

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

MARILUCE DE OLIVEIRA SILVA

DO TRIÂNGULO À PIRÂMIDE DE PASCAL

Ilhéus-Bahia

2015

MARILUCE DE OLIVEIRA SILVA

DO TRIÂNGULO À PIRÂMIDE DE PASCAL

*Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da
Universidade Estadual de Santa Cruz.*

Orientador: Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer

*Co-Orientador: Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi
Arakawa*

*Ilhéus-Bahia
2015*

S586

Silva, Mariluce de Oliveira.
Do triângulo à pirâmide de Pascal / Mariluce de
Oliveira Silva. – Ilhéus, BA: UESC, 2015.
52f. : il.

Orientador: Germán Ignacio Gomero Ferrer.
Dissertação (mestrado) – Universidade Esta-
dual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em
Matemática.

Inclui referências.

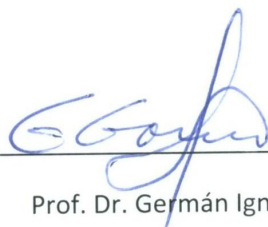
1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Equações
binomiais. 3. Triângulo de Pascal. I. Título.

CDD 510.07

MARILUCE DE OLIVEIRA SILVA

DO TRIÂNGULO À PIRÂMIDE DE PASCAL

Trabalho aprovado, Ilhéus, 24 de julho de 2015.



Prof. Dr. Germán Ignacio Gomero Ferrer

(Orientador)



Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa

(UESC)



Prof. Dr. Josaphat Ricardo Ribeiro Gouveia Júnior

(IFBA - Campus de Eunápolis)

À minha mãe.

Agradecimentos

Deus sempre foi muito generoso comigo. Mais uma vez me propiciando fazer um outro mestrado onde jamais imaginaria tamanho aprendizado. Os conhecimentos que obtive tiveram um sabor especial principalmente pelas pessoas que aqui conheci. Companheirismo, nobreza de sentimentos e novas e preciosas amizades conquistadas. Um agradecimento especial aos meus colegas de grupo de estudos: as incansáveis Nal e Lu, Regi o colega de fala tranquila e muita sensatez, Alê e Kal sempre com idéias criativas, Cláudio o menino geometria, Big e sua agilidade incomparável com combinatória, minha parceira de estudos e terapias, Carlinha. Mas ter o amigo fiel Jorge, Lorena, o mineirinho, Cezinha, Tororibes 1 e 2, os meninos de Eunápolis (Dilo, Aldo, Glaubinho e Fábio), nada teria a grandiosidade que teve se não fosse a presença de cada um deles. Agradecer a família que sempre soube entender minha ausência e ainda assim me apoiar. Aos professores do PROFMAT pela dedicação e disponibilidade durante todo o curso. Ao professor German pela orientação e paciência durante todo trabalho e ao meu coorientador Vinícius pela disponibilidade sempre. O apoio da escola também foi de grande relevância, de maneira especial a professora de biologia Amanda Mendes que disponibilizou seu tempo para tirar dúvidas bem como empréstimo de material, ao professor de desenho técnico Esequias que nos auxiliou na planificação e construção da pirâmide, a professora e irmã Annallena Guedes que escreve com um primor e técnica sem igual e a cada aluno do quarto ano de segurança de trabalho que se empenharam de maneira única em todas as atividades propostas na primeira unidade do curso na disciplina de Matemática. Meus sinceros agradecimentos a todos.

Resumo

Nesta dissertação estudamos o triângulo de Pascal, desde sua construção até a análise de alguns padrões encontrados nele; assim como a possibilidade de utilizar este triângulo em oficinas de matemática experimental com alunos do ensino médio. Identificando os elementos do triângulo Pascal com os números binomiais, e escrevendo estes números usando uma notação simétrica, é possível descrever os padrões observados como propriedades deles. Além disso, estendendo a notação simétrica dos números binomiais para descrever os números trinomiais, construímos a pirâmide de Pascal, que é uma versão tridimensional do triângulo de Pascal. Descrevemos também a inclusão de duas oficinas de matemática experimental com este conteúdo, realizada durante uma unidade letiva do ensino médio numa escola pública no sul da Bahia.

Palavras-chave: Números binomiais, triângulo de Pascal, números trinomiais e pirâmide de Pascal.

Abstract

In this dissertation we study Pascal's triangle, from its construction up to an analysis of some patterns found on it; as well as the possibility of using this triangle in experimental mathematics workshops with high school students. Identifying the elements of Pascal's triangle with the binomial coefficients, and writing them using a symmetric notation, it is possible to describe the observed patterns as algebraic properties of these numbers. In addition, extending the symmetric notation of the binomial coefficients to describe the trinomial coefficients, we construct the Pascal's pyramid, a 3-dimensional version of Pascal's triangle. We also describe the inclusion of two workshops of experimental mathematics containing these topics, executed during a bimester in a public high school in the south of Bahia.

Keywords: Binomial coefficients, Pascal's triangle, trinomial coefficients, Pascal's pyramid.

Sumário

Introdução	11
1 O triângulo de Pascal	13
1.1 Construção do triângulo de Pascal	13
1.2 Padrões elementares no triângulo de Pascal	15
1.3 Outras observações	18
2 Números binomiais	24
2.1 Definições dos números binomiais	24
2.2 Equivalência entre as definições	26
2.3 Algumas propriedades dos números binomiais	29
2.3.1 Propriedades elementares	29
2.3.2 Outras Propriedades	31
3 Os números trinomiais	34
3.1 Definições dos números trinomiais	34
3.2 Equivalência entre as definições	36
3.3 A Pirâmide de Pascal	38
4 Um relato de experiência	42
4.1 Descrição do Relato	42
4.2 Fatos Interessantes	45
5 Discussão e conclusões	51
5.1 Comentários sobre a parte matemática da dissertação	51
5.2 Resultados da experiência com os alunos	52
5.3 Considerações para o futuro	52

Introdução

O triângulo de Pascal não foi inventado pelo famoso matemático do século XVII, Blaise Pascal, nem por seu pai, Étienne Pascal, também matemático. Na verdade este triângulo já era conhecido pelos indianos, os chineses e os árabes desde tempos remotos; e no século que antecedeu Pascal, mais de uma dezena de matemáticos europeus trabalharam com o triângulo aritmético, como ele era conhecido. Porque então o nome “Triângulo de Pascal”?

Os primeiros registros do triângulo aritmético são atribuídos ao Matemático indiano Pingala, que viveu por volta de 200 aC. O documento chinês mais antigo que reporta o triângulo aritmético data de 1050 dC, enquanto sabe-se que os islâmicos conheciam este triângulo através dos escritos indianos datados de 1000 dC. O triângulo aritmético ficou conhecido como “Triângulo de Pascal” devido à monografia de cerca de sessenta páginas sobre este triângulo escrita por Blaise Pascal: “*Traité du triangle arithmétique*”, a qual foi publicada só postumamente, em 1665. Nesta monografia, Pascal introduziu o triângulo de um modo bem complicado e usando uma notação estritamente geométrica.

Objeto de estudo, motivação e definição do tema

O intuito desse trabalho é ajudar o professor a conduzir os seus alunos a aprender como realizar descobertas matemáticas utilizando o triângulo de Pascal; uma ferramenta de construção simples e muitas propriedades curiosas, capaz de despertar interesse e motivação pela matemática nos alunos. O artigo do Tom Davis [2] foi a motivação inicial para o nosso trabalho.

Estudar conceitos matemáticos com outras concepções me fizeram acreditar que a escolha em fazer o PROFMAT já teria valido a pena. Além disso, em MA 12, Matemática Discreta, pude também experimentar outra metodologia de trabalho, o que para nós professores de matemática é algo bem desafiador. No final dessa disciplina já imaginava por onde seria o meu passeio para desenvolver minha dissertação. Ao procurar o professor Germán Gomero Ferrer, ele me falou sobre suas pesquisas e me propôs três temas para que um deles fosse escolhido: i) Triângulo de Pascal; ii) Equações Recursivas; iii) Relação entre o Princípio de Indução, o Princípio da Boa Ordenação e o Teorema de Recursão. Com o pouco que conhecia de cada tema escolhi o triângulo de Pascal, pois o tema era o mais familiar e imaginei desenvolver algo que pudesse ser utilizado no ensino médio.

Trabalhar com uma estrutura de construção simples e que pudesse ser associada a outros conteúdos, enriquecendo as possibilidades de instrumentos para resolver problemas matemáticos foi um excelente atrativo naquele momento. O início da pesquisa despertou um encantamento inusitado devido à diversidade de informações que o triângulo de Pascal for-

nece. Uma variedade de temas transversais poderiam ser explorados neste trabalho. Quanto mais padrões encontrava, a busca por mais informações a respeito do triângulo de Pascal aumentava, o que acabou desvirtuando a idéia inicial do trabalho que era trabalhar com resolução de problemas. Foi então que surgiu o aparecimento de uma versão 3D do triângulo, a Pirâmide de Pascal, e decidimos fazer um longo passeio do triângulo à Pirâmide de Pascal.

Estrutura e Organização do trabalho

No primeiro capítulo descrevemos a construção do triângulo de Pascal de três maneiras, sendo que a segunda e terceira são apenas extensões da primeira, mais convenientes para certas aplicações. Apresentamos também uma lista de padrões elementares encontrados no triângulo de Pascal e argumentos que sustentam a validade destes argumentos usualmente observados em oficinas por alunos com pouca experiência em matemática experimental. E por fim, apresentamos uma lista de padrões no triângulo e resultados mais sofisticados, que não costumam ser observados por estes alunos, mas que esperamos que possam surgir em oficinas com alunos mais experientes.

No capítulo segundo, apresentamos uma notação simétrica para números binomiais, descrevemos quatro definições para estes números utilizando esta notação e apresentamos uma prova formal de que as quatro definições para números binomiais são equivalentes. Exibimos algumas propriedades dos números binomiais e suas respectivas demonstrações, onde algumas delas descrevem os padrões identificados no Capítulo 1.

No capítulo terceiro é feita a extensão dos números binomiais para os número trinomiais, apresentando quatro definições e a prova da equivalência entre elas, de maneira análoga ao que foi apresentado no capítulo anterior. Os números trinomiais são fundamentais para construirmos, nesse mesmo capítulo, a pirâmide de Pascal.

No quarto capítulo é feito um relato de experiência realizado durante uma unidade do ano letivo de 2015 no IFBA (Instituto Federal de Educação Tecnológica da Bahia) campus Ilhéus, numa turma de quarto ano do ensino médio, desde o processo de investigação de observações e curiosidades encontradas no triângulo de Pascal até a construção da pirâmide de Pascal numa oficina de encerramento da unidade.

Finalmente, no último capítulo, fazemos alguns comentários sobre os tópicos matemáticos apresentados, bem como as oficinas de matemática realizadas com os alunos do IFBA. Um outro fato discutido nesse capítulo foram alguns questionamentos que surgiram no decorrer do trabalho e possibilidades para trabalhos futuros.

Capítulo 1

O triângulo de Pascal

Enquanto no ensino médio o triângulo de Pascal é utilizado quase que exclusivamente para identificar os coeficientes da expansão do binômio de Newton, na verdade ele oferece muito mais possibilidades de aplicações; fornecendo assim um exemplo fantástico de como muitas áreas da matemática estão interligadas entre si, ou até mesmo de como a matemática está ligada a outras áreas. Assim, o objetivo deste capítulo é ilustrar a enorme gama de padrões que existem no triângulo de Pascal.

A apresentação é baseada no artigo de Tom Davis, [2], onde o autor descreve como usar o triângulo de Pascal em oficinas de Matemática Experimental, para estimular estudantes no processo de descoberta destes padrões e no desenvolvimento de argumentos que justifiquem suas observações. Na proposta de Davis, estes argumentos não precisam ser provas formais, mas devem ser convincentes e explicativos ao ponto de, em princípio, puderem ser transformados nelas.

