Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologias
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta - PB

José Vinícius do Nascimento Silva

Campina Grande - PB

2015

José Vinícius do Nascimento Silva

Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta - PB

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós - Graduação em Matemática CCT UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre.
Orientadora: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva

Campina Grande - PB

2015

S586p Silva, José Vinícius do Nascimento.
Uma proposta de aprendizagem usando o cubo mágico em Malta - PB [manuscrito] / José Vinícius do Nascimento Silva. - 2015.
72 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2015.
"Orientação: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa".

1. Cubo mágico. 2. Álgebra. 3. Ensino de matemática. I. Título.

21. ed. CDD 372.7

Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta - PB

por

José Vinícius do Nascimento Silva

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Luiz Antônio da Silva Medeiros.

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Maria Isabelle Silva

Profa. Dra. Maria Isabelle Silva - UEPB
Orientadora

Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

03 de Agosto de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Uma proposta de aprendizagem usando o Cubo Mágico em Malta - PB

por

José Vinícius do Nascimento Silva †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

Dedico este trabalho a minha família, à minha esposa e ao meu filho.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus por minha vida, por mais essa conquista, vivenciando este momento de conclusão de curso. Agradeço a Universidade Estadual da Paraíba UEPB por promover este Mestrado Profissionalizante junto ao PROFMAT SBM, em rede Nacional.

Agradeço a minha orientadora, Dra. Maria Isabelle Silva, pelo incentivo à realização deste trabalho com sua orientação, pelo profissionalismo, paciência, pelo modo respeitoso e dedicado de orientar.

Os agradecimentos especiais vão para minha família: minha mãe Lana, meu pai Marcos, minha vó Ismar (in memorian), meus irmãos Vitor e Thaise, meu filho Rafael, minha esposa Jussara, que foram, inesgotavelmente, minhas fontes de energia para que pudesse prosseguir, dia após dia, enfrentando as diversas dificuldades no caminho.

Agradecimentos especiais também aos meus tios: Sandro (e família) e Corrinha (e família). Este por me acolher em sua casa durante a graduação, por me incentivar sempre e colocar sempre palavras sábias nos momentos necessários. Esta pelas grandes (enormes) ajudas nessa caminhada, inclusive, por me dar seus vales-transportes para que pudesse vender e comprar os passes escolares necessários e suficientes para a locomoção na época da graduação.

Agradeço à todos os alunos da minha turma do PROFMAT 2013.1 da UEPB, meus nobres amigos: Alcione, Alex, Anilton, Eduardo, Fernando, Gilmar, Joab, Joselito, Loana, Marcos, Osmar, Rivanildo, Ronaldo, Rosival, Samara, Sérgio e Valdson, por fazerem parte da minha formação. Cada um com sua rica contribuição, deixando uma lembrança especial. Embora tenhamos capacidade de desempenhar nossas tarefas sozinhos, percebi que com a ajuda, visão e experiência de cada um formamos um time muito forte e aprendemos mais.

Agradeço aos membros da banca, pelas suas valiosas contribuições.

Muitas pessoas me ajudaram de forma direta e indireta nessa trajetória, fazem parte da minha vida e muito contribuíram para minha evolução. Tantas que, com certeza, minha memória não tem a capacidade de registrar conscientemente todas elas. Por isso, peço a Deus que abençoe todas elas, desejando muita luz, paz, saúde e sabedoria em suas vidas.

Resumo

O objetivo deste trabalho é ensinar matemática, em particular Álgebra e Geometria, através da aprendizagem de algoritmos e do método de camadas para a montagem do Cubo Mágico de Rubik 3 x 3 x 3 de forma interdisciplinar. A proposta foi aplicada e desenvolvida com alunos do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dr. Antônio Fernandes de Medeiros localizada na cidade de Malta - PB. Para atingir este objetivo construímos através da aprendizagem e manuseio do cubo aplicações com a Geometria, Álgebra, Combinatória e Probabilidade e com questões oriundas de provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).
Palavras-chave

Cubo, Álgebra, Matemática

Abstract

The aim of this work is to teach Mathematics, especially algebra and geometry, through learning algorithms and layers method for assemble the Magic Cube of Rubik 3 x 3 x 3 in an interdisciplinary way. The proposal has been applied and developed with high school students from Escola Estaudal de Ensino Fundamental e Médio Dr. Antônio Fernandes de Medeiros located in Malta Pb. In the period from June 1st, 2015 until June 5th, 2015. To achieve this goal we built through learning and hub handling applications with Geometry, Algebra, Combinatorics and Probability and issues arising from tests of Brazilian Mathematical Olympiad of Public Schools (OBMEP) .

Keywords

Cube, Algebra, Mathematics.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

O cubo mágico de Rubik é um dos brinquedos mais vendidos no mundo, criado por Erno Rubik em 1974. Tal brinquedo alcançou grande fama desde sua criação e já foram lançados no mercado versões distintas do mesmo incluindo algumas que não possuem a forma de um cubo, porém com as mesmas características de baralhar as peças cujo objetivo é fazê-las voltar a seu estado inicial.

O cubo tradicional 3 x 3 x 3 é um desafio e tanto, uma vez que possui muitos estados distintos e apenas um é considerado o 'estado final' chamado de 'solução'. Também foi e continua sendo um desafio criar aplicações ou algoritmos com a capacidade de solucionar o problema do cubo. Além disso, é complicado aprender como solucionar sozinho e buscar se aperfeiçoar nesse brinquedo, exige tempo e muita dedicação.

Por ser um dos quebra-cabeças mais populares e difíceis de montar do mundo, o cubo mágico pode ser um bom aliado no ensino da matemática. O cubo mágico desperta a curiosidade do aluno e pode ajudar a atrair parte da curiosidade dos jovens para a matemática. A atividade ajuda a entender dilemas matemáticos como geometria espacial, análise combinatória, probabilidade, entre outros. O Cubo de Rubik é um dos mais famosos jogos do mundo. Encontrar a solução para o cubo de Rubik já deu voltas à cabeça de milhões de pessoas e muitas nunca conseguiram completar o jogo.

Desde a década de 80, o famoso quebra-cabeça tridimensional desafia as pessoas a encontrarem sua difícil solução. Exige raciocínio lógico, concentração e outras habilidades. Um prato cheio para aulas de Matemática, por exemplo. Para conseguir resolver o enigma do cubo mágico é preciso mexer em poucas peças para não bagunçar as outras. É lógica, é matemática. O cubo possui 43 quintilhões de combinações possíveis. Para um nível básico, em sete etapas é possível montar.

Um dos objetivos é ensinar o passo a passo, do começo até a resolução do cubo tradicional. Introduzir o aprendizado em montar cubos mágicos nas salas de aula, como artifício para melhorá-las, deixando-as cada vez mais dinâmicas, trazendo o alunado a interpretar conceitos matemáticos em Aritmética, Álgebra, Geometria, entre outros.

No Capítulo 2 apresentamos um breve histórico sobre a origem e o desenvolvimento do cubo e de seu criador. No Capítulo 3 discutimos a solução do problema geral de solução mais usado no cubo 3 x 3 x 3 conhecido como método de camadas, onde apresentamos vários algoritmos utilizados e também a formação de alguns padrões explorando também diversas possibilidades e algumas curiosidades sobre o mesmo. No Capítulo 4 descrevemos como foi realizada e implementada a pesquisa e o desenvolvimento das aulas. No Capítulo 5 verificamos através de questões da OBMEP a aprendizagem da pesquisa aplicada. No Capítulo 6 apresentamos os resultados da avaliação. Finalmente, no Capítulo 7 apresentamos algumas considerações e conclusões relacionadas ao trabalho.

2 Cubo de Rubik: Um breve histórico

Um dos brinquedos mais presentes nos lares dos jovens e adultos está com 41 anos de idade. O quebra-cabeça original foi inventado por Erno Rubik em 19 de maio de 1974. Naquele ano, ele decidiu criar um protótipo de cubo para ilustrar o conceito de terceira dimensão para os seus alunos do curso de arquitetura. Sua intenção era que a peça fosse perfeita para a demonstração. A primeira peça construída por Erno Rubik era feita em madeira e teve cada um dos seus lados pintado pelo professor. Cores distintas foram utilizadas para que a pessoa, ao girar as faces do cubo, pudesse ter uma melhor visualização do movimento realizado. A inspiração para o objeto veio ainda de quebra-cabeças conhecidos, como o Tangram.

Assim como as maiores invenções do mundo, o Cubo de Rubik não teve um começo fácil. Depois de mostrar o protótipo para seus alunos e amigos, Erno começou a perceber o potencial de seu cubo. O próximo passo era fabricá-lo. Os primeiros cubos mágicos foram fabricados e distribuídos na Hungria pela Politechnika, obtendo grande aceitação entre os habitantes locais porém eram o dobro do peso dos que seriam fabricados mais tarde. Durante esses anos, a Hungria pertencia ao regime comunista, fato este que contribuiu para a dificuldade dos "cubos mágicos", como eram chamados (e que, por convenção, será utilizado em determinados momentos até o final do presente trabalho), serem exportados para outros países durante esses anos.

Em janeiro de 1975 solicitou a patente do cubo mágico. A patente é concedida em 1977, lançando o cubo para o mercado local, no final do mesmo ano. Rapidamente ele se torna muito popular na Hungria, e três anos mais tarde alcança fama mundial.

Matemáticos ajudaram a divulgar o cubo mágico apresentando-o em conferências internacionais e o levaram a uma feira de brinquedos em Nuremberg em 1979, daí o destino dos cubos mágicos mudou para sempre. Nesta feira, os cubos mágicos encantaram os participantes e também um especialista no mundo dos brinquedos, Tom Kremer, que concordou em distribuir e comercializar em todo o mundo o brinquedo através de uma pequena empresa chamada Toy Company estabelecendo desde então um novo nome para o produto: "Cubo de Rubik", em homenagem ao seu inventor.

Nos Estados Unidos (EUA) a empresa Ideal Toys Company produziu o brinquedo internacionalmente a partir de 1980. O Cubo de Rubik tornou-se parte da cultura pop e pessoas conhecidas como Cubes já começavam a se reunir para resolver o cubo o mais rápido possível. Até os dias atuais torneios são feitos para ver o quão rápido um competidor resolve o cubo.

Estima-se que aproximadamente uma a cada sete pessoas já brincaram com o quebra-cabeça. Ele já apareceu em obras de arte, vídeos famosos, filmes de Hollywood e até teve o seu próprio programa de TV, ele representava tanto genialidade quanto confusão, deu início a um novo esporte (speedcubing), e já até foi para o espaço.

A beleza do Cubo de Rubik é que quando você vê um embaralhado, você sabe o que deve ser feito, sem instrução alguma. Porém, sem instruções de como proceder é quase impossível de se resolver, tornando com que o cubo de Rubik seja umas das invenções mais frustrantes e viciantes já produzidas.

2.1 Erno Rubik

O inventor do Cubo de Rubik nasceu em 13 de julho de 1944, em Budapeste na Hungria, em plena Segunda Guerra Mundial. Filho de um Engenheiro Aeronáutico e de uma Poetisa, iniciou seus estudos em Escultura em 1967, graduou-se na Faculdade de Arquitetura da Escola Técnica de Budapeste fazendo pós-graduação em escultura e arquitetura de interiores. No início dos anos 70 e trabalhando como um arquiteto, chegou a ser professor no Departamento de Desenho de Interiores da Academia de Artes e Trabalhos Manuais Aplicados de Budapeste, na Hungria.

Erno é apaixonado por arquitetura, que se qualifica como uma das atividades mais complexas que combina o mais típico da Ciência, Técnica e apresenta Arte. Em seu trabalho como professor, ele está convencido de que a educação é a melhor maneira de descobrir e aprender através da busca constante de novos métodos de ensino. E dessa busca nasce o cubo que hoje leva seu nome.

Erno diz que o Espaço sempre o intrigou com suas incríveis e ricas possibilidades, objetos espaciais alterados (arquitetura), a transformação de objetos no espaço (escultura, design), o movimento no espaço e no tempo, sua correlação, seu impacto sobre a humanidade, a relação entre homem e espaço, objeto e tempo. Ele crê que o cubo surgiu desse interesse, desta constante pesquisa para a expressão e a crescente acuidade desses pensamentos.

Como professor, sempre procurava por coisas novas, maneiras mais emocionantes para transmitir informação, então ele usou o primeiro modelo do cubo para ajudá-lo a explicar aos seus alunos sobre relações de espaço. Erno sempre viu o cubo como uma peça de arte, uma escultura móvel simbolizando contrastes da condição humana: problemas desconcertantes e inteligência triunfal; simplicidade e complexidade; estabilidade e dinâmica, ordem e caos. Informações mais relevantes podem ser encontradas em Singmaster [13].

Experimentou vários projetos, incluindo uma não exitosa com elásticos para prender as peças. Nas formas finais do protótipo as peças se unem porque elas se encaixam umas com as outras. Com a agradável sensação de ter construído algo original, algo novo, Erno Rubik começa a trabalhar tentando resolvê-lo. Não foi uma tarefa fácil. Ele chegou a duvidar de que pode haver um método ou algoritmo matemático para resolver o enigma. Finalmente, depois de mais de um mês, consegue resolvê-lo.

Ele continuou a desenhar jogos e quebra-cabeças com a sua própria empresa. Ele continua a ensinar na universidade e criou a Fundação Rubik Internacional para ajudar jovens talentosos, engenheiros e designers industriais.

3 Cubo de Rubik: Aprendendo a resolver

O Cubo de Rubik é um brinquedo normalmente acessível a todos os públicos, de baixo custo, com seis lados de cores diferentes. Após misturadas as peças, o objetivo do jogo é deixar novamente cada face do cubo com apenas uma cor. A versão mais conhecida é a de $3\times3\times3$ (lados), objeto de nosso estudo, mas também existem modelos com $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$, $5 \times 5 \times 5$, entre outros; cuja dificuldade aumenta ou diminui.

As dificuldades de se ensinar matemática com aulas dinâmicas e que despertem o interesse dos estudantes ultrapassam o modo como é abordado nos livros e na sala de aula pelo professor. Um dos fatores que chama a atenção é o fato de tornar a matemática do cotidiano mais motivadora e significante para os estudantes, utilizando recursos pedagógicos que sejam excitantes, eficazes e que busquem renovar o ensino.

A visão tradicional da matemática está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Assim, a matemática escolar tem servido para ensinar um conjunto de procedimentos que, na visão dos alunos, não tem relação com outros conhecimentos e, muitas vezes, nem com seu mundo cotidiano.

Além disso, a Álgebra tem se dedicado a capacitar os estudantes para produzir sequências de símbolos corretas e não têm focado na compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. As aplicações utilizadas são muitas vezes artificiais e, os alunos não tem a oportunidade de refletir sobre suas próprias experiências, nem de articular seus conhecimentos, memorizam procedimentos que são assumidos como operações sobre sequências de símbolos e que resolvem problemas artificiais com pouco significado.

