimento (R) do aluno foi calculado pela fórmula $R = \frac{5}{6} \cdot 100 \cong 83,333\%$

Avaliando o resultado obtido pelo aluno E, verificou-se que este reconheceu a paridade do grau de todos os itens da questão 17, porém identificou de forma incorreta o sinal do coeficiente líder do item (d). Ao analisar a questão 18, em que se atribui a conversão inversa, o mesmo erro não foi apresentado e, na referida questão, o aluno identificou corretamente, tanto considerando a paridade do grau do polinômio, quanto o sinal do coeficiente líder. Portanto, para uma avaliação global, não se pode afirmar que o aluno E discrimina a variável visual correspondente ao coeficiente líder negativo num polinômio de grau par. Dos dois pares de variáveis visuais, e dos quatro pares de variáveis escalares, pôde-se constatar que não houve discriminação pelo aluno E, em apenas um par de variáveis visuais, representando um rendimento médio desse aluno em cerca de 83%.

Os alunos L e M apresentaram um erro similar na questão 17 apenas no item (b). Os referidos alunos identificaram de forma incorreta o sinal do coeficiente líder não discriminando a variável visual correspondente ao coeficiente líder negativo de um polinômio de grau ímpar. Dos dois pares de variáveis visuais, e dos quatro pares de variáveis escalares, pôde-se constatar que não houve discriminação em apenas um par de variáveis visuais, representando um rendimento médio desses alunos em cerca de 83%.

Portanto, dos 14 alunos, nove apresentaram discriminar as variáveis visuais e escalares desenvolvidas ao longo da Atividade 1 e, considerando a avaliação dos erros apresentados pelos cinco alunos indicados anteriormente, considerou-se um aproveitamento aproximado de 94%[2].

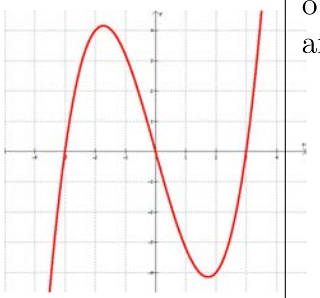
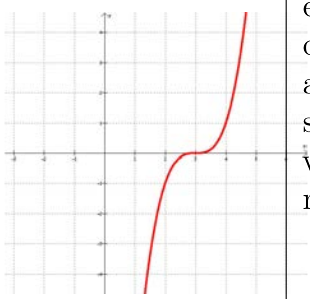
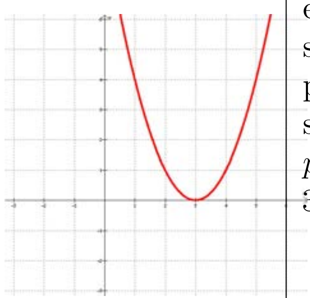
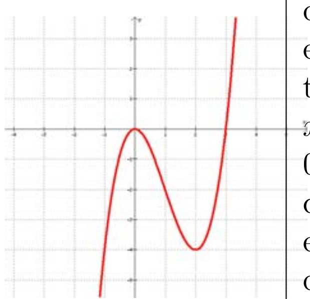
4.2 Encontro 2: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 2

A Atividade 2 foi estruturada com questões fechadas de modo a permitir que os alunos identificassem, nos registros algébricos dos polinômios, suas raízes reais bem como o comportamento das mesmas no gráfico e vice-versa. Em toda a pesquisa, privilegiou-se o registro dos polinômios em sua forma fatorada. Essa opção, entre outros fatores, foi decorrente do fato de os alunos apresentaram dificuldades na realização de divisões de polinômios na avaliação diagnóstica, operação necessária para a fatoração, que não é objeto principal da pesquisa.

Com o objetivo de analisar a pertinência cognitiva das quatro questões que compõem a Atividade 2, foram analisadas as unidades significantes destacadas nos quadros 4.3 e 4.4.

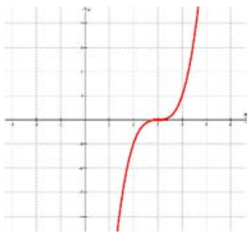
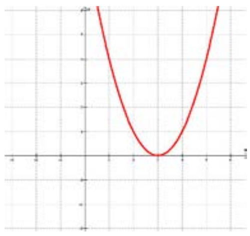
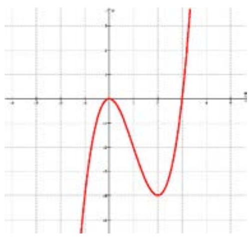
2 O valor do aproveitamento (A) foi obtido a partir do cálculo $A = \dfrac{9 \cdot 1 + 5 \cdot 0,83}{14} \cong 0,939$.

Quadro 4.3 – Identificação das variáveis cognitivas para análise da Atividade 2 - Conversão do registro algébrico para o registro gráfico

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis Escalares)**	**Registro de Chegada**	**Observações Esperadas** O aluno deve perceber que:
$p(x) = \frac{2}{5}x(x-3)(x+3)$	valores de x que zeram o polinômio		o gráfico corta ou toca o eixo x nas raízes reais;
$p(x) = (x-3)^3$	multiplicidade ímpar da raiz real		nesse caso, 3 é raiz real e que o gráfico corta o eixo x no ponto de abscissa 3, ou seja, o sinal de $y = p(x)$ na vizinhança de 3 é diferente;
$p(x) = (x-3)^2$	multiplicidade par da raiz real		nesse caso, 3 é raiz real e que o gráfico toca, sem cortar o eixo x no ponto de abscissa 3, ou seja, o sinal de $y = p(x)$ na vizinhança de 3 é igual;
$p(x) = x^2(x-3)$	multiplicidade par e ímpar da raiz real		nesse caso, 0 é raiz de multiplicidade par e, portanto, o gráfico toca, sem cortar o eixo x no ponto de abscissa 0, além de perceber que 3 é raiz simples e, portanto, o gráfico corta o eixo x no ponto de abscissa 3.

Fonte: elaboração própria

Quadro 4.4 – Identificação das variáveis cognitivas para análise da Atividade 2 - Conversão do registro gráfico para o registro algébrico

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis visuais)**	**Observações Esperadas** O aluno deve concluir que:
	O gráfico corta atravessando o eixo x no ponto de abscissa 3	nesse caso, 3 é uma raiz real do polinômio e que sua multiplicidade é ímpar;
	O gráfico toca, sem cortar o eixo x no ponto de abscissa 3	nesse caso, 3 é uma raiz real do polinômio e que sua multiplicidade é par;
	O gráfico toca sem cortar o eixo x no ponto de abscissa 0 e corta, atravessando o eixo x no ponto de abscissa 3	nesse caso, 0 e 3 são raízes reais do polinômio e as multiplicidades das raízes são par e ímpar, respectivamente.

Fonte: elaboração própria

4.2.1 Apresentação e análise a posteriori da 1ª parte

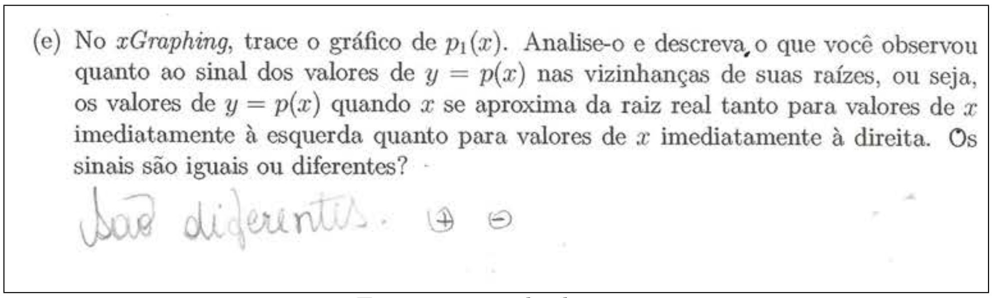
A 1ª parte da Atividade 2 teve por objetivo estudar o comportamento do gráfico de polinômios nas raízes reais de multiplicidade ímpar e, em suas respectivas vizinhanças. Na questão 1, foram apresentados os seguintes polinômios: $p_1(x) = x - 3$, $p_2(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-3,5)$, $p_3(x) = (x-3)^3$ e $p_4(x) = 0,01(x+2)^5(x-3)$, todos escritos como o produto de seu coeficiente líder por polinômios irredutíveis mônicos distintos. A opção pelos fatores mônicos, nessa primeira questão, deu-se pela análise da avaliação diagnóstica, na qual alguns alunos não reconheceram as raízes e suas multiplicidades. Assim, todos os 14 alunos, sujeitos da pesquisa, responderam corretamente ao item (a), determinando o grau desses polinômio. No item (b), os alunos A, B, G, L, M, N e O, ou seja, sete alunos, ao identificarem as raízes e suas respectivas multiplicidades, determinaram, de forma equivocada, que as raízes de $p_2(x)$ eram 3 e $3,5$, sendo a resposta correta 2 e 3,5.

O que pode demonstrar que, a pesquisadora ao privilegiar o numeral 3 em todos os itens, tenha favorecido o equívoco nas respostas.

Ao analisar as respostas do item (c), verificou-se que todos os 14 alunos responderam corretamente sobre a paridade das multiplicidades das raízes reais determinadas no item (b) e desses, apenas 11 responderam corretamente o item (d). Os demais alunos deixaram a resposta incompleta, levando a pesquisadora a compreender que os mesmos não identificaram que o valor da soma das multiplicidades das raízes era igual ao valor encontrado para o grau de cada polinômio.

Ainda na questão 1, nove alunos responderam corretamente aos itens (e), (f), (g) e (h). Os alunos G, O e N não responderam ao item (h), ou seja, se os sinais na vizinhança de suas raízes reais eram iguais ou diferentes, porém, mesmo não tendo respondido ao item anterior, os alunos G e N, responderam, no item (i) que, ao analisarem os gráficos dos polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$, os valores eram diferentes na vizinhança da raiz real de multiplicidade ímpar. Os alunos O e P não responderam ao item (i) . Vale destacar a notação utilizada pelo aluno E (Figura 44) demonstrando que o uso dos signos representa uma relação de referência (DUVAL, 2011, p. 23).

Figura 44 – Notação utilizada pelo aluno E


(e) No *xGraphing*, trace o gráfico de $p_1(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes, ou seja, os valores de $y = p(x)$ quando x se aproxima da raiz real tanto para valores de x imediatamente à esquerda quanto para valores de x imediatamente à direita. Os sinais são iguais ou diferentes?

São diferentes. (+) (−)

Fonte: protocolo de pesquisa

4.2.2 Apresentação e análise a posteriori da 2ª parte

A 2ª parte da Atividade 2 também foi estruturada com questões fechadas. No item (a) da questão 1, 11 alunos responderam corretamente. Os alunos G e N, identificaram o grau como o valor das raízes e o aluno O, errou apenas o grau do polinômio $p_5(x)$, pois também considerou a raiz real e não o expoente, apresentando não identificarem o conceito de grau de um polinômio como fora diagnosticado na análise preliminar.

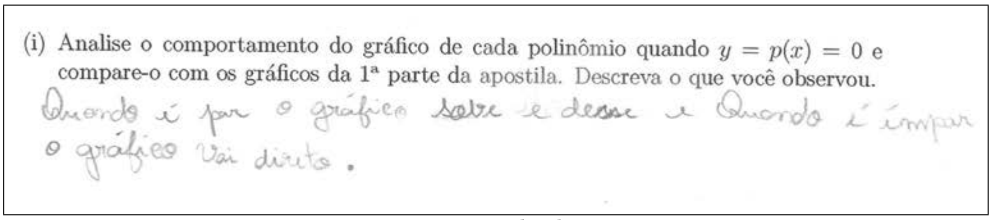
No item (b) da questão 1, todos os alunos acertaram as raízes e suas multiplicidades. Embora a pesquisadora não tenha explorado na avaliação diagnóstica polinômios com raízes reais iguais a zero, todos os alunos presentes identificaram corretamente a raiz real nula.

Ao analisar as respostas dos itens (c) e (d), verificou-se que todos os 14 alunos responderam corretamente sobre a paridade das multiplicidades das raízes reais e verificaram que a soma das multiplicidades das raízes é o mesmo valor do grau do polinômio.

Nos itens (e), (f), (g) e (h) da questão 1, todos os 14 alunos, sujeitos da pesquisa, responderam que os valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças das raízes reais assumiam valores iguais.

No item (i) da 2ª parte da Atividade 2, dos 14 alunos, 13 alunos identificaram a propriedade a partir da observação do gráfico e, apenas um aluno deixou o item em branco. A figura 45 apresenta o registro da resposta dada pelo aluno G ao item (i). Numa análise dissociada de seu contexto, estaria errada, porém sendo uma observação participante, na qual a pesquisadora esteve imersa no contexto, a observadora pôde considerar que houve apreensão do conceito, visto que Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.49) afirmam que, muitas vezes, os alunos não possuem um registro escrito organizado daquilo que fizeram.

Figura 45 – Resolução do item (i) da questão 1 da Atividade 2 realizada pelo aluno G


(i) Analise o comportamento do gráfico de cada polinômio quando $y = p(x) = 0$ e compare-o com os gráficos da 1ª parte da apostila. Descreva o que você observou.

Quando é par o gráfico sobe e desce e Quando é ímpar o gráfico Vai direto.

Fonte: protocolo da pesquisa

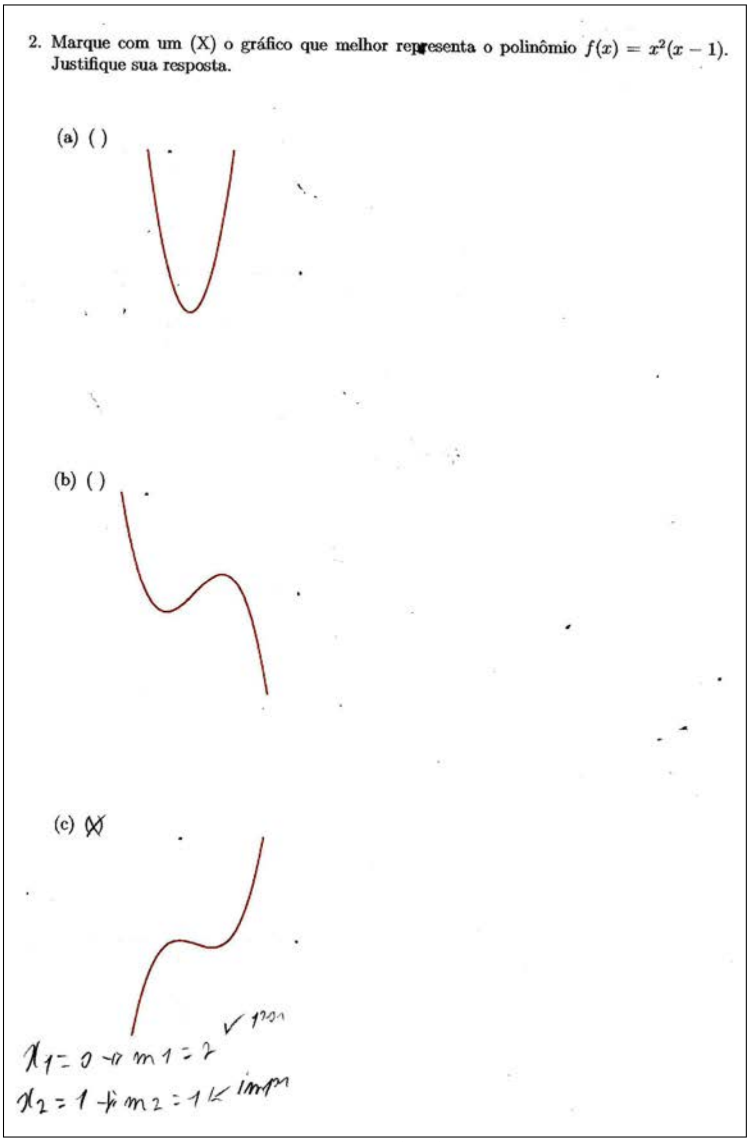
A pesquisadora privilegiou, neste estudo, o uso da expressão "o gráfico toca o eixo x sem cortar" a respeito do comportamento do gráfico, quando a raiz real tem multiplicidade par. O que não foi realizado por Dazzi e Dullius (2013, p. 390), pois afirmaram que os alunos deveriam visualizar que o gráfico tangenciava o eixo das abscissas nas vizinhanças da raiz real. Esse conceito de tangência não foi utilizado neste estudo devido ao fato de que, nas raízes reais de multiplicidade ímpar superior a 1, a raiz real é um ponto de inflexão e, assim, também há o conceito de tangência.

4.2.3 Apresentação e análise a posteriori da 3ª parte

A 3ª parte da Atividade 2 foi estruturada com duas questões fechadas correspondendo às questões 1 e 2. Na questão 1, os alunos foram orientados a marcarem com um ponto as raízes reais representadas nos seis gráficos de polinômios apresentados nos itens (a), (b), (c), (d), (e) e (f). O aluno E identificou, de forma equivocada, uma das raízes de multiplicidade ímpar do polinômio $p_4(x)$ representado graficamente no item (d). Embora o polinômio apresentasse duas raízes, uma com multiplicidade ímpar e outra com multiplicidade par, ou seja, com comportamentos gráficos distintos, o referido aluno identificou as duas raízes reais com multiplicidade par. Os alunos H e K, também, registraram equivocadamente que as raízes do polinômio representado na letra (e) tivessem a mesma paridade, embora comportamentos visuais distintos. Os referidos alunos identificaram que as raízes reais eram de multiplicidade ímpar, embora uma raiz fosse de multiplicidade ímpar e outra de multiplicidade par. O que leva a pesquisadora a concluir que esses alunos ainda não discriminam as variáveis cognitivas visuais relativas à multiplicidade das raízes.

A questão 2 da 3ª parte da Atividade 2 tinha por objetivo a conversão inversa da questão 1, e todos os 14 alunos identificaram corretamente, porém destes, apenas 12 justificaram sua resposta. Na referida questão, dos 12 que justificaram sua resposta, nove justificaram conforme a pesquisadora esperava, ou seja, que o polinômio $f(x)$ era um polinômio de grau ímpar e de coeficiente positivo. Porém, os alunos B, L e M identificaram pelas multiplicidades das raízes, o que foi bastante interessante e que, inicialmente, não havia sido levado em consideração no momento de elaboração da questão (Figura 46).

Figura 46 – Resolução da questão 2 da Atividade 2 realizada pelo aluno M



Fonte: protocolo da pesquisa

4.2.4 Avaliação

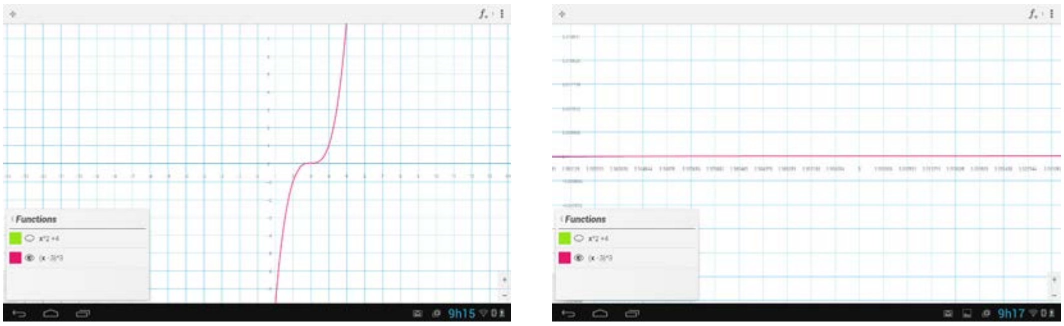
A análise da Atividade 2 foi realizada em função das variáveis cognitivas definidas no quadro 4.3 e 4.4 e sua avaliação deverá confrontar as análises *a priori* e *a posteriori* com base nas variáveis cognitivas, ou seja, nas unidades significantes. As unidades significantes, nesta atividade, são em um total de seis, sendo três variáveis escalares e três variáveis visuais.

Analisando as resoluções das questões da Atividade 2 realizadas pelos alunos e sua forma de converter os diferentes registros, a pesquisadora pôde avaliar o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos alunos no que concerne aos conceitos que envolvem o estudo de Polinômios em relação às suas raízes reais. Foi diagnosticado nesta pesquisa, como também foi destacado por Oliveira e Pereira (2010, p. 33), as observações acerca das escritas dos alunos sobre as suas conclusões a respeito das raízes reais: *as raízes são pontos em que o eixo x é cortado*; *o gráfico só tocou o eixo Ox na raiz real.* Oliveira e Pereira (2010, p. 58, 59) destacaram, ainda, que o uso dos gráficos viabilizou o estudo integrado dos pontos de vista algébrico e geométrico, proporcionando aos alunos observar a estreita relação entre a multiplicidade de uma raiz e o comportamento do gráfico nas suas vizinhanças, conforme pôde ser comprovado também neste estudo.

Optou-se, nesta pesquisa, por não discutir o comportamento do gráfico na vizinhança das raízes do polinômios de grau ímpar quando simples e quando de multiplicidade ímpar superior a 1, embora seja conhecido que, se o gráfico apresenta mudança de concavidade na raiz real de multiplicidade ímpar, então essa raiz real tem multiplicidade superior a 1 (CORREIA, 2000, p. 74). Essa decisão se justifica pelo fato de que ao se ampliar o gráfico de uma função polinomial, no *tablet*, tão próximo da raiz real quanto se queira, a mudança de concavidade desapareceria, e portanto, seria necessário um tempo superior ao previsto para discussão a respeito. A pesquisadora sugere, então, que esse tema seja proposto para estudos futuros. Tal temática foi explorada por Dazzi e Dullius (2013, p. 386) em uma pesquisa com 150 alunos, sobre o ensino de funções polinomiais de grau superior a 2 por meio de gráficos plotados no *software Graphmatica*. Nele, foi explorado que, na vizinhança da raiz simples, o gráfico se comporta como uma reta. A opção de não usar esse conceito neste estudo, está, justamente, na possibilidade de se ampliar o gráfico quanto se queira no aplicativo e, mesmo não sendo esse o comportamento do gráfico de um polinômio de grau ímpar superior a 1, ele sugerirá que é uma reta (Figura 47).

