UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Paulo Roberto da Silva Andrade

MATEMÁTICA FINANCEIRA: TRABALHANDO SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

PALMAS - TO
2015

Paulo Roberto da Silva Andrade

MATEMÁTICA FINANCEIRA: TRABALHANDO SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha.

PALMAS - TO
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S586m Silva Andrade, Paulo Roberto da.

Matemática Financeira: Trabalhando Sistemas de Amortização no Ensino Médio. / Paulo Roberto da Silva Andrade. – Palmas, TO, 2015.

55 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2015.

Orientador: Rogério Azevedo Rocha

1. Matemática Financeira. 2. Dinheiro e o Tempo. 3. Amortização. 4. Professor. I. Título

CDD 510

PAULO ROBERTO DA SILVA ANDRADE

MATEMÁTICA FINANCEIRA: TRABALHANDO SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientador: Dr. Rogério Azevedo Rocha.

Aprovada em 31 / 07 / 2015

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha
____
Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (Orientador-UFT)

Hellena Apolinário
____
Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Flávio Raimundo Souza
____
Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza (IFG)

À filha Valentina Matos de Andrade.
Aos meus pais e irmão.
À minha esposa Mara Karoliny.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que em mais uma vez se mostra presente em minha vida, por me permitir realizar um sonho que, por alguns momentos, parecia impossível.

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) que propiciou de forma imprescindível esta formação acadêmica.

À UFT (Universidade Federal do Tocantins), na qual teve como coordenador do curso Andrés Lázaro Barraza de La Cruz, e professores das disciplinas ofertadas: Christian José Quintana Pinedo, Gilmar Pires Novaes, Pedro Alexandre da Cruz, Rogério Azevedo Rocha e Betty Clara Barraza La Cruz, todos estes que contribuiram de forma essencial para minha formação acadêmica.

Ao meu professor orientador, Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha, que com sua paciência e dedicação me ajudou a conduzir e realizar este trabalho.

À todos meus familiares e amigos, que acreditaram em mim e me deram forças nas horas mais difíceis.

Aos meus colegas de trabalho, que me apoiaram com palavras de incentivo, em nome dos Professores: Arnaldo Gomes, Wanderly Basto e Darcy Rodrigues, fica aqui minhas saudações.

Aos meus colegas de turma que estiveram comigo deste o primeiro dia, me ensinando um pouco mais sobre como viver neste mundo. Em especial aos amigos irmãos, que, às vezes, ficávamos sem durmir, sem fim de semana, sem feriado, a vocês: Antônio Francisco, Jairo Barros, Lucas de Lucca e Rayson Carneiro.

Em especial à minha filha, Valentina Matos de Andrade, que com pouco mais de um mês de vida tem me ensinado muito sobre a vida e sobre meus valores.

A imaginação é mais importante que a ciência,
porque a ciência é limitada,
ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro.
(Albert Einsten)

Resumo

Este trabalho busca abordar a Matemática Financeira de uma forma diferente da usual, onde os problemas, em sua maioria, são resolvidos pelo uso de fórmulas matemáticas prontas, em detrimento do raciocínio do educando, que, muitas vezes, as utilizam sem a percepção do que está acontecendo. Portanto, foi realizado um estudo sucinto da história da humanidade que, de forma natural, envolve o estudo da contagem e consequentemente da relação "dinheiro e o tempo". O estudo desta relação se torna cada vez mais imprescindível em nossa sociedade, sendo assim, é necessário que o professor busque uma melhor forma de abordar este conteúdo, pois, mesmo que as máquinas consigam fazer a maioria dos cálculos necessários, entretanto, é de suma importância o entendimento e a compreensão das operações financeiras que estão sendo realizadas e quais serão as consequências que essas escolhas terão no futuro. Através da análise de diversas situações que podem ocorrer em sua vida, foi abordada uma análise dos livros didáticos do PNLD 2015 com o objetivo de auxiliar o professor a realizar uma escolha do(s) livro(s) que se enquadre(m) na sua realidade escolar.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Dinheiro e o Tempo. Amortização. Professor.

Abstract

This paper work seeks to address the financial mathematics in a different way from usual, where problems, mostly, are solved by the use of ready-made mathematical formulas, rather than the student's reasoning, which often use them without the perception of what it is happening. Therefore, we conducted a brief study of the history of mankind that, naturally, involves the study of counting and consequently the relation of "money and time". The study of this relation becomes more and more essential in our society, so it is necessary that the teacher seek a better way to approach this content, because, even if the machines can do most of the necessary calculations, however, it is of paramount importance understanding and comprehension of financial transactions being carried out and what are the consequences that these choices will have in the future. Through the analysis of many situations that may occur in your life, was approached an analysis of textbooks PNLD 2015 in order to help the teacher make a choice (s) of book (s) that meets (m) in its school reality.

Key-words: Financial Math. Money and Time. Amortization. Teacher.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico aplicação “SAC". 31
Figura 2 – Gráfico aplicação “PRICE". 34

Sumário

1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE A MATEMÁTICA FINANCEIRA 13

2 ASPECTOS TEÓRICOS 15
2.1 Porcentagem 15
2.2 Empréstimos 16
2.3 Juros Simples 17
2.3.1 Função Afim 17
2.3.2 Progressão Aritmética "P.A." 17
2.4 Juros Compostos 20
2.5 Taxas Equivalentes 27
2.6 Sistemas de Amortização 29
2.6.1 Sistema de Amortização Constante 29
2.6.2 Sistema de Amortização Francês 32

3 APLICAÇÕES 36

4 ANÁLISE DO COMPONENTE CURRICULAR "MATEMÁTICA FINANCEIRA" NOS LIVROS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO APROVADOS NO PNLD 2015 45
4.1 Fábio Martins Et Moderna - Conexões com a Matemática . . . 47
4.2 Dante Et Ática - Matemática: Contextos e Aplicações 48
4.3 Paiva Et Moderna - Matemática 49
4.4 Gelson Iezzi Et Saraiva - Matemática: Ciências e Aplicações . . 50
4.5 Kátia Stocco Et Saraiva - Matemática Ensino Médio 51
4.6 Joamir Sousa Et FTD - Matemática 52

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 53

Introdução

Foi no Ensino Médio que o autor manteve contato de forma direta e mais significativa com a Matemática Financeira, momento em que o autor pôde perceber a real importância dessa área da matemática em sua vida, que ultrapassava os problemas sobre porcentagem, juros simples e compostos, abrangendo uma maior gama de problemas econômicos, ampliando sua aplicabilidade.

Concluído o Ensino Médio e agora na Educação Superior, onde a disciplina é abordada de forma mais aprofundada, entre outros autores, o autor teve o privilégio de assistir a um vídeo apresentado pelo saudoso Prof^{o} Dr. Augusto César Morgado (MORGADO, 2001), onde o citado professor retrata o tema Matemática Financeira. Nesse vídeo há algumas intervenções importantes que nos leva a repensar o Ensino da Matemática no Brasil, particularmente sobre a forma como a Matemática Financeira é abordada.

Nesse sentido, buscamos explicar esse conteúdo da melhor forma possível, atentando para o desafio a ser vencido, que é a aplicação de uma proposta de ensino tendo como foco o desenvolvimento da disciplina de forma construtiva, buscando o desenvolvimento dos cálculos matemáticos, paralelamente recorremos à criatividade, à compreensão, à interpretação do educando e, portanto, propiciar-lhe a segurança necessária à aplicação de grande parte do conteúdo que foi proposto. Desta forma, o educando tem a capacidade de tomar a melhor decisão sobre o caminho que deseja seguir, tornando-se uma pessoa mais participativa na sociedade.

Abordamos os conteúdos de maneira que estejam interligados, abandonando a aplicação de fórmulas sem o devido significado. Neste trabalho há quatro capítulos obdecendo uma sequência didática que favoreça o interesse do educando e que ajude o professor a desenvolver a disciplina em sala de aula.

No Capítulo II fazemos uma breve abordagem histórica, evidenciando que a Matemática Financeira surge de forma natural em decorrência da evolução da humanidade, que, em um determinado momento, deixam de viver como nômades e passam a construir civilizações. Essa mudança na forma de viver fez com que os povos da época mudassem seus hábitos, passando a produzir seus alimentos e estocá-los para períodos improdutivos, no entanto, com o aprimoramento das técnicas de produção passaram a produzir mais do que necessitavam e logo perceberam que poderiam trocar o excedente com outras tribos, surgindo assim a Matemática Financeira.

O Capítulo III discorre sobre a parte teórica, desde a escolha da sequência de conteúdos escolhida como uma proposta de ensino, na qual tem como objetivo preparar o estudante a resolver problemas que envolvam Sistemas de Amortização. A parte teórica dá uma base de como podem ser resolvidas situações-problemas de nosso cotidiano sem a preocupação de sabermos todas as fórmulas da Matemática Financeira, mas sim, buscarmos a resolução das mesmas, dando credibilidade à capacidade do educando em resolvê-las partindo de seu raciocínio criativo.

O Capítulo IV tratamos sobre as Aplicações. Foram selecionados problemas com o intuito de trabalhar as mais diferentes resoluções, e nesse sentido, o leitor tem ampla visão da Matemática Financeira, e que os problemas trabalhados sirvam de base para todos os tipos de problemas financeiros que venham a aparecer.

O Capítulo V tem por fulcro auxiliar na análise dos livros didáticos, observando o PNLD 2015 e o livro-texto do professor Elon (LIMA, 2001), que foi um livro que serviu e serve até os dias atuais sobre a análise dos livros didáticos do Ensino Médio.

1 Um Breve Histórico Sobre a Matemática Financeira

Dentre outras funções importantes, a História tem ajudado a sociedade a entender o mundo atual e a responder diversas indagações. Para realizar este breve histórico, usamos como fonte de pesquisa estudos já realizados sobre a Matemática Financeira, da pré-história aos dias atuais, isto é, baseamo-nos nas seguintes referências: (COTRIM, 2013), (FILHO, 2014), (ALVES e OLIVEIRA, 2014) e (BRASIL, 2011).

Segundo (FILHO, 2014), o estudo da humanidade tem seu início na Pré-História, na qual, segundo os historiadores, foram encontrados restos de um hominídeo de 7 milhões de anos, considerado o mais antigo representante da humanidade conhecido e próximo aos mais recentes antepassados comuns do chimpanzé e do homem. A espécie evoluiu durante milhões de anos até chegar ao que somos considerados hoje: Homo sapiens.

A Pré-História é dividida pela maioria dos historiadores por períodos, sendo que uma das divisões mais conhecida, baseia-se nas pesquisas do inglês Jonh Lubbock (1834-1913), fora feita em dois grandes períodos: paleolítico e neolítico.

O período Paleolítico, também conhecido como Idade da Pedra Lascada, tem seu início cerca de 3 milhões de anos atrás e se estendeu até 10000 a.C. A evolução da espécie nesse período é extraordinária, deixou de andar de forma quadrúpede para andar de forma bípede (ereto sobre os pés), consegue o controle do fogo, constrói seus primeiros abrigos, produz suas primeiras roupas, divide as tarefas entre os membros da tribo, dentre outros.

Neste momento, o homem começa a povoar a terra e a peregrinar por ela, ainda sem endereço fixo, vivendo da caça, pesca e das colheitas, buscando as melhores condições para sobrevivência de sua tribo. Esses povos eram chamados de nômades.

Com o passar dos anos, por volta de (10000 − 4000 a.C), no período histórico conhecido como Neolítico, temos o início da Matemática Financeira, pois agora as tribos começam a cultivar grãos e a criar animais para se alimentar, aprimoram suas técnicas na produção de ferramentas de trabalho e começam a polir as pedras, por esse motivo, esse período é também conhecido como Idade da Pedra Polida. Dessa forma, o que eles produziam era mais do que precisavam para seu sustento, portanto, começaram a guardar os excedentes.

Como cada tribo que se formava cultivava diferentes tipos de alimentos e diferentes tipos de criações, pois cada uma cultivava e criava o que era mais propício ao lugar em que vivia, surgiu a necessidade de trocar os excedentes entre as tribos.