Observa-se que pesquisadores como Piaget, Vygotsy, entre outros justificam a utilização dos jogos como fator de aprendizagem. Os jogos são recomendados principalmente por estimularem as relações cognitivas, afetivas, verbais, psicomotoras e sociais. Ademais, o jogo permite que o conheça, através da observação dos alunos, não só como cada um está lidando com o conteúdo educacional objeto do jogo, mas também perceba os aspectos comportamentais, de liderança, cooperação e ética. Por meio de atividades lúdicas o professor pode colaborar com a elaboração de conceitos, reforçar conteúdos, promover a sociabilidade entre os estudantes, trabalhar a criatividade, o espírito de competição e a cooperação.

Vários objetivos cognitivos podem ser alcançados pelo uso de jogos, Grando [6] destaca que nos jogos os procedimentos de raciocínio, as regras, as tomadas de decisões e a elaboração de estratégias são equivalentes aos elementos necessários ao pensamento matemático.

O Cubo de Rubik é geralmente confeccionado em plástico e possui várias versões, sendo a versão $3 \times 3 \times 3$ composta por seis faces de seis cores diferentes. É constituído por vinte e seis cubinhos em sua totalidade, com nove em cada face, sendo um destes fixo e que fica no centro do cubo.

O cubo mágico foi construído com base em três tipos de peças: centros, meios e cantos. Os centros possuem somente uma cor, os meios possuem duas cores e os cantos possuem três cores. Logo, suas 26 peças distribuem-se da seguinte forma: seis centros, doze meios e oito cantos, conforme podemos observar na Figura 1.

Figura 1: Cubo de Rubik

O cubo possui, como cores tradicionais: branco, amarelo, verde, azul, vermelho e laranja. Como os centros do cubo são parafusados e sem núcleo, as cores serão fixas sempre e, portanto, as cores opostas também sempre serão as mesmas. Abaixo estão as cores originais do cubo com suas respectivas cores opostas: branco x amarelo, azul x verde e vermelho x laranja.

Figura 2: Centros, meios e cantos no Cubo

Existem, obviamente cubos com as cores diferente destas, porém a forma de resolver é a mesma. Quando o cubo estiver embaralhado, para saber qual é a cor de uma face qualquer basta olhar a cor da peça do centro.

Para executar os algoritmos é necessário conhecer a notação do cubo. Essa notação indicará qual lado e qual sentido devemos girar o cubo. O lado é dado a partir da letra

Figura 3: Cores das faces e suas respectivas faces opostas

e o sentido é dado a partir do apóstrofo (') ou ausência dele. Para cada lado do cubo existe uma letra correspondente. Essa letra usualmente é indicada pela primeira letra de seus respectivos nomes, em inglês: Front - F - (face frontal) a que fica virada para o usuário, a face posterior é chamada de Back - B -, a face superior recebe o nome de Up - U -, a face inferior é chamada de Down - D -, a face esquerda chamamos de Left - L - e a face direita chamamos de Right - R -. Observe que usaremos também algumas notações conforme figura 4. Por exemplo, R' representará um giro de 90° no sentido anti-horário e R2 representará dois quartos de volta em qualquer sentido do cubo totalizando assim 180° e R um giro de 90° no sentido horário.

A princípio pode parecer óbvio mas a ordem em que aplicamos os movimentos no cubo faz diferença, pois aplicar o movimento L seguido de R é diferente de R seguido por L. Em alguns casos, as combinações de movimentos no cubo podem ser comutativas. De modo geral, se m e n são números reais quaisquer então m x n = n x m. Quando a ordem não importa no resultado da operação, como no caso da multiplicação de dois ou mais números reais, chamamos de operação comutativa. Por outro lado quando a ordem em que os elementos são operados interfere no resultado, como na multiplicação de matrizes por exemplo, dizemos que a operação não é comutativa.

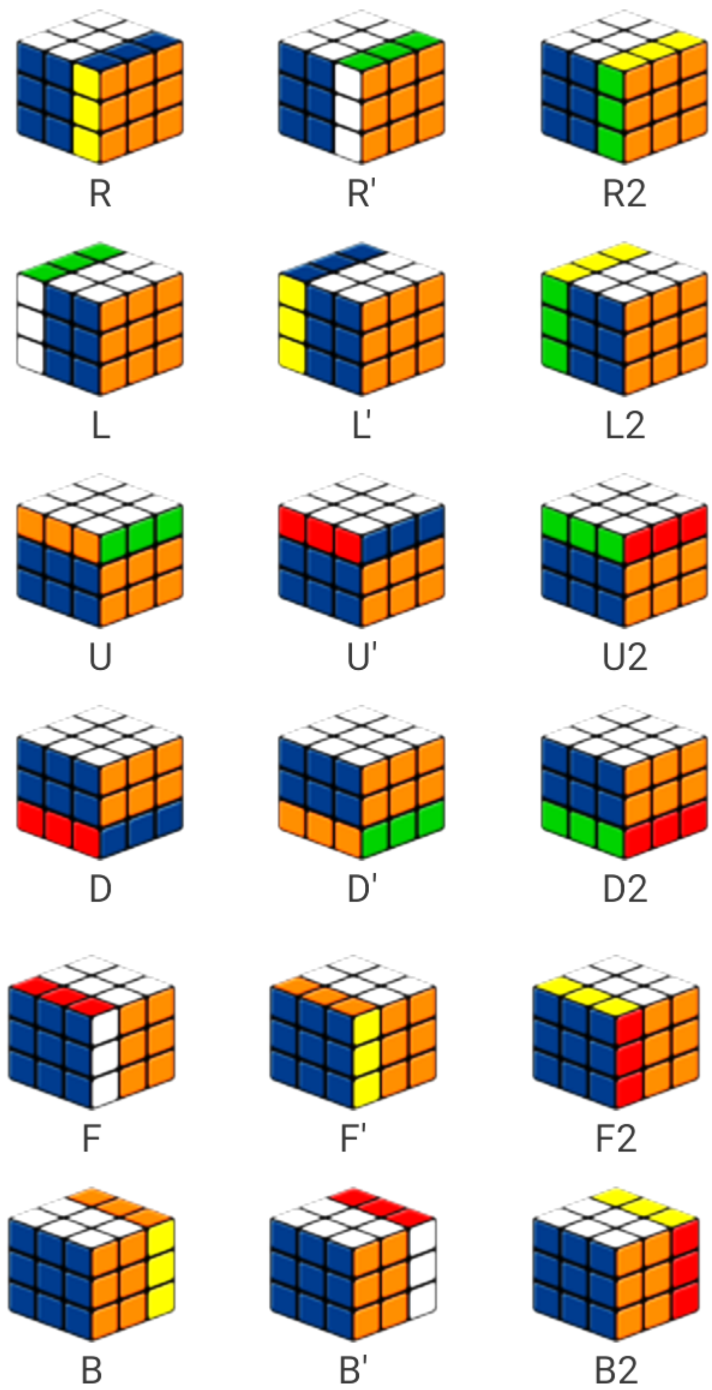

Figura 4: Notações usadas para os movimentos no cubo

3.1 Curiosidades sobre o Cubo de Rubik

Algumas das curiosidades do cubo mágico são:

1. O Cubo Mágico possui 43.252.003.274.489.856.000 de combinações diferentes possíveis (mostraremos mais adiante como chegar nesse resultado);

2. Se um indivíduo pudesse realizar todas as combinações possíveis (sem repetir nenhuma, é claro) em uma velocidade de dez movimentos por segundo, seriam necessários 137.151.202.672 anos para concluir a tarefa. Isso é muito mais do que a idade do Planeta Terra (4,5 bilhões).

3. O próprio inventor do Cubo Mágico, Erno Rubik, levou um mês para resolvê-lo pela primeira vez;

4. 'O Número de Deus' é como se batiza a menor quantidade de movimentos necessários para resolver o Cubo de Rubik. Atualmente, o mínimo conseguido foi 20 movimentos;

5. Além das variantes de $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$ e $5 \times 5 \times 5$, existem Poliedros Mágicos com outras figuras geométricas;

6. O maior número de pessoas a resolver o Cubo Mágico ao mesmo tempo foi batido por 96 habitantes de Santa Ana, na Califórnia, Estados Unidos;

7. Existem versões do Cubo Mágico adaptados para daltônicos e cegos. O primeiro vem com as cores escritas em cada peça, já o segundo tem a coloração em Braile;

8. Embora seja facilmente encontrado a preço baixos, existem versões luxuosas como o Master Piece - O cubo mágico mais caro do mundo - , feito por Fred Cueller, da Associação Internacional dos Lapidadores de Diamantes, para a confecção da jóia, foi usado um bloco de 18 quilates de ouro sólido, incrustado com $22,5$

quilates de ametista, 34 quilates de rubis e 34 quilates de esmeralda verde. O preço é avaliado em U$ $1,5$ milhões - cerca de R$ $3,32$ milhões.
Maiores informações podem ser vistas no Guia dos Curiosos [7].

3.2 Montando o Cubo de Rubik

Para resolver o cubo mágico há várias maneiras distintas. A maneira mais 'bruta' é o conhecido método da chave-de-fenda que consiste em girar uma face qualquer (45º) e enfiar uma chave-de-fenda fazendo com que um cubinho salte do cubo e assim poder desmontar e montar novamente.

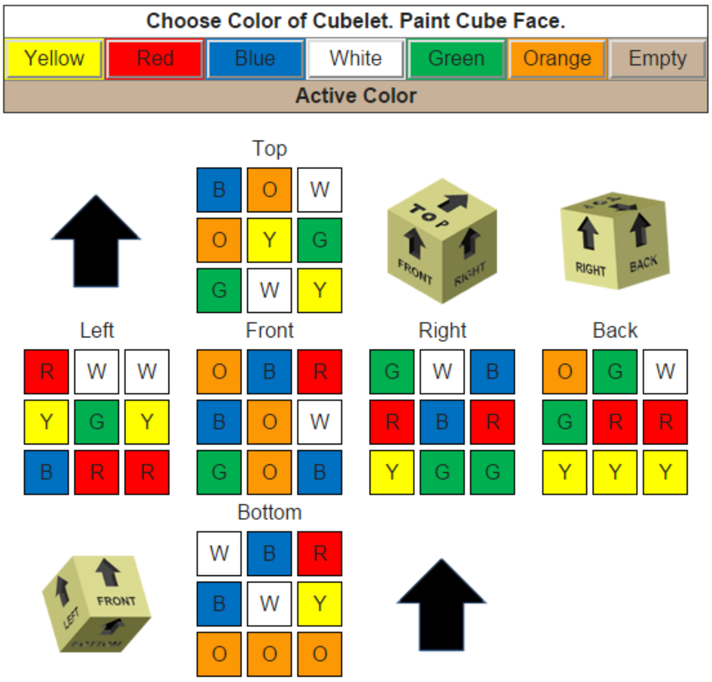

Figura 5: Site rubiksolve.com resolve o Cubo Mágico

O método empírico é o adotado pela maioria das pessoas, pois a partir de testes e tentativa e erro torna-se bastante instrutivo e com muita sorte e perseverança pode conseguir montar. O método estratégico - método de camadas apresentado a seguir - consiste em tomar um conjunto de macros (algoritmos) realizando tarefas específicas caminhando num sistema tutorial passo-a-passo para a solução do cubo.

Por fim, o método algébrico consiste em encontrar a solução fazendo as contas, utilizando os conhecimentos de Álgebra, em particular, conhecimentos de Teoria dos Grupos.

Um método não muito interessante porém com facilidade pode ser encontrado no site: http://rubiksolve.com/, no qual você preenche os espaços do cubo desenhado da mesma forma que o seu cubo se apresenta. Depois basta pressionar o botão 'solve cube' para receber instruções, passo a passo, e resolver seu quebra-cabeças. Perde a graça da brincadeira? Com certeza, além de um aprendizado insignificante, mesmo assim é um bom início a quem não conhece nada sobre os algoritmos de montagem.

A resolução aqui tratada é uma das mais tradicionais e baseia-se em determinados movimentos que produzem os resultados esperados, tornando a resolução feita por níveis com fácil memorização dos macros - algoritmos, adaptada de Schultzer [12]. A conexão de jovens em primeiro contato com o brinquedo é, de certa forma, intrigante e surpreendente. Muitos sentem-se desafiados em tentar resolvê-lo.

A opção ideal para quem está iniciando é o método de camadas. Ele consiste em sete passos que devem ser decorados para finalizar a montagem do cubo.

Passo 1: Escolher qual face (cor, usualmente inicia-se com a face branca) e construir uma cruz nela, respeitando os centros do cubo, conforme Figura 6.

Figura 6: Cruz Branca

A construção da cruz é bastante intuitiva, ou seja, existe um algoritmo porém com uma simples observação pode-se construí-la sem dificuldades. Procure peças de meios com a cor branca (escolhida anteriormente) e veja se consegue movê-las até o seu lugar, por exemplo, a peça de meio que possui as cores branca e azul deve estar na posição correta de suas respectivas peças de centro, como na Figura 6. Note que as peças em cinza estão denotando que não importa nesse passo sua posição, onde só devemos levar em consideração as peças coloridas excetuando a cor cinza. Caso a peça de meio encontrada não esteja no lugar certo, basta fazer o movimento F' U L' U'.

Passo 2: Montar a primeira camada.

Figura 7: Montando a primeira camada

A meta aqui é construir a primeira camada do cubo. Temos quatro peças em seu devido lugar e queremos colocar as outras quatro peças do canto para completar uma face e poder passar ao passo seguinte. Devemos levar em consideração que iremos preservar a cruz branca no topo do cubo e buscaremos peças de canto (com 3 cores), por exemplo a branca, azul e laranja da imagem, daí observe que deve-se deixar a peça com as cores laterais (azul e laranja) em sua posição correta de acordo com as peças de centro.

Posicione o cubo com a face branca para baixo e execute o algoritmo de acordo com os casos (Figura 7). Cada algoritmo move o canto de cima para baixo sem desmanchar a cruz.

Passo 3: Montar a segunda camada.

Figura 8: Montando a segunda camada

O objetivo é construir a segunda camada do cubo. Posicione o cubo com a face branca para baixo e execute o algoritmo de acordo com os casos abaixo, conforme Figura 8. Cada algoritmo move o meio de cima para baixo sem desmanchar a primeira camada.

Passo 4: Cruz da última camada.

O alvo é construir a cruz da última camada. Posicione o cubo com a face branca para baixo e execute o algoritmo de acordo com os casos abaixo, conforme Figura 9. Se na última camada não existir meios com a cor amarela, execute o primeiro algoritmo e depois o segundo.

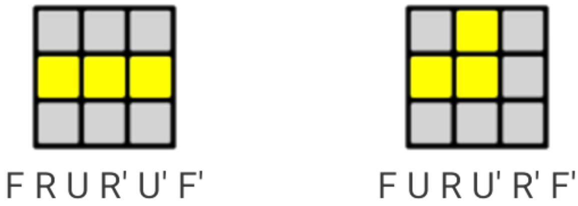

Figura 9: Montando a cruz da última camada

Passo 5: Meios da última camada.

