UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

José Carlos Aveiro

Formalização do conjunto dos números racionais e alguns jogos com frações

São José do Rio Preto
2015

José Carlos Aveiro

Formalização do conjunto dos números racionais e alguns jogos com frações.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto

2015

Aveiro, José Carlos.
Formalização do conjunto dos números racionais e alguns jogos com frações / José Carlos Aveiro. -- São José do Rio Preto, 2015
54 f. : il., tab.

Orientador: Flávia Souza Machado da Silva
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria dos números. 3. Números racionais. 4. Frações. 5. Jogos em educação matemática. 6. Matemática - Metodologia. I. Silva, Flávia Souza Machado da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 511

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

José Carlos Aveiro

Formalização do conjunto dos números racionais e alguns jogos com frações.

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Prof.ª Dr.ª Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP – São José do Rio Preto

Prof.ª Dr.ª Ana Paula Tremura Galves
UFU – Uberlândia

São José do Rio Preto

2015

Dedico esse trabalho a Deus, como reconhecimento da sua presença ao meu lado e em quem busco alicerçar todos os meus empreendimentos; à Rosimeire, Carolina e Arthur (esposa e filhos) que são pessoas que me motivam ir além das minhas próprias forças, meus inspiradores e meus conselheiros.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva, por ter aceitado orientar este trabalho.

Agradeço à Regina Célia Alves Casella, Diretora da EE Dom Henrique Mourão de Lins / SP, que acreditou em mim, me deu apoio e incentivos para que eu pudesse chegar aqui.

Agradeço também a todas as pessoas, e são muitas, que de maneira direta ou indireta contribuíram para a concretização desse sonho.

Por fim, agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro concedido.

"O desenvolvimento pessoal funda-se em um processo de auto descoberta, onde cada qual tende a tomar consciência do que sabe fazer e do que tem dificuldade, como pode potencializar aquilo que faz bem e conviver, ou diminuir com afeitos daquilo que tem menos habilidades. O processo de comparação pode ser doloroso, porém é eficaz e, às vezes inevitável. Porém, atividade lúdica pode compor este processo de comparação de forma agradável, divertida e em um clima de camaradagem. Quando a criança joga, ela percebe suas possibilidades e a dos companheiros".

Vânia Dohme

RESUMO

Este trabalho apresenta a construção formal do conjunto dos números racionais, a partir do conjunto dos números inteiros; desse modo, explicando o porquê de certos procedimentos e algoritmos usados no aprendizado dos números racionais. Apresenta também, alguns jogos que podem ser utilizados para abordar frações no que diz respeito a formas de representação, equivalência, operações (adição, subtração, multiplicação, divisão) e comparação. Sendo assim, busca-se apresentar uma proposta de ensino das frações com o objetivo de fazer com que os alunos possam se engajar no aprendizado desse tópico.

Palavras - chave: Relação de equivalência, Números racionais, Fração, Jogos.

ABSTRACT

This work presents the formal construction of the rational numbers obtained from the set of the integers numbers, thus explaining why some procedures and algorithms are used in the learning of rational numbers. Also, some games that can be used in the classroom to teach representation forms, equivalence, operations (addition, subtraction, multiplication, division) and comparison of fractions. Thus, seeks to present a teaching proposal of the fractions in order to make with the students to can engage in learning this topic.

Keywords: Equivalence relation, Rational numbers, Fraction, Games.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Desde as civilizações mais antigas, o homem já tinha a ideia (mesmo que implícita) de associar números a coleções de objetos e seres. O conjunto dos números inteiros representou um avanço gigantesco para a compreensão e interpretação de fatos do cotidiano, possibilitando realizar operações e dar significado a elas ampliando o universo dos números naturais. Mesmo assim, esse novo conjunto deixava lacunas, pois a divisão de dois números inteiros, na maioria das vezes, não admite como resposta um número inteiro. Desse modo, houve a necessidade de se ampliar o conjunto dos inteiros, mas de modo que as operações e as propriedades válidas nele continuassem a ser satisfeitas. Esse conjunto ampliado é denominado conjunto dos números racionais. Uma das maneiras de se representar um número racional é por meio de uma fração.

As frações permeiam todo o currículo da educação básica e são utilizadas na resolução e compreensão de diversos problemas de matemática e do cotidiano das pessoas. Por exemplo, as frações são usadas nas eleições para determinar o candidato eleito – vence aquele que obtiver metade (½) do total de votos mais um no primeiro turno, ou a maioria simples no segundo. Além disso, as frações são usadas em mapas e plantas para determinar as escalas, e razões e proporções são empregadas na música, na medicina, na física, na culinária, nas relações comerciais, dentre outras.

No entanto, avaliações como o SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), a Prova Brasil e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) mostram que alunos dos mais variados níveis de ensino não compreendem o significado de um número fracionário, não conseguem relacioná-lo com outras formas de escrevê-lo – como números decimais e porcentagem – nem tão pouco são capazes de estabelecer uma relação de ordem entre dois desses números.

Em encontros de capacitação, reiteradas vezes são apontadas como solução para esse problema a mudança das metodologias de ensino. Além disso, também são discutidas nesses encontros maneiras de aumentar o envolvimento do aluno na resolução de problemas que façam sentido para ele, com o intuito de estimulá-lo a levantar hipóteses, traçar estratégias e tirar conclusões.

Diante desse contexto fui motivado a buscar o uso de jogos como estratégia auxiliar para abordar determinados conceitos sobre frações.

O conteúdo deste trabalho está dividido em cinco seções e dois apêndices.

Na seção 1 busca-se fundamentar os motivos que levaram à idealização desse trabalho.

Na Seção 2 é abordada a construção formal do conjunto dos números racionais a partir do conjunto dos números inteiros.

Na Seção 3 é tratado o uso de jogos. São apresentadas quatro definições de jogos, segundo um dicionário, uma enciclopédia e outros dois autores. E também, as visões de alguns estudiosos sobre a utilização de jogos como instrumento didático--pedagógico.

Na Seção 4 são apresentados quatro jogos com o propósito de abordar vários conceitos relativos às frações: formas de representação, equivalência, operações (adição, subtração, multiplicação, divisão) e comparação. Em cada jogo foram descritos os materiais necessários, as regras, os objetivos específicos, e o tempo previsto para a aplicação. E ao final, um relato da experiência dos jogos aplicados com alunos do 9º ano do ensino fundamental. A escolha pelo 9º ano se deu pelo fato deles estarem concluindo um ciclo de estudos, com no mínimo nove anos de escolarização e, portanto, terem sido expostos mais de uma vez ao estudo das frações.

Para finalizar, são feitas as considerações finais a respeito do trabalho. No apêndice A, é apresentada as tabulações de três questões a respeito de frações, recorte de uma avaliação que foi aplicada nas escolas públicas do Estado de São Paulo em 2014, a qual foi elaborada pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. E no apêndice B, são tratados alguns conceitos e resultados sobre relações entre dois conjuntos, os quais foram utilizados na seção 2.

Vale ressaltar que as principais referências utilizadas para o desenvolvimento desse trabalho foram DOMINGUES (1991), BORIN (1995), SMOLE (2009), GRANDO (2008).

2. OS NÚMEROS RACIONAIS

Aos processos de contagem e ordenação podem ser associados os números naturais, e os processos de medida podem ser adequadamente representados pelas frações.

Uma medida nada mais é do que a comparação de uma grandeza com determinado padrão. Porém, na maioria das vezes, a medida do objeto não corresponde a um múltiplo inteiro do padrão escolhido, e a solução é fracionar a unidade em partes iguais, de tal modo que a nova unidade caiba um número inteiro de vezes no objeto. Uma fração representa a "relação entre parte (numerador) e todo (denominador)". Entretanto, é importante destacar a equivalência entre essa ideia e a de que uma fração representa também o resultado da divisão do numerador pelo denominador.

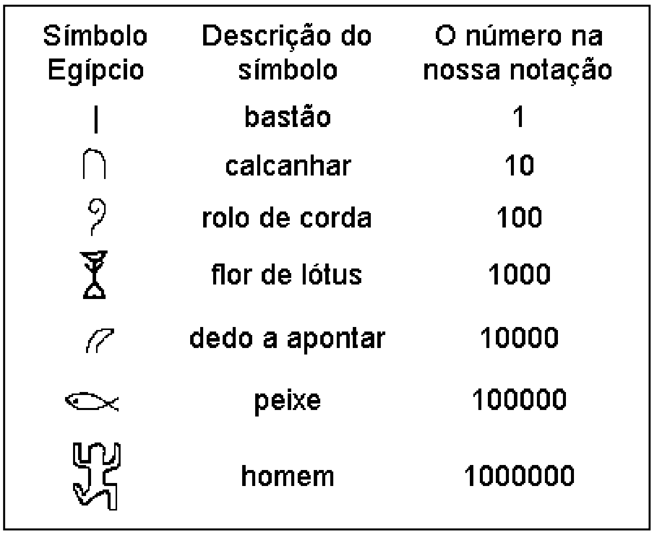
Inicialmente, apresentaremos as frações utilizadas pelos povos egípcios e a notação adotada por eles. Depois, abordaremos de maneira formal a construção do conjunto dos números racionais a partir do conjunto dos números inteiros. Além disso, as operações de adição e de multiplicação, e uma relação de ordem. Em várias demonstrações usaremos algumas das propriedades que são satisfeitas pelas operações de adição e multiplicação no conjunto dos inteiros, as quais podem ser encontradas demonstradas e com mais detalhes em HYGINO, 1991[1].

2.1. Notações da civilização egípcia

As antigas civilizações tinham dificuldade para contar porque os números ainda não existiam como os conhecemos hoje. Os egípcios, por exemplo, usavam os símbolos apresentados na figura 1 para representar seus números. Todos os outros números eram escritos combinando esses símbolos.

[1] DOMINGUES, H. H. *Fundamentos da Aritmética*. São Paulo, SP: Atual, 1991.

Figura 1 – Símbolos Egípcios para representar números



Símbolo Egípcio	Descrição do símbolo	O número na nossa notação
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo a apontar	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Fonte: Sistema de numeração egípcio[2]

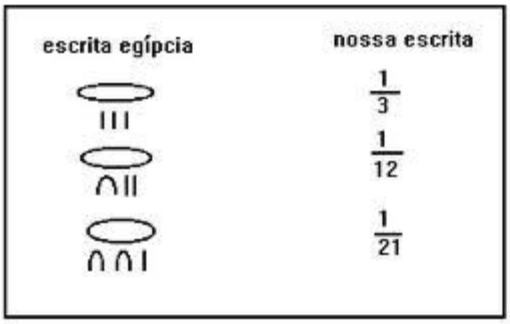
Na antiguidade, as frações não eram conhecidas. Por volta do ano 3000 a.C., no Egito, o faraó Sesóstris distribuiu terras às margens do rio Nilo para agricultores privilegiados. A vantagem destas terras era que todo ano, no mês de julho, as águas do rio inundavam essa região das margens e fertilizava os campos. Por isso, elas eram muito valorizadas. Para medir a extensão dessas terras, os egípcios usavam uma medida chamada Cúbito ou Côvado, definido pelo comprimento do braço medido do cotovelo à extremidade do dedo médio distendido. Hoje, sabe-se que essa medida equivale a pouco mais de 50cm (SEREVAL, 2012, p.4).

Posteriormente, os egípcios passaram a utilizar cordas com nós em intervalos correspondentes àquele cúbito. Porém, era necessário remarcar os terrenos de cada agricultor em setembro, quando as águas baixavam. Os responsáveis por essa marcação eram os agrimensores, que também eram chamados de estiradores de corda, uma vez que mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada. Essas cordas eram esticadas e, a partir disso, se verificava quantas vezes a tal unidade de medida cabia no terreno. Entretanto, essa medida nem sempre cabia inteira nos lados do terreno, o que criava um problema na medição (BOYER, 1974, p. 9-10). Foi a necessidade de resolver esse problema que levou os egípcios a criarem as frações. Eles escreviam essas frações com um sinal oval em cima dos símbolos que representavam os números naquela época. No entanto,

[2] Disponível em: http://www.mundoeducacao.com/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm (acesso em: julho de 2015)

os cálculos eram por demais complicados, pois no sistema de numeração egípcio daquela época, os símbolos se repetiam muitas vezes.