A troca dos excedentes entre as tribos é chamada de escambo, sendo esta a primeira atividade comercial que o homem realizou. Esse tipo de operação era feito sem verificação do seu valor comercial.

Após essa fase, com o desenvolvimento intelectual das tribos surge uma nova forma de negociação. As tribos começam a perceber que alguns produtos tinham mais valor que outros, o que dificultou a troca direta. Logo, para resolver esse problema, as tribos buscaram avaliar cada produto de forma que este tivesse um valor comum, calculado em gado bovino.

“O gado, principalmente o bovino, foi dos mais utilizados, apresentava vantagens de locomoção própria, reprodução e prestação de serviço, embora ocorresse risco de doenças e morte” (BRASIL, 2011).

Já no final deste período, há o nascimento da Metalurgia, com a qual o homem consegue trabalhar os metais para fabricar objetos e armas, tendo em vista que estes teriam mais durabilidade, agilidade e beleza.

Surgem, a partir daí, as civilizações das quais (COTRIM, 2013) destaca os principais eventos, tais como: o aparecimento das primeiras cidades, os sistemas de registro e escrita, a formação do Estado e o aprofundamento das divisões dos grupos sociais.

Assim, na região da Mesopotânia, berço de civilizações, nascem as primeiras cidades e um povo: os Sumérios, considerados os criadores da escrita e responsáveis por mensurar o valor das moedas criadas na época.

Com o passar do tempo e o desenvolvimento de técnicas que permitissem o homem a manejar de forma mais eficaz os metais, estes assumem o papel de moeda em substituição ao gado bovino.

“O metal comercializado dessa forma exigia aferição de seu grau de pureza na troca. Mais tarde, ganhou forma definida e peso determinado, recebendo marca indicativa de valor, que apontava o responsável por sua emissão”(BRASIL, 2011).

Dessa maneira, as civilizações cresceram e se expandiram rapidamente, junto com elas o comércio e as grandes navegações. De forma natural surge a profissão de banqueiro, na qual este se torna responsável pelas trocas das moedas para possibilitar a realização de suas atividades econômicas, já que naquela época só eram realizados negócios com a moeda local.

Por todo esse período, até os dias atuais ocorreu uma grande evolução da Matemática Financeira, que tem como principal objetivo relacionar o valor do dinheiro e o tempo.

2 Aspectos Teóricos

O desenvolvimento das técnicas para um melhor desempenho no ensino aprendizagem em sala de aula, é uma busca que deve ser constante para suprir as necessidades atuais da educação, e, em particular, para o ensino da Matemática Financeira presente nos conteúdos do Ensino Médio.

Neste capítulo, buscamos trabalhar uma sequência de conteúdos de forma que facilite o aprendizado do discente, revisando tais conteúdos de forma construtiva com o intuito de levá-los a rever o que se tinha trabalhado anteriormente, com um nível adequado para o Ensino Médio, para que, ao final da disciplina, o educando esteja preparado para analisar situações mais complexas que envolvam empréstimos e financiamentos, que são normalmente pagos de forma parcelada, mensalmente.

2.1 Porcentagem

O estudo de porcentagem ocorre em paralelo com o estudo dos números racionais (números que são escritos na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, $b \neq 0$). Como o próprio nome sugere, porcentagem significa dizer por cem. Logo, fica bem claro que o denominador deverá ser cem. Uma maneira de exemplificar as formas de escrever porcentagem, por exemplo, nove por cento, há varias formas de expressá-lo, tais como: utilizando símbolo 9% ; escrevendo como um número racional $\frac{9}{100}$ e também na forma decimal 0,09.

Analisamos algumas maneiras de como esse assunto é tratado em sala de aula, e enfatizaremos a maneira que nos é mais conveniente para uso das fórmulas aplicadas à Matemática Financeira.

1) Em uma sala de aula com 300 alunos sabe-se que 120 são homens e 180 são mulheres. Calcule a porcentagem de homens e mulheres.

Primeira solução: Este tipo de problema poderia ser resolvido utilizando regra de três simples, já que esta é uma das formas que é apresentada ao aluno ainda no Ensino Fundamental. Assim, como o total de alunos representa cem por cento da turma, comparamos 300 a 100 e 120 a x, sendo x o valor da porcentagem que desejamos calcular. Logo,

$$\frac{300}{120} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 40\%$$

Portanto, 40% são homens e, evidentemente, 60% são mulheres.

Outra solução: Seria resolver este problema de forma direta fazendo uso das frações (ou razões) $\frac{120}{300}$ e $\frac{180}{300}$, as quais expressam as proporções de homens e mulheres, respectivamente, relativas ao total.

$$\begin{aligned} \frac{120}{300} &= 0,4 \\ 0,4.100 &= 40 \ (40\%) \end{aligned}$$

Obtendo o mesmo resultado anterior, ou seja, 40% homens e conseguentemente, 60% mulheres.

2) Uma fábrica de automóveis que consegue fabricar cerca de 1300 carros por dia, 5% dos mesmos saem com algum tipo de defeito. Qual a quantidade de carros defeituosos?

Solução:

Primeira opção: Utilizamos de regra de três simples que se transforma em uma proporção. Isto é,

$$\frac{x}{1300} = \frac{5}{100} \Rightarrow x = 65$$

Portanto, 65 carros são defeituosos.

Segunda opção: Esta forma é pouco usada, mas é primordial nas resoluções de problemas envolvendo a matemática financeira, na qual transformamos a porcentagem desejada para a forma decimal, e depois realiza o produto do quociente encontrado pelo total de carros.

$$\frac{5}{100} = 0,05$$

Logo, $0,05.1300 = 65$ resultando os mesmos 65 carros encontrados.

Tendo em vista que o estudo aqui é voltado para a Matemática Financeira, adotar-se-á o segundo método como norte para resolução dos problemas a seguir.

2.2 Empréstimos

Para que seja realizado um empréstimo são necessários dois personagens: um Credor (o que empresta o dinheiro), e o Devedor (o que toma emprestado).

Nesta relação o Devedor deve devolver o dinheiro acrescido de juros, negociando junto ao credor a melhor forma de pagamento para ambas as partes envolvidas, de modo justo, sem que acarrete prejuízos financeiros.

Esta dívida pode ser paga das mais diferentes formas, quando ela for paga em parcelas dizemos que ela esta sendo amortizada.

2.3 Juros Simples

É um regime que podemos utilizar para calcular a remuneração a ser paga para alguém que empresta certa quantia a outra pessoa, tendo como característica principal o aumento da dívida de forma uniforme, ou seja, aumentando sempre a mesma quantia.

Este tipo de operação é ensinada nas escolas, mas sua utilidade prática não condiz com a realidade. O prof. Augusto Cesar Morgado em um vídeo produzido pelo IMPA, ainda faz uma brincadeira sobre este tipo de operação que ela só existe no "mundo de Alice no país das maravilhas".

No entanto este tipo de operação não perde sua importância já que é possível contextualizá-la trabalhando com outras linhas matemáticas, como: função afim e progressões aritméticas (P.A.). Abaixo fazemos uma breve resisão sobre função afim e progressão aritmética.

2.3.1 Função Afim

Quando estamos falando em função, na verdade o que temos é uma relação entre duas variáveis onde uma depende da outra, são conhecidas como variáveis dependentes e independentes. A variável dependente é representada, por convenção, por y ou $f(x)$ e a variável independente, por convenção, utiliza-se x.

A função afim, tem como caracteristica crescer ou decrescer constantemente, a qual podemos expressá-la da seguinte forma:

$$f(x) \;=\; a.x+b \; ou \; y \;=\; a.x+b,$$

onde a é o coeficiente angular (inclinação da reta) e b é o coeficiente linear, que se mantém constante na função.

2.3.2 Progressão Aritmética "P.A."

Os cálculos de juros simples podem ser associados a uma progressão aritmética (P.A.) que possui a seguinte característica:

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

onde a_1 é o primeiro termo, r é a razão que determina a sua amplitude, n é o lugar no tempo e a_n é o n-ésimo termo da P.A..

Todas as formas acima citadas são importantes para a resolução de problemas envolvendo juros simples. Em seguida resolvemos algumas situações problemas, fazendo com que o aluno aprenda e compreenda tornando-o capaz de escolher o caminho que lhe for mais conveniente.

1) Maria deseja tomar emprestado de João uma quantia de $R\$ \ 600,00$, para devolver após um mês. João diz a ela que pode emprestar, mas que ele cobrará uma taxa de 6% a.m., calculado a juro simples. Sabendo que Maria não conseguiu honrar o compromisso e que pagou um mês após o combinado. **I)** Qual será o valor que João receberá? **II)** Como poderíamos respondê-la em forma de P.A.? **III)** Qual a função que generalizaria o montante em função de n meses?

Solução:

Primeira solução: Como já foi exposto anteriormente, o fato de o uso das proporções terem sido trabalhadas no ensino fundamental, começamos por este caminho até chegar onde desejamos.

$$\frac{x}{600} = \frac{6}{100} \Rightarrow x = 36.$$

Portanto, em um mês Maria iria pagar R$ 36,00 de juros pelo aluguel do dinheiro. Mas como ela não conseguiu honrar o compromisso ela pagará duas vezes R$ 36,00, já que o dinheiro ficou com ela dois meses. Logo, João receberá R$ 672,00, que é o resultado de $600 + 2.36$.

Segunda solução: Outra forma seria transformar a porcentagem para decimal

$$\frac{6}{100} = 0,06.$$

Logo, para calcular 6% de R$ 600,00 basta multiplicar 600 por 0,06, obtendo R$ 36,00 . Portanto, se Maria tivesse conseguido honrar seu compromisso, João receberia o "montante" de R$ 636,00, que é a soma de R$ 600,00 com R$ 36,00. Mas, como a dívida só foi paga um mês após o combinado, ele receberá R$ 672,00, pois como o regime de empréstimo é de juros simples ele cresce constantemente, bastou somar novamente R$ 36,00 à dívida anterior.

Terceira solução: Para trabalhar esse exercício como P.A., temos que inicialmente entender que o primeiro termo desta sequência é 600, pois é quando se inicia a progressão.

Como estamos trabalhando com meses o primeiro termo é no tempo zero, ou seja, quando contraímos a dívida, daí a fórmula enunciada acima é ajustada para que possamos nos enquadrar na situação proposta. Neste sentido $a_n = a_0 + n.r$, onde a_0 é o capital emprestado, r é o juro e n é o tempo, em meses, que o dinheiro foi emprestado. Sendo assim, para o nosso caso específico, temos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + n.r \\ a_2 &= 600 + 2.36 \\ &= 672. \end{aligned}$$

Logo, após dois meses João receberia R$ 672,00.

Quarta solução: Outra forma seria usar a função afim

$$\begin{aligned} f(x) &= a.x + b \\ f(2) &= 36.2 + 600 \\ &= 72 + 600 \\ &= 672. \end{aligned}$$

Assim, após passado os dois meses João receberia R$ 672,00.

O que se percebeu com a resolução do problema acima, foi que para se chegar ao resultado podemos seguir diferentes caminhos.

Os livros didáticos, em sua grande maioria, trazem as resoluções de uma única maneira, utilizando-se de fórmulas prontas. No próximo problema fazemos o caminho inverso, partindo da prática até se chegar a fórmula.

2) Pedro irá realizar um empréstimo junto a uma instituição financeira, que usa juros simples como forma de calcular os juros. Sabendo-se que Pedro deseja tomar emprestado um quantia de $R\$ \ 800,00$ e que irá realizar o pagamento após 6 meses a uma taxa de juros de 5% a.m., quantos reais ele pagará no final do empréstimo?

Solução: Para saber quantos reais ele pagaria de juros em um mês, basta fazer a transformação da taxa de juros para número decimal e em seguida multiplicar pela quantia emprestada. Desta forma, ele pagará um juro mensal de $R\$ \ 40,00$ por mês, calculado da seguinte forma:

$$800.\frac{5}{100} = 40.$$

Como o empréstimo foi contraído para ser pago após 6 meses, basta agora multiplicarmos o juro mensal pelo total de meses, para encontrarmos a quantia dos juros a serem pagos, ou seja, $6.40 = 240$.

