Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Análise e Resolução de Problemas Clássicos de Probabilidade para o Ensino Médio

Marcelo Alessandro Amorim Franco de Sá

Teresina
2015

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

Análise e Resolução de Problemas Clássicos de Probabilidade para o Ensino Médio

Marcelo Alessandro Amorim Franco de Sá

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Orientador
Prof. Dr. João Benício de Melo Neto

Teresina
2015

Sá, Marcelo Alessandro Amorim Franco de.

S111a

Análise e resolução de problemas clássicos de probabilidade para o Ensino Médio / Marcelo Alessandro Amorim Franco de Sá. – Teresina: UFPI, 2015.

114 f.: fig., tab.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí - UFPI, Pós-Graduação em Matemática. Teresina, 2015.

Orientador: Prof. Dr. João Benício de Melo Neto.

1. Probabilidade. 2. Ensino. 3. Problemas Clássicos. 4. Problema de Monty Hall. 5. Probabilidade Geométrica I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Leila Lemos de Oliveira CRB - 3/1319

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Análise e Resolução de Problemas Clássicos de Probabilidade para o Ensino Médio, defendida por **Marcelo Alessandro Amorim Franco de Sá** em 31/08/2015 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

João Benicio de Melo Neto

Prof. Dr. João Benicio de Melo Neto
Presidente da Banca Examinadora

Valmária R. S. Ferraz

Profª. Drª. Valmária Rocha da Silva Ferraz
Examinador Interno

Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira
Examinador Interno

Alvaro Pereira de Carvalho

Prof. Me. Álvaro Pereira de Carvalho
Examinador Externo

Dedico esta dissertação a Santíssima Trindade, a Nossa Senhora, a meus pais, irmãos, familiares, amigos e professores.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por sua infinita bondade em todos os dias de minha existência.

Aos meus pais, Celé *(in memoriam)* e Toinha, pelo amor e dedicação incondicionais a seus filhos e pelo exemplo de vida pautada nos ensinamentos e valores cristãos.

A todos os meus familiares, pela solidez de princípios, carinho e apoio na construção dessa realização.

A todos os meus amigos, em especial neste momento, aos companheiros da turma 2013 do PROFMAT, pelas grandes contribuições nos momentos mais difíceis do mestrado e pela amizade sincera.

À Sociedade Brasileira de Matemática, por possibilitar uma formação consistente e relevante ao professor de Matemática, de maneira integrada e articulada com o exercício da docência, sobretudo no Ensino Básico.

Aos professores e coordenadores do PROFMAT, pelos conhecimentos ministrados, pela compreensão e disponibilidade, essenciais para que pudéssemos alcançar essa conquista, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. João Benício de Melo Neto, por acreditar sempre na nossa caminhada na Matemática e pela disponibilidade na condução da orientação dessa dissertação.

A toda comunidade educativa do Colégio Sagrado Coração de Jesus e demais colégios da Rede Saviniana de Educação, Irmãs, Coordenadoras, Professores e Funcionários, pelo companheirismo, confiança e compreensão nas dificuldades.

À Congregação das Irmãs dos Pobres de Santa Catarina de Sena e à Associação Norte-Brasileira de Educação e Assistência Social (ANBEAS), pela confiança e oportunidade a nós concedidas e pelas grandes realizações sociais e educativas em diversas partes do mundo.

A todos os meus alunos e ex-alunos, pelo respeito, paciência e muita generosidade em tantas situações dentro e fora da sala de aula.

Ao Clube Atlético Mineiro e à sua fanática torcida, pela felicidade proporcionada em suas magníficas vitórias e seus épicos títulos.

Àqueles com quem tive a honra e a graça de conviver e que estão na casa do Pai, felizes e conosco neste momento.

A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano.
(Pierre Simon de Laplace)

Todas as vitórias ocultam uma abdicação.
(Simone de Beavouir)

Não existe grandeza onde não há simplicidade, bondade e verdade.
(Leon Tolstoi)

Mire a Lua. Mesmo se você errar, você ficará entre as estrelas.
(Les Brawn)

Resumo

O presente trabalho tem por escopo apresentar um material consistente e motivador a professores e estudiosos em geral, acerca da Probabilidade, um dos mais interessantes e relevantes ramos da Matemática. A escolha do tema se justifica pela constatação da pouca exposição nas salas de aula do Ensino Médio de nosso país, de problemas clássicos importantes para um melhor entendimento dos conceitos, propriedades e teoremas ínsitos à Teoria das Probabilidades. Assim, após breve contextualização histórica, em que se evidenciarão as contribuições de eminentes matemáticos para a compreensão dos experimentos aleatórios, e da fundamentação teórica do tema em tela, serão apresentadas e analisadas resoluções surpreendentes e fascinantes de problemas desafiadores, distintos dos normalmente exibidos no Ensino Básico, tais como o Problema de Monty Hall e os problemas de Probabilidade Geométrica. Tenciona-se que este trabalho propicie maior consistência e aprimoramento da aprendizagem da Probabilidade, despertando e ampliando o interesse pelos fenômenos aleatórios, favorecendo a tomada de decisões em situações cotidianas, encontradas nas mais diversas áreas do conhecimento e, portanto, de grande relevância para a humanidade.

Palavras-chave: Probabilidade. Ensino. Problemas Clássicos. Problema de Monty Hall. Probabilidade Geométrica.

Abstract

This work has the scope to present a consistent and motivating material to teachers and students in general, about the probability, one of the most interesting and relevant branches of mathematics. The choice of this theme is justified by the finding of little exposure in high school classrooms of our country, of important and classic problems to a better understanding of the concepts, properties and theorems related to the Theory of Probability. Therefore, after a brief historical context, in which it will be shown the contributions of eminent mathematicians to the understanding of random experiments, and the theoretical background of the theme, it will be presented and analysed surprising and fascinating resolutions of challenging problems, unlike those normally shown in basic education, such as the Monty Hall problem and Geometric Probability problems. It is intended that this work provides greater consistency and improvement of the learning of probability, awakening and expanding the interest in random phenomena, found in several areas of knowledge and therefore of great importance for humanity.

Keywords: Probability. Education. Classic Problems. Monty Hall Problem. Geometric Probability.

Lista de Figuras

1.1 Astrágalos 15
1.2 O livro dos jogos de azar 17

2.1 Diagrama de árvore do exemplo 2 34
2.2 Diagrama de árvore do exemplo 3 35
2.3 Árvore de probabilidades 37
2.4 Árvore de probabilidades da aplicação 1 39
2.5 Árvore de probabilidades da aplicação 2 40

3.1 Região A contida em uma região B 52
3.2 Segmentos de reta AB e CD. 53
3.3 Triângulo ABC inscrito na circunferência λ. 55
3.4 Circunferência λ de centro O, diâmetro AB e corda CD. 55
3.5 Corda CD perpendicular ao segmento OM. 56
3.6 Região destacada do quadrado concernente a $|x - y| \leq \frac{1}{6}$. 58
3.7 Segmento AB dividido em três partes. 58
3.8 Triângulo formado pelos pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. 59
3.9 Triângulo medial destacado. 59
3.10 Monty Halperin. 61
3.11 Problema dos bodes. 63
3.12 Gráfico do Problema dos Aniversários. 67
3.13 Apresentação inicial da Mega-Sena no site www.loterias.caixa.gov.br 68
3.14 Volante da Mega-Sena 69

Lista de Quadros

1.1 Frequência das faces no jogo de Tali. 16

2.1 Espaço amostral no lançamento de dois dados. 30

3.1 Soma dos números das faces igual a 9. 49
3.2 Soma dos números das faces igual a 10. 50
3.3 Probabilidade aproximada em função de n. 67
3.4 Valores cobrados na Mega-Sena em relação à quantidade de números jogados. 70
3.5 Destinação percentual dos recursos. 73
3.6 Probabilidades de acertos na Mega-Sena em relação à quantidade de números jogados. 78
3.7 Quantidade de prêmios a receber acertando. 87
3.8 Quantidade de prêmios a receber acertando 4 números. 87
3.9 Quantidade de prêmios a receber acertando 5 números. 88
3.10 Quantidade de prêmios a receber acertando 6 números na Mega-Sena. . . . 88

Sumário

Resumo **7**

Abstract **8**

Introdução **13**

1 Breve Contextualização Histórica da Probabilidade **15**

2 Noções Fundamentais de Probabilidade **22**

2.1 Experimento Determinístico X Experimento Aleatório 22
2.2 Espaço Amostral 23
2.3 Evento 24
2.4 Frequência Relativa 25
2.5 Definição Clássica de Probabilidade 26
2.6 Probabilidade Condicional 33
2.7 Teorema da Probabilidade Total 36
2.8 Teorema de Bayes 37
2.9 Independência de Eventos 41
2.10 Distribuição Binomial 42

3 Problemas Clássicos **45**

3.1 Problema dos Pontos (Problema da Divisão das Apostas) 45
3.1.1 Introdução 45
3.1.2 Problema dos Pontos 46
3.2 Problema do grão-duque da Toscana Para Galileu Galilei 47
3.2.1 Resolução 47
3.3 Problema dos Dados de Chevalier de Méré 51
3.3.1 Resolução 51
3.4 Problemas envolvendo Probabilidade Geométrica 52
3.4.1 Introdução 52
3.4.2 Paradoxo de Bertrand 54

3.4.3 Problema do Encontro . . . 57
3.4.4 Problema da divisão de um segmento em três partes para formar um triângulo . . . 58
3.5 O Problema de Monty Hall . . . 60
3.5.1 Introdução . . . 60
3.5.2 Resoluções do Problema de Monty Hall . . . 62
3.6 O Problema dos Aniversários e sua Generalização . . . 66
3.6.1 Introdução . . . 66
3.6.2 Resolução . . . 66
3.6.3 Generalização . . . 67
3.6.4 Resolução . . . 68
3.7 Problemas de Probabilidade envolvendo a Mega-Sena . . . 68
3.8 Problema de jogar tudo de uma vez ou aos poucos . . . 89
3.8.1 Introdução . . . 89
3.8.2 Resolução . . . 90

4 Considerações Finais **92**

Anexo **93**
Cartas Pascal - Fermat . . . 93

Referências **111**

Introdução

As ideias intuitivas de probabilidades fazem parte do dia a dia da humanidade. São inúmeros os fenômenos aleatórios (aqueles que produzem resultados diferentes quando repetidos sob as mesmas condiçoes) presentes na vida das pessoas e na natureza de modo geral, desde brincadeiras despretensiosas presentes em alguns jogos, até situações complexas que envolvem diversos fatores, como genética, análises estatísticas, avaliações econômicas e previsões meteorológicas, entre outros.

A gênese da palavra probabilidade está associada ao termo *probabilis*, posteriormente originando *probare*, que significa "provar", "testar". Como muitos experimentos no cotidiano das pessoas não são determinísticos, busca-se quantificar as situações de incerteza vivenciadas, encontrando as probabilidades inerentes aos possíveis resultados de tais situações, proporcionando um delineamento de estratégias para uma melhor tomada de decisões, uma das principais razões para o ensino de Probabilidade.

"A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa *modelos* que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios". (MORGADO et. al, 2004, p.119).

A presente dissertação, dividida em quatro capítulos, tem por objetivo precípuo apresentar, aos alunos e professores do Ensino Médio, em especial, problemas interessantes e fascinantes de Probabilidade e as análises das suas resoluções, visando à ampliação da compreensão do caráter aleatório e não determinístico de fenômenos naturais e sociais, uma das competências da área de Matemática na Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), principal forma de ingresso ao Ensino Superior no Brasil.

No primeiro capítulo deste trabalho, apresentar-se-á breve histórico do desenvolvimento da Probabilidade, revelando as magníficas contribuições de seus maiores expoentes, desde os seus primórdios, com os jogos de azar, até a concepção da moderna Teoria das Probabilidades.

No capítulo 2, serão explanados os principais tópicos concernentes ao estudo das probabilidades no Ensino Médio, enfatizando as definições, os teoremas e propriedades mais importantes, bem como exemplos que possibilitem aplicar tais conhecimentos na compreensão e na resolução de situações-problema.

Posteriormente, no capítulo 3, serão explicitadas diversas questões clássicas de Probabilidade, com suas soluções às vezes surpreendentes para a maioria das pessoas e que despertam, em muitos educandos, admiração e fascínio pelo tema em questão. Entre esses problemas, podem ser destacados: o da divisão dos pontos, o de Monty Hall (problema dos bodes), alguns problemas famosos de Probabilidade Geométrica, como o do encontro e o paradoxo de Bertrand, e os que envolvem cálculos probabilísticos e gerais pertinentes à principal loteria do país: a Mega-Sena.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN+, p.112)

No capítulo IV, seguem as considerações finais acerca deste trabalho, destacando a importância do estudo da Probabilidade para o desenvolvimento de competências e habilidades relevantes para a formação holística do educando, e, dessa forma, contribuir para melhor atuação na sociedade.

1 Breve Contextualização Histórica da Probabilidade

São muitos os relatos dos historiadores acerca do fascínio que os jogos de azar exerceram (e ainda exercem) sobre a humanidade desde os tempos mais remotos. É difícil precisar ao certo sua verdadeira origem. Há provas arqueológicas da prática do jogo realizado com o astrágalo (feito de ossos de animais e que tinham seis lados, com apenas quatro deles estáveis o suficiente para fixação no chão ao cair) há pelo menos 3.200 anos em algumas partes da Ásia e no Egito, sendo depois difundido para outras partes do mundo.

Figura 1.1: Astrágalos

Um dos jogos realizados com o uso de astrágalos é o Tali, que funcionava como um jogo de dados. Segundo Viali (apud MELO e REIS, 2011, p.2). As faces maiores eram numeradas com 3 e 4 e as duas menores por 1 e 6. Alguns experimentos realizados chegaram à conclusão de que as frequências de ocorrências das quatro faces do osso do jogo de Tali apresentavam os seguintes resultados:

Quadro 1.1: Frequência das faces no jogo de Tali.

Faces	1	3	4	6
Frequências	0,12	0,37	0,39	0,12

Consoante M. G. Kendal (apud SILVEIRA, 2001), "A Humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa... ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não-casuais".

Os matemáticos gregos, além das dificuldades de não possuírem uma aritmética fácil de ser trabalhada, não se interessaram em entender os processos aleatórios. Para eles, a vontade dos deuses era o fator decisivo nas diversas situações da vida humana, incluindo os jogos de azar. Adoravam de tal forma a Geometria, seus axiomas e teoremas, que acabaram não desenvolvendo a probabilidade.

Os romanos, por sua vez, preocupados com aspectos mais práticos, buscaram compreender um pouco mais a aleatoriedade, com destaque para o magistrado e estadista romano Marco Túlio Cícero (106 a.C. - 43 a. C) que, segundo Mlodinow (2009, p. 40), "talvez tenha sido o maior defensor da probabilidade na Antiguidade. Ele a empregou para argumentar contra a interpretação habitual de que o êxito nas apostas se devia à intervenção divina [...]" acrescentando que "o principal legado de Cícero na área da aleatoriedade foi o termo que usou, *probabilis*, que acabou por originar o termo empregado atualmente". Para Cícero, "a probabilidade é o próprio guia da vida" (WEAVER, 1982, apud MLODINOW, 2009, p. 40).

A inserção da probabilidade como peça importante no *Digesto*, código de leis romanas no período do imperador romano Justiniano, no século VI, revela uma maior importância dada pelos romanos à probabilidade, sobretudo quando se compara com os gregos. Não obstante esse fato, muitos equívocos foram cometidos na aplicação da matemática às leis romanas, como o caso clássico de duas meias provas valerem uma prova.

Até o século XVI, não houve um avanço significativo no desenvolvimento de uma teoria que delineasse com mais consistência a probabilidade. Houve, na melhor das hipóteses, a realização de enumerações de possibilidades em jogos, como se verifica, v.g., na obra do escritor italiano Dante Alighieri (1265-1321), A *Divina Comedia*, quando do lançamento de dois ou três dados e seus possíveis resultados e num jogo religioso praticado pelo bispo belga Wibold que, por volta do ano 960, enumerou todas as possibilidades no lançamento de 3 dados e associou uma determinada virtude a cada um dos resultados.

A denominada Teoria das Probabilidades teria iniciado, para alguns estudiosos, com Gerolamo Cardano (1501 - 1576) com a obra *Liber de ludo Aleae* (O livro dos jogos de azar), escrito por volta do ano 1526 e só publicado em 1663, com 32 capítulos curtos, tratado de jogos de dados, jogos de cartas, gamão e astrágalos, além da ideia do que, modernamente, se convencionou denominar de espaço amostral.

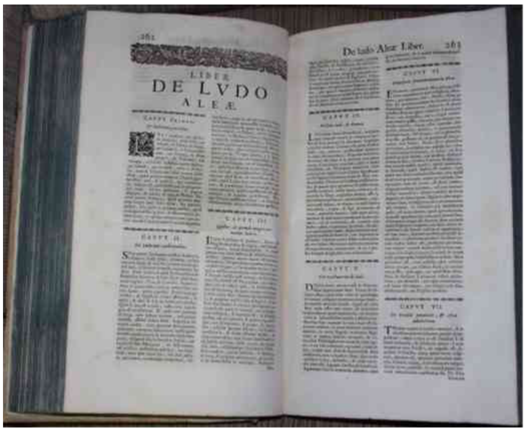


Figura 1.2: O livro dos jogos de azar

Cardano foi um médico conhecido em toda a Europa, além de professor de medicina na Universidade de Pavia. Foi também um astrólogo famoso, que escreveu mais de uma centena de livros sobre diversos assuntos, entre os quais a Matemática, a Filosofia, a Medicina e ciências. Escreveu um tratado sobre Álgebra, denominado *Ars magna* (A grande arte), em que apresenta a solução completa da equação de terceiro grau, mostra que a equação de quarto grau é solúvel por radicais (GUEDJ, 2003, p. 279), e apresenta a primeira descrição clara dos números negativos (MLODINOW, 2009).

Ressalte-se, ainda, que Cardano teve uma vida bastante atribulada, com algumas situações em que os relatos dos estudiosos são contraditórios. Entretanto, muitos historiadores são unânimes em considerar que os três filhos de Cardano trouxeram seus maiores problemas na vida. Seu filho mais novo, Aldo, por exemplo, era uma pessoa violenta, que acabou se tornando um torturador profissional e carrasco público da cidade de Bolonha, na Itália, Aldo denunciou Cardano às autoridades da Inquisição por alguns posicionamentos, levando-o à prisão por algum tempo. Arruinado financeiramente, andava maltrapilho nas ruas de Roma, vindo a falecer em 1576, na miséria e no esquecimento.

Apesar de alguns erros cometidos na obra O livro dos jogos de azar, Cardano contribuiu significativamente para o desenvolvimento da probabilidade, deixando seu nome na história da Matemática.

Johannes Kepler (1571 - 1630), astrônomo e matemático alemão, na obra *De Stella nova in pede Serpentarii*, publicada em 1606, faz algumas ponderações sobre probabilidades em relação ao aparecimento de uma estrela.

Galileu Galilei (1564 - 1642), matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano, produziu um artigo sobre jogos de azar denominado "*Sopra Le Scoperte dei Dadi*" (sobre o jogo de dados), no intuito de responder a um pedido do grão-duque da Toscana acerca de um problema num jogo de dados. Esse problema será comentado e resolvido posteriormente neste trabalho.

> Os italianos quinhentistas foram os primeiros a fazerem cálculos probabilísticos. Precisando comparar frequências de ocorrências e estimar ganhos em jogos de azar, eles foram além da mera enumeração de possibilidades. Contudo, limitaram-se a resolver problemas concretos, ainda não havia produção de teoremas.(SILVEIRA, 2001).

No ano de 1654, o nobre Antonio Gombaud (1607-1684), cujo título era Chevalier de Méré, solicitou de Blaise Pascal (1623 - 1662) a solução para um problema famoso, conhecido como problema dos pontos ou da divisão das apostas, que foi tratado inicialmente pelo Frei Luca Pacioli (1445 - 1517), italiano, professor e frade franciscano, autor da obra "*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*", publicada em 1494. Pacioli não chegou ao resultado correto, bem como outros matemáticos posteriormente, entre os quais o italiano Niccolo Fontana (1499 - 1557), conhecido como Tartaglia, grande matemático com diversas contribuições em vários campos do conhecimento, dentre as quais Álgebra, Geometria, Aritmética e Balística. Tartaglia publicou, em 1556, quatro partes da sua maior obra, "*Generale trattato di Numeri e Misure*", de um total de seis partes, a quinta parte saiu pouco depois de sua morte e a sexta, "que devia tratar da resolução da equação de terceiro grau nunca foi impressa. Ninguém jamais achou vestígio dela" (GUEDJ, 2003, p. 278).

Usualmente o problema dos pontos é apresentado nas seguintes versões:

"Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?" (MÉRÉ, apud, BOYER, 2003, p. 250). A solução dessa versão será apresentada no anexo dessa dissertação.

"Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?" (PACIOLI, apud, SILVEIRA, 2001). Esta versão será resolvida posteriormente nesta dissertação.

Após refletir sobre o problema proposto pelo Chevalier de Méré, Pascal inicou uma troca de correspondências com Pierre de Fermat (1601 - 1665). Para muitos estudiosos, a Teoria das Probabilidades começa verdadeiramente com essa troca de cartas, acerca do problema dos pontos. Nas sete cartas trocadas entre eles, que serão apresentadas no anexo dessa dissertação traduzidas, verifica-se uma sistematização procedimental para o cálculo de probabilidades e a solução para o problema com abordagens diferentes. Essas cartas foram publicadas no ano de 1679, em Toulouse.

Pascal foi um matemático francês que realizou importantes estudos em várias áreas, em especial na Matemática e na Física, com grandes contribuições à humanidade. "*Essay*" (sobre seções cônicas), "*Traité du triangle arithmétique*" (sobre o triângulo aritmético que normalmente leva seu nome, embora se saiba que o triângulo de Pascal já era conhecido muitos séculos antes, por hindus, árabes e chineses),"*Traité de l´Equilibre des Liquers*" (em que foi apresentado o principio de Pascal, tratando da pressão exercida sobre os fluidos) e "*Pensées*" (sobre o que atualmente se denomina de esperança matemática) são algumas de suas magníficas obras. Inventou ainda, a Pascaline, a primeira calculadora que fazia as operações fundamentais e resolveu um problema envolvendo jogo de dados para Méré, que será resolvido *a posteriori*.

Pierre de Fermat, considerado por muitos doutrinadores o maior matemático amador de todos os tempos, era graduado em Educação e bacharel em Direito. Trabalhou como oficial do governo em Toulouse na corte criminal. Suas maiores contribuições são nas áreas de Teoria dos Números, Geometria Analítica, Probabilidade e Cálculo. Deixou escrito na margem de um livro de aritmética de Diofanto, um "resultado" que ficou conhecido como "O Último Teorema de Fermat", que ficou por mais de 350 anos em aberto, até que foi definitivamente provado por Andrew Wiles em 1994.

Segundo Boyer (2003, p. 250), "Embora nem Pascal nem Fermat escrevessem seus resultados, Huygens em 1657 publicou um pequeno folheto, *De ratiociniis in ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de dados) que foi estimulado pela correspondência entre os franceses". Christiaan Huygens (1629-1695) foi um matemático holandês que desenvolveu grandes trabalhos também na área da Física, sobretudo em Mecânica.

Depois de Pascal e Fermat, a Teoria das Probabilidades passou um período sem grandes avanços, até se perceber a sua utilidade em situações como taxas de mortalidade, prêmios de seguros, etc. "São inúmeras, ainda no século XVIII, as publicações estatísticas sobre impostos, doenças, condenações, etc., organizadas pelos governos, que viram logo o poder deste instrumento social." (MORGADO et al, 2004, p.7)

No início do século XVIII, em 1713, foi publicado um importante tratado sobre a Teoria das Probabilidades, denominado "*Ars Conjectandi*", de autoria do matemático suíço Jacob Bernoulli (1654-1705). Seu sobrinho, Nicolaus Bernoulli (1687-1759) foi quem finalizou a obra, mas muito jovem e não se sentindo preparado suficientemente, levou cerca de oito anos para publicá-la. Nessa obra é apresentado um poderoso teorema, o teorema de Bernoulli, mais conhecido como Lei dos Grandes Números. Consoante Morgado e outros (2004, p.8) "Este teorema foi a primeira tentativa de deduzir medidas estatísticas a partir de probabilidades. Ele afirma, por exemplo, que se dois eventos são igualmente prováveis eles terão sido obtidos aproximadamente o mesmo número de vezes. O teorema permite também deduzir qual a probabilidade de cada um dos eventos acontecer, sabendo como se comportaram em um grande número de experimentos. A Lei dos Grandes Números deu origem a discussões conceituais ou filosóficas sobre o conceito de probabilidade". Seu nome está também associados aos processos que apresentam dois resultados possíveis, chamados "sucesso" e "fracasso", em problemas de distribuição binomial que serão oportunamente apresentados.

Outro matemático muito importante para a evolução da Probabilidade foi Abraham De Moivre (1667 - 1754), matemático francês que publicou, entre outras obras importantes, *Philosophical Transactions*, em 1711, sobre as leis da aleatoriedade, e um tratado denominado "*The Doctrine of Chances*" (A Doutrina do Acaso) em 1718, sobre probabilidades, em que desenvolve a teoria das sucessões recorrentes e a utiliza para resolver problemas.

O matemático e estatístico inglês Thomas Bayes (1702 - 1761) contribuiu com a Teoria das Probabilidades com um ensaio importante denominado "*An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*", revelado postumamente em 1763 e publicado em 1764. Neste ensaio, Bayes procura analisar, comparar e calcular as probabilidades das causas de um evento determinado. É o responsável direto por evidenciar a conexão entre eventos não independentes, denominando-a probabilidade condicional. "A Teoria de Bayes trata essencialmente do que ocorre com a probabilidade de ocorrência de um evento se outros eventos ocorrerem, ou dado que ocorram." (MLODINOW, 2009, p.116).

Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), cientista e matemático francês, escreveu diversos textos sobre probabilidades e as publicou em duas grandes obras: "*Théorie analytique des probabilités*" (Teoria Analítica das Probabilidades), em 1812, e "*Essai philosophique des probabilités*" (Ensaio Filosófico sobre Probabilidades), em 1814. A definição clássica de probabilidade, que se pode expressar como sendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis é atribuída a Laplace. Desenvolveu sua Teoria das Probabilidades em princípios consistentes e bem delineados. Suas contribuições são vastas e altamente relevantes na Física e na Estatística por exemplo. Segundo Boyer (2003, p. 340), "A teoria das probabilidades deve mais a Laplace que a qualquer outro matemático".

Siméon-Denis Poisson (1781 - 1840) foi um grande pesquisador com mais de trezentas publicações ao longo de sua vida. Generalizou a Lei dos Grandes Números de Bernoulli e para descrever as probabilidades do número de ocorrências num campo ou intervalo de tempo, criou a conhecida distribuição que leva seu nome, a distribuição de Poisson, muito utilizada na Estatística e, consequentemente, em várias ciências.