Figura 47 – Telas capturadas para a mesma função $f(x) = (x - 3)^3$

(a) Normal (b) Ampliada



Fonte: elaboração própria

Avaliando de forma global os registros dos alunos, observou-se que 11 discriminaram corretamente as variáveis cognitivas referentes às raízes reais e à paridade da multiplicidade das mesmas, apresentando, assim, um rendimento de 100%. O aluno E identificou todas as variáveis escalares que caracterizam a conversão do registro algébrico para o registro gráfico, mas na conversão inversa, ou seja, na identificação das variáveis visuais do registro gráfico, identificou, de forma incorreta, o comportamento do gráfico de uma das raízes reais de um dos seis polinômios apresentados. Embora tenha errado itens diferentes da questão, todos os dois erros se referem à variável cognitiva em que o gráfico corta atravessando o eixo x no ponto em que a abscissa representa a raiz do polinômio. Os alunos H e K não discriminaram a variável cognitiva em que o gráfico toca, sem cortar o eixo x, em apenas um dos seis itens. Esse resultado mostra mais uma vez que, embora o aluno possa ter sucesso num sentido da conversão, isso não garante o sucesso na conversão inversa. Das três variáveis escalares e das três variáveis visuais, pôde-se constatar que os três estudantes não foram capazes de discriminar um par de variáveis visuais, representando um rendimento médio de 83%.

As conversões de uma representação gráfica para uma representação algébrica são conversões não congruentes e, portanto, essa é uma das maiores causas da incompreensão ou dos erros de interpretação dos problemas matemáticos propostos (DUVAL, 2009, p. 121).

É importante ressaltar que para cada variação da unidade significante do registro de partida, obtém-se uma variação concomitante no registro de chegada (DUVAL, 2009, p. 104). Portanto, é fundamental a metodologia em fazer variar cada unidade significante, mantendo todos os outros constantes (DUVAL, 2011, p. 109).

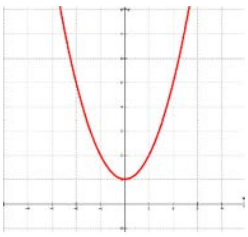
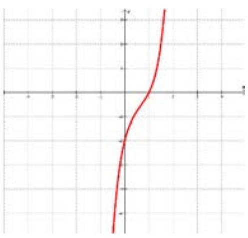
Para uma avaliação global, foram tomadas as seis variáveis cognitivas e, pôde-se constatar que, dos 14 alunos, 11 alunos apresentaram discriminar as variáveis visuais e escalares desenvolvidas ao longo da Atividade 2 e, considerando a avaliação dos erros apresentados pelos três alunos indicados anteriormente, considerou-se um aproveitamento aproximado de 96%[3] nesta Atividade.

4.3 Encontro 3: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 3

A Atividade 3 foi estruturada com questões fechadas de modo a permitir que os alunos identificassem, nos registros algébricos dos polinômios, suas raízes complexas não reais bem como o comportamento do gráfico em relação às mesmas.

A análise da Atividade 3 foi realizada em função das variáveis cognitivas definidas nos quadros 4.5 e 4.6.

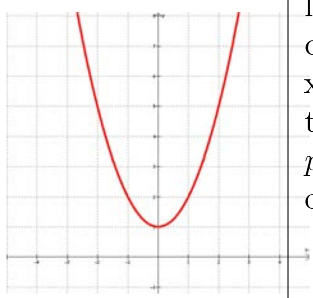
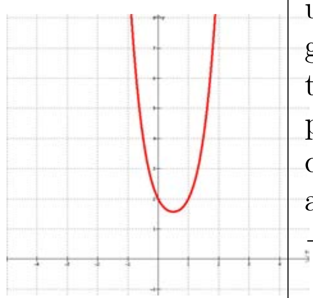
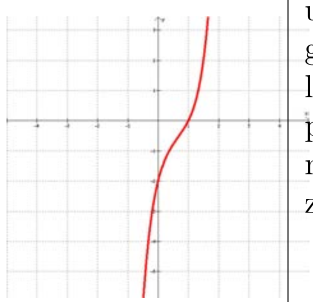
Quadro 4.5 – Identificação das variáveis cognitivas para análise da Atividade 3 - Conversão do registro gráfico para o registro algébrico

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis Visuais)**	**Observações Esperadas** O aluno deve concluir que:
	O gráfico de $p(x)$ não intersecta o eixo dos x	o polinômio possui apenas raízes complexas não reais e que o grau é par;
	O gráfico de $p(x)$ corta o eixo dos x em um único ponto	o polinômio tem uma única raiz real com multiplicidade ímpar, portanto, o polinômio é de grau ímpar, pois se houver raízes complexas não reais, elas são aos pares.

Fonte: elaboração própria

[3] O valor do aproveitamento (A) foi obtido a partir do cálculo $A = \dfrac{11 \cdot 1 + 3 \cdot 0,83}{14} \cong 0,963$

Quadro 4.6 – Identificação das variáveis cognitivas para análise da Atividade 3 - Conversão do registro algébrico para o registro gráfico

Registro de Partida	**Variáveis Cognitivas (Variáveis Escalares)**	**Registro de Chegada**	**Observações Esperadas** O aluno deve concluir que:
$p(x) = x^2 + 1$	raízes complexas não reais		se $p(x)$ é um polinômio de grau par com raízes complexas não reais então, o gráfico de $p(x)$ não intersecta o eixo x;
$p(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)$	raízes complexas não reais		nesse caso, $p(x)$ é um polinômio de 4º grau e que suas quatro raízes são complexas não reais e que estas acontecem aos pares, ou seja, i, $-i$, $1 + i$ e $1 - i$;
$p(x) =$ $= (x^2+1)(x^2-2x+2)(x-1)$	raízes complexas não reais e reais		nesse caso, $p(x)$ é um polinômio de 5º grau e que todo polinômio de grau ímpar possui um número ímpar de raízes reais.

Fonte: elaboração própria

4.3.1 Apresentação e análise a posteriori da 1ª parte

A 1ª parte da Atividade 3 foi estruturada de modo a favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes complexas não reais. As funções polinomiais de que tratam as questões são da forma:

$$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$ou$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$com$$

$$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \epsilon \mathbb{R}$$

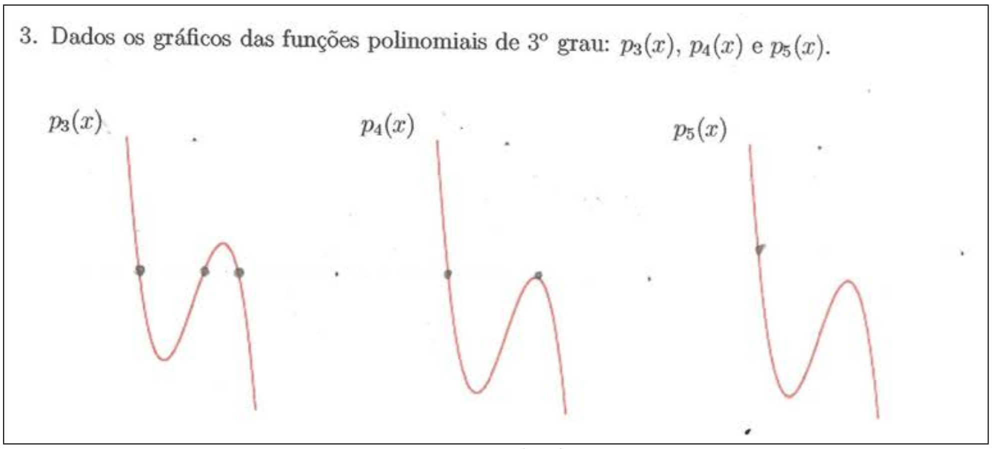
Na questão 1, dos 14 alunos, sujeitos da pesquisa, 12 determinaram corretamente o grau do polinômio $p_1(x)$ e resolveram determinando as raízes da equação polinomial e dois não responderam. Ao realizar os itens (c), (d) e (e) da questão 1, os mesmos 12 alunos responderam corretamente, identificando ter encontrado duas raízes para a equação $p_1(x) = 0$ e que essas raízes encontradas representavam números complexos não reais. Os outros dois alunos não responderam.

Todos constataram, ainda, que o número de raízes encontradas representava o mesmo valor do grau do polinômio $p_1(x)$ e, a partir da observação do gráfico traçado no *xGraphing*, os alunos foram capazes de responder ao item (g) e, tendo os mesmos 12 alunos respondido corretamente que o gráfico não cortava ou não tocava o eixo dos x. Essa experiência foi realizada, também, no estudo de Oliveira e Pereira (2010, p. 52) no qual os alunos observaram que, quando o polinômio não tem raízes reais, o gráfico não toca o eixo x e só toca ou corta o eixo x, se houver raízes reais.

Na questão 2 da 1ª parte da Atividade 3, todos os 14 alunos presentes reponderam corretamente que o polinômio $p_2(x)$ tinha grau 3 e que suas raízes eram -3, $2i$ e $-2i$. Ao compararem a quantidade de raízes com o grau do polinômio, identificaram que os valores eram iguais e classificaram o -3 como real e os demais $2i$ e $-2i$ como complexos não reais. Ao analisarem o comportamento do gráfico de $p_2(x)$, 12 alunos responderam corretamente que o gráfico corta o eixo x em apenas um ponto, dois outros alunos responderam "só vai cortar quando tiver o eixo real". Embora as respostas tenham uma linguagem equivocada, a pesquisadora as considerou corretas, pois os alunos tinham a intenção de afirmar que o gráfico só iria cortar o eixo dos x quando houvesse raízes reais, portanto, os 14 alunos, sujeitos da pesquisa, responderam corretamente ao item (f). Os dois alunos, ao verificarem o item (g) , repetiram a resposta mencionada no item (f); resposta correta percebida, também, pelos demais alunos e, portanto, os 14 alunos responderam corretamente ao item (g).

A questão 3 da 1ª parte foi estruturada a partir da apresentação do registro gráfico de três polinômios de 3º grau: $p_3(x)$, $p_4(x)$ e $p_5(x)$ e composta pelos itens (a), (b), (c), (d) e (e). Para responder ao item (a), o aluno G utilizou uma marcação para identificar as interseções do gráfico com o eixo x, fato identificado também na Atividade 2 (Figura 48). Esse procedimento também foi realizado pelo aluno B.

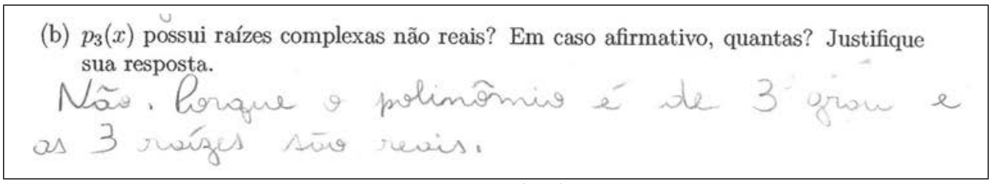
Figura 48 – Questão 3 da 1ª parte da Atividade 3 - aluno G



Fonte: protocolo de pesquisa

Todos os 14 alunos responderam que $p_3(x)$ possuía três raízes reais, justificando porque cortava o eixo x três vezes. Os 14 alunos responderam corretamente ao item (b) respondendo que $p_3(x)$ não possuía raízes complexas não reais, porém, apenas 13 alunos justificaram corretamente sua resposta (Figura 49), o outro aluno não justificou.

Figura 49 – Questão 3 da 1ª parte da Atividade 3 - aluno H



(b) $p_3(x)$ possui raízes complexas não reais? Em caso afirmativo, quantas? Justifique sua resposta.

Não. Porque o polinômio é de 3º grau e as 3 raízes são reais.

Fonte: protocolo de pesquisa

Nos demais itens (c), (d), (e) e (f), as respostas corretas foram verificadas em todos os registros dos 14 alunos, sendo que apenas um aluno não justificou suas respostas.

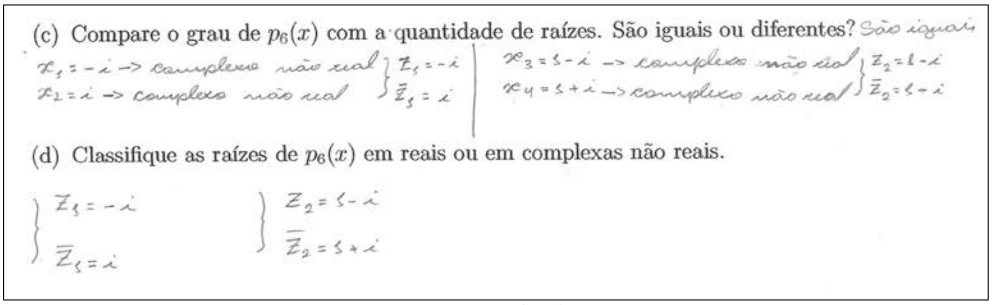
Algumas observações destacadas no trabalho de Oliveira e Pereira (2010, p. 52) em relação à interpretação geométrica das raízes dos polinômios foram: "Não dá para identificar as raízes não reais somente pelo gráfico porque somente as reais tocam o eixo x"; "Aparece no gráfico somente as raízes que forem reais", tais considerações foram observadas também pelos 14 alunos, sujeitos da pesquisa.

4.3.2 Apresentação e análise a posteriori da 2ª parte

Na questão 1 da 2ª parte da Atividade 3, todos os 14 alunos identificaram corretamente que o grau de $p_6(x)$ era 4. Ao responder o item (b), alguns alunos apresentaram dificuldade. Foi necessário intervir explicando que para encontrar as raízes deveriam encontrar todos os valores de x que tornam $p_6(x)$ igual a zero. Foram levados a verificar que $p_6(x)$ tinha dois fatores e que estudar os valores de x que zeram o polinômio é o mesmo que estudar os valores de x que zeram cada um dos fatores. Assim, os alunos desenvolveram a questão individualmente.

Ao realizar os itens (b), (c) e (d) da questão 1, todos os 14 alunos encontraram as raízes $-i$, i, $1-i$ e $1+i$, compararam a quantidade de raízes e o grau, verificaram que a quantidade de raízes e o grau do polinômio eram iguais, identificando que todas as raízes eram complexas não reais. Apenas um dos alunos, em sua resolução, indicou sua resposta utilizando a notação de números complexos conjugados, como apresentado na figura 50. Sua resposta ao item (d) está apresentada no item (c).

Figura 50 – Resolução do item (d) realizada pelo aluno B



(c) Compare o grau de $p_6(x)$ com a quantidade de raízes. São iguais ou diferentes? São iguais

$x_1 = -i$ -> complexo não real, $x_2 = i$ -> complexo não real $\left.\right\}$ $Z_1 = -i$, $\bar{Z}_1 = i$

$x_3 = 1-i$ -> complexo não real, $x_4 = 1+i$ -> complexo não real $\left.\right\}$ $Z_2 = 1-i$, $\bar{Z}_2 = 1+i$

(d) Classifique as raízes de $p_6(x)$ em reais ou em complexas não reais.

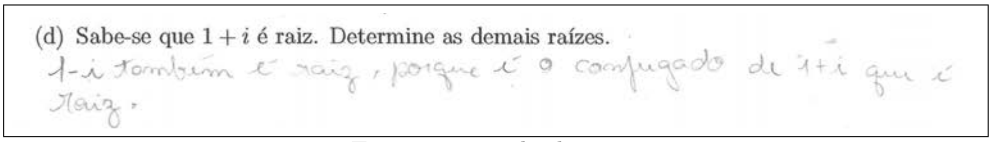
$\left.\right\}$ $Z_1 = -i$, $\bar{Z}_1 = i$ $\left.\right\}$ $Z_2 = 1-i$, $\bar{Z}_2 = 1+i$

Fonte: protocolo da pesquisa

No item (e) da 1ª questão, os alunos deveriam analisar as raízes encontradas e descrever o que observaram, lembrando dos conceitos de números complexos conjugados. Dos 14 alunos, 13 concluíram que para cada raiz complexa não real o seu conjugado também o será, o que não foi discriminado por um deles, visto que deixou o item em branco.

Na questão 2 da 2ª parte da Atividade 3 item (a), todos os 14 alunos presentes responderam corretamente, afirmando que o polinômio $p_7(x)$ tinha quatro raízes e, mesmo não tendo sido solicitado, 10 alunos justificaram afirmando que $p_7(x)$ tinha quatro raízes porque era um polinômio de 4º grau. Os 14 alunos responderam corretamente aos itens (b) e (c), verificando corretamente que $p_7(x)$ possuía duas raízes reais e, portanto, duas raízes complexas não reais. Ao responderem ao item (e), em que deveriam determinar as demais raízes além da raiz $1+i$, 13 alunos responderam escrevendo todas as quatro raízes corretamente, incluindo a raiz indicada no item, e um aluno determinou, apenas, o conjugado de $1+i$. O aluno que respondeu apenas o conjugado de $1+i$ foi o aluno G que, embora tenha tido uma interpretação equivocada do enunciado, realizou, de forma fundamentada a decisão pela sua resposta, conforme pode ser verificado na figura 51. O aluno G, embora não tenha registrado na Atividade as demais raízes, em sua participação oral identificou corretamente as outras raízes do polinômio $p_7(x)$.

Figura 51 – Resolução do item (e) da questão 2 da 2ª parte da Atividade 3 - aluno G



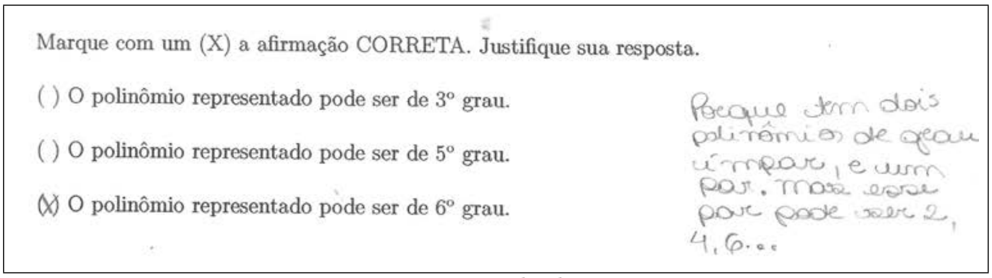
(d) Sabe-se que $1 + i$ é raiz. Determine as demais raízes.

1-i também é raiz, porque é o conjugado de 1+i que é raiz.

Fonte: protocolo de pesquisa

Na questão 3, todos os 14 alunos marcaram corretamente a terceira sentença, a qual afirmava que o gráfico representado poderia ser de um polinômio de 6º grau. Sete alunos, embora tivessem marcado corretamente, não justificaram suas respostas. Seis justificaram suas respostas por meio da observação do gráfico nas raízes reais. Os alunos afirmaram ter percebido que quatro raízes eram reais e, portanto, tinham duas raízes complexas não reais. Isso mostra que identificaram corretamente uma raiz real de multiplicidade par e duas raízes reais de multiplicidade ímpar, além de perceber que as raízes complexas ocorrem aos pares. O aluno J concluiu, de forma mais rápida, justificando sua escolha simplesmente pelo comportamento do gráfico. O mesmo percebeu que o gráfico representava um polinômio de grau par e só existia um item com a opção do grau do polinômio par (Figura 52).

Figura 52 – Resolução da questão 3 pelo aluno J



Marque com um (X) a afirmação CORRETA. Justifique sua resposta.

( ) O polinômio representado pode ser de 3º grau.

( ) O polinômio representado pode ser de 5º grau.

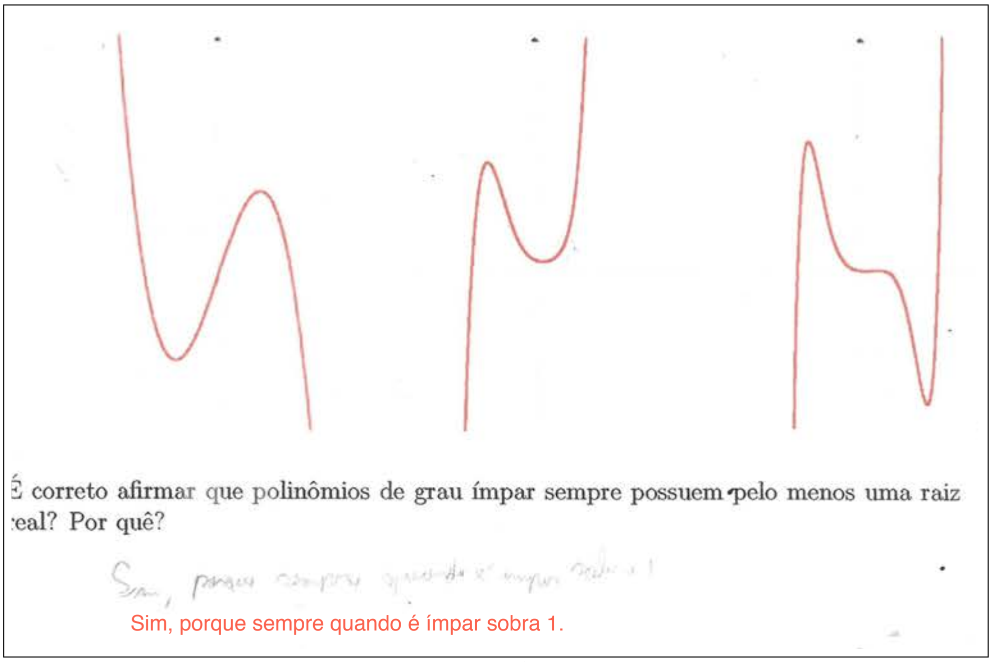
(X) O polinômio representado pode ser de 6º grau.

Porque tem dois polinômios de grau ímpar, e um par. Mas esse par pode ser 2, 4, 6...