Finalizando a questão chegamos a $R\$ \, 1.040,00$, que é a soma do capital de $R\$ \, 800,00$, com $R\$ \, 240,00$ valor total dos juros, sendo que este valor encontrado é chamado de montante.

Montante é a soma do que foi emprestado com seu rendimento.

Juros simples como foi exposto acima, pode ser calculado como o produto entre o capital, a taxa e o tempo. É convencional na Matemática Financeira representar os juros por J, capital por C , a taxa por i , tempo por n e o montante por M.

Portanto, a fórmula que representa juros simples é :

$$J = C.i.n.$$

Para determinar o montante façamos:

$$M = C + J$$

e assim, substituindo J por C.i.n, temos:

$$M = C + C.i.n.$$

Isto é,

$$M = C.(1 + i.n).$$

Acreditamos que dessa forma quando o estudante for aplicar a fórmula convencional ele tem a capacidade de compreender o porquê do uso da mesma e, se preferir, pode nem mesmo utilizá-la.

Como já foi dito no início desta seção, o conceito de juros simples não é praticado pelo sistema financeiro vigente. Neste caso, o conceito utilizado é o juros compostos.

2.4 Juros Compostos

Juros compostos, mais conhecido como juros sobre juros é a maneira mais honesta de realizarmos um financiamento, pois, dependendo da taxa a ser cobrada, o mesmo não acarreta prejuízos para nenhuma das partes, nem para o Credor e nem para o Devedor. Da mesma forma que foi feita com juros simples partimos de exemplos práticos para se chegar onde desejamos. Vamos analisar os mesmos casos anteriores, no entanto, solucionados desta nova maneira.

O sistema de juros compostos se diferencia, pois com o passar do tempo o valor da dívida é atualizado. Logo, o valor dos juros é calculado em cima do saldo anterior, como fica mais fácil de se verificar pelo problema a seguir.

1) Maria deseja tomar emprestado de João uma quantia de $R\$\ 600,00$, para devolver após um mês. João diz a ela que pode emprestar, mas, que ele cobrará uma taxa de 6% a.m., calculado a juros compostos. Sabendo que Maria não conseguiu honrar o compromisso e que pagou um mês após o combinado, qual será o valor que João receberá?

Solução: Maria deveria ter honrado sua dívida no final do primeiro mês, logo ele pagaria uma quantia de

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 600.(1+\frac{6}{100}.1) = 636,00. \end{aligned}$$

Portanto, ela pagaria uma quantia de R\$ 636,00.

Como ela não conseguiu honrar a dívida, a mesma passará de $R\$\ 600,00$ para $R\$\ 636,00$, e assim, o juro será calculado sobre esta nova dívida. Portanto, no segundo mês, o montante será calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 636.(1+\frac{6}{100}.1) = 674,16. \end{aligned}$$

Desta forma, João receberá de Maria uma quantia de R\$ 674,16.

Pelo exemplo 1 da seção 2.3) Observamos que se o sistema adotado fosse o sistema de juros simples então João teria um prejuízo de $R\$\ 2,16$.

Em seguida, vamos resolver o exemplo 2) da seção 2.3, utilizando-se do sistema de juros compostos e com o objetivo de "deduzirmos" a fórmula que representa o caso geral.

2) Pedro irá realizar um empréstimo junto a uma instituição financeira, que usa juros compostos como forma de calcular os juros de um empréstimo. Sabendo que Pedro deseja tomar emprestado um quantia de $R\$\ 800,00$ e que irá realizar o pagamento após 6 meses na qual a instituição cobra uma taxa mensal de juros de 5% a.m., quantos reais ele pagará no final do empréstimo?

Solução:

No primeiro mês, temos:

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 800.(1+\frac{5}{100}.1) = 840,00. \end{aligned}$$

No segundo mês, temos:

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 840.(1+\frac{5}{100}.1) = 882,00, \end{aligned}$$

no terceiro mês, temos:

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 882.(1+\frac{5}{100}.1) = 926,10. \end{aligned}$$

No quarto mês, temos:

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 926,10.(1+\frac{5}{100}.1) = 972,40. \end{aligned}$$

No quinto mês, temos:

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 972,40.(1+\frac{5}{100}.1) = 1021,02. \end{aligned}$$

Por fim, no sexto mês, temos:

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 1021,02.(1+\frac{5}{100}.1) = 1072,07. \end{aligned}$$

Logo, Pedro deverá pagar a instituição um valor de $R\$$ $1.072,07$.
Pelo exemplo 2) Da seção 2.3 observamos que se o sistema adotado fosse o sistema de juros simples então a instituição financeira teria um prejuízo de $R\$$ $32,07$.

A seguinte forma alternativa de se solucionar o problema anterior, nos leva a fórmula que representa o caso geral. Como, na contratação da dívida Pedro deve um capital de $R\$$ $800,00$ e a cada período o capital é atualizado, temos:

$$\begin{aligned} Para\ t=1,\ M &= 800.(1+0,05). \\ Para\ t=2,\ M &= 800.(1+0,05).(1+0,05). \\ Para\ t=3,\ M &= 800.(1+0,05).(1+0,05).(1+0,05). \\ Para\ t=4,\ M &= 800.(1+0,05).(1+0,05).(1+0,05).(1+0,05). \\ Para\ t=5,\ M &= 800.(1+0,05).(1+0,05).(1+0,05).(1+0,05).(1+0,05). \\ Para\ t=6,\ M &= 800.(1+0,05).(1+0,05)...(1+0,05). \end{aligned}$$

Neste sentido, o problema poderia ser solucionado da seguinte forma

$$\begin{aligned} M &= 800.(1+0,05)^6 \\ &= 1.072,08. \end{aligned}$$

A diferença mínima entre os resultados fornecidos pelas duas formas de resolução é devido aos processos de arredondamento.

De forma análoga, se C é o capital e i a taxa de (por período), deduzimos a fórmula geral:

$$\begin{aligned} Para\ t=1,\ M &= C.(1+i). \\ Para\ t=2,\ M &= C.(1+i).(1+i). \\ Para\ t=3,\ M &= C.(1+i).(1+i).(1+i). \\ Para\ t=4,\ M &= C.(1+i).(1+i).(1+i).(1+i). \\ Para\ t=5,\ M &= C.(1+i).(1+i).(1+i).(1+i).(1+i). \\ Para\ t=6,\ M &= C.(1+i).(1+i).(1+i).(1+i).(1+i).(1+i). \\ &\vdots \\ Para\ t=n,\ M &= C.(1+i)^n. \end{aligned}$$

Após deduzirmos a fórmula, em nível de juros compostos, para problemas que envolvam capitalizações diárias, mensais ou anuais, analisemos a seguinte situação:

3) João tomou emprestado de Joana uma quantia de $R\$ \ 5.000,00$, a uma taxa de juros de 5% a.m.. Após quanto tempo ele quitou a dívida, sendo que ele pagou um montante de $R\$ \ 10.394,64$?

Solução: De posse da fórmula que foi demonstrada anteriormente podemos aplicá-la para encontrarmos o resultado desejado, assim

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i)^n \\ 10.394,64 &= 5.000.(1,05)^n \\ 1,05^n &= 2,078928. \end{aligned}$$

Para solucionar este problema precisamos de uma importante propriedade dos logaritmos, a dizer,

$$log\ a^n = n\ .\ log\ a.$$

De posse desta propriedade, temos:

$$\begin{aligned}
1,05^n &= 2,078928 \\
\Rightarrow log\ 1,05^n &= log\ 2,078928 \\
\Rightarrow n\ .\ log\ 1,05 &= 0,3178394486 \\
\Rightarrow n\ .\ 0,0211892991 &= 0,3178394486 \\
\Rightarrow n &= 15.
\end{aligned}$$

Portanto, a dívida foi ditada em 15 meses.

Observamos que, tanto juros simples como juros compostos são maneiras de se remunerar alguém que emprestou uma determinada quantia, ou seja, pagar um aluguel por uma quantia emprestada. É notório que os exemplos apresentados até o presente momento não satisfazem as necessidades do mundo atual visto que, o acesso ao crédito aumentou e as pessoas estão mais conscientes de seu futuro. Assim, em seguida, apresentamos e propomos uma solução de um problema que envolve aplicação fixa com o intuito de, após algum tempo, poder contar com uma determina quantia.

4) Isabela, para realizar uma viagem de fim de ano, resolve fazer uma poupança programada. Ela começa a poupar no início do ano sempre a mesma quantia de $R\$\ 200,00$ mensais. Sabendo que a taxa de rendimento desta aplicação é de $1,3\%$ a.m., quantos reais ela terá disponível para realizar a viajem?

Solução: Façamos uma análise detalhada do problema mês a mês até que se possa ter uma ideia de como generalizar. Como ela começa a fazer a aplicação no início do ano, temos

Janeiro

Seu saldo será R$ 200,00.

Fevereiro

Neste mês temos que levar em consideração que o dinheiro aplicado rendeu uma determinada quantia

Logo, temos:

$$\begin{aligned}
M &= C.(1+i.n) \\
&= 200.(1+\frac{1,3}{100}.1) = 202,60.
\end{aligned}$$

Portanto, no mês de fevereiro ela possirá R$ 202,60 referente a aplicação de janeiro, mais R$ 200,00 do depósito do mês de fevereiro, desta forma ela terá uma quantia de R$ 402,60.

Março

Neste mês ela terá

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 402,60.(1+\frac{1,3}{100}.1) = 407,83. \end{aligned}$$

Da mesma forma, terá R$ 407,83 referente ao dinheiro aplicado no mês de fevereiro acrescido de R$ 200,00 referente ao depósito de março, isto é, R$ 607,83.

Abril

Neste mês ela terá

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i.n) \\ &= 607,83.(1+\frac{1,3}{100}.1) = 615,73. \end{aligned}$$

O que resulta R$ 615,73 referente ao dinheiro aplicado no mês de março acrescido de R$ 200,00 referente ao depósito de abril, isto é, R$ 815,73.

Este procedimento continua até mês de dezembro que é o prazo do resgate para que se possa realizar a viagem. No entanto, fica claro, que se o tempo de resgate for um tempo longo este procedimento se torna inviável de ser executado. Em seguida, com base nos cálculos dos meses de janeiro a abril, vamos generalizar este procedimento com o objetivo de tornar os cálculos viáveis.

Janeiro:

Ela terá R$ 200,00.

Fevereiro:

O montante deste mês poderá ser calculado como sendo:

$$\begin{aligned} M &= 200.(1+\frac{1,3}{100})+200 \\ &= 200.[(1+0,013)+1] \\ &= 200.1,013+200 \\ &= 402,60. \end{aligned}$$

Portanto ela terá $R\$ \ 402,60$.

Março:

O montante deste mês poderá ser calculado como sendo

$$\begin{aligned} M &= [200.(1+\frac{1,3}{100})+200].(1+\frac{1,3}{100})]+200] \\ &= [200.(1+\frac{1,3}{100})^2+200.(1+\frac{1,3}{100})]+200] \\ &= 200.(1,013)^2+200.1,013+200 \\ &= 607,83. \end{aligned}$$

Portanto ela terá $R\$ \ 607,83$.

Abril:

O montante deste mês poderá ser calculado como sendo:

$$\begin{aligned} M &= [200.(1+\frac{1,3}{100})^2+200.(1+\frac{1,3}{100})+200](1+\frac{1,3}{100})+200 \\ &= 200.(1+\frac{1,3}{100})^3+200(1+\frac{1,3}{100})^2+200(1+\frac{1,3}{100})+200 \\ &= 200.(1,013)^3+200(1,013)^2+200.1,013+200 \\ &= 815,74. \end{aligned}$$

Logo ela terá $R\$ \ 815,74$.