Figura 2 – Frações Egípcias



Fonte: Os egípcios e as frações[3]

Os egípcios utilizavam apenas as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ ou frações unitárias, isto é, frações cujo numerador é um. Quando tinham necessidade de usar outras frações, exprimiam-nas como soma de frações unitárias, por exemplo, $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ e $\frac{3}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{7} + \frac{1}{4}$. Eles também desenvolveram alguns métodos para encontrar essas somas de frações unitárias. Veja abaixo dois deles.

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} \quad \text{e} \quad \frac{z}{p.q} = \frac{1}{p.r} + \frac{1}{q.r}\text{, onde } r = \frac{p+q}{z}$$

Com a criação, pelos hindus, do Sistema de Numeração Decimal, as frações passaram a ser representadas como a razão entre dois números naturais, o que facilitou imensamente os cálculos.

2.2. Construção formal do conjunto $\mathbb{Q}$

Considere o conjunto $\mathbb{Z}^* = \{\mathrm{m} \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{m} \neq 0\}$ e a relação $\sim$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* =$ $= \{(\mathrm{m}, \mathrm{n}) \mid \mathrm{m} \in \mathbb{Z}, \mathrm{n} \in \mathbb{Z}^*\}$ definida por:

Para quaisquer $(m, n), (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,

$$(m, n) \sim (p, q) \text{ se, e somente se, } mq = np.$$

Proposição 2.1. A relação definida acima é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

[3] Disponível em: http://profinesreynaud.blogspot.com.br/2010/08/os-egipcios-e-as-fracoes.html (Acesso em: julho de 2015)

Demonstração: Verifiquemos que a relação $\sim$ satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

i) *Reflexiva*: Para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos $m \cdot n = n \cdot m$, pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$. Logo $(m, n) \sim (m, n)$.

ii) *Simétrica*: Sejam (m, n), $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Suponha que $(m, n) \sim (p, q)$. Então $mq = np$, o que implica, pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$, $qm = pn$. Logo, $pn = qm$, ou seja, $(p, q) \sim (m, n)$.

iii) *Transitiva*: Sejam (m, n), (p, q), $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tais que $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s)$. Então $mq = np$ e $ps = qr$. Assim, $mqs = nps$ e $nps = nqr$. Daí, $mqs = nqr$, o que implica $qms = qnr$. Como $q \in \mathbb{Z}^*$, segue, pela lei do cancelamento da multiplicação, que $ms = nr$. Portanto, $(m, n) \sim (r, s)$. ■

Como consequência da proposição anterior, temos que a relação $\sim$ determina sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ uma partição neste conjunto em classes de equivalência. Para cada $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, a classe de equivalência determinada por este elemento será denotada por $\frac{m}{n}$. Assim,

$$\frac{m}{n} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (m, n)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid nx = my\}.$$

Exemplo 2.1.

a) $\frac{1}{4} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 4x = y\} = \{(1, 4);\ (-1, -4);\ (-2, -8);\ (2, 8);\ \dots\}$.

b) $\frac{3}{7} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 7x = 3y\} = \{(3, 7);\ (6, 14);\ (-9, -21);\ (-3, -7);\ \dots\}$.

c) $\frac{16}{20} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 20x = 16y\} = \{(16, 20);\ (8, 10);\ (4, 5);\ (-4, -5);\ \dots\}$.

Observe que $(m, n) \in \frac{m}{n}$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (consequência do fato, demonstrado na proposição anterior, que a relação $\sim$ é reflexiva). A partir de um resultado sobre relações de equivalência, temos: $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ se, e somente se, $(m, n) \sim (r, s)$. Portanto,

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \text{ se, e somente se, } ms = nr.$$

Exemplo 2.2.

a) $\frac{1}{4} = \frac{-1}{-4} = \frac{2}{8} = \frac{-2}{-8} = \frac{3}{12} = \cdots$

b) $\frac{5}{8} = \frac{-5}{-8} = \frac{10}{16} = \frac{-10}{-16} = \frac{15}{24} = \cdots$

Notação: As classes de equivalência $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \cdots$ e $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \cdots$ serão denotadas, respectivamente, apenas por 0 e 1.

Indicaremos por $\mathbb{Q}$ o conjunto de todas as classes de equivalência determinada pela relação $\sim$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, ou seja, $\mathbb{Q}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação $\sim$ e, portanto,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Cada elemento de $\mathbb{Q}$ admite infinitas *representações* $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z};\ n \in \mathbb{Z}^*)$. Em cada uma dessas representações m e n são denominados, respectivamente, de *numerador* e *denominador*.

Proposição 2.2. Dois elementos quaisquer de $\mathbb{Q}$ sempre admitem representações cujos denominadores são iguais.

Demonstração: Sejam $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$. Das propriedades comutativas e associativas da multiplicação em $\mathbb{Z}$, segue que $m(ns) = n(ms)$ e $r(ns) = s(nr)$. Logo $\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns}$ e $\frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$. Portanto, $a = \frac{ms}{ns}$ e $b = \frac{nr}{ns}$.

Exemplo 2.3. Os elementos $\frac{2}{15}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$ admitem representações cujo denominador é 30, pois $\frac{2}{15} = \frac{4}{30}$, $\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$ e $\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$.

Na próxima seção será definido as operações de adição e multiplicação, e uma relação de ordem sobre $\mathbb{Q}$ e a partir de então os elementos de $\mathbb{Q}$ serão chamados números racionais.

2.3. Adição em $\mathbb{Q}$

Proposição 2.3. Sejam $\frac{m}{n}$ e $\frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. A correspondência $\left(\frac{m}{n}, \frac{r}{s}\right) \mapsto \frac{ms + nr}{ns}$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Suponha $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$. Então $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$. Assim $(mn')ss' = (nm')ss'$ e $(rs')nn' = (sr')nn'$. Usando as propriedades (comutativa e associativa) da multiplicação em $\mathbb{Z}$ nessas igualdades, segue que $msn's' = nsm's'$ e $rns'n' = nsr'n'$. Somando membro a membro as relações obtidas acima, obtemos:

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n',$$

o que, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{Z}$, implica

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n').$$

Portanto

$$\frac{ms + rn}{ns} = \frac{m's' + r'n'}{n's'}. \qquad \blacksquare$$

Definição 2.1. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. A operação definida na proposição anterior é chamada *adição em* $\mathbb{Q}$ e chama-se *soma* de a com b, e indica-se por $a + b$, o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms + nr}{ns}.$$

Exemplo 2.4.

a) $\frac{8}{5} + \frac{9}{2} = \frac{5\cdot 9}{5\cdot 2} + \frac{8\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{45 + 16}{10} = \frac{61}{10}$.

b) $\frac{5}{4} + \frac{25}{7} = \frac{5\cdot 7}{4\cdot 7} + \frac{4\cdot 25}{4\cdot 7} = \frac{35 + 100}{28} = \frac{135}{28}$.

Proposição 2.4. A adição em $\mathbb{Q}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(I) *Associativa*: $(a + b) + c = a + (b + c),\ \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(II) *Comutativa*: $a + b = b + a,\ \forall\, a, b \in \mathbb{Q}$.

(III) *Existência de elemento neutro*: existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $a + 0 = a$ e $0 + a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{Q}$.

(IV) *Existência de elemento oposto*: para cada $a \in \mathbb{Q}$, existe $b \in \mathbb{Q}$, tal que $a + b = 0$ e $b + a = 0$. O elemento b será denotado por $-a$.

Demonstração: Sejam $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}, c = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

(I) Temos $(a+b)+c = \left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) + \frac{r}{s} = \left(\frac{mq+np}{nq}\right) + \frac{r}{s} = \frac{(mq+np)s+(nq)r}{(nq)s}$ e $a+(b+c) = \frac{m}{n} + \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) = \frac{m}{n} + \left(\frac{ps+qr}{qs}\right) = \frac{m(qs)+n(ps+qr)}{n(qs)}$. Da associatividade da adição em $\mathbb{Z}$ e da propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação em $\mathbb{Z}$, segue $(nq)s = n(qs)$ e $(mq+np)s + (nq)r = (mq)s + (np)s + (nq)r = m(qs) + n\,(ps) + n\,(qr) =$ $= m(qs) + n(ps+qr)$. Assim, $\frac{(mq+np)s+(nq)r}{(nq)s} = \frac{m(qs)+n(ps+qr)}{n(qs)}$ e, portanto $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(II) Da definição da adição em $\mathbb{Q}$, segue que $a+b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$ e $b+a = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn+qm}{nq}$. Pela comutatividade da adição em $\mathbb{Z}$, temos $mq+np = pn+qm$. Logo $a+b = b+a$.

(III) Temos $0 + a = \frac{0}{1} + \frac{m}{n} = \frac{0n+1m}{1n}$. De propriedades satisfeitas pela adição e pela multiplicação em $\mathbb{Z}$, segue que $1m = m$, $1n = n$ e $0n = 0$. Logo $1m + 0n = m + 0 =$ $= m$. Portanto, $0 + a = a$. De (II), segue que $a + 0 = 0 + a = a$.

(IV) Como $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, segue que $b = \frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$. Então

$$a+b = \frac{m}{n} + (\frac{-m}{n}) = \frac{m \cdot n + n \cdot (-m)}{n \cdot n} = \frac{mn - mn}{nn} = \frac{0}{n \cdot n} = 0.$$

De (II), segue que $b + a = a + b = 0$. ■

Notação: $\mathbb{Q}^* = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \neq 0\}$.

Como consequência da proposição 2.3 e do item (IV) da proposição 2.4, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.1. Sejam $a,\ b \in \mathbb{Q}$. Então a correspondência $(a,b) \rightarrow a + (-b)$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 2.2. Sejam $a,\ b\ \in \mathbb{Q}$. A operação definida no corolário anterior é chamada subtração em $\mathbb{Q}$ e denomina-se *diferença* entre a e b, e indica-se por $a - b$, o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:

$$a - b = a + (-b).$$

Exemplo 2.5. Para $a = \frac{5}{8}$ e $b = \frac{3}{7}$, temos:

$$a - b = a + \left(-b\right) = \frac{5}{8} + \frac{-3}{7} = \frac{5\cdot 7 + 8\cdot(-3)}{8\cdot 7} = \frac{35-24}{56} = \frac{11}{56}.$$

Proposição 2.5. (*Lei do cancelamento da adição*) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Q}$, se $a + b =$ $= a + c$, então $b = c$.

Demonstração: Temos

$$a + b = a + c \Rightarrow (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\left(-a\right) + a\right] + b = \left[\left(-a\right) + a\right] + c \Rightarrow 0 + b = 0 + c \Rightarrow b = c. \qquad \blacksquare$$

Observação 2.1. Estendemos o conceito de soma de n números racionais do seguinte modo: se $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ $(n > 2)$, por recorrência define-se

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n.$$

2.4. Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Proposição 2.6. Sejam $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ e $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ elementos de $\mathbb{Q}$. A correspondência $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}, \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}\right) \mapsto \frac{\mathrm{mr}}{\mathrm{ns}}$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$.

Demonstração: Suponha $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$. Então $mn' = nm'$ e $rs' = sr'$ e, consequentemente, temos $(mn')(rs') = (nm')(rs')$ e $(rs')(nm') = (sr')(nm')$. Aplicando as propriedades (comutativa e associativa) da multiplicação em $\mathbb{Z}$ nessas igualdades, obtemos $(mr)(n's') = (rs')(nm')$ e $(rs')(nm') = (ns)(m'r')$. Logo,

$$(mr)(n's') = (ns)(m'r').$$

Portanto,

$$\frac{mr}{ns} = \frac{m'r'}{n's'}. \qquad \blacksquare$$

Definição 2.3. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. A operação definida na proposição anterior é chamada *multiplicação em* $\mathbb{Q}$ e chama-se *produto* de a com b e indica-se por ab o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$ab = a \cdot b = \frac{mr}{ns}.$$

Exemplo 2.6.

a) $\frac{1}{8} \cdot \frac{11}{4} = \frac{1 \cdot 11}{8 \cdot 4} = \frac{11}{32}$.

b) $\frac{9}{2} \cdot \frac{13}{6} = \frac{9 \cdot 13}{2 \cdot 6} = \frac{117}{12} = \frac{39}{4}$.

