Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

ANA PAULA CABRAL COUTO PEREIRA

O ENSINO DE FRAÇÕES NA ESCOLA BÁSICA: O CURRÍCULO COMMON CORE NOS EUA, HUNG-HSI WU E UMA ANÁLISE COMPARATIVA EM DOIS LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD

Orientador:
Humberto José Bortolossi

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
AGOSTO/2015

Ana Paula Cabral Couto Pereira

O Ensino de Frações na Escola Básica: O Currículo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD

Niterói – RJ

Agosto / 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

P436 Pereira, Ana Paula Cabral Couto

O Ensino de Frações na Escola Básica: O Currículo *Common Core* nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD / Ana Paula Cabral Couto Pereira. – Niterói: [s.n.], 2015.

101 f.

Orientador: Humberto José Bortolossi

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2015.

1. Ensino de Frações. 2. Currículo. 3. *Common Core*. 4. Hung-Hsi Wu. 5. PNLD. I. Título.

CDD: 510.7

Ana Paula Cabral Couto Pereira

O Ensino de Frações na Escola Básica: O Currículo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Agosto / 2015

Dissertação de Mestrado Profissional sob o título *"O Ensino de Frações na Escola Básica: O Currículo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD"*, defendida por Ana Paula Cabral Couto Pereira e aprovada em 27 de Agosto de 2015, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Anne Michelle Dysman Gomes
Doutora em Matemática pelo IMPA

Francisco Roberto Pinto Mattos
Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ

Letícia Guimarães Rangel
Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ

Wanderley Moura Rezende
Doutor em Educação pela USP

Aos meus queridos filhos Raquel e Daniel,
fonte inspiradora da minha vida e
ao meu amor eterno Vinicius,
presente de Deus.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu Deus que a cada dia revigorou minhas forças e permitiu que eu conseguisse chegar até aqui. “Até aqui nos ajudou o Senhor” 1Sm 7:12 A Ele toda glória!

Em especial, agradeço minha família.

Aos meus pais, Mirtes e Nilton, pelo amor incondicional e por sempre me incentivarem e acreditarem no meu potencial estando disponíveis a qualquer coisa em todo tempo.

Ao meu esposo, Vinicius, pelo seu amor, companheirismo, amizade, parceria, incondicional apoio e, por várias vezes, ser meu psicólogo tendo a palavra certa de encorajamento e por acreditar, mais do que eu, na minha capacidade.

Aos meus queridos filhos, Raquel e Daniel, por cada momento de descontração em família e pela motivação dada a cada dia através de palavras e dos sorrisos liberados.

Aos meus irmãos, Aline e Ronaldo, por sempre estarem ao meu lado me incentivando e à você, Aline, pelo companheirismo inigualável.

Ao meu estimado orientador, Humberto Bortolossi, por ter me escolhido entre tantos da turma acreditando no meu potencial, pela sugestão do tema, pelo exemplo profissional, pela parceria constante nesta empreitada e, mais que tudo, pela compreensão em tantos altos e baixos desta caminhada demonstrando ser um excelente amigo.

Aos membros da douta banca, professores Anne Michelle, Letícia Rangel, Francisco Mattos e Wanderley Rezende, por se disponibilizarem à leitura crítica do trabalho e assim exercerem valiosas contribuições.

Aos professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica, por contribuírem com os alicerces que permitiram minha caminhada até aqui. Em especial, à professora Bernadete Coutinho, por me apresentar as maravilhas da matemática quando ainda cursava o Ensino Médio no curso de Formação de Professores em Macaé. Aos professores, Cibele e Petrúcio, pelo estímulo à pesquisa desde da graduação. E aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), pela competência, dedicação e amizade inquestionáveis durante as aulas.

Ao Programa de mestrado PROFMAT, por tornar possível a realização deste trabalho.

À CAPES pela disponibilização da bolsa de estudos que foram fundamentais para minha participação nesse programa.

Aos colegas do Mestrado da turma 2012, pela cumplicidade de nossa convivência, em especial, aos amigos que ganhei em Friburgo, Antônio José, Marcone e Kurt.

Aos amados irmãos da CBA, pelo carinho e convivência enquanto família.

Aos amigos mais chegados que irmãos, Carol e Jorge, pela incomparável amizade e incentivo a todo tempo e pela oportunidade de me tornar tia no decorrer desta trajetória do "mulequinho" Arthur.

Aos meus alunos de ontem, hoje e sempre, por possibilitar o meu crescimento pessoal e profissional a partir das trocas estabelecidas no ambiente escolar.

Agradeço, enfim, de coração, a todos os que me ajudaram nessa empreitada.

É necessário dizer que não é a quantidade de informações,
nem a sofisticação em Matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente,
mas sim a capacidade de colocar o conhecimento no contexto.
(Edgar Morin)

A mente que se abre a uma nova ideia, jamais voltará ao seu tamanho original.
(Albert Einstein)