O objetivo é consertar as peças de meio da face amarela. Temos algumas possibilidades a considerar: Uma peça de meio correta ou duas peças de meio corretas (em faces vizinhas ou opostas) e com muita sorte, os quatro meios já posicionados corretamente. Em qualquer dos casos o algoritmo R U R' U R U2 R' aplicado uma ou duas vezes (conforme o caso) deixará todas as peças de meio em seus devidos lugares sem desmanchar tudo o que já foi feito.

Figura 10: Montando a face amarela

Passo 6: Permutação dos cantos.

A meta é preparar os cantos da última camada. Posicione o cubo com a face branca para baixo e execute o algoritmo de acordo com os casos abaixo: Se a última camada não possuir no mínimo dois cantos corretos, execute o algoritmo U R U' L' U R' U' L em qualquer posição. Tal algoritmo aplicado uma ou duas vezes conserta os cantos deixando-os na posição correta.

Passo 7: Finalizando o Cubo.

Figura 11: Permutação dos cantos

Com a face amarela virada pra cima do cubo consideremos as possibilidades: Se a última camada possuir os quatro cantos corretos, o cubo estará montado. Se a última camada possuir apenas três cantos corretos, execute o algoritmo R' D' R D (quantas vezes necessário) com o canto correto na parte da frente à sua direita do cubo até que a peça de canto fique na posição correta. Se a última camada possuir apenas dois cantos corretos, execute o algoritmo R' D' R D (quantas vezes necessário) com os cantos corretos na parte da frente do cubo até que a peça de canto fique na posição correta e após isso gire o topo 90º, isto é, faça o algoritmo U' e repita o procedimento com a peça de canto que falta consertar. Se a última camada não possuir nenhum canto correto, execute o algoritmo R' D' R D em qualquer posição (desde que a face amarela esteja no topo) até que a peça de canto fique na posição correta e após isso gire o topo 90º, isto é, faça o algoritmo U' e repita o procedimento até que todas estejam em seu devido lugar. Com isso, as quatro peças de canto da face amarela estarão em seu devido lugar e o cubo mágico resolvido.

Figura 12: Permutação dos cantos 3

Com esses passos concluídos, seu cubo estará montado e terá voltado a configuração inicial. Durante mais de quatro anos de práticas com a utilização do cubo mágico de Rubik percebe-se uma relação entre o brinquedo e a Matemática. Tomando como base experiências diversas desenvolvidas em sala de aula; nota-se que ao utilizar o cubo mágico em sala de aula há um interesse ainda maior por parte dos estudantes, que passam a aprender com a ajuda de um brinquedo que provavelmente já devem ter usado e que, na maioria dos casos, não conseguiram solucioná-lo.

3.3 Formando padrões no Cubo de Rubik

Pessoas que já sabem como montar o cubo mágico são sempre indagadas sobre o porquê de não conseguir guardar o seu cubo embaralhado. Torna-se um processo quase que mecânico, basta visualizar um cubo embaralhado temos a mania de sempre querer montar. Existem diversos padrões interessantes no cubo, alguns dos quais serão elencados aqui.

Padrão Xadrez:

Figura 13: Padrão Xadrez

Cada face terá suas diagonais de uma cor (5 peças) e as demais peças terá a cor de sua face oposta, conforme Figura 13. O algoritmo é: R2 L2 U2 D2 F2 B2, para retornar o cubo a posição resolvida basta inverter o algoritmo fazendo B2 F2 D2 U2 L2 R2.

Padrão Six Hole para trocar os centros do cubo:

Figura 14: Padrão Six Hole

O cubo estará praticamente montado, porém com os centros das faces trocadas, conforme Figura 14. O algoritmo é: U D' B F' R L' U D' e para retornar o cubo a posição resolvida basta inverter o algoritmo fazendo D U' L R' F B' D U'.

Padrão Ziguezague:

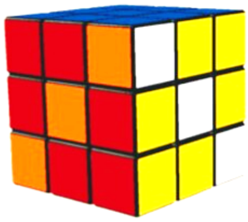

Figura 15: Padrão Ziguezague

Em quatro faces do cubo mantém-se as diagonais e trocam-se as demais peças pelas respectivas peças da face oposta, conforme figura 15. O algoritmo é: R L B F R L B F R L B F, para retornar o cubo a posição resolvida basta inverter o algoritmo fazendo F' B' L' R' F' B' L' R' F' B' L' R'.

Padrão Cubo no cubo:

Figura 16: Padrão Cubo no Cubo

Nesse padrão espetacular, temos a perspectiva de um cubo 1x1x1 inserido em um cubo 2x2x2 também inserido em um outro cubo 3x3x3, conforme figura 16. O algoritmo é: F D F' D2 L' B' U L D R U L' F' U L U2, para retornar o cubo a posição resolvida basta inverter o algoritmo fazendo U2 L' U' F L U' R' D' L' U' B L D2 F D' F'.

3.4 Número de Deus

As equações para resolver os enigmas no menor número de movimentos são, de certa forma, muito complexas para serem memorizadas por uma pessoa comum. Geralmente necessita-se de computadores e até mesmo supercomputadores. O número de Deus trata-se de um resultado relativo a um problema matemático demonstrado em 2010 sendo possível ao fim de um número finito de passos.

Conforme afirmado, resolver o cubo pode ser tecnicamente mais ou menos demorado, lembrando que o cubo possui um número finito (embora muito grande) de configurações e se tentássemos uma a uma atingiríamos a posição desejada. Porém não temos todo o tempo do Universo e nossa pretensão é resolver o cubo de maneira inteligente, isto é, utilizando algoritmos e métodos estratégicos que permitam resolver tal problema da maneira mais eficiente.

É justamente nesse aspecto que se encontra um problema interessante, ainda mais interessante do que a resolução do cubo em si. Sabemos que muitos algoritmos permitem a solução do Cubo de Rubik, no entanto, suponhamos que exista um ser omnisciente, que conhece tudo sobre o cubo, em particular todos os algoritmos para a sua resolução. Com um cubo embaralhado em uma configuração qualquer nas mãos pede-se a este tal ser para solucionar o cubo fazendo-o voltar a sua configuração inicial, cada face de uma só cor. Uma questão interessante a ser considerada é saber qual o número mínimo de movimentos que deverá ser efetuado.

Diante de um problema desse tipo, nosso ser omnisciente deve resolver o problema usando um número mínimo de passos. Uma outra exigência é de que o algoritmo utilizado seja prático, não utilizar uma tabela gigantesca para consultas caso a caso, mas fornecer uma verdadeira metodologia, pois, caso contrário não seria uma metodologia.

Poderíamos pensar também que, como os computadores de hoje são muito mais potentes bastaria introduzir todas as configurações possíveis num computador para conseguir saber o número de Deus. Porém tal ideia rapidamente esbarra numa realidade calculável: com um total de configurações possíveis superior a 43 quintilhões, mesmo um computador que analisasse 1000 configurações do cubo por segundo demoraria mais de mil milhões de anos a dar uma resposta certamente mais tempo do que estaríamos dispostos a esperar por ela. Muito embora a análise computacional possa ajudar, nesse problema, não existe substituto para a inteligência humana.

A incessante busca pelo número de Deus foi uma aventura que durou três décadas e que, possivelmente, chegou ao fim. Por um lado, foram-se estabelecendo limites inferiores para tal número, ou seja, mostra-se a existência de configurações cuja resolução exige um número mínimo de movimentos. Em outras palavras, o número de Deus tem sempre que ser maior que o limite inferior. Por outro lado, foram-se também construindo limites superiores para o número de Deus, mostrando que o cubo pode ser sempre reconduzido ao seu estado inicial no máximo com um certo número de movimentos, qualquer que seja seu estado inicial.

Assim, para se conhecer o número de Deus a ideia a princípio é simples: ir aumentando o limite inferior e ir diminuindo o limite superior. Quando, e se, conseguir mostrar que ambos são iguais, está encontrado o número de Deus. Por exemplo, no final dos anos 70, David Singmaster mostrou que o limite inferior é (pelo menos) 18. Não o fez de forma construtiva mas sim de forma indireta: mostrou que o número total de configurações cujo limite inferior é 17 ou menos é menor que o número total de configurações.

O limite inferior estacionou durante cerca de 15 anos, até que em 1995, Michael Reid construiu explicitamente uma configuração, conhecida como superflip (cantos corretos, peças de bordo na posição correta porém viradas ao contrário) que exige 20 movimentos. Assim, o limite inferior do número de Deus passou a ser 20.

Do lado do limite superior, o processo foi muito mais turbulento e excitante. O primeiro valor foi dado principalmente por David Singmaster: 277 movimentos. Mais tarde, Berlekamp, Conway e Guy construíram um algoritmo mais eficiente, baixando este número para 160. E pouco depois, os cubistas de Cambridge, um grupo de entusiastas de Matemática recreativa liderado por Conway, diminuíram esse limite para 94.

Em 1981, Morgen Thistlewaite, matemático na universidade do Tenessee, realizou uma análise profunda do grupo do cubo, reduzindo o limite superior sucessivamente até 52. De 1995 em diante, assistiu-se a um refinamento dos métodos matemáticos utilizados, o que, aliado ao cada vez maior poder dos computadores, permitiu ir baixando o limite superior.

Em 2010, Tomas Rokicki, Herbert Cociemba, Morley Davidson e John Dehridge, a culminar uma colaboração de vários anos, atingiram a uma demonstração, com a ajuda dos supercomputadores da Google, que forneceu graciosamente o equivalente a 35 anos de CPU, de que o limite superior é, de fato, 20. Ou seja, o número de Deus é 20.

À parte a natural excitação que o prazer intrínseco da exploração intelectual provoca e que leva a que o problema do número de Deus seja estimulante pelo fato de existir e agora sabermos a sua resposta demonstra o porquê de matemáticos buscarem sua resposta. Por exemplo, hoje são comercializados cubo 4x4x4, 5x5x5, 6x6x6, 7x7x7, entre outros. E podemos imaginar um cubo $n \times n \times n$, com n inteiro arbitrário. Cada um terá o seu número de Deus. Tais informações podem ser vistas em Buescu [2].

Uma das principais razões de investir décadas de esforço a tentar conhecê-los é que a teoria dos jogos matemáticos não é um mero divertimento de excêntricos, sendo, assim um tópico moderno de investigação científica. Muitos problemas de jogos matemáticos e combinatórios podem ser inseridos em correspondência com problemas clássicos, no sentido em que demonstrar uma propriedade sobre um jogo é equivalente a demonstrar um teorema matemático.

Os jogos matemáticos tem assim, uma dignidade muito superior à de um passatempo. Nunca podemos saber quando e quais resultados sobre jogos se poderão traduzir em genuínos resultados de matemática tradicional mas o certo é que, no tocante a resolução de problemas e exames como o das Olimpíadas Brasileiras de Matemática, várias questões envolvendo jogos já foram observadas.

4 Descrição das Aulas

A prática de jogos e quebra-cabeças, incluindo o cubo ou até mais simples, como também outros relacionados diretamente ou indiretamente ajudam no desenvolvimento cerebral como uma ginástica mental melhorando capacidades que nos podem ser de muita utilidade na vida tanto nos estudos como no trabalho. A prática regular desses tipos de jogos prepara a nossa mente para processar a informação de uma maneira mais lógica e rápida, buscando soluções cada vez mais eficazes e seguras.

Jogando com o cubo de Rubik e sem notar, o jogador está analisando as distintas situações possíveis que se podem produzir através dos giros de cada face, de forma lúdica. Uma outra capacidade observada é a inteligência espacial; esse tipo de inteligência se relaciona com a capacidade que um indivíduo tem no que se refere a aspectos como: cor, linha, forma, figura, espaço e a relação entre eles, isto é, a capacidade de uma pessoa processar informação em três dimensões em aspectos como:

i) Perceber a realidade, apreciando tamanhos, direções e relações espaciais;

ii) Reproduzir mentalmente objetos que são observados;

iii) Reconhecer o mesmo objeto em diferentes circunstâncias;

iv) Descrever coincidências ou similaridades entre objetos que parecem distintos;

Tais habilidades são de muita utilidade para se aprender matemática. Uma outra parte onde a prática de exercitar o cérebro com o cubo mágico ajuda é na inteligência lógico-matemática, ou seja, a capacidade de utilizar números de maneira efetiva e raciocinar adequadamente empregando o pensamento lógico. Essa inteligência comumente se manifesta quando se trabalha com conceitos abstratos ou argumentações de caráter complexo: problemas na vida, realizar trabalhos matemáticos com equações, variáveis, gráficos, etc.

Partindo desse pressuposto demos início à nossa proposta de ensinar matemática usando o cubo mágico como ferramenta pedagógica, para tal foi realizado o primeiro questionário (Anexo no final deste trabalho), que trata-se de uma sondagem sobre o conhecimento acerca do cubo mágico de Rubik. Essa pesquisa foi realizada com 20 jovens

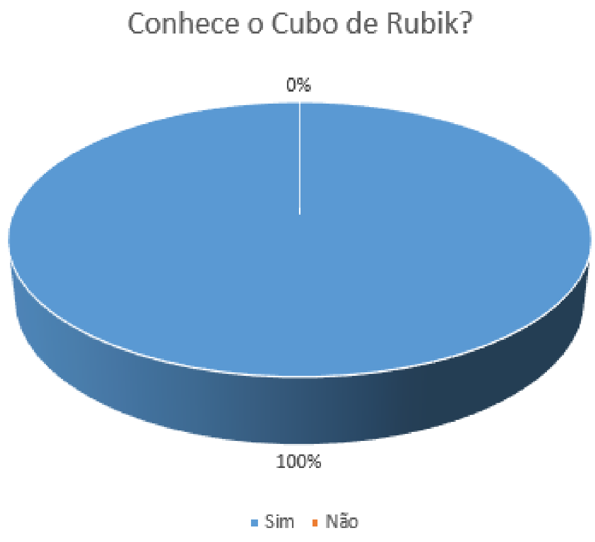

Figura 17: Gráfico 1

com idades entre 14 e 17 anos de turmas distintas do ensino médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Dr. Antônio Fernandes de Medeiros localizada na cidade de Malta - PB. Tal questionário foi composto por oito questões discursivas, de modo que pôde ser constatado que, desses jovens estudantes 100% afirmam conhecer o cubo mágico de Rubik, conforme podemos observar na Figura 17.