Na Seção 1.1, descrevemos a construção do triângulo de Pascal de três maneiras, sendo que a segunda e terceira são apenas extensões da primeira, mais convenientes para certas aplicações. Na Seção 1.2, apresentamos uma lista de padrões elementares e seus argumentos correspondentes usualmente observados por alunos em oficinas com pouca experiência em matemática experimental. Por fim, na Seção 1.3, apresentamos uma lista de padrões no triângulo e resultados mais sofisticados, que não costumam ser observados por estes alunos, mas que esperamos que possam surgir em oficinas com alunos mais experientes.

1.1 Construção do triângulo de Pascal

Nesta seção descrevemos inicialmente a construção mais conhecida do triângulo de Pascal, usualmente utilizada por professores e alunos do ensino médio e apresentada na maioria dos livros didáticos. A seguir apresentamos outras duas construções, mais convenientes para certas aplicações como a construção do hexágono de Pascal [3], a generalização dos números binomiais para coeficientes negativos [4] e a relação entre o triângulo de Pascal e PA's de ordem maior ou igual 1, entre outras.

O triângulo de Pascal, na sua forma convencional, é um arranjo triangular infinito de números, uma parte do qual é mostrado na figura 1.1. Observe que ele é formado por fileiras de números. A primeira fileira, que constitui o vértice do arranjo, é formada apenas pelo

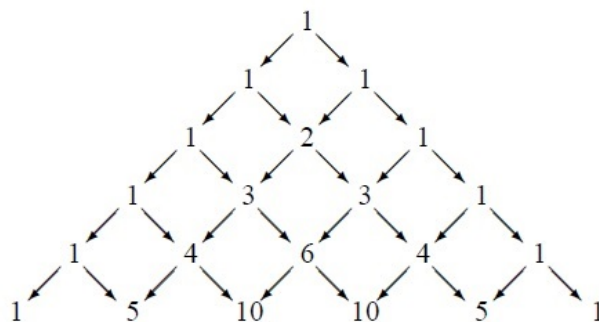


Figura 1.1: Triângulo de Pascal (Fonte: [2])

número 1. Cada uma das outras fileiras começa e termina em 1, e cada um dos outros números de cada fileira é a soma dos dois números vizinhos a ele na fileira imediatamente superior. Embora se apresente sempre apenas um arranjo finito de números, é conveniente enfatizar que o triângulo de Pascal é um arranjo infinito e continua sempre para baixo.

Há outras construções equivalentes do triângulo de Pascal; uma delas consiste em escrever o número 1 com uma linha infinita de zeros a cada lado. Cada linha inferior é construída usando a mesma prescrição que na construção original; isto é, cada número do arranjo é a soma dos dois números vizinhos a ele na linha imediatamente superior. Os números não nulos formam o triângulo de Pascal construído na prescrição original, como mostra a figura 1.2. Esta construção do triângulo de Pascal é usada para introduzir os números binomiais com índices inteiros (positivos ou negativos), necessários para a construção do hexágono de Pascal [4].

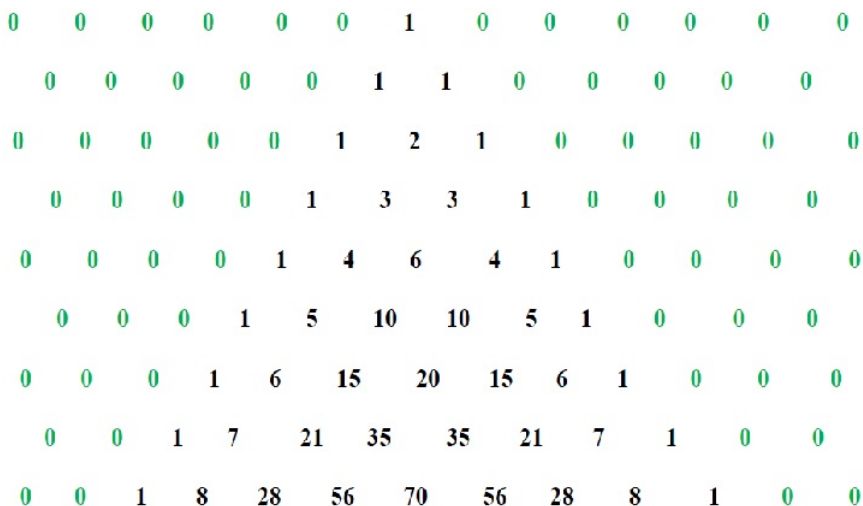


Figura 1.2: Triângulo de Pascal estendido

A terceira versão do triângulo de Pascal é na verdade um arranjo retangular e portanto sua construção segue um procedimento bem distinto das duas versões anteriores. Começamos escrevendo uma coluna de 1's. Cada elemento das colunas à direita desta primeira coluna é

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

Figura 1.3: Triângulo de Pascal na forma retangular

a soma de todos os elementos da coluna mais próxima à esquerda até o elemento que está localizado na mesma linha. Assim por exemplo, o elemento da quinta linha e quarta coluna é 35, que é a soma dos cinco primeiros termos da terceira coluna,

$$35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 .$$

Da figura 1.3 pode-se observar que girando o arranjo retangular 45° no sentido horário obtemos o triângulo de Pascal. Esta nova construção permite visualizar facilmente a regra do L, padrão observado no item 5 da próxima seção, e permite também perceber que as sequências paralelas aos lados do triângulo de Pascal, em sua forma convencional, são PA's de ordem maior ou igual a 1.

1.2 Padrões elementares no triângulo de Pascal

Nesta seção listamos alguns padrões do triângulo de Pascal usualmente identificados por alunos em oficinas de Matemática Experimental do tipo sugerido por Davis em [2]. Um exemplo deste tipo de experiência foi realizado no IFBA - Ilhéus durante uma unidade do ano letivo 2015 e é relatado no Capítulo 4. A lista que segue não é completa, mas representativa. Com ela é possível ter uma idéia do potencial que o triângulo de Pascal oferece para estabelecer conexões entre diversos tópicos de matemática.

Lembre que na proposta destas oficinas de Matemática Experimental procuramos incentivar os alunos a relatar qualquer padrão que eles consigam observar, até o mais óbvio. Nestas oficinas procuramos também estimular os alunos a desenvolverem argumentos convincentes que, a princípio, possam ser transformados em provas formais; mas estas provas formais não são exigidas pois alunos neste nível não possuem conhecimento técnico, nem maturidade necessária para desenvolver argumentos lógicos-dedutivos formais. No entanto, na Seção 2.3 oferecemos provas formais destes padrões, algumas das quais se deram dos argumentos apresentados a seguir.

1. Os números do triângulo de Pascal são positivos

Cada número do triângulo de Pascal é 1 ou a soma de dois números de uma linha superior. A primeira e segunda linhas são formadas apenas pelo número 1, ou seja, são formadas por números positivos. Cada elemento da terceira linha ou é 1 ou a soma de dois

números positivos; e portanto são positivos. Este argumento se repete para quarta linha e as seguintes.

2. O triângulo de Pascal é simétrico em relação à linha vertical que passa pelo vértice

Da figura 1.1 vemos que a linha 5 é simétrica. Vamos mostrar primeiro que a linha 6 também é simétrica sem escrevê-la explicitamente. Tomemos como exemplo, os terceiros elementos dessa linha da esquerda para direita e da direita para esquerda, como mostra o esquema abaixo,

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\ & & \square & & \square & & \otimes & & \square & & \otimes & & \square & & \square \end{array} \cdot$$

Pela maneira como o triângulo de Pascal é construído, esses elementos são determinados somando os segundos e terceiros elementos da esquerda para direita e da direita para esquerda da linha 5, respectivamente. Como a linha 5 é simétrica essas somas são iguais. Esse procedimento pode se repetir para quaisquer dois elementos em posições simétricas da linha 6, o que mostra que a linha 6 é simétrica. Já que a linha 6 é simétrica, podemos usar o mesmo procedimento para mostrar que a linha 7 também é simétrica. Claramente, podemos fazer isso em qualquer linha, desde que saibamos que a linha anterior seja simétrica, e portanto vemos que o triângulo de Pascal tem a simetria indicada.

3. A soma dos elementos de cada linha é uma potência de 2

Denotemos a primeira linha do triângulo de Pascal, a linha formada apenas pelo vértice, de “linha 0”, a segunda linha de “linha 1”, e assim por diante. Observa-se então que a soma dos números que formam a linha n é 2^n , pelo menos para $n = 0, 1, 2, \dots, 6$; esta observação pode ser descrita visivelmente como na figura 1.4.

<i>linha 0</i>	1	$= 2^0$
<i>linha 1</i>	1+1	$= 2^1$
<i>linha 2</i>	1+2+1	$= 2^2$
<i>linha 3</i>	1+3+3+1	$= 2^3$
<i>linha 4</i>	1+4+6+4+1	$= 2^4$
<i>linha 5</i>	1+5+10+10+5+1	$= 2^5$
<i>linha 6</i>	1+6+15+20+15+6+1	$= 2^6$

Figura 1.4: A soma dos termos de cada linha do triângulo de Pascal é uma potência de 2.

Observe por exemplo a linha número 6. Somando os termos desta linha, e levando em

conta a regra da construção do triângulo de Pascal temos,

$$\begin{aligned}
 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 &= 1 + (1 + 5) + (5 + 10) + (10 + 10) + \\
 &\quad (10 + 5) + (5 + 1) + 1 \\
 &= (1 + 1) + (5 + 5) + (10 + 10) + (10 + 10) + \\
 &\quad (5 + 5) + (1 + 1) \\
 &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \\
 &= 2 \cdot (1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1) .
 \end{aligned}$$

Vemos assim, que a soma dos termos da linha 6 é o dobro da soma dos termos da linha 5; e este argumento pode ser repetido para qualquer linha do triângulo de Pascal. Observe agora que a soma dos termos da linha 0 é $1 = 2^0$, ou seja, uma potência de 2. Como a soma dos termos de cada linha é o dobro da soma dos termos da linha anterior, e já vimos que para a linha 0 esta soma é uma potência de 2, segue-se que a soma dos termos da linha 1 é uma potência de 2, e daqui que a soma dos termos da linha 2 é uma potência de 2; e assim por diante, para cada linha do triângulo de Pascal a soma dos seus termos é uma potência de 2.

4. Se alternarmos os sinais dos números em qualquer linha a soma desses números será zero

Para linhas que tem uma quantidade par de elementos é fácil ver que a soma desses números é nula, pois com a alternância de sinais e a simetria em relação ao eixo vertical que passa pelo vértice, os números que aparecem em posições simétricas são sempre iguais. Se uma linha tiver uma quantidade ímpar de elementos o argumento é mais elaborado. Considere por exemplo as linhas número 5 e 6,

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & & -5 & & 10 & & -10 & & 5 & & -1 \\
 1 & & -6 & & 15 & & -20 & & 15 & & -6 & & 1
 \end{array} .$$

Escreva a soma dos termos da linha 6 (com sinais alternados), decompondo seus termos de acordo com o processo de construção do triângulo de Pascal, e depois reagrupe convenientemente, como se mostra a seguir,

$$\begin{aligned}
 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 &= 1 - (1 + 5) + (5 + 10) - (10 + 10) + \\
 &\quad (10 + 5) - (5 + 1) + 1 \\
 &= (1 - 1) + (-5 + 5) + (10 - 10) + \\
 &\quad (-10 + 10) + (5 - 5) + (-1 + 1) .
 \end{aligned}$$

Observe que esta soma é nula.

5. Regra do L

A soma dos elementos de uma sequência paralela a qualquer lado do triângulo a partir do número 1 é o número logo abaixo fazendo um giro de 90° para baixo formando um L,

como mostra a Figura 1.5. Utilizando a definição da construção do triângulo de Pascal em cada passo das expressões abaixo temos,

$$\begin{aligned} 35 &= 20 + 15 \\ &= 20 + (10 + 5) \\ &= 20 + [10 + (4 + 1)] . \end{aligned}$$

Intuitivamente podemos utilizar esse procedimento para qualquer sequência paralela a um lado do triângulo, como mostrado na Figura 1.5.