Fonte: protocolo de pesquisa

Na questão 4, foram apresentados os gráficos de três polinômios de graus 3, 5 e 7, respectivamente. Dos 14 alunos, 13 responderam que estava correto afirmar que todos os polinômios de grau ímpar sempre possuem uma raiz real. Desses 13 alunos, três não justificaram suas respostas. Dos 10 alunos que justificaram, oito afirmaram que os polinômios de grau ímpar sempre cortam o eixo x e que, isso significa que, pelo menos, uma raiz é real. O aluno J afirmou que, se o grau é ímpar e os números complexos não reais acontecem aos pares, então sempre sobra, pelo menos, um que seja real. O mesmo raciocínio foi observado na justificativa do aluno L, embora com uma linguagem mais simples (Figura 53).

Figura 53 – Resolução da questão 3 pelo aluno L



Fonte: protocolo de pesquisa

4.3.3 Apresentação e análise a posteriori da 3ª parte

A 3ª parte da Atividade 3 consistiu em uma única questão para verificação dos conceitos desenvolvidos nas duas primeiras partes. Dos 14 alunos, 11 responderam corretamente identificando o comportamento do gráfico quando: todas as suas quatro raízes são complexas não reais, ou seja, o gráfico não intersecta o eixo dos x; possui as quatros raízes reais todas distintas, ou seja, o gráfico intersecta o eixo x em quatro pontos distintos; possui duas raízes reais distintas e duas raízes complexas não reais, ou seja, o gráfico intersecta o eixo x em apenas dois pontos distintos; possui uma raiz real dupla e duas raízes complexas não reais, isto é, o gráfico toca o eixo x sem atravessar em um único ponto, sendo este o único ponto de intersecção; possui uma raiz real dupla e duas raízes reais distintas, isto é, o gráfico toca o eixo x sem atravessar em um único ponto e corta o eixo x em dois outros pontos distintos. Os alunos A, B e P fizeram confusão entre dois itens, trocaram o gráfico III pelo V e V pelo III. Ao observar as respostas, a pesquisadora considerou que o termo utilizado "uma raiz real dupla" pode ter gerado confusão, pois em toda a atividade usou apenas, o termo multiplicidade dois. O aluno I trocou o gráfico V por II e vice-versa, o que levou a pesquisadora a refletir sobre o termo raiz simples. Em todas as questões da Atividade 3 em que os alunos tinham de identificar as multiplicidades, os mesmos indicavam com o número 1. A pesquisadora, oralmente, em todas as situações em que se tratava de raiz real de multiplicidade 1, afirmava se tratar de raiz simples e, portanto, não estimulando o registro escrito para associação. Então, em se tratando das peculiaridades da memória, Vigotsky (2010, p. 189) afirma que quanto mais diversas as vias pelas quais a reação penetra no sistema nervoso, mais sólida ela permanece.

4.3.4 Avaliação

A análise da Atividade 3 foi realizada em função das variáveis cognitivas definidas nos quadros 4.5 e 4.6.

Analisando as resoluções das questões da Atividade 3 realizadas pelos alunos e sua forma de converter os diferentes registros, a pesquisadora pôde avaliar o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos alunos no que concerne aos conceitos que envolvem o estudo de Polinômios em relação às suas raízes reais e complexas não reais. A atividade de análise levará em consideração as unidades significantes tratadas nesta atividade.

Confrontando as análises *a priori* e a *a posteriori*, obtiveram-se as seguintes considerações:

- todos os 14 alunos:

  - apreenderam que o grau do polinômio é igual à quantidade de raízes do mesmo;

  - levaram em consideração a multiplicidade das raízes na contagem das mesmas;

  - identificaram que o gráfico de uma função polinomial intersecta o eixo x apenas nos pontos cujas abscissas correspondem aos valores das raízes reais;

  - identificaram que se um número complexo não real é raiz de um polinômio, o seu conjugado também o será;

- 13 alunos identificaram que um polinômio de grau ímpar tem um número ímpar de raízes reais.

Considerando a avaliação de forma global e integrada a partir das cinco variáveis cognitivas desenvolvidas na Atividade 3, avaliou-se que os alunos observados, por meio da referida Atividade, obtiveram um aproveitamento de aproximadamente 99%[4].

4.4 Encontro 4: apresentação dos resultados, análise a posteriori e avaliação da Atividade 4

A Atividade 4 foi estruturada com sete questões fechadas, quatro são de múltipla escolha e três discursivas.

Sendo a Atividade 4 proposta como um procedimento de avaliação, a análise das respostas levará em consideração não os acertos ou erros em si, mas as formas de se apropriar dos conhecimentos referentes ao estudo de Polinômios (CURY, 2007, p. 63).

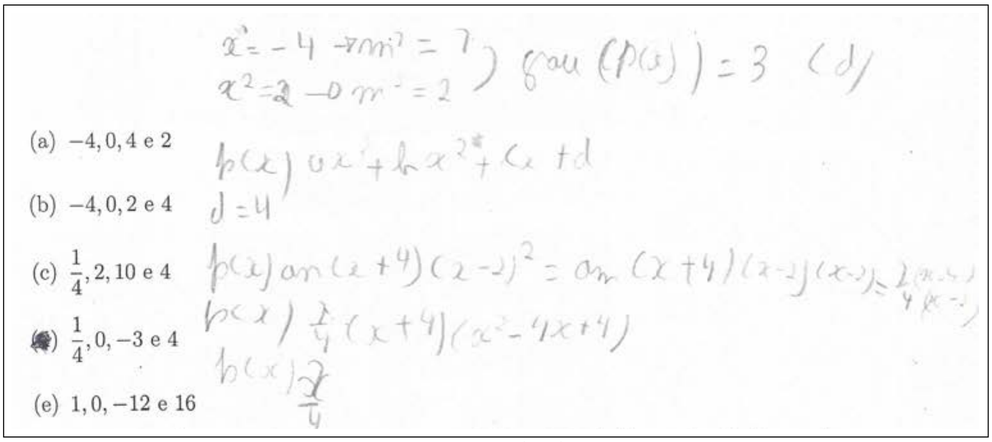
[4] O valor do aproveitamento (A) foi obtido a partir do cálculo $A = \dfrac{4 \cdot 1 + 0,93}{5} \cong 0,986$

Ao distribuir a Atividade 4, que era para ser realizada individualmente, a pesquisadora percebeu que houve uma certa apreensão na resolução da questão 1. Ao circular entre os alunos, a observadora percebeu que muitos alunos já tinham identificado que $p(x)$ era um polinômio de 5º grau e que todas as suas raízes eram reais e que correspondiam a 0, 1, -2 e 2, sendo que 0 era raiz dupla, mas, depois dessas considerações, não sabiam mais o que fazer porque não encontravam a resposta. A pesquisadora perguntou para toda a classe como estavam pensando em resolver a questão e o aluno J levantou a mão e disse que havia substituído a incógnita x por $x-2$ na expressão. Nesse momento, a classe se manifestou mostrando ter compreendido o que o colega realizou. A pesquisadora, então, solicitou aos alunos que já haviam começado a questão determinando as raízes de $p(x)$ que não apagassem o que fizeram, pois explicaria uma outra forma mais rápida para resolver. Assim, os alunos chegaram à expressão algébrica $p(x-2) = (x-2)^2(x-3)x(x-4)$ e determinaram as raízes reais 0, 2, 3 e 4, sendo que a raiz real 2 era de multiplicidade dois. Mais uma vez, a pesquisadora teve que intervir perguntando quais dos cinco itens poderiam representar o $p(x-2)$, se fossem analisados apenas em relação às raízes reais, e os alunos responderam que, apenas os itens (a), (b) e (d) poderiam ser a resposta correta. Nesse momento, a pesquisadora perguntou ao aluno J se ele saberia explicar o porquê dos itens (c) e (e) não serem possíveis respostas e, ele respondeu que os polinômios representados nos referidos itens possuíam raízes negativas, o que foi confirmado pelos demais colegas. A pesquisadora solicitou, então, que analisassem o comportamento do gráfico, visto que $p(x-2)$ era um polinômio de grau ímpar. O aluno G foi o primeiro a perceber que o item (d) representava um polinômio de grau par e, portanto, não poderia ser a representação do polinômio $p(x-2)$ que tinha grau 5, ficando, assim, a resposta correta entre os itens (a) e (b). Nesse momento, a pesquisadora pediu que respondessem individualmente e registrassem o porquê da escolha. Todos os 14 alunos marcaram corretamente a letra (a).

Após terem respondido à questão, a pesquisadora falou rapidamente a respeito da transformação ocorrida por $p(x)$ ao considerar $p(x-2)$, ou seja, o gráfico transladou duas unidades para a direita e, portanto, as raízes reais de $p(x)$: -2, 0, 1 e 2, sendo 0 raiz dupla, transformaram-se em 0, 2, 3 e 4, respectivamente. A pesquisadora informou, ainda, que as demais análises seriam as mesmas.

Na questão 2, todos os 14 alunos responderam corretamente marcando o item (d). Entretanto, nove alunos não fizeram registro algum referente ao seu procedimento de resolução; os demais apresentaram o método de resolução de forma incompleta. Em suas notações identificaram as raízes reais e suas respectivas multiplicidades, identificando que o polinômio possuia apenas raízes reais e que o valor do termo independente era 4. Embora não houvesse registro, pôde-se afirmar, a partir da opção escolhida e pela observação participante, que todos os 14 alunos identificaram o valor de d, pois verificaram que a ordenada do ponto de intersecção do gráfico com o eixo y valia 4 e, portanto, responderam $d = 4$. Os alunos identificaram que os itens corretos só poderiam ser (b), (c) ou (d). Além disso, todos os 14 alunos identificaram que as raízes dos polinômios eram todas reais e que correspondiam a -4 e 2, sendo esse último de multiplicidade 2. Porém, apenas dois alunos representaram o polinômio $p(x)$ na forma de fatores considerando o coeficiente líder desconhecido e igual a a, ou seja, $p(x) = a(x+4)(x-2)^2$, conforme pode ser verificado na resolução parcial do aluno R na figura 54.

Figura 54 – Resolução parcial da questão 2 da Atividade 4 pelo aluno R



Fonte: protocolo de pesquisa

Nesse momento, a pesquisadora decidiu intervir, visto que nem mesmo os alunos que tinham expressado o polinômio em relação às raízes reais encontradas, conseguiam desenvolver a expressão encontrando $p(x) = ax^3 - 12ax + 16a$. A pesquisadora foi conduzindo de forma que todos percebessem que $16a$ representava o termo independente e, portanto, $16a$ era igual a 4, encontrando assim $a = \dfrac{1}{4}$. Os alunos verificaram que os itens corretos só poderiam ser (c) ou (d) e para resolver, era necessário determinar outro coeficiente desconhecido. Os alunos verificaram na expressão que não havia o termo de grau 2 e concluíram que b só poderia valer 0, determinando, assim, o item (d) como a resposta certa. Portanto, concluíram que $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 0$, $c = -3$ e $d = 4$.

Na questão 3, dos 14 alunos, 13 responderam corretamente ao marcarem o item (e), levando a pesquisadora a considerar que as variáveis cognitivas envolvidas na questão foram discriminadas, porém o aluno P fez duas marcações, uma no item (d) e outra no item (e). A pesquisadora se aproximou de um dos alunos que já haviam finalizado sua resolução e perguntou como ele pensara para resolver a questão tão rapidamente, e o aluno explicou que o termo independente era negativo, então só poderia ser o item (b) ou o item (e), mas como o coeficiente líder era positivo, então o gráfico correto era o do item (e), mostrando assim que os alunos discriminaram as variáveis cognitivas visuais, fazendo-as relacionar com as variáveis cognitivas escalares correspondentes.

Na questão 4, os alunos verificaram imediatamente que as raízes reais do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 16x + m$ eram -2 e 1, porém nenhum aluno identificou que para determinar o valor de m bastava encontrar $P(-2)$ ou $P(1)$ e igualar a zero, determinando, assim, $m = -16$. Para determinar as raízes, também foi necessária a intervenção da pesquisadora para que identificassem que $P(x)$ seria da forma $P(x) = Q(x)(x+2)(x-1)$, determinando o produto de $(x+2)$ por $(x-1)$ encontrando o polinômio de grau 2, $G(x) = x^2+x-2$ e, ao dividirem $P(x)$ por $G(x)$, encontrariam o polinômio $Q(x)$ também de grau 2 com raízes complexas iguais a $2-2i$ e $2+2i$. Portanto, a pesquisadora considerou que nenhum aluno acertou a questão.

Diante das dificuldades apresentadas pelos alunos, foi sugerido que não realizassem a questão 5 e fossem direto para a questão 6. Todos os 14 alunos marcaram corretamente o item (d), embora os alunos J, G e N tenham marcado inicialmente a letra (e), pois havia uma leve marcação. Perguntado sobre a alteração na resposta, o aluno N disse que ficou entre a letra (d) e a letra (e) porque sabia que o polinômio era de grau 3, marcou a letra (e), mas em seguida, percebeu que se fosse o item (e) a resposta correta, o gráfico não passaria cortando o eixo x no 0, mas apenas tocaria e, não foi isso que o gráfico mostrava.

Como algumas resoluções se estenderam mais do que o tempo previsto, 100 minutos de aula, a pesquisadora decidiu não realizar a questão 7 com os alunos.

4.4.1 Avaliação

A análise da Atividade 4 foi realizada em função das variáveis cognitivas definidas nos quadros 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6.

Analisando as resoluções das questões da Atividade 4 realizadas pelos alunos, a pesquisadora verificou a influência da sequência didática na compreensão dos conceitos que envolvem o estudo de Polinômios. A Atividade 4 auxiliou a pesquisadora de forma a obter uma avaliação global da pesquisa.

Ao optar por uma atividade de verificação que contivesse apenas questões de vestibulares, a pesquisadora considerou que esse seria um fator de motivação para a coleta das respostas dos alunos, bem como um meio para apresentar a importância do estudo de conversão em diferentes registros.

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori*, obtiveram-se as seguintes considerações em relação à questão 1:

- apenas um aluno substituiu na expressão todas as variáveis de x por $x-2$ determinando $p(x-2) = (x-2)^2(x-3)x(x-4)$;

- todos os 14 alunos:

  - identificaram que o polinômio $p(x)$ era um polinômio de grau 5 e, portanto, possuía 5 raízes;

- desenvolveram a expressão algébrica do polinômio $p(x)$, obtendo $p(x) = x^2(x-1)(x+2)(x-2)$;

- identificaram as raízes reais de $p(x-2)$ e suas multiplicidades;

- identificaram que todas as raízes de $p(x-2)$ eram reais, visto que determinaram 5 raízes reais e $p(x-2)$ é de 5º grau;

- identificaram que o gráfico de $p(x-2)$ corta o eixo dos x nos pontos de abscissa 3, 0 e 1;

- identificaram que o gráfico de $p(x-2)$ toca sem atravessar o eixo do x no ponto de abscissa 2, pois esta raiz tem multiplicidade par;

- identificaram que sendo 1 o coeficiente líder de $p(x-2) = 1\cdot(x-2)^2(x-3)x(x-4)$, o sinal de $p(x-2)$ é positivo quando x assume valores positivos muito grandes.

Portanto, considerando as oito unidades significantes, 14 alunos discriminaram 7 delas e um aluno, apenas, discriminou todas elas, chegou-se, assim, a um rendimento da questão de aproximadamente 88%[5].

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori*, obtiveram-se as seguintes considerações em relação à questão 2:

- todos os 14 alunos:

  - identificaram que o grau de $p(x)$ era 3;

  - determinaram que as raízes reais eram -4 e 2 e que suas multiplicidades eram ímpar e par, respectivamente;

  - verificaram que a raiz real -4 tinha multiplicidade 1 e que a raiz real 2 tinha multiplicidade 2;

  - identificaram que o termo independente era 4, a partir da observação do gráfico;

- dois alunos identificaram que o polinômio poderia estar escrito na forma fatorada do tipo $p(x) = a(x+4)(x-2)^2$;

- nenhum aluno:

  - desenvolveu a expressão algébrica até a sua forma mais simples, determinando $p(x) = ax^3 - 12ax + 16a$;

  - sem o auxílio da pesquisadora, determinou o valor de a;

  - sem o auxílio da pesquisadora, determinou o valor de b.

[5] O cálculo do rendimento foi obtido a partir do cálculo $R = \dfrac{7\cdot 1 + 1\cdot 0,07}{8} \cong 0,883$.

Portanto, considerando oito unidades significantes, 14 alunos discriminando 4 delas, dois alunos discriminando uma delas e nenhum aluno discriminando 3 delas, chegou-se a um rendimento de aproximadamente 52%[6]. A mesma questão foi utilizada na pesquisa de Dazzi e Dullius (2013, p. 393) e os mesmos identificaram um rendimento bem superior ao obtido neste estudo, 78% de acerto na questão.

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori*, obtiveram-se as seguintes considerações em relação à questão 3:

- dos 14 alunos, 13 identificaram ser o termo independente negativo;
- dos 14 alunos, 13 identificaram que o coeficiente líder era positivo.

Portanto, os alunos tiveram um rendimento de aproximadamente 93% na questão 3.

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori*, obtiveram-se as seguintes considerações em relação à questão 4:

- todos os alunos identificaram as raízes reais a partir da observação do gráfico;
- nenhum aluno:

  - determinou o valor de m ao substituir o valor de x por uma das raízes na equação $P(x) = 0$;

  - determinou o polinômio de grau 2 a partir do produto dos fatores mônicos $(x + 2)$ e $(x - 1)$;

  - dividiu $P(x)$ pelo polinômio de grau 2 determinado pelo produto de $(x + 2)$ por $(x - 1)$;

  - determinou as raízes do polinômio quociente da divisão.

Portanto, das cinco unidades significantes, 14 alunos discriminaram apenas uma delas. Sendo assim, o rendimento na questão 4 foi de apenas 20%.

A questão 5 não pôde ser avaliada, visto que a pesquisadora sugeriu que os alunos não a fizessem, indo direto para a questão 6.

Confrontando as análises *a priori* e *a posteriori*, obtiveram-se as seguintes considerações em relação à questão 6:

- todos os 14 alunos identificaram que:

[6] O valor do rendimento (R) foi obtido a partir do cálculo $R = \dfrac{4 \cdot 1 + 0,14}{8} \cong 0,518$.

- o polinômio $f(x)$ tinha um número ímpar de raízes reais e, portanto, só poderiam ser consideradas como respostas corretas os itens (d) ou (e);

- zero era raiz de multiplicidade ímpar e, portanto, apenas o gráfico representado no item (d) poderia ser a resposta correta.

Considerando as duas unidades significantes descritas e, tendo os 14 alunos discriminado-as integralmente, considerou-se um rendimento de 100% na questão 6.

Ao considerar a Atividade 4, a partir de suas cinco questões resolvidas, chegou-se a um aproveitamento médio da Atividade 4 de aproximadamente 71%[7].

Para analisar as atividades matemáticas organizadas com objetivo de aprendizagem ou de formação, é preciso, portanto, poder considerar todos os registros utilizados em matemática (DUVAL, 2011, p. 116).

A pesquisadora observou que o mau rendimento dos alunos nas questões 2 e 4 não estava associado à conversão e, sim, à outra atividade cognitiva, o tratamento. O tratamento é a transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema (DUVAL, 2009, p. 57). Nas referidas questões, a produção de uma conversão era antecedida de uma operação interna ao registro algébrico, no qual o aluno deveria substituir as expressões algébricas dadas em novas expressões, e estas deveriam possibilitar a identificação das variáveis cognitivas necessárias à conversão (DUVAL, 2009, p. 57, 59). Esse fato, também, foi verificado por Jordão (2011, p. 109, 110) em sua pesquisa sobre sistemas lineares. A mesma observou que a dificuldade obtida no processo de conversão estava associada à identificação pelo aluno da representação simbólico-numérico, ou seja, na diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica.

Observou-se, ainda, que mesmo questões que contemplaram todas as variáveis cognitivas de conversão, como a questão 6, o aproveitamento foi de 100%. O que justifica que a conversão das representações é, para a aprendizagem, uma atividade tão fundamental quanto as atividades de tratamento (DUVAL, 2009, p. 63). Duval (2009, p. 63) afirma que:

> A conversão sozinha favorece a coordenação dos registros de representação, porém a ausência de coordenação entre diferentes registros cria, muito frequentemente, uma deficiência para as aprendizagens conceituais. [...] a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos.

O ensino privilegia a aprendizagem das regras concernentes à formação das representações semióticas e das regras concernentes ao seu tratamento, ou seja, do discurso da língua natural, dos registros numéricos e, também, do registro da escritura simbólica

[7] O aproveitamento (A) foi obtido a partir do cálculo $A = \dfrac{0,88 + 0,52 + 0,93 + 0,2 + 1}{5} \cong 0,706$.

(DUVAL, 2009, p. 62). As mudanças de registro são frequentemente utilizadas com o objetivo de simplificar tratamentos e, uma vez efetuada a conversão, apega-se ao registro numérico, algébrico ou, simplesmente, da língua natural (DUVAL, 2009, p. 62).

4.5 Análise das respostas do questionário final: percepção dos alunos

Encerrando este capítulo, apresenta-se a avaliação da pesquisa pela percepção dos alunos. Para essa análise, foram tomados como base os resultados obtidos no questionário final (Apêndice H). O instrumento foi estruturado após aplicação da Atividade 4, visto que a pesquisadora sentiu a necessidade de levantar informações do plotador gráfico *xGraphing*, das atividades e da própria participação do observado. Alguns questionamentos foram incluídos mediante posturas tomadas pelos alunos durante a aplicação da referida atividade.