Segundo Junqueira (2015, p.4), "Na segunda metade do século XVIII e primeira metade do século XIX a probabilidade adquiriu uma forma concisa e sistemática. Laplace, em 1812, publicou importante obra Teoria Analítica das Probabilidades, sistematizando os conhecimentos da época e produzindo a Lei de Laplace. Destaca-se também a participação de Gauss (1777 - 1855), no aprofundamento da Lei Normal e a de Poisson na sua Teoria da lei dos grandes números e da lei de repartição. No século XIX e princípio do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento, exato e fiável do conhecimento. Surge daí a célebre escola de San Petersburgo, com grandes nomes como Tchébychev (1821

- 1894), Markov (1856 - 1922) e Liapounav (1857 - 1918)."

No século XX, destacam-se os matemáticos Félix Edouard Justin Émile Borel (1871 - 1956) e Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987). Émile Borel, matemático francês, publicou duas obras voltadas à Probabilidade: "*Elements de La théorie des probabilités*" (em 1909) e *Le Hasard* (em 1914), contribuindo para a axiomatização do cálculo das probabilidades. Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987), matemático russo, por sua vez, deu a consistência e o rigor à Teoria da Probabilidade a partir de axiomas fundamentais, muito relevantes para a Estatística e a teoria da informação, entre outras áreas do conhecimento. Uma de suas principais obras é *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Fundamentos de Teoria das Probabilidades) em que fornece os alicerces para a axiomatização da teoria das probabilidades e apresenta a teoria da medida, que revoluciona o cálculo de integrais. Publicou também um importante artigo denominado "*Métodos Analíticos na Teoria da Probabilidade*" em 1931. É considerado um dos maiores matemáticos do século XX.

Muitos outros sublimes matemáticos escreveram sobre problemas envolvendo probabilidade, dentre os quais podem ser citados, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), alemão, um dos inventores do Cálculo; Leonhard Euler (1707 - 1783), suíço, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, com inúmeras contribuições em praticamente todas as áreas da Matemática; O matemático e escritor francês Georges-Louis Leclerc (1707 - 1788), conhecido como Conde de Buffon, que propôs o famoso problema da agulha de Buffon em 1777, que consiste em determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento x atravessar um feixe de paralelas, distante d unidades uma da outra, sendo $d \geq x$ e considerando o lançamento da agulha um experimento aleatório; Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783), matemático francês, famoso pelo princípio em Mecânica que leva seu nome, pelo teorema ligado aos polinômios e pelo estabelecimento das equações a derivadas parciais de segunda ordem; Joseph Louis François Bertrand (1822 - 1900), matemático francês, famoso por paradoxos que levam seu nome (apresentados no livro *Cálculo de probabilidades*, em 1889, e que serão abordados neste trabalho), com várias obras e artigos publicados sobre diversos assuntos, principalmente Matemática e Física; e Jules Henri Poincaré (1854-1912), célebre matemático francês famoso pela conjectura de Poincaré, um dos sete problemas matemáticos do milênio, que foi resolvida pelo russo Grigori Perelman, recentemente.

2 Noções Fundamentais de Probabilidade

Após a exposição dos aspectos principais relacionados ao contexto histórico que cinge a Probabilidade, serão apresentadas a seguir, as definições, as propriedades essenciais e a análise de alguns problemas motivacionais gerais com suas resoluções, possibilitando uma revisão teórica do assunto em questão no âmbito do Ensino Médio.

2.1 Experimento Determinístico X Experimento Aleatório

Um experimento é considerado determinístico quando repetido em condições semelhantes conduz a resultados essencialmente idênticos. Um experimento é considerado aleatório, quando repetidos sob as mesmas condições, produzem geralmente resultados diferentes. No filme "*Indecent Proposal*" (Proposta Indecente), uma produção de 1993 dirigida por Adrian Lyne, um casal (David e Diana Murphy) passa por sérios problemas financeiros e decide tentar a sorte em Las Vegas. O bilionário John Gage, personagem de Robert Redford, interessa-se por Diana, personagem vivida por Demi Moore, e oferece um milhão de dólares ao casal para passar a noite com ela. Após a aceitação da proposta, há um momento em que John faz o lançamento de uma moeda, afirmando ser sua "moeda da sorte". John diz a Diana que, caso dê cara no lançamento, eles ficarão no iate em que se encontram; dando coroa, eles retornariam imediatamente ao hotel onde estavam hospedados em Las Vegas e ele entregaria ao casal Murphy um milhão de dólares, conforme combinado anteriormente. Tal atitude passa a ideia inicial de um processo aleatório, mas na realidade, o experimento em tela se revela na parte final do filme, um experimento determinístico, uma vez que a moeda em questão possui duas caras em suas faces!!!

A Probabilidade, em consonância com o que foi externado no início desse trabalho, tem especial interesse nos experimentos aleatórios. Assim, no exemplo do filme "*Indecent Proposal*", se a moeda lançada por Gage fosse honesta (não viciada), esse lançamento seria um experimento aleatório. São inúmeros os exemplos de experimentos aleatórios, entre os quais podem ser citados:

- Retirar uma carta de um baralho normal e verificar o seu naipe;
- Lançar um dado e observar o número da face superior;
- Retirar uma bola ao acaso de uma urna contendo 5 bolas pretas e 4 bolas brancas e observar sua cor;
- Comprar um aparelho de DVD e observar se o leitor do DVD funciona ou não após 1500 horas de uso;
- Fazer uma rifa com 100 "pontos" e sortear um deles.

2.2 Espaço Amostral

O espaço amostral é o conjunto constituído por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Indicar-se-á por Ω esse conjunto. Abaixo, alguns exemplos de espaços amostrais associados a experimentos aleatórios.

- Lançar um dado não viciado e verificar o número da face superior.

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Lançar uma moeda e observar a face de cima.

  $\Omega = \{K, C\}$, onde K representa cara e C representa coroa.

- Um lote de remédios tem 80 caixas. Verificar o número de caixas, uma a uma, que apresenta algum defeito.

  $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 79, 80\}$.

- Lançar uma moeda três vezes e observar a sequência obtida de caras e coroas.

  $\Omega = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (K, C, C), (C, K, K), (C, K, C), (C, C, K),$
  $(C, C, C)\}$.

- Entre 3 apreciadores do bom futebol, Canuto (C), Abías (A) e Márcio (M), dois são escolhidos para assistir a um jogo do Atlético Mineiro, no estádio Independência, no Horto.

  $\Omega = \{\{C, A\}, \{C, M\}, \{A, M\}\}$.

- Um dado honesto é lançado até que apareça o número 5 na face superior pela primeira vez. Observa-se em que lançamento isso acontece.

  $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Neste último exemplo, evidencia-se que o espaço amostral é um conjunto infinito, ao passo que nos demais exemplos o espaço amostral é um conjunto finito.

É importante salientar que, em muitas situações, é absolutamente inviável elencar todos os componentes presentes no espaço amostral. Diante disso, faz-se necessário utilizar os princípios e os métodos de contagem delineados pela Análise Combinatória, conforme será visto neste trabalho.

2.3 Evento

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral Ω de um experimento aleatório. "Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento" (MORGADO; CARVALHO, 2014, p. 146). A seguir, alguns exemplos de eventos, a partir de experimentos aleatórios com seus respectivos espaços amostrais, representados por letras maiúsculas do alfabeto.

- Um dado é lançado e verifica-se o número da face superior.

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  Evento G: ocorrência de número par.

  Evento A: ocorrência de número primo maior que 2.

  Evento L: ocorrência de número quadrado perfeito maior que 4.

  Evento O: ocorrência de número inteiro positivo menor que 7.

  Desse modo, tem-se que

  $$G = \{2, 4, 6\};\ A = \{3, 5\};\ L = \emptyset.;\text{ e } O = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega.$$

  O evento L, acima, é um evento que jamais ocorre e, por conseguinte, é denominado evento impossível. O evento O, por sua vez, acontece sempre e por essa razão é chamado de evento certo.

- De uma urna contendo 3 bolas brancas (B) e 5 bolas pretas (P) retiram-se, sucessivamente e sem reposição, 3 bolas e são observadas as cores das bolas.
  $\Omega = \{(B, B, B), (B, B, P), (B, P, B), (B, P, P), (P, B, B), (P, B, P), (P, P, B),$
  $(P, P, P)\}$.
  Sejam os eventos:

Evento X: ocorrência de exatamente uma bola preta.

Evento Y: ocorrência de pelo menos duas bolas brancas.

Evento Z: ocorrência de, no máximo, uma bola branca.

Assim, tem-se que;

$X = \{(B, B, P), (B, P, B), (P, B, B)\}$;
$Y = \{(B, B, B), (B, B, P), (B, P, B), (P, B, B)\}$;
$Z = \{(B, P, P), (P, B, P), (P, P, B), (P, P, P)\}$.

Tendo em vista que eventos são subconjuntos do Espaço Amostral, as operações básicas entre conjuntos são verificadas normalmente para eventos. Assim, tem-se:

a) Reunião (União) de dois eventos A e B, denotada por $A \cup B$, corresponde ao evento que ocorre se ao menos um deles ocorre.

b) Interseção de dois eventos A e B, denotada por $A \cap B$, é o evento que ocorre quando ambos ocorrem.

c) Diferença de dois eventos A e B, denotado por $A \setminus B$, é evento que ocorre se, e somente se, o evento A ocorre, mas não ocorre o evento B.

d) Complementar de um evento A, denotado por A^C ou $\bar{A}$, corresponde ao evento que ocorre quando A não ocorre. No exemplo da urna acima, os eventos Y e Z são ditos complementares, uma vez que $Y \cup Z = \Omega$.

e) Diz-se que um evento A implica o evento B, $A \subset B$, se para todo $x \in A$, então $x \in B$. Nesta situação, a ocorrência de A leva à ocorrência de B inevitavelmente.

f) Diz-se que A e B são eventos iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$.

g) Diz-se que A e B são eventos mutuamente exclusivos (ou excludentes), se $A \cap B = \emptyset$, ou seja, eles não podem ocorrer simultaneamente.

h) O evento $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ corresponde ao evento que ocorre quando ao menos um dos eventos A_i ocorre, em que $i = 1, 2, 3, \ldots$.

i) O evento $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ é o evento que ocorre quando todos os eventos A_i ocorrerem, com $i = 1, 2, 3, \ldots$.

2.4 Frequência Relativa

Seja um experimento aleatório de espaço amostral $\Omega = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Considere que o experimento seja repetido n vezes, nas mesmas condições, e que sejam anotados os resultados do número de vezes que o evento p_i ocorreu nas n experiências realizadas. Sendo n_i o número de vezes em que o evento p_i ocorreu, denomina-se frequência relativa do evento p_i ao número $f_i = \dfrac{n_i}{n}$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Assim, se um dado for lançado 50 vezes e o número 5 sair 8 vezes, então a frequência relativa desse evento (sair o número 5) será $f = \dfrac{8}{50} = 0,16 = 16\%$.

Ressalte-se, por oportuno, que repetindo o experimento aleatório um número grande de vezes, nas mesmas condições e de modo que o resultado de um independa dos resultados anteriores obtidos, a frequência relativa aproxima-se do valor real da probabilidade. Tal constatação é encontrada na denominada Lei dos Grandes Números, já mencionada anteriormente neste trabalho.

> Buffon, no século XVIII, realizou 4.040 lançamentos de uma moeda e observou a ocorrência de 2048 caras. A frequência relativa observada foi de 0,5064. Karl Pearson fez 24.000 lançamentos de uma moeda, tendo obtido frequência relativa de 0,5005 para caras. (DANTAS, 2000, p. 26).

2.5 Definição Clássica de Probabilidade

> A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis. (LAPLACE apud MORGADO, 2004, p. 118).

Em conformidade com o relato histórico acima, presente na obra Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades, Laplace define probabilidade de um evento X como um número

$$P(X) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

O modelo clássico de Laplace corresponde a um modelo equiprobabilístico entre os elementos que compõem o espaço amostral. Assim, se o espaço amostral tem k elementos e se cada evento unitário tem a mesma probabilidade de acontecer, atribui-se a cada evento unitário a probabilidade $\dfrac{1}{k}$.

> Em geral, sejam Ω um conjunto com n elementos, $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, e p_1, p_2, ..., p_n, n números não-negativos e tais que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Definamos $P(\{w_i\}) = p_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e, em geral, para $A \subset \Omega$, $P(A) =$ soma dos $P(\{w_i\})$ com $w_i \in A$ (ou seja $P(A)$ é a soma das probabilidades dos elementos pertencentes a A). A função P assim obtida é uma probabilidade sobre Ω. Em geral ela é diferente da probabilidade de Laplace [...]. Se $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$ obtemos a probabilidade de Laplace como caso particular. (MORGADO et al, 2004, p. 126).

Pode-se, a partir do exposto acima, definir de maneira ampla a probabilidade, em espaços amostrais finitos, como a razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral, isto é, $P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)}$.

Dessa definição clássica, a probabilidade seria uma função que associa a cada evento X um número $P(X)$ de modo que:

i) Para todo evento X, $0 \leq P(X) \leq 1$;

ii) $P(\emptyset) = 0$;

iii) $P(\Omega) = 1$;

iv) Se X e Y são eventos mutuamente excludentes, então $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$.

Da definição de Probabilidade, advém algumas proposições importantes para a análise e resolução de problemas probabilísticos, dentre as quais as exibidas a seguir.

i) Se X é um evento, $P(X^C) = 1 - P(X)$;

ii) Se X e Y são eventos, então $P(X \setminus Y) = P(X) - P(X \cap Y)$;

iii) Se $X \subset Y$, então $P(X) \leq P(Y)$;

iv) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$.

Demonstração. i) Sabe-se que $1 = P(\Omega) = P(X \cup X^C) = P(X) + P(X^C)$. Disso decorre que $P(X^C) = 1 - P(X)$, como se queria demonstrar.

ii) Sabe-se que $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$. Daí,

$$P(X) = P[(X \setminus Y) \cup (X \cap Y)] = P(X \setminus Y) + P(X \cap Y),$$

uma vez que $X \setminus Y$ e $X \cap Y$ são mutuamente excludentes. Daí,

$$P(X \setminus Y) = P(X) - P(X \cap Y).$$

iii) Como $P(Y \setminus X) = P(Y) - P(Y \cap X)$, se $X \subset Y$ então $P(Y \setminus X) = P(Y) - P(X)$. Sendo $P(Y \setminus X) \geq 0$, conclui-se que $P(X) \leq P(Y)$.

iv) Sabe-se que $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$. Dividindo ambos os membros da igualdade por $n(\Omega)$, vem que $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$.

Outro modo:

Tem-se que $P(X) = P(X \setminus Y) + P(X \cap Y)$ e $P(Y) = P(Y \setminus X) + P(X \cap Y)$. Somando-se membro a membro as igualdades, vem que

$$P(X) + P(Y) = P(X \setminus Y) + P(Y \setminus X) + P(X \cap Y) + P(X \cap Y).$$

Como $P(X \setminus Y) + P(Y \setminus X) + P(X \cap Y) = P(X \cup Y)$, então

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y),$$

como se queria demonstrar. □

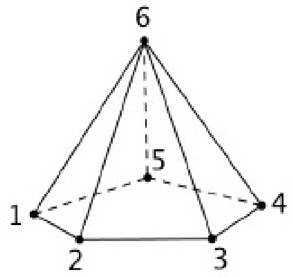
A seguir, alguns exemplos e aplicações relacionadas com as definições e propriedades apresentadas.

Exemplo 1. (UFRJ) Fernando e Cláudio foram pescar num lago onde só existem trutas e carpas. Fernando pescou, no total, o triplo da quantidade pescada por Cláudio. Fernando pescou duas vezes mais trutas do que carpas, enquanto Cláudio pescou quantidades iguais de carpas e trutas. Os peixes foram todos jogados num balaio e uma truta foi escolhida ao acaso desse balaio. Determine a probabilidade de que esta truta tenha sido pescada por Fernando.

Resolução.

Seja x a quantidade de peixes pescados por Cláudio, sendo $\frac{x}{2}$ o número de trutas e $\frac{x}{2}$ o número de carpas. Desse modo, decorre do enunciado que o número de trutas pescadas por Fernando é dado por $3x$, sendo $2x$ o número de trutas e x o número de carpas (considerando a expressão "duas vezes mais" do enunciado como o dobro) . Assim, o total de trutas pescadas é igual a $2x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2} = 2,5x$ e, portanto, a probabilidade de que esta truta tenha sido pescada por Fernando é dada por $\frac{2x}{2,5x} = \frac{4}{5}$.

Exemplo 2. (FGV) Os vértices de uma pirâmide pentagonal foram numerados como na figura abaixo.



Escolhendo ao acaso três elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a probabilidade de que esses números representem vértices de uma mesma face é:

a) 25%

b) 60%

c) 50%

d) 40%

e) 75%

Resolução.

No caso em tela, tem-se que o número de modos de escolher ao acaso 3 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é dado pela combinação dos seis elementos tomados três a três, ou seja, $C_{6,3} = 20$.

Além disso, observa-se que os grupos formados pelo vértice 6 mais os extremos de diagonais da base são os únicos que não estão na mesma face. São cinco os grupos nessas condições: (136), (146), (246), (256) e (356).

Como o total de grupos é 20, tem-se 15 grupos que são formados por vértices de uma mesma face. Portanto, a probabilidade solicitada é igual a $\dfrac{15}{20} = 75\%$, valor encontrado na alternativa E.

Exemplo 3. No filme "Indecent Proposal", o bilionário John Gage (Robert Redford) aposta um milhão de dólares em um jogo de dados num cassino em Las Vegas. Diana Murthy (Demi Moore) lança simultaneamente os dois dados para Gage, que a avisa que ela deve tirar 7 ou 11 na soma das faces de cima dos dois dados. Qual a probabilidade de Gage ganhar? (Obs.: no filme ele ganha com a soma sete).

Resolução.

Inicialmente, verifica-se que o número de elementos do espaço amostral Ω é igual a $6 \cdot 6 = 36$, consistindo nos pares (x, y) em que x e y são números inteiros positivos tais que $1 \leq x \leq 6$ e $1 \leq y \leq 6$, conforme se verifica no quadro 2.1.

Quadro 2.1: Espaço amostral no lançamento de dois dados.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Desse modo, basta identificar os pares ordenados cuja soma é 7 ou 11. Daí, temos o evento $X = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$ e, portanto, $n(X) = 8$. Assim, a probabilidade solicitada é igual a $P(X) = \dfrac{n(X)}{n(\Omega)} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Exemplo 4. Uma urna contém 600 bolas, numeradas de 1 a 600. Uma bola dessa urna é escolhida ao acaso. Qual é a probabilidade de que ela seja divisível por 4 ou por 5?

Resolução.

Sejam X e Y, os eventos que ocorrem se o número correspondente à bola é divisível por 4 e por 5, respectivamente. A quantidade de bolas numeradas de 1 a 600 divisíveis por 4 são em número de $\dfrac{600}{4} = 150$ bolas; a quantidade de bolas numeradas de 1 a 600 divisíveis por 5 são $\dfrac{600}{5} = 120$; e a quantidade de bolas numeradas de 1 a 600 divisíveis por os divisíveis por 4 e por 5, simultaneamente, são em número de $\dfrac{600}{20} = 30$.

Assim, tem-se que $P(X) = \dfrac{150}{600} = \dfrac{1}{4}$, $P(Y) = \dfrac{120}{600} = \dfrac{1}{5}$ e $P(X \cap Y) = \dfrac{30}{600} = \dfrac{1}{20}$.

Portanto,

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Enunciado para os exemplos 5 e 6.

Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

1ª opção: comprar três números para um único sorteio.

2^a opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.

3^a opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

Exemplo 5. (ENEM) Se X, Y, Z representam as probabilidades de o apostador GANHAR ALGUM PRÊMIO, escolhendo, respectivamente, a 1^a, a 2^a ou a 3^a opções, é correto afirmar que:

a) $X < Y < Z$

b) $X = Y = Z$

c) $X > Y = Z$

d) $X = Y > Z$

e) $X > Y > Z$

Resolução.

i) Sendo X a probabilidade de um apostador ganhar algum prêmio comprando três números para um sorteio, então $X = \dfrac{3}{10} = 30\%$.
ii) Sendo Y a probabilidade de um apostador ganhar algum prêmio comprando dois números para um sorteio e um número para outro, então

$$Y = \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{9}{10}\right) + \left(\frac{8}{10} \cdot \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10}\right) = \frac{28}{100} = 28\%,$$

que corresponde à soma das probabilidades de três situações "favoráveis": ganhar o prêmio no primeiro sorteio e não ganhar no segundo; perder no primeiro sorteio e ganhar no segundo; e ganhar nos dois sorteios, respectivamente.
iii) Sendo Z a probabilidade de um apostador ganhar algum prêmio comprando um número para cada sorteio, num total de três sorteios, basta retirar do total, os casos em que o apostador não ganha qualquer prêmio. Assim, vem que

$$Y = 1 - \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10}\right) = \frac{271}{1000} = 27,1\%.$$

De i), ii) e iii), conclui-se que $X > Y > Z$ e, portanto, a alternativa correta é a letra E.

Exemplo 6. Escolhendo a 2^a opção, a probabilidade de o apostador NÃO GANHAR em qualquer dos sorteios é igual a:

a) 90%

b) 81%

c) 72%

d) 70%

e) 65%

Resolução.

A probabilidade de o apostador não ganhar em qualquer dos sorteios é dada por

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{100} = 72\%$$

e, consequentemente, a alternativa correta é a letra C.

Exemplo 7. (PUC-SP) Serão sorteados 4 prêmios iguais entre os 20 melhores alunos de um colégio, dentre os quais estão Tales e Euler. Se cada aluno pode receber apenas um prêmio, a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado é

a) $\dfrac{3}{95}$

b) $\dfrac{1}{19}$

c) $\dfrac{3}{19}$

d) $\dfrac{7}{19}$

e) $\dfrac{38}{95}$

Resolução.

Para determinar a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado pode-se, primeiramente, calcular a probabilidade de nenhum dos dois fazer parte do grupo sorteado e em seguida utilizar a probabilidade do evento complementar.

A probabilidade de nenhum dos dois fazer parte do grupo sorteado é igual a

$$\frac{C_{18,4}}{C_{20,4}} = \frac{\dfrac{18!}{4! \cdot 14!}}{\dfrac{20!}{4! \cdot 16!}} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{12}{19}.$$

Daí, a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado é igual a $1 - \frac{12}{19} = \frac{7}{19}$. Conclui-se, então, que a alternativa correta é a letra D.

2.6 Probabilidade Condicional

Considere o experimento aleatório que consiste em jogar um dado honesto e verificar a face de cima. O espaço amostral relativo ao experimento é dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja o evento $A = \{\text{a face verificada é um número primo}\}$. Assim, tem-se que $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Essa é a probabilidade antes de ser realizado o experimento. Suponha que, após a realização do experimento, uma pessoa que o presenciou dê a informação correta de que o número verificado é superior a 3, ou seja, que o evento $B = \{\text{a face verificada é um número maior que 3}\}$ ocorreu.

Nota-se que, com a informação da pessoa, a quantidade de casos possíveis deixou de ser 6 para apenas 3, dos quais apenas um é "favorável" ao evento A. Daí, tem-se surgimento de uma probabilidade a *posteriori*, denominada probabilidade condicional de A sabendo que B (ou probabilidade condicional de A dado que B). No exemplo citado, tal probabilidade é dada por $\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$.

De modo geral, dados os eventos A e B, define-se a probabilidade condicional de A dado que B, como sendo o número $p\,(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, com $P(B) > 0$. Dessa igualdade, vem que $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, fórmula extremamente útil para o cálculo de $P(A \cap B)$.

Uma ferramenta valiosa e muito eficiente na resolução de problemas que envolvem vários estágios é o diagrama de árvore, também conhecido como árvore das probabilidades. Nos diagramas de árvore são colocados os números nos ramos (galhos), representam as probabilidades condicionais do evento pertinente à extremidade do ramo, na certeza da origem do mesmo. Desse modo, para obter uma probabilidade utilizando o diagrama de árvore, "basta percorrer todos os caminhos que levam ao evento cuja probabilidade é procurada, multiplicando as probabilidades em cada caminho e somando os produtos ao longo dos vários caminhos". (MORGADO; CARVALHO, 2013, p. 159).

Exemplo 1. Um par de dados não viciados é lançado. Se a soma dos números das faces superiores obtidas é igual a 6, qual a probabilidade de ter ocorrido a face 2 em um deles?

Resolução.

Inicialmente, sabe-se que no lançamento de dois dados, o número de elementos do espaço amostral é igual a 36. Sejam os eventos:

$$B = \{\text{ocorrer soma dos números das faces superiores dos dados igual a } 6\} \quad \text{e}$$

$$A = \{\text{ocorrer face 2 e a soma dos números das faces superiores dos dados é igual a } 6\}.$$

Daí, tem-se que $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ e $A = \{(2,4),(4,2)\}$. Assim, a probabilidade condicional desejada é dada por $p\,(A|B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{2}{5}$. Este resultado também poderia ser encontrado diretamente utilizando a probabilidade de Laplace, ou seja, $p\,(X) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{2}{5}$.

Exemplo 2. O setor jurídico de uma instituição financeira atende 3 tipos de clientes: A, B e C. 60% dos atendimentos são realizados para clientes do tipo A, 30% para clientes do tipo B e 10% para clientes C. A probabilidade de um cliente do tipo A sair satisfeito da instituição financeira é 90%, ao passo que as probabilidades de satisfação dos clientes B e C são, respectivamente, 70% e 60%.
a) Qual a probabilidade de que um cliente escolhido ao acaso seja do tipo C e saia satisfeito da instituição financeira?
b) Se um cliente saiu satisfeito da instituição, qual a probabilidade de que ele seja um cliente do tipo A?

Resolução.

Seja o diagrama 2.1 que representa a situação do enunciado e considere S como cliente satisfeito e NS cliente não satisfeito.

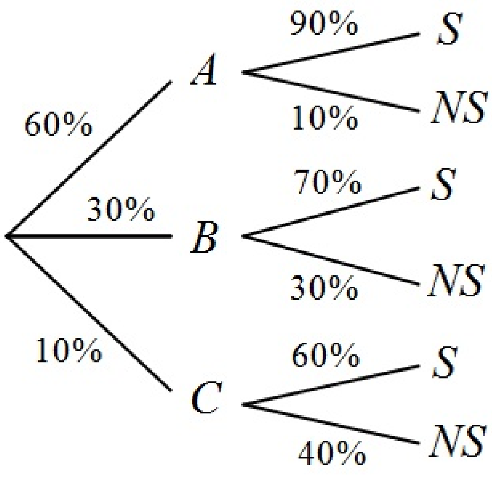


Figura 2.1: Diagrama de árvore do exemplo 2

a) Observando o diagrama de árvore, tem-se que a probabilidade de que um cliente escolhido ao acaso seja do tipo C e saia satisfeito da instituição financeira é dado por

$$P(C \cap S) = \frac{10}{100} \cdot \frac{60}{100} = 6\%.$$

b) A probabilidade de que um cliente que saiu satisfeito da instituição financeira seja do tipo A é dada por

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100}}{\left(\frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100}\right) + \left(\frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100}\right) + \left(\frac{10}{100} \cdot \frac{60}{100}\right)} = \frac{\frac{54}{100}}{\frac{81}{100}} = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}.$$

Exemplo 3. Eva, Patrícia e Kleydiane aguardavam a aula de Matemática Discreta do PROFMAT e decidiram apostar em um jogo de cara ou coroa com uma moeda fornecida por Gabrielly. Como eram três jogadoras, Daniel Ribeiro, baseado numa questão que havia visto em um livro do seu amigo Lucas, propôs o seguinte:

- Eva vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas;
- Patrícia vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas;
- Kleydiane vence quando sair uma coroa seguida de uma cara.