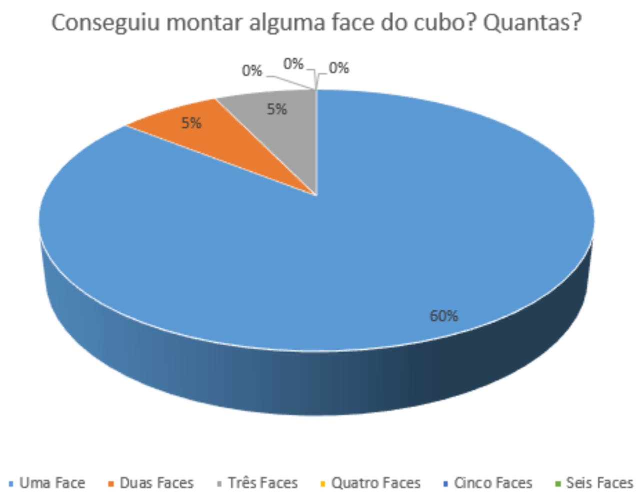

Figura 18: Gráfico 2

Agora, analisando as respostas obtidas pelos alunos na Figura 18, que verifica se algum desses alunos já havia conseguido montar pelo menos uma face do cubo de Rubik. Evidencia-se um fato interessante a ser notado: que mais da metade desses jovens nunca conseguiu montar uma face do cubo sequer. Dos 45% restante de alunos que conseguiram completar pelo menos uma face, nota-se que o máximo de faces atingidas é três e que foi atingido apenas por um aluno. Mais ainda, destes, 35% conseguiu completar apenas uma face com suas próprias técnicas e/ou métodos.

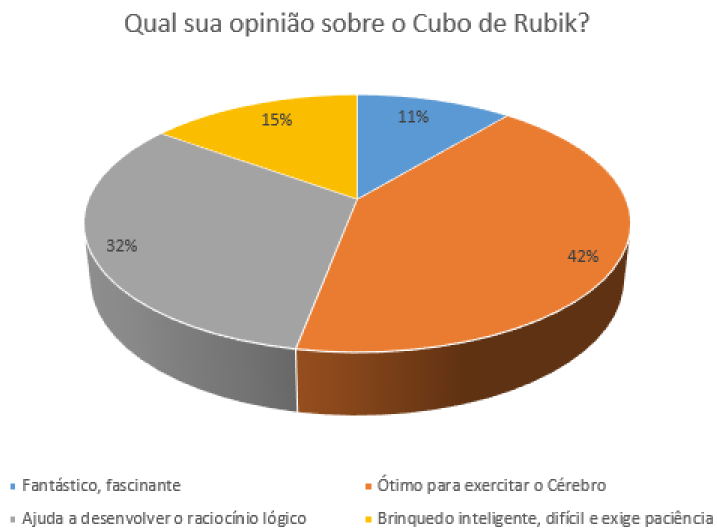

Figura 19: Gráfico 3

Sabendo que todos os alunos entrevistados conhecem o cubo mágico de Rubik, procuramos saber também a opinião dos mesmos acerca do cubo mágico e chegamos a respostas diversificadas, pois classificaram o nosso objeto de estudo como sendo, por exemplo: um brinquedo fantástico, um brinquedo fascinante, um brinquedo inteligente, é um ótimo exercício para o cérebro, ajuda a desenvolver o raciocínio lógico, brinquedo legal e que exige paciência, brinquedo muito complexo e difícil, brinquedo desafiador, entre outros. Um resumo das respostas dos alunos pode ser analisada na Figura 19.

Nesta etapa, questionamos os jovens estudantes sobre o processo de montagem das faces do cubo de Rubik. Indagamos se creem ser fruto de inteligência ou truque. As respostas foram interessantes pois podemos notar que 75% dos alunos acreditam ser a união da inteligência e de um truque para a montagem por completo do cubo mágico; 10% acham que não é nenhuma das duas opções em questionamento; 10% acreditam ser apenas truque e 5% acreditam ser inteligência (em nenhum momento foi comentado a possibilidade de usar a matemática e seus algoritmos para solucionar o cubo), conforme

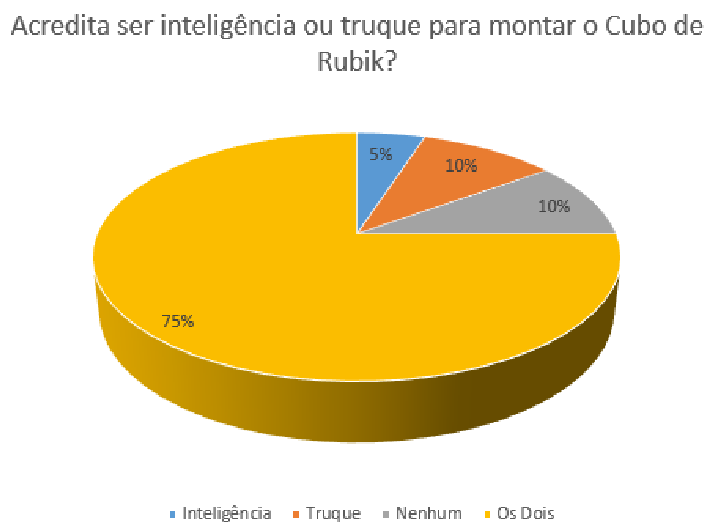

Figura 20: Gráfico 4

observamos na Figura 20.

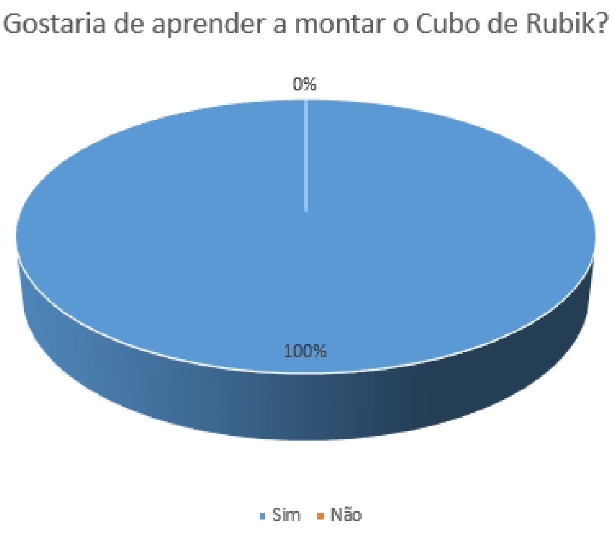

Figura 21: Gráfico 5

Continuando com a entrevista, questionamos acerca do interesse dos jovens em aprender a temática, se eles estariam interessados em aprender a solucionar o cubo e aprender conceitos matemáticos com o auxílio do brinquedo, e o resultado foi excepcional, pois 100% dos alunos sentiram-se interessados em aprender a montar o cubo, conforme podemos ver na Figura 21.

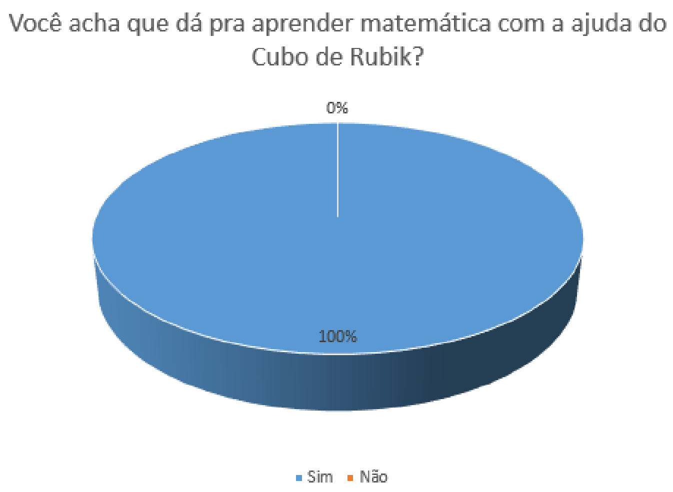

Figura 22: Gráfico 6

Finalmente, foi perguntado a cada estudante se acredita que dá pra aprender matemática com a ajuda do cubo mágico de Rubik e novamente 100% dos alunos afirmaram acreditar ser possível aprender matemática, de acordo com a Figura 22.

As atividades desenvolveram-se em quinze aulas, cada uma com duração de 50 minutos, de segunda à sexta, no horário noturno (oposto ao de sala de aula pois os alunos estudam pela manhã ou pela tarde) com atividades em aulas duplas e sequenciadas (totalizando 150 minutos por dia) do dia 01 de junho de 2015 até o dia 05 de junho também de 2015. A turma foi composta por 20 alunos participando ativamente de todas as atividades até a aplicação da avaliação da verificação da aprendizagem.

Os recursos didáticos utilizados durante as aulas constavam de: quadro branco, pincel para quadro branco, apagador, calculadora, cubo mágico 3 x 3 x 3, datashow, celulares com Android, tablets, além da verificação da aprendizagem, aplicada ao término das quinze aulas.

Em 01 de junho de 2015, primeiro dia do curso, para o processo de ensino sobre a montagem do cubo foi ofertado gratuitamente a cada aluno um cubo mágico para a prática dos movimentos iniciais. Também foi instalado para a utilização o aplicativo 'Solve the Cube' nos dispositivos Android dos alunos (celulares e tablets). Tal aplicativo pode ser baixado gratuitamente através do Play Store.

Observamos o total domínio dos estudantes quanto à tecnologia. Pois, com apenas uma explicação relativamente simples, os mesmos conseguiram instalar sem nenhuma dificuldade o aplicativo solicitado. Contudo, notamos uma pressa em aprender a completar o cubo usando o aplicativo.

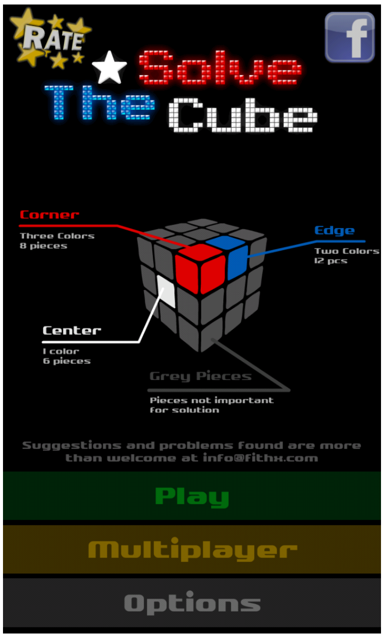

Figura 23: Aplicativo Solve the Cube - Interface

A Figura 23 mostra a interface do aplicativo, que por sua vez é bastante intuitivo, apesar da linguagem utilizada ser a língua inglesa (pode ser trocada no link Options) o aplicativo conta com imagens que facilitam o aprendizado. Por exemplo, na imagem do cubo em sua interface nota-se claramente a separação dos tipos de peças; peças de centro (CENTER) são as peças de centro identificadas por ter apenas uma cor num total de seis peças; peças do meio (EDGE) são as doze peças que possuem duas cores e peças de canto (CORNER) são as oito peças do cubo que possuem três cores.

A escolha deste aplicativo não aconteceu de forma aleatória, pois foram observados vários aplicativos para dispositivos Android porém tal aplicativo facilita bastante o aprendizado, uma vez que segue fielmente o método de camadas exposto e usado para o processo de montagem do cubo. Note, através da Figura 24 (após abrir o link PLAY na tela de interface), que a sequência para a montagem completa segue os seguintes passos: montar uma cruz (na face) branca; deixar a face branca completa; montar a camada do meio (central); montar uma cruz (na face) amarela; acertar a posição das peças de canto e o movimento final finalizando as etapas de montagem; Note que o aplicativo atualiza a porcentagem de cada fase (etapa de montagem) conforme o usuário pratica e conclui cada etapa.

Figura 24: Printscreen de um Passo a Passo

Podemos observar na Figura 25 os diversos casos a serem considerados em cada etapa de montagem. Ao abrir cada etapa de montagem o usuário irá se aprimorar de acordo com o andamento dos casos conforme for evoluindo. Para se ter uma ideia, para o primeiro passo de montagem (White Cross) temos 14 diferentes casos (etapas) a serem completados. Para ter acesso ao segundo passo da montagem o aplicativo requer mais de 50% das etapas completadas do primeiro passo de montagem, o mesmo vale para o terceiro, quarto, quinto e sexto passos de montagem.

O aplicativo registra e salva todo o processo evolutivo do usuário, de forma a classificar cada etapa do processo em uma, duas ou três estrelas, sendo essa última a melhor destas. Ainda é registrado o tempo gasto para completar cada caso (etapa) até a conclusão dos movimentos finais. No menu de opções (OPTIONS) pode ser escolhido a utilização ou não de som (SOUND) e vibração (VIBRATION), também a linguagem utilizada pelo usuário (inglês, francês, espanhol, alemão ou italiano) e também os níveis de dificuldade: fácil (EASY), normal (NORMAL) e profissional (PRO).

Em resumo, no primeiro dia de encontro com os estudantes traçamos o objetivo do

Figura 25: Caso a Caso

curso, mostramos a importância em observar os diferentes tipos de peças no cubo, fizemos a contagem de tais peças usando a forma bruta de montar o cubo conhecido como chave de fenda comentado anteriormente e falamos sobre alguns tipos de simetrias.

A nossa missão com esse curso não é dar respostas prontas ou simplesmente ensinar a completar o cubo pelo método de camadas, mas também mostrar que com algoritmos matemáticos e raciocíno lógico podemos solucionar o cubo 3 x 3 x 3. Foi deixado claro aos estudantes que participaram do curso que estratégias avançadas podem ser encontradas nos livros, na internet e em diversos lugares, inclusive na prática cotidiana. O que desejamos, portanto, é provocar a inteligência e a curiosidade pois percebemos que as pessoas que possuem um alto nível neste tipo de inteligência possuem uma sensibilidade para realizar esquemas e relações lógicas, afirmações e proposições, funções e outras abstrações relacionadas. Também refere-se a um raciocínio numérico, a capacidade de resolução, compreensão de elementos aritméticos e geralmente na resolução de problemas.

4.1 Cubo Mágico em sala de aula: Simetrias

Também no primeiro encontro foi elencado situações e exemplos sobre o uso do cubo para o estudo de Simetrias. Tomamos os primeiros 50 minutos ensinando os algoritmos para a montagem da primeira camada. Como de costume, iniciamos a montar a face de cor branca e usamos os dois algoritmos para praticar a montagem da cruz branca e das peças de canto, respectivamente. Também nesse tempo usamos o aplicativo baixado para a parte prática e notação de observações de alguns possíveis casos que devem ser considerados no processo de montagem da primeira camada que é a face branca e suas peças de canto, cada uma em seu devido lugar.

Neste primeiro momento do curso, falamos também sobre simetrias. Ao observarem o tópico, prontamente ouvimos o que conheciam inicialmente sobre o tema e falou-se em alguma imagem espelhada, comum cotidianamente. Teoricamente falamos que simetria é a semelhança exata de uma forma em torno de um eixo de simetria, em torno de um ponto ou em torno de um plano. Existem três tipos de simetria: simetria por rotação, simetria por translação e simetria por reflexão. Podemos observar que F é simétrico a F', por rotação, F' é simétrico a F'', por reflexão e F'' é simétrico a F''' por translação.