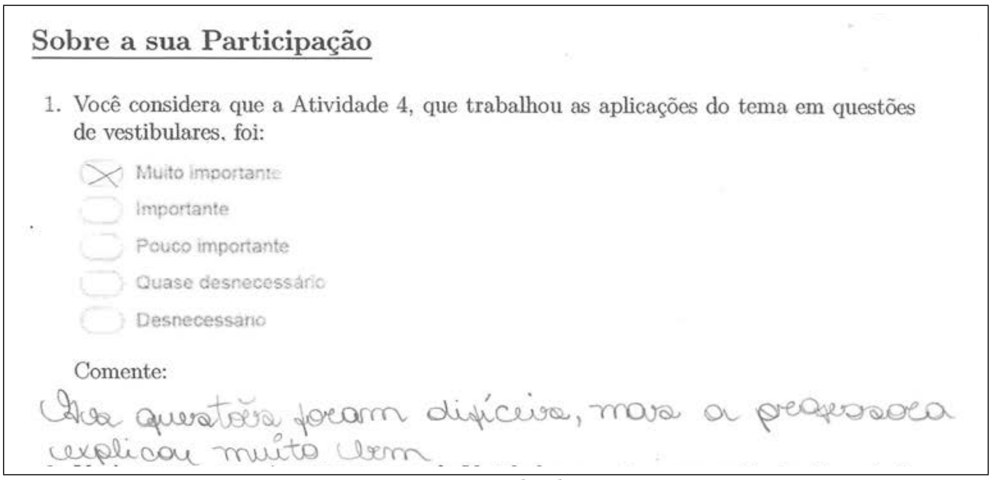
A aplicação do questionário final foi realizada em 04 de dezembro de 2014, ao final do 2º horário, ou seja, entre 7h50min e 8h40min, estando presentes 19 alunos. Para análise, serão considerados os 14 alunos que participaram de todo o estudo, identificados como sujeito da pesquisa. O questionário foi aplicado pela professora de Matemática da turma, não estando a pesquisadora presente. Pode-se afirmar, a partir da análise do mesmo, que sete alunos consideraram fácil, seis consideraram muito fácil e apenas um considerou moderado aprender a utilizar o aplicativo *xGraphing* e, todos consideraram que a utilização do aplicativo contribuiu para a realização das atividades propostas, porém nenhum comentou a sua resposta.

Dos 14 alunos, sujeitos da pesquisa, oito consideraram muito importante a atuação da professora pesquisadora como mediadora durante a resolução das atividades, utilizando o *xGraphing* e os demais consideraram importante. Todos os alunos consideraram que o *xGraphing* colaborou para o estudo de Polinômios nas atividades de análise do comportamento dos gráficos. Ao julgarem o tempo destinado para as atividades, a turma considerou regular (2), muito bom (8) e excelente (4). Embora, em sua grande maioria, os alunos julgassem muito bom ou excelente, a pesquisadora considera a necessidade de uma reavaliação do tempo destinados às Atividades 1 e 4.

Ao julgarem a metodologia adotada na pesquisa, a turma considerou regular (0), muito bom (9) e excelente (5) e, em relação aos recursos utilizados, a turma considerou regular (0), muito bom (5) e excelente (9). Todos consideraram que o *tablet* foi um bom recurso para a compreensão do tema proposto, sendo que mais uma vez, nenhum deles comentou a opção escolhida.

Ao avaliar a participação do aluno nesta pesquisa, foram constatados que nove alunos consideraram muito importante a Atividade 4 e os demais consideraram importante e, apenas um aluno comentou a respeito de sua resposta (Figura 55). Vale ressaltar que a pesquisadora considerou importante a abordagem do tema sobre as questões de vestibulares no questionário final, devido à pouca participação da turma na resolução das mesmas. Embora tenha creditado tal atitude à ausência de interesse no ingresso em cursos superiores, a pesquisadora diagnosticou, por meio do questionário, que dos 14 alunos, apenas três não prestaram e nem prestariam provas de Vestibulares.

Figura 55 – Comentário do aluno J sobre a Atividade 4



Sobre a sua Participação

1. Você considera que a Atividade 4, que trabalhou as aplicações do tema em questões de vestibulares, foi:

(X) Muito importante
( ) Importante
( ) Pouco importante
( ) Quase desnecessário
( ) Desnecessário

Comente:
As questões foram difíceis, mas a pesquisadora explicou muito bem.

Fonte: protocolo de pesquisa

Embora os alunos tivessem apresentado desinteresse na resolução da Atividade 4, verificou-se que a maioria tinha interesse em prestar provas de Vestibular, o que levou a pesquisadora, a partir desses resultados e justificativas apresentadas pelos alunos, a interpretar que as questões de Concurso Vestibular propostas na Atividade 4 tinham um nível alto de dificuldade, visto que não trabalhavam apenas as conversões, mas também os tratamentos abordados no âmbito do próprio registro algébrico, etapa que não foi proposta nesta pesquisa. Sugere-se que esses problemas poderiam ser detectados se aplicado o teste exploratório.

De maneira geral, identificou-se que o uso pedagógico do *tablet* por meio do aplicativo *xGraphing* contribuiu de forma significativa na realização das atividades e construção dos conceitos propostos. Além disso, as intervenções realizadas pela pesquisadora foram fundamentais para a compreensão do tema proposto. Há uma necessidade de adequação do tempo destinado às atividades, em especial às Atividades 1 e 4.

Considerações Finais

Apresentam-se as considerações finais desta pesquisa baseadas na avaliação da sequência didática, confrontando com as hipóteses delineadas, tendo como objetivo responder à pergunta fundamental dessa pesquisa: "*Qual é a influência da conversão em diferentes registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios?*", tomando, agora, sob um ponto de vista global. Aqui, são apresentados os principais resultados e as contribuições desta pesquisa, além das limitações vivenciadas no decorrer desse estudo. É discutido, também, como as questões levantadas foram respondidas e são destacados possíveis desdobramentos do estudo realizado.

É importante ressaltar que o resultado desta pesquisa está circunscrita ao grupo estudado, visando a buscar características comuns para o processo de ensino e aprendizagem de Polinômios.

Em relação às decisões tomadas, nesta pesquisa, que dizem respeito às variáveis globais pode-se afirmar que:

- i. a avaliação diagnóstica cumpriu com a sua função que foi fornecer dados a respeito dos conhecimentos, habilidades e competências prévias dos alunos, com vista à organização do processo de ensino e aprendizagem de Polinômios. Cabe ressaltar que aspectos importantes não foram privilegiados, como a verificação do conhecimento a respeito do grau de polinômios de 1º grau, bem como a determinação de raízes iguais a zero. Fatos que, se diagnosticados com antecedência, não trariam dúvidas no decorrer da pesquisa. A ausência desses aspectos não são perceptíveis num teste exploratório;

- ii. a opção por um plotador gráfico gratuito e de simples manuseio foi considerado primordial, pois como afirma Batista (2011, p. 137), para fins educacionais, a possibilidade de usar aplicativos gratuitos deve ser considerada como prioridade;

- iii. a decisão pela limitação da complexidade da pesquisa ao estudo das conversões entre os registros gráfico e algébrico foram imprescindíveis para avaliar a pertinência cognitiva da sequência didática, ou seja, se ela foi adequada de forma a propiciar condições para o desenvolvimento da compreensão do estudo de Polinômios. A decisão se deu, também, pois tratam de fenômenos de não congruência, que são mais numerosos que os fenômenos de congruência e, além disso, são os maiores causadores da incompreensão ou dos erros na Matemática (DUVAL, 2011, p. 121, 124);

- iv.a opção pelo trabalho em duplas foi essencial, seja pela distribuição dos *tablets* quanto pela possibilidade de um trabalho colaborativo com troca de ideias na resolução das atividades;

- v. a decisão pela sequência didática estar dividida em quatro etapas não foi suficiente. A experiência mostrou que a 1ª etapa deveria estar dividida em duas. Portanto, a pesquisa apontou que a sequência didática na perspectiva de construção dos conceitos, possibilitando investigar o comportamento dos gráficos de funções polinomiais deve acontecer em cinco etapas;

- vi. a elaboração de uma atividade de verificação da pesquisa, por meio de questões de Concursos Vestibulares foi uma decisão acertada, porém sugere-se que as questões escolhidas necessitem apenas dos conceitos relativos à conversão. Nesta pesquisa, a escolha por questões que necessitavam de tratamentos algébricos foi um dificultador na verificação dos objetivos da pesquisa. Embora o fato não tenha sido previsto, a pesquisadora considera que esse elemento foi enriquecedor para as suas conclusões, pois a conversão é fundamental para a compreensão do conceito de Polinômio, mas o tratamento é primordial para que seja em sua plenitude;

- vii. o questionário final foi importante para a avaliação da pesquisa sob a perspectiva do observado e para sanar dúvidas surgidas no decorrer da sequência didática.

Em resposta às perguntas e hipóteses traçadas no início da pesquisa, seguem as considerações finais sobre os resultados.

Para responder à questão da pesquisa, limitou-se o estudo às conversões dos polinômios em registros gráficos e registros algébricos e, portanto, o uso de plotador gráfico abriu possibilidades consideráveis de criação e exploração visual. Cabe ressaltar que a utilização de plotadores gráficos não é suficiente para desenvolver nos alunos a capacidade de antecipar transformações ou de ensinar as correspondências respectivas entre os valores visuais e os termos das equações que representam (DUVAL, 2011, p. 8), cabendo aos métodos pedagógicos, às atividades de sala de aula, à forma de apresentação dos conteúdos e ao papel do professor e do aluno a consciência e a construção de todo o processo cognitivo (NASCIMENTO, 2013, p. 45).

Nesse estudo, o uso do plotador gráfico denominado *xGraphing* contribuiu de forma significativa para a compreensão do comportamento gráfico das funções polinomiais, acelerando os tratamentos que envolvem as produções das representações semióticas, exibindo os registros tão rapidamente quanto a produção mental e permitindo um potencial ilimitado de tratamentos, manipulações, sejam por meio de deslocamentos, ampliações ou reduções. A escolha pelo uso pedagógico do *tablet* foi, ente outros critérios, um modo mais fácil de gerenciar todo o processo da pesquisa do que computadores fixos (UNESCO, 2014, p. 23).

Foram identificadas as 12 variáveis cognitivas escalares de um polinômio que se relacionam com as variáveis visuais de sua representação gráfica, e as transformações foram apresentadas aos alunos fazendo-as variar uma a uma.

A Atividade 1 propiciou realizar transformações em que se fazia variar o grau do polinômio, ora par ora ímpar, o sinal do coeficiente dominante, o termo independente, ora positivo, negativo ou nulo. Pode-se considerar que a Atividade 1 favoreceu o aluno a identificar a paridade e o sinal do coeficiente do termo de maior grau de um polinômio a partir da análise do comportamento do gráfico quando x assumia valores muito pequenos ou muito grandes, bem como identificar o comportamento gráfico do termo independente de um polinômio, visto que se obteve um aproveitamento de 94% das observações obtidas.

A Atividade 2 proporcionou aos alunos experimentarem situações de transformação em que se fazia variar a multiplicidade das raízes reais, ora par ora ímpar. Vale destacar que, nesta pesquisa, não se explorou a diferença entre o comportamento do gráfico nas raízes reais quando de multiplicidade simples e quando de multiplicidade ímpar superior a 1. Pode-se considerar que a Atividade 2 possibilitou ao aluno reconhecer o comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes reais e, na vizinhança de suas raízes reais, quando estas tinham multiplicidade par ou ímpar, uma vez que se obteve uma aproveitamento de 96% das observações obtidas.

A Atividade 3 favoreceu o aluno a reconhecer o comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes complexas, já que todos os alunos identificaram que o grau de um polinômio é o mesmo valor da quantidade de raízes e que as multiplicidades destas são levadas em consideração. A Atividade 3 favoreceu, ainda, o reconhecimento de duas importantes propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais: as raízes não reais ocorrem aos pares e os polinômios de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes reais, já que obtiveram um aproveitamento de 99% das observações.

Os alunos obtiveram um aproveitamento de 71% nas questões de Concursos Vestibulares propostas na Atividade 4 e resolvidas durante a aplicação. A Atividade 4 teve por objetivo aglutinar todas as unidades significantes de forma a realizar uma avaliação global dos elementos desta pesquisa. Vale destacar que as questões com maior aproveitamento, 88%, 94% e 100%, que foram as questões 1, 3 e 6, respectivamente, compreendiam apenas as transformações de conversão. Pôde-se verificar que as questões que compreendiam, também, a necessidade de tratamentos dentro do registro algébrico obtiveram um aproveitamento inferior, chegando um dos casos, a obter um aproveitamento de 20%. Somente quando se separam as atividades de tratamento e as de conversão é que se podem verificar as dificuldades relativas à atividade de conversão e a importância do fenômeno de fechamento dos registros. Cabe ressaltar a relevância do teste exploratório em todas as atividades. Sugere-se que tal teste apresentaria a distância dos exames de vestibulares e a realidade da sala de aula.

Segundo Duval (2009, p. 39), a coordenação entre os diferentes registros aparecem como questões centrais para as aprendizagens intelectuais e, retomando a questão da pesquisa: "*Qual é a influência da conversão no processo de ensino e aprendizagem de Polinômios?*". Portanto, finalizando a questão central desta pesquisa, pode-se responder, a partir de todas as considerações apresentadas, que a transformação de conversão influencia o processo de ensino e aprendizagem de Polinômios a partir da compreensão integrativa, ou seja, de uma aprendizagem especificamente centrada na conversão de representações e efetuada fora de toda a tarefa de tratamento, essa compreensão é necessária ao início de todo o ensino ou a uma nova rede conceitual (DUVAL, 2009, p. 98, 99).

Enquanto dificuldades vivenciadas, retoma-se o tempo destinado para a Atividade 1 e para a Atividade 4, embora, após a aplicação, a pesquisadora percebeu a necessidade de reconfigurar a Atividade 4, fazendo-a constar, apenas, de questões que explorem a conversão. Mesmo que não fosse o propósito da pesquisa, a contribuição das questões que obtiveram um aproveitamento inferior ao esperado, mostraram que as transformações, sejam o tratamento ou a conversão, não devem ser vistas como antagônicas, visto que a formação, o tratamento e a conversão são as atividades cognitivas fundamentais da *semiósis* (DUVAL, 2009, p. 54). Outro fator percebido que limitou a apreensão de alguns conceitos por parte dos alunos foi a não exploração do polinômio de grau 1 na avaliação diagnóstica, o que permitiria prever algumas situações percebidas ao longo da aplicação das primeiras atividades. Enfim, os resultados obtidos superaram as dificuldades apresentadas e pôde-se chegar às respostas levantadas e às conclusões aqui apresentadas.

Vale destacar que, ao longo de uma pesquisa, outras questões vão se apresentando alimentando, assim, o processo de pesquisa. Nesse sentido, destacam-se como forma de continuidade dessa pesquisa:

- i. pesquisar o comportamento do gráfico de uma função polinomial na vizinhança de suas raízes reais simples e nas raízes reais de multiplicidade ímpar superior a 1;
- ii. estudar o comportamento do gráfico das funções polinomiais quando os valores de x tendem a 0 tanto quando assumem valores positivos quanto assumem valores negativos;
- iii. verificar a conversão do registro da linguagem natural para a linguagem algébrica dos polinômios e vice-versa;

- iv. experimentar e analisar a sequência didática com alunos da licenciatura em Matemática.

A importância da visualização matemática parte, também, da necessidade da pesquisadora enquanto acadêmica e professora e, esta pesquisa fundamenta o que, intuitivamente, estava implícito nas suas ações enquanto docente de Matemática. Portanto, como afirma Freire (1996, p. 39), na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a prática. Essa pesquisa, trouxe, portanto, um aprofundamento teórico para que todo o processo cognitivo no estudo da Matemática se faça a partir da discriminação de variáveis cognitivas.

Referências

ALMEIDA, F. J. d. Escola, currículo, tecnologia e desenvolvimento sustentável. *e-Curriculum*, v. 7, n. 1, p. 1–21, Abril 2011. Citado na página 56.

ALMEIDA, M. E. B. d.; SILVA, M. d. G. M. d. Currículo, tecnologia e cultura digital: espaços e tempos de web currículo. *Revista e-curriculum*, v. 7, n. 1, p. 1–19, Abril 2011. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 56.

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. d. Q. e. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), UFSC*, v. 3, n. 6, p. 62–77, 2008. Citado na página 61.

ALVES, A. P. A. *E-Portefóleo: um estudo de caso*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, Braga, 2007. Citado na página 50.

AMARAL, S. F. Princípios y reflexiones del lenguaje digital interactivo. In: ______. Campinas: Graf. FE, 2008. cap. Aplicaciones educativas y nuevos lenguages de las TIC, p. 15–25. Citado na página 43.

ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L. *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 50, 53 e 57.

BARCELOS, G. T. et al. Uso educacional de tablets: estudo de caso na formação inicial de professores de matemática. *Revista Novas Tecnologias na Educação (Renote)*, v. 11, n. 1, p. 1–10, julho 2013. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 109.

BATISTA, S. C. F. *M-learnMat: modelo pedagógico para Atividades de M-Learning em matemática*. Tese (Doutuorado em Informática na Educação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufrgs.br/da.php?nrb=000829159&loc=2012&l=742d7eab7c84ce96>. Citado 4 vezes nas páginas 19, 45, 55 e 135.

BERNOULLI, J. *Opera omnia*. França: Lausannae et Genevae, 1742. Citado na página 28.

BLOOM, B.; HASTINGS, J. T.; MADAUS, G. F. *Manual de avaliação formativa e somativa do aprendizado escolar*. São Paulo: Livraria Pioneira, 1983. Citado na página 52.

BORBA, M. d. C.; ARAÚJO, J. d. L. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemáticatica. In: ______. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. cap. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática, p. 27–47. Citado na página 71.

BORBA, M. d. C.; SILVA, R. S. R. d.; GADANIDIS, G. *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Citado 2 vezes nas páginas 43 e 56.

BOYER, C. B. *História da matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC, 1999. Citado na página 18.

BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC, 2006. Citado na página 54.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, n. 2, p. 18–22, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 49.

CALEJON, L. M. C.; LUGLI, L. d. C. Avaliação educacional, avaliação em larga escala e o ensino de matemática no ensino fundamental. In: ______. Rio de Janeiro: Ciência moderna, 2012. v. 1, cap. Estudos e aplicações em ensino e aprendizagem de matemátca, p. 55–76. Citado na página 62.

CASTELLS, M. *A sociedade em rede*. 6. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

CLARKE, B.; SVANAES, S.; ZIMMERMANN, S. *One-to-onetablets in secondary schools: an evaluation study*. 2013. Acesso em: 03 ago. 2015. Disponível em: <http://tabletsforschools.org.uk/wp-content/uploads/2012/12/FKY-Tablets-for-Schools-Stage-2-Full-Report-July-2013.pdf>. Citado na página 46.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em educação matemática: pontuando tendências. *Zetetiké*, v. 16, n. 29, p. 41–72, jan./jun. 2008. Citado na página 41.

CONCEIÇÃO JUNIOR, F. d. S. *Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no ensino médio*. Dissertação (Mestrado em educação matemática) — PUC, São Paulo, 2011. Citado na página 41.

CORREIA, A. L. Investigações e relatórios, temos muito que aprender! *Educação matemática em revista*, v. 7, n. 8, p. 72–75, junho 2000. Citado na página 117.

CORREIA, W. *Introdução à filosofia: os diversos tipos de conhecimento*. 2009. Acesso em: 20 abr. 2015. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=4488>. Citado na página 43.

COUTINHO, S. C. *Polinômios e computação algébrica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 29, 148, 149, 151, 152 e 157.

CURY, H. N. *Análise dos erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 71, 96 e 126.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: ______. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. cap. Educação Matemática: uma (nova) introdução, p. 167–188. Citado na página 97.

DAZZI, C. J.; DULLIUS, M. M. Ensino de funções polinomiais de grau maior que dois através da análise de seus gráficos, com auxílio do software graphmatica. *Boletim de Educação Matemática (Bolema)*, v. 27, n. 46, p. 391–398, Agosto 2013. Citado 7 vezes nas páginas 19, 29, 30, 31, 115, 117 e 131.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: ______. 5. ed. Campinas: Papirus, 2003. cap. 1, p. 11–33. Citado 5 vezes nas páginas 19, 34, 35, 36 e 97.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009. Citado 13 vezes nas páginas 33, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 97, 110, 118, 132, 133 e 138.

DUVAL, R. Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Revista de Educação em Ciências e Matemáticas (Amazônia)*, v. 6, n. 12, p. 127–143, jan./jun. 2010. Citado na página 38.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. São Paulo: PROEM, 2011. Citado 12 vezes nas páginas 20, 33, 34, 35, 38, 40, 96, 110, 114, 118, 132 e 136.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. São Paulo: UNICAMP, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 23, 24, 25, 26 e 27.

FONSECA, R. d. A. *Interpolação polinomial com uso de software, uma atividade para laboratório de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Federal do Piauí, Teresina, PI, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários a prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996. Citado na página 139.

FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005. Citado na página 44.

FREITAS, J. L. M. a. d. Teoria das situações didáticas. In: ______. 3. ed. São Paulo: Machado, Silvia Dias AlcântaraEDUC, 2008. cap. Educação Matemática: uma (nova) introdução, p. 77–111. Citado 3 vezes nas páginas 48, 49 e 50.

GARBI, G. G. *O romance das equações algébricas*. São Paulo: Makron Books, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 22, 24, 25 e 27.

GARCIA, M. F. et al. Novas competências docentes frente às tecnologias digitais interativas. *Teoria e Prática da Educação*, v. 14, n. 1, p. 79–87, jan./abr. 2011. Citado na página 44.

GODINO, J. D. *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. 2002. Acesso em: 23 fev. 2015. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf>. Citado na página 35.

HADAMARD, J. *Le Développement et le Rôle Scientifique du Calcul Fonctionnel*. s.d. Acesso em: 12 mai. 2015. Disponível em: <www.mathunion.org/ICM/ICM1928.1/Main/icm1928.1.0143.0162.ocr.pdf>. Citado na página 28.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 28, 29, 150 e 151.

IEP. *Internet encyclopedia of philosophy*. s.d. Acesso em: 20 jun. 2015. Disponível em: <http://www.iep.utm.edu/frege/>. Citado na página 37.