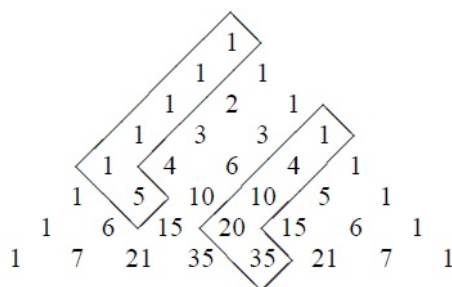


Figura 1.5: Regra do L.

Este procedimento informal conduz o raciocínio para uma prova por indução deste padrão quando visto como uma propriedade.

1.3 Outras observações

Nesta seção apresentamos observações um pouco mais sofisticadas relacionadas ao triângulo de Pascal. Algumas delas são padrões no triângulo, enquanto as outras estabelecem relações entre o triângulo de Pascal e outras áreas da matemática. O objetivo agora é apenas listá-las sem preocupação com justificativas ou provas, pois um tratamento adequado delas iria nos afastar dos objetivos deste trabalho.

1. Dada uma PA de grau maior ou igual a 1, o triângulo de Pascal permite encontrar a fórmula que gera essa sequência

Vamos descrever um procedimento para deduzir o termo genérico de uma PA, ou seja, de uma sequência em cujo esquema de diferenças consecutivas obtém-se uma sequência constante. Como é bem conhecido, se o operador de diferenças for aplicado n vezes até encontrarmos a sequência constante, a progressão aritmética será de ordem n ; equivalentemente, n será o número de filas acima da sequência constante.

Considere por exemplo a sequência

$$0 \quad 2 \quad 14 \quad 42 \quad 92 \quad 170 \quad 282 \quad \dots \quad . \tag{1.1}$$

O esquema das diferenças consecutivas mostra que ela é uma PA de ordem 3, pois o operador de diferenças foi aplicado três vezes até encontramos a sequência constante.

0	2	14	42	92	170	282	...
2	12	28	50	78	112	...	
10	16	22	28	34	...		
6	6	6	6	6	...		

Para encontrar o termo genérico da sequência (1.1) pegamos os primeiros termos de cada fila do esquema de diferenças e escrevemos a expressão

$$f(n) = 0 \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + 10 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3} .$$

Usando a expressão familiar

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!} + 10 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} + 6 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= n^3 + 2n^2 - n . \end{aligned}$$

Vale ressaltar que os números binomiais são justamente os elementos do triângulo de Pascal, como veremos no Capítulo 2.

2. As sequências paralelas aos lados do triângulo de Pascal são PA's

Observe as linhas paralelas aos lados laterais do triângulo.

1. Por exemplo, a terceira linha é formada pela sequência

$$[1 \ 3 \ 6 \ 10 \ 15 \ 21 \ \dots]$$

Esse números são chamados de números triangulares, pois determinam a quantidade de moedas utilizadas para formar um triângulo equilátero.



Figura 1.6: Números Triangulares (Fonte:[7])

2. Os números na seguinte linha paralela,

$$[1 \ 4 \ 10 \ 20 \ 35 \ \dots]$$

são chamados de números piramidais, pois determinam a quantidade de esferas empilhadas para formar uma pirâmide de base triangular.



Figura 1.7: Números Piramidais (Fonte:[8])

3. Estas duas seqüências estão associadas às figuras 1.6 no plano e 1.7 no espaço, respectivamente. Assim, a seqüência de números da segunda linha,

$$[1 \ 2 \ 3 \dots]$$

determinam arranjos de moedas em uma dimensão (arranjos lineares).

4. Podemos pensar então que as seqüências posteriores representam arranjos em dimensões superiores a 3.

Essas seqüências numéricas estão dispostas com outra abordagem e de maneira mais cuidadosa na dissertação de mestrado [1].

3. Sequência de Fibonacci.

Tomando as linhas inclinadas e somando os números que cruzam cada linha, obtemos os termos da seqüência de Fibonacci.

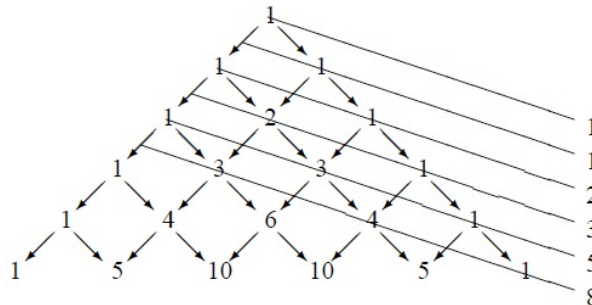


Figura 1.8: Sequência de Fibonacci(Fonte: [2])

4. Potências de 11

$$\begin{aligned} 11^0 &= 1 \\ 11^1 &= 11 \\ 11^2 &= 121 \\ 11^3 &= 1331 \\ 11^4 &= 14641 . \end{aligned}$$

Note que os algarismos nas potências pequenas de 11 correspondem as primeiras linhas do triângulo de Pascal. Mas cuidado com as potências maiores, por exemplo 11^5 , pois na linha 5 do triângulo de Pascal, há números com mais de um algarismo. Temos então, pelo desenvolvimento do binômio de Newton temos que,

$$11^5 = (10 + 1)^5 = 1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 10 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 161051 .$$

Note que para as potências de 101 e 1001 a idéia é análoga.

$$\begin{aligned} 101^0 &= 1 \\ 101^1 &= 101 \\ 101^2 &= 10201 \\ 101^3 &= 1030301 \\ 101^4 &= 104060401 \\ 101^5 &= 10510100501 . \end{aligned}$$

5. Um exemplo na trigonometria

Os coeficientes dos termos da $\tan n\alpha$ vistos de forma alternada (denominador - numerador) correspondem aos coeficientes do triângulo de Pascal

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \tan 3\alpha &= \frac{3t-t^3}{1-3t^2} \\ \tan 4\alpha &= \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4} \\ \tan 5\alpha &= \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4} , \end{aligned}$$

com $t = \tan \alpha$.

Mostramos uma prova informal dessa observação utilizando o caso particular $n = 4$. Usando a exponencial complexa

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha ,$$

temos

$$e^{4i\alpha} = \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha .$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} e^{i4\alpha} &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^4 \\ &= \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha + i(4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha) . \end{aligned}$$

Destas igualdades podemos afirmar,

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha &= \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ \sin 4\alpha &= 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha ; \end{aligned}$$

assim, como $\tan 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}$, dividindo numerador e denominador por $\cos^4 \alpha$ tem-se

$$\tan 4\alpha = \frac{4 \tan \alpha - 4 \tan^3 \alpha}{1 - 6 \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}.$$

Considerando $t = \tan \alpha$, encontramos a seguinte relação:

$$\tan 4\alpha = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4}$$

Note que os coeficientes, vistos de maneira alternada, denominador, numerador, denominador, numerador,...são exatamente os números do triângulo de Pascal de forma que os sinais dos termos do numerador e denominador se alternam.

6. Triângulo de Pascal módulo n.

Quando identificamos os números pares e ímpares do triângulo estamos separando os números do triângulo nos elementos do conjunto das classes módulo dois. Pintando esses dois elementos de cores diferentes, encontramos o fractal da figura abaixo.

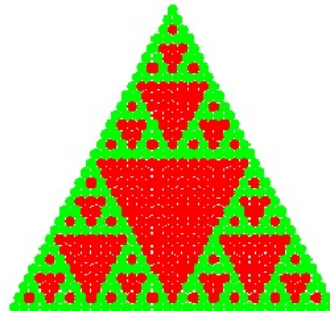


Figura 1.9: Fractal Módulo 2 (Fonte: [2])

O mesmo fenômeno é encontrado ao associarmos cada número aos elementos do conjunto das classes módulo três. Como pintamos apenas em duas cores distintas, temos os múltiplos de três de uma cor e os não múltiplos de outra cor.

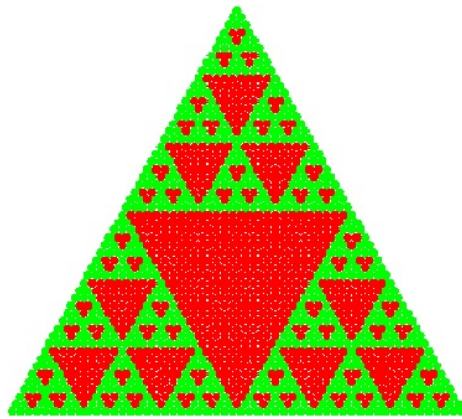


Figura 1.10: Fractal Módulo 3 (Fonte: [2])

Capítulo 2

Números binomiais

Neste capítulo apresentamos uma notação alternativa para os números binomiais, a notação simétrica, e com ela escrevemos quatro definições equivalentes para estes números. Termos várias definições equivalentes dos números binomiais é muito conveniente, pois isso fornece várias propriedades que os caracterizam; e assim, dada uma situação ou problema podemos utilizar a definição (a propriedade) mais adequada para sua resolução. Além disso, termos duas notações para os números binomiais é vantajoso, pois há situações onde uma delas é mais conveniente do que a outra.

Na Seção 2.1 apresentamos a notação simétrica para números binomiais e descrevemos quatro definições para números binomiais utilizando esta forma. Na Seção 2.2 apresentamos uma prova formal de que estas quatro definições para números binomiais são equivalentes. Na Seção 2.3 exibimos algumas propriedades dos números binomiais e suas respectivas demonstrações. Algumas destas propriedades correspondem aos padrões elementares identificados no triângulo de Pascal do Capítulo 1.

2.1 Definições dos números binomiais

A maneira mais usual de introduzir os números binomiais no ensino médio é denotá-los por $\binom{n}{r}$, e defini-los como sendo o número de combinações possíveis de r elementos tomados de um conjunto de n elementos; ou equivalentemente, como a quantidade de subconjuntos de r elementos que há num conjunto de n elementos. Desta última definição se segue imediatamente que

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Esta igualdade justifica uma notação simétrica para os números binomiais, $\binom{n}{r \ s}$, onde r e s são números inteiros não negativos tais que, $r + s = n$.

Esta notação é essencial na construção deste trabalho, a vantagem de utilizá-la é poder-mos definir os números trinomiais como será feito no Capítulo 3, etapa fundamental para trabalhar conceitos matemáticos como o trinômio de Newton e a construção da Pirâmide de Pascal, tema culminante desta dissertação. Assim, nesta seção apresentamos quatro definições equivalentes dos números binomiais usando a notação simétrica.

A primeira definição consiste na descrição das regras da construção do triângulo de Pascal. Com esta definição estabelecemos que os números binomiais são os números do triângulo de Pascal. Nesta descrição, $\binom{n}{r\ s}$ é o termo na posição r , contando a partir de 0 e começando pela esquerda, na fila n do triângulo de Pascal; ou equivalentemente, na posição s , contando a partir de 0 e começando pela direita.

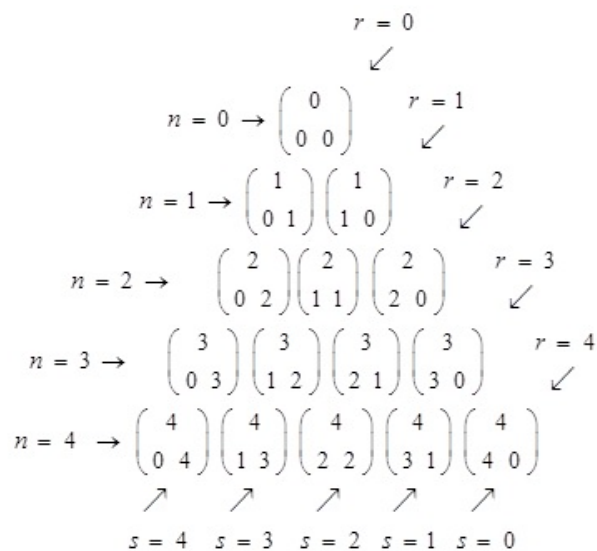


Figura 2.1: Triângulo de Pascal e os números binomiais na forma simétrica (Fonte: [6])

Observe que o triângulo de Pascal, na sua forma convencional, é formado por fileiras, sendo que:

- Os extremos de cada fileira são formados pelo número 1;
- Cada número do interior de cada fileira é a soma dos dois números superiores mais próximos.