Neste momento, percebemos que o cálculo do montante satisfaz o seguinte padrão, isto é, para o n-ésimo mês o montante é calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M &= 200.(1+\frac{1,3}{100})^{n-1}+200.(1+\frac{1,3}{100})^{n-2}+...+200.(1+\frac{1,3}{100})+200 \\ &= 200.(1,013)^{n-1}+200.(1,013)^{n-2}+...+200.(1,013)+200. \end{aligned}$$

Portanto, observamos que o montante é calculado como sendo a soma de uma progressão geométrica finita, com o primeiro termo $a_1 = 200$ e a razão $q = 1,013$. Logo para o n-ésimo mês o montante é dado por:

$$\begin{aligned} M &= 200.(1,013)^{n-1}+200.(1,013)^{n-2}+...+200.(1,013)+200 \\ &= \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}. \end{aligned}$$

De posse da fórmula que representa o montante no n-ésimo mês podemos calcular sem muito esforço, o montante de qualquer mês. Em particular, no décimo segundo mês, Isabela fará o resgate de

$$\begin{aligned} M &= \frac{200(1,013^{12}-1)}{1,013-1} \\ &= 2.579,26. \end{aligned}$$

Para finalizar esta seção, apresentamos um exemplo que envolve um longo prazo e que pode ser resolvido com o uso da fórmula que deduzimos anteriormente.

5) João, por ser uma pessoa precavida com o seu futuro, começará a fazer depósitos mensais e iguais em um fundo de aposentadoria privada, com idade de 18 anos, no valor de $R\$ \ 100,00$. Sabendo que este tipo de aplicação lhe renderá uma remuneração de $0,7\%$ a.m., quantos reais ele poderá sacar todos os meses a partir dos 60 anos de idade, perpetuamente?

Solução: Se João começar a poupar com 18 anos, João vai depositar $R\$ \ 100,00$ mensais por um período de 42 anos (60-18) e que corresponde a 504 meses. Portanto, com 60 anos João terá um saldo de:

$$\begin{aligned} M &= \frac{100(1,007^{504}-1)}{1,007-1} \\ &= 466.282,58 \end{aligned}$$

Assim, João receberá do banco um valor de $R\$ \ 3.263,98$ ($= 0,7\% \ de \ 466.282,58$) mensais de forma perpétua.

2.5 Taxas Equivalentes

Na maioria das vezes, quem vai realizar uma operação financeira desconhece os termos usados, tais como a taxa de juros nominal e a taxa de juros efetiva. Nesta seção, mostramos como são calculadas as taxas de juros de um determinado tipo de um financiamento e apresentamos a real diferença entre elas. Em geral denotamos a taxa de juros efetiva por I e a taxa de juros nominal por i. Utilizamos o exemplo a seguir para explicar a diferença entre elas.

1) Carlos Eduardo, leigo em relação à Matemática Financeira, ao analisar o extrato bancário de sua conta corrente, se deparou com as seguintes descrições: taxas do cheque especial, ao mês $8,96\%$ e ao ano $180,03\%$. Não concordando com o valor da taxa anual expressa em seu extrato, questionou o gerente do banco alegando que deveria ser $107,52\%$ ao ano, isto é, $(8,96.12)\%$ ao ano, já que há, em um ano, doze meses. Como o gerente deve explicar essa situação a Carlos Eduardo?

Solução:
Senhor Carlos Eduardo, se as taxas fossem proporcionais seu cálculo estaria correto, no entanto, as taxas de juros são calculada levando em consideração o valor anterior e, portanto, não são proporcionais. Veja a forma correta:

Representando a dívida inicial por $100\% = (1)$ e considerando que no **primeiro mês** ela sofri um aumento de $8,96\%$ ($= 0,0896$), a dívida no final do primeiro mês é de:

$$1 + 0,0896 = 1,0896 \ (108,96\%)$$

.

Para o **segundo mês**, a dívida passa a ser $108,96\%$, já que a dívida sofreu um acréscimo e, portanto, calculamos $8,96\%$ deste novo valor. Desta forma a divina final no segundo mês é de:

$$\begin{aligned} 1,0896 &+ 1,0896.0,0896 \\ =1 &+ 0,0896+(1+0,0896).0.0896 \\ =1 &+ 0.0896+0,0896+0,0896^2 \\ =1 &+ 2.0,0896+0896^2=(1+0,0896)^2=1,1872\ (118,92\%). \end{aligned}$$

Desta forma, a dívida é agora de $118,72\%$ do valor inicial da dívida, ou seja, um aumento de $18,72\%$, diferente de $17,92=(8,96.2)\%$ caso a taxa considerada fosse nominal.

De forma análoga, a dívida no final do **terceiro mês** é de:

$$\begin{aligned} 1 &+ 2.0,0896+0896^2+(1+2.0,0896+0,0896^2).0,0896 \\ =1 &+ 2.0,0896+0896^2+0,0896+2.0.0896^2+0,0896^3 \\ =1 &+ 3.0,0896+3.0,0896^2+0,0896^3=(1+0.0896)^3=1,2936\ (129,36\%). \end{aligned}$$

Desta forma, a dívida é de $129,36\%$ do valor da dívida inicial, ou seja, um aumento de $29,36\%$, diferente de $26,88=(8,96.3)\%$ caso a taxa considerada fosse nominal.

Neste momento, com base no cálculo da dívida final dos três primeiros meses, somos induzidos a seguinte generalização:
A dívida final no n-ésimo mês é de

$$(1+0,0896)^n$$

do valor da dívida inicial. Portanto, em particular, a dívida no décimo segundo mês é de

$$(1+0,0896)^{12}=2,8003\ (280,03\%)$$

do valor inicial da dívida, isto é, um aumento de 180,03% em 12 meses (1 ano).

Desde que o valor encontrado nos cálculos acima é na forma decimal, retirar uma unidade significa retirar 100% da dívida inicial. Portanto, a fórmula que representa a taxa de aumento em relação ao valor inicial da dívida é

$$\begin{gathered} I=(1+i)^n-1 \\ 1+I=(1+i)^n, \end{gathered}$$

onde I representa a taxa efetiva de uma determinada operação financeira.

2.6 Sistemas de Amortização

Em geral, nas últimas décadas, para adquirir um bem ou serviço, fazemos o uso da compra a prazo ou fazemos um empréstimo ou mesmo um financiamento. Naturalmente, após estes contratos serem firmados temos que honrá-los, ou seja, pagá-los. Quando este processo de quitação esta ocorrendo, dizemos que estamos amortizando a dívida.

Podemos definir amortização como sendo um processo de reembolso de uma dívida efetuado através de uma série periódicas de pagamentos.

Há hoje, no Brasil, dois principais modelos de amortização, que são: Sistema de Amortização Francês "PRICE" e o Sistema de Amortização Constante "SAC". Tendo em vista a estabilidade econômica que o país atravessa, os financiamentos cada vez mais fazem parte de nossa vida, desta forma, ter o mínimo de conhecimento sobre os mesmos se faz necessário para o exercício de nossa cidadania de forma conciente e participativa, sendo autor da nossa própria história.

Em ambos os sistemas de amortizações, são válidas as seguintes nomenclaturas:

$n \rightarrow$ Quantidade de prestações estabelecidas entre credor e devedor. Podendo assumir os valores 1, 2, 3, ..., n de acordo com o momento que elas ocorrem.

$i \rightarrow$ Taxa de juros por período pré-fixados em contrato.

$S_k \rightarrow$ É o saldo devedor em um determinado período k, logo após o pagamento da k-ésima prestação, onde o mesmo ainda não foi pago.

$J_k \rightarrow$ Juro no determinado período k.

$A_k \rightarrow$ É a amortização do determinado período k.

$P_k \rightarrow$ É a prestação no determinado período k, sendo que ela é a soma da amortização neste período com os juros referente ao mesmo.

Quaisquer uns desses sistemas trabalham com três modalidades: antecipada, imediata e a postecipada.

Antecipada: o devedor paga a primeira parcela no ato da compra.

Imediata: a primeira parcela da dívida é paga 1 mês após a compra.

Postecipada: ocorre quando a primeira parcela é paga com 2 ou mais meses.

2.6.1 Sistema de Amortização Constante

O Sistema de Amortização Constante (SAC) – conhecido também como sistema hamburguês, iniciou-se devido ao Sistema Financiamento Habitacional (SFH). Neste sistema as prestações são decrescentes e a amortização propriamente dita é constante. Desta forma, temos também os juros decrescentes.

Para a melhor compreensão deste conceito analisamos a situação a seguir.

1) Maria compra um aparelho de som que, à vista, custa $R\$\ 400,00$ em quatro prestações. Sabe-se que a taxa de juros usada no financiamento do mesmo é de 5% a.m. e que o mesmo vai ser realizado pelo "SAC". Quais serão os valores das parcelas nas seguintes opções de compra: **I)** primeira parcela paga no ato da compra?, **II)** primeira sendo paga um mês após a compra? e **III)** primeira sendo paga dois meses após a compra?

Solução:

Primeira opção

Nesta a primeira parcela é paga no ato da compra e, portanto, o valor a ser financiado é $\frac{3}{4}$ do valor da dívida, ou seja, $R\$\ 300,00$. Desde que o aparelho seja pago em 4(quatro) prestações mensais e a caracteristica deste sistema é ter amortizações constantes, em todos os meses, de $R\$\ 100,00$. Os valores correspondentes a esta opção estão expostos na tabela abaixo:

Tempo	**Amortização**	**Saldo Devedor**	**Juros**	**Valor da Parcela**
0	100,00	300,00	-	-
1	100,00	200,00	$300.5\% = 15{,}00$	115,00
2	100,00	100,00	$200.5\% = 10{,}00$	110,00
3	100,00	-	$100.5\% = 5{,}00$	105,00
Total	**400,00**	**-**	**30,00**	**430,00**

Portanto, nesta opção, no final do financiamento Maria pagará um valor de $R\$\ 430,00$.

Segunda opção

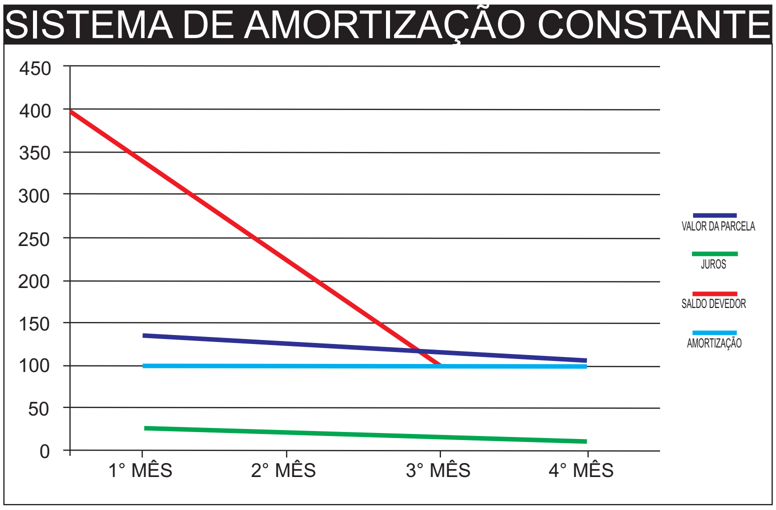
Neste caso, o valor financiado se mantém, ou seja, $R\$\ 400,00$ e a primeira parcela é paga um mês após a compra. Os calores correspondentes a esta opção estão expostos na tabela abaixo:

Tempo	**Amortização**	**Saldo Devedor**	**Juros**	**Valor da Parcela**
0		400,00	-	-
1	100,00	300,00	$400.5\% = 20{,}00$	120,00
2	100,00	200,00	$300.5\% = 15{,}00$	115,00
3	100,00	100,00	$200.5\% = 10{,}00$	110,00
4	100,00	-	$100{,}5\% = 5{,}00$	105,00
Total	**400,00**	**-**	**50,00**	**450,00**

Portanto, nesta opção, no final Maria pagará um valor de $R\$\ 450,00$.

Abaixo temos uma ilustração para que possamos verificar de forma diferente a tabela acima.

Figura 1 – Gráfico aplicação “SAC".