IEZZI, G. *Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações*. São Paulo: Atual, 2005. Citado na página 154.

INEP. *Resultados do PISA*. s.d. Acesso em: 13 de nov. 2014. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-resultados>. Citado na página 18.

JORDÃO, A. L. I. *Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3 x 3 no 2 ano do ensino médio*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) — PUC, São Paulo, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 132.

KATZ, V. J. *A history of Mathematics: an introduction*. 2. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers, 1998. Citado na página 28.

KNUDSEN, C. A. A teoria das equações algébricas. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, n. 7, p. 26–29, 2 semestre 1985. Citado na página 22.

LIMA, E. L. Análise de livros de matemática para o ensino médio. *Revista do professor de matemática (RPM)*, n. 46, p. 43–51, mai./ago. 2001. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

LIMA, E. L. *Matemática e ensino*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 29.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 150, 154, 155 e 156.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. In: ______. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008. cap. Educação Matemática: uma (nova) introdução, p. 233–247. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 53.

MARÉS, L. *Tablets in education: opportunities and chalenges in one-to-one programs*. Buenos Aires, 2012. Acesso em: 05 abr. 2015. Disponível em: <http://www.relpe.org/wp-content/uploads/2012/04/Tablets-in-education.pdf>. Citado na página 46.

MORAN, J. M. *Tablets e netbooks na educação*. s.d. Acesso em: 07 mai. 2015. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/site/textos/tecnologias_eduacacao/tablets.pdf>. Citado na página 102.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador*. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 50, 51, 52, 54 e 56.

MOREIRA, L. d. S.; BARCELOS, G. T.; BATISTA, S. C. F. Geometria dinâmica em tablets: estudo de caso com o aplicativo geogebra. *Revista Novas Tecnologias na Educação (Renote)*, v. 11, n. 3, p. 1–10, dezembro 2013. Citado 3 vezes nas páginas 56, 92 e 109.

MORGADO, A. C. et al. *Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio*. Rio de Janeiro: VITAE. IMPA. SBM, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 19, 29, 30 e 53.

NASCIMENTO, A. C. T. A. d. A. A integração das tecnologias às práticas escolares. *Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação no Brasil: ETIC Educação 2012*, p. 45–49, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 136.

NETO, A. C. M. *Tópicos de matemática elementar: polinômios*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 150 e 153.

OLIVEIRA, D. d. S.; PEREIRA, T. d. S. *Raízes de polinômios: um enfoque geométrico*. Dissertação (Trabalho de conclusão de curso) — Instituto Federal Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2010. Citado 7 vezes nas páginas 19, 29, 30, 31, 117, 121 e 122.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 27, 151, 152 e 153.

PAIS, L. C. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 48, 49, 50, 52, 53, 58 e 97.

PERRENOUD, P. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000. Citado na página 49.

PONTE, J. a. P. d. *Números e álgebra no currículo escolar*. 2006. Acesso em: 20 dez. 2014. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf>. Citado na página 38.

PONTE, J. P. d.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 49, 72, 92, 94, 95, 105 e 115.

RABELO, M. *Avaliação educacional: fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 18.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 26 e 27.

SEABRA, C. *Tablets na sala de aula*. 2012. Acesso em: 07 mai. 2015. Disponível em: <http://cseabra.wordpress.com/2012/04/22/tablets-na-sala-de-aula/>. Citado na página 46.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do trabalho científico*. 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007. Citado na página 51.

SILVA, A. R. d. et al. Utilização de aplicativos em tablets na interpretação geométrica de sistemas lineares: proposta de uma sequência didática. In: SBEM-RJ (Ed.). *VI EEMAT*. Niterói: Anais, 2014. p. 1–15. Citado 3 vezes nas páginas 46, 109 e 110.

TRAXLER, J. Defining mobile learning. In: *IADIS International Conference Mobile Learning*. Malta: IADIS, 2005. p. 261–266. Citado na página 45.

UNESCO. *Diretrizes de política da UNESCO para a aprendizagem móvel*. França, 2014. Acesso em: 17 jun. 2015. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002277/227770por.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 20, 45 e 137.

VERASZTO, E. V. *Projeto Teckids: educação tecnológica no Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado em educação) — Faculdade de Educação. UNICAMP, Campinas, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

VIGOTSKY, L. S. *Psicologia pedagógica*. 3. ed. São Paulo: WMF Martins Fontes, 2010. Citado na página 125.

WAINS, S. I.; MAHMOOD, W. Integrating m-learning with e-learning. In: *CONFERENCE ON INFORMATION TECHNOLOGY EDUCATION (CITC)*. New York: ACM, 2008. p. 31–38. Citado na página 45.

ZABALA, A. *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 1998. Citado na página 49.

ZEDNICK, H. et al. Tecnologias digitais na educação: proposta taxonômica para apoio a integração da tecnologia em sala de aula. In: 20 WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA (WIE2014)/3 CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAI CcÃO (CBIE2014). *Tecnologias digitais e educação: integração, mediação e construção de conhecimento*. Dourados, 2014. p. 507–516. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.

Apêndices

APÊNDICE A

Definições e Teoremas

A.1 Definição de Polinômios

Definição A.1. *Segundo Coutinho (2012, p. 43-44), sendo x um símbolo, tradicionalmente conhecido como* variável *ou* indeterminada*, um polinômio f na variável x, com coeficientes em $\mathbb{C}$, é uma expressão da forma:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ou

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

em que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_j \in \mathbb{C}$, para $0 \leq j \leq n$

a_j são chamados de *coeficientes* do polinômio f.

As parcelas a_jx^j, são chamados de *termos.*

Quando $a_j \neq 0$, a_jx^j é chamado de *monômio de grau j do polinômio f.*

O coeficiente a_0 é chamado de termo *constante* ou *independente.*

Denotam-se por $\mathbb{C}[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$ e na variável x.

Chamam-se de $f(x) = a_0$ de polinômio *constante.* Quando $f(x) = 0$, chamamos f de polinômio *identicamente nulo.* Esse polinômio poderá ser escrito na forma

$$f(x) = 0x^n + ox^{n-1} + \cdots + 0x^2 + 0x + 0,$$

com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

A.2 Grau de um Polinômio

Definição A.2. *Se $a_n \neq 0$, dizemos que n é o* grau *do polinômio e representa-se por $gr(f(x))$ ou $\partial(f(x))$ sendo $a_0, a_1, \cdots, a_n$ seus coeficientes. O coeficiente a_n é chamado de coeficiente* líder *ou coeficiente* dominante *do polinômio.*

Os polinômios de grau n com coeficiente líder $a_n = 1$ são chamados de *polinômios mônicos.*

Observação A.1. *Não se define o grau do polinômio nulo.*

Exemplo A.1. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \qquad gr(f(x)) = 3$

Exemplo A.2. $h(x) = 3x^5 + 1 \qquad gr(h(x)) = 5$

Exemplo A.3. $g(x) = 0x^4 + \frac{\pi}{2}x^3 + 3x + 1 \qquad gr(g(x)) = 3$

Exemplo A.4. $u(x) = 3 \qquad gr(u(x)) = 0$

Segundo Coutinho (2012, p. 44), até aqui um polinômio representa para o aluno apenas uma sequência de símbolos.

Para dar vida a esses objetos, precisa-se considerar o conjunto $\mathbb{C}[x]$, formado por todos os polinômios na *indeterminada* x com coeficientes em $\mathbb{C}$ e explicar como os elementos desse conjunto podem interagir entre si.

O primeiro passo é definir a igualdade de polinômios e as operações de adição e multiplicação.

A.3 Igualdade

Sejam $p(x)$ e $h(x)$ em que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

$$e$$

$$h(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \qquad b_m \neq 0$$

Diz-se que $p = h$ se $m = n$ e se $a_i = b_i$ para cada $a \leq i \leq 1$.

Se $m < n$, pode-se supor que dois polinômios tenham o mesmo número de coeficientes (COUTINHO, 2012, p. 44). Logo,

$$h(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^{m+1} + b_m x^m + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Portanto, para que $p = h$, então

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^{m+1} + b_mx^m + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

$$(a_n - 0)x^n + (a_{n-1} - 0)x^{n-1} + \cdots + (a_m - b_m)x^m + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = 0$$

$$a_n - 0 = 0 \therefore a_n = 0$$

$$a_{n-1} - 0 = 0 \therefore a_{n-1} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_m - b_m = 0 \therefore a_m = b_m$$

$$\vdots$$

$$a_1 - b_1 = 0 \therefore a_1 = b_1$$

$$a_0 - b_0 = 0 \therefore a_0 = b_0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

A igualdade de polinômios é base para um importante método de resolução de problemas, o *método dos coeficientes a determinar*, o qual usa o fato de que a igualdade de polinômios ou funções polinomiais requer igualdade de todos os respectivos coeficientes (LIMA et al., 1998, p. 204).

A.4 Adição de Polinômios

Hefez e Villela (2012, p. 98) afirmam que, sendo $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ e $p(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i x^i$, com $n \leq m$.

$$s(x) = p(x) + h(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_m x^m + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i$$

em que $c_i = a_i + b_i$, para $0 \leq i \leq m$ e $c_i = a_i$, para $m < i \leq n$.

$s(x)$ é chamado de *polinômio soma*.

A.4.1 Grau de um polinômio soma

Se $n \neq m$, $gr(s(x)) = max\{gr(p(x)), gr(h(x))\}$.

Se $n = m$, $gr(s(x)) = n$ para $a_n \neq -b_n$. Caso $n = m$ e os coeficientes líderes puderem se cancelar, $gr(s(x)) \leq max\{gr(p(x)), gr(h(x))\}$ (NETO, 2012, p. 38-39).

A.4.2 Propriedades da soma de polinômios

Enumeram-se algumas propriedades da soma de polinômios, dados $p(x), q(x)$ e $h(x)$ conforme descrito por (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 98-99).

- **A1** - Associatividade

$$(p(x) + q(x)) + h(x) = p(x) + (q(x) + h(x))$$

- **A2** - Comutatividade

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

- **A3** - Elemento Neutro, no qual 0 denota o polinômio nulo.

$$0 + p(x) = p(x) + 0 = p(x)$$

- **A4** - Elemento Simétrico

  Sendo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $q(x) = -p(x)$, ou seja, $q(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$, então

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x) = 0$$

A.5 Multiplicação de Polinômios

Para definir o *produto* de dois polinômios; vamos, primeiramente, definir o produto de dois monômios (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 261).

Sejam $p(x) = a_n x^n$ e $q(x) = b_m x^m$, com $a_n, b_m \neq 0$, $gr(p(x)) = n$ e $gr(q(x)) = m$.

$$p(x) \cdot q(x) = (p \cdot q)(x) = a_n x^n \cdot b_m x^m = a_n b_m x^{n+m}.$$

$$gr(p \cdot q) = n + m$$

Coutinho (2012, p. 45) afirma que se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n$ e $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_m x^m$, se $n < m$.

$$p(x) \cdot q(x) = (p \cdot q)(x) = a_0 \cdot q(x) + a_1 x \cdot q(x) + \cdots + a_n x^n \cdot q(x) =$$

$$= a_0 \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j x^j + a_1 x \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j x^j + \cdots + a_n x^n \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j x^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_0 \cdot b_j \cdot x^j + \sum_{j=1}^{m} a_1 \cdot b_j \cdot x^{1+j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} a_n \cdot b_j \cdot x^{n+j}$$

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i,j} a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j}$$

A.5.1 Aditividade do grau do produto

Sejam p e q polinômios não nulos em $\mathbb{C}(x)$, se os coeficientes líderes de p e q são a_n e b_m, respectivamente, então o polinômio $f \cdot q$ tem coeficiente líder $a_n \cdot b_m$ (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 103).

Sendo p e q polinômios não nulos, consequentemente, $p \cdot q$ é não nulo. Portanto,

$$gr(p \cdot q)(x) = gr(p(x)) + gr(q(x)) = n + m$$

A.5.2 Propriedades do produto de polinômios

Enumeram-se algumas propriedades da multiplicação de polinômios, dados $p(x), q(x)$ e $h(x)$ (HEFEZ; VILLELA, 2012, p. 98-99).

- **M1** - Associatividade

$$(p(x) \cdot q(x)) \cdot h(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot h(x))$$

- **M2** - Comutatividade
$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

- **M3** - Elemento Neutro, se 1 denota o polinômio constante, então
$$1 \cdot p(x) = p(x) \cdot 1 = p(x)$$

- **M4** - Distributividade
$$(p(x) + q(x)) \cdot h(x) = p(x) \cdot (h(x) + q(x) \cdot h(x))$$

A propriedade de existência de elementos inversos para a multiplicação de polinômios não vale (COUTINHO, 2012, p. 264). Esse fato pode ser verificado supondo um polinômio p de grau $n \geq 1$. Para que um polinômio q seja o polinômio inverso de p, devemos ter $p \cdot q = 1$. Suponhamos por absurdo que $\exists\ q$ com grau $m \geq 0$, tal que

$$p(x) \cdot q(x) = 1$$

Logo, $gr(p \cdot q) = n + m \quad \text{e} \quad n + m \geq 1 + 0 \quad \therefore \quad n + m \geq 1$

Sendo o grau do polinômio constante 1 igual a zero, a igualdade descrita anteriormente chegaria a um absurdo. Com isso, os únicos polinômios que admitem inversos com respeito à operação de multiplicação são os polinômios constantes não nulos (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 264).

A proposição a seguir é muito importante para a noção de grau de polinômios.

Para $p, q \in \mathbb{C}[x] - \{0\}$, tem-se:

1. $gr(p + q) \leq max\{gr(p),\ gr(q)\} \quad \text{se} \quad p + q \neq 0.$
2. $p \cdot q \neq 0 \quad \text{e} \quad gr(pq) = gr(p) + gr(q)$

A.6 Divisão de Polinômios

Foi apresentado que é possível somar, subtrair e multiplicar polinômios, mas nem sempre é possível efetuar a divisão.

Segundo Oliveira e Fernández (2010, p. 265), um polinômio $a(x)$ divide $b(x)$ se existir $q(x)$, tal que $b(x) = q(x) \cdot a(x)$. Logo, $b(x)$ é múltiplo de $a(x)$. Diz-se, ainda, que $a(x)$ divide o polinômio não nulo $b(x)$. Por exemplo, o polinômio $a(x) = x + 1$ divide o polinômio $b(x) = x^2 - 1$, pois:

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$b(x) = a(x) \cdot q(x)$$

sendo $b(x) \neq 0$.

Tem-se que $gr(b) = gr(a) + gr(q)$, logo $gr(a) \leq gr(b)$.

O conceito de divisibilidade em $\mathbb{C}[x]$ é o mesmo válido para os números inteiros.

Euclides, em sua obra Elementos, utiliza o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de a por b com resto na divisão de inteiros. Pode-se, então, estender para os polinômios, ou seja:

$$b(x) = a(x) \cdot q(x) + r(x)$$

onde $r(x) = 0$ ou $gr(r) < gr(a)$ (OLIVEIRA; FERNÁNDEZ, 2010, p. 265).

Chamam-se $b(x)$ de dividendo, $a(x)$ de divisor, $q(x)$ de quociente e $r(x)$ de resto. Logo, $a(x)$ divide $b(x)$ se, e somente se, $r(x)$ for o polinômio nulo.

Veja como determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão euclidiana do polinômio $b(x)$ por $a(x)$. Na divisão, deve-se prestar atenção aos graus do dividendo, do divisor e do resto.

Até o presente momento, os polinômios têm representado meramente expressões formais com as quais aprende-se a operar. Nesse sentido, a indeterminada x tem sido um símbolo sem sentido aritmético (NETO, 2012, p. 47).

Pode-se atribuir, assim, um valor para o x e, portanto, um valor numérico ao polinômio. Por exemplo

Exemplo A.5. *Se* $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + x + 1$ *fazendo* $x = 2$*, tem-se*

$$p(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 16 + 12 + 3 = 31.$$

Logo, $p(x) = 31$ quando $x = 2$.

Divida $p(x)$, um polinômio de grau 3 por $a(x) = x - 2$, um polinômio de grau 1 e coeficiente dominante também igual a 1. Usando o método das chaves, tem-se:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +3x^2 & +\ x & +\ 1 & x-2 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+7x+15 \\
\cline{1-4}
 & 7x^2 & +\ x & +\ 1 & \\
 & -7x^2 & +14x & & \\
\cline{2-4}
 & & 15x & +\ 1 & \\
 & & -15x & +30 & \\
\cline{3-4}
 & & & 31 &
\end{array}
$$

Obtém-se $r(x) = 31$, que é um polinômio constante e, portanto, o $gr(r) = 0$, pois $gr(r) < gr(q) = 1$.

Observe que $r(x) = 31 = p(2)$.

Teorema A.1 (Teorema do Resto)**.** *O resto da divisão de um polinômio p por $x - \alpha$ é igual ao valor numérico de p em α (IEZZI, 2005, p. 82).*

Demonstração A.1. *Considere $p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha) + r(x)$*
No qual $p(x)$ é o dividendo, $(x - \alpha)$ é o divisor, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ é o resto.
Sendo o divisor $(x - \alpha)$ de grau 1, o resto ou será 0 ou terá grau zero.
Seja $p(\alpha) = q(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + r(\alpha)$
$p(\alpha) = q(\alpha) \cdot 0 + r(\alpha)$
$p(\alpha) = r(\alpha)$
Ou seja, $r(\alpha)$ independe de x. Portanto, $p(\alpha) = r(x)$.

Quando o valor numérico de um polinômio $p(x)$ é igual a zero, ou seja, para $x = \alpha$, $p(\alpha) = 0$, diz-se que α é raiz do polinômio $p(x)$. Daí decorre o Teorema de D'Alembert.

Teorema A.2 (Teorema de D'Alembert)**.** *Um polinômio p é divisível por $x - \alpha$, se e somente se, α é raiz de p (LIMA et al., 1998, p. 201).*

Demonstração A.2. *De acordo com o teorema do resto $p(\alpha) = r(x)$, como $r(x) = 0$, tem-se que $p(\alpha) = 0$. Logo, α é raiz de p.*

Portanto, se $p(x)$ e divisível por $(x - \alpha)$, então existe um polinômio q, tal que

$$p(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$$

Até o momento, tem-se falado de polinômios complexos e não funções polinomiais complexas. Existe uma diferença sutil entre um polinômio e uma função polinomial. Note que o conceito de polinômio contempla apenas a lista de seus coeficientes e a forma pela qual os somam ou os multiplicam; quando se refere à função polinomial, passa-se a estar interessado na correspondência entre números complexos estabelecida pelo valor que a função assume em cada ponto. É claro que a todo polinômio corresponde uma única função polinomial; por outro lado, foi apresentado que duas funções polinomiais só são iguais quando têm a mesma lista de coeficientes. Em outras palavras, duas funções polinomiais só são iguais quando os polinômios a elas associados são iguais. Assim, a uma função polinomial também corresponde um único polinômio. Desse modo, existe uma correspondência biunívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que permite, sem risco de confusão, referirmo-nos a um "polinômio $p(x)$" (LIMA et al., 1998, p. 203).

De modo geral, se os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial de p de grau n, então existe uma função polinomial q de grau $(n-k)$ tal que:

$$p(x) = (x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot ... \cdot (x-\alpha_k) \cdot q(x)$$

Observa-se que a fatoração anterior mostra que, ao conhecer algumas raízes do polinômio p, então o problema de achar as outras raízes se reduz ao problema de encontrar as raízes de um polinômio, cujo grau é menor do que o grau de p. De fato, a fatoração garante, por um lado, que se α é uma raiz de p, então α é uma das raízes conhecidas ou, $q(\alpha) = 0$. Por outro lado, se α é uma raiz de q, então $p(\alpha) = 0$ e, portanto, α é uma raiz de p.

Em consequência, uma função polinomial complexa de grau n pode ter, no máximo, n raízes (LIMA et al., 1998, p. 201).

No conjunto dos complexos, não há polinômios de grau maior do que ou igual a 1 que não possuam raízes. Isso se confirma com o Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema A.3 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio não constante com coeficientes complexos possui, pelo menos, uma raiz complexa (LIMA et al., 1998, p. 230-233).*

Demonstração A.3. *Considere uma função polinomial $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ são números complexos. Note que, agora, olha-se p como uma função definida no conjunto dos complexos (isto é, como uma função que associa a cada ponto do plano complexo a sua imagem que, também, é um ponto do plano complexo). Quer se demonstrar que existe um complexo z_0 tal que sua imagem $p(z_0)$ seja igual a zero (ou seja, que existe um ponto do plano complexo, cuja imagem por p seja a origem). A fim de poder explorar a continuidade das funções polinomiais complexas (vista aqui de modo intuitivo, mas que pode ser tornado matematicamente preciso), consideram-se as imagens, através de p, círculos do plano complexo de centro na origem. Devido à continuidade de p, *a imagem de uma curva contínua e fechada (isto é, que volta ao ponto de partida) deve ser uma outra curva contínua e fechada. No entanto, a curva imagem não é necessariamente uma curva simples (ou seja, ela pode cruzar a si própria). Fazendo $|z| = r$, pode-se verificar que para r pequeno, se z descreve um círculo de centro na origem e raio r, então a curva descrita por $p(z)$ é uma curva fechada, em torno do complexo a_0, e tendo a origem em seu exterior. Para r grande, a curva descrita por z dá n voltas em torno da origem. Para passar da primeira situação (origem exterior) para a segunda (origem interior), é necessário que, em algum momento, a curva contenha a origem e, assim, que $p(z) = 0$ possua raiz complexa. Logo, toda equação polinomial possui, pelo menos, uma raiz complexa.*

Pode-se, então, estabelecer, de modo completo, a relação entre as raízes de um polinômio complexo e a sua forma fatorada.