Proposição 2.7. A multiplicação em $\mathbb{Q}$ satisfaz as seguintes propriedades:

(I) *Associativa*: $a(bc) = (ab)c, \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(II) *Comutativa*: $ab = ba, \forall\, a, b \in \mathbb{Q}$.

(III) *Existência de elemento neutro*: existe $1 \in \mathbb{Q}$ tal que $a \cdot 1 = a$ e $1 \cdot a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{Q}$.

(IV) *Existência de elemento inverso*: para cada $a \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$, existe $b \in \mathbb{Q}$, tal que $ab = 1$ e $ba = 1$. O elemento b será denotado por a^{-1}.

(V) *Distributiva*: $a(b + c) = ab + ac, \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: Sejam $a = \frac{m}{n}, \ b = \frac{r}{s}$ e $c = \frac{t}{u}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

(I) Por definição, $bc = \frac{rt}{su}$ e $ab = \frac{mr}{ns}$. Logo, $a(bc) = \frac{m(rt)}{n(su)}$ e $(ab)c = \frac{(mr)t}{(ns)u}$.
Como a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é associativa, segue que $m(rt) = (mr)t$ e $n(su) = (ns)u$. Portanto, $\frac{m(rt)}{n(su)} = \frac{(mr)t}{(ns)u}$, ou seja, $a(bc) = (ab)c$.

(II) Da definição segue que $ab = \frac{mr}{ns}$ e $ba = \frac{rm}{sn}$. Como a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa, $mr = rm$ e $ns = sn$. Logo, $\frac{mr}{ns} = \frac{rm}{sn}$, ou seja, $ab = ba$.

(III) Temos $1 \cdot a = \frac{1}{1} \cdot \frac{m}{n} = \frac{1m}{1n} = \frac{m}{n} = a$. De (II), $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

(IV) Seja $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ com $a \neq 0$. Então $m \neq 0$ e daí, $b = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. Temos $ab = \frac{mn}{nm} = = \frac{mn}{mn} = 1$. De (II), segue que $ba = ab = 1$.

(V) Temos

$$a(b+c) = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{r}{s} + \frac{t}{u}\right) = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{ru + st}{su}\right) = \frac{m(ru+st)}{n(su)} = \frac{m(ru) + m(st)}{n(su)} =$$

$$= \frac{(mr)u + s(mt)}{(ns)u} = \left(\frac{(mr)u + s(mt)}{(ns)u}\right) \cdot \frac{n}{n} = \frac{[(mr)u + s(mt)]n}{[(ns)u]n} =$$

$$= \frac{(mr)(nu) + (ns)(mt)}{(ns)(nu)} = \frac{mr}{ns} + \frac{mt}{nu} =$$

$$= ab + ac. \qquad \blacksquare$$

Proposição 2.8. Se $a, b \in \mathbb{Q}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então:
(I) $(a^{-1})^{-1} = a$.
(II) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Demonstração: Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ elementos de $\mathbb{Q}$.

(I) Temos $(a^{-1})^{-1} = \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{m}\right)^{-1} = \frac{m}{n} = a$.

(II) Como $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{n}{m} \cdot \frac{q}{p}\right) = \left(\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m}\right) \cdot \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p}\right) = \frac{mn}{nm} \cdot \frac{pq}{qp} = 1$, então $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. $\blacksquare$

Proposição 2.9. Se $a, b, c \in \mathbb{Q}$, então:

(I) $a(b - c) = ab - ac$ e $(b - c)a = ba - ca$.

(II) $a \cdot 0 = 0$.

(III) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

(IV) $(-a)(-b) = ab$.

(V) *Lei do anulamento do produto*: $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$.

(VI) *Lei do cancelamento da multiplicação*: $ab = ac$ *e* $a \neq 0 \Rightarrow b = c$.

Demonstração:

(I) Como $a(b - c) + ac = a[(b - c) + c] = a[b + (-c + c)] = ab$, então

$$a(b - c) = ab - ac.$$

De modo análogo obtemos, $(b - c)a = ba - ca$.

(II) $a \cdot 0 = a \cdot (0 - 0) = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$.

(III) $a(-b) = a[0 + (-b)] = a(0 - b) = a \cdot 0 - (ab) = 0 - (ab) = -(ab)$ e

$(-a)b = [0 + (-a)]b = (0 - a)b = 0 \cdot b - (ab) = 0 - (ab) = -(ab)$.

(IV) De (III) segue que, $(-a)(-b) = -[a(-b)]$. Mas, também por (III), $a(-b) =$ $= -(ab)$. Assim, $(-a)(-b) = -[-(ab)] = ab$.

(V) Suponha $a \neq 0$, então de $ab = 0$ decorre $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$. Como $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1 \cdot b = b$, então $b = 0$.

De modo análogo, supondo $b \neq 0$ obtemos $a = 0$.

(VI) $ab = ac \Rightarrow ab + [-(ac)] = ac + [-(ac)] \Rightarrow ab - ac = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(b - c) = 0 \xRightarrow{(a \neq 0)} b - c = 0 \Rightarrow b = c$. ■

Observação 2.1. A lei do anulamento do produto e lei do cancelamento da multiplicação são logicamente equivalentes entre si. A demonstração feita mostra que a última lei citada é consequência da primeira. Quanto à recíproca, supondo $a \neq 0$ e $ab = 0$, como $0 = a \cdot 0$, então $ab = a \cdot 0$ e, pela hipótese , $b = 0$.

Definição 2.4. A *divisão* em $\mathbb{Q}$ é entendida como a operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por $(ab) \rightarrow ab^{-1}$. O elemento ab^{-1} é chamado *quociente* de a por b e pode ser indicado por $a : b$.

Exemplo 2.7. Para $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$, temos:

$$a : b = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{1} = \frac{10}{3}.$$

Definição 2.5. Estendemos o conceito de produto para n números racionais do seguinte modo: se $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ ($n > 2$), por recorrência define-se

$$a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1\, a_2 \cdots a_{n-1})\, a_n.$$

2.5. Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Seja $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. De uma das propriedades da multiplicação em $\mathbb{Z}$, segue que $m(-n) = n(-m)$. Assim, $a = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n}$. Portanto, sempre podemos considerar, para todo $a \in \mathbb{Q}$, uma representação em que o denominador seja maior que zero (em $\mathbb{Z}$).

Exemplo 2.8. $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$ e $\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$.

Proposição 2.10. Sejam $a = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{m}'}{\mathrm{n}'}$ e $b = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{r}'}{\mathrm{s}'}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com $n, n', s, s' > 0$ (em $\mathbb{Z}$). Então:

$$\mathrm{ms} < nr \text{ se, e somente, se } \mathrm{ms}' < n'r'.$$

Demonstração: Da hipótese segue, $mn' = nm'$, $rs' = sr'$ e $n's' > 0$. Temos

$$ms < nr \Rightarrow (ms)(n's') < (nr)(n's') \Rightarrow (mn')(ss') < (rs')(nn') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (nm')(ss') < (sr')(nn') \Rightarrow (m's')(ns) < (n'r')(ns) \overset{ns>0}{\Longrightarrow} \mathrm{m's'} < n'r'.$$

De modo análogo, se demonstra que $\mathrm{m's'} < n'r'$ implica $\mathrm{ms} < nr$. ∎

Definição 2.6. Sejam $a = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ e $b = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ elementos de $\mathbb{Q}$ tais que os denominadores são estritamente positivos. Diz-se que a é *menor que ou igual a* b, e escreve-se $a \leq b$, se $\mathrm{ms} \leq \mathrm{nr}$. Neste caso, também se pode escrever $b \geq a$ e dizer que b é maior que ou igual a a. Se $\mathrm{ms} < nr$, diz-se que a é *menor que* b e denota-se $a < b$. Equivalentemente, pode-se dizer que b é maior que a e denotar $b > a$.

Observação 2.2. Pela proposição 2.10, a definição anterior não depende da representação escolhida (considerando que o denominador seja estritamente positivo) para expressar a e b.

Exemplo 2.9.

a) $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$, pois $3 \cdot 8 = 24 < 25 = 5 \cdot 5$.

b) $\frac{4}{7} > \frac{1}{8}$, pois 32 > 7.

Observação 2.2. Seja $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que o denominador é estritamente positivo. Recorde que $0 = \frac{0}{1}$. Temos: $a \geq 0$ se, e somente, $m \cdot 1 \geq n \cdot 0$ (em $\mathbb{Z}$). Sabemos que $m \cdot 1 = m$ e $n \cdot 0 = 0$. Logo,

$$a \geq 0 \text{ se, e somente, se } m \geq 0.$$

De modo análogo, obtemos:

- $a > 0$ se, e somente se, $m > 0$;
- $a \leq 0$ se, e somente se, $m \leq 0$ e
- $a < 0$ se, e somente se, $m < 0$.

Definição 2.7. Seja $a = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \in \mathbb{Q}$ tal que o denominador é estritamente positivo. Diz-se que a é *positivo* quando $a \geq 0$. Se $a > 0$, diz–se que a é *estritamente positivo*. Quando $a \leq 0$ diz-se que a é *negativo* e a é chamado *estritamente negativo* se $a < 0$.

Proposição 2.11. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$. Se $a > b$, então existe $h \in \mathbb{Q}$ tal que $h > 0$ e $a = b + h$.

Demonstração:

Podemos supor $a = \frac{r}{s}$ e $b = \frac{t}{s}$ com $s > 0$. Por hipótese, $a > b$, ou seja, $rs > st$. Usando o fato que $s > 0$ e uma das propriedades da relação de ordem $\mathbb{Z}$ nessa desigualdade, obtemos $r > t$. Portanto, existe $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, de modo que $r = t + n$. Assim, $h = \frac{n}{s} \in \mathbb{Q}$ e é tal que $h > 0$ e

$$a = \frac{r}{s} = \frac{t+n}{s} = \frac{t}{s} + \frac{n}{s} = b + h. \qquad \blacksquare$$

A proposição a seguir nos garante que a relação $\leq$, dada na definição 2.6, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$.

Proposição 2.12. Sejam $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}, \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ e $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com denominadores estritamente positivos. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

(I) *Reflexiva*: $\frac{m}{n} \leq \frac{m}{n}$.

(II) *Antissimétrica*: se $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{m}{n}$, então $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.

(III) *Transitiva*: se $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$, então $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$.

(IV) $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ ou $\frac{r}{s} \leq \frac{m}{n}$.

Demonstração:

(I) Em $\mathbb{Z}$ temos $mn \leq nm$. Logo, $\frac{m}{n} \leq \frac{m}{n}$.

(II) Por hipótese, $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{m}{n}$. Então, $ms \leq nr$ e $rn \leq sm$ (em $\mathbb{Z}$). Logo, $ms = nr$ e, portanto, $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.

(III) Como $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e $\frac{r}{s} \leq \frac{p}{q}$, segue que $ms \leq nr$ (em $\mathbb{Z}$) e $rq \leq sp$ (em $\mathbb{Z}$). Multiplicando a primeira dessas desigualdades por $q > 0$ e a segunda por $n > 0$, obtemos:

$$msq \leq nrq \qquad \text{e} \qquad rqn \leq spn \text{ (em } \mathbb{Z}\text{)}.$$

Logo, $msq \leq spn$. Uma vez que $s > 0$, pode-se concluir que $mq \leq pn$. Portanto, $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$.

(IV) Pela lei da tricotomia dos números inteiros, temos $ms \leq nr$ ou $nr \leq ms$ (em $\mathbb{Z}$). Logo, $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ ou $\frac{r}{s} \leq \frac{m}{n}$.

A próxima proposição nos diz que a relação ≤ dada na definição 2.6 é compatível com a adição e a multiplicação definidas anteriormente.