Assim denotamos a primeira fileira com o índice $n = 0$, a segunda $n = 1$, e assim por diante. A descrição formal dessa construção leva a seguinte definição recursiva.

Definição 2.1 (Recursiva) Para cada n inteiro não negativo, os números binomiais são definidos pela recursão

- $n \geq 0$

$$\binom{n}{0\ n} = \binom{n}{n\ 0} = 1.$$

- $n \geq 2$, e $r, s \geq 1$

$$\binom{n}{r\ s} = \binom{n-1}{r-1\ s} + \binom{n-1}{r\ s-1}.$$

A definição seguinte considera os coeficientes binomiais como sendo os coeficientes da expansão das potências naturais do binômio $(a + b)$. Nesta descrição, $\binom{n}{r \ s}$ é o coeficiente do termo $a^r b^s$ na expansão da potência $(a + b)^n$.

Definição 2.2 (Algébrica) Os números binomiais são os coeficientes da expansão do binômio de Newton, ou seja

$$(a + b)^n = \sum \binom{n}{r \ s} a^r b^s .$$

Na terceira definição relacionamos os números binomiais $\binom{n}{r \ s}$ com a seguinte situação combinatória. Dadas n bolas enumeradas e duas caixas também enumeradas, os números binomiais são a quantidade de maneiras de colocar r bolas na caixa 1 e s bolas na caixa 2, denotada por $C_n^{r,s}$, com $r + s = n$.

Definição 2.3 (Combinatória) Se $C_n^{r,s}$ é o número de maneiras de colocar r bolas na caixa 1 e s bolas na caixa 2, dadas n bolas, então

$$\binom{n}{r \ s} = C_n^{r,s} .$$

A última definição é uma fórmula que fornece o valor dos números binomiais.

Definição 2.4 (Fórmula) Os números binomiais são definidos pela fórmula

$$\binom{n}{r \ s} = \frac{n!}{r!s!} ,$$

com $n = r + s$ e $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

2.2 Equivalência entre as definições

Nesta seção mostramos que as quatro definições apresentadas na seção anterior são equivalentes. A demonstração segue a cadeia de implicações

$$\text{Def. 2.1} \implies \text{Def. 2.2} \implies \text{Def. 2.3} \implies \text{Def. 2.4} \implies \text{Def. 2.1} .$$

Def. 2.1 \implies Def. 2.2. Queremos mostrar que se os números binomiais são definidos recursivamente, então eles fornecem os coeficientes da expansão do binômio $(a + b)^n$. Em outras palavras, escrevendo

$$(a + b)^n = \sum N_n^{r,s} a^r b^s ,$$

vamos mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale

$$N_n^{r,s} = \binom{n}{r \ s} ,$$

onde o símbolo $\binom{n}{r \ s}$ obedece a recursão dada na Definição 2.1. A prova procede por indução sobre o expoente n .

1. Como $(a + b)^0 = 1$, pela condição inicial da recursão para $n = 0$ temos

$$N_0^{0,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \end{pmatrix} = 1 .$$

2. Suponha, por hipótese que

$$N_n^{r,s} = \begin{pmatrix} n \\ r \ s \end{pmatrix} ,$$

queremos então mostrar que

$$N_{n+1}^{r,s} = \begin{pmatrix} n+1 \\ r \ s \end{pmatrix} .$$

Por hipótese podemos escrever

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \begin{pmatrix} n \\ n \ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \ 1 \end{pmatrix} a^{n-1} b + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \ 2 \end{pmatrix} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \begin{pmatrix} n \\ 2 \ n-2 \end{pmatrix} a^2 b^{n-2} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \ n-1 \end{pmatrix} a b^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 0 \ n \end{pmatrix} b^n . \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \left[\begin{pmatrix} n \\ n \ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \ 1 \end{pmatrix} a^{n-1} b + \begin{pmatrix} n \\ n-2 \ 2 \end{pmatrix} a^{n-2} b^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \begin{pmatrix} n \\ 2 \ n-2 \end{pmatrix} a^2 b^{n-2} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \ n-1 \end{pmatrix} a b^{n-1} + \begin{pmatrix} n \\ 0 \ n \end{pmatrix} b^n \right] \\ &= \begin{pmatrix} n \\ n \ 0 \end{pmatrix} a^{n+1} + \left[\begin{pmatrix} n \\ n-1 \ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n \ 0 \end{pmatrix} \right] a^n b + \\ &\quad \left[\begin{pmatrix} n \\ n-2 \ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ n-1 \ 1 \end{pmatrix} \right] a^{n-1} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \left[\begin{pmatrix} n \\ 0 \ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \ n-1 \end{pmatrix} \right] a b^n + \begin{pmatrix} n \\ 0 \ n \end{pmatrix} b^{n+1} . \end{aligned}$$

Esta última expressão pode ser simplificada usando a definição recursiva dos números binomiais, obtendo como resultado

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \ 0 \end{pmatrix} a^{n+1} + \begin{pmatrix} n+1 \\ n \ 1 \end{pmatrix} a^n b + \begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \ 2 \end{pmatrix} a^{n-1} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \begin{pmatrix} n+1 \\ n \ 1 \end{pmatrix} a^n b + \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \ 0 \end{pmatrix} a^{n+1} . \end{aligned}$$

Comparando com a expansão do binômio $(a + b)^{n+1}$ tem-se que

$$N_{n+1}^{r,s} = \begin{pmatrix} n+1 \\ r \ s \end{pmatrix} ,$$

que era o que queríamos provar.

Pelo Princípio de Indução segue-se que

$$N_n^{r,s} = \binom{n}{r \ s}$$

vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Def. 2.2 \implies **Def. 2.3.** Queremos mostrar que dadas n bolas, os coeficientes da expansão do binômio de Newton $(a + b)^n$ determinam a quantidade de maneiras de colocar r bolas na caixa 1 e s bolas na caixa 2, onde $n = r + s$. Iremos analisar inicialmente a potência $(a + b)^4$. Note que, dispensando por um momento a comutatividade da multiplicação,

$$\begin{aligned} (a + b)^4 &= (a + b)(a + b)(a + b)(a + b) \\ &= aaaa + (aaab + aaba + abaa + baaa) \\ &\quad + (aabb + abab + abba + baab + baba + bbaa) \\ &\quad + (abbb + babb + bbab + bbba) + bbbb . \end{aligned}$$

Assim cada termo é dado pelo produto de quatro letras escolhidas do conjunto $\{a, b\}$. Veja que se tomarmos todas as permutações de um a e três b 's, escrevendo da forma ab^3 , temos que a quantidade de termos será dada pela combinação dessas letras, ou seja, $C_4^{1,3}$, que denota a quantidade de maneiras de colocar 1 bola na caixa "a" e três bolas na caixa "b". Do mesmo modo se tomarmos $(a + b)^6$ temos,

$$(a + b)(a + b) \cdots (a + b)$$

seis vezes. Como exemplo, o coeficiente de a^4b^2 é o número de termos que obtemos ao permutarmos sequência $aaaabb$, ou seja, $C_6^{4,2}$. Podemos então dizer que cada coeficiente dos termos do binômio $(a + b)^n$ que é dado pelo número binomial $\binom{n}{r \ s}$ é o número de maneiras de colocar r bolas na caixa "a" e s bolas na caixa "b", ou seja, o coeficiente do termo $a^r b^s$ é dado por $C_n^{r,s}$.

Def. 2.3 \implies **Def. 2.4.** Observar que para determinar o número de maneiras de colocar r bolas na caixa 1 e s bolas na caixa 2, devemos determinar de quantas maneiras diferentes podemos escolher r bolas, dentre uma coleção de n bolas, e este número denotado por $C_n^{r,s}$, com $r + s = n$, pela fórmula $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ como se prova na disciplina de Matemática Discreta.

Def. 2.4 \implies **Def. 2.1.** Vamos mostrar que os números binomiais dados pela expressão (2.4) Satisfazem a relação recursiva da Definição 2.1. A condição inicial é imediata pois,

$$\binom{n}{n \ 0} = \frac{n!}{n! \ 0!} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{0 \ n} = \frac{n!}{0! \ n!} = 1 .$$

Observe agora que

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{r-1 \quad s} + \binom{n-1}{r \quad s-1} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!s!} + \frac{(n-1)!}{r!(s-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!s!} \cdot \frac{nr}{nr} + \frac{(n-1)!}{r!(s-1)!} \cdot \frac{ns}{ns} \\
 &= \frac{n!}{r!s!} \\
 &= \binom{n}{r \quad s};
 \end{aligned}$$

onde na passagem da segunda linha para a terceira usamos a relação $r + s = n$.

2.3 Algumas propriedades dos números binomiais

As definições apresentadas na Seção 2.1 utilizam a notação simétrica. Esta notação é muito conveniente para definirmos os números trinomiais, etapa essencial para o desenvolvimento do trinômio de Newton, além da pirâmide de Pascal. Esses três elementos são apresentados no Capítulo 3.

Na Subseção 2.3.1 demonstramos formalmente que os padrões no triângulo de Pascal, observados no Capítulo 1, são propriedades gerais. No entanto, não podemos perder de vista a grande utilidade da notação convencional dos números binomiais $\binom{n}{r}$; em certas situações como mostrado na Subseção 2.3.2 esta notação permite visualizar de modo mais claro certas identidades algébricas.

2.3.1 Propriedades elementares

Mostramos nesta seção as cinco propriedades elementares do triângulo de Pascal apresentadas na Seção 1.2.

1. Os números do triângulo de Pascal são positivos.

De fato, utilizando a Definição 2.4, temos que os números binomiais são dados pela razão entre dois números positivos, ou seja,

$$\binom{n}{r \quad s} = \frac{n!}{r!s!} > 0.$$

Observe que esta propriedade também pode ser demonstrada usando outras definições.

2. O triângulo de Pascal é simétrico em relação à linha vertical que passa pelo vértice.

De fato, a notação simétrica que é utilizada para os números binomiais já nos ajuda a justificar essa propriedade pois, utilizando novamente a Definição 2.4 temos,

$$\binom{n}{r \quad s} = \frac{n!}{r!s!} = \frac{n!}{s!r!} = \binom{n}{s \quad r}.$$

3. A soma dos elementos de cada linha é uma potência de 2.

Algebricamente, esta propriedade diz que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Apresentamos duas provas desta identidade. Na primeira delas basta tomar $a = b = 1$ na expansão do binômio de Newton,

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Uma outra maneira é percebermos que cada coeficiente binomial $\binom{n}{r}$ corresponde ao número de subconjuntos de r (ou s) elementos de um conjunto com n elementos. Assim a soma

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

corresponde a quantidade de todos os subconjuntos possíveis (subconjuntos com zero elementos mais os subconjuntos com um elemento mais os subconjuntos com dois elementos, e assim por diante) de um conjunto de n elementos. Mas lembre-se que essa quantidade na teoria dos conjuntos é dada pela potência 2^n .