Teorema A.4. *Todo polinômio $p(x)$ com coeficientes complexos e grau $n \geq 1$, escreve-se de uma única maneira, a menos da ordem dos fatores como*

$$p(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)^{r_1} \cdot (x - \alpha + 2)^{r_2} \cdot ... \cdot (x - \alpha_s)^{r_s}$$

no qual $a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ é o coeficiente líder de $p(x)$, α_1, α_2,...,α_s são raízes complexas distintas e r_1, r_2,...,r_s são inteiros positivos tais que $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$.

Demonstração A.4. *Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau n pode ser fatorado na forma $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_s) \cdot q_1(x)$, no qual $q_1(x)$ não possui raízes reais. Mas, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, apenas polinômios constantes não possuem raízes complexas (LIMA et al., 1998, p. 219, 220). Assim,*

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot ... \cdot (x - \alpha_s) \cdot q_1(x)$$

para algum valor de $q_1(x) = a_n$. Mas p tem grau n; isso implica que o número de fatores do 1º grau dever ser n. Logo, $s = n$ e provou-se que p se decompõe num produto de um fator constante e n fatores do 1º grau.

Portanto, todo polinômio complexo pode ser escrito como o produto do seu coeficiente líder por polinômios irredutíveis mônicos distintos.

O expoente de cada termo do 1º grau é chamado de multiplicidade da raiz correspondente. Raízes de multiplicidade 1 são chamadas de raízes simples; raízes de multiplicidade 2 são chamadas de raízes duplas; e assim por diante.

Um número complexo α é raiz de multiplicidade r de $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)^r$ e não é divisível por $(x - \alpha)^{r+1}$.

Os únicos polinômios irredutíveis em uma variável com coeficientes complexos são os de grau 1. O que significa, em $\mathbb{C}[x]$, que fatorar polinômios equivale a encontrar suas raízes (COUTINHO, 2012, p. 69).

APÊNDICE B

Questionário Inicial

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Este questionário foi elaborado por Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida para o desenvolvimento da Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Geraldo de Oliveira Filho e coorientação da professora Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

As informações pessoais que você fornecer serão tratadas somente para fins de pesquisa e seu nome, como sujeito da pesquisa, será mantido em sigilo.

QUESTIONÁRIO

1. Identificação:

2. Sexo:
   ( )Feminino
   ( )Masculino

3. Qual é a sua idade?

4. Você possui *smarthphone* com sistema Android?
   ( )Sim
   ( )Não

   Em caso afirmativo, qual é a versão do Android?

   ( )Inferior a 2.2

   ( )Igual ou superior a 2.2

5. Você possui *tablet* com sistema Android?
   ( )Sim
   ( )Não

Em caso afirmativo, qual é a versão do Android?

( )Inferior a 2.2

( )Igual ou superior a 2.2

6. Você já utilizou pedagogicamente o *smarthphone*?
( )Sim
( )Não

Em caso afirmativo, com qual finalidade?

( )Estudar para uma avaliação

( )Realizar pesquisas

( )Realizar trabalhos por orientação de um professor

( )Apoiar a resolução de exercícios e/ou atividades

( )Outro:

Caso tenha utilizado o *smarthphone* com finalidade pedagógica, você considerou essa experiência positiva? Comente.

7. Você já utilizou pedagogicamente o *tablet*?
( )Sim
( )Não

Em caso afirmativo, com qual finalidade?

( )Estudar para uma avaliação

( )Realizar pesquisas

( )Realizar trabalhos por orientação de professor

( )Apoiar a resolução de exercícios e/ou atividades

( )Outro:

Caso tenha utilizado o *tablet* com finalidade pedagógica, você considerou essa experiência positiva? Comente.

APÊNDICE C

Avaliação Diagnóstica

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1. Classifique as expressões algébricas, a seguir, em **POLINÔMIOS** ou **NÃO POLINÔMIOS** no conjunto $\mathbb{C}[x]$. Justifique sua resposta quando classificar as expressões algébricas como não polinomiais.

    a) $f(x) = 2ix^3 + 3x^2 + 1$

    b) $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 - 1$

    c) $g(x) = 3\sqrt{x} - 6x + 1$

    d) $u(x) = 7$

    e) $m(x) = 3x^{-2} + ix^{-1} - 1$

    f) $n(x) = 7x^5 + 2x^3 - \frac{1}{x}$

    g) $o(x) = 0x^3 + 0x^2$

2. Determine o grau dos seguintes polinômios:

    a) $f(x) = x^2 - (x+2)^2 + x$

    b) $g(x) = 7$

    c) $h(x) = x^6 - 4x^2 + 3x^7$

    d) $n(x) = 0$

    e) $p(x) = 2(x-1)^7(x+2)^5$

3. O resto da divisão de $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - d$ por $h(x) = x - 1$ é um polinômio $r(x)$ identicamente nulo. Qual é o o valor de **d**?

4. Decomponha o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ em um produto de fatores de primeiro grau. Sabe-se que **3** é raiz desse polinômio.

5. Determine todas as raízes e respectivas multiplicidades na equação polinomial $p(x) = 0$. Justifique sua resposta.

   a) $p(x) = 3(x-1)(x+4)^2$

   b) $p(x) = 5(x-1)^3(x^2+4)$

   c) $p(x) = 7(2x-5)^3$

APÊNDICE D

Atividade 1

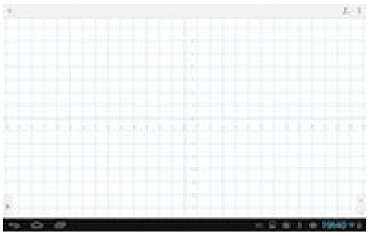
Estudo do Comportamento do Gráfico de Funções Polinomiais
Autora: Ana Mary Fonseca Barreto

ATIVIDADE 1

1ª parte: Conhecendo o aplicativo *xGraphing*

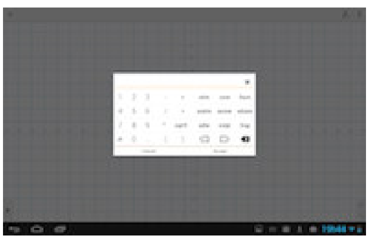
O *xGraphing* é um aplicativo para dispositivos Android, gratuito, desenvolvido pela empresa Propane e que possibilita plotagem de gráficos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Disponível, em português, no endereço eletrônico:
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pierwiastek.xgraphing&hl=pt_BR>.
Para utilizar o aplicativo *xGraphing*, quando o mesmo já está instalado no dispositivo móvel, toque no ícone  na área de trabalho. Você acessará a tela apresentada na figura 56:

Figura 56 – Tela capturada pela autora



Toque no ícone  e, a seguir, em **Add from formula** para construir gráficos a partir da lei de associação de uma função, conforme apresentado na figura 57:

Figura 57 – Tela capturada pela autora

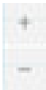


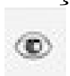
2ª parte: Atividades Exploratórias

A segunda parte desta apostila tem a finalidade de favorecer o reconhecimento das funções de algumas ferramentas do *xGraphing*.

1. Plote o gráfico do polinômio $p(x) = 2x^3+3x^2-x-2$. Para isso digite 2*x^3+3*x^2-x-2 e, a seguir, clique em **Accept**.

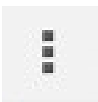
2. Toque novamente em  e, a seguir, em **Add from points**. Marque, com um toque na tela, pontos quaisquer. Observe que na parte superior da tela aparecerá a lei de associação da função polinomial, cujo gráfico contém os pontos marcados. Movimente-os e, para finalizar, toque em .

3. Toque em  na parte inferior da tela à direita para ampliar ou diminuir a figura. Essa ação poderá ser realizada também arrastando-se dois dedos na tela. Aumente a figura e observe os pontos nos quais as curvas, dos itens 1 e 2, intersectam o eixo x.

4. Toque em  no lado esquerdo da parte inferior da tela. Apague o gráfico de $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 2$ e esconda o gráfico da função polinomial determinada por pontos. Para apagar o gráfico, toque sobre a lei de associação da função e, com os dedos, arraste para a direita. Para esconder, toque em .

   Toque em  em 

   para fechar.

5. Toque em  e, a seguir, em **Share** para enviar suas construções. Observe as opções da tela e envie o seu arquivo para o seu próprio e-mail.

3ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de funções polinomiais de grau par (n par)

A terceira parte desta apostila tem por finalidade a ampliação dos conhecimentos de polinômios por meio da análise do comportamento do gráfico de um polinômio, de grau par, para valores de x tais que $|x|$ é um número suficientemente grande ou suficientemente pequeno.

As funções polinomiais de que tratam as atividades são da forma:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

ou

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

1. Dê exemplos de três polinômios de grau par (n par), sendo o coeficiente do termo de maior grau positivo ($a_n > 0$).

   $p_1(x) =$

   $p_2(x) =$

   $p_3(x) =$

2. No *xGraphing*, trace os gráficos dos polinômios registrados no item anterior. Analise o polinômio e o seu gráfico, em seguida, descreva o que você observou quanto:

   a) aos valores de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente.

   b) aos valores de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

   c) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamento de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente.

   d) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamento de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

3. Substitua x por zero em cada polinômio da questão 1, encontre o valor de $y = p(x)$ quando $x = 0$.

   $p_1(0) =$

   $p_2(0) =$

   $p_3(0) =$

4. Compare os valores encontrados no item anterior com os termos independentes de cada um dos polinômios. Em seguida, observe seus respectivos gráficos. Descreva o que você observou quanto ao comportamento do gráfico de $y = p(x)$, quando $x = 0$.

Antes de continuar, tire uma foto da página. Para isso, aperte, simultaneamente, o botão liga/desliga e o botão volume. Em seguida, esconda os gráficos representados na tela do aplicativo *xGraphing*.

5. Dê exemplos de três polinômios de grau par (n par), sendo o coeficiente do termo de maior grau negativo ($a_n < 0$).

   $p_4(x) =$

   $p_5(x) =$

   $p_6(x) =$

6. No *xGraphing*, trace os gráficos dos polinômios registrados no item anterior. Analise o polinômio e o seu gráfico, em seguida, descreva o que você observou quanto:

   a) aos valores de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente.

   b) aos valores de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

c) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamento de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente

d) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamento de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

7. Substitua x por zero em cada polinômio da questão 5, encontre o valor de $y = p(x)$ quando $x = 0$.

   $p_4(0) =$

   $p_5(0) =$

   $p_6(0) =$

8. Compare os valores encontrados no item anterior com os termos independentes de cada um dos polinômios. Em seguida, observe seus respectivos gráficos. Descreva o que você observou quanto ao comportamento do gráfico de $y = p(x)$, quando $x = 0$.

Antes de continuar, tire uma foto da página. Em seguida, esconda os gráficos representados na tela do aplicativo

4ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de funções polinomiais de grau ímpar (n ímpar)

A quarta parte desta apostila tem por finalidade a ampliação dos conhecimentos de polinômios por meio da análise do comportamento do gráfico de um polinômio, de grau ímpar, para valores de x tais que $|x|$ é um número suficientemente grande ou suficientemente pequeno.

As funções de que tratam as atividades são da forma:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$ou$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

9. Dê exemplos de três polinômios de grau ímpar (n ímpar), sendo o coeficiente do termo de maior grau positivo ($a_n > 0$).

$p_7(x) =$

$p_8(x) =$

$p_9(x) =$

10. No *xGraphing*, trace os gráficos dos polinômios registrados no item anterior. Analise o polinômio e o seu gráfico, em seguida, escreva o que você observou quanto:

    a) aos valores de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente.

    b) aos valores de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

    c) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamento de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente.

    d) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamente de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

11. Substitua x por zero em cada polinômio da questão 9, encontre o valor de $y = p(x)$ quando $x = 0$.

    $p_7(0) =$

    $p_8(0) =$

    $p_9(0) =$

12. Compare os valores encontrados no item anterior com os termos independentes de cada um dos polinômios. Em seguida, observe seus respectivos gráficos. Descreva o que você observou quanto ao comportamento do gráfico de $y = p(x)$, quando $x = 0$.

Antes de continuar, tire uma foto da página. Em seguida, esconda os gráficos representados na tela do aplicativo *xGraphing*.

13. Dê exemplos de três polinômios de grau ímpar (n ímpar), sendo o coeficiente do termo de maior grau negativo ($a_n < 0$).

    $p_{10}(x) =$

    $p_{11}(x) =$

    $p_{12}(x) =$

14. No *xGraphing*, trace os gráficos dos polinômios registrados no item anterior. Analise o polinômio e o seu gráfico, em seguida, descreva o que você observou quanto:

    a) aos valores de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente.

b) aos valores de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

c) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamento de $y = p(x)$, quando x cresce ilimitadamente.

d) à relação entre o sinal do coeficiente do termo de maior grau (a_n) e ao comportamento de $y = p(x)$, quando x decresce ilimitadamente.

15. Substitua x por zero em cada polinômio da questão 13, encontre o valor de $y = p(x)$ quando $x = 0$.

$p_{10}(0) =$

$p_{11}(0) =$

$p_{12}(0) =$

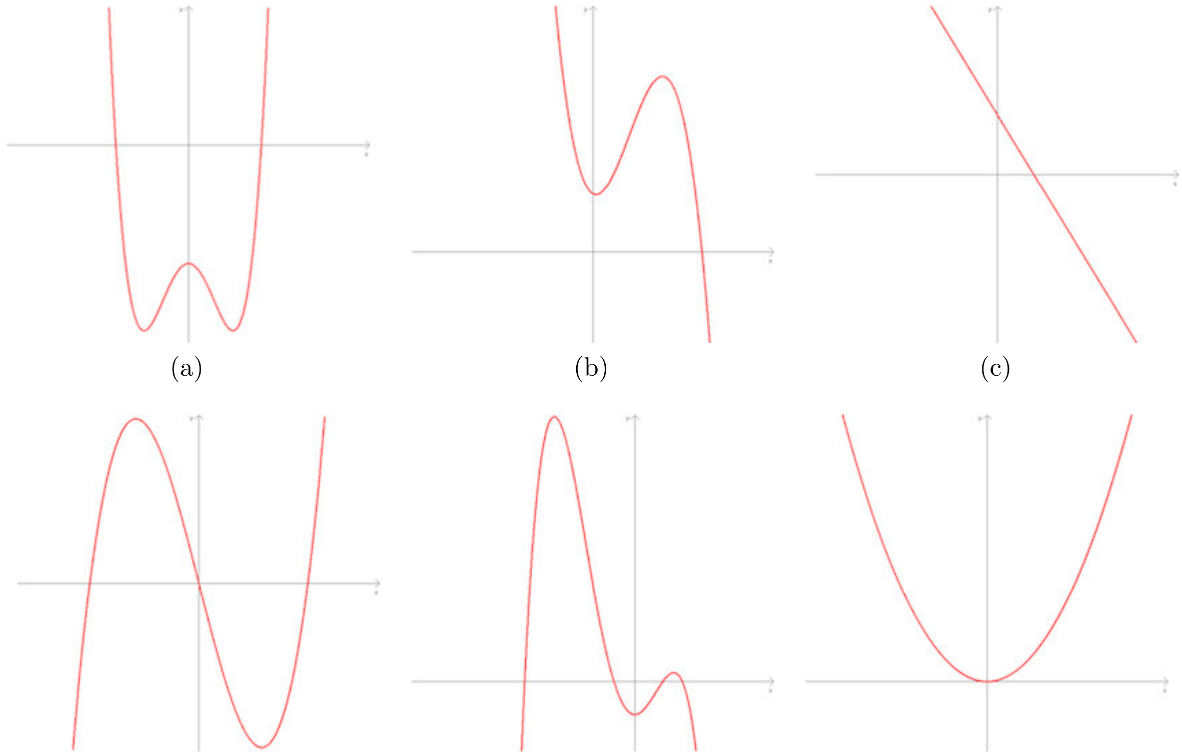
16. Compare os valores encontrados no item anterior com os termos independentes de cada um dos polinômios. Em seguida, observe seus respectivos gráficos. Descreva o que você observou quanto ao comportamento do gráfico de $y = p(x)$, quando $x = 0$.

Antes de continuar, tire uma foto da página. Em seguida, esconda os gráficos representados na tela do aplicativo *xGraphing*.

5ª parte: Atividades de verificação

A quinta parte desta apostila tem por finalidade verificar a aprendizagem dos conceitos relativos ao comportamento do gráfico das funções polinomiais quanto ao sinal do coeficiente do termo de maior grau, quanto ao grau do polinômio, para valores de x tais que $|x|$ é um número suficientemente grande ou suficientemente pequeno.

17. Observe os gráficos de polinômios que seguem e, responda:



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

a) Quais itens representam o gráfico de um polinômio de grau par? Justifique sua resposta.

b) Quais itens representam o gráfico de um polinômio de grau ímpar? Justifique sua resposta.

c) Quais itens representam o gráfico de um polinômio, cujo coeficiente do termo de maior grau é positivo? Justifique sua resposta.

d) Quais itens representam o gráfico de um polinômio, cujo coeficiente do termo de maior grau é negativo? Justifique sua resposta.

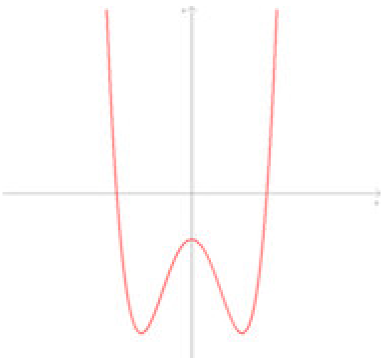
e) Para cada gráfico representado, identifique o item daqueles que possuem:

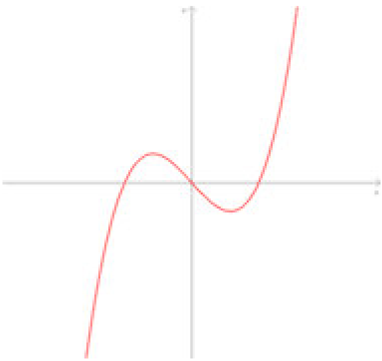
i. termo independente igual a zero.

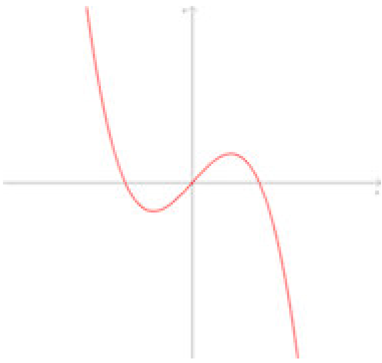
ii. termo independente positivo.

iii. termo independente negativo.

18. Marque com um (X) o gráfico que melhor representa o polinômio $f(x) = x^3 - 2x$.







APÊNDICE E

Atividade 2

Estudo do Comportamento do Gráfico de Funções Polinomiais
Autora: Ana Mary Fonseca Barreto

ATIVIDADE 2

A Atividade 2 utiliza o *xGraphing*, um aplicativo para dispositivos Android, gratuito, desenvolvido pela empresa Propane e que possiblita plotagem de gráficos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Disponível, em português, no endereço eletrônico: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pierwiastek.xgraphing&hl=pt_BR>. As atividades, propostas nesta apostila, levam em consideração a definição de raízes de polinômios, o Teorema Fundamental da Álgebra e a relação entre as raízes de um polinômio complexo e a sua forma fatorada.

As funções polinomiais de que tratam as atividades são da forma:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$ou$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

1ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de polinômios nas raízes reais de multiplicidade ímpar e em suas respectivas vizinhanças.

A primeira parte desta apostila tem por finalidade favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes reais e na vizinhança de suas raízes reais, quando estas têm multiplicidade ímpar.

1. Dados os polinômios:

   $p_1(x) = x - 3$

   $p_2(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)(x-3,5)$

   $p_3(x) = (x-3)^3$

   $p_4(x) = 0,01(x+2)^5(x-3)$

a) Determine o grau dos polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$.

grau($p_1(x)$)

grau($p_2(x)$)

grau ($p_3(x)$)

grau($p_4(x)$)

b) Determine as raízes de $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ e $p_4(x)$ e suas respectivas multiplicidades.

c) O que podemos afirmar sobre a paridade (propriedade de ser par ou de ser ímpar) dos valores encontrados para a multiplicidade das raízes?

d) Compare o grau e a soma das multiplicidades de todas as raízes de cada um dos polinômios. Descreva o que você observou.

e) No *xGraphing*, trace o gráfico de $p_1(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes, ou seja, os valores de $y = p(x)$ quando x se aproxima da raiz real tanto para valores de x imediatamente à esquerda quanto para valores de x imediatamente à direita. Os sinais são iguais ou diferentes?

f) Esconda da tela o gráfico de $p_1(x)$. Em seguida, trace o gráfico de $p_2(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou diferentes?

g) Esconda da tela o gráfico de $p_2(x)$. Em seguida, trace o gráfico de $p_3(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou diferentes?

h) Esconda da tela o gráfico de $p_3(x)$. Em seguida, trace o gráfico de $p_4(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou diferentes?

i) Analise os resultados dos itens de (f) a (h). Descreva o que você observou.

Mostre na tela os gráficos de todos os polinômios e tire uma foto. Em seguida, esconda os gráficos representados na tela do aplicativo *xGraphing*.

2ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de polinômios nas raízes reais de multiplicidade par e suas respectivas vizinhanças.

A segunda parte desta apostila tem por finalidade favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio de raízes reais em relação à sua vizinhança, quando estas têm multiplicidade par.