Proposição 2.13. Sejam $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com denominadores estritamente positivos. Então:

(I) $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \Longrightarrow \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} + \frac{p}{q}$, para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

(II) $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ e $0 \leq \frac{p}{q} \Longrightarrow \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}$.

Demonstração: Como $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$, segue que $ms \leq nr$.

(I) Então $msq^2 \leq nrq^2$, e daí: $msq^2 + pnsq \leq nrq^2 + pnsq$, ou seja, $(mq + pn)sq \leq nq(rq + ps)$. Logo

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \leq \frac{rq + ps}{sq} = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}.$$

(II) Como $p \geq 0$ (além de $n, s, q > 0$), $pq \geq 0$. Assim, $(ms)(pq) \leq (nr)(pq)$ e daí $(mp)(sq) \leq (nq)(rp)$. Temos $sq > 0$ e $nq > 0$. Logo:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \leq \frac{rp}{sq} = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q}. \qquad \blacksquare$$

Proposição 2.14. Se $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, então:

(I) $a \leq b \Leftrightarrow -b \geq -a$.

(II) $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$.

Demonstração: Sejam $a = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$, $b = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$, $c = \frac{p}{q}$, $d = \frac{t}{u}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com denominadores estritamente positivos. Então $n, s, q, u > 0$.

(I) $a \leq b \Leftrightarrow \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \Leftrightarrow ms \leq nr \Leftrightarrow -nr \leq -ms \Leftrightarrow (-r)n \leq s(-m) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-r}{s} \leq \frac{-m}{n} \Leftrightarrow -b \leq -a$.

(II) $a \leq b \quad e \quad c \leq d \Longrightarrow \frac{m}{n} \leq \frac{r}{s} \quad e \quad \frac{p}{q} \leq \frac{t}{u} \Longrightarrow ms \leq rn \quad e \ pu \leq tq \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (ms)(qu) \leq (rn)(qu)\ e\ (pu)(ns) \leq (qt)(ns) \Longrightarrow (mq + np)(su) \leq (nq)(ru + st) \Longrightarrow$

$\frac{mq+np}{nq} \leq \frac{ru+st}{su} \Longrightarrow \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} + \frac{t}{u} \Longrightarrow a + c \leq b + d$. $\blacksquare$

Observação 2.3. Todas as desigualdades obtidas nas proposições 2.13 e 2.14 continuam válidas se trocarmos o "≤" pelo "<".

Proposição 2.15. Seja $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Se $ac \leq bc\ e\ c > 0$, então $a \leq b$.

Demonstração: Vamos supor $a > b$. Como $c > 0$, $ac > bc$, o que contraria a hipótese. $\blacksquare$

Proposição 2.16. (*Regras de sinais*) Se $a, b \in \mathbb{Q}$, então:

(I) $a > 0$ e $b > 0 \Rightarrow ab > 0$;

(II) $a < 0\ e\ b < 0 \Rightarrow ab > 0$;

(III) $a < 0\ e\ b > 0 \Rightarrow ab < 0$.

Demonstração: Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ com $n, q > 0$. Então

$$a.b = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \quad \text{com } nq > 0.$$

(I) $a > 0 \; e \; b > 0 \Rightarrow m > 0 \; e \; p > 0 \Rightarrow mp > 0 \Rightarrow ab > 0$.

(II) $a < 0 \; e \; b < 0 \Rightarrow m < 0 \; e \; p < 0 \Rightarrow mp > 0 \Rightarrow ab > 0$.

(III) $a < 0 \; e \; b > 0 \Rightarrow m < 0 \; e \; p > 0 \Rightarrow mp < 0 \Rightarrow ab < 0$. ■

Proposição 2.17. Seja $a \in \mathbb{Q}$. Então $a^2 \geq 0$ e $a^2 > 0$ sempre que $a \neq 0$.

Demonstração: Se $a > 0$ ou $a < 0$, segue pela regra de sinais, $a^2 = a.a > 0$ ou $a^2 = a.a >$ > 0. Se $a = 0$, então $a^2 = a.a = 0$. ■

Proposição 2.18. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$:

(I) Se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$.

(II) Se $a < 0$, então $a^{-1} < 0$.

(III) Se $0 < a < 1$ então $1 < a^{-1}$.

(IV) Se $1 < a$ então $0 < a^{-1} < 1$.

(V) Se $0 < a < b$ então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

(VI) Se $a < b < 0$ então $b^{-1} < a^{-1} < 0$.

Demonstração:

(I) Temos $a^{-1} \neq 0$, dessa forma $a^{-1} \cdot a = 1$. Assim, pela proposição anterior, $(a^{-1})^2 > 0$. Desta relação e da hipótese $0 < a$ decorre da regra de sinais: $a^{-1} = a \cdot (a^{-1})^2 > 0$.

(II) Do fato $(a^{-1})^2 > 0$ e da hipótese $a < 0$, segue que $a^{-1} = a \cdot (a^{-1})^2 < 0$.

(III) Como $a^{-1} > 0$, em virtude de (I), então multiplicando os termos de $0 < a < 1$ (hipótese) por a^{-1}:

$$0 \cdot a^{-1} < a \cdot a^{-1} < 1 \cdot a^{-1}$$

o que implica $0 < 1 < a^{-1}$.

(IV) Como $1 < a$, então $a > 0$ e daí: $a^{-1} > 0$. Logo, $1 \cdot a^{-1} < a \cdot a^{-1}$, ou seja, $a^{-1} < 1$. Portanto, $0 < a^{-1} < 1$.

(V) Por hipótese $0 < a < b$. Então $a^{-1} > 0$ e $b^{-1} > 0$ e, portanto $a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$. Multiplicando os termos de $0 < a < b$ (hipótese) por $a^{-1} \cdot b^{-1}$:

$$0 \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < a \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < b \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1})$$

o que implica $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

(VI) Como $a < b < 0$, segue que $a^{-1} < 0$ e $b^{-1} < 0$. Assim, $a^{-1} \cdot b^{-1} > 0$. Logo $a \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < b \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) < 0 \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1})$ e, portanto $b^{-1} < a^{-1} < 0$. ∎

2.6. Os inteiros como particulares números racionais

Agora justificaremos, dentro da construção que foi considerada, em que termos pode-se considerar $\mathbb{Z}$ como parte de $\mathbb{Q}$.

Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(m) = \frac{m}{1}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$.

Para essa aplicação vale o seguinte:

- $f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m = n$ e, portanto, f é injetora,
- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$:

  $$f(m + n) = \frac{m+n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = f(m) + f(n)$$
- Para quaisquer $m, n \in \mathbb{Z}$

  $$f(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = f(m) \cdot f(n)$$
- Se $m \leq n$, então:

  $$f(m) = \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1} = f(n)$$

Essas propriedades de f significam que a imagem de $\mathbb{Z}$ por f, ou seja, $Im(f) = \left\{\frac{m}{1} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$ pode ser vista como uma cópia de $\mathbb{Z}$. Devido a esse fato cada inteiro m se confunde com sua imagem $\frac{m}{1}$ (ou seja, $m = \frac{m}{1}$) e, portanto $\mathbb{Z}$ passa a ser identificado com $Im(f)$. Como $Im(f) \subset \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Isso posto, se $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, então

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,.$$

Por outro lado, dado o número racional $\frac{m}{n}$, então:

$$\frac{m}{n} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = m : n$$

Por isso chamamos cada representação $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{Z};\ n \neq 0)$ de um número racional dado de *fração ordinária* de numerador m e denominador n. Se $mdc(m\,, n) = 1$, a fração se diz *irredutível*.

Ademais, se m é múltiplo de n, digamos $m = nr$ $(r \in \mathbb{Z})$, então:

$$m : n = \frac{m}{n} = \frac{nr}{n} = \frac{r}{1} = r$$

Ou seja, a divisão de um inteiro m por um inteiro $n \neq 0$ não só é sempre possível em $\mathbb{Q}$ como, quando m é múltiplo de n, o resultado coincide com o que se teria em $\mathbb{Z}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$, construído da maneira como o fizemos, com a adição, a multiplicação e a relação de ordem é o *conjunto dos números racionais* e seus elementos, *os números racionais.*

3. O USO DE JOGOS

Jogo, segundo o Dicionário Aurélio (1988), é atividade física ou mental organizada por sistema de regras que definem a perda ou ganho. Pode ser definido também como brinquedo, passatempo, divertimento. Além destas, o Dicionário relaciona uma série de outras definições que dependem do contexto em que a palavra jogo está inserida.

A enciclopédia Wikipédia (2015) afirma o seguinte:

> Jogo é toda e qualquer atividade em que exista a figura do jogador (como indivíduo praticante) e regras que podem ser para ambiente restrito ou livre. Pode envolver dois ou mais jogando entre si como adversários ou cooperativamente com grupos de adversários.

Huizinga (1999) conceitua jogo como sendo uma atividade ou ocupação voluntária, exercida dentro de certos determinados limites de tempo e de espaço, seguindo regras livremente consentidas, mas, absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e de alegria e de uma consciência de ser diferente da “vida cotidiana”.

Kamii (1996), de uma maneira geral, define o jogo como o conjunto de atividades às quais o organismo se entrega, principalmente pelo prazer da própria atividade. As pessoas envolvidas no jogo decidem as atitudes que executam, de acordo com os resultados que lhes interessam. A preocupação final do jogo está na autossatisfação e no prazer. Quem não almeja esses sentimentos não quer participar do jogo.

Confirma-se o que diz Huizinga (2000) que o jogo é uma atividade que tem o fim nele mesmo, ou seja, o prazer intrínseco e não o efeito ou resultado que dele deriva.

De acordo com a enciclopédia Wikipédia, os jogos costumam ser estudados por áreas do conhecimento humano como a antropologia e a sociologia, além dos estudos no campo comercial.

> Os benefícios dos jogos e brincadeiras são tantos que até hoje nenhum cientista conseguiu comprovar o deslumbramento que exercitam nas pessoas. Com os jogos e com as brincadeiras, adultos e crianças têm objetivos em comum de unir laços de amizade. (SOUZA, 2005)

De acordo com Noé (2014), a discussão sobre a importância dos jogos no ensino da matemática vem se concretizando, pois as crianças e adolescentes possuem uma grande capacidade de raciocinar e colocar em prática sua capacidade de resolver situações e problemas, caracterizando objetos e buscando uma linha de resolução baseada em elucidações próprias.

> A aplicação dos jogos em sala de aula surge como uma oportunidade de socialização, busca a cooperação mútua, participação da equipe na busca incessante de elucidar o problema proposto pelo professor. Mas para que isso aconteça, o educador precisa de um planejamento organizado e um jogo que incite o aluno a buscar o resultado, ele precisa ser interessante, desafiador. (NOÉ, 2014)

Como descrito na citação acima, a ideia principal é não deixar o aluno participar de qualquer jeito. Há objetivos a serem cumpridos, metas a serem alcançadas, bem como regras gerais que deverão ser respeitadas. Sendo assim, o aluno vai ser conscientizado de que aquele momento é importante para sua formação, pois ele usará de seus conhecimentos e suas experiências para participar, argumentar e propor soluções na busca de chegar aos resultados esperados. Desse modo, o aluno pode perceber que o jogo pode não ter uma resposta única, mas várias, e que, desde que não fujam do propósito, essas inúmeras respostas deverão ser consideradas e respeitadas. Portanto, levando em consideração todo esse contexto de debate e trabalho em equipe, o aluno percebe que o jogo não é uma parte da aula em que ele não irá fazer uma atividade escrita ou que não precisará prestar atenção no professor, gerando indisciplina e desordem.

Conforme afirma Smole et al (2009, p.9), o uso de jogos nas aulas de matemática implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem no livro e em exercícios padronizados o seu principal recurso didático.

Quando bem planejado e orientado, o trabalho com jogos nas aulas de matemática auxilia o desenvolvimento de habilidades de observação, análise, levantamento de hipótese, busca de suposições, reflexões, tomada de decisão, argumentação e organização, todas elas relacionadas ao uso do raciocínio lógico. As habilidades são desenvolvidas porque ao jogar, os alunos tem a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada, além de refletir e analisar as regras estabelecendo relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos. Além do mais, o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática, como afirma Smole et al (2009, p.9).