Qual é a probabilidade que cada uma tem de vencer?

Resolução

Observe o diagrama de árvore 2.2.

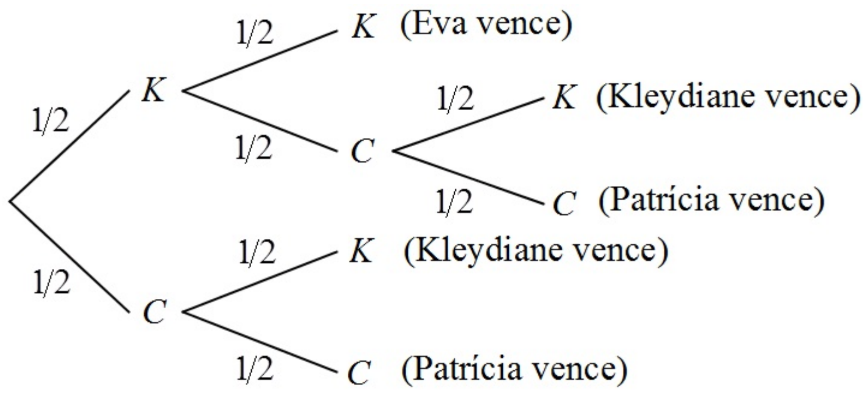


Figura 2.2: Diagrama de árvore do exemplo 3

De acordo com as regras definidas e pelo diagrama apresentado, tem-se que:

- A probabilidade de Eva vencer a aposta é dada por $P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
- A probabilidade de Patrícia vencer a aposta é dada por

$$P(P) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8};\ \text{e}$$

- A probabilidade de Kleydiane vencer a aposta é dada por

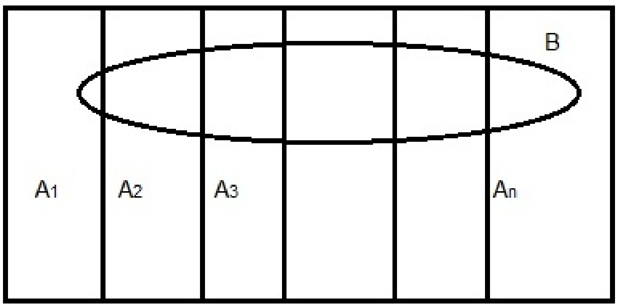
$$P(K) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

.

2.7 Teorema da Probabilidade Total

Teorema 2.1. *Considere n eventos disjuntos A_1, A_2,... , A_n de maneira tal que $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \ldots, P(A_n) > 0$. Se B é um evento contido na união desses eventos A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, (conforme figura abaixo) então*

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$



Demonstração. Depreende-se da figura acima que

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B).$$

Daí, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) + \ldots \\ &\quad + P(A_n) \cdot P(B|A_n), \end{aligned}$$

como se queria demonstrar.

Exemplo:

Uma urna X tem 3 bolas pretas (P) e 2 bolas brancas (B); outra urna Y tem 4 bolas pretas e 5 bolas brancas e a urna Z tem 2 bolas pretas e uma bola branca. Uma urna é selecionada ao acaso e dela é retirada uma bola. Qual a probabilidade da bola ser branca?

Resolução.

Considere a árvore de probabilidades 2.3 e suas indicações.

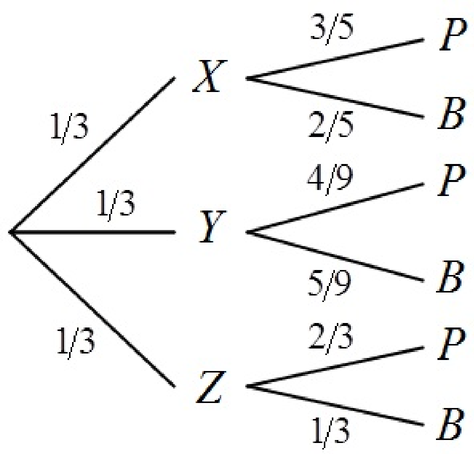


Figura 2.3: Árvore de probabilidades

Seja B o evento correspondente à retirada de uma bola branca. Utilizando o diagrama de árvore e o teorema da probabilidade total, tem-se que a probabilidade de sair bola branca é dada por

$$\begin{aligned} P(B) &= P(X \cap B) + P(Y \cap B) + P(Z \cap B) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{15} + \frac{5}{27} + \frac{1}{9} \cong 43\%. \end{aligned}$$

2.8 Teorema de Bayes

Teorema 2.2. *Considerando as condições do Teorema da Probabilidade Total, no caso de P(B) ser positiva, então se tem que*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$

Demonstração. Tem-se que $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$ (*). Do Teorema da Probabilidade Total, tem-se que

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

Substituindo $P(B)$ na expressão (*), obtém-se que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}.$$

□

Aplicações:

1) Considere três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro; a segunda contém uma moeda de ouro e outra de prata; e a terceira contém duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro? (Esse problema, proposto pelo matemático Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), na obra *Calcul des probabilités*, em 1889, é conhecido como o Paradoxo da Caixa de Bertrand ou como Problema da Moeda de Bertrand).

Resolução.

Sejam A, B e C as três caixas. Como a caixa A é a única que possui duas moedas de ouro, a probabilidade solicitada é a mesma da probabilidade condicional $P(A|O)$. Assim, uma pergunta equivalente à pergunta do enunciado, seria expressa nos seguintes termos: "sabendo que a moeda escolhida é de ouro, qual a probabilidade de que a moeda seja proveniente da caixa A?"

Considere "O", o evento relacionado ao sorteio da moeda de ouro. Observando-se a árvore de probabilidades 2.4, que representa a situação ora configurada, tem-se que:

$$\begin{aligned} P(A|O) &= \frac{P(A \cap O)}{P(O)} = \frac{P(A \cap O)}{P(A \cap O) + P(B \cap O) + P(C \cap O)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\left(\frac{1}{3} \cdot 1\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) + 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

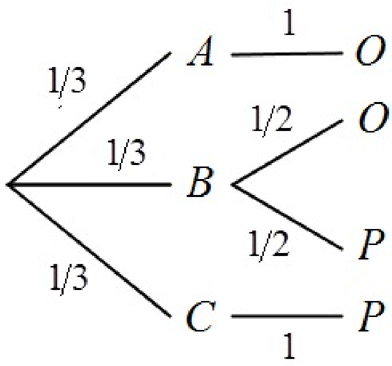


Figura 2.4: Árvore de probabilidades da aplicação 1

2) (ITA-SP) Uma amostra de estrangeiros, em que 18% são proficientes em inglês, realizou um exame para classificar a sua proficiência nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% foram classificados como proficientes. Entre os não proficientes em inglês, 7% foram classificados como proficientes. Um estrangeiro desta amostra, escolhido ao acaso, foi classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

a) 73%

b) 68%

c) 64%

d) 70%

e) 65%

Resolução:

Para resolver a questão, utilizar-se-á a árvore de probabilidades 2.5, em que:

- PI – Proficiente em inglês;
- NPI – Não proficiente em inglês;
- CP – Classificado como proficiente em inglês através de exame;
- NCP – Não classificado como proficiente em inglês pelo exame.

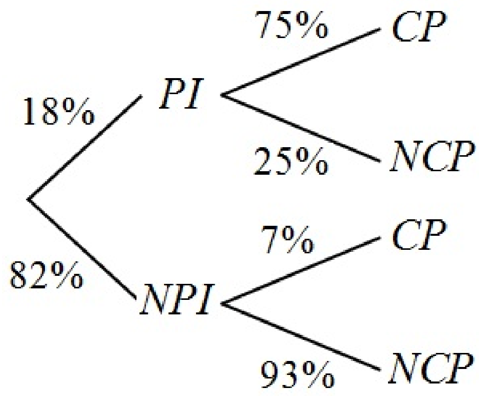


Figura 2.5: Árvore de probabilidades da aplicação 2

A probabilidade do estrangeiro da amostra, escolhido ao acaso, ser efetivamente proficiente na língua inglesa, sabendo que ele foi classificado como proficiente é dada por:

$$\begin{aligned} P(PI|CP) &= \frac{P(PI \cap CP)}{P(CP)} = \frac{P(PI \cap CP)}{P(PI \cap CP) + P(NPI \cap CP)} \\ &= \frac{0,18 \cdot 0,75}{(0,18 \cdot 0,75) + (0,82 \cdot 0,07)} = \frac{0,135}{0,135 + 0,0574} \\ &= \frac{0,135}{0,1924} \cong 70,17\%. \end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a letra D.

3) Durante um curso ministrado pelo professor Werton, o discente Willams respondeu uma prova de múltipla escolha com 5 alternativas em que apenas uma delas era correta. Considere que Willams tinha 20% de probabilidade de acerto para uma questão que a desconhecia totalmente, e de 100% para uma questão que conhecia. Ao analisar a prova, Willams verificou que sabia 60% das respostas da prova. Se ele respondeu corretamente uma das questões, qual a probabilidade de que a tenha acertado "chutando"?

Resolução.

Fazendo uso do Teorema de Bayes, tem-se que a probabilidade P desejada é igual a

$$\frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{1}{5}}{\left(\frac{40}{100} \cdot \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{60}{100} \cdot 1\right)} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{68}{100}} = \frac{2}{17} \cong 11,76\%.$$

2.9 Independência de Eventos

Sejam X e Y dois eventos e suponha que $P(X) > 0$. O evento Y é independente de X se $P(Y|X) = P(Y)$, ou seja, um evento Y é considerado independente de X quando a ocorrência de X não altera a probabilidade da ocorrência de Y e, portanto,

$$P(Y \cap X) = P(Y) \cdot P(X).$$

Além disso, evidencia-se que, se Y independe de X, então X independe de Y, uma vez que:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(X) \cdot P(Y)}{P(Y)} = P(X).$$

De maneira geral, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são eventos independentes, então

$$P(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n).$$

Exemplo:

Uma moeda é lançada três vezes. Considere os eventos:
X: ocorrência de ao menos duas coroas (C).
Y: ocorrência de resultados iguais nos três lançamentos.
Prove que X e Y são eventos independentes.

Resolução.

Depreende-se, no caso em tela que:

- $\Omega = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (C,K,K), (K,C,C), (K,C,K), (K,K,C), (K,K,K)\}$;
- $X = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (K,C,C)\}$;
- $Y = \{(C,C,C), (K,K,K)\}$;
- $X \cap Y = \{(C,C,C)\}$.

Daí, tem-se que $P(X) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(Y) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ e $P(X \cap Y) = \frac{1}{8}$. Assim, conclui-se que $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$ e, portanto, X e Y são eventos independentes, como se queria provar.

2.10 Distribuição Binomial

Considere um experimento com somente dois resultados possíveis: sucesso e fracasso, em que a probabilidade de sucesso é p e, consequentemente, a probabilidade de fracasso é $(1-p)$. Esses experimentos são chamados de experimentos binomiais e as expressões sucesso e fracasso (que não possuem neste caso, o significado semântico que as mesmas apresentam normalmente) são denominações atribuídas ao matemático Jacques Bernoulli, estudioso de diversas situações com tal configuração, conhecidas como ensaios de Bernoulli. Nestes ensaios, o conhecimento dos resultados de alguns experimentos não altera a probabilidade dos resultados dos demais que venham a ser realizados.

Entre os muitos exemplos de experimentos dessa natureza, podem ser mencionados:

- Um dado não viciado é lançado e considera-se sucesso sair um número maior que 4 e fracasso sair um número menor ou igual a 4.
- Uma moeda honesta é lançada e considera-se sucesso o evento cara e fracasso o evento coroa.
- Um estudante faz uma prova de Direito Tributário composta de 10 questões de múltipla escolha com cinco alternativas cada e marca ao acaso as respostas. Pode-se considerar sucesso, por exemplo, o acerto de uma questão; e fracasso, o erro de uma questão.

Apresentar-se-á, a seguir, o teorema fundamental da distribuição binomial, com sua demonstração e, posteriormente, três exemplos interessantes.

Teorema 2.3. (Teorema da distribuição binomial) *A probabilidade de ocorrerem exatamente K sucessos em uma sequência de n experimentos binomiais independentes, em que p é a probabilidade de sucesso em cada experimento, é igual a* $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^k$.

Demonstração. Inicialmente, observa-se que o evento "ocorrer exatamente k sucessos em uma sequência de n experimentos binomiais" é constituído por todas as ordens possíveis em que se tem k sucessos e $(n-k)$ fracassos. Desse modo, a quantidade de ordens é dada por $P_n^{k,n-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Além disso, tendo em vista que em qualquer ordem tem-se a presença de k fatores p e $(n-k)$ fatores $(1-p)$, a probabilidade de se obter k sucessos e $n-k$ fracassos é $p^k \cdot (1-p)^k$.

Assim, conclui-se que a probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma sequência de n experimentos binomiais independentes é igual a $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^k$, como queria se demonstrar.

Exemplo 1. Durante a Copa do Mundo de Futebol realizada na África do Sul, um polvo foi considerado por muitas pessoas o grande nome da Copa. Paul, nome dado ao polvo que nasceu na Inglaterra, mas é criado em território alemão, teria “acertado” o resultado de todos os jogos em que foi realizada uma “consulta” ao mesmo. A previsão é feita da seguinte maneira: são colocados dentro do aquário dois recipientes com amêijoa (molusco com concha), que serve como alimento para o polvo, na mesma quantidade, cada um com uma bandeira de uma seleção. O time que tiver o recipiente escolhido pelo polvo corresponde ao vencedor do jogo. Desse modo, Paul teria acertado os oito jogos a que foi “solicitada” sua participação. A probabilidade desse fato acontecer, considerando a igualdade de condições entre os países participantes e desprezando a possibilidade de empate nos jogos (mesmo os da primeira fase) era

a) inferior a $0,5\%$

b) entre $0,5\%$ e 1%

c) entre 1% e 2%

d) entre 2% e 3%

e) superior a 3%

Resolução.

Utilizando o teorema binomial e considerando sucesso o acerto do resultado do jogo por Paul, que tem probabilidade $p = \dfrac{1}{2}$ de acontecer, advém que a probabilidade procurada é dada por

$$p = \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{256} \cong 0,39\%$$

e, portanto, a alternativa correta é a letra A.

Exemplo 2. Após seu casamento, Renilson revelou ao amigo Reinaldo Barros que planeja ter 6 filhos com sua esposa Leiz. Considerando que sejam equiprováveis os eventos nascimento de um menino e nascimento de uma menina, e que Leiz tem o mesmo pensamento de Renilson, qual a probabilidade de nascerem exatamente 4 meninas?

Resolução.

Considere o resultado nascimento de uma menina como sucesso. Depreende-se do enunciado que a probabilidade de sucesso p é igual a $p = \frac{1}{2}$. Daí, utilizando o teorema binomial, tem-se que a probabilidade no caso ora configurado é dada por

$$p = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64} \cong 23,44\%.$$

Exemplo 3. Edivaldo e Adriano são excelentes atiradores de dardos. Edivaldo acerta 80% das vezes no alvo desejado, ao passo que Adriano acerta 75% das vezes no mesmo alvo. Considerando que Edivaldo arremessou cinco dardos e Adriano 6 dardos, determine:
a) A probabilidade de Edivaldo acertar exatamente 4 vezes o alvo;
b) A probabilidade de Adriano acertar pelo menos uma vez o alvo.

Resolução.

a) Acertando 4 vezes o alvo, Edivaldo erraria um dos 5 arremessos. Daí, como o percentual de acerto de Edivaldo é igual a 80%, a probabilidade de sucesso (considerando o acerto como sucesso), é igual a $p = \frac{4}{5}$. Portanto, utilizando o teorema binomial, a probabilidade solicitada é igual a

$$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{256}{625} \cong 40,96\%.$$

b) Para determinar a probabilidade de Adriano acertar pelo menos uma vez o alvo, pode-se utilizar a probabilidade do evento complementar, calculando a probabilidade de Adriano errar todos os 6 arremessos. Esta probabilidade é igual a

$$\binom{6}{0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{1}{4096}.$$

Desse modo, a probabilidade solicitada é igual a

$$1 - \frac{1}{4096} = \frac{4095}{4096} \cong 99,9756\%.$$

3 Problemas Clássicos

3.1 Problema dos Pontos (Problema da Divisão das Apostas)

3.1.1 Introdução

Conforme explanação vista na parte histórica desta dissertação, um problema fundamental para o surgimento da Teoria das Probabilidades é o denominado Problema dos Pontos (ou Problema da Divisão das Apostas). Segundo alguns estudiosos, esse problema teria surgido por volta do ano 1380 em um manuscrito de origem árabe, mas ficou realmente conhecido na obra do Frei Luca Pacioli (1445 - 1514) "*Summa Arithmetica, Geometria e Proportion et Proportionalità*" em 1494. O problema apresentado foi o seguinte:

"Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?" (PACIOLI, apud, SILVEIRA, 2001).

Pacioli resolveu o problema propondo $\frac{5}{8}$ do prêmio ao primeiro jogador e $\frac{3}{8}$ do prêmio ao segundo jogador. Alguns matemáticos tentaram resolver o problema, mas não obtiveram resposta satisfatória. O italiano Niccolo Fontana (1499 - 1557), conhecido como Tartaglia, por exemplo, considerou que "A solução de Pacioli não parece estar correta, mas qualquer que seja a forma de dividir o prêmio haverá sempre lugar a litígio". (TENREIRO, 2004).

Em 1654, Antonio Gombaud, um nobre cujo título era Chevalier de Méré e também um jogador experiente em jogos de azar, solicitou de Blaise Pascal a solução para o problema dos pontos com a seguinte versão para o problema:

"Em oito lances de um dado um jogador deve tentar lançar um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido. Como deveria ele ser indenizado?" (MÉRÉ, apud, BOYER, 2003, p.250).

Daí, Pascal escreveu a Pierre de Fermat (1601 - 1665) sobre tal problema, iniciando uma correspondência de imensa relevância para a moderna Teoria das Probabilidades. As sete cartas trocadas (ressalte-se que a primeira se perdeu) por esses expoentes do conhecimento matemático constituem um marco no desenvolvimento da Probabilidade e, por seu relevante significado, estão presentes no anexo desta dissertação, como mencionado anteriormente.

Posteriormente, até pela não divulgação dos resultados e das abordagens peculiares de Pascal e Fermat (as cartas só foram publicadas em 1679, segundo os historiadores), Christiaan Huygens publicou um pequeno folheto, *De ratiociniis in ludo aleae* (Sobre o raciocínio em jogos de dados), em 1657, a respeito do problema em tela.

A seguir, a resolução do problema dos pontos, na versão do questionamento de Luca Pacioli.

3.1.2 Problema dos Pontos

"Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?"

Resolução.

O primeiro jogador tem 5 pontos e o segundo jogador tem 3 pontos. Desse modo, o primeiro jogador precisa somente vencer mais uma partida no jogo da balla para ficar com o prêmio. O segundo jogador, por sua vez, necessita vencer três partidas seguidas para ficar com o prêmio. Assim, considerando que as chances de vitória em cada partida sejam iguais para os dois jogadores, a probabilidade do segundo jogador ganhar o prêmio é dada por $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, uma vez que dos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ resultados possíveis para as partidas, em somente um caso o segundo jogador ganha. Daí, utilizando a probabilidade do evento complementar, conclui-se que a probabilidade do primeiro jogador ganhar o prêmio é dada por $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ e, portanto, o primeiro jogador deve receber $\frac{1}{8}$ do valor do prêmio, ao passo que o segundo jogador deve receber $\frac{7}{8}$ do valor do prêmio.

Um questionamento que poderia ser feito em relação à resolução acima diz respeito a determinação do espaço amostral com fulcro nas três partidas restantes, quando na realidade o jogo pode terminar antes, nos casos em que o primeiro jogador vence na 1ª partida ou na 2ª partida. O intento de tal atitude está na obtenção de um espaço amostral para o qual o modelo é equiprovável. Com isso, caso o primeiro jogador vença a 1ª partida ou a 2ª partida, os jogadores poderiam disputar amistosamente a(s) partida(s) seguinte(s), o que não traria alteração nas probabilidades de vitória dos jogadores em questão.

3.2 Problema do grão-duque da Toscana Para Galileu Galilei

Entre os problemas históricos e famosos do assunto em voga, um deles remonta ao final do século XVI, sendo proposto pelo seu patrono, o grão duque da Toscana, Cosme II de Médicis, ao italiano Galileu Galilei (1564 - 1642).

Considerado o "Pai da Ciência Moderna", Galileu foi matemático, físico, astrônomo e filósofo, contribuiu de maneira decisiva para o desenvolvimento do método científico, defendendo a utilização da Matemática nos diversos campos do conhecimento, bem como a experiência e a experimentação na ciência.

No que tange à história da probabilidade, Galileu produziu um artigo sobre jogos de azar denominado "*Sopra Le Scoperte dei Dad*" (Considerações sobre os jogos de dados) a pedido do grão-duque, mesmo sem grande interesse no assunto, segundo os historiadores. O problema famoso de tal artigo consistia em apresentar uma justificativa para o fato de que, quando são lançados três dados, a soma dos 3 números obtidos igual a 10 aparece com frequência maior que a soma igual a 9, apesar de cada uma destas somas aparecerem em 6 configurações diferentes.

Este problema mostra uma situação que, posteriormente, traduziria a associação entre probabilidade e frequência em relação a um evento. Segue abaixo a resolução do problema, por meio semelhante ao de Galileu.

3.2.1 Resolução

Quando são lançados três dados honestos (não viciados), as possibilidades para a soma dos resultados obtidos vão de 3 até 18. Tanto na soma 3 (1,1,1) como na soma 18 (6,6,6), há apenas uma configuração possível, o que não acontece, por exemplo, para soma 9 e para soma 10. Para a soma 9, tem-se as seguintes situações:

- 1,2,6
- 1,3,5
- 1,4,4
- 2,3,4
- 2,2,5
- 3,3,3

Para a soma 10, os casos possíveis são:

- 1,3,6
- 1,4,5
- 2,2,6
- 2,3,5
- 2,4,4
- 3,3,4

Diante dessa constatação, poder-se-ia imaginar (provavelmente foi esse o pensamento do grão-duque da Toscana), que a frequência de aparecimento de soma 9 e soma 10 fosse a mesma, uma vez que essas quantidades podem ser obtidas de 6 maneiras distintas no lançamento de três dados. Ocorre que, por exemplo, o resultado (3,3,3) só tem uma forma de acontecer, ao passo que o resultado (2,3,5) tem 6 formas de acontecer: (2,3,5), (2,5,3), (3,2,5), (3,5,2), (5,2,3) e (5,3,2).

Assim, considerando as explicações acima e as possibilidades de soma 9 e de soma 10, têm-se os seguintes quadros 3.1 e 3.2:

Quadro 3.1: Soma dos números das faces igual a 9.

1º Dado	**2º Dado**	**3º Dado**
1	2	6
1	3	5
1	4	4
1	5	3
1	6	2
2	1	6
2	2	5
2	3	4
2	4	3
2	5	2
2	6	1
3	1	5
3	2	4
3	3	3
3	4	2
3	5	1
4	1	4
4	2	3
4	3	2
4	4	1
5	1	3
5	2	2
5	3	1
6	1	2
6	2	1

Quadro 3.2: Soma dos números das faces igual a 10.

1º Dado	**2º Dado**	**3º Dado**
1	3	6
1	4	5
1	5	4
1	6	3
2	2	6
2	3	5
2	4	4
2	5	3
2	6	2
3	1	6
3	2	5
3	3	4
3	4	3
3	5	2
3	6	1
4	1	5
4	2	4
4	3	3
4	4	2
4	5	1
5	1	4
5	2	3
5	3	2
5	4	1
6	1	3
6	2	2
6	3	1

Em consonância com os quadros acima, conclui-se que a soma 10 aparece em 27 situações, enquanto que a soma 9 em 25 situações e, portanto, é 8% mais provável a soma 10 que a soma 9, daí a ocorrência maior observada na prática pelo grão-duque.

3.3 Problema dos Dados de Chevalier de Méré

"Segundo a lenda, Chevalier de Méré estava acostumado a desafiar os frequentadores da casa com uma aposta fulminante. Ao lançar um dado quatro vezes seguidas, ele teria que conseguir 'pelo menos' uma vez a face 6. Se não conseguisse, perdia a aposta." (FELÍCIO; FILHO, 1995, p.7). Como Méré tinha conseguido mais vitórias que os seus oponentes nesse desafio, teria decidido criar uma nova forma de jogo, em que lançava dois dados simultaneamente e tentaria obter um duplo 6. Para continuar em vantagem sobre seus desafiados, ele teria calculado a necessidade de 24 lançamentos para isso. "O seu raciocínio simplista foi que, se o conjunto de resultados possíveis era seis vezes maior que o anterior, ele deveria multiplicar por seis o número de lançamentos. Depois das preliminares, passou à experiência. Curiosamente, a clientela para essa aposta aumentou de forma brusca e já começava a prejudicar insuportavelmente o profissional quando o abençoado Pascal apareceu. O que será que estavaa contecendo? [...]"(FELÍCIO; FILHO, 1995, p.9).

Em resumo ao exposto acima, os problemas dos dados de Chevalier de Méré, propostos no século XVII, são os seguintes, com as resoluções em sequência.

Determine a probabilidade de obter:

1) Ao menos um 6 em quatro lançamentos de um dado;

2) Ao menos um duplo 6 em 24 lançamentos de um par de dados.

3.3.1 Resolução

a) Para determinar tal probabilidade, vamos inicialmente obter a probabilidade de não obtermos algum número 6 nos quatro lançamentos de um dado. Sabe-se que em um lançamento, a probabilidade de não obter um 6 é igual a $\frac{5}{6}$. Desse modo, em quatro lançamentos a probabilidade de não obter algum 6 é dada por

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1296} \cong 48,22531\%.$$

Assim, utilizando a probabilidade do evento complementar, tem-se que a probabilidade de obter ao menos um seis em quatro lançamentos de um dado é

$$1 - 0,4822531 \cong 51,77469\%.$$

b) Para determinar tal probabilidade, pode-se inicialmente determinar a probabilidade de não se obter nenhum duplo 6 em vinte e quatro lançamentos de um par de dados. Lançando-se um par de dados a probabilidade de obter um duplo 6 é igual a $1/36$. Desse modo, a probabilidade de não obtenção de um duplo 6 é igual a $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$. Assim, a probabilidade de não obter um duplo seis em 24 lançamentos é igual a

$$(35/36)^{24} \cong 50,86\%.$$

Utilizando a probabilidade do evento complementar, temos que a probabilidade de obter ao menos um duplo seis em 24 lançamentos de um par de dados é, aproximadamente, $1 - 0,5086 \cong 49,14\%$.