4. Se alternarmos os sinais dos números de qualquer linha a soma desses números será zero.

Algebricamente esta propriedade diz que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Para mostrar esta propriedade basta reescrever a expressão do lado esquerdo utilizando a forma recursiva,

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{0} - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] - \\ & \dots + (-1)^{n-1} \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right] + (-1)^n \binom{n-1}{n-1}, \end{aligned}$$

e reagrupar os termos para obter

$$\begin{aligned} & \left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{0} \right] + \left[-\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{1} \right] + \dots \\ & + (-1)^{n-1} \left[-\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-2} \right] + (-1)^n \left[-\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-1} \right], \end{aligned}$$

onde claramente se percebe que cada colchete é nulo. Uma outra maneira de mostrarmos essa propriedade é tomarmos $a = 1$ e $b = -1$ na expansão do binômio de Newton,

$$(1 - 1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

5. Regra do L

Algebricamente esta propriedade diz que para todo $n, k \in \mathbb{N}$ vale,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

A prova é dada pelo princípio de indução em k .

(a) Fazendo $k = 0$ tem-se,

$$\binom{n}{0} = 1,$$

condição inicial da definição de recursividade. Utilizando o mesmo argumento podemos concluir também

$$\binom{n+1}{0} = 1$$

O que prova a primeira condição da indução.

(b) Suponha, por hipótese de indução, que a expressão abaixo é válida para qualquer k , ou seja,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

Queremos mostrar que a expressão é válida para $k+1$. Usando a relação recursiva, temos então que,

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} &= \\ \binom{n+k+1}{k} + \binom{n+k+1}{k+1} &= \binom{n+k+2}{k+1} \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

2.3.2 Outras Propriedades

Nesta seção mostramos outras propriedades envolvendo números binomiais e o triângulo de Pascal. A primeira propriedade pode ser rapidamente identificada como um padrão no triângulo, como mostra a figura 2.2. Os padrões correspondentes às outras duas propriedades não são de fácil visualização.

1. Soma dos quadrados dos termos de cada linha

Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale,

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Apresentamos uma prova combinatória analisando por separado os dois lados da igual-

				1					
			1	1					
		1	2	1					
	1	3	3	1					
	1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
	1	7	21	35	35	21	7	1	
	1	8	28	56	70	56	28	8	1
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Figura 2.2: Soma dos quadrados de cada linha (Fonte:[2])

dade.

- (a) O número $\binom{2n}{n}$ representa o número de subconjuntos de n elementos num conjunto de $2n$ elementos.
- (b) Seja $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$ um conjunto com $2n$ elementos e considere os subconjuntos $A' = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ e $A'' = \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$; temos $A' \cup A'' = A$ e $A' \cap A'' = \emptyset$.

Note que o número binomial $\binom{n}{k}$ fornece a quantidade de subconjuntos de k elementos em A' , e $\binom{n}{n-k}$ o número de subconjuntos de $n - k$ elementos em A'' . Como $A' \cup A'' = A$, então o número de subconjuntos de n elementos de A , sendo que k deles estão em A' , é dado pelo produto

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2.$$

Fazendo k variar de 0 a n , temos que o número de subconjuntos com n elementos de A é dado pela soma

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$

Os itens (a) e (b) nos fornecem duas expressões para calcular a mesma quantidade; o número de subconjuntos com n elementos de A , e portanto são iguais.

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale,

$$0 \binom{n}{0} + 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

Apresentamos uma prova que usa o cálculo diferencial. Derivando a expansão do binômio de Newton

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n,$$

temos,

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2}x + \dots + n \binom{n}{n}x^{n-1}.$$

Fazendo nesta expressão $x = 1$, obtemos

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n}.$$

3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale,

$$\frac{1}{1} \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \frac{1}{3} \binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Apresentamos uma prova que usa o cálculo integral. Tomemos novamente a expressão

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n,$$

mas desta vez integremos, obtendo,

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \binom{n}{0}x + \frac{1}{2} \binom{n}{1}x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n}x^{n+1} + C.$$

Fazendo $x = 0$ temos que $C = \frac{1}{n+1}$, e assim podemos reescrever a expressão integrada como

$$\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} = \binom{n}{0}x + \frac{1}{2} \binom{n}{1}x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n}x^{n+1} + \frac{1}{n+1}.$$

Fazendo $x = 1$ nesta última igualdade obtemos

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \binom{n}{1} + \dots + \frac{1}{n+1} \binom{n}{n}.$$

Capítulo 3

Os números trinomiais

Resulta natural estender o símbolo $\binom{n}{r s}$ para $\binom{n}{r s t}$, estendendo também as restrições $r, s \geq 0$ e $r + s = n$ para $r, s, t \geq 0$ e $r + s + t = n$ com n, r, s , e t inteiros não negativos. Na Seção 3.1 vamos definir uma família de números, denotada por este símbolo, de maneira análoga a como definimos os números binomiais, e vamos chamá-los de números trinomiais. A prova de equivalência destas definições é feita na seção 3.2; e na Seção 3.3 usamos estes números e a definição recursiva para a construir a pirâmide Pascal, em completa analogia com o triângulo de Pascal.

3.1 Definições dos números trinomiais

A primeira definição determina que, essencialmente, um número trinomial é a soma de alguns elementos anteriores. Escrevemos três condições para o símbolo $\binom{n}{r s t}$, duas das quais são “condições iniciais”.

Definição 3.1 (Recursiva) O elemento $\binom{n}{r s t}$ com n, r, s e t inteiros não negativos e $r + s + t = n$ é um número definido por,

- $n \geq 0$

$$\binom{n}{n 0 0} = \binom{n}{0 n 0} = \binom{n}{0 0 n} = 1.$$

- $n \geq 2$, e $r, s \geq 1$

$$\binom{n}{r s 0} = \binom{n-1}{r-1 s 0} + \binom{n-1}{r s-1 0},$$

valendo igualdades análogas quando $s = 0$ e $r, t \geq 1$, e quando $r = 0$ e $s, t \geq 1$.

- $n \geq 3$, e $r, s, t \geq 1$

$$\binom{n}{r s t} = \binom{n-1}{r-1 s t} + \binom{n-1}{r s-1 t} + \binom{n-1}{r s t-1}.$$

A segunda definição considera os coeficientes trinomiais como sendo os coeficientes da expansão das potências naturais do trinômio $(a + b + c)$. Nesta descrição, $\binom{n}{r \ s \ t}$ é o coeficiente do termo $a^r b^s c^t$ na expansão da potência $(a + b + c)^n$.

Definição 3.2 (Algébrica) Os números trinomiais são os coeficientes da expansão do trinômio de “Newton”, ou seja,

$$(a + b + c)^n = \sum_{r,s,t} \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^s c^t ,$$

onde a soma se estende a todos os números inteiros $r, s, t > 0$ tais que $r + s + t = n$.

Na terceira definição relacionamos os números trinomiais $\binom{n}{r \ s \ t}$ com a seguinte situação combinatória. Dadas n bolas enumeradas e três caixas também enumeradas, os números trinomiais são a quantidade de maneiras de colocar r bolas na caixa 1, s bolas na caixa 2 e t bolas na caixa 3, denotada por $C_n^{r,s,t}$, com $r + s + t = n$.

Definição 3.3 (Combinatória) Se $C_n^{r,s,t}$ é o número de maneiras de colocar r bolas na caixa 1, s na caixa 2 e t na caixa 3, dadas n bolas, então

$$\binom{n}{r \ s \ t} = C_n^{r,s,t}$$

Na última definição iremos determinar uma fórmula que fornece o valor dos números trinomiais.

Definição 3.4 (Fórmula) Os números trinomiais são definidos pela fórmula

$$\binom{n}{r \ s \ t} = \frac{n!}{r! \ s! \ t!} ,$$

com $n = r + s + t$ e $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Da mesma forma que a notação usada para os números binomiais reflete uma propriedade de simetria, a notação dos números trinomiais reflete a seguinte propriedade,

$$\binom{n}{r \ s \ t} = \binom{n}{r \ t \ s} = \binom{n}{s \ r \ t} = \binom{n}{s \ t \ r} = \binom{n}{t \ r \ s} = \binom{n}{t \ s \ r} ,$$

que fica evidente ao olharmos para a última definição.

3.2 Equivalência entre as definições

Nesta seção mostramos que as quatro definições apresentadas na seção anterior são equivalentes. A demonstração segue a cadeia de implicações

$$\text{Def. 3.1} \implies \text{Def. 3.2} \implies \text{Def. 3.3} \implies \text{Def. 3.4} \implies \text{Def. 3.1} .$$

Def. 3.1 \implies **Def. 3.2.** Queremos mostrar que se os números trinomiais são definidos recursivamente, então eles são os coeficientes da expansão do trinômio $(a + b + c)^n$. Para isto escrevemos

$$(a + b + c)^n = \sum N_n^{r,s,t} a^r b^s c^t ,$$

e mostramos que para todo $n \in \mathbb{N}$ os coeficientes $N_n^{r,s}$ são os números trinomiais, ou seja,

$$N_n^{r,s,t} = \binom{n}{r \ s \ t} ,$$

onde o símbolo $\binom{n}{r \ s \ t}$ obedece a recursão dada na Definição 3.1. A prova procede por indução sobre o expoente n .

1. Como $(a + b + c)^0 = 1$, pela condição inicial da recursão para $n = 0$ temos

$$N_0^{0,0,0} = \binom{0}{0 \ 0 \ 0} = 1 .$$

2. Suponha, por hipótese que

$$N_n^{r,s,t} = \binom{n}{r \ s \ t} ,$$

Queremos mostrar que

$$N_{n+1}^{r,s,t} = \binom{n+1}{r \ s \ t} .$$

Segue então,

$$\begin{aligned} (a + b + c)^{n+1} &= (a + b + c)(a + b + c)^n \\ &= (a + b + c) \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^s c^t \\ &= a \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^s c^t + b \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^s c^t + c \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^s c^t \\ &= \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^{r+1} b^s c^t + \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^{s+1} c^t + \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^s c^{t+1} \end{aligned}$$

De maneira análoga ao que foi feito na demonstração para o binômio temos que

existem u, v e w tal que a última expressão pode ser escrita como,

$$\binom{n+1}{n+1 \ 0 \ 0} a^{n+1} + \binom{n+1}{0 \ n+1 \ 0} b^{n+1} + \binom{n+1}{0 \ 0 \ n+1} c^{n+1} + \\ \sum_{u,v=1}^{n+1} \binom{n+1}{u \ v \ 0} a^u b^v + \sum_{u,v=1}^{n+1} \binom{n+1}{u \ 0 \ v} a^u c^v + \sum_{u,v=1}^{n+1} \binom{n+1}{0 \ u \ v} b^u c^v + \\ \sum_{u,v,w=1}^{n+1} \binom{n+1}{u \ v \ w} a^u b^v c^w$$

Def. 3.2 \implies **Def. 3.3.** Considere que os coeficientes da expansão do trinômio são números trinômiais, ou seja,

$$(a + b + c)^n = \sum \binom{n}{r \ s \ t} a^r b^s c^t,$$

queremos mostrar que

$$\binom{n}{r \ s \ t} = C_n^{r,s,t}$$

Analisemos, por exemplo, o trinômio de expoente 9

$$(A + B + C)^9 = (A + B + C) \cdot (A + B + C) \cdot \dots \cdot (A + B + C) = \dots$$

Cada termo desse produto é dado pela combinação de A 's, B 's e C 's em nove posições. Por exemplo,

$$A B C A B C C A C.$$

Se tomarmos todas as combinações de $3A$'s, $2B$'s e $4C$'s temos,

$$C_9^{3,2,4} A^3 B^2 C^4.$$

De acordo com a Definição 3.3, a combinação citada determina o número de possibilidades de dadas de colocarmos 3 bolas na caixa A , 2 bolas na caixa B e 4 caixas na bola C . Claramente podemos fazer isso com todos os termos da expansão $(A + B + C)^9$. Generalizando, cada coeficiente da expansão do trinômio $(A + B + C)^n$ é dado por

$$C_n^{r,s,t} A^r B^s C^t.$$

Def. 3.3 \implies **Def. 3.4** Vamos provar que se

$$\binom{n}{r \ s \ t} = C_n^{r,s,t}$$

então

$$\binom{n}{r \ s \ t} = \frac{n!}{r! s! t!}.$$

Se tivermos então n bolas e quisermos distribuir r na caixa A , s na caixa B e t na caixa C , temos pelo Princípio Multiplicativo

$$C_n^{r \ s \ t} = C_r^n \cdot C_{n-r}^s \cdot C_{n-(r+s)}^t.$$

Como por hipótese temos,

$$\binom{n}{r \ s \ t} = C_n^{r \ s \ t},$$

obtemos então

$$\begin{aligned} \binom{n}{r \ s \ t} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{s!(n-r-s)!} \cdot \frac{(n-r-s)!}{t!(n-r-s-t)!} \\ &= \frac{n!}{r! \ s! \ t!}, \end{aligned}$$

onde a última linha é obtida usando a restrição $n = r + s + t$.