Terceira opção

Neste caso, o valor financiado sofre um acréscimo, pois o mesmo passou dois meses para começar a ser pago. Assim, a dívida é atualizada em 5%, ou seja, passa a ser de $R\$\ 420,00$ $(420.1,05)$. Os valores correspondentes a esta opção estão expostos na tabela abaixo:

Tempo	Amortização	Saldo Devedor	Juros	Valor da Parcela
0		420,00	-	-
1	105,00	315,00	$420.5\% = 21{,}00$	121,00
2	105,00	210,00	$315.5\% = 15{,}75$	115,75
3	105,00	105,00	$210.5\% = 10{,}50$	110,50
4	105,00	-	$105.5\% = 5{,}25$	105,25
Total	**420,00**	**-**	**52,50**	**452,50**

Portanto, nesta opção, no final do financiamento Maria pagará um valor de $R\$\ 452,50$.

Interpretanto as tabelas do exemplo anterior, concluímos:

Amortização é calculada como a divisão entre o valor da divida SD_0 e a quantidade de parcelas a serem pagas n, onde a amortização vale para $n \geq 1$, pois, para $n = 0$, não há amortização, ou seja, amortização é zero. Logo,

$$A = \frac{SD_0}{n}.$$

Para determinar o saldo devedor em um período K, basta tomarmos a dívida no período anterior e subtrairmos de A. Isto é,

$$SD_k = SD_{(k-1)} - A.$$

Para determinar o valor do juro no período K, basta calcularmos seu valor em função do saldo anterior. Então,

$$J_k = SD_{(k-1)}.i.$$

Onde " i " é a taxa de juros cobrada em um determinado período. Para determinar o valor de cada parcela no período K, basta somarmos a amortização com o Juro no período K.

$$P_k = A + J_k.$$

2.6.2 Sistema de Amortização Francês

O Sistema Francês de Amortização usa como base uma sequência uniforme e periódica de pagamentos, esse sistema é o único que possui uma fórmula para que se possa encontrar o valor das parcelas, sendo estas iguais e podendo ser imediatas, postecipadas ou antecipadas.

Esta fórmula foi desenvolvida por Richard Price. Nascido em Tynton, Inglaterra, filósofo, teólogo e especialista em finanças e seguros. Em 1771 foi publicada sua mais famosa obra na área financeira e atuarial intitulada "Observações Sobre Pagamentos Reversíveis". As fórmulas envolvidas neste sistema são gradativamente construidas através de uma sequência de exemplos.

1) João tomou emprestado de Pedro uma determinada quantia sob uma taxa de juros de 5% a.m.. Ao efetuar o pagamento, um mês após o empréstimo, pagou um valor de $R\$ \ 630,00$. Qual foi o valor do empréstimo?

Solução: A pergunta que devemos responder é: Se o **capital** emprestado sofreu um acréscimo de 5% no mês do empréstimo, rendendo um **montante** de $R\$ \ 630,00$ qual foi o valor emprestado? Do conceito de juros compostos, temos

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i)^n \\ 630 &= C.(1+0.05)^1 \\ C &= \frac{630}{1{,}05} = 600. \end{aligned}$$

Portanto, o valor emprestado foi de $R\$ \ 600,00$.

2) Arthur comprou uma televisão dividida em duas parcelas iguais no valor de $R\$ \ 288,10$. Sabendo que a loja cobra uma taxa de juros de 10% a.m., qual é o valor da televisão à vista, sendo que a primeira parcela foi paga um mês após a compra?

Solução: O método de resolução deste exemplo é semelhante ao aplicado no exemplo anterior. Consideram-se as parcelas como sendo (M_1 *e* M_2) e o valor da televisão (C) à vista como sendo a soma dos capitais (C_1 *e* C_2) referente aos montantes (M_1 *e* M_2), dados que $C_1 = \dfrac{P}{(1+i)}$, $C_2 = \dfrac{P}{(1+i)^2}$ logo para tempo j temos $C_j = \dfrac{P}{(1+i)^j}$. Assim,

$$\begin{aligned} C &= \frac{288,10}{1,1} + \frac{288,10}{1,1^2} \\ C &= 500,01. \end{aligned}$$

Portanto, o valor da televisão à vista é de $R\$ \ 500,01$.

O próximo exemplo é semelhante ao exemplo anterior, no entanto, com um número maior de parcelas, o que permite uma melhor visualização da generalização das fórmulas.

3) Marcos comprou um smartphone divido em 5 parcelas iguais e sem entrada no valor de $R\$ \ 230,97$, sendo a primeira parcela paga um mês após a compra. Sabendo que a taxa de juros que incide pela venda do aparelho é de 5% a.m., qual o valor do aparelho à vista?

Solução:

Análoga ao exemplo anterior, temos:

Se (C) é o valor do aparelho à vista então,

$$\begin{aligned} C &= \frac{230,97}{(1,05)^5} + \frac{230,97}{(1,05)^4} + \frac{230,97}{(1,05)^3} + \frac{230,97}{(1,05)^2} + \frac{230,97}{1,05} \\ &= \frac{(230,97 + 230,97.1,05 + 230,97.(1,05)^2 + 230,97(.1,05)^3 + 230,97.(1,05)^4)}{(1,05)^5} \\ &= 230,97.\frac{1 + 1,05 + (1,05)^2 + (1,05)^3 + (1,05)^4}{(1,05)^5} \end{aligned}$$

Visto que o somatório é a soma de termos de uma P.G. finita $(n = 5)$, $a_1 = 1$ e $q = 1,05$, temos

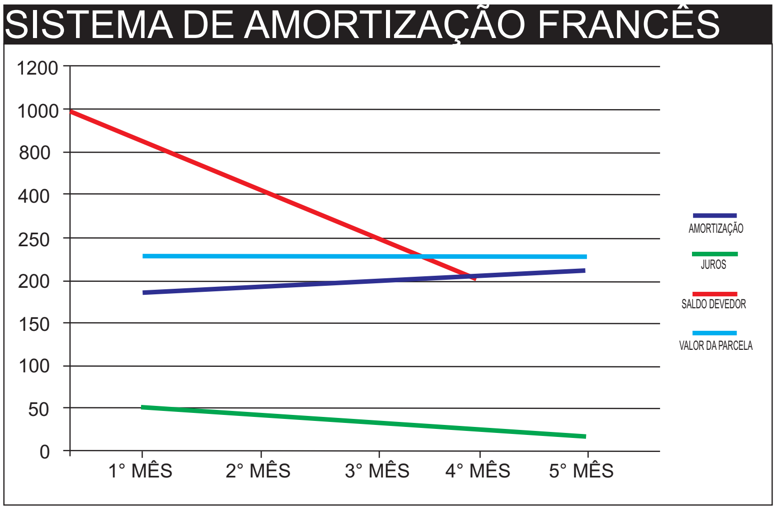
$$\begin{aligned} C &= 230,97.[\frac{(1,05^5-1)}{1,05-1}].\frac{1}{(1,05^5)} \\ &= 999,98. \end{aligned}$$

Portanto, o preço à vista do smartphone é de $R\$$ $999,98$.

Neste momento, já estamos aptos a enunciar um exemplo que represente o caso geral.

Abaixo temos uma ilustração para demonstrar o problema exposto.

Figura 2 – Gráfico aplicação "PRICE".



4) Jonas deseja comprar uma geladeira que será paga, em n parcelas mensais de mesmo valor. Sabendo que a taxa de juros cobrada no financiamento é i ao mês, e que a primeira parcela será paga um mês após a compra. Qual é o valor à vista da geladeira?

Solução:

Supondo que o valor das prestações seja P reais e que o valor da geladeira à vista é C, temos

$$\begin{aligned}
C &= \frac{P}{(1+i)^n}+\frac{P}{(1+i)^{n-1}}+\frac{P}{(1+i)^{n-2}}+...+\frac{P}{1+i}\\
&= \frac{P+P.(1+i)+P.(1+i)^2+P.(1+i)^3+...+P.(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n}\\
&= P.\frac{[1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{n-1}]}{(1+i)^n}\\
&= \frac{P}{(1+i)^n}.1.\frac{((1+i)^n-1)}{(1+i)-1}\\
&= P.\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}.
\end{aligned}$$

De posse desta fórmula que representa o caso geral, estamos aptos a resolver problemas, sem grandes esforços, com um número "elevado" de prestações. O próximo exemplo cumpre esse papel.

5) Mariana, comprou um carro financiado que será pago em dez anos com parcelas mesais de mesmo valor, sendo que a primeira parcela será paga um mês após a compra. Sabe-se que o preço à vista é de $R\$$ $200.000,00$ e que taxa de juros cobrada pela financiadora era de 3% a.m., determine o valor das parcelas a serem pagas.

Solução: Visto que já conseguimos chegar em uma relação matemática, na qual podemos encontrar uma das icógnitas de posse dos outros valores, temos:

$$\begin{aligned}
C &= P.\frac{((1+i)^n-1)}{i.(1+i)^n}\\
200000 &= P.\frac{(1+0,03)^{120}-1}{0,03.(1+0,03)^{120}}\\
200000 &= P.\frac{1,03^{120}-1}{0,03.1,03^{120}}\\
P &= 6.177,98.
\end{aligned}$$

Portanto, cada parcela será no valor de $R\$$ $6.177,98$.

Acreditamos que, desta forma, o aluno pode recorrer a relação acima para resolver os mais diversos problemas, e agora com uma base sólida, pois trabalhamos de forma que o conhecimento fosse construído passo-a-passo, respeitando o tempo do aprendizado de cada aluno.

3 Aplicações

A sociedade brasileira vive um momento de grande facilidade de obtenção de crédito, mediante as mais diversas ofertas, tais como: empréstimo pessoa física, cartão de crédito, financiamento habitacional, entre muitos outros. Com estas facilidades de hoje surgiram as mais diversas situações financeiras, que cada vez mais exige do interessado a capacidade de discernir qual é a melhor forma de concretizá-las.

Como este trabalho é voltado aos alunos do ensino médio, os mesmos já são aptos para trabalharem questões um pouco mais complexas, nas quais possam deixar de tomar decisões emocionais, passando a tomar decisões racionais, como por exemplo, decidir o que será melhor: comprar à vista ou a prazo.

Neste capítulo abordamos algumas situações-problemas que envolvam o conteúdo que foi trabalhado nos capítulos anteriores e com objetivo de aprimorar a capacidade do aluno de realizar uma compra.

Abaixo, vamos enunciar e apresentar soluções para diversos problemas.

1) Karolina é uma ótima administradora e assim consegue fazer seu dinheiro render $1,5\%$ a.m.. Para comprar um iphone que custa $R\$ \ 3.200,00$, o vendedor lhe ofereceu duas opções de compra: **I)** Pagamento à vista com 5% de desconto e **II)** Pagamento em dez parcelas mensais de mesmo valor de $R\$ \ 320,00$ e com o pagamento da primeira parcela no final do primeiro mês. Qual é a melhor opção de compra?

Solução:

Primeira opção: Neste caso, o iphone será vendido à vista por

$$R\$ \ 3.040,00 \ (95\% \ de \ 3.200,00).$$

Segunda opção: Desde que os pagamentos sejam efetuados em dez parcelas é essencial considerarmos que Karolina consegue fazer o seu dinheiro render $1,5\%$ a.m.. Neste sentido, é suficiente verificar que, para Karolina, o quanto estas parcelas representam de valor no ato da compra. Como as parcelas são fixas, este tipo de operação financeira é o Sistema de amortização Francês. Assim, para Karolina estas 10 prestações fixas de $R\$ \ 320,00$ representam no ato da compra o valor de

$$\begin{aligned} C &= P.\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n} \\ &= 320.\frac{(1,015)^{10} - 1}{0,015.(1,015)^{10}} \\ &= 2.951,10. \end{aligned}$$

Portanto, comparando os dois valores encontrados observamos que a segunda opção é a melhor para Karolina.