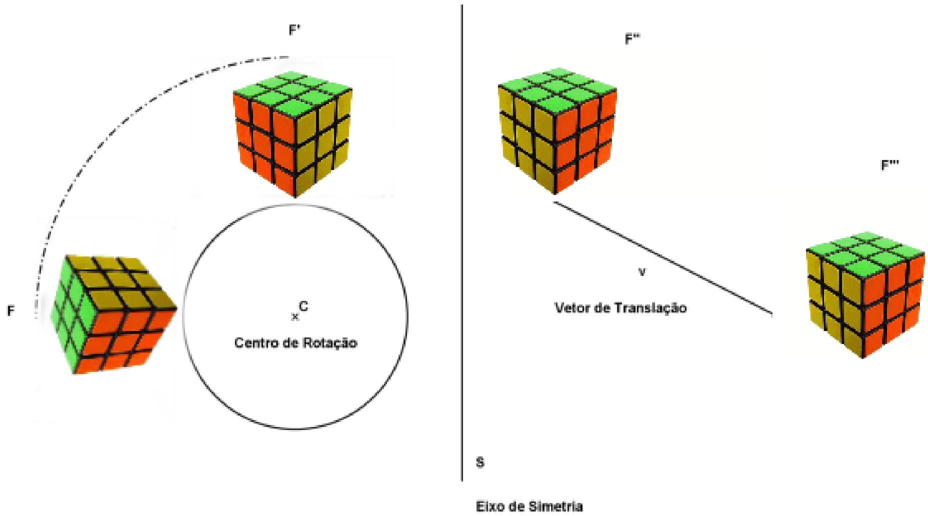

Figura 26: 3 tipos de Simetria

Uma simetria é um movimento de um objeto geométrico que o faz 'parecer' sempre o mesmo. A simetria ocorre quando é possível encontrar, para qualquer figura, pelo menos uma transformação geométrica diferente da transformação identidade, que a deixe inalterada, isto é, alguns ou todos os pontos da figura podem mudar de posição, mas a figura, como um todo se mantém inalterada.

A simetria por reflexão ocorre quando uma figura bidimensional possui este tipo de simetria e pode ser refletida em relação a um eixo linear (dito eixo de simetria), de modo a ser possível fazer-se corresponder ponto a ponto com a imagem original. Na simetria por translação, a figura 'desliza' sobre uma reta, mantendo-se inalterada. A simetria por rotação é a transformação de uma figura que obtemos girando cada um de seus pontos segundo um 'arco' de circunferência ao redor de um ponto fixo percorrendo um determinado 'ângulo'.

Por exemplo, há quatro simetrias numa elipse que a faz parecer sempre a mesma. São elas:

(I) Não fazer nada com a elipse (identidade)

(R) Girar a elipse 180º por seu centro

(A) Refletir a elipse pelo seu eixo menor

(B) Refletir a elipse pelo seu eixo maior

O conjunto G = {I, R, A, B} com a operação $*$ definida por fazer o primeiro movimento depois o segundo forma um grupo, este tópico que será debatido mais adiante.

Podemos também descrever a tábua da operação $*$:

$*$	(I)	(R)	(A)	(B)
(I)	(I)	(R)	(A)	(B)
(R)	(R)	(I)	(B)	(A)
(A)	(A)	(B)	(I)	(R)
(B)	(B)	(A)	(R)	(I)

4.2 Cubo Mágico em sala de aula: Cálculo de Volumes

Para o segundo dia de encontro além de ensinar a montar a segunda camada do cubo através de novos algoritmos e utilização do aplicativo instalado nos dispositivos móveis, falamos sobre o cálculo de áreas e volumes. Intuitivamente falamos que o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para expressar essa quantidade de espaço através de um número devemos compará-la com uma unidade, e o resultado dessa comparação será chamado de volume. Então, combinamos que a unidade de volume é o cubo de aresta 1. Daí, para cada unidade de comprimento temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo a unidade de comprimento for o metro (m) então a unidade correspondente de volume será chamada de metro cúbico (m^3).

Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprime quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Por exemplo, o paralelepípedo retângulo (bloco retangular) que é um poliedro formado por seis retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c), conforme a figura:

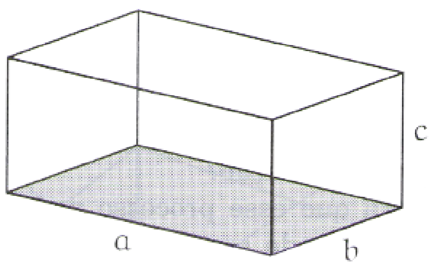

Figura 27: Bloco Retangular

O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por V(a,b,c) e como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimento, largura e altura medem 1, então V(1,1,1) = 1. Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que se mantivermos constantes a largura e a altura e se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume ficará também multiplicado por n, ou seja, $V(n \times a,b,c) = n \times V(a,b,c)$.

Este fato, constatado para números naturais também vale para qualquer número real positivo e isto quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$
\begin{aligned}
&V(a,b,c)\\
&V(a\times 1,\mathrm{b},\mathrm{c})\\
&a\times \mathrm{V}(1,\mathrm{b},\mathrm{c})\\
&a\times \mathrm{V}(1,\mathrm{b}\times 1,\mathrm{c})\\
&a\times \mathrm{b}\times \mathrm{V}(1,1,\mathrm{c}) \qquad (1)\\
&a\times \mathrm{b}\times \mathrm{V}(1,1,\mathrm{c}\times 1)\\
&a\times \mathrm{b}\times \mathrm{c}\times \mathrm{V}(1,1,1)\\
&a\times \mathrm{b}\times \mathrm{c}\times 1\\
&a\times \mathrm{b}\times \mathrm{c}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões ou ainda:

$$\text{Volume do Paralelepipedo} = (\text{area da base})\times(\text{altura}) \qquad (2)$$

A ideia neste momento foi usar o cubo mágico para explorar situações como o cálculo da área e o volume de paralelepípedos retângulos e cubos. Através de vários exemplos, supondo cada cubinho com volume unitário calculamos o volume de algumas figuras espaciais no qual foi possível mostrar aplicabilidade do cubo mágico para o ensino-aprendizagem do cálculo de volumes além de explorar situações diversas envolvendo conceitos de prismas.

4.3 Cubo Mágico em sala de aula: Análise Combinatória

Para o terceiro dia, já temos a segunda camada do cubo completamente montada e decidimos então ensinar a montar a cruz da face amarela (oposta a face branca do cubo) da forma correta, deixando para o quarto e quinto dia o passo final de montagem do cubo. Aqui, a pressa na busca de atingir o final da montagem do cubo estava evidenciada nas atitudes dos jovens. De fato, para quem jamais havia montado uma face sequer, observando o processo evolutivo de montagem e notando o cubo quase pronto pronto a expectativa e animação estava ao extremo. Foi, inclusive, complicado tirar o foco do processo de montagem do cubo e partir para a aula explicativa sobre Análise Combinatória.

Na segunda parte da aula, definimos inicialmente o que é uma permutação, que é o conjunto de cada uma das ordenações possíveis de um dado conjunto. Por exemplo, no conjunto $\{1, 2, 3\}$ cada ordem possível de seus elementos, sem repeti-los é uma permutação. Neste exemplo, existem seis permutações para estes elementos que são: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Calculamos, também, o total de possibilidades do cubo de Rubik 3 x 3 x 3. Mostrando que podemos ordenar os vértices de 8! maneiras e também as arestas de 12! maneiras. Porém, somente a metade das possibilidades são possíveis pois é impossível permutar duas arestas sem ter que trocar a posição dos vértices e vice-versa. Também podemos girar todos os vértices do cubo, exceto um, sem que nada mais mude no cubo. Uma vez que a orientação do último vértice será determinada pela orientação dos demais, logo teremos 3^7 orientações distintas para os vértices. A mesma ideia vale para a orientação das arestas. Assim, temos 2^{11} possibilidades para estas. Em sua totalidade, temos, usando o princípio fundamental da contagem (PFC), um total de

$$\frac{8! \times 3^7 \times 2^{11}}{2} = 43252003274489856000. \tag{3}$$

Para esta parte do curso tivemos dificuldade pois alguns alunos da 1ª série do Ensino Médio juntamente com alguns alunos da 2ª série do Ensino Médio ainda não conheciam o conceito de fatorial de um número, geralmente abordado na 2ª Série do Ensino Médio. Definimos, então, o conceito de fatorial de um número e através de inúmeros exemplos antes de provar a quantidade de possibilidades distintas em um cubo 3 x 3 x 3. Em resumo, a participação dos alunos nesse momento foi enriquecedora, através de questionamentos, debates e prática, tornando o cubo uma ferramenta aliada ao processo de aquisição de conhecimentos.

4.4 Cubo Mágico em sala de aula: Frações e Probabilidade

No quarto dia de curso, usamos a segunda parte da aula para falar um pouco sobre frações e conceitos iniciais de probabilidade. De modo geral, mostramos que podemos usar a face frontal do cubo (escolhida a cor aleatoriamente) e mostrar que a mesma foi dividida em nove partes iguais.

Definimos as experiências repetidas sob as mesmas circunstâncias que produzem geralmente resultados diferentes são chamadas de aleatórias e citamos vários exemplos destes. Chamamos de espaço amostral o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por S e só vamos considerar o caso de S ser finito ou infinito enumerável. Os subconjuntos de S serão chamados de eventos. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento.

Por exemplo, no lançamento de uma moeda, o espaço amostral é S $= \{cara, coroa\}$ e há quatro eventos: $\emptyset$, A $= \{cara\}$, B $= \{coroa\}$ e o próprio S.

Definimos que probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número P(A) de forma que:

1. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

2. P(S) $=$ 1.

3. Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \oslash$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Conseguimos fazer com que os alunos observassem que se tomarmos uma linha ou uma coluna qualquer da face de um cubo estaremos tomando $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ da face do cubo original. Pode-se pensar também em frações de uma determinada cor e sua totalidade, por exemplo, temos que $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ do cubo está na cor branca e em quaisquer uma das cores, analogamente. Pode-se facilmente mostrar também qual fração do cubo são centros, vértices ou até mesmo meios.

Nota-se, inicialmente, que o cubo tem o formato de um dado comum. Também sabemos que dados são ferramentas de investigação importantíssimas no estudo sobre os fenômenos aleatórios e decisões sobre o espaço amostral de um dado evento ocorrer. A proposta foi a seguinte: uma troca entre a numeração do dado convencional pelas cores do cubo. Resolvemos diversos problemas envolvendo não somente um cubo, mas vários destes. Por exemplo: determinar a probabilidade de se lançar um cubo e a face amarela ser a selecionada (face selecionada é a que fica com a cor na posição de cima) ou qual a probabilidade de que num lançamento de dois cubos, ambos sair a cor azul. Caracterizamos também evento nulo que é sair uma cor que não está presente no cubo e que evento certo seria ocorrer uma face qualquer (cor) presente no cubo, obviamente.

Devido ao tempo, a parte do ensino de frações e de probabilidade foi bastante reduzida. Foram abordados exemplos de como utilizar o cubo em questões que envolvem ambos conteúdos intrinsecamente ligados. Todavia, observou-se uma interação entre os alunos participantes através de diálogo envolvendo os conceitos apreendidos.

4.5 Cubo Mágico em sala de aula: Álgebra Abstrata

Para o quinto e último dia, reservamos o processo de finalização da montagem das seis faces do cubo mágico (restando nesse momento apenas as peças de canto da face amarela) e também estudamos os conceitos matemáticos incluindo noções de álgebra abstrata, aritmética modular e congruências geralmente abordados apenas em Ensino Superior.

Mostramos que a descrição matemática do funcionamento do cubo mágico é feita usando o conceito matemático de grupo. Um grupo é um conjunto onde está definida uma operação que é associativa, não necessariamente comutativa, que tem elemento neutro e para qual todos os elementos possuem inverso. Um exemplo trivial é o conjunto dos números inteiros com a operação de adição. Neste caso, o elemento neutro é o zero e o oposto de cada elemento é o seu simétrico. Este exemplo tem uma particularidade: a operação em questão é comutativa, fato que não acontece em geral.

De fato, um grupo, além de sua definição formal pode ser entendido como um conjunto de aplicações que preservam uma estrutura, considerando neste caso, a operação de composição que não é comutativa, como sabemos.

Um fato interessante é que a resolução do Cubo de Rubik pode ser formulada como um problema matemático abstrato. Cada movimento permitido (girar uma face por 90^o ou 180^o) é uma operação que origina um outro cubo. Isto corresponde precisamente à definição matemática de grupo. Assim, a construção da solução do cubo pode ser vista abstratamente como a aplicação, aos objetos matemáticos que definem grupo, das operações permitidas de forma a atingir seu elemento específico: a configuração do cubo em que todas as faces tenham a mesma cor.

Neste momento, realizamos vários movimentos sequenciados no cubo, como por exemplo F seguido de U seguido de L, inclusive repetindo tal movimento inúmeras vezes quando se queira. Mostramos que podemos simplesmente escrever a sequência como F U L como se quiséssemos multiplicar F por U e por L, nessa mesma ordem. Convém também atribuir letras para tais sequências que julgamos importantes, um exemplo é S = F U L. Nota-se que o número de quartos de volta (q) de S será a medida de seu comprimento, por exemplo, S = F U L tem 3q.

Chamaremos de macro uma sequência longa finita S contendo dois ou mais movimentos. Essa macro deve ser pensada como um conjunto de instruções a serem executadas em bloco. Por exemplo, se S = F U L, significa fazer F depois U depois L sem interrupções. Observa-se que uma macro pode ser constituída de outras macros, por exemplo, seja a macro T = S D S, logo, executar T significa fazer F, U, L, D, F, U, L.

Algumas combinações de movimentos foram importantes e observadas nesse ponto. Sejam X e Y movimentos do cubo então o algoritmo X Y significa dizer que deve ser feito primeiramente X e depois o movimento Y. O algoritmo $X^2 = XX$ é o mesmo que repetir o movimento X duas vezes, por exemplo, o algoritmo U^2 significa rotacionar o topo duas vezes, ou seja, 180º. O algoritmo $X^3 = XXX$ pede que repita o movimento X três vezes, $XYXYXYXY = (XY)^4$. O I denota o movimento que não altera o cubo, chamaremos esse movimento de identidade, por exemplo, $U^4 = I$. Para desfazer uma sequência de movimentos, em geral, iremos desfazendo os movimentos na ordem inversa. Como por exemplo: $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ e também $(X_1X_2X_3 \ldots X_n)^{-1}$ $= X_n^{-1}X_{n-1}^{-1} \ldots X_3^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}$, é o famoso bordão: "O inverso de colocar suas meias e depois seus sapatos é o tirar os sapatos e depois suas meias". Claramente, $FF^{-1} = I$, pois efetuar F seguido de F^{-1} é o mesmo que não fazer nada no cubo. Por essa razão temos que $(FUL)(L^{-1}U^{-1}F^{-1}) = I$. Escrevendo $S = (FUL)$ observa-se que $L^{-1}U^{-1}F^{-1}$ faz o oposto de S, logo representa S^{-1}. Assim, para desfazer uma sequência de movimentos, devemos executar na ordem inversa os opostos dos movimentos individuais. Temos, também, que dois movimentos serão ditos iguais se tiverem o mesmo efeito no cubo.