Def. 3.4 \implies **Def. 3.1.** Vamos mostrar que os números trinomiais dados pela expressão (3.4) satisfazem a relação recursiva da Definição 3.1. A primeira condição é imediata pois,

$$\binom{n}{n \ 0 \ 0} = \frac{n!}{n! \ 0! \ 0!} = 1 \quad , \quad \binom{n}{0 \ n \ 0} = \frac{n!}{0! \ n! \ 0!} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{0 \ 0 \ n} = \frac{n!}{0! \ 0! \ n!} = 1 .$$

A segunda condição é análoga ao caso dos números binomiais,

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1 \ s \ 0} + \binom{n-1}{r \ s-1 \ 0} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! \ s! \ 0!} + \frac{(n-1)!}{r! \ (s-1)! \ 0!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! \ s! \ 0!} \cdot \frac{nr}{nr} + \frac{(n-1)!}{r! \ (s-1)! \ 0!} \cdot \frac{ns}{ns} \\ &= \frac{n!}{r! \ s! \ 0!} \\ &= \binom{n}{r \ s \ 0}; \end{aligned}$$

onde na passagem da segunda linha para a terceira usamos a relação $r + s = n$. Por último, para a terceira condição temos

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{r-1 \ s \ t} + \binom{n-1}{r \ s-1 \ t} + \binom{n-1}{r \ s \ t-1} &= \\ \frac{(n-1)!}{(r-1)! \ s! \ t!} \cdot \frac{nr}{nr} + \frac{(n-1)!}{r! \ (s-1)! \ t!} \cdot \frac{ns}{ns} + \frac{(n-1)!}{r! \ s! \ (t-1)!} \cdot \frac{nt}{nt} &= \frac{n! \ (r+s+t)}{r! \ s! \ t! \ n} \\ &= \frac{n!}{r! \ s! \ t!} \\ &= \binom{n}{r \ s \ t}. \end{aligned}$$

3.3 A Pirâmide de Pascal

A pirâmide de Pascal é uma versão em três dimensões do triângulo de Pascal, onde cada camada da pirâmide corresponde a uma linha do triângulo, e cada elemento do interior da pirâmide é calculado somando os números vizinhos de cada camada imediatamente superior.

Lembremos que os elementos do triângulo de Pascal podem ser representados pelos números binomiais $\binom{n}{r\ s}$ onde n indica a linha e r e s as linhas (sequências) paralelas aos lados. Por uma questão de comodidade na leitura repetimos a figura abaixo.

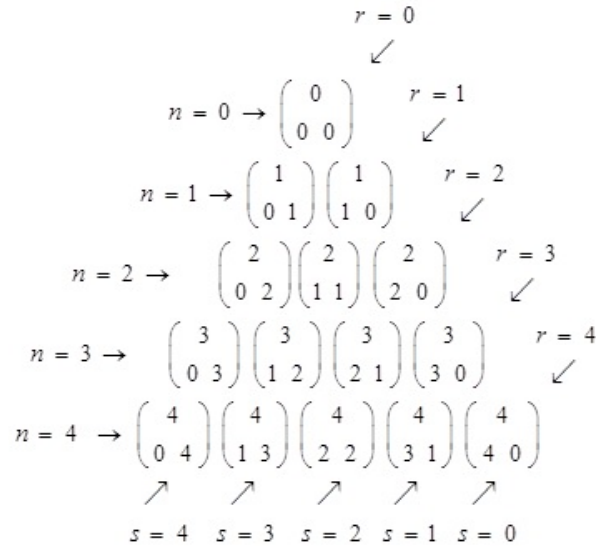


Figura 3.1: Triângulo de Pascal e os números binomiais na forma simétrica (Fonte: [6])

Da mesma maneira, cada elemento da pirâmide é identificado com um número trinomial $\binom{n}{r\ s\ t}$, onde n enumera a camada triangular e r , s e t enumeram as linhas paralelas a cada lado desta camada. Fazendo uma analogia da relação entre definição recursiva dos números binomiais com a construção do triângulo de Pascal, podemos perceber que a definição recursiva dos números trinomiais nos leva diretamente à construção de uma “pirâmide”.

1. A primeira condição, em que os números trinomiais têm duas entradas nulas,

$$\binom{n}{n\ 0\ 0} = \binom{n}{0\ n\ 0} = \binom{n}{0\ 0\ n} = 1,$$

fornece os elementos das arestas da pirâmide.

2. A segunda condição, em que apenas uma das entradas dos números trinomiais é nula,

$$\binom{n}{r\ s\ 0} = \binom{n-1}{r-1\ s\ 0} + \binom{n-1}{r\ s-1\ 0},$$

fornece os elementos das faces da pirâmide, que correspondem aos números do interior do triângulo de Pascal. No caso acima temos os elementos da face $t = 0$.

3. Por último, os elementos do interior da pirâmide são definidos pela terceira condição,

$$\binom{n}{r\ s\ t} = \binom{n-1}{r-1\ s\ t} + \binom{n-1}{r\ s-1\ t} + \binom{n-1}{r\ s\ t-1},$$

que indica que “cada elemento é determinado pela soma dos três superiores mais próximos”.

Na Figura 3.2 é possível visualizar os elementos de cada camada representados com os números trinômiais. Nesta figura pode-se perceber também como a definição descrita anteriormente de fato funciona.

$$\begin{array}{rcc}
 n=0 & \binom{0}{000} & 1 \\
 \\
 n=1 & \binom{1}{100} \binom{1}{010} & 1 \quad 1 \\
 & \binom{1}{001} & 1 \\
 \\
 n=2 & \binom{2}{200} \binom{2}{110} \binom{2}{020} & 1 \quad 2 \quad 1 \\
 & \binom{2}{101} \binom{2}{011} & 2 \quad 2 \\
 & \binom{2}{002} & 1 \\
 \\
 n=3 & \binom{3}{300} \binom{3}{210} \binom{3}{120} \binom{3}{030} & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 & \binom{3}{201} \binom{3}{111} \binom{3}{021} & 3 \quad 6 \quad 3 \\
 & \binom{3}{102} \binom{3}{012} & 3 \quad 3 \\
 & \binom{3}{003} & 1
 \end{array}$$

Figura 3.2: Pirâmide de Pascal com elementos na forma de números trinômiais (Fonte: [6])

A Figura 3.3 mostra uma possível realização concreta da pirâmide Pascal sugerida por Hans Walser em [6]. Neste modelo cada elemento é representado por um dodecaedro rômbo que permite encaixes perfeitos, facilitando a visualização de forma concreta a estrutura da pirâmide, e possibilitando assim a realização de oficinas de matemática experimental análogas às realizadas com o triângulo de Pascal.

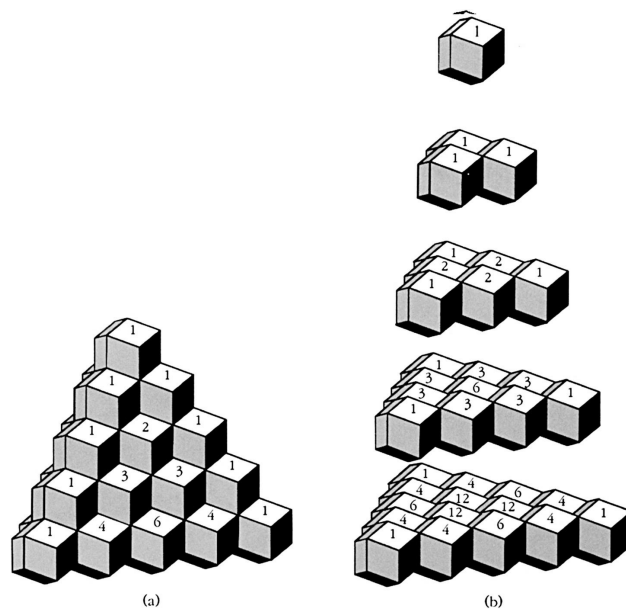


Figura 3.3: Pirâmide de Pascal (Fonte: [6])

Capítulo 4

Um relato de experiência

O artigo de Tom Davis [2] foi a motivação inicial para a realização desse trabalho. A pergunta que este artigo inspirou em mim foi: O que de fato eu poderia despertar baseada neste artigo numa turma do ensino médio de uma escola pública técnica aqui na Bahia? Inicialmente foi reproduzir as ações sugeridas pelo artigo: Apresentar a construção do triângulo de Pascal em uma oficina de matemática experimental e motivar os alunos a identificar que propriedades eram percebidas a partir de observações e discussões. O espírito desafiador e investigador nos alunos deveria ser acionado naquele momento.

4.1 Descrição do Relato

No início do ano letivo de 2015, no Instituto Federal da Bahia, Campus Ilhéus, analisando a ementa da disciplina de Matemática do quarto ano do curso integrado em Segurança do Trabalho, foi observado que 70% dos conteúdos já tinham sido contemplados nos anos anteriores. Nesse mesmo período, já em fase conclusiva das pesquisas desta dissertação, surgiu a idéia de reproduzir as experiências sugeridas por Tom Davis em sala de aula. Os alunos gostam de trabalhar com elementos concretos e isso poderia despertar o interesse deles. O desafio era realizar uma atividade totalmente fora da rotina das aulas convencionais de matemática, tanto em relação à disposição de conteúdos, quanto a metodologia de ensino e avaliação em matemática. Planejado e discutido com a pedagoga da escola Girlene Dias, que se mostrou muito animada, o trabalho foi colocado em prática durante a 1ª unidade do deste mesmo ano. (Vide caderneta figura 4.1).

No primeiro dia de aula foi apresentada à turma uma proposta de planejamento para a 1ª unidade. Jovens não se assustam com o novo, pelo contrário, em geral se sentem motivados. Os alunos perceberam que seria uma proposta interessante trabalhar com o triângulo de Pascal com a possibilidade de construir uma versão tridimensional do mesmo, algo que não é feito no ensino médio.

No segundo encontro a aula começou como na proposta de Davis. Apresentada a construção, usando a definição convencional, tentei motivar os alunos a encontrar padrões e justificativas, que comprovassem tais padrões. Perguntei se eles conseguiam perceber padrões no triângulo; algum fato interessante, alguma propriedade; mas a sala se manteve em silêncio absoluto. Foi quando resolvi fazer a seguinte afirmação:

REGISTRO DE AULAS/2015

SEGURANÇA DO TRABALHO	TURMA: ITST 41	TURNO:
Disciplina: MATEMÁTICA	UNIDADE: I	CH: 15
Professor(a): MARILUCE SILVA	AULAS DADAS:	16

DATA	ASSUNTO	Nº DE AULAS	RUBRICA
12/02	Apresentação de planejamento	2	
19/02	Construções do triângulo de Pascal	2	
26/02	Investigação sobre propriedades observadas no T. de Pascal	2	
05/03	Apresentação de Trabalhos	2	
12/03	Números binomiais e uma nova notação	2	
19/03	Apresentação da Pirâmide Pascal	2	
26/03	Oficina de Contrução da Pirâmide de Pascal	2	
09/04	Autoavaliação de encerramento da unidade	2	

Figura 4.1: Registro de Aulas - 1ª Unidade - Turma ITST41 - 2015

”Todos os números do triângulo são números positivos”.