O sistema educacional de modo geral apresenta resistência à utilização de jogos nas aulas de matemática devido à ideia difundida pela sociedade e pelo senso comum de que a matemática é uma disciplina séria e que usar jogos para ensinar nesse componente curricular compromete tal seriedade. Nesse sentido, Smole et al (2009) destaca que o jogo na escola tem sido negligenciado por ser visto como uma atividade de descanso ou apenas como um passatempo.

Embora esse aspecto possa se manifestar em algum momento, todo jogo, por sua natureza, desafia, encanta, traz movimentos, barulho e alegria para o espaço onde tradicionalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. Por sua dimensão lúdica, o jogo desenvolve o espírito construtivo, a imaginação, a sistematização, a abstração e a capacidade do aluno, enquanto indivíduo, de interagir socialmente. Esse aspecto lúdico favorece o surgimento de situações problema que, para serem superadas, exigem do jogador alguma aprendizagem e certo esforço na busca por sua solução.

Diante disso, Smole et al (2009) afirma que, associada à dimensão lúdica, está a dimensão educativa do jogo. O jogo reduz a consequência dos erros e do fracasso do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia. No fundo, o jogo é uma atividade séria que não tem consequências frustrantes para quem joga, no sentido de ver o erro como algo definitivo ou insuperável. Isso porque os erros são revistos de forma natural na ação das jogadas, e, ao invés de deixar marcas negativas, propiciam ao aluno/jogador a oportunidade de fazer novas tentativas, estimulando, assim, a sua capacidade de fazer previsões e de checar se suas hipóteses se confirmam ou não. Além disso, a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente que o jogo exige do aluno propicia a aquisição de novas ideias e novos conhecimentos.

Quanto à função de socialização do jogo, fica claro que, na discussão com seus pares, o aluno pode desenvolver o seu potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica. As ideias dos outros podem levar esse aluno a pensar criticamente sobre a sua própria ideia em relação às dos outros. Com isso, o aluno gradualmente passa a pensar sob outra perspectiva e a coordenar seu próprio modo de ver com outras pessoas.

> Em situação de cooperação – aqui entendido como co-operar, operar junto, negociar para chegar a algum acordo que pareça adequado a todos os envolvidos -, a obrigação é considerar todos os pontos de vista, ser coerente, racional, justificar as próprias conclusões e ouvir o outro. É nesse processo que se dá a negociação de significados e que se estabelece a possibilidade de novas aprendizagens. (SMOLE et al,2009,p.11)

O jogo torna-se, desse modo, uma das formas mais adequadas para que a socialização ocorra e permita aprendizagens, pois sozinho o aluno poderá dizer e fazer o que quiser pelo prazer e pela situação do momento, mas, em grupo, diante de outras pessoas, ele sentirá a necessidade de pensar naquilo que dirá e que fará, para que sua ideia possa ser compreendida.

Grando (2008) esclarece que a inserção de jogos na sala de aula de matemática implica em vantagens e desvantagens que devem ser assumidas e refletidas pelos professores que se propuserem a desenvolver um trabalho pedagógico com os jogos.

Smole et al (2009), por sua vez, considera que trabalhar com jogos envolve o planejamento de uma sequência didática. Uma série de intervenções do professor são exigidas para que, mais que jogar, mais do que brincar, haja aprendizagem. Sendo assim, deve-se pensar como e quando o jogo será proposto, e quais possíveis explorações ele permitirá para que os alunos aprendam.

Grando (2008) apresenta como vantagens a (re)significação de conceitos já aprendidos; a introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; as estratégias de resolução de problemas; o aprender; o tomar e avaliar decisões; a atribuição de significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; a relação entre diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); a participação ativa da aula na construção do seu próprio conhecimento; a interação social (trabalho em grupos); o interesse para os alunos; o desenvolvimento da criatividade, da participação, da competição "sadia", da observação e do resgate do prazer em aprender; o fato do jogo permitir ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos.

Como desvantagens a autora menciona o perigo em dar ao jogo um caráter aleatório tornado-se um "apêndice" em sala de aula, de modo que, sem motivação os alunos não sabem por que jogam; o tempo gasto, pois se o professor não estiver preparado, ele sacrifica outros conteúdos pela falta de tempo; as falsas concepções de que todos os conceitos matemáticos dever ser ensinados através de jogos; a perda da ludicidade do jogo pela interferência constante do professor; a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo.

Todas essas considerações feitas pela autora Grando (2008) são importantes e necessárias ao processo de ensino e de aprendizagem, pois exigem do professor uma reflexão com pressupostos metodológicos, prevista em seu plano de ensino, vinculada a uma concepção que seja coerente com o projeto pedagógico da escola.

4. PROPOSTA DE JOGOS PARA ABORDAR FRAÇÕES

Os jogos aqui propostos são: *Bingo das frações, Que vença o maior, Unindo forças* e *Quadrado mágico com frações.* Os objetivos desses jogos são explorar o reconhecimento, a leitura, a equivalência de frações e suas representações, passando pela ordenação e pelas operações com esses números, na tentativa de fazer o aluno trafegar naturalmente entre as diferentes formas de representá-los: fração, números decimais e porcentagens. Esses jogos também visam estimular a participação de todos os alunos e a ajuda mútua na construção do próprio conhecimento, favorecida por um ambiente de descontração e prazer sem a obrigatoriedade de memorização de regras e procedimentos "desconectados" com a realidade.

A aplicação dos jogos deve se dar de modo que inicialmente o aluno conheça as peças e as regras para poder interagir com seus pares numa relação de parceria ou como adversários. Ganhar ou perder no jogo não deve ser a finalidade principal, pois aqui a palavra vitória é intencionalmente associada à palavra aprendizagem. Ou seja, aluno vitorioso é aquele que ao final dos jogos tiver tomado posse de um conhecimento próprio e souber articulá-lo no seu dia-a-dia. A seguir, será feita uma descrição desses jogos, mencionando seus objetivos específicos, os materiais necessários, as regras dos jogos e o tempo previsto para a realização de cada um deles. E ao final, é apresentado um relato de experiência dos jogos aplicados.

4.1 Jogo: Bingo das frações

Objetivos específicos: Fazer com que os alunos se familiarizem com as várias formas numéricas (percentual, fração mista, número decimal, fração redutível) de se representar uma fração e façam associações entre elas. Outro objetivo é o de introduzir o conceito de ordem entre números racionais.

Materiais necessários: 40 fichas diferentes entre si, cada uma contendo as frações constantes na Figura 3; uma folha de papel contendo a tabela da Figura 3 (que servirá para marcar os números sorteados); um saco; cartelas de bingo no formato de 5 colunas por 5 linhas (Figura 4); folhas contendo as regras do jogo; lápis.

Tempo previsto: 3 aulas de 50 minutos cada.

Regras do jogo:

- As fichas são colocadas dentro de um saco.

- O professor (ou um aluno) retira uma ficha de dentro do saco, fala aos jogadores a fração retirada e coloca a ficha retirada no local correspondente na tabela (Figura 3) para conferência da cartela vencedora.
- Aquele que possuir em sua cartela a fração sorteada marca-a utilizando um lápis, por exemplo.
- Os alunos deverão ficar atentos. Alguns dos números encontrados em suas cartelas estão escritos num formato diferente do sorteado. O número sorteado é sempre uma fração irredutível ou um número natural, porém nas cartelas esses números poderão estar como porcentagens, frações redutíveis, frações aparentes ou número misto que deverão ser transformados.
- O jogador que completar sua cartela grita BINGO. O professor confere se todas as frações constantes na cartela do jogador foram sorteadas.
- Vence o jogador que completar primeiro sua cartela. Em caso de empate, todas as fichas são colocadas de volta no saco e cada um dos jogadores que completaram sua cartela retira/sorteia uma ficha. Então, comparam-se essas frações e vence aquele que retirar a maior fração.

Desenvolvimento: cada aluno recebe uma cartela de bingo contendo 24 números distintos de um total de 40 números existentes, conforme Figura 4. Algumas células das cartelas aparecem com um preenchimento em destaque (cor de fundo escurecido) para indicar que os números aí representados estão de um modo diferente (percentual, fração mista, número decimal, fração redutível) da correspondente fração da ficha (Figura 4).

Figura 3 – Tabela com todas as frações do jogo.

B	I	N	G	O
0	1	2	3	4
$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{38}{11}$	$\frac{25}{6}$
$\frac{1}{50}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{35}{9}$	$\frac{49}{11}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{9}{2}$
$\frac{9}{10}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{33}{16}$	$\frac{134}{35}$	$\frac{13}{3}$
$\frac{73}{100}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{83}{21}$	$\frac{17}{4}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{23}{9}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{29}{6}$
$\frac{3}{500}$	$\frac{160}{81}$	$\frac{47}{22}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{40}{9}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 4 – Três cartelas do Jogo Bingo das Frações

Cartela 1 – JOGO BINGO DAS FRAÇÕES

B	I	N	G	O
0	$\frac{21}{13}$	$\frac{33}{16}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{40}{9}$
$\frac{90}{100}$	1	$\frac{12}{5}$	$\frac{35}{9}$	$\frac{25}{6}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{160}{81}$		$\frac{40}{13}$	$\frac{9}{2}$
$\frac{3}{500}$	$\frac{5}{4}$	2	$3\frac{4}{7}$	$\frac{13}{3}$
0,02	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{134}{35}$	400%

Cartela 2 – JOGO BINGO DAS FRAÇÕES

B	I	N	G	O
$\frac{3}{7}$	$\frac{27}{24}$	$\frac{47}{22}$	$\frac{40}{13}$	4,5
$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{5}$	$2\frac{5}{9}$	$\frac{38}{11}$	$\frac{13}{3}$
0,6%	$\frac{5}{4}$		$\frac{134}{35}$	4
$\frac{73}{100}$	$\frac{15}{8}$	$2\frac{1}{4}$	3	$\frac{49}{11}$
$\frac{1}{50}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{25}{7}$	$\frac{29}{6}$

Cartela 3 – JOGO BINGO DAS FRAÇÕES

B	I	N	G	O
$\frac{6}{1000}$	$1\frac{1}{8}$	2,25	$\frac{40}{13}$	$\frac{49}{11}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	2	$\frac{25}{7}$	$\frac{17}{4}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{15}{8}$		$\frac{35}{9}$	$\frac{40}{9}$
0	1	$\frac{47}{22}$	$\frac{83}{21}$	$\frac{29}{6}$
2%	$\frac{5}{4}$	$\frac{13}{6}$	$3\frac{4}{7}$	$\frac{13}{3}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Para aplicar o jogo, o professor deve entregar para cada aluno uma cartela do bingo e uma a folha contendo as regras do jogo. Então, ele deve pedir para que eles façam uma leitura silenciosa. Depois de perceber que todos terminaram a leitura, o professor dever perguntar o que eles entenderam e, se julgar necessário, refazer a leitura com todos, esclarecendo os pontos mais importantes.

O professor (ou um aluno) sorteará aleatoriamente um número de cada vez dentre os 40 existentes (Figura 3). Nessa tabela, as frações estão representadas na forma irredutível (representação de uma fração na qual o numerador e o denominador são números primos entre si, ou seja, o numerador e o denominador não possuem divisor em comum).

O jogo deve ser repetido por três ou quatro vezes.

4.2 Jogo: Que vença o maior

Objetivos específicos: Fazer com que os alunos sejam capazes de reconhecer frações como números que expressam uma quantidade e compreender a relação de ordem no conjunto dos racionais, desenvolvendo habilidades de comparação para tomada de decisão.

Materiais necessários: 24 cartões contendo frações (Figura 5), folhas contendo as regras do jogo; folha para anotações.