É interessante notar que $(XX)^3 = X^4 =$ I, isto é, $X^3 = X^{-1}$ e que X^{-1} X = I, com isso podemos concluir que $(X^{-1})^{-1} =$ X. Mais ainda, note que X^4 é a primeira vez que as repetições de X voltam a posição original, voltam a dar I. Com isso, dizemos que X tem ordem 4, e escrevemos |X| = 4. Observe que os movimentos F, B, R, L, U, D têm ordem 4 e que a macro S = L^2F^2 tem ordem 6, escrevemos O(S) = 6 e que a macro T = L F possui ordem 105 (convidamos o leitor a tentar fazer tal macro no cubo).

Recordamos, aqui, que usualmente a multiplicação entre dois números reais é comutativa, ou seja, $3 \times 5 = 5 \times 3$. Entretanto, um fato importante é que se X e Y são dois movimentos quaisquer do cubo de Rubik então é possível que X Y $\neq$ Y X. Neste caso, dizemos que X e Y não comutam. Como por exemplo, os movimentos F U $\neq$ U F, um outro exemplo seria F L $\neq$ L F, o mesmo ocorre em quaisquer faces adjacentes sendo uma das propriedades que tornam o cubo um objeto ainda mais fascinante. Porém é importante notar que alguns pares de movimentos comutam, por exemplo, U D = D U, R L = L R, F B = B F (tente fazer no cubo e observe).

Então, como se pode notar, embaralhar o cubo é aplicar uma sequência de movimentos aleatória, digamos X, num cubo inicialmente resolvido (com as faces todas de uma só cor) e obviamente resolver o cubo requer encontrar uma sequência de movimentos Y tal que X Y = I, na qual I representa o cubo resolvido. É interessante observar que Y X = I Y X =X^{-1} X Y X = X^{-1} I X = I. Portanto, X = Y^{-1}. Informações mais relevantes podem ser encontradas em Schultzer [12].

Após tais observações, abordaremos conceitos e propriedades da teoria de grupos.

Definição 1. *Seja G um conjunto não-vazio e*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned} \tag{4}$$

uma operação em G. Dizemos que G é um grupo em relação a essa operação se, e somente se,

(G1) *A operação é associativa, isto é, a ∗ (b ∗ c) = (a ∗ b) ∗ c, ∀ a, b, c ∈ G;*

(G2) *Existe elemento neutro para ∗, isto é, existe e ∈ G tal que a ∗ e = e ∗ a = a, ∀ a ∈ G;*

(G3) *Todo elemento em G é invertível em relação à operação ∗, isto é, ∀ a ∈ G, existe a' ∈ G tal que a ∗ a' = a' ∗ a = e;*

Sendo, portanto G um grupo, diz-se que ele é abeliano quando é comutativo, isto é, quando a ∗ b = b ∗ a, ∀ a, b ∈ G.

Associamos e debatemos tal definição com as observações dos algoritmos e procedimentos para a sequência de montagem do cubo. Mostramos que vários conjuntos de números formam grupos, por exemplo: O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ = {. . . , -2, -1, 0, 1, 2, . . .} é um grupo com a operação de adição. A identidade é o zero (0) e o inverso de n é -n. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ = {1,2,3, . . .} com a operação de adição não é grupo, pois não possui elemento simétrico. O conjunto dos números reais diferentes de zero $\mathbb{R}^*$ é um grupo com a operação de multiplicação, 1 é sua identidade e o inverso de x é $\frac{1}{x}$. Porém o conjunto $\mathbb{Z}^*$ com a mesma operação não é um grupo, uma vez que os únicos elementos invertíveis são 1 e -1.

Falamos também sobre Relações de Equivalência.

Definição 2. *Dizemos que a relação S sobre um dado conjunto X é uma relação de equivalência sobre X se ela cumpre as condições:*

i) *$(x, x) \in S$, para todo $x \in X$ (reflexiva);*

ii) *Se x e y são elementos de X tais que $(x, y) \in S$, então $(y, x) \in S$ (simétrica);*

iii) *Se x, y e z são elementos de X tais que $(x, y) \in S$ e $(y, z) \in S$, então $(x, z) \in S$ (transitiva);*

Mostramos que, por exemplo, a relação S $= \{(1, 1), (2, 2)\ (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$ é uma relação de equivalência sobre X $= \{1, 2, 3\}$.

Decidimos falar também, mesmo que brevemente, sobre a teoria das congruências, que é um campo abrangente na matemática, fixado na Teoria dos Números. Abrange propriedades e teoremas cujo entendimento e aplicabilidade variam dos níveis mais básicos aos mais avançados. Na matemática, a aritmética modular é um sistema aritmético voltado para inteiros. O matemático suíço Euler foi o pioneiro na abordagem de congruência por volta de 1750, quando ele explicitamente introduziu a ideia de congruência módulo m, sendo m um número natural. Posteriormente, a aritmética modular foi desenvolvida por Carl Friedrich Gauss em 1801, informações mais relevantes podem ser encontradas em Boyer [1].

Definição 3. *Sejam a e b dois números inteiros e m um número inteiro positivo maior que 1. Diz-se que a e b são congruentes módulo m se o número m divide a diferença (a - b). Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m escrevemos*

$$a \equiv b \ mod \ m \tag{5}$$

Por exemplo, $21 \equiv 11 \; mod \; 2$ pois, $2|(21-11)$, ou seja, $2|10$ e $21 \not\equiv 13$ mod 3 pois $3 \not| (21-13)$, isto é, $3 \not| 8$. Dizer que m | (b - a) equivale dizer que os restos da divisão de a por m e b por m são iguais.

Um exemplo abordado em sala, comumente em nosso cotidiano, seriam os relógios analógicos um caso de congruência módulo 12. Dessa forma, fica evidente que 15 horas é congruente a 3 horas pois ambos divididos por 12 deixam resto 3,

$$3 \equiv 15 \equiv 27 \equiv (12n+3) \; mod \; 12, \text{ com n} \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

Portanto, as horas de um relógio analógico constituem, de fato, um clássico caso de congruência modular, nesse caso com módulo 12.

Com isso, mostramos claramente que S = $\{(\text{a,b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\text{a} \equiv b \; mod \; m\}$ é uma relação de equivalência, pois:

i) Temos que $a \equiv a \; mod \; m$, pois m | (a - a) = 0. Portanto, vale a propriedade reflexiva.

ii) Se $a \equiv b \; mod \; m$ então $b \equiv a \; mod \; m$ pois, como m | (a - b) então m divide o oposto e daí m | (b - a). Logo, vale a propriedade simétrica.

iii) Se $a \equiv b \; mod \; m$ e $b \equiv c \; mod \; m$ então $a \equiv c \; mod \; m$ pois, como m | (a - b), e m | (b - c) então m divide a soma. Daí m | (a - b) + (b - c) = a - c e portanto, vale a propriedade transitiva.

Definimos também nesse momento as classes residuais.

Definição 4. *O conjunto $\mathbb{Z}_m$ das classes residuais módulo m é da seguinte forma:*

- $\overline{0}$ *é o conjunto de todos os números inteiros que divididos por m deixa resto 0;*
- $\overline{1}$ *é o conjunto de todos os números inteiros que divididos por m deixa resto 1;*

  $\vdots$
- $\overline{k}$ *é o conjunto de todos os números inteiros que divididos por m deixa resto k;*

Teorema 1. *O conjunto $\mathbb{Z}_m$ tem exatamente m elementos, isto é:*

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\} \tag{7}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Dado a $\in$ Z, efetuando a divisão euclidiana de a por m, sendo q o quociente e r o resto da divisão temos que a = mq + r, com $0 \leq$ r $<$ m, daí, a-r = mq, isto é a $\equiv$ r mod m, ou ainda $\overline{a} = \overline{r}$. Como r $\in$ {0, 1, 2,..., m-1} temos que $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$, ou seja, $\overline{a} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$.

($\Leftarrow$) Por outro lado, suponhamos agora que existam duas classes iguais em $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{m-1}\}$, isto é, $\overline{r} = \overline{s}$ com $0 \leq$ r $<$ s $<$ m. Neste caso, temos r $\equiv$ s mod m, ou seja m | (s - r). Como 0 $<$ (s-r) $<$ m, então isso é impossível. Logo, o número de elementos de $\mathbb{Z}_m$ é exatamente m.

□

Definição 5. *As operações de adição e multiplicação em* $\mathbb{Z}_m$ *são definidas da seguinte forma:*

- $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$.
- $\overline{x}\ .\ \overline{y} = \overline{x.y}$.

Por exemplo, sejam $\overline{3}$ e $\overline{4} \in \mathbb{Z}_6$, então ($\overline{3} + \overline{4}$) é também um elemento em $\mathbb{Z}_6$, que é igual a $\overline{7} = \overline{1}$.

A tabela que segue, também chamada de tábua da adição módulo 6, exibe a soma de todos os elementos em $\mathbb{Z}_6$.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Por exemplo, sejam $\overline{3}$ e $\overline{4} \in \mathbb{Z}_6$, então ($\overline{3} \times \overline{4}$) é também um elemento em $\mathbb{Z}_6$, que é igual a $\overline{12} = \overline{0}$. Note que a divisão de 12 por 6 deixa resto zero. Da mesma forma, construímos a tábua da multiplicação módulo 6, exibindo o produto de todos os elementos em $\mathbb{Z}_6$.

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Verificou-se que o conjunto $\mathbb{Z}_m$ com a operação de adição módulo m é um grupo, chamado grupo aditivo das classes de resto módulo m, e mais, é um grupo abeliano, isto é, vale a comutatividade. Agora, note que o conjunto $\mathbb{Z}_m^*$ munido com a operação de multiplicação nem sempre é um grupo. Consideremos, por exemplo o conjunto $\mathbb{Z}_{10}^*$, observe que este conjunto com a operação de multiplicação não é um grupo, note que $\overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{0}$, que não pertence a $\mathbb{Z}_{10}^*$, mais ainda, note também que o elemento neutro não é único. Pois $\overline{9} \cdot \overline{5} = \overline{7} \cdot \overline{5} = \overline{5} \cdot \overline{5} = \overline{3} \cdot \overline{5} = \overline{1} \cdot \overline{5} = \overline{5}$.

Para esclarecer bem o fato de quando $\mathbb{Z}_m^*$ será grupo há um Corolário:

Corolário 1. *($\mathbb{Z}_m^*$,$\cdot$) é um grupo se, e somente se, m for um número primo.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que ($\mathbb{Z}_m^*$,$\cdot$) é um grupo e que m não é um número primo. Então, existem dois números naturais r e s maiores do que 1 de modo que possamos escrever m = r $\cdot$ s, Desta igualdade resulta que $\overline{0} = \overline{m} = \overline{r} \cdot \overline{s}$, o que é uma contradição pois $\overline{0} \notin Z_m^*$.

($\Leftarrow$) Tomando $\overline{r}$, $\overline{s} \in \mathbb{Z}_m^*$, veja que se tivéssemos $\overline{r} \cdot \overline{s} = \overline{0}$, então rs $\equiv$ 0 mod m, o que equivale a dizer que m / rs. Como m é um número primo, então m / r ou m / s ou seja $\overline{r} = \overline{0}$ ou $\overline{s} = \overline{0}$, que é impossível.

Portanto, $\mathbb{Z}_m^*$ é fechado para a multiplicação definida em $\mathbb{Z}_m$. □

Finalizando a parte explicativa da aula de álgebra pudemos, finalmente, partir e concluir o processo de montagem do cubo mágico.

5 Avaliação da Aprendizagem através de problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática da Escolas Públicas - OBMEP

Com o intuito de verificar a aprendizagem acerca do curso, aplicamos questões relacionadas aos tópicos abordados durante o mesmo. Contendo 10 questões das quais 8 foram de múltipla escolha e 2 abertas. O tempo dado para a resolução foi de 150 minutos, o que corresponde a três aulas. Participaram da avaliação 18 alunos. Neste capítulo abordaremos algumas generalizações desenvolvidas durante o curso de Cubo Mágico desenvolvido na própria escola juntamente com os alunos. Essas questões foram utilizadas para verificar algumas habilidades apreendidas durante o curso supracitado.

Problemas envolvendo cubos foram retirados de provas anteriores da OBMEP. A questão, conforme a Figura 28, pede a soma máxima que pode ser obtida no cubo $3 \times 3 \times 3$ usando dados com faces numeradas de 1 a 6.

Problema 1. *A Figura 1 mostra um dado com as faces numeradas de 1 a 6. Com 27 desses dados montou-se um cubo, como na Figura 2. Qual é a maior soma possível de todos os números que aparecem nas seis faces do cubo?*

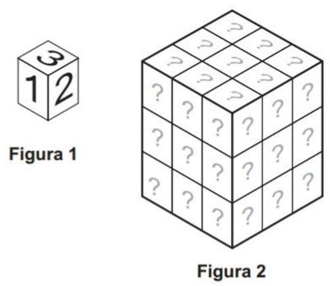

Figura 28: Problema 1: OBMEP 2010 nível 3, questão 15

(a) *162*

(b) *288*

(c) *300*

(d) *316*

(e) *324*

Observamos que no cubo maior temos peças de três tipos a considerar: peças dos cantos (A), peças de meio (B) e peças de centro (C) conforme Figura 29. Já sabemos que num cubo $3\times3\times3$ temos 8 peças do tipo A, 12 peças do tipo B e 6 peças do tipo C. Portando, basta colocar os dados mostrando (4, 5, 6) nas peças do tipo A, mostrando (5, 6) nas peças do tipo B e mostrando 6 nas peças do tipo C. Logo, teremos um total de

$$8 \times (4+5+6) + 12 \times (5+6) + 6 \times 6 = 120 + 132 + 36 = 288. \tag{8}$$

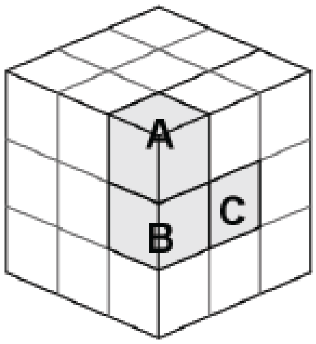

Figura 29: Solução do Problema 1

Verificamos que um total de quinze alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 2. *Todos os números de 1 a 24 devem ser escritos nas faces de um cubo, obedecendo-se às seguintes regras:*

- *em cada face devem ser escritos quatro números consecutivos;*
- *em cada par de faces opostas, a soma do maior número de uma com o menor número da outra deve ser igual a 25.*

Se os números 7 e 23 estiverem escritos no cubo como na figura, qual é o menor número que pode ser escrito na face destacada em cinza?