2) Wictor deseja comprar um golf cujo valor, à vista, é de $R\$$ $50.000,00$. Sabendo-se que Wictor possui $R\$$ $30.000,00$ para dar de entrada, uma revendedora lhe ofereceu duas opções de compra: **I)** Em 48 meses sem entrada e com a taxa de juros de 5% a.m. ou **II)** Entrada de $R\$$ $30.000,00$ e o restande em 48 meses com juros de 4% a.m. sendo que os financiamentos serão realizados pelo sistema PRICE. Supondo que Wictor consegue fazer seu dinheiro render 8% a.m., qual é a melhor opção de compra?

Solução:

Neste caso, vamos fazer a comparação verificando, em ambas as propostas, o quanto Wictor irá pagar no final dos 48 meses.

Primeira opção:

a) (Cálculo das parcelas) Visto que o valor do golf à vista é $R\$$ $50.000,00$ e o sistema considerado é o PRICE, temos que o valor da parcela (P) é dado por:

$$\begin{aligned} C &= P.\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n} \\ 50.000 &= P.\frac{1,05^{48} - 1}{0,05.1,05^{48}} \\ P &= 2.765,92. \end{aligned}$$

Assim, nesta opção, o financiamento será composto por 48 parcelas de $R\$$ $2.765,92$.

b) Visto que Wictor possui $R\$$ $30.000,00$ com o rendimento de 8% a.m., quantas parcelas deste financiamento ele consegue pagar com esse saldo?

A tabela abaixo representa o saldo que Wictor possui no determinado mês do finaciamento, considerando o rendimento de seu dinheiro e a prestação paga.

Mês	Prestação	Saldo (S)
0	0	30000
1	2765,92	30000.1,08-2765,92
2	2765,92	$(30000.1,08-2765,92)1,08-2765,92 =$ $30000.1,08^2-2765,92.1,08-2765,92$
3	2765,92	$(30000.1,08^2-2765,92.1,08-2765,92).1,08-2765,92 =$ $30000.1,08^3-2765,92.1,08^2-2765,92.1,08-2765,92$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2765,92	$30000.1,08^n-2765,92.(1,08^{n-1}+...+1,08+1) =$ $30000.1,08^n-2765,92.\dfrac{1,08^n-1}{0,08}$

De posse da tabela acima, observamos que o vigésimo sexto mês ($n=26$) do financiamento, o saldo de Wictor em relação aos $R\$ \ 30.000,00$ iniciais será de

$$\begin{aligned} S &= 30000.1,08^n-2765,92.\frac{1,08^n-1}{0,08} \\ &= 30000.1,08^{26}-2765,92.\frac{1,08^{26}-1}{0,08} \\ &= 743,08. \end{aligned}$$

Logo, com a aplicação dos $R\$ \ 30.000,00$ Wictor quita 26 parcelas e ainda lhe sobra um saldo de $R\$ \ 743,08$. Assim, do total de 48 parcelas, lhe restam 22 parcelas de $R\$ \ 2.765,92$. Portanto, no final dos 48 meses de financiamento Wictor irá pagar um total de

$$30.000+22 \ x \ 2765,92-743,08 \ x \ 1.08 = \mathbf{90.047{,}71}.$$

Segunda opção:

Desde que o valor da entrada do financiamento seja de $R\$ \ 30.000,00$, lhe restaram para financiar $R\$ \ 20.000,00$. Logo, como o sistema considerado é o sistema PRICE, o valor da parcela (P) neste caso é de

$$
\begin{aligned}
C &= P.\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}\\
20.000 &= P.\frac{1,04^{48}-1}{0,04.1,04^{48}}\\
P &= 943,61.
\end{aligned}
$$

Assim, no final de 48 meses Wictor irá pagar um total de

$$30.000+45.293,28=\mathbf{75.293,28}.$$

Portanto, comparando os dois valores encontrados observamos que a segunda opção é a melhor escolha para Wictor.

3) Fruto de economia, James possui uma quantia de $R\$$ $10.000,00$. Seu sonho é comprar uma moto XTZ 660 cujo valor à vista é $R\$$ $28.000,00$. O plano escolhido por James, através de uma financeira, foi o pagamento de 36 meses (sem entrada) a uma taxa de 6% a.m. e com parcelas de mesmo valor. Neste contexto, a economia que James possui deve render quantos por cento ao mês para que ele possa pagar o valor das parcelas?

Solução: Inicialmente devemos encontrar o valor da parcela do financiamento. Desde que as parcelas sejam do mesmo valor, o sistema considerado é o PRICE. Assim, o valor da parcela (P) é calculado da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
C &= P.\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}\\
28.000 &= P.\frac{1,06^{36}-1}{0,06.1,06^{36}}\\
P &= 1.915,06.
\end{aligned}
$$

Para solucionar o problema, basta resolvermos o simples problema: “ Qual a porcentagem de $R\$$ $10.000,00$ resulta em $R\$$ $1.915,06$?,” cuja a solução é

$$P=\frac{1915,06}{10000}=0,1915\ (ou\ 19,15\%).$$

Assim, se James conseguir fazer seu dinheiro render, no mínimo, $19,15\%$ a.m. consiguirá arcar com as parcelas do financiamento.

4) Pedro deseja compra um notebook cujo o valor à vista é de $R\$\ 2.000,00$. A loja oferece duas opções de compra, ambas, com o juro de financiamento de 8% a.m.: **I)** Em cinco prestações mensais pelo sistema PRICE e **II)** Em cinco prestações pelo sistema SAC. Neste caso, qual seria a melhor escolha?
Solução:
Primeira opção: Inicialmente vamos encontrar o valor das 5 prestações de mesmo valor. Desde que o sistema considerado seja o PRICE, temos que o valor da prestação (P) é dado por:

$$
\begin{aligned}
C &= P.\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n} \\
2.000 &= P.\frac{1,08^5-1}{0,08.1,08^5} \\
P &= 500,91.
\end{aligned}
$$

Assim, se o sistema escolhido for o sistema PRICE, no final dos 5 meses Pedro terá pago um valor de $R\$\ 2.504,56 \quad (500,91.5)$.
Segunda opção: Desde que o sistema considerado seja o sistema SAC, o valor das 5 parcelas, que neste caso não são necessariamente iguais, podem ser fornecidos pela seguinte tabela:

Tempo	Amortização	Saldo Devedor	Juros	Valor da Parcela
0	0,00	2.000,00	0,00	0,00
1	400,00	1600,00	160,00	560,00
2	400,00	1200,00	128,00	528,00
3	400,00	800,00	96,00	496,00
4	400,00	400,00	64,00	464,00
5	400,00	0,00	32,00	432,00
Total	**2.000,00**	**0,00**	**480,00**	**2.480,00**

De acordo com a tabela acima, se o sistema escolhido for o SAC, no final de 5 meses Pedro terá pago o valor total de $R\$\ 2.480,00$.

Portanto, comparando os valores pagos, em relação aos dois sistemas, observamos que a melhor opção para Pedro é optar pelo sistema SAC.

5) João tem duas opções de compra para adquirir uma moto, cujo o valor à vista é de $R\$\ 4.000,00$. **I)** Financiá-la em oito prestações mensais de mesmo valor (sem entrada), sob uma taxa de juros de 3% a.m. (PRICE), **II)** Financiá-la em oito prestações decrescente (SAC), sob uma taxa de juros de 4% a.m.. Nesta situação qual é a melhor escolha?

Solução:
Primeira opção:

Como (para a comparação) você só precisa do valor das prestações, a tabela neste caso não é necessária. Já havíamos trabalhado com um exercício desta forma. Assim,

$$\begin{aligned} C &= P.\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n} \\ 4.000 &= P.\frac{1,03^8 - 1}{0,03.1,03^8} \\ P &= 569,83. \end{aligned}$$

Assim, se o sistema escolhido for o sistema PRICE, no final dos 8 meses Pedro terá pago um valor de $R\$\ 4.558,64 \ \ (569,83.8)$.
Segunda opção:

A tabela abaixo representa o finaciamento pelo sistema SAC, da qual é possível saber o valor total pago ao se verificar o valor total da coluna prestação.

Tempo	Prestação	Amortização	Juros	Saldo Devedor
0	0,00	0,00	0,00	4.000,00
1	660,00	500,00	160,00	3.500,00
2	640,00	500,00	140,00	3.000,00
3	620,00	500,00	120,00	2.500,00
4	600,00	500,00	100,00	2.000,00
5	580,00	500,00	80,00	1.500,00
6	560,00	500,00	60,00	1.000,00
7	540,00	500,00	40,00	500,00
8	520,00	500,00	20,00	0,00
Total	**4.720,00**	**4.000,00**	**720,00**	**0,00**

Assim, se o sistema escolhido for o sistema SAC, no final dos 8 meses Pedro terá pago um valor de $R\$\ 4.720,00 \ \ (660+640+...+520)$.

Portanto, a primeira opção é a melhor.

6) Um televisor cujo preço à vista é de $R\$\ 1.200,00$, é vendido em 6 prestações mensais iguais, sob uma taxa de juros de 6% a.m.. Analise cada uma das seguintes opções e determine o valor das prestações em cada uma delas. **I)** A primeira parcela paga no ato da compra? **II)** A primeira parcela paga um mês após a compra? **III)** A primeira parcela paga dois meses após a compra?

Solução:
Primeira opção: Como no ato da compra não incide juros sobre o valor da dívida, a amortização da primeira parcela na dívida é integral. Assim, temos

$$\begin{aligned} 1.200 &= P+\frac{P}{1+0,06}+\frac{P}{(1+0,06)^2}+\frac{P}{(1+0,06)^3}+\frac{P}{(1+0,06)^4}+\frac{P}{(1+0,06)^5} \\ 1.200.1,06^5 &= P.1,06^5+P.1,06^4+P.1,06^3+P.1,06^2+P.1,06+P \\ P.\frac{1,06^6-1}{1,06-1} &= 1.605,87 \\ P &= \frac{1.605,87}{6,98} \\ P &= 230,07. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de cada uma das prestações é de $R\$$ $230,07$.

Segunda opção: Neste caso, como só irá se pagar a primeira parcela um mês após a compra, em todas as parcelas incidirá juros, assim teremos:

$$\begin{aligned} 1.200 &= \frac{P}{1+0,06}+\frac{P}{(1+0,06)^2}+\frac{P}{(1+0,06)^3}+...+\frac{P}{(1+0,06)^6} \\ 1.200.1,06^6 &= P.1,06^5+P.1,06^4+P.1,06^3+P.1,06^2+P.1,06+P \\ P.\frac{1,06^6-1}{1,06-1} &= 1.702,22 \\ P &= \frac{1.702,22}{6,98} \\ P &= 243,87. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de cada uma das prestações é de $R\$$ $243,87$.

Terceira opção: Neste caso, temos que levar em consideração que já se passaram dois meses, logo sobre a primeira prestação incide juros de dois meses. Assim, temos

$$\begin{aligned}
1.200 &= \frac{P}{(1+0,06)^2}+\frac{P}{(1+0,06)^3}+\frac{P}{(1+0,06)^4}+...+\frac{P}{(1+0,06)^7}\\
1.200.1,06^7 &= P.1,06^5+P.1,06^4+P.1,06^3+P.1,06^2+P.1,06+P\\
P.\frac{1,06^6-1}{1,06-1} &= 1.804,36\\
P &= \frac{1.804,36}{6,98}\\
P &= 258,50.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor de cada uma das prestações é de $R\$ \ 258,50$.

7) Aline, comprou um fogão onde deveria efetuar, sem entrada, seis pagamentos mensais e sucessivos no valor de $R\$ \ 150,00$ para quitar sua dívida. No entanto, Aline resolveu renegociá-la, e agora irá efetuar apenas dois pagamentos iguais, no segundo e quinto mês. Sabendo que a taxa de juros cobrada é de 4% a.m., qual o valor das novas parcelas?