3.4 Problemas envolvendo Probabilidade Geométrica

3.4.1 Introdução

Um campo da Probabilidade muito interessante e muitas vezes esquecido no Ensino Médio, é a Probabilidade Geométrica. Normalmente, a Probabilidade apresentada fica reduzida a situações envolvendo processos básicos de contagem de casos "favoráveis" ao evento e do número de elementos do espaço amostral. No entanto, são muito interessantes e valiosos os problemas envolvendo probabilidades a partir da escolha aleatória de pontos em espaços amostrais representados por entes geométricos.

Segundo Morgado e Carvalho (2014, p. 166), "Quando selecionamos um ponto ao acaso em uma parte do plano é razoável supor que a probabilidade do ponto selecionado pertencer a uma certa região seja proporcional à área dessa região".

Assim, se uma determinada região A do plano está contida em uma região B do mesmo plano (vide figura 3.1), admite-se que a probabilidade de um ponto qualquer da região B pertencer à região A é proporcional à área de A, não dependendo do lugar que A ocupa em B. Depreende-se disso, que a probabilidade de que o ponto escolhido ao acaso em B esteja em A é dada pela razão entre a área da região A e a área da região B.

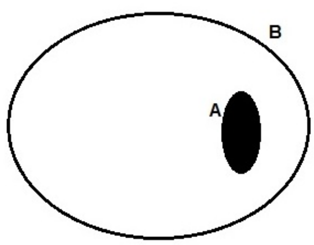


Figura 3.1: Região A contida em uma região B

Além disso, caso se deseje escolher, ao acaso, um ponto em um segmento AB, no qual está contido um segmento CD (vide figura 3.2), a probabilidade de que um ponto de AB pertença a CD é proporcional ao comprimento de CD e independe da posição que CD ocupa em AB. Desse modo, a probabilidade de que o ponto selecionado esteja em CD é dada pela razão entre o comprimento de CD e o comprimento de AB.

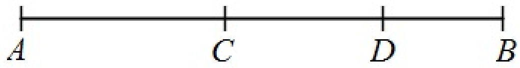


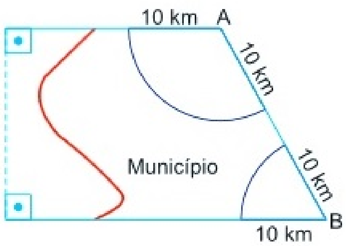
Figura 3.2: Segmentos de reta AB e CD.

De modo análogo aos raciocínios anteriores, a probabilidade de um ponto qualquer tomado em um sólido C pertencer a uma determinada parte de C, é dada pela razão entre o volume da parte de C e o volume do sólido C.

Tal tema surgiu no século XVI, a partir de um problema delineado por um francês denominado Georges−Louis Leclere (1707-1788), o Conde de Buffon. Nesse problema, conhecido como problema da Agulha de Buffon, cuja resolução foge ao escopo desta dissertação, deseja-se calcular a probabilidade de uma agulha de comprimento x, lançada num plano com linhas paralelas, separadas por uma distância d com $x \leq d$, tocar numa destas linhas marcadas.

São muitas as aplicações que envolvem probabilidade geométrica, algumas das quais serão apreciadas a seguir, entre as quais o Paradoxo de Bertrand e o problema do Encontro.

(Enem 2001) Um município de $628\,km^2$ é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de $10\,km$ do município, conforme mostra a figura:



Essa probabilidade é de, aproximadamente,

a) 20%.

b) 25%.

c) 30%.

d) 35%.

e) 40%.

Resolução.

Observando a figura dada, percebe-se que os ângulos indicados são suplementares, uma vez que tais ângulos são colaterais internos. Desse modo, tem-se que a soma das áreas de alcance das antenas A e B das emissoras de rádio é numericamente igual à área de um semicírculo, cujo raio tem comprimento igual a $10\,km$. Como a área de um semicírculo é dada por $\dfrac{\pi r^2}{2}$, então, considerando o valor de π igual a $3,14$, obtém-se que a área de alcance de pelo menos uma das emissoras é igual a $\dfrac{3,14 \cdot 10^2}{2} = 157\,km^2$.

Assim, como a área total do município é igual a $628\,km^2$, a probabilidade de que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras, é dada por $\dfrac{157}{628} = 25\%$ e, portanto, a alternativa correta é a letra B.

3.4.2 Paradoxo de Bertrand

O matemático francês Joseph Louis François Bertrand, publicou diversos livros e artigos sobre os mais variados temas, dentre os quais álgebra, mecânica, aritmética e termodinâmica. Em 1889, no livro *Cálculo de Probabilidades*, apresentou um problema que ficou famoso na comunidade científica por apresentar maneiras distintas de resolução para cada procedimento de construção feito. Tal problema, conhecido como paradoxo de Bertrand, é apresentado a seguir.

Escolhendo ao acaso uma corda de uma circunferência, qual é a probabilidade de que o comprimento dela seja maior que a medida do lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência?

Resolução.

Seja uma circunferência de raio de comprimento 1. Utilizando a lei dos cossenos, por exemplo, obtém-se que a medida do lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência em questão é igual a $\sqrt{3}$. Depreende-se, portanto, que o comprimento das cordas que são maiores que o lado do triângulo em tela, deve ser maior que $\sqrt{3}$ e menor ou igual a 2 (diâmetro da circunferência) e essas cordas devem determinar arcos de medida θ , de maneira que $120^o < \theta \leq 180^o$. Daí, tem-se as seguintes soluções.

Primeira Solução.

Toma-se um ponto A qualquer na circunferência λ . Sejam B e C dois pontos em λ

de modo que A, B e C dividam λ em três partes iguais, possibilitando a construção do triângulo equilátero ABC, conforme figura 3.3.

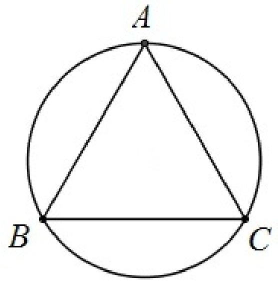


Figura 3.3: Triângulo ABC inscrito na circunferência λ.

Para que uma corda AK seja maior que $\sqrt{3}$ o ponto K deve pertencer ao arco menor BC. Como a probabilidade do ponto K pertencer ao arco menor BC é $\frac{1}{3}$, a probabilidade de que o comprimento de uma corda seja maior que a medida do lado do triângulo equilátero inscrito em λ é igual a $\frac{1}{3}$.

Segunda Solução.

Seja a circunferência λ de centro O e AB um diâmetro de comprimento 2. Considerando qualquer corda perpendicular a AB (a corda CD, por exemplo), evidencia-se que AB contém todos os pontos médios dessas cordas, entre os quais os pontos M e N, os quais são os pontos médios dos raios OA e OB, conforme figura 3.4.

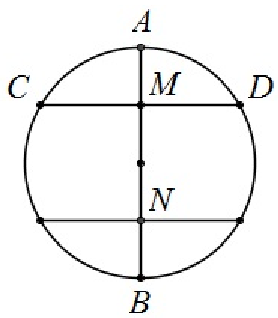


Figura 3.4: Circunferência λ de centro O, diâmetro AB e corda CD.

As cordas perpendiculares a AB que passam por M e N medem $\sqrt{3}$. Para calcular esse comprimento basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo OMD, por exemplo, no qual OD mede 1 e OM mede $\frac{1}{2}$. Daí, MD mede $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e, consequentemente, CD mede $\sqrt{3}$.

Assim, depreende-se que qualquer corda perpendicular a AB cujos pontos médios pertencem ao segmento MN, possui comprimento maior que $\sqrt{3}$.

Em tal interpretação, observa-se que escolher uma corda significa escolher um ponto de AB e, por conseguinte, a probabilidade de que um ponto de AB, escolhido aleatoriamente, pertença a MN é igual a $\frac{1}{2}$.

Conclui-se pelo exposto acima, que a probabilidade de que o comprimento de uma corda seja maior que a medida do lado do triângulo equilátero inscrito em λ é igual a $\frac{1}{2}$.

Terceira Solução.

Seja a circunferência λ de centro O e raio unitário. Tomando-se um ponto M qualquer no interior de λ, considere a corda CD que passa pelo ponto M e é perpendicular a OM, de acordo com a figura 3.5.

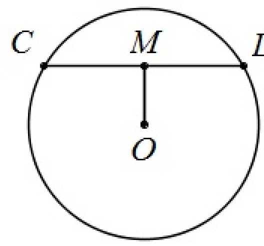


Figura 3.5: Corda CD perpendicular ao segmento OM.

Conforme exposição anterior, caso OM tenha comprimento $\frac{1}{2}$, então CD mede $\sqrt{3}$.

No caso do comprimento de OM ser maior que $\frac{1}{2}$, então $CD < \sqrt{3}$. Além disso, caso $120^o < \theta \leq 180^o$, onde θ é a medida do arco determinado pela corda na circunferência, então $CD > \sqrt{3}$.

Assim, pode-se depreender que para uma corda ser maior que o lado do triângulo equilátero inscrito em λ, a distância dela ao centro O tem de ser menor que $\frac{1}{2}$.

Desse modo, tem-se que o conjunto de todos os pontos cuja distância ao centro O de λ é um círculo de raio de medida $\frac{1}{2}$, concêntrico ao primeiro. Daí, a probabilidade de que um ponto no interior de λ , escolhido ao acaso, esteja no interior da circunferência de raio é dada por

$$P = \frac{\text{Área do círculo de raio } 1/2}{\text{Área do círculo de raio } 1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4},$$

portanto, a probabilidade de que o comprimento de uma corda seja maior que a medida do lado do triângulo equilátero inscrito em λ é igual a $\frac{1}{4}$.

Observa-se que nessa terceira configuração, a construção da corda passa pela escolha de um ponto M qualquer no interior da circunferência, sendo M ponto médio dessa corda.

Por fim, apresentadas essas três soluções, comprova-se que para cada procedimento adotado para a construção da corda, há um caminho que conduz a um resultado diferente, gerando o paradoxo. Caso se deseje não recair nessa situação paradoxal, faz-se necessário o esclarecimento pleno de como será feita a escolha da corda.

3.4.3 Problema do Encontro

Danilo e Ivan, dois grandes amigos, combinaram de se encontrar às 13 horas em um restaurante em Piripiri. Eles também acertaram antecipadamente que o primeiro que chegasse ao local determinado esperaria no máximo 10 minutos pelo outro. Considerando que cada um deles chegará ao restaurante em um instante qualquer "entre" 13 e 14 horas, qual a probabilidade deste encontro se realizar no intervalo dado, supondo que o instante da chegada de cada um dos dois ao local é proveniente do acaso?

Resolução.

Como os instantes de chegada de Danilo e Ivan são aleatórios no intervalo fechado das 13 às 14 horas, pode-se associá-los a pontos (x, y) no plano cartesiano, sendo x o tempo relativo à chegada de Danilo a partir das 13 horas e y o tempo relativo à chegada de Ivan a partir das 13 horas. Desse modo, para facilitar a associação, pode-se considerar cada coordenada do par ordenado (x, y) como pertencente a $[0, 1] \times [0, 1]$ (0 representando a hora inicial, 13 horas, e 1 representando a hora derradeira, 14 horas).

Consoante o enunciado do problema, não haverá tolerância de atraso superior a 10 minutos (1/6 de hora). Assim, evidencia-se que a diferença entre os horários de chegada dos amigos deverá ser menor ou igual a 10 minutos, ou seja, $|x - y| \leq \frac{1}{6}$. Daí, tem-se que:

$$-\frac{1}{6} \leq x - y \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow x - y \leq \frac{1}{6} \text{ e } y - x \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow y \geq x - \frac{1}{6} \text{ e } y \leq x + \frac{1}{6}.$$

Representando no plano cartesiano tais inequações, tem-se o cenário apresentado na figura 3.6.

Daí, utilizando a definição de probabilidade geométrica, vem que a probabilidade procurada é dada pela razão entre a área destacada e a área do quadrado construído. Para o cálculo da área da região destacada basta retirar do total da área do quadrado, a soma das áreas dos dois triângulos em "branco". Como a área do quadrado é 1 e a soma das áreas dos dois triângulos é dada por $2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{36}$, a região destacada tem área igual a $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \cong 30,56\%$.

De modo análogo ao procedimento acima, as probabilidades de encontro dos amigos

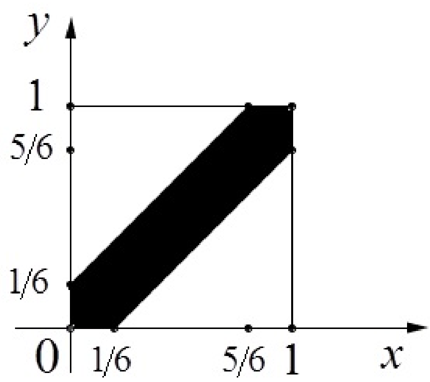


Figura 3.6: Região destacada do quadrado concernente a $|x-y| \leq \frac{1}{6}$.

Danilo e Ivan, caso os tempos máximos fossem de 15 minutos, 20 minutos e 30 minutos, por exemplo, seriam respectivamente, $43,75\%$, $55,56\%$ (valor aproximado) e 75%.

3.4.4 Problema da divisão de um segmento em três partes para formar um triângulo

Selecionam-se aleatoriamente dois pontos em um segmento de reta AB de tamanho 1, dividindo-o em três partes. Determine a probabilidade de que se possa formar um triângulo com essas três partes.

Resolução

Considere o segmento AB de comprimento 1 e os pontos C e D que o dividem em três partes.

Figura 3.7: Segmento AB dividido em três partes.

Sejam as medidas dos segmentos AC, CD e DB iguais, respectivamente, a x, a y e a $1-x-y$. Desse modo, os lados do triângulo a ser formado teriam comprimentos x, y e $(1-x-y)$ e, portanto, $x>0$, $y>0$ e $1-x-y>0 \Rightarrow x+y<1$. Com efeito, escolher os pontos C e D pertencentes ao segmento AB é equivalente a escolher um par ordenado (x,y) no triângulo da figura 3.8.

Todavia, nem todas as divisões de segmentos em três partes formam triângulos. Pela desigualdade triangular, sabe-se que cada medida de um lado deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados, o que acarreta as seguintes inequações:

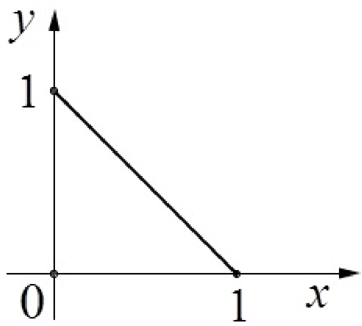


Figura 3.8: Triângulo formado pelos pontos $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

1. $x < y + 1 - x - y \Rightarrow x < \frac{1}{2}$;

2. $y < x + 1 - x - y \Rightarrow y < \frac{1}{2}$;

3. $1 - x - y < x + y \Rightarrow x + y > \frac{1}{2}$;

De 1), 2) e 3), depreende-se que o triângulo existirá se, e somente se, o par ordenado (x, y) estiver presente no interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo da figura anterior, conforme se verifica na figura 3.9

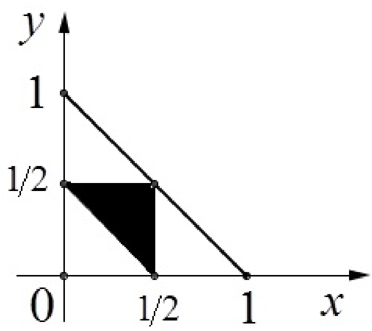


Figura 3.9: Triângulo medial destacado.

Assim, a probabilidade desejada será dada por:

$$P = \frac{\text{Área do triângulo destacado}}{\text{Área do triângulo maior}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

3.5 O Problema de Monty Hall

3.5.1 Introdução

Em setembro de 1990, a resposta a uma pergunta feita por Craig F. Whitaker, na coluna "Ask Marilyn", da revista Parade, gerou uma das maiores celeumas que se tem notícia em torno de um problema matemático, especialmente nos Estados Unidos. Semanalmente, Marilyn vos Savant, famosa por ser citada durante alguns anos no Guiness Book (livro dos recordes) como a mulher de mais alto quociente de inteligência (QI), 228 pontos, respondia a questionamentos sobre os mais diversos assuntos, em sua coluna, sendo bastante elogiada e prestigiada por seus milhares de leitores. Entretanto, tal prestígio foi seriamente abalado durante um certo tempo, em razão da resposta dada ao problema proposto por Craig F. Whitaker.

A pergunta formulada, alterando-se alguns termos, consistia no seguinte:

> Suponha que os participantes de um programa de auditório recebam a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há cabras. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando uma cabra. Ele diz então ao participante: 'Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta fechada?' Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha? (SAVANT, 1990, apud MLODINOW, 2009, p. 52)

Essa pergunta teve sua inspiração associada a um quadro do programa de televisão americano *Let's Make a Deal*, conduzido pelo apresentador Monty Halperin, mais conhecido como Monty Hall, entre os anos de 1963 a 1976 e relançado entre 1980 e 1991. Muitos programas de televisão copiaram a atração em muitos países. Tal problema ficou conhecido como o Problema de Monty Hall, entre outras denominações, tais como "Problema dos Bodes" e "Problema das portas".

Ressalte-se, por oportuno, que esse problema já havia sido exposto e resolvido primeiramente, na revista *The American Statistician*, pelo matemático Steve Selvin, em 1975, mas somente ficou mundialmente conhecido, após a resposta de Marilyn vos Savant, quinze anos depois.

Figura 3.10: Monty Halperin.

Fonte: https://brainstormdeti.wordpress.com/2012/04/29/o-lendario-problema-de-monty-hall/

A resposta dada por Marilyn, afirmando que era vantajoso mudar de porta, contrariava a grande maioria das pessoas, as quais imaginavam que o apresentador, ao abrir uma das portas e revelar um dos bodes, fazia com que a chance do participante ganhar o carro, mudando ou não de porta seria de 50%, uma vez que restavam apenas duas portas, uma delas com o carro e outra com um bode. Ela teria recebido, cerca de 10.000 correspondências, das quais, menos de 1.000 delas concordavam com sua solução. Muitos PhDs, vários deles matemáticos, escreveram cartas a criticando severamente, como as transcritas a seguir, por exemplo:

"[...] Há muita ignorância em matemática neste país e nós não precisamos que o QI mais alto do mundo propague-a ainda mais. Que vergonha!"

Scott Smith, Ph.D., Universidade da Flórida

"[...] Einstein ganhou um lugar mais caro nos corações das pessoas depois que ele admitiu seus erros".

Frank Rose, Ph.D., Universidade de Michigan

> [...] Como matemático profissional, estou muito preocupado com a falta de conhecimentos matemáticos do público em geral. Por favor, ajude a melhorar essa situação confessando seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro (MLODINOW, 2009, p. 53). Robert Sachs, Ph.D., Universidade George Mason

Marilyn ainda dedicou algum tempo em suas colunas ao tema, mas diante do elevado número de cartas condenando sua solução, ela decidiu não falar mais no assunto. Segundo Rodrigues (1998, p.30), a polêmica nos Estados Unidos só terminou em novembro de 1991, com a publicação do artigo *Let's Make a Deal: The Player's Dilemma, no American Statistician.* Nesse artigo os autores discutem todas as soluções apresentadas, mostrando quais são corretas e quais são erradas. Além disso, eles mostram também que, no cenário proposto para o problema, qualquer que seja a estratégia do apresentador, é sempre melhor trocar de porta, uma vez que com isso a probabilidade de ganhar o carro é sempre maior que $\frac{1}{2}$. Assim, definitivamente, ficou provado que Marilyn estava correta em sua resolução do problema de Monty Hall.

3.5.2 Resoluções do Problema de Monty Hall

Após a contextualização do imbróglio em torno da resposta de Marilyn vos Savant, é oportuno apresentar a resolução de tão interessante problema. Primeiramente, retomar-se-á o enunciado de maneira um pouco mais ampla, conforme será visto a seguir.

Em um programa de auditório, um convidado da plateia deve escolher uma entre três portas. Atrás de uma dessas portas há uma Ferrari e atrás de cada uma das outras duas portas há um bode. Segundo as regras do jogo, o participante ganhará o que estiver atrás da porta que abrir. Inicialmente, o convidado escolhe uma porta, sem abri-la. O apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das outras duas portas, atrás da qual se encontra um bode, e pergunta ao candidato se ele deseja ficar com a porta escolhida inicialmente ou se prefere mudar para a outra porta que se encontra fechada. Admitindo-se que o participante deseje ganhar a Ferrari e não um bode, e considerando que na situação em que ele escolhe a porta em que está a Ferrari, o apresentador escolha ao acaso uma porta para abrir, o participante deve trocar de porta, deve permanecer com a porta escolhida no começo, ou tanto faz?

Sejam A, B e C as três portas. Considere que o participante tenha escolhido a porta A, por exemplo. Como são 3 portas e apenas um carro, a chance de que a Ferrari esteja atrás da porta A é igual a $\frac{1}{3}$. Por conseguinte, utilizando a probabilidade do evento complementar, a chance de que o carro não esteja atrás da porta A, ou seja, que esteja nas outras duas portas B ou C, é igual a $\frac{2}{3}$.

Escolhida a porta A, o apresentador, sabedor do que tem atrás de cada porta desde o começo (e que não abrirá a porta com a Ferrari), abre uma das outras duas e revela um bode. É evidente que ele possui tal condição, uma vez que, se atrás da porta A há um bode, ainda há outro bode atrás de uma das outras duas portas, e se atrás da porta A estiver a Ferrari, atrás das outras duas portas há bodes e, nesta situação, o apresentador escolherá ao acaso uma dessas duas portas (B ou C) para abrir. Considere que a escolha recaia sobre a porta B, por exemplo.

Ressalte-se, por oportuno, que no caso em que a escolha inicial do participante é errada, o apresentador não abre ao acaso uma das portas que não foram escolhidas, uma vez que ele não irá mostrar a porta que tem a Ferrari. Neste caso, “[...] o apresentador intervém no que, até agora, foi um processo aleatório. Assim, o processo não é mais aleatório [...]" (MLODINOW, 2009, p. 64). Com essa atitude, o apresentador está dando uma informação extremamente relevante, uma vez que se a Ferrari estava em uma das portas que não foi escolhida inicialmente (B ou C), então agora o carro só pode estar na porta que não foi aberta, ou seja, na porta C.

Diante do exposto, toda vez que o participante fizer a escolha inicial errada da porta que tem a Ferrari atrás, ao trocar de porta ganhará o carro. Sabendo que as chances de que tenha errado em sua escolha inicial são de $\frac{2}{3}$, então caso troque de porta, suas chances de ganhar o carro serão de $\frac{2}{3}$ e, consequentemente, a probabilidade de que ganhe permanecendo na porta inicial é igual a $\frac{1}{3}$. Conclui-se, portanto, que a probabilidade de ganhar o carro trocando de porta é o dobro da probabilidade não trocando de porta.

Segue abaixo um resumo da situação, por meio de uma ilustração da revista *The Economist*, em 1999.

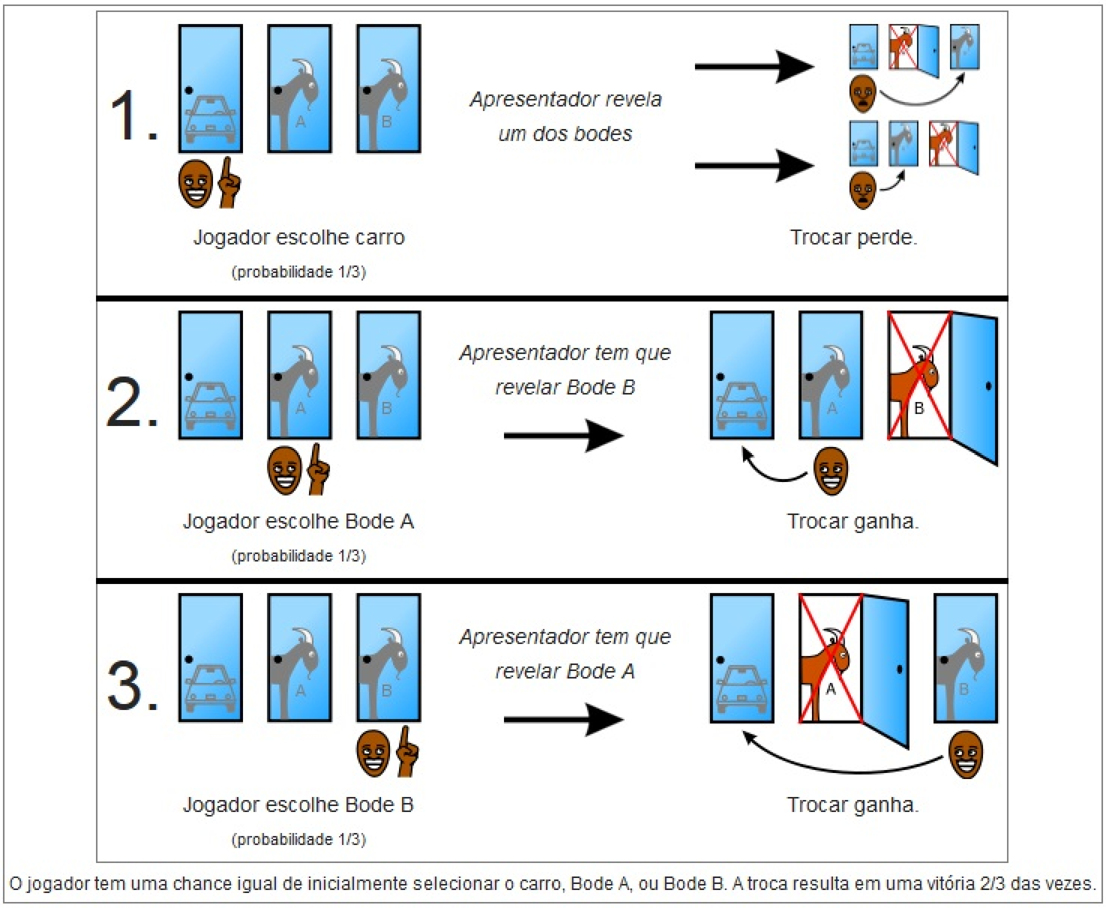


Figura 3.11: Problema dos bodes.