1. Dados os polinômios:

$p_5(x) = (x-3)^2$

$p_6(x) = 0,01(x+2)^2(x-5)^2$

$p_7(x) = x^4$

a) Determine o grau dos polinômios $p_5(x)$, $p_6(x)$ e $p_7(x)$.

grau$(p_5(x))$

grau$(p_6(x))$

grau$(p_7(x))$

b) Determine as raízes de $p_5(x)$, $p_6(x)$ e $p_7(x)$ e suas respectivas multiplicidades.

c) O que podemos afirmar sobre a paridade (propriedade de ser par ou de ser ímpar) dos valores encontrados para a multiplicidade das raízes?

d) Compare o grau e a soma das multiplicidades de todas as raízes de cada um dos polinômios. Descreva o que você observou.

e) No *xGraphing*, trace o gráfico de $p_5(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes, ou seja quando x se aproxima da raiz real tanto para valores de x imediatamente à esquerda quanto para valores de x imediatamente à direita. Os sinais são iguais ou diferentes?

f) Esconda da tela o gráfico de $p_5(x)$. Em seguida, trace o gráfico de $p_6(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou diferentes?

g) Esconda da tela o gráfico de $p_6(x)$. Em seguida, trace o gráfico de $p_7(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou diferentes?

h) Analise os resultados dos itens (e), (f) e (g). Descreva o que você observou.

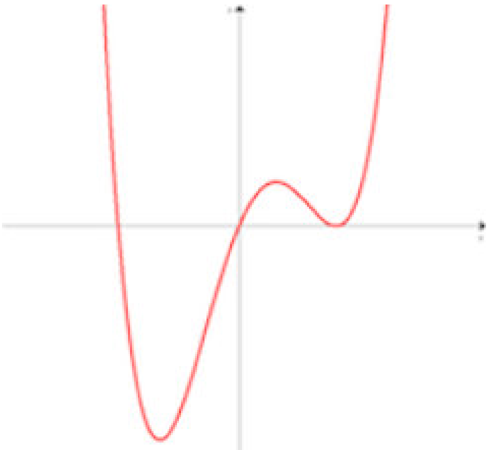
i) Analise o comportamento do gráfico de cada polinômio quando $y = p(x) = 0$ e compare-o com os gráficos da 1ª parte da apostila. Descreva o que você observou.

Mostre na tela os gráficos dos polinômios da 2ª parte e tire uma foto. Em seguida, apague todos os polinômios registrados no aplicativo *xGraphing*.

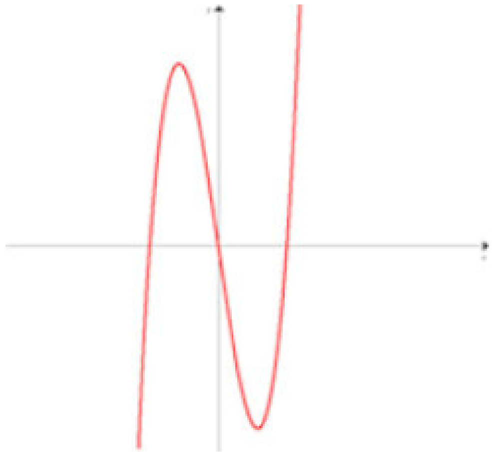
3ª parte: Atividades de Verificação.

A terceira parte desta apostila tem por finalidade verificar a aprendizagem dos conceitos relativos ao comportamento do gráfico das funções polinomiais quanto ao grau do polinômio e quanto à multiplicidade de suas raízes reais.

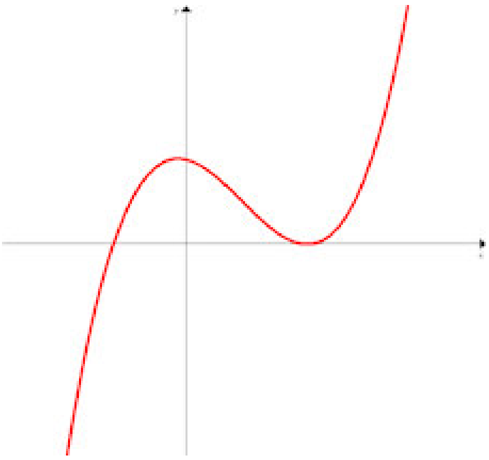
1. Marque com um ponto (●) as raízes reais representadas no gráfico dos polinômios e escreva se estas têm multiplicidade par ou ímpar.



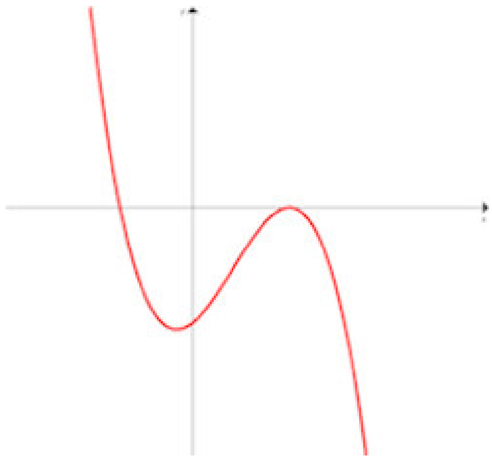
(a) $p_1(x)$



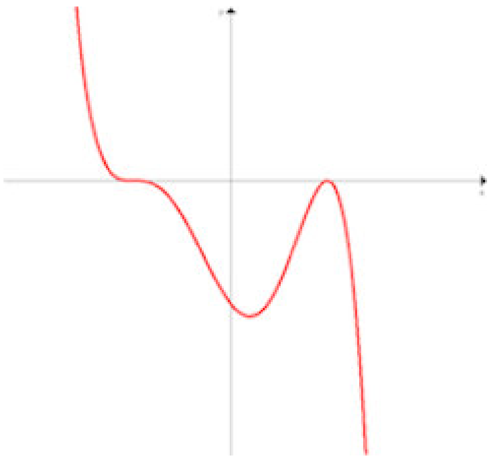
(b) $p_2(x)$



(c) $p_3(x)$



(d) $p_4(x)$

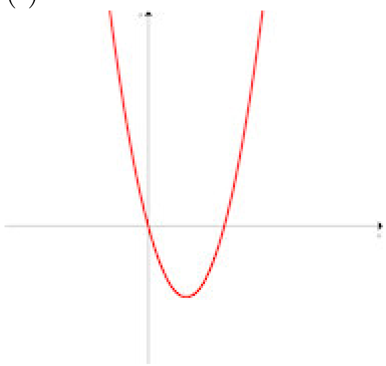


(e) $p_5(x)$

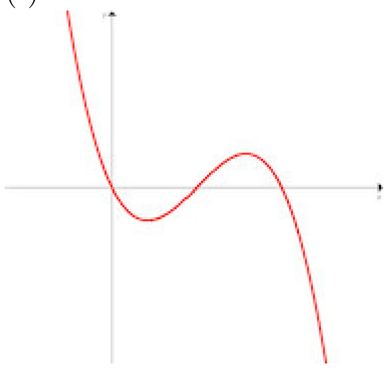
(f) $p_6(x)$

2. Marque com um (X) o gráfico que melhor representa o polinômio $f(x) = x^2(x-1)$. Justifique sua resposta.

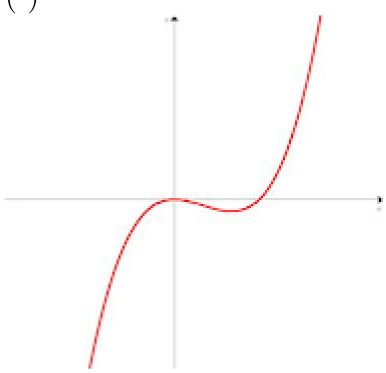
a) ( )



b) ( )



c) ( )



APÊNDICE F

Atividade 3

Estudo do Comportamento do Gráfico de Funções Polinomiais

Autora: Ana Mary Fonseca Barreto

ATIVIDADE 3

A Atividade 3 utiliza o *xGraphing*, um aplicativo para dispositivos Android, gratuito, desenvolvido pela empresa Propane e que possiblita plotagem de gráficos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Disponível, em português, no endereço eletrônico:
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pierwiastek.xgraphing&hl=pt_BR>.
As atividades, propostas nesta apostila, levam em consideração a definição de raízes de polinômios, o Teorema Fundamental da Álgebra e a relação entre as raízes de um polinômio complexo e a sua forma fatorada.

As funções polinomiais de que tratam as atividades são da forma:

$$p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$ou$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$com$$

$$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \epsilon \mathbb{R}$$

1ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de polinômios nas raízes complexas não reais.

A primeira parte desta apostila tem por finalidade favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes complexas não reais.

1. Dado o polinômio $p_1(x) = x^2 - 2x + 5$.

   a) Determine o grau de $p_1(x)$.

b) Resolva a equação $p_1(x) = 0$

c) Quantas soluções (raízes) admite a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$?

d) As raízes encontradas são números reais ou complexos não reais?

e) Compare o grau de $p_1(x)$ com a quantidade de raízes. São iguais ou diferentes?

f) No *xGraphing*, trace o gráfico de $p_1(x)$.

g) Analise o gráfico de $p_1(x)$. O gráfico de $p_1(x)$ corta ou, pelo menos, toca o eixo x? Em caso afirmativo, em quantos pontos?

2. Dado o polinômio $p_2(x) = -0,05(x + 3)(x^2 + 4)$.

a) Determine o grau de $p_2(x)$.

b) Determine as raízes de $p_2(x)$.

c) Compare o grau de $p_2(x)$ com a quantidade de raízes. São iguais ou diferentes?

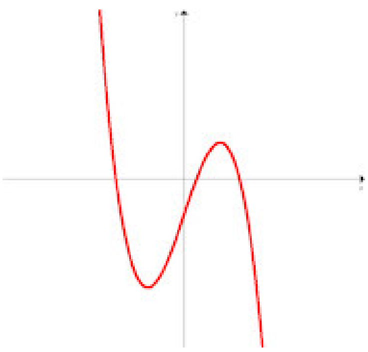
d) Classifique as raízes de $p_2(x)$ em reais ou em complexas não reais.

e) No *xGraphing*, trace o gráfico do polinômio $p_2(x)$.

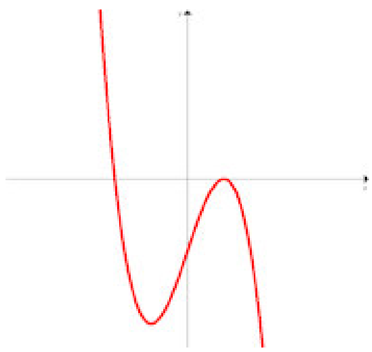
f) Analise o gráfico de $p_2(x)$. O gráfico de $p_2(x)$ corta ou, pelo menos, toca o eixo x? Em quantos pontos?

g) Compare o que você escreveu na letra (g) da questão 1 com o que você escreveu na letra (f) da questão 2. Descreva o que você observou.

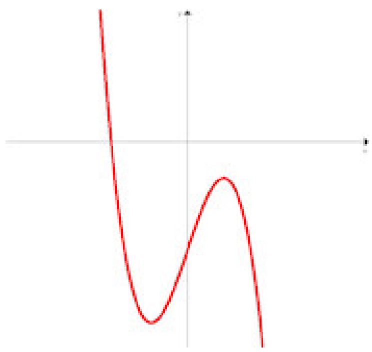
3. Dados os gráficos das funções polinomiais de 3º grau: $p_3(x)$, $p_4(x)$ e $p_5(x)$.



(a) $p_3(x)$



(b) $p_4(x)$



(c) $p_5(x)$

a) $p_3(x)$ possui raízes reais? Em caso afirmativo, quantas? Justifique sua resposta.

b) $p_3(x)$ possui raízes complexas não reais? Em caso afirmativo, quantas? Justifique sua resposta.

c) $p_4(x)$ possui raízes reais? Em caso afirmativo, quantas? Justifique sua resposta.

d) $p_4(x)$ possui raízes complexas não reais? Em caso afirmativo, quantas? Justifique sua resposta.

e) $p_5(x)$ possui raízes reais? Em caso afirmativo, quantas? Justifique sua resposta.

f) $p_5(x)$ possui raízes complexas não reais? Em caso afirmativo, quantas? Justifique sua resposta.

2ª parte: Estudo das propriedades de polinômios com coeficientes reais

A segunda parte desta apostila tem por finalidade favorecer o reconhecimento de duas importantes propriedades dos polinômios complexos com coeficientes reais: as raízes não reais ocorrem aos pares e os polinômios de grau ímpar possuem um número ímpar de raízes reais.

1. Dado o polinômio $p_6(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 2)$.

a) Determine o grau de $p_6(x)$.

b) Determine as raízes de $p_6(x)$.

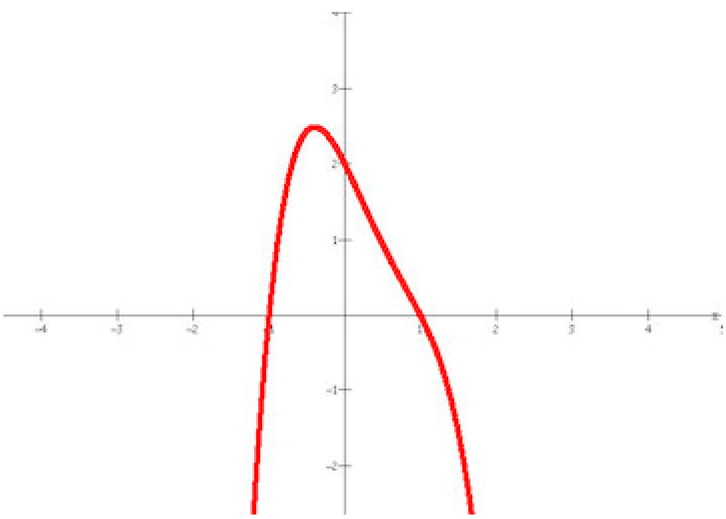
c) Compare o grau de $p_6(x)$ com a quantidade de raízes. São iguais ou diferentes?

d) Classifique as raízes de $p_6(x)$ em reais ou em complexas não reais.

e) Analise as raízes encontradas. Lembrando do conceito de números complexos conjugados, descreva o que você observou.

2. Analise o gráfico do polinômio de 4º grau $p_7(x)$, sabendo que uma de suas raízes é $1+i$.

$p_7(x)$



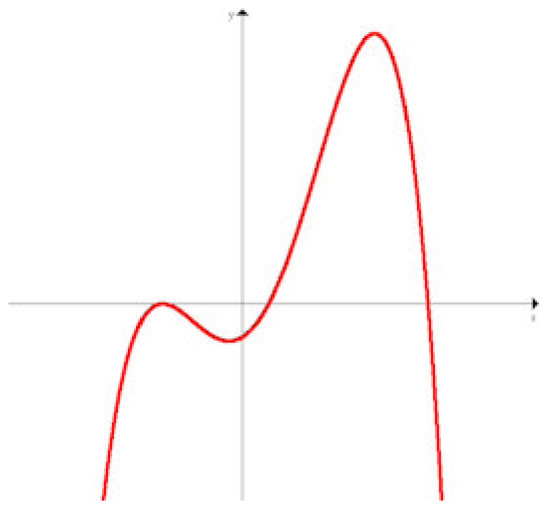
a) Quantas raízes possui $p_7(x)$?

b) Quantas raízes são reais?

c) Quantas raízes são complexas não reais?

d) Sabe-se que $1 + i$ é raiz. Determine as demais raízes.

3. O gráfico a seguir representa um polinômio, cujas raízes reais estão todas representadas no trecho desenhado.



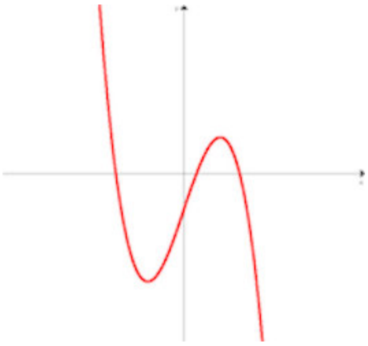
Marque com um (X) a afirmação CORRETA. Justifique sua resposta.

( ) O polinômio representado pode ser de 3º grau.

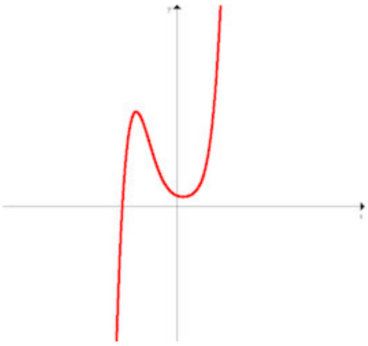
( ) O polinômio representado pode ser de 5º grau.

( ) O polinômio representado pode ser de 6º grau.

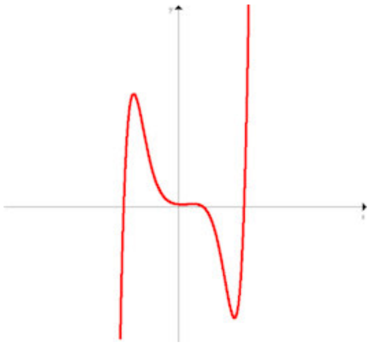
4. Observe os gráficos dos polinômios $p_8(x)$, $p_9(x)$ e $p_{10}(x)$ de graus 3, 5 e 7, respectivamente:



(a) $p_8(x)$



(b) $p_9(x)$



(c) $p_{10}(x)$

É correto afirmar que polinômios de grau ímpar sempre possuem, pelo menos, uma raiz real? Por quê?

3ª parte: Atividade de Verificação

1. Relacione, corretamente, as afirmativas, de I a V, aos gráficos dos polinômios de 4º grau representados a seguir.

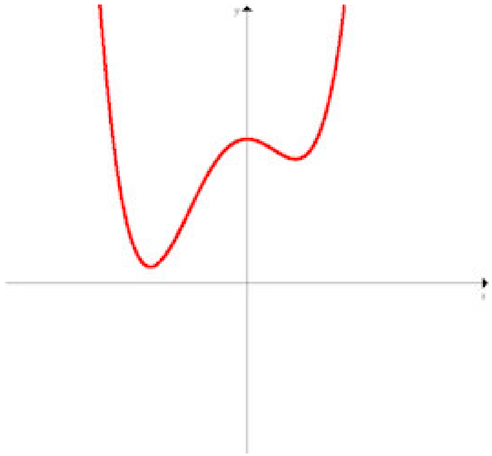
(I) O polinômio possui quatro raízes reais distintas.

(II) O polinômio possui quatro raízes reais, sendo uma raiz dupla e duas simples.

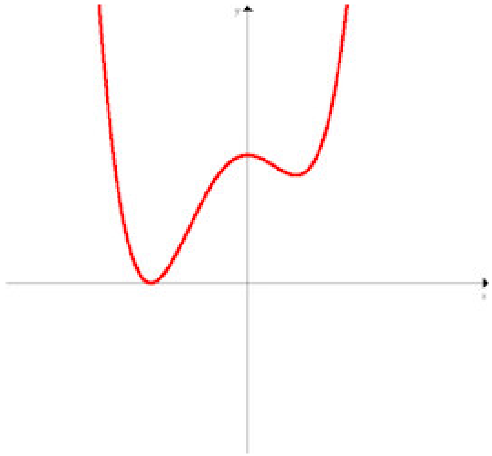
(III) O polinômio possui uma raiz real dupla e duas raízes complexas não reais.

(IV) O polinômio possui todas as raízes complexas não reais.

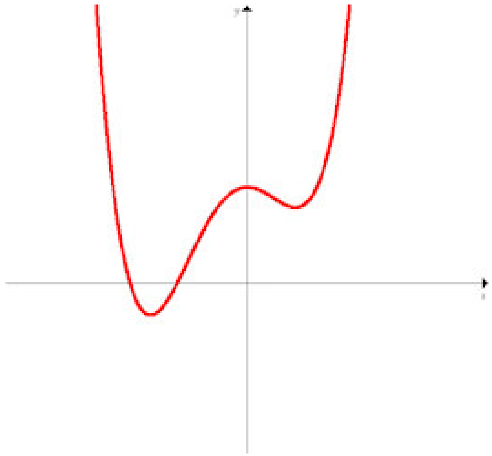
(V) O polinômio possui duas raízes reais distintas e duas raízes complexas não reais.



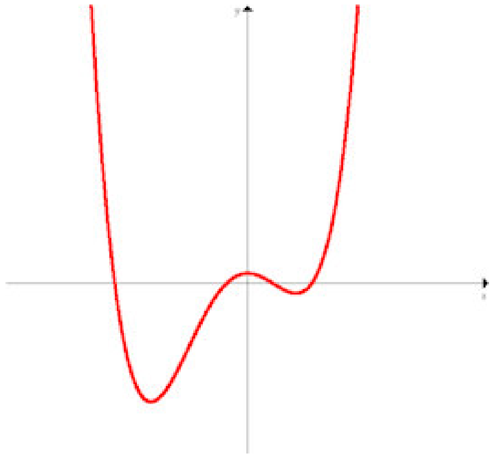
(a) ( )



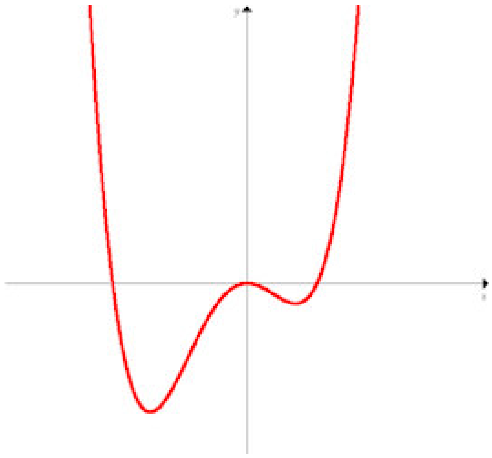
(b) ( )



(c) ( )



(d) ( )



(e) ( )

APÊNDICE G

Atividade 4

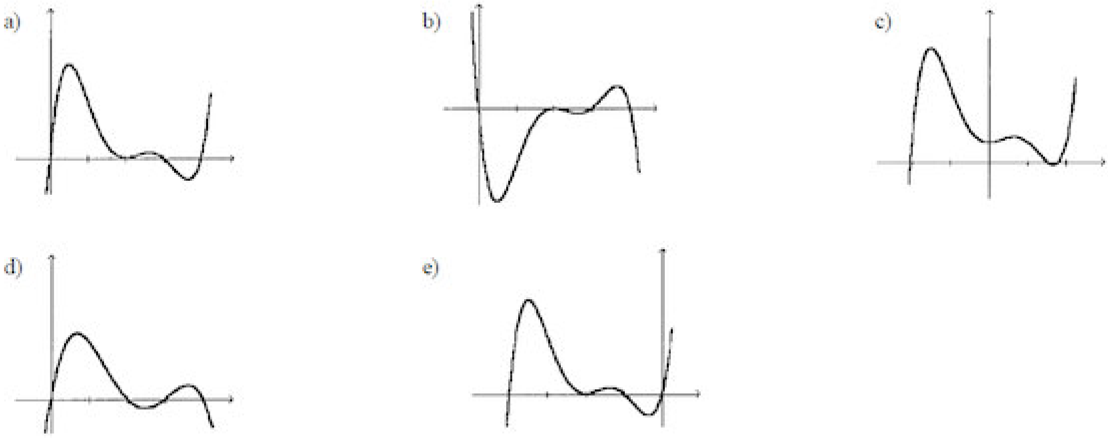
Atividade de Verificação do estudo de Polinômios

Autora: Ana Mary Fonseca Barreto

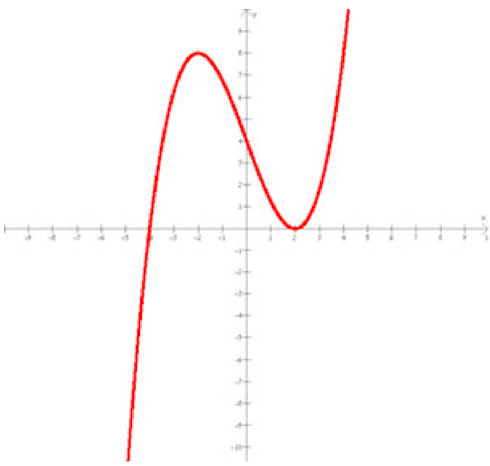
ATIVIDADE 4

A Atividade 4 tem for finalidade verificar, por meio de questões de Concursos Vestibulares, os conceitos apreendidos com o estudo do comportamento do gráfico dos polinômios.