Solução:
Inicialmente é necessário que se saiba o valor à vista do aparelho. Neste contexto, temos

$$\begin{aligned}
A &= \frac{150}{1+0,04}+\frac{150}{(1+0,04)^2}+\frac{150}{(1+0,04)^3}+...+\frac{150}{(1+0,04)^6}\\
&= 144,23+138,68+133,35+128,22+123,29+118,55\\
&= 786,32.
\end{aligned}$$

Assim, o fogão custa à vista $R\$ \ 786,32$. De posse do preço à vista podemos encontrar o valor das duas prestações (após a renegociação da dívida) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
786,32 &= \frac{P}{(1+0,04)^2}+\frac{P}{(1+0,04)^5}\\
786,32.1,04^5 &= P.1,04^3+P\\
P.2,12 &= 956,68\\
P &= \frac{956,68}{2,12}\\
P &= 451,26.
\end{aligned}$$

Desta forma, o valor de cada uma das novas prestações será de $R\$ \ 451,26$.

Finalizamos este capítulo com a simulação de um empréstimo consignado.

8) Letícia com o objetivo de adquirir uma casa própria no valor, à vista, de $R\$ \ 41.013,84$, se dirigiu até uma agência do "Banco Popular" para realizar um empréstimo consignado. Antes de finalizar o empréstimo foi informada que teria que pagar o IOF "Imposto Sobre Operação Financeira" no valor de 3,07% sobre o valor financiado. **I)** Assumindo que

Letícia não possui nenhuma quantia para dar de entrada, qual deve ser o valor mínimo financiado para que Letícia possa adquirir sua casa? **II)** Se Letícia concretizou o empréstimo desta quantia mínima em 36 prestações de mesmo valor, sendo a primeira parcela paga um mês após a realização do empréstimo e com taxa de juros de $1,69\%$ a.m., qual será o valor das prestações?

Solução:
I) Sendo o valor do IOF de $3,07\%$ sobre o valor financiado, Letícia deve financiar o valor de $R\$ \ 42.272,96$ que corresponde a $41.013,84+3,07\%$ de $41.013,84$. **II)** De posse do valor que deve ser financiado e observando que o sistema a considerar é o sistema PRICE, temos

$$\begin{aligned} C &= P.\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n} \\ 42.272,96 &= P.\frac{1,0169^{36}-1}{0,0169.1,0169^{36}} \\ P &= 1.577,05. \end{aligned}$$

Portanto, Letícia pagará parcelas no valor de $R\$ \ 1.577,05$, num total de $R\$ \ 56.773,80$ $(36.1.577,05)$.

Estes exemplos de aplicações expostos neste capítulo abrangem uma boa parte da necissidade dos estudantes/consumidores presentes no Ensino Médio. Além disto, a solução destes problemas pode servir de base para a resposta relacionada a outros tipos de problemas.

4 Análise do componente curricular "Matemática Financeira" nos livros de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD 2015

Tendo em vista que hoje há no mercado as mais diferentes editoras e autores de livros didáticos, neste capítulo vamos fazer uma análise crítica com os pontos positivos e negativos de 6 (seis) livros que contém capítulos sobre a Matemática Financeira e que foram aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático em 2013 (PNLD).

No processo de seleção dos livros didáticos que é conduzido pelo PNLD desde o ano de 2013, os livros são avaliados tendo como fundamentação o artigo 35 da Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional - LDB (LEI 9394/96). Neste processo, alguns critérios são caráter eliminatório comuns a todas as áreas, porém, cada disciplina é observada de acordo com suas particularidades.

No que se refere à Matemática é importante salientar que ela é complexa e indissociável, pois a mesma possui aplicações nas mais diversas atividades humanas e também aborda problemas que lhes são próprios, ou seja, Matemática pura, mas, às vezes, acaba se mostrando aplicável ao cotidiano.

Vivemos em um mundo onde as informações estão sendo compartilhadas de modo muito rápido e intenso e, portanto, algumas situações estão fazendo parte do cotidiano da sociedade, como compras, vendas, empréstimos, aplicações financeiras, interpretação de gráficos, uso de calculadoras e computadores, etc.

A análise realizada nos livros didáticos tem como suporte o livro Exames de Textos do Prof. Dr. Elon Lages Lima (Lima, 2001), onde o mesmo tem por objetivo analisar e dar sugestões de como os conteúdos de Matemática podem ser aplicados de maneira satisfatória no Ensino Médio.

Segundo (LIMA, 2001) "A análise dos livros-texto para o ensino da Matemática na Escola Média deve levar em conta, acima de tudo, sua adequação às três componentes básicas desse ensino, a saber: Conceituação, Manipulação e Aplicação". As definições destas três componentes seguem abaixo:

- A Conceituação compreende a formulação de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, bem como a interpretação e a reformulação dos mesmos sob diferentes aspectos. É importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações.

- A Manipulação, de caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a Música. A habilidade no manuseio de equações, fórmulas, operações e construções geométricas elementares, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permitem ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, sem perder tempo e energia com detalhes.

• A Aplicação é o emprego de noções e teorias da Matemática em situações que vão de problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis provenientes de outras áreas, quer científicas quer tecnológicas. Ela é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e tão necessário.

É importante observar que os conteúdos específicos à Matemática Financeira não são analisados no livro de Lima (Lima, 2001).

Analisamos os livros, buscando respostas às seguintes perguntas:

i) Como o autor procede até chegar às fórmulas sobre matemática financeira?

ii) Se o livro relaciona conteúdos estudados com outros temas matemáticos? Se existe, de que forma acontece?

iii) Como se dá as manipulações algébricas das fórmulas?

iv) Com qual objetivo os exercícios estão sendo propostos?

v) De que maneira os exercícios aplicados fazem parte do cotidiano?

O PLND de 2015 buscou responder algumas perguntas sobre os livros didáticos que foram aprovados, onde as respostas são classificadas em: superficial, suficiente e com destaque. As perguntas para todos os livros estão relacionadas na sequência abaixo.

i) Fundamentação teórica que norteia a coleção

ii) Contruibuição para a formação do professor

iii) Orientações para a avaliação da aprendizagem

iv) Orientações para o uso do livro didático

v) Orientações para o uso de recursos do livro didático

vi) Orientações para o desenvolvimento das atividades

vii) Soluções das atividades propostas

viii) Sugestões de atividades complementares

Abaixo, seguem as análises.

4.1 Fábio Martins Et Moderna - Conexões com a Matemática

O capítulo sobre Matemática Financeira está no volume III, capítulo 1, com o nome “Matemática Financeira: Taxa percentual, Juros Simples, Juros Composto”.

O autor da início ao capítulo com um problema entre compra à vista e a prazo, no entanto o problema não fica claro, pois os dados são incompletos impossibilitando uma análise do mesmo, faltando dados simples como o valor de cada parcela a ser paga.

Os problemas escolhidos pelo o autor, de início já são bem complexos, desta forma não auxilía o professor em sala de aula já que os conteúdos necessários para sua resolução nem foram trabalhados.

Um dos objetivos do capítulo definidos pelo autor é “ Analisar e aplicar os regimes de juros simples e de juros composto”, para isso ele escolhe uma sequência de conteúdos que busca dar base para seu objetivo, sendo: Taxa percentual, Aumentos, Descontos sucessivos e Lucro e prejuízo.

Em juros simples, o autor usa um dos problemas deixados no início do capítulo, no qual por ele é possível se chegar às fórmulas usadas no mesmo.

Em juros compostos o autor faz uso de uma tabela para se trabalhar ao mesmo tempo juros simples e juros composto com isso ajuda ao aluno a compreender melhor a diferença entre os dois e conseguentemente a fórmula aparece de forma natural.

A interligação entre conteúdos aparece de forma prática, ou seja, nas aplicações de alguns exercícios podemos perceber, mas, no entanto eles não são bem explorados no sentido que o aluno possa perceber o motivo que eles estão sendo usados.

Tem-se nos exercícios resolvidos e propostos, em sua grande maioria exercícios contextualizados com o objetivo de levar o aluno a compreender e praticar as relações matemáticas trabalhadas, desta forma o aluno pode aplicar o que foi proposto pelo autor, no qual as manipulações algébricas aparecem de forma natural.

Após ter trabalhados os conteúdos matemáticos, o autor encerra o capítulo ensinando como se faz o planejamento familiar, com isso pretende ajudar as mesmas a gerenciar melhor seus rendimentos.

Em relação as questões feitas pelo PNLD de 2015 esta coleção obteve as seguintes classificações: Suficiente; Com destaque; Suficiente; Suficiente; Suficiente; Com destaque; Com destaque e Suficiente.

4.2 Dante Et Ática - Matemática: Contextos e Aplicações

O capítulo sobre Matemática Financeira está no volume III, capítulo 1, com o nome "Matemática Financeira ".

O autor traz no início do capítulo, um breve comentário sobre Matemática financeira, enfatizando que um dos seus principais conceitos, o juro, é uma relação entre o dinheiro e o tempo.

Em seguida, resolve uma situação problema do nosso cotidiano, deixando uma pergunta ao leitor. Neste momento o professor poderá fazer uma reflexão junto ao aluno sobre a importância de calcular primeiramente quanto se irá pagar de juros por um determinado objeto, e se esse valor vale a pena dada a circunstância apresentada.

Antes de trabalhar o assunto porcentagem, o autor deixa uma situação problema para o leitor, no qual o mesmo tem como objetivo levar o leitor a pensar qual é a melhor escolha para se realizar uma compra.

No que se refere às fórmulas financeiras, não há um aprofundamento nas mesmas, onde em sua grande maioria são simples, na qual o autor resume o capítulo ao estudo de fator de atualização, Juros Simples, Juros Compostos e Equivalência de taxas.

Em Juros Simples, não existe um sequência que favoreça a construção das fórmulas, onde o mesmo não chega a definir a fórmula para que se possa calcular o montante. Em Juros Compostos, o autor partiu de um exemplo prático buscando fazer uma reflexão, comparando com Juro Simples, levando o leitor a refletir sobre a diferença da forma que eles são calculados, onde para se chegar a fórmula o autor usa de uma tabela bem eleborada que leva o estudante a compreender a fórmula obtida. Na Equivalência de taxas a relação matemática aparece após um exemplo prático, mas não de forma clara.

Existe em alguns tópicos uma relação com outros conteúdos matemáticos, no qual eles aparecem de forma natural. O autor fornece algumas notas suscintas de que estas relações estão acontecendo e proporciona ao leitor um tópico com o nome "Conexão entre juros e funções" que relaciona o que já foi estudado com funções e suas respectivas tabelas e gráficos.

Os exercícios resolvidos são bem elaborados, buscando fazer com que as fórmulas dadas sejam usadas das mais diversas formas. É importante frisar que neste aspecto o autor não fez manipulações algébricas desnecessárias, deixando o uso demasiado de algumas fórmulas.

Os exercícios usados no texto têm ambas as funções, sendo alguns deles da forma calcule e responda e outros em sua grande maioria problemas contextualizados que estão acontecendo no cotidiano da sociedade em que vivemos e dessa forma o autor alcança os objetivos.

Finalizando o capítulo, o autor escreveu um texto que ajuda a entender de forma satisfatória como funciona o cartão de crédito e o sistema financeiro nacional. Sobre cartão de crédito ele enfatiza os benefícios e os malefícios do seu uso incorreto e como a pessoa deve proceder para não se afundar com seu uso, tendo em vista que este tipo de financiamento tem os juros mais altos do mercado atual.

Em relação as questões feitas pelo PNLD de 2015 esta coleção obteve as seguintes classificações: Suficientes; Suficientes; Superficial; Suficientes; Suficientes; Suficientes; Com destaque e Suficientes.

4.3 Paiva Et Moderna - Matemática

O capítulo sobre Matemática Financeira está no livro I, capítulo 2, com o nome de Temas básicos de Álgebra e Matemática Financeira.

No início do capítulo temos ilustrações que fazem parte de nosso cotidiano, com o propósito de fazer com que o leitor venha a se interessar ainda mais pelo tema a ser estudado. O autor não fez nenhum tipo de relação a razão e proporção, indo direto a porcentagem na qual faz a sua definição e logo após vários exemplos de aplicação contextualizadas.

Em relação a Juros Simples, a fórmula é dada após dois exemplos práticos, sendo eles resolvidos sem a preocupação de como se chega a ela, mas sim com intuito de que se resolvam os exercícios proposto usando-a.