Para "facilitar" mais ainda o entendimento do raciocínio utilizado para resolver o problema de Monty Hall, pode-se imaginar o mesmo problema, mas agora com 100 portas, no lugar de 3 portas. Considerando que as portas foram numeradas de 1 a 100 e que atrás de apenas uma delas exista uma Ferrari e nas outras 99 bodes. Escolhendo inicialmente a porta de número 26, por exemplo, a chance de que a Ferrari esteja atrás dessa porta é de 1 em 100, ao passo que a probabilidade de que ela esteja atrás de uma das outras 99 portas é igual a $\frac{99}{100}$. Do mesmo jeito que na questão clássica, o apresentador abre 98 portas sempre revelando em cada uma delas um bode atrás. Ele pergunta se o convidado quer trocar ou permanecer na porta escolhida. Nota-se de maneira mais cristalina ainda, que, permanecendo na porta de número 26, a chance do participante ganhar o carro ainda é de apenas 1% e a probabilidade de que o carro esteja atrás de uma das outras portas ainda é igual a 99%. No entanto, com a participação do apresentador, sobra somente uma porta, que "representa" todas as outras 99. Desse modo, a probabilidade de ganhar o carro trocando de porta é igual a $\frac{99}{100}$, enquanto ficando na porta de número 26 é de apenas $\frac{1}{100}$. Assim, conclui-se que é muito mais vantajoso trocar de porta nas condições e regras da atração em tela.

Uma outra maneira de resolver o problema de Monty Hall é utilizar probabilidade condicional, em especial o Teorema de Bayes, já explanado anteriormente.

Sejam P_1, P_2 e P_3, os eventos relacionados com o fato da Ferrari (prêmio desejado) está atrás da porta P_k. Observa-se que P_1, P_2 e P_3 são eventos mutuamente exclusivos.

Sejam A_1, A_2 e A_3, os eventos relacionados à abertura da porta A_k pelo apresentador do programa.

Considere que o participante do programa escolha a porta 1. Daí, utilizando probabilidade condicional, tem-se que:

- $P(A_2|P_1) = \frac{1}{2}$, uma vez que o apresentador pode abrir as portas 2 e 3 com os bodes;
- $P(A_2|P_2) = 0$, pois o apresentador jamais poderá abrir a porta que tem a Ferrari;
- $P(A_2|P_3) = 1$, já que o prêmio máximo estando na porta 3, o apresentador não a abrirá, bem como não poderá abrir a escolhida pelo participante.

Assim, como $A_2 = (P_1 \cap A_2) \cup (P_2 \cap A_2) \cup (P_3 \cap A_2)$, então

$$P(A_2) = P(P_1 \cap A_2) + P(P_2 \cap A_2) + P(P_3 \cap A_2).$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(P_1) \cdot P(A_2|P_1) + P(P_2) \cdot P(A_2|P_2) + P(P_3) \cdot P(A_2|P_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sabendo-se que o participante escolheu a porta 1 e considerando que o mesmo decida permanecer em tal porta, a probabilidade, pelo teorema de Bayes, é dada por

$$P(P_1|A_2) = \frac{P(P_1) \cdot P(A_2|P_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Caso o participante decida mudar para porta 3, a probabilidade é dada por

$$P(P_3|A_2) = \frac{P(P_3) \cdot P(A_2|P_3)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Conclui-se, mais uma vez, que trocando de porta, o participante tem o dobro de chances de ganhar a Ferrari do que permanecendo na porta escolhida inicialmente.

Ressalte-se que muitos matemáticos e estudiosos do tema em tela fizeram simulações computacionais, entre os quais o matemático húngaro Paul Erdös (1913-1966) de acordo com as regras do programa *Let's Make a Deal*, obtendo resultados extremamente próximos do resultado apresentado acima (SCHECHTER,1998 apud *MLODINOW*, 2009). Além disso, consoante Mlodinow (2009, p. 64),

> [...] As estatísticas feitas a partir do programa de televisão demonstram esse fato: houve duas vezes mais vencedores entre as pessoas que, ao se verem na situação descrita pelo problema, mudaram sua escolha do que entre as que persistiram na escolha inicial.

Por fim, cumpre salientar que alguns problemas famosos são resolvidos com raciocínio análogo ao problema de Monty Hall, dentre os quais o "paradoxo da caixa de Bertand", do matemático Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), na obra *Calcul des probabilités* (1889), já abordado e resolvido neste trabalho e "o problema dos três prisioneiros", do matemático americano Martin Gardner (1914-2010), apresentado na revista *Scientific American*, em 1959. Esse problema é enunciado a seguir, com pequenas alterações do texto original.

Três prisioneiros, A, B e C, estão em celas separadas e por terem cometidos crimes graves foram condenados à morte. Posteriormente, o governador decidiu conceder indulto a um deles ao acaso. O diretor da prisão sabe qual deles será perdoado, mas não tem permissão para revelar o nome do prisioneiro que será solto. Sabendo disso, o prisioneiro A implora ao diretor para que ele pelo menos revele a identidade de um dos outros dois que vai ser executado, já que um deles, ao menos terá esse destino. Diante de muita insistência, o diretor acaba cedendo a esse pedido e diz para A que o prisioneiro B vai ser executado. Com essa informação o prisioneiro acredita que a sua probabilidade de sobrevivência subiu de $\frac{1}{3}$ para $\frac{1}{2}$, uma vez que agora ou ele ou C será solto. Esta probabilidade está correta? Qual a probabilidade de que C receba o indulto?

Utilizando raciocínio semelhante ao do problema de Monty Hall, a probabilidade de que C receba o indulto é igual a $\frac{2}{3}$.

3.6 O Problema dos Aniversários e sua Generalização

3.6.1 Introdução

Um problema bastante intrigante e interessante de Probabilidade para alunos do Ensino Médio é o problema clássico dos aniversários. É um questionamento razoavelmente simples, mas que conduz a resultados surpreendentes. A seguir o enunciado e sua resolução com suas conclusões.

Em um grupo de n pessoas, qual é a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia? (considerando que nenhuma das pessoas tenha nascido em ano bissexto.)

3.6.2 Resolução

Inicialmente, pode-se determinar a probabilidade de não haver duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia. Para isso, deve-se perceber que o número de elementos do espaço amostral é dado por $365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365$ (n vezes), ou seja, 365^n, uma vez que para cada uma das pessoas do grupo, há 365 possibilidades de data de aniversário. Além disso, a quantidade de situações em que todas as pessoas aniversariam em dias distintos é dado por $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (366 - n)$, com r fatores em tal produto. Assim, utilizando a probabilidade de Laplace, tem-se que a probabilidade de não haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia é dada por

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)}$$

e, consequentemente, a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia (considerando que nenhuma das pessoas tenha nascido em ano bissexto) é dada por

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (366 - n)}{365^n} \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365 - n)}.$$

O quadro 3.3 fornece, para alguns valores de n, a probabilidade desejada no caso em tela.

Quadro 3.3: Probabilidade aproximada em função de n.

n	**Probabilidade Aproximada**
5	2,7%
10	11,7%
12	16,7%
15	25%
20	41,1%
22	47,6%
23	50,7%
25	57%
30	70,6%
40	89,1%
41	90,3%
50	97%
57	99,01%
60	99,4%

O grafico 3.12 da probabilidade (em termos percentuais) em função de n ajuda na compreensão do problema.

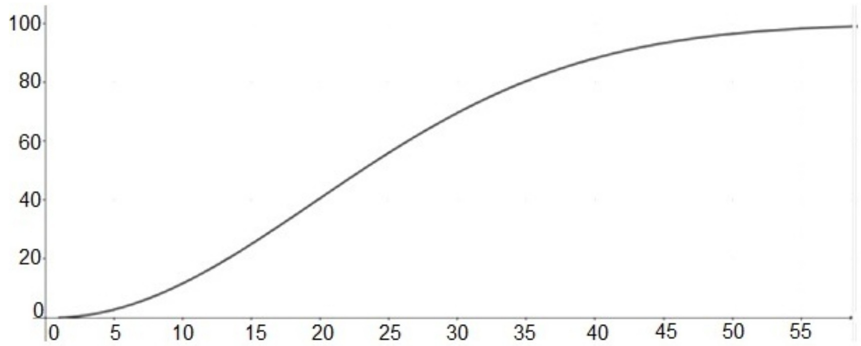


Figura 3.12: Gráfico do Problema dos Aniversários.

3.6.3 Generalização

Considere uma mesa com n objetos. Deseja-se escolher k objetos dessa mesa ao acaso com reposição.
a) Qual a probabilidade de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez?
b) Qual a probabilidade de que pelo menos um objeto seja escolhido mais de uma vez?

3.6.4 Resolução

a) A quantidade de elementos do espaço amostral é igual a n^k. O número de casos favoráveis ao evento, qual seja o de que nenhum objeto seja escolhido mais de uma vez é igual a $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ (k fatores). A probabilidade é portanto, igual a

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}.$$

b) Utilizando a probabilidade do evento complementar, a probabilidade citada é igual a

$$1-\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k}.$$

3.7 Problemas de Probabilidade envolvendo a Mega-Sena

Figura 3.13: Apresentação inicial da Mega-Sena no site www.loterias.caixa.gov.br

Indrodução

A história das loterias no Brasil remonta ao ano de 1784 em Vila Rica, atual cidade de Ouro Preto em Minas Gerais. O dinheiro arrecadado com a venda dos bilhetes serviu para a construção de prédios públicos como a Câmara de Vereadores e a cadeia. Tal prática aos poucos foi difundida para o restante do país, através de concessões a particulares e principalmente aos hospitais, orfanatos e às Santas Casas. Apenas no ano de 1844, o imperador Dom Pedro II, através do Decreto nº 357, de 27 de abril de 1844, regulamentou o funcionamento das loterias no país. (APARECIDA, 2007).

Em 1961, o presidente Jânio Quadros passou a organização e administração das loterias para a Caixa Econômica Federal, proibindo diversos tipos de jogos e apostas praticados em cassinos e bingos, por exemplo.

A Mega-Sena, que constitui um dos objetos de análise da presente dissertação, foi criada em março de 1996 e é uma das 10 loterias administradas pela Caixa Econômica Federal (as outras são: Loteca, Quina, Lotomania, Lotofácil, Dupla Sena, Timemania, Lotogol, Federal e Instantânea). Em tal loteria, são sorteados seis números (as dezenas) diferentes de um total de sessenta dezenas (de 01 e 60). O acertador dos 6 números sorteados faz a sena. Ainda é possível ganhar prêmios ao acertar 4 (quadra) ou 5 (quina) números dentre os 60 disponíveis no volante de apostas.

São realizados dois sorteios por semana, às quartas e aos sábados. Em várias ocasiões, verifica-se um número gigantesco de pessoas procurando as casas lotéricas e fazendo suas apostas, sobretudo em situações especiais como é o caso da mega da virada, cujo sorteio é feito no último dia do ano e não permite acumulação. O prêmio em 2014 da Mega da virada ultrapassou 263 milhões de reais, sendo o maior prêmio pago pelas loterias no Brasil. De acordo com a Caixa Econômica Federal mais de 348 milhões de apostas foram feitas em tal sorteio.

Descricão do Jogo

Na Mega-Sena, o apostador marca um mínimo de 6 e um máximo de 15 números no cartão (também chamado de volante), que possui 60 números. O apostador, caso deseje, pode permitir que o sistema escolha os números para ele (jogo chamado de surpresinha). É possível também concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos, caracterizando o jogo denominado Teimosinha.

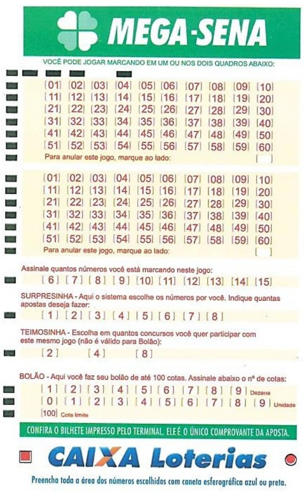


Figura 3.14: Volante da Mega-Sena

O preço cobrado pelas dezenas apostadas é calculado a partir do total de agrupamentos de seis dezenas que um apostador faz ao jogar na Mega-Sena. Desse modo, se um jogador marca os números 01 − 02 − 03 − 04 − 05 − 06 − 07, ele está concorrendo para o acerto da Sena com as seguintes combinações:

- 01 − 02 − 03 − 04 − 05 − 06
- 01 − 02 − 03 − 04 − 05 − 07
- 01 − 02 − 03 − 05 − 06 − 07
- 01 − 02 − 04 − 05 − 06 − 07
- 01 − 03 − 04 − 05 − 06 − 07
- 02 − 03 − 04 − 05 − 06 − 07
- 01 − 02 − 03 − 04 − 06 − 07

Assim, considerando que cada aposta simples de seis dezenas custa atualmente 3,50 reais, uma aposta de sete dezenas custa $7 \cdot 3,50 = R\$\,24,50$. De modo geral, apostando x números, o total de agrupamentos seis a seis, em que a ordem não tem relevância, é dada por: $C_{x,6} = \dfrac{x!}{6!(x-6)!}$. Em consonância com o exposto, um apostador que marca nove dezenas, por exemplo, estará concorrendo com $C_{9,6} = 84$ jogos simples e essa aposta custará $R\$\,84,00$. O quadro 3.4 mostra os valores cobrados em cada uma das situações possíveis de apostas.

Quadro 3.4: Valores cobrados na Mega-Sena em relação à quantidade de números jogados.

Quantidade de números jogados	**Valores cobrados (R$)**
6	3,50
7	24,50
8	98,00
9	294,00
10	735,00
11	1.617,00
12	3,234,00
13	6.006,00
14	10.510,50
15	17.517,50

Premiação

O prêmio bruto corresponde a 46% da arrecadação, já computado o adicional destinado ao Ministério do Esporte. Dessa porcentagem:

- 35% são distribuídos entre os acertadores dos 6 números sorteados (Sena);
- 19% entre os acertadores de 5 números (Quina);
- 19% entre os acertadores de 4 números (Quadra);
- 22% ficam acumulados e distribuídos aos acertadores dos 6 números nos concursos de final 0 ou 5.
- 5% ficam acumulados para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano de final zero ou 5.

Acumulação

Conforme visto anteriormente, a Caixa Econômica Federal sorteia seis dezenas distintas e são premiadas as apostas de quem acerta 4 (quadra), 5 (quina) ou todas as seis (sena) dezenas sorteadas. Como há $C_{50,6} = 50.063.860$ resultados possíveis em um sorteio da Mega-Sena, em muitas extrações ninguém acerta a sena, ensejando a acumulação do valor do prêmio nessa faixa para o concurso seguinte. Daí, observando que quando o premio acumula, há um aumento significativo do interesse dos apostadores e, consequentemente, da quantidade de apostas, a Caixa Econômica criou a acumulação programada de uma parte do prêmio bruto arrecadado (vide tópico acima) para ser acrescentada aos sorteios de final 0 ou 5, bem como de 5% para a primeira faixa - sena - do último concurso do ano de final zero ou 5, concurso esse conhecido como Mega da Virada.

Mega da Virada

O último concurso da Mega-Sena de final 0 ou 5 de cada ano civil é denominado Mega da Virada. Tal concurso tem regras especiais, que são disponibilizadas a seguir.

Prazo de comercialização

Durante os meses de novembro e dezembro, com captação de apostas independente e concomitante com os demais concursos da modalidade, utilizando-se de volantes específicos (a CAIXA informará com antecedência a data do início das vendas e o número do concurso da Mega da Virada, que será sorteado no dia 31/12).

Distribuição do valor destinado ao pagamento dos prêmios

- 62% – primeira faixa – seis acertos (sena);
- 19% – segunda faixa – cinco acertos (quina);
- 19% – terceira faixa – quatro acertos (quadra).

Composição da primeira faixa de premiação (sena)

- 62% do percentual destinado a prêmios, de acordo com a arrecadação do respectivo concurso;
- O total acumulado para o último concurso de final zero ou cinco do ano civil;
- O total acumulado para o concurso de final zero ou cinco;
- O total acumulado na primeira faixa (sena) do concurso anterior, quando houver.

Critério de acumulação

- Não existindo apostas premiadas com seis números (sena), o prêmio será rateado entre os acertadores de cinco números (quina);
- Não existindo apostas premiadas com seis e cinco números, o prêmio será rateado entre os acertadores de quatro números (quadra);
- Não existindo apostas premiadas em quaisquer faixas de premiação, os valores acumulam para o concurso seguinte, nas respectivas faixas.

É importante ressaltar que os prêmios prescrevem 90 dias após a data do sorteio. Após esse prazo, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.

Bolão

De acordo com administradora da Mega-Sena, o Bolão Caixa é a possibilidade que o apostador tem de realizar apostas em grupo. Basta preencher o campo próprio no volante ou solicitar ao atendente da lotérica. Pode-se comprar cotas de bolões organizados pelas Unidades Lotéricas. Neste caso, poderá ser cobrada uma tarifa de serviço adicional de até 35% do valor da cota. Na Mega-Sena, os bolões tem preço mínimo de $R\$\,10,00$. Porém, cada cota não pode ser inferior a $R\$\,4,00$. É possível realizar um bolão de no mínimo duas e no máximo 100 cotas.

Arrecadação

Parte do valor arrecadado com as apostas (54% do total) é repassada ao governo federal, que pode, então, realizar investimentos nas áreas de saúde, educação, segurança, cultura e esporte, atendendo os percentuais delineados no quadro 3.5.

Quadro 3.5: Destinação percentual dos recursos.

Destino	**Valor percentual**
Prêmio total	51%
Fundo Nacional da Cultura	3%
Comitê Olímpico Brasileiro	1,7%
Cpmitê Paraolímpico Brasileiro	0,30%
Prêmio Bruto	46%
Imposto de Renda Federal	13,8%
Prêmio Líquido	32,20
Seguridade Social	18,10
FIES - Crédito Educativo	7,76%
Fundo Penitênciário Nacional	3,14%
Desp. de Custeio e Manut. de Serviços	20%
Tarifa de Administração	10%
Comissão dos Lotéricos	9%
FDL - Fundo Desenv. das Loterias	1%
Renda Bruta	100%
Adicional p/ Sec. Nacional de Esportes	4,5%
Arrecadação Total	104,5%

Fonte: Caixa Econômica Federal

Cálculo de Probabilidades na Mega Sena

Probabilidade de acertar os 6 números da Mega-Sena (acertar a sena)

Aposta com 6 números:

Em conformidade com o descrito anteriormente e utilizando os conhecimentos advindos da Análise Combinatória, calcular-se-á, a seguir, as probabilidades de acerto no jogo da Mega-Sena, levando em consideração todas as possibilidades de apostas com diferentes quantidades de números.

O número de elementos do espaço amostral, ou seja, a quantidade de combinações possíveis de se formar com os 60 números constantes no cartão da Mega-Sena é dado por $C_{60,6}$. Com uma aposta de seis números tem-se apenas uma possibilidade de acerto, ou seja, $C_{6,6}$ e, portanto, a probabilidade de acerto no caso em tela é dada por:

$$\frac{C_{6,6}}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860} \cong 0,000002\%$$

Aposta com 7 números:

Em tal caso, podem ser formadas $C_{7,6} = 7$ combinações possíveis. Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade desejada é igual a:

$$\frac{C_{7,6}}{C_{60,6}} = \frac{7}{50.063.860} \cong 0,000014\% \text{ (1 em 7.151.980)}$$

Aposta com 8 números:

Neste caso, podem ser formadas $C_{8,6} = 28$ combinações possíveis. Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade desejada é igual a:

$$\frac{C_{8,6}}{C_{60,6}} = \frac{28}{50.063.860} \cong 0,000056\% \text{ (1 em 1.787.995)}$$

Procedendo de modo semelhante aos casos anteriores e sabendo que o número de elementos do espaço amostral não sofre alteração, tem-se as seguintes probabilidades:

Aposta com 9 números:

$$\frac{C_{9,6}}{C_{60,6}} = \frac{84}{50.063.860} \cong 0,00017\% \text{ (1 em 595.998)}$$

Aposta com 10 números:

$$\frac{C_{10,6}}{C_{60,6}} = \frac{210}{50.063.860} \cong 0,00042\% \text{ (1 em 238.399)}$$

Aposta com 11 números:

$$\frac{C_{11,6}}{C_{60,6}} = \frac{462}{50.063.860} \cong 0,00092\% \text{ (1 em 108.363)}$$

Aposta com 12 números:

$$\frac{C_{12,6}}{C_{60,6}} = \frac{924}{50.063.860} \cong 0,0018\% \text{ (1 em 54.182)}$$

Aposta com 13 números:

$$\frac{C_{13,6}}{C_{60,6}} = \frac{1716}{50.063.860} \cong 0,0034\% \text{ (1 em 29.175)}$$

Aposta com 14 números:

$$\frac{C_{14,6}}{C_{60,6}} = \frac{3003}{50.063.860} \cong 0,006\% \text{ (1 em 16.671)}$$

Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15,6}}{C_{60,6}} = \frac{5005}{50.063.860} \cong 0,01\% \text{ (1 em 10.003)}$$

Probabilidade de acertar exatamente 5 números na Mega-Sena (acertar a quina)

Aposta com 6 números:

Nesta situação, podem ser formadas $C_{6,5} = 6$ "quinas". Tomada a decisão D_1, qual seja a "escolha" da quina, tem-se $C_{54,1} = 54$ modos para tomar a decisão D_2, qual seja a "escolha' da sexta dezena que comporá os seis números do sorteio, ou seja, constituída a quina entre os seis números apostados, o sexto número poderá ser qualquer um dos 54 restantes do cartão que não foram apostados. Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade de acerto da quina é igual a:

$$\frac{C_{6,5} \cdot C_{54,1}}{C_{60,6}} = \frac{6 \cdot 54}{50.063.860} = \frac{324}{50.063.860} \cong 0,00065\% \text{ (1 em 154.518)}$$

Aposta com 7 números:

Em tal caso, podem ser formadas $C_{7,5} = 21$ "quinas". Formada a quina (decisão D_1), o sexto número poderá ser qualquer um dos 53 restantes ($C_{53,1}$) que não foram apostados (decisão D_2). Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade de acerto da quina é igual a:

$$\frac{C_{7,5} \cdot C_{53,1}}{C_{60,6}} = \frac{21 \cdot 53}{50.063.860} = \frac{1113}{50.063.860} \cong 0,0022\% \text{ (1 em 44.981)}$$

Aposta com 8 números:

No caso em tela, podem ser formadas $C_{8,5} = 56$ "quinas". Formada a quina (decisão D_1), o sexto número poderá ser qualquer um dos 52 restantes ($C_{52,1}$) que não foram apostados (decisão D_2). Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade de acerto da quina é igual a:

$$\frac{C_{8,5} \cdot C_{52,1}}{C_{60,6}} = \frac{56 \cdot 52}{50.063.860} = \frac{2912}{50.063.860} \cong 0,0058\% \text{ (1 em 17.192)}$$

Procedendo de modo semelhante aos casos anteriores e sabendo que o número de elementos do espaço amostral não sofre alteração, tem-se as seguintes probabilidades:

Aposta com 9 números:

$$\frac{C_{9,5} \cdot C_{51,1}}{C_{60,6}} = \frac{126 \cdot 51}{50.063.860} = \frac{6426}{50.063.860} \cong 0,013\% \text{ (1 em 7.791)}$$

Aposta com 10 números:

$$\frac{C_{10,5} \cdot C_{50,1}}{C_{60,6}} = \frac{252 \cdot 50}{50.063.860} = \frac{12600}{50.063.860} \cong 0,025\% \text{ (1 em 3.973)}$$

Aposta com 11 números:

$$\frac{C_{11,5} \cdot C_{49,1}}{C_{60,6}} = \frac{462 \cdot 49}{50.063.860} = \frac{22638}{50.063.860} \cong 0,045\% \text{ (1 em 2.211)}$$

Aposta com 12 números:

$$\frac{C_{12,5} \cdot C_{48,1}}{C_{60,6}} = \frac{792 \cdot 48}{50.063.860} = \frac{38016}{50.063.860} \cong 0,076\% \text{ (1 em 1.317)}$$

Aposta com 13 números:

$$\frac{C_{13,5} \cdot C_{47,1}}{C_{60,6}} = \frac{1287 \cdot 47}{50.063.860} = \frac{60489}{50.063.860} \cong 0,121\% \text{ (1 em 828)}$$

Aposta com 14 números:

$$\frac{C_{14,5} \cdot C_{46,1}}{C_{60,6}} = \frac{2002 \cdot 46}{50.063.860} = \frac{92092}{50.063.860} \cong 0,184\% \text{ (1 em 524)}$$

Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15,5} \cdot C_{45,1}}{C_{60,6}} = \frac{3003 \cdot 45}{50.063.860} = \frac{135135}{50.063.860} \cong 0,27\% \text{ (1 em 370)}$$

Probabilidade de acertar a quadra (acertar exatamente 4 números):

Aposta com 6 números:

No caso em tela, podem ser formadas $C_{6,4} = 15$ "quadras". Tomada a decisão D_1, qual seja a "escolha" da quadra, tem-se $C_{54,2} = 1.431$ modos para tomar a decisão D_2, qual seja a "escolha" das duas dezenas não apostadas que comporão os seis números do sorteio. Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade de acerto da quadra é igual a:

$$\frac{C_{6,4} \cdot C_{54,2}}{C_{60,6}} = \frac{15 \cdot 1431}{50.063.860} = \frac{21465}{50.063.860} \cong 0,043\% \text{ (1 em 2.332)}$$

Aposta com 7 números:

Em tal situação de aposta, podem ser formadas $C_{7,4} = 35$ "quadras". Tomada a decisão D_1, qual seja a "escolha" da quadra, tem-se $C_{53,2} = 1.378$ modos para tomar a decisão D_2, qual seja a "escolha" das duas dezenas não apostadas que comporão os seis números do sorteio. Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade de acerto da quadra é igual a:

$$\frac{C_{7,4} \cdot C_{53,2}}{C_{60,6}} = \frac{35 \cdot 1378}{50.063.860} = \frac{48230}{50.063.860} \cong 0,096\% \text{ (1 em 1.038)}$$

Aposta com 8 números:

Nesta situação, podem ser formadas $C_{8,4} = 70$ "quadras". Tomada a decisão D_1, qual seja a "escolha" da quadra, tem-se $C_{52,2} = 1.326$ modos para tomar a decisão D_2, qual seja a "escolha" das duas dezenas não apostadas que comporão os seis números do sorteio. Como o número de elementos do espaço amostral é $C_{60,6}$, tem-se que a probabilidade de acerto da quadra é igual a:

$$\frac{C_{8,4} \cdot C_{52,2}}{C_{60,6}} = \frac{70 \cdot 1326}{50.063.860} = \frac{92820}{50.063.860} \cong 0,1854\% \text{ (1 em 539)}$$

Procedendo de modo semelhante aos casos anteriores e sabendo que o número de elementos do espaço amostral não sofre alteração, tem-se as seguintes probabilidades:

Aposta com 9 números:

$$\frac{C_{9,4} \cdot C_{51,2}}{C_{60,6}} = \frac{126 \cdot 1275}{50.063.860} = \frac{160650}{50.063.860} \cong 0,321\% \text{ (1 em 312)}$$

Aposta com 10 números:

$$\frac{C_{10,4} \cdot C_{50,2}}{C_{60,6}} = \frac{210 \cdot 1225}{50.063.860} = \frac{257250}{50.063.860} \cong 0,514\% \text{ (1 em 195)}$$

Aposta com 11 números:

$$\frac{C_{11,4} \cdot C_{49,2}}{C_{60,6}} = \frac{330 \cdot 1176}{50.063.860} = \frac{388080}{50.063.860} \cong 0,7752\% \text{ (1 em 129)}$$

Aposta com 12 números:

$$\frac{C_{12,4} \cdot C_{48,2}}{C_{60,6}} = \frac{495 \cdot 1128}{50.063.860} = \frac{558360}{50.063.860} \cong 1,1153\% \text{ (1 em 90)}$$

Aposta com 13 números:

$$\frac{C_{13,4} \cdot C_{47,2}}{C_{60,6}} = \frac{715 \cdot 1081}{50.063.860} = \frac{772915}{50.063.860} \cong 1,544\% \text{ (1 em 65)}$$

Aposta com 14 números:

$$\frac{C_{14,4} \cdot C_{46,2}}{C_{60,6}} = \frac{1001 \cdot 1035}{50.063.860} = \frac{1036035}{50.063.860} \cong 2,07\% \text{ (1 em 48)}$$

Aposta com 15 números:

$$\frac{C_{15,4} \cdot C_{45,2}}{C_{60,6}} = \frac{1365 \cdot 990}{50.063.860} = \frac{1351350}{50.063.860} \cong 2,7\% \text{ (1 em 37)}$$

Em resumo, tem-se o seguinte quadro 3.6:

Quadro 3.6: Probabilidades de acertos na Mega-Sena em relação à quantidade de números jogados.