Questionei porque eu poderia fazer tal afirmação, e a partir desse momento todos os alunos queriam explicar porque, o que gerou uma sequência de falas sobre as disposições numéricas do triângulo.

A discussão generalizada gerou diversas observações, algumas delas pertinentes, outras nem tanto, mas todas elas foram discutidas. Alguns dos padrões identificados pelos alunos puderam ser sistematicamente unificados na seguinte lista:

- As sequências numéricas paralelas aos lados do triângulo localizadas em lados opostos são iguais.** Pode se ver aqui uma visualização da simetria do triângulo de Pascal em relação ao eixo vertical passando pelo vértice, de forma diferente apresentada no Capítulo 2.
- As sequências numéricas paralelas aos lados do triângulo são sempre crescentes.**
- A diferença entre os elementos das sequências paralelas aos lados do triângulo forma uma outra sequência igual a sequência numérica anterior.** Esta ob-

servação é a semente da Observação 2 da Seção 1.3, segundo a qual estas sequências são PAs.

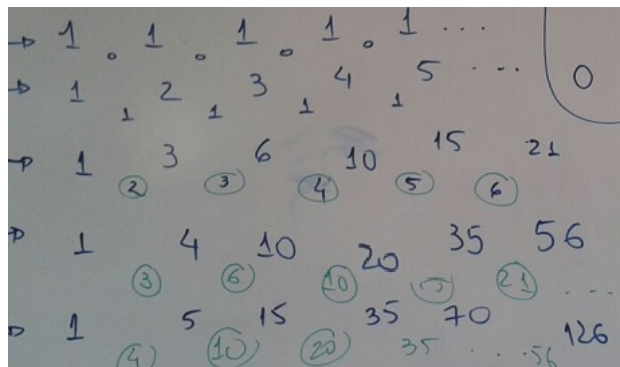


Figura 4.2: Sequências paralelas aos lados do triângulo de Pascal

4. **A soma dos elementos de uma sequência, a partir do número 1 está logo abaixo no sentido contrário a diagonal. Esta é a regra do L.** Nas figuras 4.2 e 4.3 podemos ver os registros no quadro feito pelos próprios alunos, correspondentes às duas últimas observações.

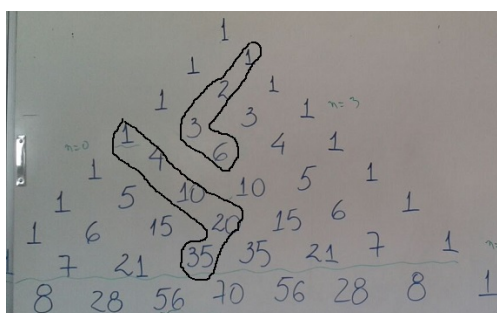


Figura 4.3: Regra do L

Vale a pena ressaltar que a aula se deu de forma bastante agitada, mas muito participativa, ainda que a apresentação dos argumentos que justificassem de tais observações quase que não foi percebida. Muitos dos padrões observados pelos alunos já faziam parte dos citados no artigo do Tom Davis mas outros não, o que me deixou muito entusiasmada em continuar.

No final desta primeira aula foi requisitado aos alunos que pesquisassem mais algumas propriedades e trouxessem para sala de aula para socializar com seus colegas. Isso seria o início de um trabalho que eles organizariam em grupo em sala. Não foi determinado o número de equipes na sala, nem tampouco número de alunos por equipe; mas de acordo com as afinidades de propriedades encontradas tentei organizar os grupos para que os trabalhos se iniciassem. Eles deveriam organizar uma lista de padrões e justificativas, se possível, de forma ilustrada e apresentarem na aula seguinte.

Com todos os grupos reunidos na aula seguinte, quarta aula, foi realizado o sorteio para a ordem das apresentações, onde cada grupo deveria apresentar uma propriedade com a justificativa correspondente. Alguns alunos utilizaram animações que ajudaram a visualização da propriedade apresentada. A pesquisa realizada pelos alunos foi significativa, pois eles perceberam que vários fatos percebidos em sala de aula eram temas citados em muitos artigos publicados, o que envaideceu o ego de muitos alunos.

No encontro seguinte foi apresentada a notação simétrica dos números binomiais, citada no Capítulo 2. A princípio esta nova notação parecia ser um problema, mas eles se familiarizaram rápido. O objetivo era apresentar que a partir dali eles poderiam ter uma forma 3D do triângulo de Pascal, cujos elementos eram formados a partir dos números trinomiais, o que os deixou mais animados.

No último encontro realizamos a oficina de construção da pirâmide de Pascal. A pirâmide foi construída a partir da idéia sugerida pelo artigo [6], onde cada camada da pirâmide é composta por dodecaedros rômnicos, como foi descrito no final do capítulo anterior. De início houve uma dificuldade muito grande para planejarmos esse sólido. Houve uma dificuldade muito grande para entender o procedimento sugerido por este artigo. Só depois com a intervenção do professor Esequias Freitas, professor de desenho técnico desta mesma escola, é que conseguimos um modelo adequado para que começássemos os trabalhos de construção da pirâmide. Os números que apareciam em cada face do dodecaedro foram calculados por eles e a posição onde cada um deles se posicionava era visualizado na hora da construção. A sala se mostrou bem unida e motivada em realizar todo o trabalho. A medida que a pirâmide ia tomando forma o entusiasmo era cada vez maior.

4.2 Fatos Interessantes

Um aluno relatou, no encontro próximo à primeira aula experimental, que alguns colegas ainda tentaram encontrar alguns desses padrões dentro do ônibus voltando pra casa. As aulas de matemática acontecem nessa turma sempre nos dois últimos horários (10:50 - 12:20) de uma quinta-feira e o mais comum é nas proximidades de 12:00 os alunos já sinalizam um certo cansaço e fome. Logo o interesse que os alunos demonstraram em sala de aula e principalmente fora de sala, nas condições em ocorrem as aulas de matemática citadas, superaram as minhas expectativas nesta primeira aula de matemática experimental.

Um outro fato bastante relevante aconteceu na segunda aula quando os alunos deveriam apresentar alguns resultados pesquisados na internet para socializar e começar a elaborar um trabalho em grupo, como descrito na primeira parte do relato de experiência. Uma das alunas, muito intrigada com a riqueza de informações do triângulo, encontrou um padrão curiosíssimo ilustrado na figura 4.4. De acordo com o relato da aluna, ela percebeu este padrão, analisando sequências formadas a partir de somas de elementos contidos numa sequência de quadrados superpostos dois a dois com quatro elementos. As sequências formadas pelas somas destes quatro elementos têm as mesmas propriedades das sequências paralelas aos lados do triângulo, ou seja, a diferença entre os elementos da sequência é exatamente a sequência anterior a partir do primeiro número.

Sequência 1.

$$(1 + 1 + 1 + 2), (1 + 1 + 2 + 3), (1 + 1 + 3 + 4), (1 + 1 + 4 + 5), (1 + 1 + 5 + 6), \dots$$

5, 7, 9, 11, 13,

Sequência 2.

$(1 + 2 + 1 + 3), (2 + 3 + 3 + 6), (3 + 4 + 6 + 10), (4 + 5 + 10 + 15), (5 + 6 + 15 + 21), \dots$

7, 14, 23, 34, 47,

Sequência 3.

$(1 + 3 + 1 + 4), (3 + 6 + 4 + 10), (6 + 10 + 10 + 20), (10 + 15 + 20 + 35), (15 + 21 + 35 + 56), \dots$

9, 23, 46, 80, 127,

E assim por diante.

Observe que a sequência formada tomando o primeiro elemento de cada sequência é exatamente a Sequência 1. Da mesma forma, a diferença finita da Sequência 2 é a Sequência 1 sem o primeiro elemento; a diferença finita da Sequência 3 é a Sequência 2 sem o primeiro elemento, e assim por diante.

E por fim, durante o período em que foi realizado este trabalho, nesta mesma turma, a professora de biologia, Amanda Mendes, estava trabalhando com tópicos de genética e apresentou uma tabela com a distribuição de probabilidades de fenótipos. Os alunos bateram o olho e logo perceberam que estavam observando uma fila de números do triângulo de Pascal. Pra entender melhor o ocorrido na aula de biologia segue uma descrição sucinta do conteúdo.

A herança quantitativa é o caso dos caracteres de variação contínua como a estatura na espécie humana, a cor da pele, produtividade de leite no gado, frutos nas plantas entre outros. Nesses casos existem fenótipos intermediários entre os fenótipos extremos. Tomemos como exemplo a herança da cor da pele em seres humanos. Admitamos que a quantidade de melanina produzida dependa de dois genes, os alelos A e B. Estes genes condicionam a produção do pigmento de melanina e tem efeito aditivo. Note que na figura 4.1 é feito o cruzamento de dois pares de genes heterozigotos, ou seja, quatro alelos diferentes Aa e Bb. Sendo assim, a distribuição de características fenóticas está associada a quarta linha do triângulo de Pascal (1 4 6 4 1). Neste caso há cinco classes fenotípicas esperadas: preto, mulato escuro, mulato médio, mulato claro e branco.

A Associação feita entre o tema trabalhado em biologia e o triângulo de Pascal foi um fato inusitado pela professora nas aulas de biologia, visto que aquele tópico já havia sido trabalhado em outras duas turmas desta mesma escola e associação não tinha ocorrido.

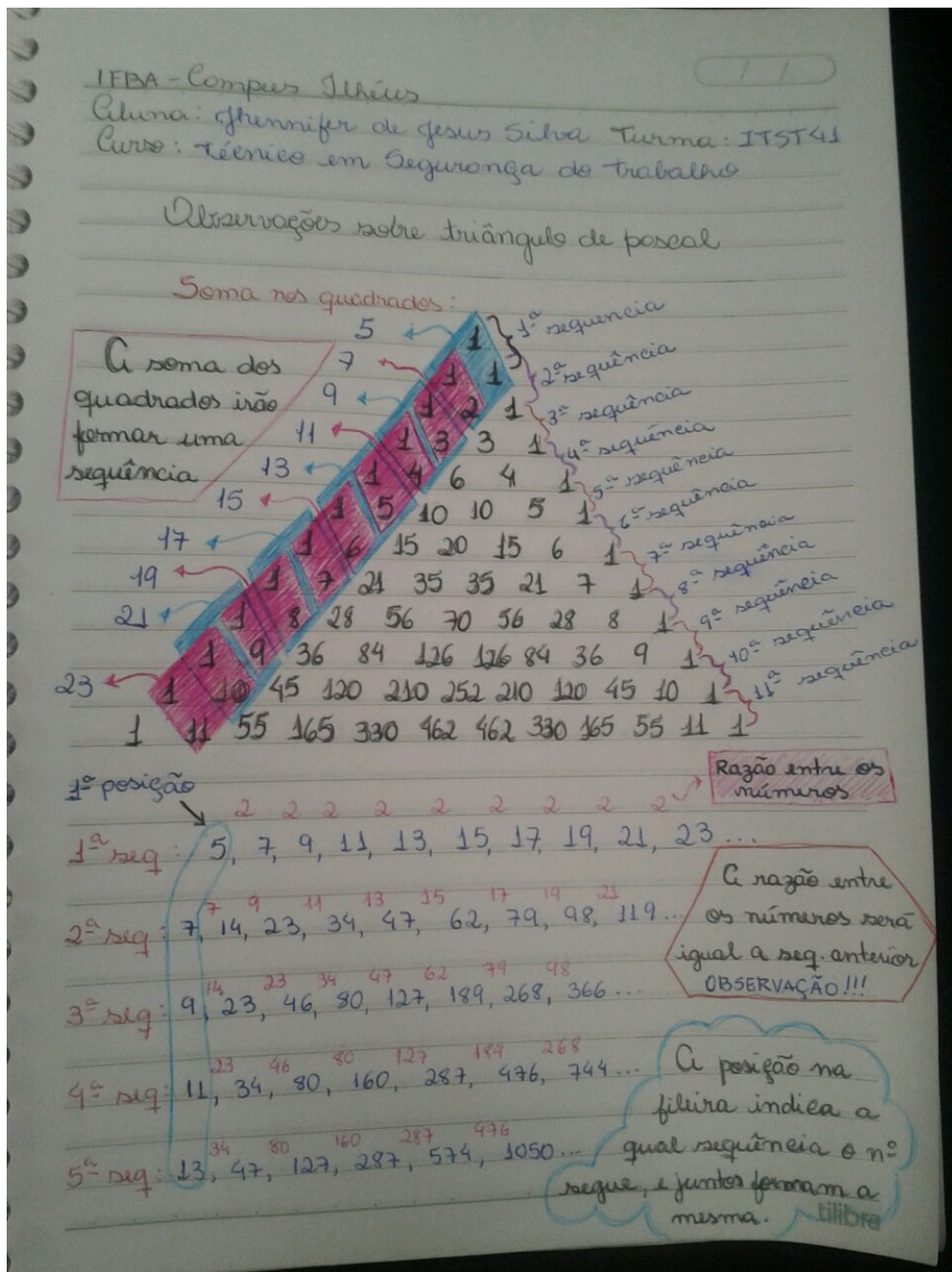


Figura 4.4: Caderno de uma das alunas com propriedade observada por ela.