1. (Fuvest-2002) Dado o polinômio $p(x) = x^2(x-1)(x^2-4)$, o gráfico da função $y = p(x-2)$ é melhor representado por:



2. (PUC-RS - 2001) Na figura, tem-se o gráfico de $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Os valores de a, b, c e d são respectivamente.



a) $-4, 0, 4$ e 2

b) $-4, 0, 2$ e 4

c) $\frac{1}{4}, 2, 10$ e 4

d) $\frac{1}{4}, 0, -3$ e 4

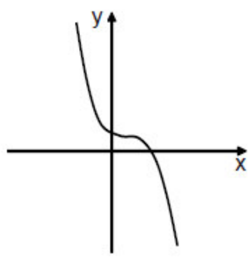
e) $1, 0, -12$ e 16

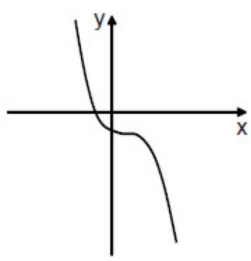
3. (PUC-RS 2010) Na classificação do tipo corporal de cada indivíduo, pela técnica conhecida como somatotipo, a condição referente à adiposidade (gordura) é chamada endomorfia e é calculada pela fórmula:

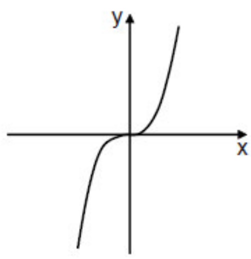
$$ENDO(x) = -0,7182 + 0,1451x - 0,00068x^2 + 0,0000014x^3$$

onde x é obtido a partir de medidas de dobras cutâneas.

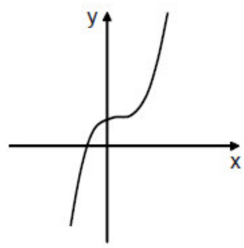
O gráfico que melhor pode representar a função $y = ENDO(x)$ é:

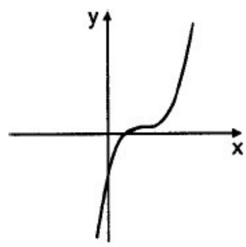
A)


B)


C)


(a) ( )

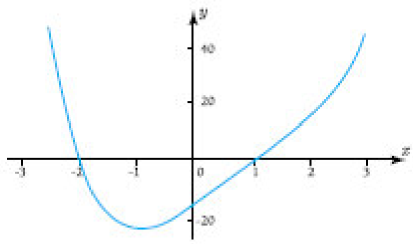
D)


E)


(b) ( )

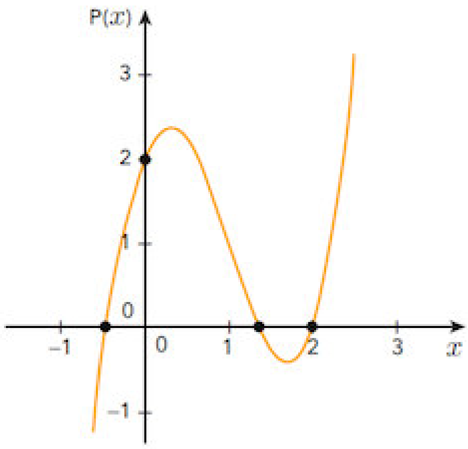
4. (UERJ - 2011) O gráfico representa uma função polinomial P de variável real, que possui duas raízes inteiras e é definida por:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 16x + m$$



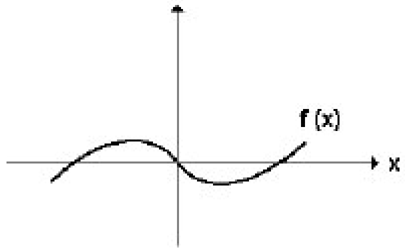
Determine o valor da constante representada por m e as quatro raízes do polinômio.

5. (UERJ-2014) Observe o gráfico da função polinomial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 2$.



Determine o conjunto solução da inequação $P(x) > 0$.

6. (Fuvest - 1999) O gráfico



Pode representar a função $f(x) =$

a) $x(x-1)$
b) $x^2(x^2-1)$
c) $x^3(x-1)$
d) $x(x^2-1)$
e) $x^2(x-1)$

7. (Fuvest - 2015) Os coeficientes a, b e c do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ são reais. Sabendo que -1 e $1 + \alpha i$, com $\alpha > 0$, são raízes da equação $p(x) = 0$ e que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x-1)$ é 8, determine

a) o valor de α;

b) o quociente de $p(x)$ por $(x+1)$.

APÊNDICE H

Questionário Final

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Este questionário foi elaborado por Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida para o desenvolvimento da Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Geraldo de Oliveira Filho e coorientação da professora Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto.

As informações que você fornecer serão tratadas somente para fins de pesquisa.

QUESTIONÁRIO FINAL

Sobre o plotador gráfico *xGraphing*

1. Em sua opinião, aprender a utilizar o aplicativo *xGraphing* foi:
   - Muito Fácil
   - Fácil
   - Moderado
   - Difícil
   - Muito Difícil

2. Você considera que a utilização do aplicativo contribuiu para a realização das atividades propostas?
   - Sim
   - Parcialmente
   - Não

   Comente:

Sobre as Atividades

1. Você considera que a atuação da professora pesquisadora como mediadora durante as atividades utilizando o *xGraphing*, foi:

- ( ) Muito importante
- ( ) Importante
- ( ) Pouco importante
- ( ) Quase desnecessário
- ( ) Desnecessário

2. Na sua opinião, as atividades de análise do comportamento gráfico, com o auxílio do *xGraphing*, colaboraram para o entendimento de Polinômios?

   - ( ) Sim
   - ( ) Parcialmente
   - ( ) Não

   Comente:

3. Com relação à experimentação, assinale com um X a coluna que julgar mais adequada às afirmações.

   Critério de Avaliação:

   Escala: 1 - Péssimo 2 - Ruim 3 - Regular 4 - Muito Bom 5 - Excelente

	1	2	3	4	5
O tempo destinado para as atividades.	( )	( )	( )	( )	( )
A metodologia adotada.	( )	( )	( )	( )	( )
Os recursos utilizados.	( )	( )	( )	( )	( )

4. Atualmente, o uso de dispositivos móveis na educação tem sido bastante pesquisado. Na atividade promovida, foram utilizados *tablets*. De maneira geral, você considera que esse dispositivo foi um bom recurso para a compreensão do tema proposto?

   - ( ) Sim
   - ( ) Não

Comente:

Sobre a sua Participação

1. Você considera que a Atividade 4, que trabalhou as aplicações do tema em questões de vestibulares, foi:

- Muito importante
- Importante
- Pouco importante
- Quase desnecessário
- Desnecessário

Comente:

2. Você prestou, ou vai prestar provas de Vestibular para ingresso no Ensino Superior?

- Sim
- Não

APÊNDICE I

Versão Preliminar da Atividade 1

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

ATIVIDADE 1

Habilidades:

- Identificar funções polinomiais;
- Determinar o grau de um polinômio;
- Determinar o grau de um polinômio soma e um polinômio produto;
- Identificar as situações em que o Teorema do Resto pode ser aplicado;
- Escrever um polinômio na sua forma fatorada conhecido uma de suas raízes reais;
- Determinar a multiplicidade das raízes de um polinômio.

1. Classifique as expressões algébricas a seguir em **POLINÔMIOS** ou **NÃO POLINÔMIOS**. Justifique sua resposta quando classificar as expressões algébricas como não polinomiais.

   a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$

   b) $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 - 1$

   c) $g(x) = 3\sqrt{x} - 6x + 1$

   d) $u(x) = 7$

e) $m(x) = 3x^{-2} + x^{-1} - 1$

f) $n(x) = 7x^5 + 2x^3 - \dfrac{1}{x}$

g) $o(x) = 0x^3 + 0x^2$

2. Determine o grau dos seguintes polinômios:

a) $f(x) = x^2 - (x+2)^2 + x$

b) $g(x) = 7$

c) $h(x) = x^6 - 4x^2 + 3x^7$

d) $u(x) = ax^2 + 3x + 2$, sendo $a \in \mathbb{R}$

e) $m(x) = (a^2 - 5a + 4)x^2 + (a^2 - 1)x + 2$, sendo $a \in \mathbb{R}$

f) $n(x) = 0$

g) $p(x) = 2(x-1)^7(x+2)^5$

3. Dados $g(x) = ax^4 + 2x^3 + x^2 + 5x + 1$, com $a \in \mathbb{R}$ e $h(x) = bx^4 + 1$, com $b \in \mathbb{R}$, determine o grau do polinômio soma $s(x) = g(x) + h(x)$ e do polinômio produto $p(x) = g(x)h(x)$. Justifique sua resposta.

a) $gr(s(x))$

b) $gr(p(x))$

4. O resto da divisão de $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - d$ por $h(x) = x - 1$ é um polinômio $r(x)$ identicamente nulo. Qual é o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 2$? E por $x^2 + 1$? Registre os seus cálculos.

5. Decomponha o polinômio $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ em um produto de fatores de primeiro grau. Sabe-se que 3 é raiz desse polinômio.

6. Determine todas as raízes e, respectivas, multiplicidades na equação polinomial $p(x) = 0$. Justifique sua resposta.

a) $p(x) = 3(x - 1)(x + 4)^2$

b) $p(x) = 5(x - 1)^3(x^2 + 4)$

c) $p(x) = 7(2x - 5)^3$

APÊNDICE J

Versão Preliminar da Atividade 2

Estudo do Comportamento do Gráfico de Funções Polinomiais

Autora: Ana Mary Fonseca Barreto

ATIVIDADE 2

A Atividade 2 utiliza como ferramenta o *xGraphing*, um aplicativo para dispositivos Android, gratuito, desenvolvido pela empresa Propane e que possiblita plotagem de gráficos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Disponível, em português, no endereço eletrônico: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pierwiastek.xgraphing&hl=pt_BR>. As atividades, propostas nesta apostila, levam em consideração a definição de raízes de polinômios, o Teorema Fundamental da Álgebra e a relação entre as raízes de um polinômio complexo e a sua forma fatorada.

As funções polinomiais de que tratam as atividades são da forma:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$ou$$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

1ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de polinômios nas raízes reais de multiplicidade ímpar e em suas respectivas vizinhanças.

A primeira parte desta apostila tem por finalidade favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes reais e em relação às vizinhanças de suas raízes reais, quando estas têm multiplicidade ímpar.

1. Dado os polinômios:
   $p_1(x) = x - 3$

   $p_2(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)(x-3,5)$

   $p_3(x) = -0,01(x+4)(x+2)(x-5)(x-8)$

a) Determine as raízes de $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ e suas respectivas multiplicidades.

b) O que podemos afirmar sobre os valores encontrados para a multiplicidade das raízes de $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$?

c) No *xGraphing*, trace os gráficos de cada um dos polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$.

d) Analise o comportamento do gráfico de cada polinômio quando $y = p(x) = 0$. Descreva o que você observou.

e) Antes de continuar, esconda o gráfico de $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Em seguida, analise o gráfico do polinômio $p_1(x)$ e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou são diferentes?

f) Esconda da tela o gráfico de $p_1(x)$. Em seguida, mostre o gráfico de $p_2(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou são diferentes?

g) Repita o procedimento para $p_3(x)$. O que você concluiu?

Antes de continuar, esconda os gráficos representados na tela do aplicativo *xGraphing*.

2. Dado os polinômios:

$p_4(x) = (x-3)^3$

$p_5(x) = \dfrac{1}{2}(x-2)^5(x-3,5)$

$p_6(x) = 0,01(x+4)(x+2)^7(x-5)^3(x-8)$

a) Determine as raízes de $p_4(x)$, $p_5(x)$ e $p_6(x)$ e suas respectivas multiplicidades.

b) O que podemos afirmar sobre a paridade (propriedade de ser par ou de ser ímpar) dos valores encontrados para a multiplicidade das raízes?

c) No *xGraphing*, trace os gráficos de cada um dos polinômios $p_4(x)$, $p_5(x)$ e $p_6(x)$.

d) Analise o comportamento do gráfico de cada polinômio nas raízes simples e nas raízes de multiplicidade maior do que 1. O que você observou?

e) Antes de continuar, esconda o gráfico de $p_5(x)$ e $p_6(x)$. Em seguida, analise o gráfico do polinômio $p_4(x)$ e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes, ou seja, os valores de $y = p(x)$ quando x se aproxima da raiz real com valores superiores e, quando x se aproxima da raiz real com valores inferiores. Os sinais são iguais ou são diferentes?

f) Esconda da tela o gráfico de $p_4(x)$. Em seguida, mostre o gráfico de $p_5(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou diferentes?

g) Repita o procedimento para $p_6(x)$. O que você concluiu?

Antes de continuar, esconda os gráficos representados na tela do aplicativo *xGraphing*.

2ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de polinômios nas raízes reais de multiplicidade par e suas respectivas vizinhanças.

A segunda parte desta apostila tem por finalidade favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio em relação às suas raízes reais e em relação às vizinhanças de suas raízes reais, quando estas têm multiplicidade par.

3. Dado os polinômios:

$p_7(x) = (x - 3)^2$

$p_8(x) = 0,01(x + 2)^2(x - 5)^2$

$p_9(x) = x^4$

a) Determine as raízes de $p_7(x)$, $p_8(x)$ e $p_9(x)$ e suas respectivas multiplicidades.

b) O que podemos afirmar sobre a paridade (propriedade de ser par ou de ser ímpar) dos valores encontrados para a multiplicidade das raízes?

c) No *xGraphing*, trace os gráficos de cada um dos polinômios $p_7(x)$, $p_8(x)$ e $p_9(x)$.

d) Analise o comportamento do gráfico de cada polinômio quando $y = p(x) = 0$. Compare com os gráficos das questões 1 e 2. O que você observou?

e) Antes de continuar, esconda o gráfico de $p_8(x)$ e $p_9(x)$. Em seguida, analise o gráfico do polinômio $p_7(x)$ e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valores de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes, ou seja quando x se aproxima da raiz real com valores superiores e, quando x se aproxima da raiz real com valores inferiores. Os sinais são iguais ou são diferentes?

f) Esconda da tela o gráfico de $p_7(x)$. Em seguida, mostre o gráfico de $p_8(x)$. Analise-o e descreva o que você observou quanto ao sinal dos valore de $y = p(x)$ nas vizinhanças de suas raízes. Os sinais são iguais ou diferentes?

g) Repita o procedimento para $p_9(x)$. O que você concluiu?

Antes de continuar, apague todos os polinômios registrados no aplicativo *xGraphing*.

3ª parte: Estudo do comportamento do gráfico de polinômios com raízes complexas não reais.

A terceira parte desta apostila tem por finalidade favorecer o reconhecimento do comportamento do gráfico de um polinômio com raízes complexas não reais.

1. Dado os polinômios:

   $p_{10}(x) = \frac{1}{5}(x+5)(x^2-4)$

   $p_{11}(x) = \frac{1}{5}(x+5)\frac{1}{4}(x-4)^2$

   $p_{12}(x) = \frac{1}{5}(x+5)(x^2+4)$

   a) Determine as raízes de $p_{10}(x)$, $p_{11}(x)$ e $p_{12}(x)$. Identifique-as como raízes reais ou raízes complexas não reais.

   b) No *xGraphing*, trace os gráficos dos polinômios $p_{10}(x)$, $p_{11}(x)$ e $p_{12}(x)$.

   c) Analise o comportamento do gráfico de cada um dos polinômios e sua relação com as respectivas raízes. O que você observou?

2. Dado o polinômio $p_{13}(x) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - x^2 + d$. No *xGraphing*, trace o gráfico de $p_{13}(x)$ para:

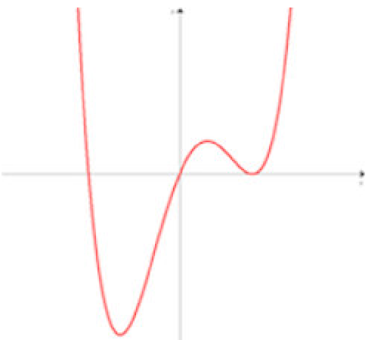
   a) $d = 5$

   b) $d = -5$

4ª parte: Atividades de Verificação.

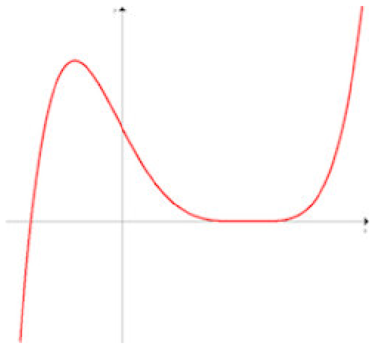
A quarta parte desta apostila tem por finalidade verificar a aprendizagem dos conceitos relativos ao comportamento do gráfico das funções polinomiais quanto ao grau do polinômio e quanto à multiplicidade de suas raízes reais.

1. Marque com um ponto (•) as raízes reais representadas no gráfico dos polinômios e identifique se estas têm multiplicidade par ou ímpar.

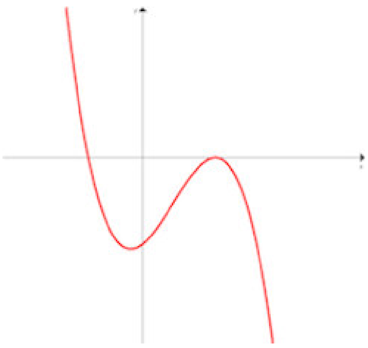


(a) $p_1(x)$

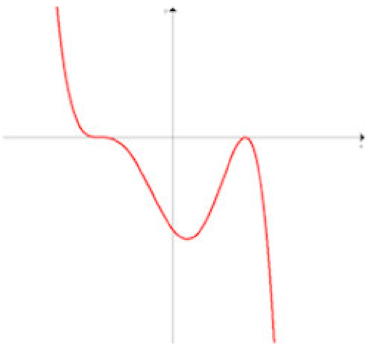
(b) $p_2(x)$



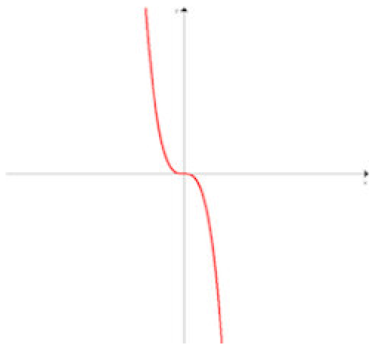
(c) $p_3(x)$



(d) $p_4(x)$

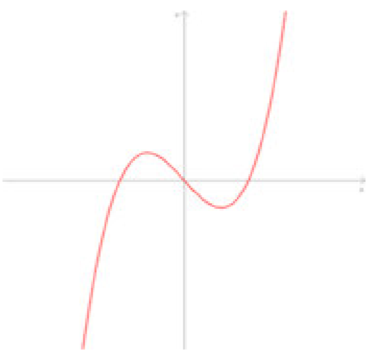


(e) $p_5(x)$

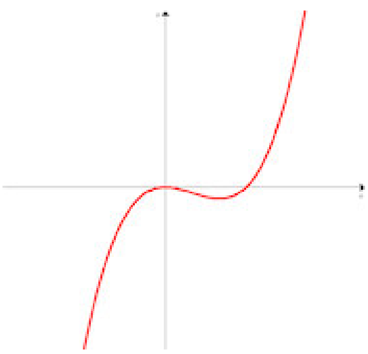


(f) $p_6(x)$

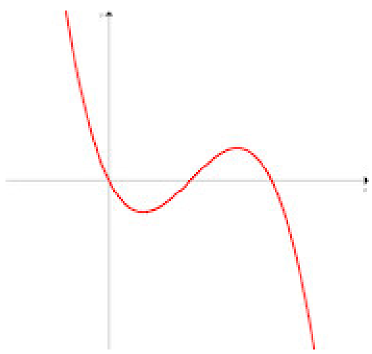
2. Marque com um (X) o gráfico que melhor representa o polinômio $f(x) = x^3 - x^2$.



(a) ( )



(b) ( )



(c) ( )