Quantidade de números jogados	Probabilidade de acerto (1 em)		
	Sena	Quina	Quadra
6	50.063.860	154.518	2.332
7	7.151.980	44.981	1.038
8	1.787.995	17.192	539
9	595.998	7.791	312
10	238.399	3.973	195
11	108.363	2.211	129
12	54.182	1.317	90
13	29.175	828	65
14	16.671	544	48
15	10.003	370	37

Problemas Envolvendo a Mega-Sena

Problema 1. (FACID/DEVRY - 2015) A Mega-Sena é uma modalidade de loteria (da Caixa Econômica Federal), com sorteios ordinários duas vezes por semana. Para ganhar o prêmio máximo da Mega-Sena é necessário acertar a sena, o que significa obter coincidência entre seis dos números apostados e os seis números sorteados, de um total de sessenta dezenas (de 01 a 60), independentemente da ordem da aposta ou da ordem do sorteio. Um apostador, muito insistente e supersticioso, acredita que, no próximo sorteio, os números sorteados estarão entre os seus 11 números "de sorte". Para garantir sua vitória, ele resolveu então fazer todos os jogos possíveis, com 6 dezenas escolhidas entre os seus 11 números "de sorte". Sabendo que o preço da aposta simples da Mega-Sena (6 dezenas) é de $R\$\,3,50$, conclui-se que esse apostador gastou a quantia de:

a) $R\$\,1.215,00$

b) $R\$\,1.617,00$

c) $R\$\,1.928,00$

d) $R\$\,2.198,00$

e) $R\$\,2.580,00$

Resolução.

Depreende-se do enunciado que o número de jogos possíveis com 6 dezenas escolhidas entre os 11 números "de sorte" do apostador é dado por $C_{11,6} = 462$. Como cada aposta simples de seis dezenas custa $R\$\,3,50$, o apostador gastou $462 \cdot 3,5 = R\$\,1.617,00$. Desse modo, a alternativa correta é a letra B.

Problema 2. (UEL - 2011) O jogo da Mega-Sena consiste no sorteio de 6 números distintos entre 1 e 60. Um apostador escolhe 20 números distintos e faz todos os $C_{20,6}$ jogos possíveis de serem realizados com os 20 números. Se ele acertar os seis números sorteados, entre os vinte escolhidos, além da aposta sorteada com a sena, quantas apostas premiadas com a quina (cinco números corretos) ele conseguirá?

a) 75 apostas

b) 84 apostas

c) $C_{20,5}$ apostas

d) $C_{6,5}$ apostas

e) 70 apostas

Resolução.

Decisão D_1 – "Escolha" dos jogos de 5 números no volante premiado: $C_{6,5} = 6$;
Decisão D_2 – Para cada jogo com exatamente 5 números sorteados (quina), tem-se $20 - 6 = 14$ possibilidades para o sexto número.

Desse modo, utilizando o princípio multiplicativo, o número de apostas premiadas com a quina que o apostador conseguirá no caso em tela é dado por $6 \cdot 14 = 84$ e, portanto, a alternativa correta é a letra B.

Problema 3. (UFPA - 2008) No Concurso da Mega-Sena são sorteados 6 números de 01 a 60. Por exemplo, o concurso 924 teve como números sorteados 02, 20, 21, 27, 51 e 60, ou seja, houve um par de números consecutivos, 20 e 21. A probabilidade de que no jogo da Mega-Sena haja um par de números consecutivos sorteados é:

a) $\dfrac{54!}{60!}$

b) $\dfrac{53!}{59!}$

c) $1 - \dfrac{56!55!}{49!60!}$

d) $1 - \dfrac{54!53!}{48!60!}$

e) $1 - \dfrac{55!54!}{49!60!}$

Resolução.

Inicialmente, sabe-se que o número de elementos do espaço amostral na Mega-Sena é dado por $C_{60,6}$. Para determinar a quantidade de elementos do evento, qual seja que no jogo da Mega-Sena haja um par de números consecutivos sorteados, pode-se primeiramente determinar o número de elementos em que não há um par de números consecutivos e, posteriormente, usar a probabilidade do evento complementar $(P(E) + P(E^C) = 1)$. Para tal intento, pode-se utilizar o primeiro lema de Kaplansky "o número de subconjuntos com k elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é dado por $C_{n-k+1,k}$". Assim, tem-se no caso ora configurado que o número de subconjuntos de 6 elementos que podem ser formados no jogo da Mega-Sena em que não existe um par de números consecutivos é dado por $C_{60-6+1,6} = C_{55,6} = \dfrac{55!}{6!49!}$. Daí, a probabilidade desejada é dada por

$$1 - \frac{C_{55,6}}{C_{60,6}} = 1 - \frac{\dfrac{55!}{6!49!}}{\dfrac{60!}{6!54!}} = 1 - \frac{55!54!}{60!49!} \cong 42,1\%.$$

Conclui-se, então, que a alternativa correta é a letra E.

Problema 4. (UEL 2001) Uma aposta na MEGA SENA (modalidade de apostas da Caixa Econômica Federal) consiste na escolha de 6 dentre os 60 números de 01 a 60. O número máximo possível de apostas diferentes, cada uma delas incluindo os números 12, 22 e 23, é igual a:

a) $(60 \cdot 59 \cdot 58)/(1 \cdot 2 \cdot 3)$

b) $(60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)$

c) $[(60 \cdot 59 \cdot 58)/(1 \cdot 2 \cdot 3) - (57 \cdot 56 \cdot 55)/(1 \cdot 2 \cdot 3)]$

d) $(57 \cdot 56 \cdot 55)/(1 \cdot 2 \cdot 3)$

e) $(57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54 \cdot 53 \cdot 52)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)$

Resolução.

Como os números 12, 22 e 23 estão inclusos, restariam 3 números a serem escolhidos de um total de 57 números. Assim, tem-se $C_{57,3} = \dfrac{57!}{3!54!} = \dfrac{57 \cdot 56 \cdot 55}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ maneiras. Assim, a alternativa correta é a letra D.

Problema 5. (ENEM 2009) A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto $\{01, 02, 03, \ldots, 59, 60\}$, custava $R\$\,1,50$.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor.

b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor

c) 4 vezes menor.

d) 9 vezes menor.

e) 14 vezes menor.

Resolução.

A probabilidade de se acertar a quina fazendo uma única aposta com nove dezenas é dada por

$$\frac{C_{9,5} \cdot C_{51,1}}{C_{60,6}} = \frac{126 \cdot 51}{C_{60,6}} = \frac{6.426}{C_{60,6}},$$

ao passo que a probabilidade de acertar a quina com 84 apostas de seis dezenas diferentes é dada por

$$\frac{84 \cdot C_{6,5} \cdot C_{54,1}}{C_{60,6}} = \frac{84 \cdot 6 \cdot 54}{C_{60,6}} = \frac{27.216}{C_{60,6}}.$$

Desse modo, evidencia-se que a probabilidade de acertar a quina fazendo uma única aposta com nove dezenas é 4 vezes menor que a probabilidade de acertar a quina com 84 apostas de seis dezenas diferentes. Assim, a alternativa correta é a letra C.

Problema 6. (UEMG 2013) O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos de 1 a 60. Um apostador, depois de vários anos de análise, deduziu que, no próximo sorteio, os 6 números sorteados estariam entre os 10 números que tinha escolhido. Sendo assim, com a intenção de garantir seu prêmio na Sena, ele resolveu fazer todos os possíveis jogos com 6 números entre os 10 números escolhidos. Quantos reais ele gastará para fazê-los, sabendo que cada jogo com 6 números custa $R\$\,2,00$?

a) $R\$\,540,00$

b) $R\$\,302.400,00$

c) $R\$\,420,00$

d) $R\$\,5.040,00$

Resolução.

O número de jogos possíveis com 6 números escolhidos entre os 10 números escolhidos pelo apostador é dado por $C_{10,6} = 210$. Como cada jogo com seis números custa $R\$\,2,00$, o apostador gastou $210 \cdot 2 = R\$\,420,00$. Desse modo, a alternativa correta é a letra C.

Problema 7. (PUC-PR 2010) No jogo da Mega Sena, um apostador pode assinalar entre 6 e 15 números, de um total de 60 opções disponíveis. O valor da aposta é igual a $R\$\,2,00$ multiplicado pelo número de sequências de seis números que são possíveis, a partir daqueles números assinalados pelo apostador.

Por exemplo: se o apostador assinala 6 números, tem apenas uma sequência favorável e paga $R\$\,2,00$ pela aposta. Se o apostador assinala 7 números, tem sete sequencias favoráveis, ou seja, é possível formar sete sequências de seis números a partir dos sete números escolhidos. Neste caso, o valor da aposta é $R\$\,14,00$.
Considerando que se trata de uma aplicação de matemática, sem apologia a qualquer tipo de jogo, assinale a única alternativa CORRETA.

a) A aposta máxima custará $R\$\,5.005,00$.

b) Uma aposta com 14 números assinalados custará entre $R\$\,3.000,00$ e $R\$\,3.050,00$.

c) Apostar dois cartões com dez números assinalados, ou cinco cartões com nove números assinalados, são opções equivalentes em termos de custo e de chance de ser ganhador do prêmio máximo.

d) O custo de uma aposta com 12 números assinalados será inferior a $R\$\,1.830,00$.

e) Apostar um cartão com 13 números assinalados custará o dobro da aposta de um cartão com 12 números assinalados.

Resolução.

a) Como $C_{15,6} = 5005$, a aposta máxima custará $5.005 \cdot 2 = R\$\,10.010,00$. Alternativa errada.
b) Sendo $C_{14,6} = 3003$, a aposta com 14 números assinalados custará $R\$\,6.006,00$ e, portanto não está entre $R\$\,3.000,00$ e $R\$\,3.050,00$. Alternativa errada.
c) A alternativa está correta, uma vez que $2 \cdot C_{10,6} = 2 \cdot 210 = 420$ e $5 \cdot C_{9,6} = 5 \cdot 84 = 420$. Assim, as opções consideradas são equivalentes em termos de custo e de chance de ser ganhador do prêmio máximo.
d) Como $C_{12,6} = 924$, o custo da aposta com 12 números assinalados será igual a

$R\$\,1.848,00$. Alternativa errada.
e) Como $C_{13,6} = 1,716$, o custo da aposta com 13 números assinalados será igual a $R\$\,3.432,00$ ($3.432 \neq 2 \cdot 1.848,00$). Alternativa errada.
Assim, a alternativa correta é a letra C.

Problema 8. (UFRGS 2000) No jogo da Mega Sena são sorteados seis números distintos dentre os que aparecem na figura.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Considere P a probabilidade de que nenhum número sorteado em um concurso seja sorteado no concurso seguinte. Dentre as alternativas a seguir, a melhor aproximação para P é

a) 90%

b) 80%

c) 70%

d) 60%

e) 50%

Resolução.

Considere que os números sorteados tenham sido $01 - 02 - 03 - 04 - 05 - 06$. Desse modo, para o concurso seguinte, restam 54 números possíveis para as seis dezenas sorteadas ($07 - 08 - 09 - 10 - \ldots - 59 - 60$). Assim, a probabilidade P é dada por:

$$\frac{C_{54,6}}{C_{60,6}} = \frac{\dfrac{54!}{6! \cdot 48!}}{\dfrac{60!}{6! \cdot 54!}} = \frac{54 \cdot 53 \cdot 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55} \cong 51,59\%$$

Desse modo, a melhor aproximação para P é a encontrada na alternativa E.

Problema 9. (AVALIAÇÃO 2 DA DISCIPLINA MA12 – 2013 DO PROFMAT) No sorteio da Mega-Sena, são sorteados, consecutivamente e sem reposição, 6 números de 1 a 60.
a) Qual é a probabilidade de que o número 23 seja um dos sorteados?
b) Qual é a probabilidade de que o último sorteado seja o maior dos 6 números que foram sorteados?

Resolução.

a) **1º modo:**
A probabilidade P de que o número 23 seja um dos sorteados na Mega-Sena é dado por

$$P = \frac{C_{59,5}}{C_{60,6}} = \frac{\dfrac{59!}{5! \cdot 54!}}{\dfrac{60!}{6! \cdot 54!}} = \frac{\dfrac{59!}{5! \cdot 54!}}{\dfrac{60 \cdot 59!}{6 \cdot 5! \cdot 54!}} = \frac{1}{10}.$$

(O número de casos favoráveis ao evento é igual a $C_{59,5}$, uma vez que presente o número 23 entre os sorteados, resta "escolher" 5 números distintos entre os 59 restantes).

2º modo (1ª solução oficial):
A probabilidade que 23 saia em cada um dos números sorteados é $\frac{1}{60}$. Logo, a probabilidade de que saia em um deles é $6 \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{10}$.

3º modo (2ª solução oficial):
O número de casos possíveis para o sorteio é $60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55$. O número de casos favoráveis é $6 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55$ (6 é o número de modos de se escolher a posição do 23 e o produto dos demais fatores dá o número de modos de se escolher os outros 5 números). A probabilidade de aparecer o 23 é, portanto, $\frac{6 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55} = \frac{1}{10}$.

Observação: as duas soluções oficiais contemplam a situação de posição dos números no sorteio, utilizando tal raciocínio tanto para o número de elementos do espaço amostral, como para o número de elementos do evento.

b) **1º modo:**
A probabilidade de que o maior número do sorteio apareça na primeira bola é a mesma probabilidade de que apareça na segunda bola, que é a mesma de que apareça na terceira bola, que é a mesma de que apareça na quarta bola, que é a mesma de que apareça na quinta bola, que é a mesma de que apareça na sexta bola. Desse modo, conclui-se que a

probabilidade de que o maior número apareça na última posição é $\frac{1}{6}$.

2º modo (Solução oficial):
Como os números são sorteados ao acaso, todas as ordenações dos números sorteados são igualmente prováveis. Logo, é igualmente provável que o maior número apareça em cada posição. Assim, a probabilidade de que apareça na última posição é $\frac{1}{6}$.

Problema 10. (PSIU – UFPI – 2003) Na mega-sena são sorteadas 6 dezenas de um universo de 60 dezenas. Se um apostador X jogou 1 cartão de 7 dezenas e um apostador Y jogou 7 cartões de 6 dezenas, sem intersecção entre dois quaisquer destes 7 cartões, podemos afirmar corretamente que:

a) O apostador X tem mais chance de acertar 5 dezenas que o apostador Y.

b) O apostador Y tem mais chance de acertar 5 dezenas que o apostador X.

c) Os dois apostadores têm a mesma chance de acertar qualquer número de dezenas.

d) O apostador X tem mais chance de acertar 6 dezenas que o apostador Y.

e) O apostador Y tem mais chance de acertar 5 dezenas que o apostador X.

Resolução:

Como o apostador X jogou um cartão de 7 dezenas, as chances de ele acertar a sena é dada por $\frac{C_{7,6}}{C_{60,6}} = \frac{7}{50.063.860}$, ao passo que a chance dele acertar a quina é dada por

$$\frac{C_{7,5} \cdot C_{53,1}}{C_{60,6}} = \frac{21 \cdot 53}{50.063.860} = \frac{1.113}{50.063.860}.$$

O apostador Y, por sua vez, jogou 7 cartões de 6 dezenas e, portanto, deve-se multiplicar por 7 as probabilidades encontradas para quem joga um cartão de 6 dezenas. Assim, a chance de Y acertar a sena é $7 \cdot \frac{C_{6,6}}{C_{60,6}} = \frac{7}{50.063.860}$, ao passo que a chance de Y acertar 5 dezenas é dada por

$$7 \cdot \frac{C_{6,5} \cdot C_{54,1}}{C_{60,6}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 54}{50.063.860} = \frac{2268}{50.063.860}.$$

Assim, em face ao exposto acima, conclui-se que o apostador Y tem mais chance de acertar 5 dezenas que o apostador X e, portanto, a alternativa correta é a letra B.

Observação: conforme será visto e calculado no tópico a seguir, a diferença encontrada no resultado acima é amenizada parcialmente (situação pouco conhecida pelos apostadores), uma vez que acertando uma quina com um jogo de 7 dezenas, o prêmio pago pela quina será o dobro do valor do prêmio da quina de quem jogou 7 cartões de seis dezenas. Tal fato é decorrente da premiação maior que se deve aos jogos desdobrados que estão embutidos nas apostas a partir de 7 dezenas. O quadro 3.7 revela esta situação de maneira completa e os quadros 3.8, 3.9 e 3.10 apresentam cálculos de combinações que esclarecem como podem ser obtidos os valores do quadro 3.7, utilizando o raciocínio acima.

Quadro 3.7: Quantidade de prêmios a receber acertando.

Apostas	6 números			5 números		4 números
Quantidade de nº jogados	Sena	Quina	Quadra	Quina	Quadra	Quadra
6	1	0	0	1	0	1
7	1	6	0	2	5	3
8	1	12	15	3	15	6
9	1	18	45	4	30	10
10	1	24	90	5	50	15
11	1	30	150	6	75	21
12	1	36	225	7	105	28
13	1	42	315	8	140	36
14	1	48	420	9	180	45
15	1	54	540	10	225	55

Justificativa dos valores do quadro quantidade de prêmios a receber acertando

Quantidade de prêmios a receber (quadras), acertando 4 números

Exemplo: Resultado do sorteio: 01 − 02 − 03 − 04 − 26 − 27

Quadro 3.8: Quantidade de prêmios a receber acertando 4 números.

Números apostados (Exemplo)	Quadras
1,2,3,4,**5,6**	$C_{2,2} = 1$
1,2,3,4,**5,6,7**	$C_{3,2} = 3$
1,2,3,4,**5,6,7,8**	$C_{4,2} = 6$
1,2,3,4,**5,6,7,8,9**	$C_{5,2} = 10$
1,2,3,4,**5,6,7,8,9,10**	$C_{6,2} = 15$
1,2,3,4,**5,6,7,8,9,10,11**	$C_{7,2} = 21$
1,2,3,4,**5,6,7,8,9,10,11,12**	$C_{8,2} = 28$
1,2,3,4,**5,6,7,8,9,10,11,12,13**	$C_{9,2} = 36$
1,2,3,4,**5,6,7,8,9,10,11,12,13,14**	$C_{10,2} = 45$
1,2,3,4,**5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15**	$C_{11,2} = 55$

Observação: Os números em negrito são referentes às dezenas que não saíram na extração da Mega-Sena.

Quantidade de prêmios a receber (quadras e quinas) acertando 5 números na Mega-Sena

Exemplo: Resultado do sorteio: 01 − 02 − 03 − 04 − 05 − 26

Quadro 3.9: Quantidade de prêmios a receber acertando 5 números.

Números apostados (Exemplo)	Quadras	Quinas
1,2,3,4,5,**6**	0	$C_{1,1} = 1$
1,2,3,4,5,**6,7**	$C_{5,4} \cdot C_{2,2} = 5 \cdot 1 = 5$	$C_{2,1} = 2$
1,2,3,4,5,**6,7,8**	$C_{5,4} \cdot C_{3,2} = 5 \cdot 3 = 15$	$C_{3,1} = 3$
1,2,3,4,5,**6,7,8,9**	$C_{5,4} \cdot C_{4,2} = 5 \cdot 6 = 30$	$C_{4,1} = 4$
1,2,3,4,5,**6,7,8,9,10**	$C_{5,4} \cdot C_{5,2} = 5 \cdot 10 = 50$	$C_{5,1} = 5$
1,2,3,4,5,**6,7,8,9,10,11**	$C_{5,4} \cdot C_{6,2} = 5 \cdot 15 = 75$	$C_{6,1} = 6$
1,2,3,4,5,**6,7,8,9,10,11,12**	$C_{5,4} \cdot C_{7,2} = 5 \cdot 21 = 105$	$C_{7,1} = 7$
1,2,3,4,5,**6,7,8,9,10,11,12,13**	$C_{5,4} \cdot C_{8,2} = 5 \cdot 28 = 140$	$C_{8,1} = 8$
1,2,3,4,5,**6,7,8,9,10,11,12,13,14**	$C_{5,4} \cdot C_{9,2} = 5 \cdot 36 = 180$	$C_{9,1} = 9$
1,2,3,4,5,**6,7,8,9,10,11,12,13,14,15**	$C_{5,4} \cdot C_{10,2} = 5 \cdot 45 = 225$	$C_{10,1} = 10$

Observação: Os números em negrito são referentes às dezenas que não saíram na extração da Mega-Sena.

Quantidade de prêmios a receber (quadras, quinas e sena) acertando 6 números na Mega-Sena

Exemplo: Resultado do sorteio: 01 − 02 − 03 − 04 − 05 − 06

Quadro 3.10: Quantidade de prêmios a receber acertando 6 números na Mega-Sena.

Números apostados (Exemplo)	Quadras	Quinas	Sena
1,2,3,4,5,6	0	0	1
1,2,3,4,5,6,**7**	0	$C_{2,1} = 2$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8**	$C_{6,4} \cdot C_{2,2} = 15 \cdot 1 = 15$	$C_{3,1} = 3$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8,9**	$C_{6,4} \cdot C_{3,2} = 15 \cdot 3 = 45$	$C_{4,1} = 4$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8,9,10**	$C_{6,4} \cdot C_{4,2} = 15 \cdot 6 = 90$	$C_{5,1} = 5$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8,9,10,11**	$C_{6,4} \cdot C_{5,2} = 15 \cdot 10 = 150$	$C_{6,1} = 6$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8,9,10,11,12**	$C_{6,4} \cdot C_{6,2} = 15 \cdot 15 = 225$	$C_{7,1} = 7$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8,9,10,11,12,13**	$C_{6,4} \cdot C_{7,2} = 15 \cdot 21 = 315$	$C_{8,1} = 8$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8,9,10,11,12,13,14**	$C_{6,4} \cdot C_{8,2} = 15 \cdot 28 = 420$	$C_{9,1} = 9$	1
1,2,3,4,5,6,**7,8,9,10,11,12,13,14,15**	$C_{6,4} \cdot C_{9,2} = 15 \cdot 36 = 540$	$C_{10,1} = 10$	1

Observação: Os números em negrito são referentes às dezenas que não saíram na extração da Mega-Sena.

Curiosidades e Informações Relevantes Acerca da Mega-Sena

- As comparações feitas entre as chances de acertar as seis dezenas da Mega-sena (com uma aposta simples) e diversos eventos e situações são diversas e interessantes. Entretanto, muitas delas devem ser feitas com ressalvas, sobretudo as relacionadas diretamente às pessoas, tendo em vista que as probabilidades de dois indivíduos morrerem, por exemplo, por uma picada de abelha, são normalmente diferentes, por diversos fatores.

- É mais fácil obter 25 caras em 25 lançamentos de uma moeda honesta do que ganhar na Mega-Sena com uma aposta simples de seis dezenas, uma vez que a probabilidade de obter 25 caras em 25 lançamentos é igual a $\frac{1}{33.554.432}$, enquanto a probabilidade de acertar os seis números na Mega-Sena com uma aposta simples é igual a $\frac{1}{50.063.860}$. A probabilidade de obter 26 caras em 26 lançamentos é igual a $\frac{1}{67.108.864}$.

- Existem vários sites na internet dando "dicas" pra aumentar significativamente as chances de acerto na Mega-Sena. Cumpre ressaltar que, considerando o funcionamento correto das extrações, todas as dezenas são equiprováveis e que os sorteios da Mega-Sena são independentes um do outro. Portanto, não existem elementos consistentes que melhorem as chances de vitória do apostador.

- As chances de acertar a sena com os números $04 - 07 - 18 - 21 - 35 - 48$, por exemplo, são as mesmas de acertar a sena com os números $01 - 02 - 03 - 04 - 05 - 06$, embora a maioria das pessoas acredite que seja "possível" acertar a sena no primeiro caso e "impossível" no segundo...

- Apostar em dezenas que saíram mais vezes nos sorteios da Mega-Sena não traz, pelo menos matematicamente falando, qualquer vantagem em relação a apostas feitas em dezenas que saíram menos vezes.

3.8 Problema de jogar tudo de uma vez ou aos poucos

3.8.1 Introdução

Uma questão interessante e que gera certa polêmica em torno do que é melhor para o apostador é o problema de jogar tudo de uma só vez ou aos poucos, a seguir exibido.

Uma empresa institui uma espécie de loteria com x números e apenas um prêmio será dado. Considere que o jogador Esteves tenha 100,00 reais e que o bilhete da loteria custe

10,00 reais. O que é melhor para Esteves: comprar 10 bilhetes para concorrer em uma extração ou concorrer em dez extrações diferentes com um bilhete em cada? Em outras palavras, qual a maior probabilidade de ganhar o prêmio: Jogar tudo de uma só vez ou ir jogando paulatinamente? Generalizando a situação proposta acima, seja uma loteria com x números e um único prêmio. O que é melhor para um apostador: comprar y bilhetes para um sorteio ou concorrer em y extrações com apenas um bilhete em cada uma delas?

3.8.2 Resolução

1ª situação: o apostador joga tudo de uma vez.

Em tal situação, a probabilidade de ganhar o prêmio é dada por $P = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{y}{x}$.

2ª situação: o apostador joga aos poucos.