Já em Juros Compostos, o autor faz um breve comentário de como ele acontece em operações financeiras e logo após um exemplo prático que tem como objetivo exemplificar o que ele disse antes. Para chegar à fórmula do montante ele usa de uma tabela com intuito de demostrá-la, mas para uma pessoa que ainda não tem uma base algébrica razoável ela se tornaria de difícil compreensão.

Finalizando o capítulo, tem-se uma lista de exercícios complementares, trás também um resumo sobre o Sistema Price falando de sua história e de quem o criou (Richard Price).

Durante o estudo não se percebe de maneira clara que o autor tem a preocupação em relacionar o que está sendo estudado com outros conteúdos matemáticos, já que os exercícios resolvidos são resolvidos com uso de fórmulas dadas prontas.

Vimos que os exercícios, em sua grande parte, são de aplicações do que foi exposto anteriormente e alguns deles usando, como por exemplo: calcule o juro simples.

Fica claro que o objetivo deste autor é fazer com que o aluno consiga resolver os mais variados tipos de exercícios. No entanto, deixando de observar a capacidade intelectual do aluno que pode aprender a resolver um problema por vários caminhos.

Em relação as questões feitas pelo (PNLD, 2015) esta coleção obteve as seguintes classificações: Com destaque; Com destaque; Com destaque; Com destaque; Suficientes; Com destaque; Com destaque e Suficientes.

4.4 Gelson Iezzi Et Saraiva - Matemática: Ciências e Aplicações

O capítulo sobre Matemática Financeira está no livro III, capítulo 6 com o nome de: Matemática Financeira.

O autor inícia o capítulo fazendo ao leitor várias perguntas, nas quais elas cumprem o papel de mostrar as mais diferentes situações financeiras, com o intuito de aguçar ainda mais o interesse do leitor para o capítulo a ser estudado.

Há em seguida varías situações problemas que mostram na prática o significado da palavra Juros, onde o autor faz uma referência como Juros sendo “aluguel”, também trabalhando os significados das letras que são usadas nas resoluções dos problemas que tem no texto a seguir.

Juro Simples, novamente o autor inicia este sub-tópico com uma situação problema que é comum em nossos dias, pagamento de boletos bancários, no qual houve um atraso no pagamento do mesmo, logo como será calculado o valor dos juros a serem pagos? O autor resolve a situação e trabalha um termo “ Juros de Mora” e multa que é o que ocorre hoje determinado pela Lei n 10.406, de 11 de janeiro de 2002.

Com o mesmo exemplo o autor utiliza de uma tabela para mostrar que a razão entre juros e o números de dias é uma constante, na qual a constante é encontrada pelo produto entre o valor da taxa de juros e o Capital da dívida, demonstrando a fórmula de Juros Simples.

No final deste tópico o autor traz um texto com tema aplicações, no qual faz referência entre qual a melhor opção de compra, se à vista ou a prazo.

Juros Compostos, da mesma forma que anteriormente o mesmo inicia com uma situação problema, na qual a usa como forma pra se chegar a fórmula de Juros Compostos, faz uma pequena observação sobre logaritmo com o intuito de revisão sabendo que o mesmo é necessário na hora das resoluções de algumas situações problemas que poderam surgir.

No final deste tópico o autor traz duas situações problemas na qual é possível saber o valor a ser amortizado da dívida em cada parcela do financiamento, relacionando a mesma com uma progressão geométrica.

Finalizando o capítulo tem-se o sub-tópico Juros e Funções com o qual o mesmo problema é resolvido por Juros Simples e Juros Compostos, ficando claro a forma com que os dois são diferenciados em um gráfico usado para demonstrar o contraste entre ambos os conteúdos.

Os exercícios propostos, são bem contextualizados e seguem uma ordem de dificuldades de menor para o maior grau, fazendo com que o leitor se estimule ainda mais a resolver os próximos desafios, pois os mesmos fazem parte da vida de um cidadão comum.

Em relação as questões feitas pelo (PNLD, 2015) esta coleção obteve as seguintes classificações: Suficientes; Suficientes; Suficientes; Suficientes;Superficial; Superficial; Suficientes e Suficientes.

4.5 Kátia Stocco Et Saraiva - Matemática Ensino Médio

O capítulo sobre matemática Financeira está no livro III, capítulo 1, com o nome de Noções de Matemática Financeira.

A autora inicia o capítulo com um problema de empréstimo, deixando o problema para ser resolvido por personagens diferentes, onde cada um dos personagens o resolvem de forma diferente. Desta forma ela busca a atenção do leitor e estimula ainda mais o interesse pelo conteúdo a ser estudado.

O primeiro tópico abordado pela a autora é porcentagem na qual faz uma apresentação de forma prática, seguidas de exercícios resolvidos da mais diversas aplicabilidades.

Tanto para Juros Simples, como para Juros Compostos, a autora utilizou o problema inicial do capitulo buscando assim dar significado ao que foi exposto anteriormente. Em Juro Simples a mesma opta por trabalhar duas fórmulas uma para cálculo do Juro e outra para o Montante o que não ocorre em Juro Composto, já que só se chega a uma única fórmula a do Montante, em ambas as situações elas foram bem demostradas tendo em vista que foram utilizadas tabelas muito bem estruturadas para isso.

Durante as demonstrações das fórmulas, podemos perceber que essas demonstrações interligam diferentes tipos de conteúdos matemáticos, fazendo assim com que o aluno perceba o que há por trás das fórmulas dadas. A autora em detrimento das observações feitas deixa um tópico do capítulo especialmente para relacionar a Matemática Financeira com o estudo das Funções.

Os exercícios resolvidos foram colocados e bem escolhidos em uma ordem que favoreça a compreensão e aguce a capacidade do aluno na hora de manipular as fórmulas obtidas.

Um diferencial deste capitulo, foi que no final do mesmo a autora busca ajudar as pessoas a fazer um planejamento financeira de forma simples, em uma tabela do excel, ajudando como construi-la e sua utilidade em nossas vidas.

Em relação as questões feitas pelo (PNLD, 2015) esta coleção obteve as seguintes classificações: Suficientes; Superficial; Superficial; Superficial; Suficientes; Superficial; Suficientes e Superficial.

4.6 Joamir Sousa Et FTD - Matemática

O capítulo sobre matemática Financeira está no livro II, capítulo 2, com o nome de Matemática Financeira e Estatistica.

O livro traz no início do capítulo um texto muito interessante sobre aplicações financeiras, no qual diferência investimentos de renda fixa com renda variável.

Ao começar a tratar sobre matemática financeira o autor busca relacioná-la com as necessidades atuais, utilizando de comparação para levar o leitor a pensar sobre determinada situação.

O primeiro tópico trata sobre porcentagem, onde ele começa com uma reportagem que faz lembrar o que ela é, logo após sua definição formal, seguida de exemplos, atividades resolvidos sobre matemática financeira e exercicíos entre os quais um deles retiradas da prova do ENEM.

Antes de chegar em Juros o autor trata de Acréscimos e Descontos sucessivos, seguindo o mesmo padrão anterior.

Ao abordar sobre Juros, Joamir o define como sendo aluguel do dinheiro por um determinado período de tempo.

Em Juros Simples não faz nenhuma menção sobre como ele funciona, já parte direto para um exemplo prático no qual, a partir dele, aparecem as fórmulas que são usadas diretamente nas atividades resolvidas, seguidas de várias atividades propostas.

Em Juros Compostos o autor novamente parte de um exemplo prático, mas para se chegar à fórmula utilizá-se de uma demostração interessante, seguida de atividades resolvidas e de exercícios propostos.

No final deste capítulo, tem dois tópicos muito relevantes, sendo um deles Juro e Função, no qual o autor faz uma relação entre Juro Simples e Função Afim, Juro Composto e Função Exponencial; o outro é Sistema de Amortização: SAC e PRICE, onde o enfoque é total no PRICE.

Em relação às questões feitas pelo (PNLD, 2015) esta coleção obteve as seguintes classificações: Suficientes; Suficientes; Suficientes; Suficientes; Superficial; Suficientes; Suficientes e Suficientes.

5 Considerações Finais

Tendo a certeza de que cada vez mais a Matemática Financeira se faz presente em nosso cotidiano, principalmente após as grandes mudanças sociais e econômicas que nosso país atravessou nas últimas décadas, este tema se torna cada vez mais relevante aos alunos do Ensino Médio, pois os mesmos, de alguma forma, participam do sistema financeiro vigente.

Desta forma, mesmo com tantos avanços tecnológicos que, em sua grande maioria, fazem o trabalho dos cálculos financeiros, o mesmo não perde sua importância, já que é necessário que se entenda o que há por traz de cada valor encontrado, pois estes valores irão refletir diretamente no seu bem estar.

Optamos então, por seguir um caminho no qual seja valorizado o raciocínio do estudante, em detrimento do uso demasiado das fórmulas, começando pela parte histórica, pelo fato de que todos esses avanços que se tem hoje resultam de esforço, de trabalho árduo por vários séculos, com isso estimular o estudante a ser proativo do que se está sendo ensinado.

Como hoje, uma das principais formas de operações financeiras são os financiamentos parcelados, elaboramos este trabalho com o intuito de que o estudante tenha condição de saber quantos reais ele pagará de juros nas situações mais diversas e, ao final, ter condição de tomar decisões racionais, não emocionais.

Com a análise dos livros didáticos, percebemos que os mesmos exploram grande parte das suas atividades voltadas para o ensino de Juro Simples e Composto, que são muito importantes, mas não há um aprofundamento dos principais tipos de financiamento do nosso sistema financeiro, e como eles funcionam.

Neste sentido, trabalhar os Sistemas de Amotizações se torna necessário para que possamos tornar nossos alunos mais conscientes e atuantes nesse novo cenário econômico.

Acreditamos que, a partir deste trabalho, a Matemática Financeira possa ser trabalhada de uma forma diferenciada, onde o raciocínio seja mais valorizado que o uso das fórmulas prontas, e quando elas forem usadas que os mesmos saibam os motivos pelos quais estão sendo utilizadas, mostrando ainda mais a sua importância no desenvolvimento matemático.

Referências

ALVES, Alexandre; Oliveira, Letícia Fagundes. **Conexões com a História**, vol.1: ensino médio, 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2014.

APLICADA, Instituto Nacional de Matemática Pura. **Matemática Financeira**. Acesso em 10 de maio de 2013. Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=julho-de-2002.

BRASIL, Banco Central. **A Origem e Evolução do dinheiro**. Acesso em 12 de setembro de 2014. Disponível em: www.bcb.gov.br/htms/origevol,aps.

CONTA, Faz a. **Faz a Conta**. Disponível em: www.fazaconta.com/financiamentos-tabela-sac.htm. Acesso em 8 de janeiro de 2015.

COTRIM, Gilberto. **História Global I**, vol.1: ensino médio, 2ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contextos e Aplicações**, vol.3: ensino médio, 2ª edição. São Paulo: Ática, 2013.

FILHO, Júlio de Mesquita. **Etapas Evolutivas - Os primeiros Hominídeos?**. Disponível em: www2.assis.unesp.br/darwinnobrasil/humanev2a.htm. Acesso em 7 de setembro de 2014.

FINANCEIRO, Calculador. **Calculador Financeiro**. Acesso em 8 de janeiro de 2015. Disponível em: www.calculador.com.br/calculo/financiamento-price.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: Ciência e Aplicações**, Vol. 3: ensino médio, 8ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

JURIDICO, Âmbito. **A cobrança de juros de mora no Brasil**. Acesso em 02 de abril de 2015. Disponivel em: www.ambito-juridico.com.br

LEONARDO, Fabio Martins de. **Conexões com a Matemática**. Vol. 3: ensino médio, 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Exames de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César de Oliveira. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol. 2: 6ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. **Progressões e Matemática Financeira**. 5ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

PAIVA, Manuel Rodrigues. **Matemática**. Vol. 1: 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2013.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Sousa. **Matemática: Ensino Médio**. Vol. 3: 8ª edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

SOUSA, Joamir. **Novo Olhar: Matemática**. Vol. 2: 2ª edição. São Paulo: FTD,2013.