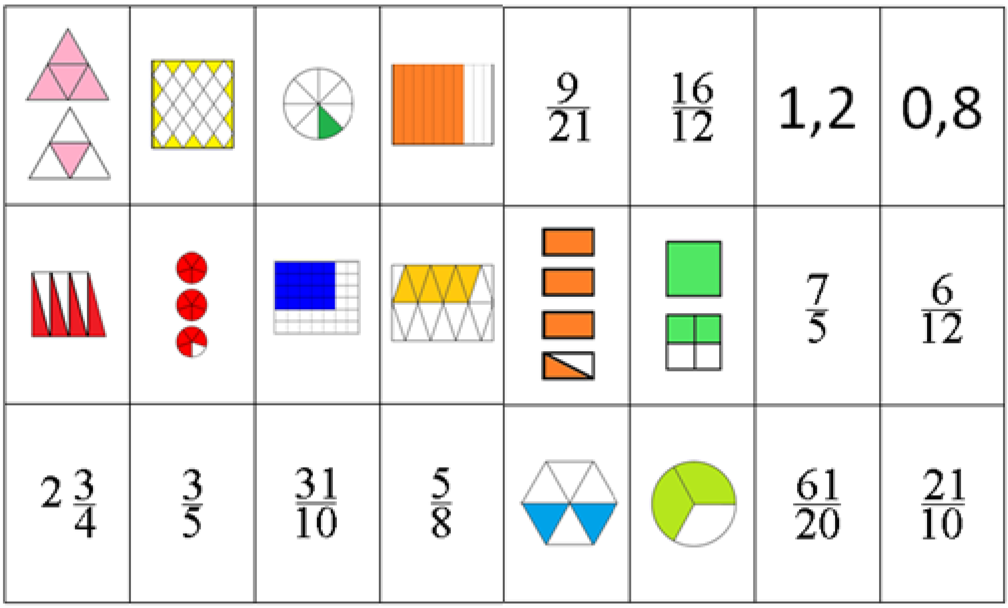
Tempo previsto: 2 aulas de 50 minutos cada.

Regras do jogo:

- Formar grupos com quatro alunos.
- Os alunos jogam alternadamente.
- O jogo é composto de seis rodadas.
- Os cartões devem ficar espalhados sobre uma mesa com seu valor numérico voltado para baixo de forma que o jogador não saiba previamente o valor de cada carta.
- Os alunos, um de cada vez, retira um dos cartões, mostra-o aos outros jogadores e coloca-o em ordem crescente em relação aos cartões que foram retirados anteriormente pelos seus oponentes. Ao final de cada rodada, verifica-se o valor de cada carta pontuando os alunos da seguinte maneira: o aluno que retirou a carta com maior valor ganha 4 pontos, o aluno que retirou a carta com o segundo maior valor ganha 3 pontos, o aluno que retirou a carta com o terceiro maior valor ganha 2 pontos e o aluno que retirou a carta com o quarto maior valor ganha 1 ponto.
- Ao final das seis rodadas, somam-se os pontos de cada aluno, sendo vencedor aquele que obtiver a maior soma.

Desenvolvimento: na sala de aula, o professor deve organizar os alunos formando as equipes e entregando para cada equipe um kit contendo os cartões, as regras do jogo e folhas para possíveis anotações.

Figura 5 – Cartas do Jogo “Que Vença o maior”



Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Jogo: Unindo forças

Esse jogo é uma variação do jogo “Que vença o maior”.

Objetivos específicos: Os mesmos objetivos específicos do jogo “Que vença o maior” e, além disso, trabalhar as operações com números racionais.

Materiais necessários: 24 cartões contendo frações (Figura 5), folhas contendo as regras do jogo e folha para anotações.

Tempo previsto: 3 aulas de 50 minutos cada.

Regras do jogo:

- Formar equipes com dois jogadores.
- O jogo se dá pelo confronto de duas equipes: equipe A e equipe B, por exemplo.
- Define-se A1 (jogador 1 da equipe A), A2 (jogador 2 da equipe A), B1 (jogador 1 da equipe B) e B2 (jogador 2 da equipe B).

- Combinar com os alunos qual operação será realizada (soma, subtração, multiplicação ou divisão).
- O jogo é composto de quatro rodadas.
- Os cartões devem ficar espalhados sobre uma mesa ou carteira com seus valores virados para cima, de modo que os jogadores possam visualizar e escolher as cartas do modo mais conveniente.
- Cada jogador retira um cartão na seguinte ordem:
  1ª rodada: A1 B1 A2 B2
  2ª rodada: B1A2 B2 A1
  3ª rodada: A2 B2 A1 B1
  4ª rodada: B2 A1 B1 A2
- Os jogadores devem realizar a operação, predeterminada, com os valores das cartas retiradas: A1 com A2 e B1 com B2. Em cada rodada, a dupla que obteve o maior resultado ganha 3 pontos, e a dupla que obteve o menor resultado ganha 1 ponto.
- Ao final das rodadas, somam-se os pontos que cada equipe conquistou durante o jogo, sendo vencedora a que obtiver a maior soma.

Desenvolvimento: na sala de aula, o professor organiza os alunos formando as equipes e entrega para cada duas equipes adversárias um kit contendo os cartões, as regras do jogo e as folhas para anotações. Em seguida, o professor dá um tempo para que eles possam ler as regras e certifica-se de que as regras foram compreendidas, fazendo algumas perguntas. Caso haja necessidade, ele retoma a leitura das regras em conjunto, explicitando os pontos principais. Além disso, o professor acompanha o desenvolver da brincadeira como expectador, observando as escolhas realizadas, para uma possível socialização que servirá para reflexão e sistematização de alguns conceitos. Mais uma vez, vale ressaltar que vitorioso será o aluno que conseguir perceber propriedades inerentes aos números racionais transformando essa percepção em conhecimento.

4.4 Jogo: Quadrado mágico com frações

Esse quadrado mágico é uma derivação do quadrado mágico 3×3 com números de 1 a 9.

Objetivos específicos: desenvolver nos alunos o raciocínio lógico e o cálculo mental.

Materiais necessários: papel (folha sulfite ou de caderno), lápis, borracha, tabelas 3x3 vazias.

Tempo previsto: 2 aulas de 50 minutos

Regras do jogo: enfileirar os números $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{6}$,$\frac{1}{5}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{4}{15}$ e $\frac{3}{10}$ em três linhas e três colunas, de tal forma que as somas de cada linha, cada coluna e cada diagonal sejam iguais a $\frac{1}{2}$.

Desenvolvimento: Primeiramente, o professor apresenta aos alunos o quadrado mágico 3x3 tradicional e pede para eles preencherem-no com numerais de 1 a 9, sem repeti-los, de modo que em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal as somas sejam iguais a 15. Depois disso, o professor dá um tempo de 20 a 30 minutos para que eles possam realizar essa tarefa. Em seguida, o professor faz com que os alunos socializem as suas percepções e descobertas, levando os alunos a refletirem sobre suas próprias estratégias. Em seguida, ele apresenta o quadrado mágico com frações e suas regras, incentivando-os a jogar. A expectativa é que os alunos após algumas tentativas percebam que o preenchimento desse quadrado mágico é semelhante ao anterior, e espera-se que eles percebam a necessidade de escrever frações equivalentes às dadas, de tal modo que todas fiquem com o mesmo denominador, como, por exemplo, denominador igual a 30. Ou seja, as frações $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{6}$,$\frac{1}{5}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{4}{15}$ e $\frac{3}{10}$ são equivalentes às frações, $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$, $\frac{4}{30}$, $\frac{5}{30}$,$\frac{6}{30}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{8}{30}$ e $\frac{9}{30}$ respectivamente, e nesse caso seus numeradores são números de 1 a 9. Portanto, organizar tais frações é organizar os números de 1 a 9 como fizeram no caso anterior.

4.5 Relato de experiência

Os jogos apresentados anteriormente na seção 4 foram aplicados a alunos do 9º ano do ensino fundamental de uma escola estadual, na cidade de Lins, estado de São Paulo. A escola está situada em um bairro pobre da periferia de Lins e atende também alunos de bairros adjacentes, que são bairros com alto índice de miséria e criminalidade. A escola é também vinculada à Fundação Casa, responsável pela escolarização dos adolescentes internos que cumprem medidas de sansão ou sócio educativas. Atualmente, a escola conta em seu quadro de pessoal com mais de 60 profissionais que se dividem entre equipe gestora, professores e funcionários, e atende mais de 1000 alunos em seus três turnos de trabalho (manhã, tarde e noite). Esses alunos vão desde o 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.

Dentro desse universo, o trabalho foi direcionado a 20 alunos do 9º ano do ensino fundamental, com idades variando entre 14 e 15 anos. Esses alunos foram selecionados por indicação dos seus professores, sob o critério de apresentarem níveis diferentes de conhecimento e de participação nas aulas. O objetivo dessa escolha era justamente o de estimular a ajuda mútua e a socialização do grupo.

Foram realizados 10 encontros ao todo, sendo que o intuito desses encontros era mostrar que através de atividades lúdicas é possível desenvolver habilidades e competências capazes de aproximar dois universos, o concreto e o abstrato, de forma eficaz e prazerosa.

No primeiro encontro, cada aluno recebeu uma cartela e as regras do Jogo Bingo das frações. Foi pedido para fazerem uma leitura silenciosa. Depois de alguns minutos foram indagados se haviam entendido as regras e o que deveriam fazer. A resposta foi unânime: não sabiam o que fazer. Algumas perguntas surgiram: porque alguns quadradinhos estão coloridos? O que fração tem a ver com porcentagem? O zero, o um e o dois são frações? Respondidas tais questões, dei um tempo para que cada participante fizesse as devidas adequações em sua cartela (redução de fração, transformação de porcentagem para fração, transformação de número misto para fração), o que levou aproximadamente 15 minutos. Foi necessária a mediação do professor, exemplificando cada caso. Pedi para aqueles que haviam terminado ajudarem os mais atrasados, e assim o fizeram. Terminadas as adequações, estavam todos prontos e deu-se início ao sorteio dos números, pedindo que eles próprios fizessem as retiradas. Era perceptível pelo sorriso estampado no rosto dos jovens que o clima não era de obrigação, mas de prazer. Permitir que eles próprios retirassem os números foi uma forma de engajá-los cada vez mais na atividade proposta.

No segundo encontro novamente foram distribuídas as cartelas, uma para cada participante e, como eles já conheciam as regras, foram orientados a fazer as adequações necessárias. Percebi que eles ainda tinham dificuldade nas transformações, porém eles próprios se ajudaram e as intervenções foram mínimas. As maiores dificuldades observadas foram em relação à transformação de números decimais em frações, pois eles não conseguiam perceber que o número apresentado podia ser representado por uma fração cujo denominador era um múltiplo de 10. Sendo assim, aproveitei a oportunidade para trabalhar as frações decimais com o intuito de levá-los a tal percepção. Orientei os alunos a pesquisarem mais sobre os números racionais como tarefa de casa, e deixei como sugestões os *sites*:

<http://www.somatematica.com.br/fundam/decimais/decimais4.php>, <http://www.brasilescola.com/matematica/numero-misto.htm> e <http://www.brasilescola.com/matematica/fracao-porcentagem.htm>.

No terceiro encontro, assim como nos dois anteriores, distribui as cartelas e antes de receber qualquer comando, os alunos se puseram a fazer as adequações, pedindo aos colegas que conferissem quando pairava alguma dúvida. Transparecia em suas atitudes confiança em seus procedimentos, e tudo transcorreu num clima agradável e de efetiva participação de todos. Nesse dia houve duas cartelas vencedoras. Relembrei com eles as regras e pedi para que os alunos, cujas cartelas haviam sido preenchidas, que retirassem um número para que se fizesse a comparação de suas grandezas. Assim o fizeram, e os números retirados foram: 134/35 e 21/13. Foi bom ter acontecido o empate naquele momento. Isso deu a oportunidade de explorar com eles duas formas de comparar números fracionários, uma pela transformação em decimais e outra através de frações equivalentes. A reação deles foi de felicidade ao verem que tais comparações se assemelhavam com as realizadas entre dois números naturais. Ao final desse dia, anunciei que haveria mudança de brincadeira para o próximo encontro, sem dar detalhes de como seria. A ideia era deixá-los na expectativa.