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB Negro	AABb mulato escuro	AaBB mulato escuro	AaBb Púrpura
Ab	AABb mulato escuro	AAbb mulato médio	AaBb mulato médio	Aabb mulato claro
aB	AaBB mulato escuro	AaBb mulato médio	aaBB mulato médio	aaBb mulato claro
ab	AaBb mulato médio	Aabb mulato claro	aaBb mulato claro	aaBB Branca

Fenótipos:
1/16 : 4/16 : 6/16 : 4/16 : 1/16
Branco : mulato claro : mulato médio : mulato escuro : negro

Figura 4.5: Tabela de distribuição de fenótipos (Fonte:[9])



Figura 4.6: Alunos fazendo cálculo numérico dos elementos da pirâmide

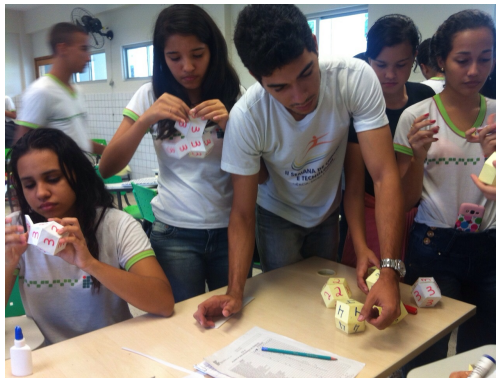


Figura 4.7: Alunos fazendo colagem dos dodecaedros



Figura 4.8: Alunos fazendo encaixes dos dodecaedros para formar camadas da pirâmide



Figura 4.9: Envolvimento da turma com a atividade

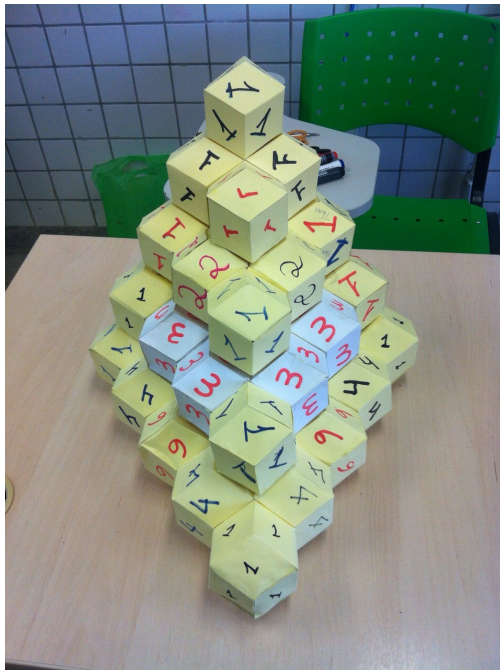


Figura 4.10: Pirâmide de Pascal

Capítulo 5

Discussão e conclusões

Existem inúmeras razões que justificam a relevância desta monografia, tanto na riqueza dos conteúdos matemáticos, quanto pela valiosa experiência que pude realizar com os meus alunos, relatada no capítulo anterior. Apesar dos longos anos de magistério é difícil acreditar que, até antes de iniciar esta dissertação, o triângulo de Pascal não passasse para mim de um processo prático para encontrar os coeficientes do desenvolvimento do binômio de Newton. A compreensão de certos conceitos matemáticos relacionados com o triângulo de Pascal, e a habilidade de usá-los em diferentes situações foram ampliadas de maneira significativa no processo de elaboração desta dissertação.

5.1 Comentários sobre a parte matemática da dissertação

No Capítulo 1 foram apresentadas três construções diferentes, porém equivalentes, do triângulo de Pascal. Neste capítulo apresentamos também uma lista representativa de padrões elementares que são facilmente identificáveis por alunos com pouca experiência em matemática experimental, assim como argumentos intuitivos que os justificam, e que são geralmente construídos por eles nas oficinas de matemática experimental. Foi apresentada também uma relação de padrões mais sofisticados no triângulo de Pascal e resultados de matemática discreta e trigonometria, intimamente relacionados com o triângulo de Pascal.

No Capítulo 2 sugerimos o uso da notação simétrica para os números binomiais, e esta notação foi utilizada para formularmos quatro definições equivalentes para estes números. Estas definições nos permitiram provar formalmente os padrões elementares no triângulo de Pascal citados no capítulo anterior, para os quais só tinham sido apresentados argumentos intuitivos. Ainda neste capítulo apresentamos três propriedades dos números binomiais, uma das quais tem associado um padrão difícil de ser detectado a olho nu no triângulo de Pascal.

Por último, no Capítulo 3 a notação simétrica dos números binomiais foi utilizada para definir, por extensão, os números trinômias. De maneira análoga aos números binomiais, apresentamos quatro definições equivalentes para estes números, a primeira das quais, a definição recursiva, foi fundamental para a construção da pirâmide Pascal.

5.2 Resultados da experiência com os alunos

Não menos nem mais importante, a experiência realizada com os alunos do IFBA teve um sabor especial. Nestas oficinas foi percebida nos estudantes uma postura diferente da apresentada por eles em aulas convencionais. Os alunos se mostraram mais participativos e entusiasmados com as atividades, o que naturalmente levou a uma melhor compreensão do tema trabalhado da parte deles. O entusiasmo dos alunos nestas oficinas foi bem perceptível, comparado com o trabalho realizado com eles no ano de 2013, onde apresentamos a teoria combinatória em aulas convencionais e resolvemos alguns problemas propostos pelo livro texto.

Na verdade, como foi descrito no Capítulo 4, os alunos se mostraram bastante motivados em desenvolverem o trabalho durante toda a unidade, tanto nas oficinas de matemática experimental, assim como nas aulas convencionais e nas atividades desenvolvidas fora de sala. Alguns inclusive se mostraram entusiasmados em trabalhar com outros tópicos de combinatória; basicamente assuntos vistos no segundo ano nos quais eles mostraram, na ocasião, uma grande dificuldade na resolução de problemas. Infelizmente não houve tempo hábil na unidade para realizarmos este tipo de atividade.

Este nível de participação e envolvimento foi gerado nos alunos durante as atividades das oficinas de matemática experimental, ao perceberem que podiam identificar padrões no triângulo de Pascal por conta própria. Movidos pela curiosidade de encontrar mais padrões, a pesquisa desenvolvida por eles fora do contexto de sala de aula os deixou ainda mais envolvidos com o tema; assim como envaidecidos pelo fato de terem encontrado posteriormente nos textos os padrões identificados por eles nas oficinas. Essa mesma curiosidade os levou a estarem mais atentos em sala de aula quando precisei trabalhar outros tópicos adicionais em aulas expositivas.

Um fato surpreendente foi a inesperada identificação de uma relação entre o triângulo de Pascal e a distribuição das características fenotípicas, realizada pela maior parte dos alunos da turma em uma aula de biologia. A ocorrência deste fato parece sugerir que os alunos que participam destas oficinas conseguem obter uma compreensão melhor dos tópicos de matemática que lhes permite estabelecer por conta própria conexões entre a matemática e outras áreas.

Ter alunos entusiasmados e motivados a trabalhar é o sonho de qualquer professor. Os alunos se mostraram muito entusiasmados quando falei sobre a possibilidade de descrever a experiência com eles na dissertação do meu mestrado.

5.3 Considerações para o futuro

Há muitas direções em que este trabalho pode ser continuado, tanto da parte puramente matemática, quanto da parte relacionada ao ensino-aprendizagem. Por exemplo, a segunda descrição do triângulo de Pascal vista no Capítulo 1, permite estender os números binomiais para índices inteiros (não apenas naturais), e a figura geométrica associada a estes números é chamada de hexágono de Pascal. Da mesma forma, estendendo os números trinomiais para índices inteiros, podemos esperar ter um poliedro associado a eles. Uma análise preliminar sugere que este poliedro tem 14 faces triangulares, e portanto não é um poliedro regular.

Estes tópicos merecem ser melhor estudados.

A conexão entre números binomiais e números trinomiais é tão direta, que não é possível deixar de se formular perguntas como as seguintes.

1. Como são os padrões na pirâmide de Pascal análogos aos padrões no triângulo de Pascal?
2. Cada construção do triângulo de Pascal tem sua construção análoga da pirâmide de Pascal?
3. Os números trinomiais tem propriedades análogas às dos números binomiais?
4. Existem propriedades ou identidades algébricas envolvendo ao mesmo tempo números binomiais e trinomiais?

Da mesma forma que estendemos os números binomiais para os trinomiais, é possível generalizar esta ideia e definir os números multinomiais; e todas as observações feitas sobre os números trinomiais se aplicam também aos números multinomiais.

Não podemos perder de vista os fatos acontecidos nas oficinas de matemática experimental e relatados no Capítulo 4. Estes resultados nos fazem refletir se outros temas de matemática não poderiam ser melhor explorados em aulas que tivessem esta mesma metodologia. Como é fácil perceber, este tema é extremamente rico em possibilidades a serem exploradas.

Referências Bibliográficas

- [1] Pereira, Alex M., *Problemas, Sequências e Consequências*, Dissertação de Mestrado, PROFMAT - UESC, (2013).
- [2] Davis, Tom, *Exploring Pascal's Triangle*, em <http://www.geometer.org/mathcircles>
- [3] Hilton, Peter. e Pederson, Jean., *Binomial Coefficients, Extended Binomial Coefficients and Preparation for Further Work*, Vol 30, N.6, 170 - 186, (1999).
- [4] Hilton, P. e Pederson J., *Binomial Coefficients Extended Binomial Coefficients to preserve symmetry*, em *Computers Math. Applic*, vol 17, pp.89-102, (1989).
- [5] Galera, S.C. María., *Sistem de Tabulación de Coeficientes Binomiales o Triángulo de Pascal: un Modelo Numérico Rasga el Telar de los Tiempos*, v.6, N.1, 61 -68 (1998).
- [6] Walser, Hans. *The Pascal Pyramid*, *The College Mathematics Journal*, Vol 31, N. 5, 383-392 (2000).
- [7] <https://pedagogiadoconhecer.wordpress.com/2013/12/25/pitagoras-bombons-tabuleiros-e-teorema/>.
- [8] <http://maxschubertg.pbworks.com/w/page/65044324/n%C3%BAmeros%20figurados>.
- [9] <http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Genetica/genesnaoalelos4.php>