(a) *1*

(b) *5*

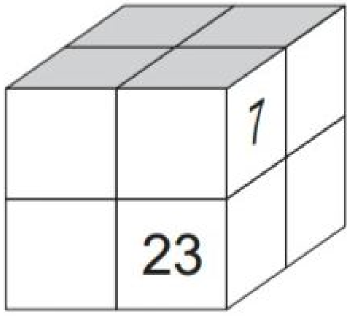

Figura 30: Problema 2: OBMEP 2014 nível 3, questão 6

(c) 9

(d) 11

(e) 17

Como podemos analisar, de acordo com o problema, em cada face aparecem quatro números consecutivos, então na face onde estiver o número 1, obrigatoriamente estarão os números 1, 2, 3 e 4. Logo, na face onde estiver o número 5 estarão os números 5, 6, 7 e 8, e assim, sucessivamente, até chegarmos à face com os números 21, 22, 23 e 24. Sendo assim, no cubo apresentado a face com o número 23 também apresenta os números 21, 22 e 24. Como o enunciado diz que a soma do maior número de uma face com o menor da face oposta é igual a 25, podemos concluir que na face oposta à que contém o 23 estão os números 1, 2, 3 e 4. Na face em que aparece o número 7 aparecem os números 5, 6 e 8, e na face oposta a esta estão os números 17, 18, 19 e 20. Logo, na face destacada (em cinza) pode estar qualquer número de 9 até 16. Como a pergunta é qual é o menor número que pode aparecer na face cinza, a resposta é 9.

Verificamos que um total de treze alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 3. *Um cubo foi montado a partir da planificação mostrada na figura. Qual é o produto dos números das faces desse cubo que têm uma aresta comum com a face de número 1?*

(a) 120

(b) 144

(c) 180

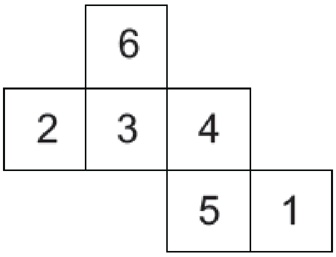

Figura 31: Problema 3: OBMEP 2012, 1ª fase, nível 1, questão 8

(d) 200

(e) 240

Um cubo tem seis faces; cada face é oposta a uma face e vizinha de outras quatro faces. Na planificação da figura, vemos que a face 3 é vizinha das faces 2, 4, 5 e 6. Logo a face 1 não é vizinha da face 3, ou seja, as faces 1 e 3 são opostas. Logo, a face 1 tem arestas comuns com as faces 2, 4, 5 e 6; o produto desses números é $2 \times 4 \times 5 \times 6 = 240$.

Verificamos que um total de onze alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 4. *Em um dado a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Dois dados iguais foram colados como na figura. Qual é a soma dos números que estão nas faces coladas?*

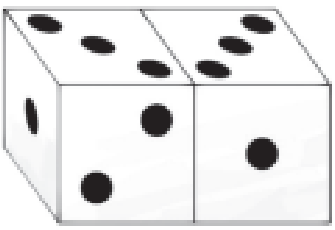

Figura 32: Problema 4: OBMEP 2010, 1ª fase, nível 1, questão 11

(a) 8

(b) 9

(c) 10

(d) 11

(e) 12

Já para essa questão, gostaríamos de avaliar se os alunos notaram que a face colada do dado da esquerda é oposta à face com 1, logo essa face tem o número 6. Na face colada do dado da direita não aparecem nem o 1 nem o 3, e logo não aparecem também nem o 6 nem o 4. Restam para essa face os números 2 e 5. Observando a posição dos três pontos nas faces superiores dos cubos e lembrando que os cubos são idênticos, vemos que o cubo da direita tem o 2 em sua face direita (oculta), logo sua face colada tem o número 5. Segue que a soma das faces coladas é $6 + 5 = 11$.

Verificamos que um total de dez alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 5. *Um cubo de madeira tem 3 cm de aresta. Duas faces opostas foram pintadas de amarelo e as outras quatro faces foram pintadas de verde. Em seguida o cubo foi serrado em 27 cubinhos de 1 cm de aresta, conforme indicado no desenho. Quantos cubinhos têm faces pintadas com as duas cores?*

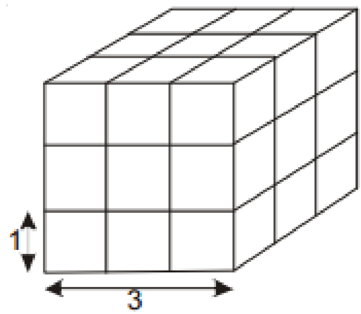

Figura 33: Problema 5: OBMEP 2005, 1ª fase, nível 1, questão 13

(a) 16

(b) 18

(c) 20

(d) 22

(e) 24

Nesse tipo de questão, gostaríamos de avaliar se os alunos notaram que num cubo, duas faces são adjacentes quando têm uma aresta comum e opostas quando não têm aresta comum. No caso, duas faces opostas do cubo foram pintadas de amarelo e as outras quatro de verde, ou seja, cada face verde é adjacente às duas amarelas. Em cada face amarela do cubo, 9 cubinhos têm uma face amarela. Desses 9 cubinhos, apenas o do centro não tem uma face verde. Logo em cada face amarela temos 8 cubinhos com faces verde e amarela. Como o cubo tem duas faces amarelas, o número total de cubinhos que têm faces com duas cores é $8 + 8 = 16$.

Verificamos que um total de quinze alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 6. *Com as figuras mostradas abaixo podemos montar cinco dados diferentes. Com qual delas podemos montar um dado no qual a soma do número de pontos em quaisquer duas faces opostas é 7?*

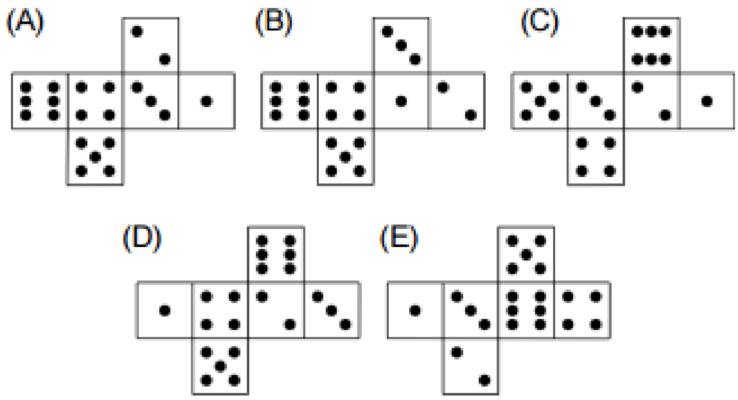

Figura 34: Problema 6: OBMEP 2008, 1ª fase, nível 1, questão 6

Nesse tipo de questão, buscamos avaliar se os alunos notaram que ao montar o cubo, o quadrado superior e o quadrado inferior ficam em faces opostas, o que nos deixa apenas as alternativas (A) e (E) para considerar. Observando que dos quatro quadrados em linha o primeiro e o terceiro a contar da esquerda (ou da direita) também ficarão em faces opostas, ficamos somente com a alternativa (E). Outra solução: Dentre as 4 faces alinhadas, as que são faces opostas no cubo são as que aparecem intercaladas, ou seja a 1a e 3a, e a 2a e 4a. Apenas na opção (E) a soma dos pontos nesses pares de faces é 7 (note que se a soma dos pontos em dois pares de faces opostas é 7 então a soma dos pontos no par restante também é 7).

Verificamos que um total de quinze alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 7. *Elisa empilha seis dados em uma mesa, como na ilustração, e depois anota a soma dos números de todas as faces que ela consegue ver quando dá uma volta ao redor da mesa. As faces de cada dado são numeradas de 1 a 6 e a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Qual é a maior soma que Elisa pode obter?*

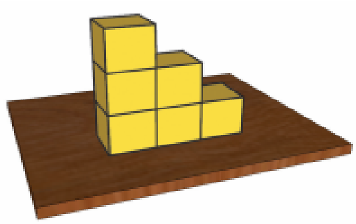

Figura 35: Problema 7: OBMEP 2013, 1ª fase, nível 3, questão 4

(a) 89

(b) 95

(c) 97

(d) 100

(e) 108

Nesse tipo de questão, gostaríamos de avaliar se os alunos puderam inicialmete observar que a soma de todas as faces de um cubo é $1+2+3+4+5+6=21$. A soma das faces visíveis é então igual a $6 \times 21 = 126-$ (soma das faces escondidas). Logo, para que a soma das faces visíveis seja máxima, devemos posicionar os cubos de modo que a soma dos números das faces escondidas seja mínima. Vamos minimizar essa soma considerando um cubo de cada vez, de acordo com a numeração da figura abaixo.

- Cubo 1: há apenas uma face escondida, que deve ser a de número 1.

- Cubos 2 e 4: em cada um há três faces escondidas. Dessas faces, duas são opostas e somam 7; a terceira face deve ser a de número 1. A soma dessas faces é $2 \times (1+7) = 16$.

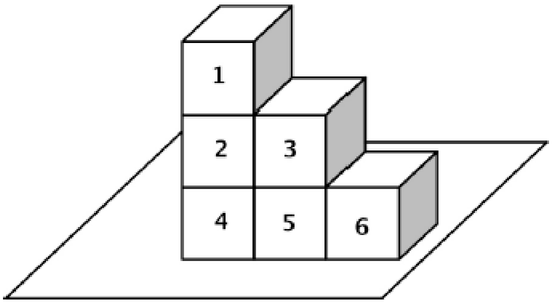

Figura 36: Solução do Problema 7

- Cubos 3 e 6: em cada um há duas faces vizinhas escondidas, que devem ser as de número 1 e 2 (como esses números não somam 7, as faces correspondentes não são opostas, logo são adjacentes). Essas faces somam $2 \times (1 + 2) = 6$.

- Cubo 5: há dois pares de faces opostas escondidas, que somam 14.

Logo, a soma máxima possível é $126 \ - (1 + 16 + 6 + 14) = 126 - 37 = 89$.
Verificamos que apenas seis alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 8. *Joãozinho inventou uma operação matemática com números inteiros, para a qual ele usa o sinal* $*$ *. Ela funciona assim:* $a * b = (a + 1) \times (b - 1)$*. Por exemplo,* $3 * 5 = (3 + 1) \times (5 - 1) = 16$ *. Se a e b são inteiros positivos tais que* $a * b = 24$ *e* $b * a = 30$*, quanto vale* $a + b$*?*

(a) 11

(b) 12

(c) 15

(d) 16

(e) 18

Para a solução desse problema, utilizamos um método bastante algébrico. Temos inicialmente que

$$\text{a} * b = (a+1) \times (b-1) = ab - a + b - 1 = 24. \tag{9}$$

e que

$$\text{b} * a = (b+1) \times (a-1) = ab - b + a - 1 = 30. \tag{10}$$

Somando ambas expressões obtemos

$$\text{2ab - 2} = 54. \tag{11}$$

donde segue que

$$\text{ab} = 28. \tag{12}$$

Teremos, portanto as seguintes possibilidades: (1, 28), (2, 14), (4, 7), (7, 4), (14, 2) e (28, 1) para (a, b). Das quais apenas para a = 7 e b = 4 as operações $a * b$ e $b * a$ são satisfeitas.

Verificamos que um total de treze alunos responderam corretamente essa questão.

Problema 9. *Aline ganhou de presente um cubo composto por 4 x 4 x 4 cubinhos brancos, como na figura a seguir.*

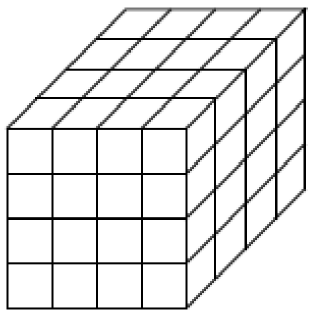

Figura 37: Problema 9: Banco de questões da OBMEP 2013, questão 20

Sem separar os pequenos cubinhos, Aline decidiu pintar todas as faces do seu cubo com tinta vermelha.

(a) *Diga quantos cubinhos ficaram com exatamente uma de suas faces pintada em vermelho.*

(b) *Diga quantos cubinhos ficaram com exatamente duas das suas faces pintadas em vermelho. Tempos depois, Aline pediu ao seu pai um cubo ainda maior para pintar da mesma maneira que ela havia feito com o cubo anterior.*

(c) *Após realizar a pintura, Aline separou os cubinhos. Ela notou que a quantidade de cubinhos que ficaram sem nenhuma face pintada em vermelho é igual ao triplo da quantidade de cubinhos que ficaram com duas faces pintadas em vermelho. Descubra o tamanho do novo cubo que Aline recebeu.*

Consideremos o problema de Aline pintar, inicialmente, todas as faces de um cubo $3 \times 3 \times 3$ sem separar os cubinhos na cor vermelha. Nota-se que a quantidade de cubos que ficou com exatamente uma de suas faces pintada em vermelho é num total de 6, que corresponde ao número de cubinhos de centro em cada face. Nota-se que exatamente 12 cubinhos ficarão com duas de suas faces pintadas de vermelho e que 8 cubinhos, que são os cantos, ficarão com as 3 faces pintadas de vermelho.

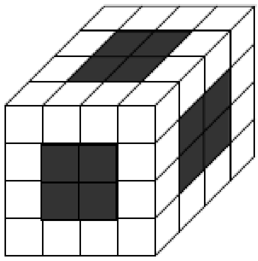

Figura 38: Solução do Problema 9

Para a solução do problema proposto, que é um cubo $4 \times 4 \times 4$ temos que em cada face do cubo, os cubinhos que ficam com uma face pintada em vermelho são aqueles quatro que estão no centro, ou seja, que não tem nenhuma aresta contida em uma aresta do cubo grande, conforme Figura 38. Como o cubo possui seis faces, temos $6 \times 4 = 24$ cubinhos com exatamente uma face pintada em vermelho.

Note também que os cubinhos que ficam com as duas faces pintadas em vermelho são aqueles oito que possuem apenas uma aresta contida em alguma aresta do cubo grande, conforme Figura 39. Note que esses cubinhos são contados duas vezes, uma por cada face do cubo grande na qual elas pertencem. Portanto, temos uma quantidade de $\frac{6 \times 8}{2} = 24$ cubinhos.

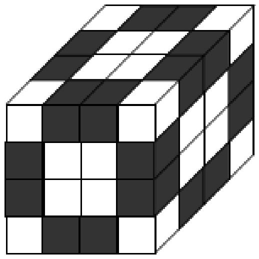

Figura 39: Solução do Problema 9

Note também que, generalizando, em um cubo de lado n, os cubinhos que ficarão sem nenhuma face pintada em vermelho são aqueles que fazem parte do subcubo de lado (n - 2) que resta quando tiramos todos os cubinhos da superfície do cubo original. Como o subcubo de lado (n - 2) é constituído por $(n-2)^3$ tem-se que a quantidade de cubinhos sem nenhuma face pintada é igual a

$$(n-2)^3. \tag{13}$$

Veja que a quantidade de cubinhos com exatamente duas faces pintadas em cada face do cubo de lado n é um total de

$$4 \times (n-2) \tag{14}$$

que novamente são contados duas vezes, uma por cada face do cubo de lado n à qual elas pertencem. Há, assim,

$$\frac{4 \times (n-2) \times 6}{2} \tag{15}$$

cubinhos com exatamente duas faces pintadas em vermelho. Como, segundo o item c do problema proposto diz que a quantidade de cubinhos que ficaram sem nenhuma face pintada em vermelho é igual ao triplo da quantidade de cubinhos que ficaram com duas faces pintadas em vermelho, temos então a equação:

$$(n-2)^3 = 3 \times \frac{4 \times (n-2) \times 6}{2} \tag{16}$$

Como o novo cubo procurado é maior que o anterior, ou seja, maior do que um cubo $4 \times 4 \times 4$ vale que n $>$ 2 e portanto, podemos simplificar a equação obtendo:

$$(n-2)^2 = \frac{3 \times 4 \times 6}{2} = 36 \tag{17}$$

Donde segue que $n - 2 = 6$, concluindo, portanto que n = 8.