O quarto encontro iniciou-se com os alunos no laboratório de informática, que foram orientados a realizar uma pesquisa sobre frações equivalentes e como comparar dois números racionais. Entreguei a cada aluno cinco ou seis números racionais e dei a eles a tarefa de organizar esses números de modo que ficassem em ordem crescente de valores. Finalizada a tarefa, e já na sala de aula, os alunos foram divididos em cinco grupos com quatro alunos em cada um deles. Apresentei aos alunos o Jogo “Que vença o maior”. Entreguei a eles as regras, pedindo que lessem com atenção, e apresentei também as cartas para que os alunos pudessem familiarizar-se com os números e figuras. Surgiram algumas perguntas: “Como comparar figura com números? O que representa essas cartas com mais de uma figura? Essa carta “xadrez” representa qual número?”. Respondidas tais questões, era hora de jogar. A expectativa com essa atividade era que, após algumas rodadas, os alunos criassem estratégias de comparação das quais pudessem se utilizar mais rapidamente. Foi necessário mediar por diversas vezes, e o jogo se prolongou por um tempo além do previsto inicialmente e se tornou cansativo. Tal prolongamento se deu pelo excessivo número de vezes que se necessitou de intervenção. As dificuldades eram variadas, porém as principais eram como escrever numericamente a representação de uma figura e como fazer as devidas transformações dos números retirados (em decimais ou frações equivalentes), para ordená-las corretamente. Ao final alguns alunos conseguiam, com certa facilidade, lidar com os valores retirados. Observou-se que a forma de comparação adotada pela maioria dos alunos foi a transformação em decimal, algo que já era esperado, pois esse processo é mais rápido. Questionados sobre o porquê dessa escolha, os alunos disseram que na forma decimal fica mais fácil e rápido comparar dois números, inclusive se um deles for natural.

O quinto encontro iniciou-se distribuindo os alunos em grupos, como no encontro anterior, porém mudei a formação dos grupos, pois eu almejava, além da aquisição de conhecimentos matemáticos, estimular um relacionamento mais efusivo entre os alunos da classe, com o objetivo de mostrar a eles que na vida em sociedade é primordial a convivência harmoniosa, criando ambientes de parcerias e colaboração. Nesse encontro tudo foi mais fácil, pois os alunos já compreendiam o jogo devido ao encontro anterior. Pedi para que os alunos com maior facilidade auxiliassem os colegas com dificuldade, fato avaliado como produtivo, pois constatei que o “ganhar” não fora posto em primeiro plano, mas sim o prazer de aprender juntos. Dúvidas ainda surgiram, necessitando de mediação. O tempo utilizado foi menor que no quarto encontro e o jogo tornou-se divertido. O clima era de alegria e descontração. Com os vencedores de cada grupo, formou-se um novo grupo, a pedido dos próprios alunos, que jogaram entre si. A cada carta que retiravam, eles anotavam seu valor na lousa, colocando-a em ordem crescente. Houve até torcida, que ajudava na ordenação dos números, mostrando engajamento dos alunos com a atividade e o grupo.

Para o sexto encontro foi proposto trabalhar as operações de adição e subtração por meio do jogo “unindo forças”. Antes da reunião na sala de aula, levei os alunos até o laboratório de informática e pedi que pesquisassem sobre adição e subtração de frações. Distribui para cada aluno um par de números e a operação que ele deveria realizar com os números recebidos. Depois, os resultados foram socializados, utilizando para isso uma lousa. Comentei cada uma das operações enfatizando o procedimento que levou a resultados errados, retomando os conceitos de mínimo múltiplo comum e frações equivalentes. Já na sala de aula, organizei grupos como havia feito no quinto encontro. No entanto alterando os integrantes, com o intuito de estimular o bom relacionamento entre todos. Pedi a eles que formassem duplas para jogarem em parceria. Entreguei para cada grupo as regras do jogo; após a leitura, pedi que jogassem enquanto acompanhava a atividade a fim de monitorar e intervir para sanar possíveis dúvidas. Os alunos jogaram duas vezes, uma vez utilizando a adição e outra vez a subtração, pois não havia tempo para mais nenhuma jogada. Ao final, os alunos concluíram que, na adição, a ordem dos elementos não importa. Porém, na subtração, eles perceberam que devemos retirar o número menor do maior para que o resultado seja positivo. Didaticamente explorei tais conclusões falando das propriedades dos números racionais com relação à adição e subtração, pois se torna mais fácil falar de tais propriedades a partir da percepção dos próprios alunos.

No sétimo encontro, a ideia era trabalhar as operações de multiplicação e divisão. Novamente, iniciei as atividades no laboratório de informática e pedi aos alunos que pesquisassem sobre multiplicação de frações. Quando constatei, através de questionamentos, que os alunos haviam entendido o conceito de multiplicação, pedi que eles pesquisassem sobre a divisão de frações e quais relações havia entre essas duas operações. Neste dia não jogamos, pois o tempo gasto na pesquisa ultrapassou o limite previsto, uma vez que neste dia alguns alunos tinham prova de ciências e necessitavam voltar para sua turma.

O oitavo encontro iniciou-se organizando a turma em grupos de quatro alunos, como nos encontros anteriores. Escrevi na lousa alguns exemplos de multiplicações e divisões para reativar a memória dos alunos, preparando-os para a continuação das atividades. Pedi que formassem parcerias e jogassem primeiro, utilizando a multiplicação e depois utilizando a divisão. Eles cumpriram a tarefa sem grandes dificuldades e dentro do tempo previsto. A partir dessa atividade, eles concluíram que é necessário pensar bem quais números escolher, uma vez que o produto de dois números racionais pode ser menor do que seus fatores, e que o quociente de dois números é maior quando utilizamos como denominador o menor deles. Nesse dia os alunos superaram as minhas expectativas, pois eu apenas esperava que eles compreendessem e executassem divisão e multiplicação de frações sem grandes dificuldades.

No nono encontro, os alunos conheceram o tradicional quadrado mágico 3x3. Explicadas as regras, foram incentivados a jogar, individualmente. Foi divertido ver tamanha concentração e a luta deles para superar tal desafio. Os alunos trocavam experiências entre si, boas e más tentativas, levantavam hipóteses, faziam análise para testar tais hipóteses, até que, finalmente, um aluno conseguiu resolver o desafio: completou a tabela segundo as regras. Pedi, então, que esse aluno deixasse os colegas continuarem tentando para ver se eles chegariam a alguma solução diferente. Ao final da atividade, seis alunos conseguiram completar corretamente a tabela. Então, pedi para os alunos compararem as soluções encontradas por cada um, e eles constataram que apesar de terem chegado a algumas soluções diferentes, todas elas tinham o número 5 na posição central e possuíam a mesma sequência de números com ordens distintas. Veja abaixo as quatro soluções encontradas.

Figura 6 – Algumas soluções do quadrado mágico 3x3 tradicional

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Os alunos foram orientados a pesquisarem em casa outros tipos de quadrados mágicos e suas soluções. Para que pudessem realizar essa tarefa, sugeri o link: <http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/O%20que%20%C3%A9%20um%20quadrado%20m%C3%A1gico.pdf>,
por contar a história do quadrado mágico e trazer quadrados mágicos de tamanhos maiores e instruções de como resolvê-los.

No décimo encontro, apresentei aos alunos o quadrado mágico com frações, uma variação do quadrado mágico 3x3 tradicional. Este os alunos deveriam preencher com as frações $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{4}{15}$ e $\frac{3}{10}$ de modo que em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal a adição das frações deveria somar $\frac{1}{2}$.

A expectativa era que os alunos percebessem que deveriam escrever frações equivalentes às dadas, de tal modo que todas ficassem com denominador 30. Ou seja, as frações $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{4}{15}$ e $\frac{3}{10}$ são equivalentes às frações, $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$, $\frac{4}{30}$, $\frac{5}{30}$, $\frac{6}{30}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{8}{30}$ e $\frac{9}{30}$ respectivamente, porém seus denominadores são todos iguais a 30 e seus numeradores são números de 1 a 9. Portanto, organizar tais frações é organizar os números de 1 a 9, como fizeram os alunos no nono encontro. Porém, a expectativa não se confirmou. Os alunos tentaram enfileirar as frações de várias maneiras, cálculos e mais cálculos e não chegaram a qualquer solução. Então sugeri a eles que reescrevessem tais frações usando um denominador comum. Contudo, ainda assim os alunos tiveram dificuldades em completar a tarefa. Finalmente, um aluno percebeu que a solução estava em ordenar os números como no caso anterior, pois $\frac{1}{2}$ corresponde a $\frac{15}{30}$ e assim o fez.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da dificuldade de envolver os alunos no ensino de frações através das metodologias de ensino mais tradicionais, bem como do baixo desempenho em matemática dos alunos em provas como o SARESP, a busca de outras metodologias de ensino que aproximem os conteúdos conceituais abstratos da matemática do cotidiano do aluno se faz necessária para que um melhor desempenho no ensino e na aprendizagem de tópicos como frações possa ser alcançado. Levando isso em consideração, bem como todo o trabalho de descrição e reflexão desenvolvido nesse estudo, é possível concluir que a utilização de jogos no ensino da matemática constitui uma metodologia eficiente no sentido de ser capaz não só de aproximar esses conteúdos abstratos da realidade dos alunos, mas também de engajá-los no processo de aprendizagem, que passa a ocorrer de forma lúdica. Nesse sentido, a pesquisa desenvolvida por esse estudo responde, ainda que não exaustivamente, a uma das questões mais recorrentes nos encontros de capacitação, e que diz respeito à maneira de fazer com que o aluno se engaje ativamente na aquisição de conhecimentos matemáticos e possa aprender de modo mais sólido e crítico.

Os jogos aplicados acabaram mostrando que, se usados com um objetivo bastante definido e respeitando uma ordem bem elaborada, podem ser grandes facilitadores no processo de aprendizagem dos alunos. Como descrito no relato da aplicação dos jogos, vários foram os momentos de interação entre os alunos, que em muitos casos trabalharam em grupo para juntos chegarem à solução de um problema matemático específico, discutindo hipóteses e examinando as semelhanças e diferenças entre as respostas que foram encontradas para uma determinada questão, o que seria mais penoso de ser feito dentro de uma abordagem mais tradicionalista no ensino da matemática.

Uma vez que a utilização dos jogos se mostrou um instrumento eficaz no ensino de frações, é importante apontar para alguns temas de pesquisa que podem surgir a partir do que foi discutido nesse estudo. Uma das questões que surge é: em que medida esses jogos poderiam ser adaptados para ensinar outros conhecimentos matemáticos, bem como quais seriam as adaptações nos jogos em si, ou na aplicação deles em sala de aula, que deveriam ser feitas para que a atividade funcionasse em outros contextos. Outra questão que surge é de que modo alunos de outras séries do ensino médio, por exemplo, se beneficiariam com a aplicação de jogos desse tipo no ensino de matemática. Uma terceira questão que surge, e que tem um caráter mais amplo e geral, é como o professor pode aproximar os conteúdos abstratos da realidade do seu aluno, e quais outras ferramentas pedagógicas, além dos jogos, ele pode utilizar para fazer isso.

Em conclusão, a aplicação dos jogos revelou ser possível engajar os alunos ativamente no aprendizado da matemática por meio de recursos lúdicos como jogos, e estimular, ao mesmo tempo em que se ensina esse conteúdo mais técnico, o desenvolvimento de habilidades sociais mais amplas, como o trabalho em equipe, a criação de hipóteses, o debate para se chegar a um resultado comum, bem como o respeito e a discussão das diferenças de resultado. Além disso, ao estimular o trabalho em equipe, esses jogos mostraram que podem ajudar os alunos a não só adquirirem conhecimentos matemáticos específicos, mas também a participarem mais ativamente no processo de aprendizagem e na resolução de problemas que envolvem a necessidade de cooperação para que possam ser resolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORIN, J. *Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME.USP, 1995.