Inicialmente, pode-se determinar a probabilidade de o apostador não ganhar o prêmio. Para tal intento, tem-se que o número de elementos do espaço amostral é igual a x^y, enquanto que o número de casos em que o apostador não ganha é igual a $(x-1)^y$, uma vez que são todos os números menos o bilhete do apostador. Desse modo, a probabilidade de não ganhar é igual a $P = \dfrac{n(E)}{n(\Omega)} = \dfrac{(x-1)^y}{x^y} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^y = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^y$ e, portanto, utilizando a probabilidade do evento complementar, a probabilidade de ganhar é dada por $1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^y$. Deve-se agora comparar as probabilidades encontradas nas duas situações, quais sejam $\dfrac{y}{x}$ e $1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^y$. Provar-se-á que $\dfrac{y}{x} \geq 1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^y$, o que é equivalente a provar que $1-\dfrac{y}{x} \leq \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^y$, demonstração que será apresentada a seguir, de duas maneiras.

1° Modo:

Fazendo indução sobre y:

i) Para $y = 2$, tem-se

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = 1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2} > 1-\frac{2}{x}.$$

(verificação para o elemento inicial $y = 2$)

ii) Suponha que a desigualdade em tela é válida para $y \geq 2$, ou seja, que

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^y > 1-\frac{y}{x} \text{ (*) (hipótese de indução).}$$

Deve-se mostrar que a desigualdade é válida para $y+1$. Multiplicando ambos os membros em (*) por $1-\dfrac{1}{x}$ obtém-se:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y+1} > \left(1-\frac{y}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{y}{x}-\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2} > 1-\frac{y}{x}-\frac{1}{x} = 1-\frac{y+1}{x}.$$

Assim, por indução, a desigualdade é válida $\forall\, y \geq 2$, como se queria provar.

2° Modo:
Observe que

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y} &= \left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-1}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-1} - \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-1} \geq \left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-1} - \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Utilizando procedimento análogo para $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-1}$ tem-se que

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-1} \geq \left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-2} - \frac{1}{x}.$$

Daí, advém que $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y} \geq \left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-2} - \frac{2}{x}$. Prosseguindo com o mesmo raciocínio tem-se $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y} \geq \left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-3} - \frac{3}{x}$ e, por fim, $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{y} \geq \left(1-\frac{1}{x}\right)^{y-y} - \frac{y}{x} = 1-\frac{y}{x}$, como se queria demonstrar.

Assim, pode-se concluir que jogar tudo de uma vez é melhor do que jogar aos poucos em termos probabilísticos, não obstante sabermos que em muitos casos o desejo do apostador é permanecer mais tempo jogando. Tal conclusão geral deve ser verificada meticulosamente observando-se as regras do jogo em análise.

4 Considerações Finais

O presente trabalho dissertativo buscou apresentar aspectos fundamentais que envolvem a Probabilidade, um dos temas mais interessantes e fascinantes da Matemática, principalmente no contexto do Ensino Médio, em que normalmente são explorados com mais profundidade.

Diante da exposição realizada, evidencia-se que os processos aleatórios são extremamente relevantes e rotineiros no cotidiano das pessoas. Desse modo, é inquestionável a necessidade da compreensão das noções fundamentais da Teoria das Probabilidades, visando, juntamente com a análise de dados e informações cada vez mais acessíveis e volumosos, a tomada de decisões em diversas situações do dia a dia, como bem preconizam os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Não obstante a importância histórica dos jogos de azar para o surgimento da Teoria das Probabilidades, que se desenvolve a partir das cartas entre Pascal e Fermat, é de excelente alvitre que se tenha o cuidado e o discernimento de não se apresentar ao educando do Ensino Médio uma visão reducionista, e até distorcida, da Probabilidade, tornando-a um campo da Matemática relacionado somente a cálculos probabilísticos em jogos e loterias, negligenciando suas inúmeras aplicações, por exemplo, as obsevadas nas análises estatísticas, na Biologia, na Economia e nas ciências em geral.

Assim, espera-se que esta dissertação haja proporcionado uma visão geral da evolução histórica da probabilidade, as definições e teoremas fundamentais relacionados à Probabilidade para o Ensino Médio e, principalmente, análise e resolução de problemas clássicos e interessantes sobre o tema em tela tenham despertado e propiciado condições e estratégias de modo a estabelecer maior significação da aprendizagem aos estudantes, contribuindo para o tão demandado desenvolvimento das competências e habilidades para a formação de um cidadão capaz de atuar de maneira mais ativa e crítica na sociedade, como agente de transformação e aprimoramento nos mais diversos setores.

Anexo

Cartas Pascal - Fermat

Conforme mencionado anteriormente, muitos estudiosos consideram que a Teoria das Probabilidades teve seu início com a troca de correspondências entre Pascal e Fermat, em 1654, depois publicadas em 1679, a partir do problema famoso dos pontos proposto pelo Chevalier de Méré a Pascal. Daí, a relevância da apresentação das mesmas a partir de uma das traduções para o inglês contida em OEuvres de Fermat (ed. Tannery and Henry, Volume II, pp. 288-314, Paris 1894), disponibilizada em http://www.york.ac.uk/depts/maths /histstat/pascal.pdf e traduzidas pelo professor Edvan Ramos Freire com participação do ora dissertador.

Correspondências entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat em 1654

1ª Carta (Pascal para Fermat)

Essa carta se perdeu com o tempo.

2ª carta (Fermat para Pascal)[1]

Senhor,

Se me comprometo a fazer um ponto com um único dado em oito jogadas, e se nós combinarmos depois que o dinheiro é colocado em jogo, que eu não vou fazer a primeira jogada, é necessário pela minha teoria que eu leve $\frac{1}{6}$ do total da soma por causa da primeira jogada citada.

Se nós concordamos depois que eu não devo fazer a segunda jogada, eu poderia, por minha parte, pegar um sexto do restante que é $\frac{5}{36}$ do total.

Se, depois disso, nós concordarmos que eu não deveria fazer a terceira jogada, eu deveria para me recuperar, pegar $\frac{1}{6}$ do restante que é $\frac{25}{216}$ do total.

[1]Não se sabe a data em que foi escrita.

E se posteriormente, nós concordarmos novamente que eu não vou fazer o quarto lançamento, devo tomar $\frac{1}{6}$ do restante ou $\frac{125}{1296}$ do total, e eu concordo com você que esse é o valor do quarto lançamento, supondo que alguém já tenha feito as jogadas anteriores.

Mas você propôs no último exemplo em sua carta (cito seus próprios termos) que se eu me comprometer a encontrar seis em oito jogadas e se eu tiver jogado três vezes sem achá-lo, e caso o meu oponente proponha que eu não deva jogar a quarta vez, e se ele desejar me tratar com justiça, é apropriado que eu fique com $\frac{125}{1296}$ da soma total de nossas apostas.

Isto, no entanto, não é verdade pela minha teoria. No presente caso, os três primeiros arremessos feitos sem o jogador que detém o dado ter ganho nada, a soma total mantendo-se assim em jogo, aquele que detém o dado e que concorda em não fazer seu quarto lançamento deve levar $\frac{1}{6}$ como recompensa.

E se ele fez quatro lançamentos sem encontrar o ponto desejado e se eles concordam que ele não deve fazer o quinto, ele terá, não obstante, $\frac{1}{6}$ do total de sua parte. Uma vez que toda a soma permanece em jogo, ela não resulta somente da teoria, mas é realmente o senso comum de que cada jogada deveria ser de igual valor.

Eu o aconselho, portanto (a escrever-me) para que eu possa saber se nós concordamos com a teoria, como eu acredito que concordamos, ou se nós discordamos somente nesta aplicação. Eu sou, mais cordialmente, etc.,

Fermat.

3ª carta (Pascal para Fermat)

Quarta-feira, 29 de julho de 1654.

Senhor,

1. A impaciência tomou conta de mim, bem como de si, e, embora eu ainda esteja acamado, não posso evitar de lhe dizer que recebi a sua carta com relação ao problema dos pontos, ontem à noite, das mãos do Sr. Carvavi e que estou mais admirado do que lhe posso contar. Eu não ouso escrevê-lo por extenso, mas, numa palavra, o Sr. encontrou as duas divisões dos pontos e dos dados com toda a justiça. Estou completamente satisfeito porque não há dúvida que eu estava errado vendo o admirável acordo que temos. Admiro o seu método para o problema dos pontos mais do que para o dos dados. Vi soluções para o problema dos dados de várias pessoas, tais como a do Sr. Cavaleiro de Méré que me propôs a questão, e também a do Sr. Roberval. O Sr. De Méré nunca foi capaz de

encontrar o valor exato dos pontos, nem foi capaz de encontrar um método de derivação, pelo que eu sou o único que conhece esta proporção.

2. O seu método é muito bom e foi o primeiro que me ocorreu durante estas pesquisas. Mas, devido ao fato de as combinações serem excessivas, eu encontrei um atalho e, na realidade, outro método mais curto e claro, o qual lhe passo a descrever em poucas palavras; pelo que gostaria de lhe abrir o meu coração daqui para a frente, se tal me é permitido, visto ter sido enorme o prazer que tive com o nosso acordo. Claramente vejo que a verdade é a mesma em Toulouse e em Paris.

Este é o caminho que tomo para saber o valor de cada parte quando 2 jogadores jogam, por exemplo, em 3 lançamentos, e quando cada um aposta 32 pistolas na aposta.

Suponhamos que o primeiro tenha 2 pontos e o outro 1 ponto. Eles jogam agora uma vez na qual as hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, ele ganhará a totalidade do que está apostado, ou seja, 64 pistolas. Se o outro ganhar eles ficarão 2 para 2 e, consequentemente, se pretenderem dividir acontecerá que cada um retirará o valor da sua aposta, ou seja, 32 pistolas.

Considere então Sr. que se o primeiro ganha, 64 pistolas serão dele. Se perder, 32 serão dele. Então, se eles não quiserem jogar este ponto e queiram dividir, o primeiro jogador deverá dizer: "Eu tenho 32 pistolas, porque, mesmo que perca elas serão minhas. Quanto às outras 32, talvez as venha a ganhar ou talvez você as ganhe, o risco é igual. Assim, vamos dividir as 32 pistolas ao meio, e eu fico com as 32 que são realmente minhas". Ele terá então 48 e o outro 16.

Agora suponhamos que o primeiro tenha 2 pontos e o outro nenhum, e que eles estão começando a jogar por 1 ponto.

As possibilidades são tais que, caso o primeiro ganhe, levará a totalidade da aposta, 64 pistolas. Se o outro ganhar, tenha em atenção de que eles voltarão à situação atrás descrita, na qual o primeiro tem 2 pontos e o segundo 1 ponto.

Neste caso, já demonstramos que 48 serão do que tem 2 pontos. Portanto, se eles não quiserem jogar este ponto ele deverá dizer: "Se eu ganhar fico com tudo, ou seja, com 64 pistolas. Se eu perder, 48 serão legitimamente minhas. Portanto, dê-me as 48 que me pertencem de certeza mesmo que eu perca e, vamos dividir as outras 16 ao meio pois temos as mesmas possibilidades de as ganhar". Então, ele terá 48 + 8 que são 56.

Vamos agora imaginar que o primeiro tem apenas 1 ponto e o outro nenhum. Repare Sr., que se eles iniciarem um nova jogada, as hipóteses serão tais que, caso o primeiro ganhe, ele terá 2 pontos e o outro 0 e dividindo, como na situação anterior, 56 serão dele. Se ele perder, eles ficarão empatados e 32 serão dele. Ele deverá dizer então: "Se não quer jogar dê-me as 32 pistolas que são de certeza minhas e, vamos dividir o resto das 56 ao meio. De 56 leve 32, e 24 sobram. Depois, divida 24 ao meio dá 12 para si e 12 para mim, que com 32 dará 44".

Por estes meios, você vê, por simples subtração, que pela primeira jogada ele terá 12 do outro, pela segunda mais 12 e pela terceira 8.

Mas para não tornar isto mais misterioso, uma vez que você deseja ver tudo claramente, e como não tenho outro objetivo que não seja o de ver se estou errado, o valor (quero dizer, apenas o valor da aposta do outro jogador) da última jogada de 2 é o dobro do da última jogada de 3 e quatro vezes o da última jogada de 4 e 8 vezes o da última jogada de 5, etc.

3. Mas a razão das primeiras jogadas não é tão fácil de encontrar. Como não pretendo esconder nada, aqui fica o método e aqui está o problema que considerei em tantos casos, como tive o prazer de o fazer: "sendo considerado qualquer número de jogadas que alguém pretenda, encontrar o valor da primeira".

Por exemplo, suponhamos que o número de jogadas é 8. Tomam-se os primeiros 8 números pares e os primeiros 8 números ímpares, assim:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16$$

e

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15$$

Multiplicam-se os números pares desta forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, o seu produto pelo quarto, o seu produto pelo quinto, etc.; multiplicam-se os números ímpares da mesma forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, etc.

O último produto dos números pares é o denominador e o último produto dos números ímpares é o numerador da fração, que expressa o valor da primeira jogada de 8. Isto quer dizer que, se cada um joga o número de pistolas expressados pelo produto dos números pares, pertencer-lhe-ão (quem perder a jogada) a quantia da aposta do outro, expressa pelo produto dos números ímpares. Isto pode ser provado, mas com muita dificuldade por combinações, como você imaginou, e eu não consegui prová-lo por este outro método que vou lhe dizer, mas apenas pelo das combinações. Aqui estão os teoremas que conduzem a este, que são proposições aritméticas corretas, no que diz respeito às combinações, nas quais eu encontrei tantas propriedades bonitas:

4. Se de qualquer número de letras, como 8 por exemplo,

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H,$$

você formar todas as combinações possíveis de 4 letras, depois todas as combinações de 5 letras, depois as de 6, depois as de 7, de 8, etc. e tomar todas as combinações possíveis, eu digo que, se você adicionar metade das combinações de 4 com cada uma das combinações mais altas, a soma será igual ao número da progressão quaternária começando com 2, o qual é metade do número total.

Por exemplo, utilizarei o latim, visto que o francês não vai servir para nada:

Se qualquer número de letras, por exemplo 8,

A, B, C, D, E, F, G, H,

for somado em todas as combinações possíveis, de 4, 5, 6, até 8, eu afirmo que, se você somar metade das combinações de 4, que são 35 (metade de 70) a todas as combinações de 5, que são 56, e todas as combinações de 6, a saber 28, e todas as combinações de 7, a saber 8, e todas as combinações de 8, a saber 1, a soma é o quarto número da progressão quaternária cujo primeiro termo é 2.

Eu digo que o quarto número para 4 é metade de 8. Os números da progressão quaternária cujo primeiro termo é 2 são

2, 8, 32, 128, 512, etc.

dos quais 2 é o primeiro, 8 é o segundo, 32 é o terceiro e 128 o quarto. Destes o 128 é igual:

+35 (metade das combinações de 4 letras)
+56 (as combinações de 5 letras)
+28 (as combinações de 6 letras)
+8 (as combinações de 7 letras)
+1 (a combinação de 8 letras)

5. Este é o primeiro teorema, o qual é puramente aritmético. O outro diz respeito à teoria dos pontos e é assim:

É necessário dizer primeiro que: se um (jogador) tem um ponto de 5, por exemplo, e se ele assim precisa de 4, o jogo será definitivamente decidido em 8 jogadas, que são o dobro de 4.

O valor do primeiro lançamento de 5, na aposta do outro, é a fração que tem como numerador metade da combinação de 4 das 8 (tomei 4 porque é igual ao número de pontos que ele perdeu e 8 porque é o dobro de 4) e para o denominador, o mesmo numerador somado a todas as mais altas combinações.

Assim, se eu tiver 1 ponto de 5, 35/128 da aposta do meu opositor pertence-me. Isto quer dizer que, se ele tiver apostado 128 pistolas eu tirarei 35 e deixá-lo-ei com o resto, 93.

Mas, esta fração, $\frac{35}{128}$, é a mesma que $\frac{105}{384}$ que é o resultado da multiplicação dos números pares para o denominador e da multiplicação dos números ímpares para o numerador.

O senhor verá tudo isto sem qualquer dúvida, caso se dê ao trabalho, e por essa razão acho desnecessário discutir mais consigo acerca disto.

Contudo, enviar-lhe-ei uma das minhas antigas tabelas; não tenho tempo para copiá-la mas mencioná-la-ei.

Você verá aqui como sempre, que o valor da primeira jogada é igual ao da segunda, algo que será facilmente provado pelas combinações.

Verá também que os números da primeira linha estão sempre a crescer; os da segunda igualmente, bem como os da terceira.

Mas, após isto, os da quarta linha diminuem, bem como os da quinta. Isto é ímpar.

Se cada um apostar 256 pistolas

Das 256 pistolas do meu adversário, depois de..., pertencem-me...

	6 jogadas	5 jogadas	4 jogadas	3 jogadas	2 jogadas	1 jogada
Primeira Jogada	63	70	80	96	128	256
Segunda Jogada	63	70	80	96	128	
Terceira Jogada	56	60	64	64		
Quarta Jogada	42	40	32			
Quinta Jogada	24	16				
Sexta Jogada	8					

Se cada um apostar 256 pistolas

Das 256 pistolas do meu adversário, depois de..., pertencem-me...

	6 jogadas	5 jogadas	4 jogadas	3 jogadas	2 jogadas	1 jogada
Primeira Jogada	63	70	80	96	128	256
Segunda Jogada	126	140	160	192	256	
Terceira Jogada	182	200	224	256		
Quarta Jogada	224	240	256			
Quinta Jogada	248	256				
Sexta Jogada	256					

7. Não tenho tempo para lhe enviar a prova de um ponto difícil que muito espantou o Sr. De Mére, pois ele tem competência mas não é um geômetra (o que, como você sabe, é um grande defeito), e ele ainda não compreende que uma linha matemática é infinitamente

divisível e está firmemente convencido que é composta por um número finito de pontos. Nunca consegui tirar-lhe essa ideia. Se você conseguisse isso torná-lo-ia perfeito.

Ele me diz, então, que encontrou um erro nos números, por esta razão.

Se alguém aceitar jogar um 6 com um dado, a vantagem de aceitar fazer isso em 4, está como 671 para 625.

Se alguém aceitar jogar dois 6 com 2 dados, a desvantagem de acertar é 24.

Mas, contudo, 24 está para 36 (que é o número de possibilidades em 2 dados) como 4 está para 6 (que é o número de faces de um dado).

Este foi o seu grande escândalo que o fez dizer, altivamente, que os teoremas não eram consistentes e que a aritmética era de loucos. Mas, o Sr. verá facilmente a razão, pelos princípios que possui.

Devo pôr em ordem tudo o que já fiz, quando acabar o Tratado sobre Geometria, no qual tenho vindo a trabalhar há já algum tempo.

8. Também fiz algo com aritmética e peço-lhe para me dar o seu conselho sobre tal assunto.

Propus o seguinte lema, que toda a gente aceitou: a soma dos n primeiros termos da progressão contínua partindo da unidade, como

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

multiplicada por 2 é igual ao último termo, 4, multiplicado pelo termo seguinte, 5. Isto equivale a dizer que a soma dos inteiros até A, multiplicada por 2 é igual ao produto

$$A(A+1).$$

Chego agora ao meu teorema:

“Se um for subtraído à diferença dos cubos de quaisquer dois números consecutivos, o resultado é seis vezes todos os números contidos na raiz do menor deles”. Deixemos as duas raízes, R e S, diferirem por uma unidade. Digo que $R^3 - S^3 - 1$ é igual a seis vezes a soma dos números contidos em S.

Tomemos S como A , então R é $A+1$. Portanto, o cubo da raiz R ou $A+1$ é

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1.$$

O cubo de S, ou A, é A^3 e a diferença disto é $R^3 - S^3$; portanto, se subtrairmos uma unidade de $3A^2+3A$ é igual a R^3-S^3-1 . Mas, pelo lema, o dobro da soma dos números contidos em A ou S é igual a $A(A+1)$; isto é, $A^2 + A$. Portanto, seis vezes a soma dos números em A é igual a $3A^2+3A$. Mas, $3A^2+3A$ é igual a R^3-S^3-1. Então, R^3-S^3-1 é igual a seis vezes a soma dos números contidos em A ou S. Quod erat demonstrandum.

Ninguém me colocou nenhuma dificuldade em relação ao que foi dito atrás, mas disseram-me que ninguém o fez porque todos estão acostumados a este método hoje.

Em relação a mim, e digo isto sem procurar fazer nenhum favor a mim mesmo, as pessoas deveriam admitir isto como um excelente tipo de demonstração. Contudo, aguardo pelo seu comentário, com deferência. Tudo o que já provei em aritmética é desta natureza.

9. Aqui estão duas dificuldades (posteriores ou suplementares): provei um teorema simples fazendo uso do cubo de uma linha comparado com o cubo de outra. Com isto quero dizer, que isto é puramente geométrico e de grande rigor. Assim, resolvi o problema: "Dados quaisquer 4 planos, 4 pontos e 4 esferas, encontrar a esfera que, tocando nas esferas dadas, passa pelos pontos dados e deixa nos planos segmentos, nos quais podem ser inscritos certos ângulos" e este: "Dados quaisquer 3 círculos, 3 pontos e 3 retas, encontrar o círculo que toca nos círculos dados e nos pontos, e que deixa nas retas um arco onde um dado ângulo pode ser inscrito".

Resolvi estes problemas no plano, usando nada mais na sua construção a não ser círculos e retas, mas na demonstração fiz uso de cônicas, parábolas e hipérboles. Contudo, uma vez que a construção é no plano, mantenho a minha solução no plano, e é assim que ela deve passar.

Este é um pobre reconhecimento da honra que me fizeste ao apresentar o meu discurso, que o tem afligindo há tanto tempo. Nunca pensei que lhe deveria ter dito duas palavras e, se eu lhe dissesse o que predomina no meu coração - quanto melhor o conheço, mais o honro e o admiro - e, se quisesse ver a que grau corresponde isto, permitiria um lugar na sua amizade para aquele que é, Sr., o seu... etc.

Pascal.

4ª carta (Fermat para Pascal)

Segunda-feira, 24 de agosto de 1654.

Senhor,

1. Na última carta não consegui explicar-lhe todas as minhas ideias acerca do problema dos pontos e, ao mesmo tempo, tenho um certo receio em fazer isso, pois temo que esta admirável harmonia conseguida entre nós e que é tão querida para mim, comece a diminuir pois, tenho receio que tenhamos opiniões diferentes em relação a este assunto. Desejo expor-lhe todo o meu raciocínio e, peço-lhe o favor de me corrigir caso eu esteja em erro, ou de me endossar caso esteja correto. Peço-lhe isto com toda a confiança e sinceridade pois nem sequer estou certo que você estará do meu lado.

Quando há somente dois jogadores, a sua teoria que prossegue das combinações é muito justa. Mas quando há três, acredito que tenho a prova que é injusto que proceda de qualquer outra maneira diferente daquela que eu tenho. Mas o método que lhe dei a conhecer e o qual tenho usado universalmente, é comum a todas as condições imagináveis de todas as distribuições de pontos, no lugar daquela das combinações (as quais eu não uso, exceto em casos particulares quando é mais curto do que o método geral), um método que só é bom em casos isolados.

Tenho a certeza de que conseguirei fazê-lo entender, mas são necessárias algumas palavras da minha parte e um pouco de paciência da sua parte.

2. Este é o método de procedimento quando se tem dois jogadores: se dois jogadores estiverem a jogar em vários lançamentos, encontrando-se num estado tal que o primeiro carece de 2 pontos e o segundo de 3 para ganhar a aposta, você diz que é necessário ver em quantos pontos o jogo poderá, absolutamente, ser decidido.

É conveniente supor que isto será em 4 pontos, donde se conclui que, é necessário ver de quantas maneiras diferentes podem ser distribuídos os pontos entre os dois jogadores e ver quantas combinações existem para fazer com que o primeiro ganhe, e quantas para fazer com que o segundo ganhe, e para dividir a aposta de acordo com essa proporção. Eu dificilmente poderia entender esta explicação se não a soubesse antes; mas você também escreveu isto na sua discussão. Então, para ver de quantas maneiras 4 pontos podem ser distribuídos entre dois jogadores, é necessário imaginar que eles jogam com um dado de apenas 2 faces (uma vez que há apenas dois jogadores), como cara e coroa, e que eles lançam 4 dados destes (porque eles jogam 4 vezes). Agora, é necessário ver de quantas maneiras podem eles cair. Isso é fácil de calcular. Podem haver 16, que é a segunda potência de 4; que é o mesmo que dizer, o seu quadrado. Agora imagine que uma das faces tem marcado a, favorável ao primeiro jogador. E, suponha que a outra tem marcado b, favorável ao segundo. Então estes 4 dados podem cair de acordo com qualquer uma destas disposições:

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

e, porque o primeiro jogador carece de dois pontos, todas as disposições que têm 2 a's fazem com que ele ganhe. Assim sendo, tem 11 a seu favor. E, porque o segundo carece de três pontos, todas as disposições que têm 3 b's, fazem com que ele ganhe. Há 5 desta forma. Assim, é necessário que eles dividam a aposta como 11 está para 5.

Pelo seu método, quando temos dois jogadores, você diz que se existirem mais jogadores, não será difícil fazer a divisão por este método.

3. Neste ponto Sr, digo-lhe que esta divisão, baseada nas combinações, é muito equitativa e boa, mas se houver mais do que dois jogadores nem sempre é justa e devo-lhe dizer

a razão para tal diferença. Comuniquei o seu método a (alguns dos) nossos cavalheiros, e o Sr. Roberval fez-me esta objeção:

Que é errado basear o método de divisão na suposição que eles estão a jogar por 4 lançamentos vendo que, quando um carece de dois pontos e o outro de três, não há necessidade que eles joguem quatro jogadas, uma vez que, pode dar-se o caso que joguem dois, ou três ou, na verdade, talvez quatro.

Isto porque ele não vê por que é que um deve fingir fazer uma divisão justa, com a condição assumida que um jogue quatro lançamentos, tendo em consideração o fato de que, nos termos naturais do jogo, eles não devem lançar o dado depois de um dos jogadores ter ganho; e que, se isto pelo menos não é falso, deve ser provado. Consequentemente, ele suspeita que nós tenhamos cometido um paralogismo.

Eu respondi-lhe que não tinha encontrado a minha explicação, tanto no método das combinações, que na verdade não está em causa neste momento, como no meu método universal, do qual nada escapa e que transmite a sua prova por si mesmo. Este encontra a mesma divisão que a do método das combinações. Além disso, mostrei-lhe a verdade das divisões entre os dois jogadores pelas combinações da seguinte forma: não é verdade que, se dois jogadores, estando de acordo com as condições da hipótese de que um carece de dois pontos e o outro de três, devem, de comum acordo, jogar 4 jogadas completas, isto é, que devem lançar 4 vezes, ao mesmo tempo, dois dados de duas faces? Isto não é verdade, digo eu, que, caso eles estejam impedidos de jogar as 4 jogadas, a divisão deve ser, como já dissemos, de acordo com as combinações favoráveis a cada um? Ele concordou com isto e isto está de fato provado. Mas, ele negou que o mesmo acontece quando eles não são obrigados a jogar as 4 jogadas. Então, eu respondi como se segue:

Não é óbvio que os mesmos jogadores, não estando obrigados a jogar as 4 jogadas mas, desejando desistir do jogo antes de um deles ter alcançado a sua pontuação, podem, sem perda ou ganho, ser obrigados a jogar as 4 jogadas, e que esse entendimento não muda, de modo algum, as suas condições? Visto que se o primeiro ganhar os 2 primeiros pontos de 4, não deverá, aquele que ganhou, recusar jogar mais 2 jogadas, vendo que se ele ganhar, não ganhará mais e se perder, não ganhará menos? Porque os dois pontos que o outro ganhar não são suficientes, dado que ele carece de 3 e não há pontos que cheguem, em 4 jogadas, para ambos conseguirem o número que lhes falta.