Ainda pode-se notar que a contagem dos cubinhos que possuem apenas uma face pintada com a cor vermelha é obtida através da expressão

$$(\text{n - 2})^2 \times 6. \tag{18}$$

Verificamos que um total de treze alunos responderam corretamente o item a), oito alunos responderam corretamente o item b) e que nenhum aluno respondeu corretamente o item c).

Problema 10. *Hipácia criou duas novas operações com números naturais, indicadas por* $\square$ *e* $\triangle$*, com as seguintes propriedades:*

- $a \triangle b = (a + b) + 1$
- $a \square b = b \square a$
- $0 \square 0 = 1$
- $a \square (b \triangle c) = (a \square b) \triangle (a \square c)$

Por exemplo, $0 \triangle 0 = (0 + 0) + 1 = 1$*. Observe na ilustração como Hipácia calculou* $0 \square 1$*.*

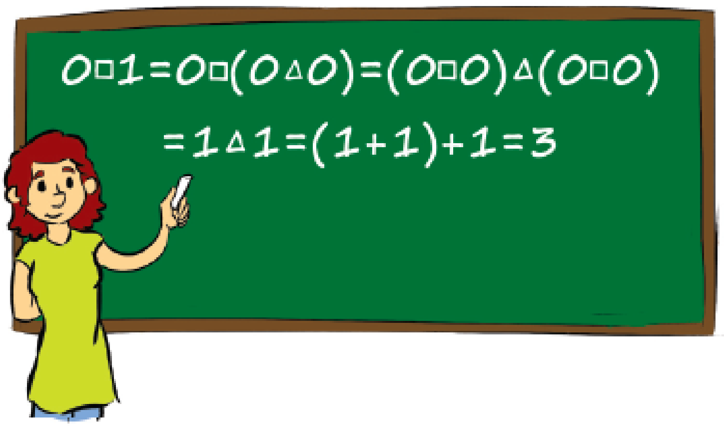

Figura 40: Problema 10: OBMEP 2013, 2ª fase, nível 3, questão 2

(a) Calcule 2 △ 3

(a) Calcule 0 □ 3

(a) Calcule 2 □ 3

Para a solução do item a) basta usar a definição. Temos

$$2 \triangle 3 = (2+3)+1 = 6. \tag{19}$$

Para a solução do item b) devemos observar inicialmente que

$$0 \square 3 = 0 \square (1 \triangle 1) = (0 \square 1) \triangle (0 \square 1) = 3 \triangle 3 = (3+3)+1 = 7. \tag{20}$$

uma vez que $0 \square 1 = 3$ que está resolvido no quadro da imagem.
Para a solução do item c) devemos observar primeiramente que

$$2 \ \square 3 = 3 \square 2. \tag{21}$$

Daí, note que podemos escrever 2 como sendo $0 \triangle 1$. Substituindo na equação anterior, obtemos:

$$2 \ \square 3 = 3 \square 2 = 3 \square (0 \triangle 1) = (3 \square 0) \triangle (3 \square 1). \tag{22}$$

Temos, pelo item b) que $3 \square 0 = 7$ e observe que $3 \square 1 = 3 \square (0 \triangle 0) = (3 \square 0) \triangle (3 \square 0) = 7 \triangle 7 = (7+7)+1 = 15$. Finalmente, substituindo na equação inicial, obtemos que:

$$2 \ \square 3 = 3 \square 2 = 3 \square (0 \triangle 1) = (3 \square 0) \triangle (3 \square 1) = 7 \triangle 15 = (7+15)+1 = 23. \tag{23}$$

Verificamos que um total de quatorze alunos responderam corretamente o item a), seis alunos responderam corretamente o item b) e que apenas um aluno respondeu corretamente o item c).

6 Resultados da Avaliação e Considerações Finais

Dos 20 estudantes que iniciaram o curso apenas 2 desistiram e não realizaram a avaliação de aprendizagem. Logo, Como foram 18 alunos que participaram da avaliação, associamos a cada um deles uma letra maiúscula, ou seja, A, B, C, $\cdots$, P, Q, R. As notas de cada um deles estão na tabela abaixo.

Aluno	Nota	Aluno	Nota	Aluno	Nota
A	6.7	G	8.0	M	9.0
B	7.5	H	7.5	N	4.7
C	3.7	I	7.7	O	6.0
D	3.3	J	9.0	P	6.5
E	5.3	K	8.5	Q	1.0
F	6.3	L	5.7	R	6.0

Tabela 4: Nota de cada aluno na Avaliação

De acordo com a tabela , observamos que a média das notas dos 18 alunos foi de 6,24. Essa média se torna muito interessante, pois acredita-se que o manuseio e utilização do cubo ajudou no desenvolvimento de tais questões, principalmente relacionadas a Álgebra, pois não é tão comum alunos de ensino médio estudarem tais conteúdos, da forma como foi abordado nesse trabalho.

Pelo Gráfico de colunas apresentado na Figura 41 a seguir, notamos que a maioria dos alunos acertaram as questões 01, 02, 03, 04, 05, 06 e 08, enquanto mais da metade deles erraram a questão 07 e as letras b e c das questões dissertativas. Em particular, a letra c das questões 09 e 10 tiveram o maior percentual de erro, onde nenhum aluno dos 18 e apenas 01 aluno dos 18 acertaram, respectivamente.

Com tal sequência concluímos a proposta de aplicar e ensinar alguns conteúdos matemáticos através da aprendizagem de um simples brinquedo popular: O cubo mágico. Porém, tal proposta não visa esgotar ou susbstituir o ensino de tópicos matemáticos pois concordamos que há muito mais para se aprender quanto a matemática e também sobre o Cubo Mágico. Outros tipos de problemas podem ser agregados e propostos, usando ou não o cubo assim como sua associação com outros jogos e problemas.

A matemática é uma disciplina encarada, na maioria das vezes, com desconfiança.

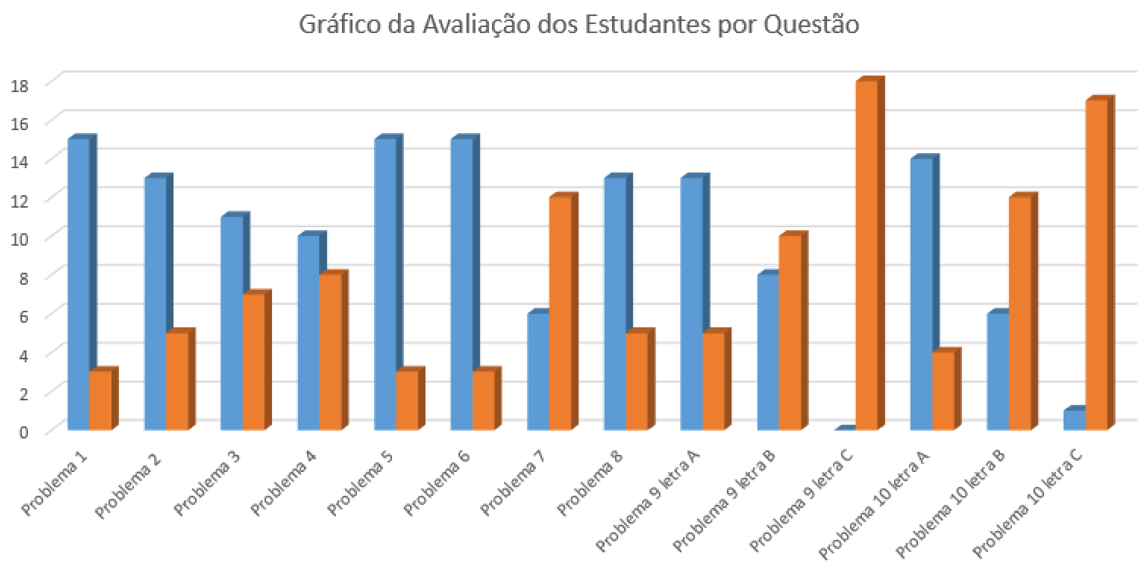

Figura 41: Gráfico de avaliação do desempenho dos estudantes

Ao longo dos anos, criou-se o mito de que a matemática é uma ciência inacessível. Em razão disso, busca-se alternativas para facilitar a compreensão e aprendizado da disciplina. A exigência do raciocínio lógico e de concentração que esta matéria requer faz com que alguns alunos criem certo bloqueio. Quando apresentados em sala de aula, cubos e outras formas lúdicas mostram-se eficientes no aprendizado, uma vez que desmistificam o conteúdo abordado, tornando-se alternativas de ensino por despertar nos alunos o interesse e a curiosidade pelo tema, ajudando no seu desenvolvimento intelectual, estimulando a capacidade de raciocínio rápido, abstração, concentração, entre outros.

A aplicação dos jogos lúdicos desenvolve habilidades e potencialidades. Assim, evidencia-se que a utilização desses meios alternativos de ensino incrementa as atividades didáticas, considerando que o aprendizado é maximizado e proporciona um maior rendimento tanto ao professor, quanto ao aluno.

A utilização do cubo como ferramenta contribui e influencia na formação do estudante, possibilitando um enriquecimento permanente, aumentando sua autoestima, paciência e concentração a curto e a longo prazo. Pode desenvolver um raciocínio lógico aliado a algum conteúdo matemático, como potenciação, radiciação, geometria espacial, etc., o que consequentemente trará mais benefícios para o seu rendimento não só em Matemática, mas também nas demais disciplinas. A sua prática exige a participação franca, criativa, livre, crítica, promovendo a interação social e tendo em vista o forte compromisso de transformação e modificação do meio. Aliar diversão e aprendizado é uma sorte que poucos tem. Quem consegue unir as duas coisas pode, realmente mudar a história de sua vida pra sempre.

Gostaríamos de salientar que com a ajuda conveniente, por ser um brinquedo de simples manuseio, qualquer jovem ou adulto pode aprender também tentando resolvê-lo e, que através da promoção da comunicação verbal, dos estímulos visuais e cognitivos, a interação física e interpessoal através da utilização do brinquedo como ferramenta metodológica e não apenas como passatempo, o professor pode atrair todos os alunos, motivando-os e incentivando-os.

Tirar jovens hoje em dia dos computadores, dos jogos eletrônicos, dos celulares e da internet, por exemplo é, de certa forma, uma tarefa desafiadora que pais e professores debatem já há algum tempo. É claro que, com o desenvolvimento da tecnologia, os jovens sentem um maior impacto. Percebemos que o cubo de Rubik é presença tanto em computadores quanto em aplicativos para tablets ou celulares, porém o fator sensorial, de aprender fazendo, manuseando, acaba prendendo a atenção destes jovens.

Observou-se que o orgulho de cada estudante após conseguir completar o cubo. Isto melhorou a estima destes estudantes segundo relatos durante o curso, pois o brinquedo, via pesquisa e via relatos, era tido como um quebra-cabeça complexo e difícil. Os mesmos relataram que após aprender matemática com o cubo e também os algoritmos de montagem, o que era complicado passou a ser fácil e que com uma melhor prática poderiam completar os passos em um tempo cada vez mais curto.

Conforme pudemos observar, existe um enorme leque de possibilidades de se abordar e utilizar os conceitos de áreas, volumes, probabilidades, etc.; usando, efetivamente a dinâmica e lógica do raciocínio rápido advindos do aprendizado de montagem de cubos mágicos. Queremos explicitar com este trabalho a viabilidade de utilização na sala de aula, mostrando o passo a passo de como montá-lo, para que o professor trabalhe o cubo como quebra cabeça, monitorando o tempo levado para a formação individual das faces ou de cada etapa. Caso possua alunos com extrema dificuldade, avalie-o de forma a considerar o número de quadradinhos iguais montados na face. Essa maneira de estimular o aluno contribuirá para que ele execute a tarefa completamente. O cubo mágico pode ser trabalhado com todas as idades, inclusive com alunos da EJA (Educação de Jovens e Adultos). O cubo mágico estimula a participação, desinibindo os mais tímidos e promovendo uma maior interação social.

Referências

[1] Boyer, C. B. *História da Matemática* 2ª edição, São Paulo, (2003).

[2] Buescu, j., *O número de Deus*, Revista INGENIUM, Lisboa - Portugal (2012), pp. 92-93.

[3] Fraleigh, J. B., *A First Course In Abstract Algebra*, 7ª ed. Pearson Education, Inc, (2003).

[4] Garcia, A. e Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*, Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (2003).

[5] Gonçalves, A., *Introdução à Álgebra*, 5ª edição, Rio de Janeiro: IMPA, (2010).

[6] Grando, r. *O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática* Dissertação de mestrado, Faculdade de Educação da UNICAMP, Campinas. (1995).

[7] Guia dos Curiosos *http://guiadoscuriosos.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/* acesso em 09-07-2015.

[8] Hefez, A., *Elementos de Aritmética*, 2ª edição, Rio de Janeiro: IMPA, (2011).

[9] Neto, A. C. M, *Fundamentos de Matemática Elementar 2: Geometria Euclidiana Plana*, 3ª edição, Rio de Janeiro: IMPA, (2010).

[10] OBMEP, *Banco de Provas da OBMEP*, Rio de Janeiro (1995). http://www.obmep.org.br/provas.htm acesso em 20-04-2015.

[11] Santos, J. P. O., *Introdução à Teoria dos Números*, 3ª edição, Rio de Janeiro: IMPA, (2010).

[12] Schultzer, W., *Aprendendo Álgebra com o Cubo Mágico* Uberlândia (2005), http://www.dm.ufscar.br/profs/waldeck/rubik/ acesso em 20-04-2015.

[13] Singmaster, D., *Notes on Rubik's Magic Cube*, Enslow, Hillside, NJ (1981).

[14] Vieira, V. L., *Álgebra Abstrata para Licenciatura*, 1ª edição, Campina Grande: UEPB, (2014).

Anexo

Entrevista 1

PERGUNTAS

1. Conhece o Cubo Mágico de Rubik?

2. Conseguiu montar pelo menos uma face alguma vez?

3. Conseguiu montá-lo por completo alguma vez?

4. O que você acha do Cubo Mágico?

5. Se conseguiu montar, qual foi o tempo?

6. Acredita que é inteligência ou truque para montar?

7. Você gostaria de aprender a montar?

8. Acha que dá pra aprender matemática através de uma experiência com o cubo mágico?

Figura 42: Questionário acerca dos conhecimentos e reflexões iniciais dos alunos sobre o cubo mágico