CABRAL, G. *Origem dos jogos olímpicos*. Disponível em: < http://www.brasilescola.com/educacao-fisica/origem-dos-jogos-olimpicos.htm>. Acesso em 02 mar. 2015.

CARAÇA, B. M. in CAMPOS, C. F. M. Número racional na representação fracionária: entendimentos produzidos por alunos da educação básica. Disponível em: < http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/1930>. Acesso em: 02 mar. 2015.

CORBALÁN, F. Juegos matemácos para secundaria y bachillerato. Madrid, Espanha: Editorial Sinstesis 1996, 271p. In: GRANDO, R.C. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. 2ª edição São Paulo, SP: Paulus, 2008.

D'AVILA, L. As frações Egípcias. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/luanadavila/as-fraes-egpcias-13035135>. Acesso em 24 maio 2015.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos da Aritmética*. São Paulo, SP: Atual, 1991.

DONADELLI, J. Notas de aula. Disponível em: <https://anotacoesdeaula.wordpress.com/2014/06/28/tan-bc1405-2/>. Acesso em: 24 maio 2015.

GARCIA, V. C. *Construção da matemática e formalização do número natural*. Disponível em: < http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/naturais-web/naturais_construcao_matematica_formalizacao_numero_natural_tarefa1.htm>. Acesso em: 23 maio 2014.

GARDNER, M. *Divertimentos matemáticos*. 5. ed. São Paulo: Ibrase, 1998.

GEQUELIM, H. F. *Axiomas de Peano e os números naturais*. Disponível em: <http://conferencias.utfpr.edu.br/ocs/index.php/sicite/2012/paper/viewFile/971/492>. Acesso em: 24 maio 2015.

GOUVEIA, J. *A origem do Largo do Tabolado*. Disponível em: < http://avataresdamemoria.blogspot.com.br/2012/09/as-origens-do-largo-do-tabolado. html>. Acesso em: 27 fev. 2015.

GRANDO, R. C. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.* 2. ed. São Paulo: Paulus, 2008.

HUIZINGA, J. *Homo Ludens*. São Paulo: Perspectiva, 1999. Disponível em: < http://unisc.br/portal/upload/com_arquivo/jogo_trabalho.pdf>. Acesso em: 02 mar. 2015.

KAMII, C; DEVRIES, R. *Jogos em grupo na educação infantil: implicações da teoria de Piaget*. São Paulo: Trajetória Cultural, 1994.

KISHIMOTO, T. M. *Jogo, brinquedo, brincadeira e educação.* 12. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

MARQUES, P. *Números inteiros: compreensão dos algoritmos das quatro operações fundamentais.* Disponível em: <https://www.algosobre.com.br/matematica/numeros-inteiros-compreensao-dos-algoritmos-das-quatro-operacoes-fundamentais.html>. Acesso em: 24 maio 2015.

MEIER, M.; GARCIA, S. Mediação da aprendizagem: Contribuições de Feuerstein e de Vygotsky. 3. ed. Curitiba: Gráfica e Editora Venezuela, 2008.

NOÉ, M. *A importância dos jogos no Ensino da Matemática*. Disponível em: <http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-matematica.htm>. Acesso em: 10 jun. 2015.

PATRONO, R. M. *A aprendizagem de números racionais na forma fracionária*. Disponível em: < http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2011/ Diss_Rosangela_ Milagres_Patrono.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2015.

POMMER, W. M.; POMMER, C. P. C. R. *Números racionais: uma perspectiva envolvendo as frações contínuas*. V Seminário de Educação Matemática de Nova Andradina. Mato Grosso do Sul 20132. Disponível em < http://www.uems.br/eventos/semana2013/arquivos/54_2013-08-08_08-35-33.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2015.

SMOLE, K. S. ET AL *Cadernos do Mathema: Jogos de matemática*. São Paulo, SP: Artmed, 2008.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; CANDIDO, P. *Cadernos do Mathema – Jogos de matemática de 6º ao 9º ano.* Porto Alegre, RS: Artmed Editora, 2007.

APÊDICE A – ALGUMAS QUESTÕES DA AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO (AAP) 1º SEMESTRE DE 2014

No primeiro semestre de 2014, a Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, enviou às escolas uma avaliação denominada Avaliação da Aprendizagem em Processo, que visa medir o conhecimento dos alunos, por escola, sobre os conteúdos de língua portuguesa e matemática. Essa avaliação é aplicada pelos professores das classes cujas aulas lhes foram atribuídas no início do ano. Depois de aplicada, essas provas são recolhidas pelo coordenador da escola, que monta uma equipe de correção e faz as devidas tabulações. Os resultados são, então, divulgados à comunidade e usados nas reuniões de planejamento para corrigir rumos e estabelecer metas. Tal avaliação contempla questões de conteúdos distintos e graus de dificuldade variados, buscando aferir a aquisição ou não de competências e habilidades indispensáveis para o sucesso escolar. Tal avaliação mostrou, na escola em que sou efetivo, que desde o 5º ano do ensino fundamental até o 3º ano do ensino médio, as frações constituem um entrave na compreensão matemática dos alunos, fazendo com que problemas simples sejam deixados em branco em questões de resolução aberta, ou então sejam respondidos aleatoriamente nos testes de múltipla escolha.

A seguir encontram-se três questões da avaliação mencionada e a respectiva tabulação dos dados observados. Essas questões constituem parte da avaliação aplicada às turmas do 9º ano do ensino fundamental e abordam sobre frações. O que se evidencia é o quão deficitária está a compreensão do tema por parte dos alunos.

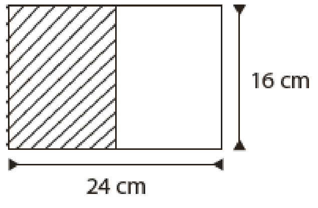
Questão 03: Os lados de um papel retangular medem 16 cm e 24 cm. Ele é cortado ao meio pelo lado maior, conforme indicado na figura. O número racional que representa a razão entre o lado menor e o lado maior da figura hachurada é:

(A) 2/3

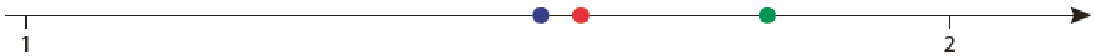
(B) 3/4

(C) 4/3

(D) 3/2



Questão 04: Os números A = 1,8; B = 8/5; C = 1,555... estão representados na reta numérica abaixo, mas não nessa ordem. Assinale, na reta, qual é o ponto que representa o número A, qual o que representa o número B e qual o que representa o número C. Explique o porquê de cada escolha.



Questão 08: A fração que representa 1,777... é

(A) 17/90

(B) 7/9

(C) 16/9

(D) 17/9

Tabela 1 – Tabulação das questões 3, 4 e 8 da AAP 1º semestre de 2014.

Quantidade de alunos avaliados: 56			Habilidades
Questão	Qtde de Acertos	% de Acertos	
3	11	20%	Compreender a ideia de número racional em sua relação com frações e as razões.
4	5	9%	Compreender a ideia de números racional em sua relação com frações e as razões. Saber manipular as diversas representações dos números racionais e representá-los na reta real.
8	12	21%	Conhecer as condições que fazem com que uma razão entre inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas. Saber calcular a fração geratriz de uma dízima.

Fonte: Elaborado pelo autor

Como mostra a tabela 1, as habilidades exigidas para essas questões era compreender a ideia de número racional em suas diferentes formas de representação, saber manipular esses números relacionando-os com a reta numérica, conhecer as condições que fazem com que uma razão entre inteiros possa se expressar por meio de dízimas periódicas e saber calcular a fração geratriz de uma dízima. Pode-se dizer que a exigência para resolução dessas questões era o domínio de conhecimentos básicos dos números racionais, necessários para a construção de um conceito numérico mais amplo e sólido.

Essas questões nos faz refletir também sobre a maneira como esse tópico tem sido abordado em sala de aula, uma vez que, no estudo da Matemática e principalmente das frações, o importante não é exigir do aluno a qualquer custo a memorização de conceitos e regras sem compreensão, mas sim possibilitar um aprendizado saudável em que o aluno participe do processo de aquisição do conhecimento, consciente de que está compreendendo o conteúdo e não simplesmente decorando sem que haja entendimento.

APÊNDICE B – RELAÇÕES

Neste apêndice é apresentada definições e propriedades que nos ajudarão compreender relações entre conjuntos e suas respectivas notações. Tais definições e propriedades são aqui apresentadas por terem sido utilizadas nesse trabalho na construção do conjunto dos números racionais.

Definição 1. O *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B, denotado por A × B, é o conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B. Em símbolos, A × B = {(a, b) : a ∈ A, b ∈ B}.

Definição 2. Sejam A e B conjuntos quaisquer, não necessariamente distintos. Uma *relação binária* de A em B é um subconjunto do produto cartesiano A × B.

Se R é uma relação binária de A em B, então R ⊆ A × B e, portanto os elementos de R são pares ordenados. Neste caso, A e B são chamados, respectivamente, *conjunto de partida* e *conjunto de chegada* da relação R.

Notação: Escreveremos aRb para indicar que o par $(a, b) \in R$.

Uma relação de um conjunto A em si mesmo é chamada *relação sobre A*.

Definição 3. Uma relação R sobre um conjunto A, não vazio, é uma *relação de equivalência* sobre A se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Reflexiva: $\forall\ a \in A$, aRa,

(ii) Simétrica: $\forall\ a, b \in A$, $aRb \Longrightarrow bRa$ e

(iii) Transitiva: $\forall\ a, b, c \in A$, $aRb\ e\ bRc \Longrightarrow aRc$.

Definição 4. Dada uma relação de equivalência R sobre um conjunto A e um elemento $a \in A$, chama-se *classe de equivalência determinada por* a, módulo R, e denota-se por $[a]_R$ o seguinte o subconjunto de A:

$$[a]_R = \{x \in A : xRa\}.$$

O conjunto das classes de equivalência é chamado de *conjunto quociente*.

Lema: Dada uma relação de equivalência R definida sobre um conjunto A não vazio e dois elementos $a, b \in A$, temos $[a]_R = [b]_R$ se, e somente se, aRb.

Demonstração: Suponha $[a]_R = [b]_R$. Temos $a \in [a]_R$, pois $a \in A$ e R satisfaz a propriedade reflexiva. Logo, $a \in [a]_R$ e, portanto $a \in [b]_R$, ou seja, aRb.

Reciprocamente, suponha que aRb. Se $x \in [a]_R$, então, por definição, xRa. Como xRa, aRb e R satisfaz a propriedade transitiva, segue que xRb. Logo, $x \in [b]_R$. Portanto, $[a]_R \subseteq [b]_R$. De modo análogo, obtemos $[b]_R \subseteq [a]_R$. Assim, conclui-se que $[a]_R = [b]_R$.

Definição 5. Uma relação R sobre um conjunto A, não vazio, é uma *relação de ordem parcial* (ou simplesmente *relação de ordem*) sobre A se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) Reflexiva: $\forall\, a \in A$, aRa,

(ii) Antissimétrica: $\forall\, a, b \in A$, $aRb \text{ } e \text{ } bRa \Longrightarrow a = b$ e

(iii) Transitiva: $\forall\, a, b, c \in A$, $aRb \text{ } e \text{ } bRc \Longrightarrow aRc$.

Notação: Quando R for uma relação de ordem parcial sobre um conjunto não vazio A, escreveremos $a \preccurlyeq b$ para exprimir que $(a, b) \in R$.

Definição 6. Seja R uma *relação de ordem parcial* sobre um conjunto não vazio A. Dizemos que R é uma *relação de ordem total* sobre A se, para quaisquer dois elementos $a, b \in A$, tem-se $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$.

Definição 7. Seja A um conjunto não vazio e R uma relação de $A \times A$ em A. Dizemos que R é uma *operação sobre A* se:

(i) Para todo $x = (a, b) \in A \times A$, existe $y \in A$, tal que xRy e

(ii) Para todos $x = (a, b) \in A \times A$; $y, z \in A$, se xRy e xRz, então $y = z$.

Notação: Quando R for uma operação sobre um conjunto não vazio A, em geral, denota-se R por $*$.