É com certeza conveniente considerar que é absolutamente igual e indiferente para cada um, quer eles joguem segundo a maneira natural do jogo, a qual é acabar assim que um consiga a sua pontuação, quer eles joguem as 4 jogadas por completo. Assim sendo, dado que estas duas condições são iguais e indiferentes, a divisão deve ser semelhante para ambos. Mas, dado que só é justo quando eles são obrigados a jogar as 4 jogadas, como eu mostrei, também é, portanto, justo no outro caso.

Esta foi a maneira como eu o provei e, como deve estar recordado, esta demonstração é baseada na igualdade das duas condições verdadeiras, assumidas em relação aos dois jogadores, a divisão é a mesma em cada um dos métodos e, se um ganhar ou perder por um método, ele perderá ou ganhará pelo outro, e os dois terão sempre a mesma quantia.

4. Usemos o mesmo argumento para três jogadores e, assumamos que ao primeiro falta 1 ponto, ao segundo 2 e ao terceiro 2. Para fazer a divisão, seguindo o mesmo método das combinações, é necessário primeiro descobrir em quantos pontos pode ser decidido o jogo, como fizemos quando havia 2 jogadores. Aqui, terão que ser em três pontos, pois eles não conseguem jogar 3 jogadas sem, necessariamente, chegar a uma conclusão.

É agora necessário ver de quantas maneiras podem ser combinadas as 3 jogadas, entre os jogadores, e quantas são favoráveis ao primeiro, quantas são ao segundo e quantas ao terceiro, e seguindo a proporção na distribuição da aposta, como fizemos na hipótese dos 2 jogadores.

É fácil ver quantas combinações há ao todo. Isto é, a terceira potência de 3; que é o mesmo que dizer, o seu cubo, ou 27. Pois, se um atirar 3 dados ao mesmo tempo (pois é necessário atirar 3 vezes), tendo estes dados 3 faces cada um (uma vez que há 3 jogadores), uma marcada **a** favorável ao primeiro, uma marcada **b** favorável ao segundo e outra marcada **c** favorável ao terceiro, - é evidente que estes 3 dados atirados, ao mesmo tempo, podem cair de 27 maneiras diferentes, como:

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Dado que o primeiro carece de 1 ponto então, todas as distribuições onde aparece um **a** são-lhe favoráveis. Ao todo há 19. O segundo carece de 2 pontos. Então, todas as distribuições onde há dois **b's**, são a seu favor. Há 7 delas. O terceiro carece de 2 pontos. Portanto, todas as distribuições onde aparecem dois **c's** são-lhe favoráveis. Há 7 destas.

Se nós concluirmos daqui, que é necessário dar a cada um de acordo com a proporção 19, 7, 7, estamos a cometer um sério erro, e eu hesitaria em acreditar que você faria isto. Há diversos casos favoráveis ao primeiro e ao segundo, como **abb** tem o **a** de que o primeiro precisa, e os 2 **b's** de que precisa o segundo. Assim como o **acc** é favorável ao primeiro e ao terceiro.

Portanto, não é desejável contar as distribuições que são comuns aos dois como valendo o valor total de cada um, mas somente metade do ponto. Pois, se a distribuição **acc** ocorrer, o primeiro e o terceiro deverão ter o mesmo direito à aposta, fazendo cada um a sua pontuação. Assim sendo, eles devem dividir a aposta ao meio. Se a distribuição **aab** ocorrer, o primeiro ganha sozinho. É necessário fazer a seguinte suposição:

Existem 13 distribuições que dão o total da aposta ao primeiro, 6 que dão metade e 8 que não lhe valem de nada. Assim, se a soma total for uma pistola, há 13 distribuições, em que cada uma lhe vale uma pistola, há 6 que lhe valem 1/2 de uma pistola, e 8 que não lhe valem de nada. Então, neste caso da divisão, é necessário multiplicar

13 por uma pistola que dá 13

6 por metade que dá 3

8 por zero que dá 0

Total: 27 (13 + 6 + 8)   Total: 16 (13 + 3 + 0)

e dividir a soma dos valores, 16, pela soma das distribuições, 27, o que dá a fração 16/27 e é esta quantia que pertence ao primeiro jogador, no caso de haver uma divisão; o que quer dizer, 16 pistolas de 27.

As partes do segundo e terceiro jogador serão as mesmas:

há 4 distribuições que valem 1 pistola; multiplicando,   4

há 3 distribuições que valem 1/2 de uma pistola; multiplicando, $1\frac{1}{2}$

e 20 distribuições que não valem nada   0

Total 27   Total $5\frac{1}{2}$

Assim 5 $\frac{1}{2}$ pistolas de 27 pertencem ao segundo jogador, e o mesmo ao terceiro. A soma de 5 $\frac{1}{2}$, 5 $\frac{1}{2}$ e 16 dá 27.

5. Parece-me que é esta a maneira na qual é necessário fazer a divisão pelas combinações, de acordo com o seu método, a não ser que tenha algo mais sobre o assunto que eu não saiba. Mas, se não estou enganado, esta divisão é injusta.

A razão é que estamos a fazer uma suposição falsa, isto é, que eles estão a jogar 3 lançamentos sem exceção, em vez da condição natural deste jogo que é, que eles não devem jogar a não ser quando um dos jogadores obtiver o número de pontos que lhe faltam, e nesse caso o jogo termina.

Não é que tal não possa acontecer ao jogarem 3 vezes mas, pode acontecer que eles joguem uma ou duas vezes e não necessitem de jogar outra vez.

Mas, dirá você: porque é que é possível fazer a mesma suposição neste caso como fizemos no caso dos 2 jogadores? Aqui fica a razão: na verdadeira condição (do jogo) entre 3 jogadores só um pode ganhar pois, pelos termos do jogo, terá terminado assim que um (dos jogadores) ganhe. Mas, sob as condições assumidas, 2 podem obter o número dos seus pontos, dado que o primeiro pode ganhar o ponto que lhe falta e, um dos outros pode ganhar os 2 pontos que lhe faltam, desde que eles tenham jogado só 3 jogadas. Quando há apenas 2 jogadores, as condições assumidas e as verdadeiras condições contribuem para a vantagem dos 2. É isto que faz a maior diferença entre as condições assumidas e as verdadeiras.

Se os jogadores se encontrarem no estado dado na hipótese, - o que é o mesmo que dizer que, se o primeiro carece de 1 ponto, o segundo de 2 e o terceiro de 2; e se eles concordarem e cooperarem para a estipulação de que eles jogarão 3 jogadas completas; e se aquele que fizer os pontos que lhe faltam terá o total da soma se for o único a alcançar os pontos; ou se dois conseguirem obtê-los, que devem partilhar equitativamente, - neste caso, a divisão deve ser feita como eu indico aqui: o primeiro deve ficar com 16, o segundo com $5\ \dfrac{1}{2}$ e o terceiro com $5\ \dfrac{1}{2}$ de 27 pistolas, e isto traz consigo a sua prova na suposição da condição acima indicada.

Mas, se eles jogarem simplesmente na condição de que não jogarão necessariamente as 3 jogadas, mas que jogarão apenas até que um deles tenha obtido os seus pontos, e que então o jogo deve acabar sem dar ao outro a oportunidade de alcançar a sua pontuação, então 17 pistolas deverão pertencer ao primeiro, 5 ao segundo e 5 ao terceiro, de um total de 27. E isto é dado pelo meu método geral que também determina que, sob a condição precedente, o primeiro deve ficar com 16, o segundo com $5\ \dfrac{1}{2}$ e o terceiro com $5\ \dfrac{1}{2}$, sem usar as combinações - pois, isto funciona para todos os casos e sem nenhum obstáculo.

6. Estas, Sr, são as minhas reflexões sobre este tópico, no qual não tenho nenhuma vantagem sobre si excetuando o fato de ter meditado nele mais tempo, mas isto é pouco (vantajoso para mim) do seu ponto de vista, uma vez que o seu primeiro palpite é mais penetrante que as minhas prolongadas tentativas. Não me é permitido revelar-lhe as minhas razões para estar ansioso pelas suas opiniões. Acredito que você reconheceu nisto que a teoria das combinações é boa, para o caso dos 2 jogadores, por acaso, como também é, algumas vezes, boa no caso dos 3 jogadores, como quando um carece de 1 ponto, outro de 1 e o outro de 2, pois, neste caso, o número de pontos aos quais o jogo termina não é suficiente para permitir que 2 ganhem, mas não é um método geral e é bom somente no caso de ser necessário jogar, exatamente, um certo número de vezes.

Consequentemente, como você não tinha o meu método quando me enviou a divisão entre vários jogadores, mas (dado que você tinha) só o das combinações, temo que defendamos diferentes pontos de vista relativamente a este assunto.

Peço-lhe que me informe acerca de como procederia na sua pesquisa neste problema. Receberei a sua resposta com respeito e alegria, mesmo que as suas opiniões sejam contrárias às minhas. Eu sou, etc.

Pascal

5ª carta (Fermat para Pascal)

Sábado, 29 de Agosto de 1654.

Senhor,

1. A nossa troca continua e fico contente que os nossos pensamentos estejam em tão perfeita sintonia como parece, desde o momento em que tomamos a mesma direção e seguimos o mesmo caminho. O seu recente "Tratado Aritmético do Triângulo" e as suas aplicações são uma prova autêntica e se os meus cálculos não me enganam, a sua 11ª consequência foi de Paris a Toulouse, enquanto o meu teorema sobre números figurados, que é praticamente o mesmo, ia de Toulouse a Paris. Enquanto estive a trabalhar no problema, não me preocupei em procurar os erros e estou convencido que o verdadeiro modo de escapar aos erros é cooperando consigo. Mas, se devo dizer mais, será da natureza de um cumprimento, e que devemos banir aquele inimigo da doce e fácil conversação.

Chegou agora a minha vez de lhe dar a conhecer algumas das minhas descobertas numéricas, mas o fim do parlamento aumenta os meus deveres e espero que, pondo de lado a sua bondade, me concederá o devido e quase necessário respeito.

2. Contudo, irei responder à sua questão dos 3 jogadores que fazem 3 jogadas. Quando o primeiro tem um (ponto) e os outros nenhum, a sua primeira solução é a verdadeira e a divisão da aposta deve ser 17, 5 e 5. A razão para isto é por si só evidente e segue sempre o mesmo princípio, as combinações, tornando claro que o primeiro tem 17 hipóteses enquanto cada um dos outros tem apenas 5.

3. Quanto ao resto, não haverá nada que eu lhe escreva no futuro que não seja com franqueza. Contudo, medite, se achar conveniente, neste teorema: as potências quadradas de 2 adicionadas à unidade são sempre números primos. [Isto é,]

- quadrado de 2 adicionado à unidade dá 5, que é um número primo;
- quadrado do quadrado é 16 que, quando a unidade lhe é adicionada faz 17, um número primo;

- quadrado de 16 é 256 que, quando lhe é adicionada a unidade faz 257, um número primo;
- quadrado de 256 é 65536 que, quando lhe é adicionada a unidade faz 65537, um número primo;

e assim até ao infinito.[2]

Esta é uma propriedade cuja veracidade lhe mostrarei. A sua prova é muito difícil e asseguro-lhe que ainda não a consegui encontrar completamente. Não deverei pô-la em ordem para si, a não ser que chegue ao seu fim.

Este teorema serve na descoberta dos números que estão numa dada razão às suas partes alíquotas, tendo em conta que fiz muitas descobertas. Falaremos disso noutra altura. Eu sou, Senhor, o seu etc.

Fermat

6ª carta (Fermat para Pascal)

Sexta-feira, 25 de setembro de 1654.

Senhor,

1. Não fique apreensivo porque a nossa discussão está chegando ao fim. Você incutiu a si próprio o pensamento de destruí-lo e, parece-me que respondendo por si próprio ao Sr. Roberval, também está a responder por mim.

Ao tomar o exemplo dos três jogadores aos quais, ao primeiro falta um ponto e a cada um dos outros faltam dois, que é o caso a que você se opõe, eu encontro aqui apenas 17 combinações para o primeiro e 5 para cada um dos outros; porque quando você diz que a combinação **acc** é boa para o primeiro, lembre-se que tudo o que é feito após um dos jogadores ter ganho nada vale. Mas esta combinação tendo feito o primeiro a ganhar na primeira jogada, o que é que importa que o terceiro ganhe 2 (jogadas) de seguida, se mesmo quando ele ganha trinta, tudo isto é supérfluo? A consequência, como você bem a chamou, "esta invenção", de estender o jogo a um certo número de jogadas serve apenas para tornar a regra fácil e (de acordo com a minha opinião) tornar todas as hipóteses iguais; ou melhor, mais logicamente, para reduzir todas as frações ao mesmo denominador.

Para que você não tenha dúvidas, se em vez de três pessoas você alargar a conjectura para quatro, não haverão apenas 27 combinações mas 81; e será necessário ver quantas combinações fazem o primeiro ganhar o seu ponto mais tarde do que cada um dos outros

[2]Euler provou que essa proposição é falsa em 1732.

ganhar dois e, quantas combinações farão cada um dos outros ganhar dois [pontos] mais tarde do que o primeiro ganhar um. Você verá que as combinações que fazem o primeiro ganhar são 51 e para cada um dos outros dois são 15, o que se reduz para a mesma proporção. Por conseguinte, se você tirar 5 jogadas ou qualquer outro número que quiser, você vai sempre encontrar 3 números na proporção de 17, 5, 5. E, de acordo com isto, estou certo em afirmar que a combinação **acc** é [favorável] apenas para o primeiro e não para o terceiro, e que **cca** é apenas para o terceiro e não para o primeiro e, consequentemente a minha lei de combinações é a mesma para 3 jogadores como para 2, e em geral para todos os números.

2. Você já viu através da minha carta anterior que não levantei objeções à verdadeira solução da questão dos 3 jogadores sobre a qual lhe envio os 3 números definitivos 17, 5, 5. Mas porque o Sr. Roberval vai provavelmente ficar mais satisfeito em ver uma solução sem qualquer dissimulação e porque poderá talvez render-se a abreviações em muitos casos, aqui está um exemplo:

O primeiro poderá ganhar numa única jogada, ou em duas, ou em três.

Se ele ganhar num único lançamento, é necessário que ele faça um lançamento favorável com um dado de 3 faces à primeira tentativa. Um único dado irá conceder 3 hipóteses. O jogador tem então $\frac{1}{3}$ da aposta porque irá jogar apenas um terço.

Se ele jogar 2 vezes, poderá ganhar de 2 maneiras, ou quando o segundo jogador ganha a primeira e ele a segunda, ou quando o terceiro ganha a jogada e quando ele ganha a segunda. Mas 2 dados produzem 9 hipóteses. O jogador tem então $\frac{2}{9}$ da aposta quando eles jogam duas vezes.

Mas, se ele jogar 3 vezes, ele pode ganhar apenas de 2 maneiras, ou o segundo ganha na primeira jogada e o terceiro ganha na segunda, e ele na terceira; ou quando o terceiro ganha a primeira jogada, o segundo a segunda, e ele a terceira; pois se o segundo ou o terceiro jogador ganha as 2 primeiras, ele irá ganhar a aposta e o primeiro jogador não. Mas 3 dados dão 27 hipóteses, nas quais o primeiro jogador tem $\frac{2}{27}$ das hipóteses quando eles jogarem 3 partidas.

A soma das hipóteses que fazem o primeiro jogador ganhar é consequentemente $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{2}{27}$ que dá 17/27.

Esta regra é boa e geral para todos os casos do gênero onde, sem recorrer a supostas condições, as verdadeiras combinações de cada número de jogadas dão a solução e tornam claro o que eu disse no início, que a ampliação para um certo número de pontos não é nada mais do que a redução de diversas frações ao mesmo denominador. Em poucas palavras, é "o todo" do mistério, que nos reconcilia sem qualquer dúvida, uma vez que cada um de nós procurou apenas razão e verdade.

3. Espero enviar-lhe, no dia de São Martinho, um resumo de tudo o que descobri de anotações que dizem respeito a números. Permita-me ser conciso, [visto ser suficiente] para me dar a entender a um homem [como você] que compreende o todo com metade das palavras. O que você irá achar de mais importante em relação ao teorema de que cada número é composto por 1, 2 ou 3 triângulos; por 1, 2, 3 ou 4 quadrados; por 1, 2, 3, 4 ou 5 pentágonos; por 1, 2, 3, 4, 5, ou 6 hexágonos, e assim até ao infinito.

Para obter isto é necessário mostrar que todo o número primo maior que um múltiplo de 4 é composto por 2 quadrados, como 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Dado um número primo maior deste tipo, como 53, encontrar através de uma regra geral, os 2 quadrados que o compõem.

Todo número primo maior que um múltiplo de 3, uma unidade, é composto por um quadrado e por um triplo de outro quadrado, como 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Todo número primo maior que um múltiplo de 8, por uma ou 3 unidades, é composto por um quadrado e pelo dobro de outro quadrado, como 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Não existe nenhum triângulo de números cuja área é igual a um número quadrado.

Isto vem de uma invenção de muitos teoremas, com os quais Bachet se consagrou a si próprio ignorante e que faltam em Diofante.

Estou convencido que assim que você tenha conhecimento da minha maneira de demonstrar este tipo de teoremas, irá lhe parecer boa e que lhe dará a oportunidade para uma multidão de novas descobertas, pois tal segue como sabe de que *multi pertranseant ut augeatur scientia*. Quando tiver tempo, falaremos posteriormente de números mágicos e resumirei o meu anterior trabalho sobre este assunto. Eu sou, Senhor, cordialmente o seu etc.

Fermat

Estou a escrever isto do campo, e isto poderá atrasar as minhas respostas durante as férias.

7ª carta (Pascal para Fermat)

Terça-feira, 27 de outubro de 1654.

Senhor,

Sua última carta me satisfez perfeitamente. Eu admiro seu método para o problema dos pontos, tanto mais que eu o entendi bem. Ele é inteiramente seu, e não tem nada em comum com o meu, e atinge o mesmo fim facilmente. Agora nossa harmonia começou novamente.

Mas, senhor, eu concordo com você nisso, encontrar alguém em outro lugar para segui-lo em suas descobertas relativas aos números, as declarações de que você fez são tão boas quanto as que me mandou. De minha parte, eu confesso que isto me passa a uma grande distância. Eu sou competente apenas para admirá-lo e peço-lhe mais humildemente a usar seus tempos livres para levá-lo a uma conclusão. Todos os nossos cavalheiros o viram no último sábado e o apreciaram de todo o coração. Não se pode, muitas vezes, esperar pelas coisas que são tão boas e tão desejáveis. Pense nisso se você quiser, e tenha certeza de que eu sou etc.

Pascal.

Paris, 27 de outubro de 1654.

Referências

[1] ABREU, Joel Faria de. *Coincidência de aniversários.* Revista do Professor de Matemática n° 11. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1987, pp. 50-51.

[2] AGOSTINO, Raul F. W. *Intuição e Probabilidade.* Revista do Professor de Matemática nº 27. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995, 25-26.

[3] APARECIDA, Regiane. *História das loterias no Brasil.* Disponível em <http://www.infoescola.com/historia/historia-das-loterias-no-brasil/>. Acesso em 17/07/2015.

[4] ARANHA, Álvaro Zimmermann; RODRIGUES, Manoel Benedito. *Exercícios de Matemática: Análise Combinatória e Probabilidades*, Vol. 4. São Paulo: Editora Policarpo, 1997.

[5] ÁVILA, Geraldo. *Objetivos do Ensino Médio da Matemática.* Revista do Professor de Matemática nº 27. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995, pp. 1-9.

[6] BOYER, Carl B. *História da matemática.* 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.

[8] ______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3^o e 4^o ciclos do ensino fundamental).* Brasília: MEC, 1998.

[9] ______, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

[10] ______, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio* / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. – Brasília: Ministério da Educação, 1999.

[11] ____, *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

[12] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Métodos de Contagem e Probabilidade*. Programa de Iniciação Científica OBMEP. Vol. 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[13] DANNEMANN, Fernando Kitzinger. 1784 - *A história das loterias no Brasil*. Disponível em <http://www.efecade.com.br/1784-historia-da-loteria-no-brasil/>. Acesso em 11/06/2015.

[14] DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. *Probabilidade: Um curso introdutório*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000, 2ª ed.

[15] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*, Ensino Médio, vol. 2. 2ª ed. São Paulo: Ed. Ática, 2001.

[16] DEVLIN, Keith J. *Os problemas do milênio*. Tradução: Michelle Dysman - Rio de Janeiro: Record, 2004.

[17] DOMINGUES, Hygino. *Cardano: o intelectual jogador*. In: HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar. São Paulo: Editora Atual, 1993.

[18] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Higyno H. Domingues. Campinas: Editora UNICAMP, 2004.

[19] FERMAT AND PASCAL ON PROBABILITY. Disponível em: <www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/pascal.pdf>

[20] FILHO, Antônio Carlos da Silva; FELÍCIO, José Roberto Drugowich de. *Pascal e o Mercosul*. Revista do Professor de Matemática nº 28. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1995, pp. 6-15.

[21] GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Tradução: Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras,1999.

[22] HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar* vol.5. 7ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[23] http://www1.caixa.gov.br/loterias/megasena/probabilidade.asp Acesso em: 12 de dezembro de 2014.

[24] JAMES, Barry R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro: IMPA. 2ª Edição, 2ª Impressão.

[25] JUNQUEIRA, Ana Lúcia Nogueira. *A probabilidade que a história nos conta.* XIV Interamerican Conference on Mathematics Education. 2015. Disponível em:<http://xiv.ciaemiacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/290/160>

[26] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar. *A Matemática do Ensino Médio*, v.2. Coleção do Professor de Matemática. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[27] _____. Elon Lages et. al. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[28] _____. Elon Lages et al. *Temas e Problemas Elementares.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, 2ª Ed.

[29] LOVÁSZ, László; PELIKÁN, József; VESZTERGOMBI, Katalin. *Matemática Discreta.* Coleção Textos Universitários. Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

[30] MACHADO, Antônio dos Santos. *Temas e Metas*, vol. 3. São Paulo: Atual Editora, 2000.

[31] MAGALHÃES, Marcos Nascimento; LIMA, Antonio Carlos Pedroso de. *Noções de Probabilidade e Estatística.* 6ª ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.

[32] MARTINS, Olga Maria Pombo. *Cartas entre Fermat e Pascal.* s/d. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/7cartas/> Acesso em: 11 de janeiro de 2013.

[33] MELLO, José Luiz Pastore. *Comparando loterias no ensino de probabilidade.* Revista do Professor de Matemática nº 44. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000, pp.23-26.

[34] MELO, Thiago Brañas de; REIS, José Cláudio. *Relações Históricas entre os Jogos de Azar e a Probabilidade.* XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/584.pdf> acesso em 12/06/2015.

[35] MEYER, Paul L.. *Probabilidade: Aplicações à Estatística.* Editora LTC, 2ª Edição.

[36] MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas.* Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

[37] MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. *Manual de Redação Matemática: com um dicionário etimológico-explicativo de palavras usadas na Matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação*. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2010.

[38] MOREAN, J. P. et al. *Let´s Make a Deal: The Player´s Dilemma*. The American Statistician, Vol. 45, nº 4, pp. 284-289.

[39] MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004, 6ª ed.

[40] _____, Augusto Cesar. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 4. Coleção do Professor de Matemática. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[41] _____, Augusto César de Oliveira. *Os dois bodes*. Revista do Professor de Matemática nº 33, p. 26-29, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

[42] _____, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta*. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013, 1ª Ed.

[43] NETO, Aref Antar et al. *Noções de Matemática vol. 4: Combinatória, Matrizes e Determinantes*. São Paulo: Editora Moderna, 1979.

[44] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012, 2ª ed.

[45] PEREIRA, Carlos Alberto de B. *Estatística e informação*. Boletim a ABE (1995), nº 30, pp. 31-37;

[46] RODRIGUES, Flávio Wagner. *A mídia e a mega-sena acumulada*. Revista do Professor de Matemática nº 43, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000. pp.15-19.

[47] _____, Flávio Wagner. *Sobre o Problema dos Bodes*. Revista do Professor de Matemática nº 36, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998, pp.29-30.

[48] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. *Tópicos de História da Matemática*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[49] SALDANHA, Nicolau Corção. *Como Perder Amigos e Enganar as Pessoas*, Revista Eureka! Número 1, 1998. pp. 41-50.

[50] SANTOS, Luiz Gustavo Martins dos. *Leituras, Combinatória e o Lema de Kaplansky*. Revista do Professor de Matemática, nº 86. Sociedade Brasileira de Matemática, 2015, pp. 24-26.

[51] SILVA, Edson Ricardo de Andrade. *Paradoxo de Bertrand*. Disponível em: <http://www.mat.puc-rio.br/ nicolau/olimp/obm-l.200108/msg00010.html>

[52] SILVEIRA, J. F. P. da. *Início da Matematização das Probabilidades*. 2001. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/histo2c.html>. Acesso em 16/04/15.

[53] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. *Matemática Ensino Médio v. 2*. São Paulo: Saraiva, 2003.

[54] TEIXEIRA, Ralph Costa; MORGADO, Augusto César. II Colóquio de Matemática do Centro Oeste. Disponível em; www.sbm.org.br/docs/coloquios/CO- 2.01.pdf. Acesso em 26/07/2015.

[55] TENREIRO, C. *O problema da divisão das apostas e outras histórias*. 2006. Disponível em: <www.mat.uc.pt/ tenreiro/divulgacao/DivisaoApostas.pps>. Acesso em: 17/07/2015.

[56] TENREIRO, Carlos. *Paradoxos Clássicos no Cálculo das Probabilidades*, 2004. Disponível em: <www.mat.uc.pt/ tenreiro/divulgacao/DivisaoApostas.pps>.

[57] TOMAZ, Priscilla Steffani Santos. Gerolamo Cardano: Pai da Teoria da Probabilidade ou Um Bom Apostador de Jogos de Azar? Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática. Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em

[58] VIALI, Lorí. *Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades*. Revista Brasileira de História da Matemática. n. 16, v. 8, p. 143-153. Out. 2008. Disponível em: http://www.academia.edu/1308131/ Algumas_Considerações_ sobre_a_Origem_da_Teoria_da_Probabilidade