Resumo

Dentre os conteúdos de Matemática ministrados em nossas salas de aula da Escola Básica, certamente o conceito de fração é um dos que os alunos mais apresentam dificuldades. Embora já exista muita literatura abordando esta problemática, poucas referências tratam a questão curricular em um arco completo (isto é, elencando o que e com qual enfoque ensinar frações do início ao fim) e com profundidade (isto é, estabelecendo de forma integrada objetivos, competências, habilidades, exemplos do que deve ser trabalhado e explicando o porquê de se trabalhar da maneira sugerida). Nesse contexto, dois trabalhos merecem destaque: as orientações curriculares do *Common Core* nos EUA, elaboradas em 2010, e um longo relatório técnico redigido em 2012 pelo matemático Hung-Hsi Wu examinando minuciosamente a estrutura curricular proposta para o ensino de frações pelo *Common Core*. Nesta linha, nosso trabalho consiste de três partes: (1) uma tradução para o Português das orientações curriculares do *Common Core* no que se refere ao ensino de frações; (2) uma elaboração de um resumo sistemático do relatório técnico feito por Wu e, a partir destes afazeres, (3) uma análise comparativa do que é exposto no *Common Core* e em Wu com o que é praticado em duas coleções de livros didáticos do PNLD. Em tempos de discussão e formulação acerca de um novo currículo de Matemática a ser implementado no Brasil, esperamos que o presente trabalho possa consolidar-se como uma contribuição a enriquecer tal discussão. Esperamos também que o trabalho sirva como fonte para professores, futuros professores e pesquisadores interessados no ensino de frações na Escola Básica.

Palavras-chave: Ensino de Frações; Currículo; *Common Core*; Hung-Hsi Wu; PNLD.

Abstract

Among the Mathematics content taught in our Basic School classrooms, certainly the concept of fraction is one that students have more difficulties. While there is a lot of literature addressing this issue, few references cover the curricular aspect in a full arc (i.e., detailing what subjects and what approaches should be used in teaching fractions from the beginning to the end) in-depthly (i.e., detailing, in an integrated way, objectives, skills, abilities and examples of what should be worked out and, also, explaining why to work in the manner suggested). In this context, two works worth mentioning: the Common Core State Standards prepared in 2010 and a long technical report written in 2012 by the mathematician Hung-Hsi Wu which analysed the proposed standards for teaching fractions. In this sense, this present work consists of three parts: (1) a translation into Portuguese of the Common Core regarding the teaching of fractions; (2) an elaboration of a systematic summary of the technical report written by Wu; (3) a comparative analysis of what is stated in the Common Core and Wu's technical report with what is practiced in two collections of textbooks approved by PNLD. At this time when a new Mathematics curriculum is being discussed and formulated in Brazil, we hope this work can be consolidated as a contribution to enrich this discussion. We also hope this work may serve as a resource for in-service teachers, pre-service teachers and researchers interested in teaching fractions in Basic School.

Keywords: Teaching Fractions; Curriculum; *Common Core*; Hung-Hsi Wu; PNLD.

Sumário

1 Introdução

1.1 O *Common Core State Standards* (CCSS) nos EUA

Segundo Kendall (2011, p. 1), o surgimento dos *standards* (padrões curriculares) nos EUA ocorreu no final do século XX com iniciativas locais dos professores dos vários distritos dos estados norte-americanos que perceberam como as discussões que estavam sendo realizadas poderiam mudar o foco do ensino: no lugar do professor ensinar o que ele considera importante (uma postura autocrática), ensinar o que é de fato importante para o aluno, assegurando que os conceitos e habilidades fundamentais estejam presentes em todo currículo adotado. Um marco nesse processo histórico foi a publicação em 1989 dos *standards* do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). A partir daí, secretarias de educação estaduais começaram o processo de construção de seus próprios *standards*, tendendo a incluir mais conteúdo do que se poderia tratar no tempo escolar disponível. Kendall (2011, p. 6) afirma que, ironicamente, por conta disto, caiu novamente nas mãos dos professores a decisão do que os alunos deveriam aprender: os professores tinham que decidir entre o que ensinar e o que ignorar ou passar correndo, de forma ineficaz, por todo o conteúdo proposto. Por outro lado, ainda segundo Kendall (2011, p. 6), o movimento dos *standards*, ao longo do tempo, efetivamente deslegitimou os livros didáticos como base curricular nos EUA.

A multiplicidade de *standards* estaduais teve uma consequência ruim: alunos que mudavam de um estado ou distrito para outro enfrentavam sérias dificuldades para se adaptarem (Kendall informa que, no censo americano em 2000, detectou-se que 18% da população escolar havia migrado no último ano e que, considerando-se um intervalo de três anos, este número sobe para 30% dos alunos). Como consequência, estudos posteriores mostraram que instrutores universitários apontavam que entre 60% e 70% dos alunos que ingressavam nas universidades precisavam de disciplinas de recuperação. Outra dificuldade é que, com tantos *standards*, não era possível comparar o desempenho de alunos de estados e distritos diferentes e, pior, comparar o desempenho com alunos de outros países.

Diante deste cenário, surgiu o *Common Core State Standards Initiative,* um documento que começou a ser redigido em 2009 pela iniciativa da Associação Nacional de Governadores e o Conselho de Chefes de Estado Oficiais de Escolas.

> *O objetivo desta iniciativa? Desenvolver um conjunto de diretrizes curriculares nacionais que garantam que os alunos em cada estado estejam no mesmo nível que os estudantes com melhor desempenho de outros países do mundo e que eles adquiram o conhecimento e habilidades que irão prepará-los para o sucesso na educação de nível superior e na arena global.*
>
> (Kendall, 2011, p. 1, tradução nossa)

As imagens da Figura 1.1 extraídas do vídeo <http://y2u.be/Hp3zmU8iF0E> ilustram bem esta preocupação com o desempenho do *Common Core*. O desenvolvimento do documento contou com representantes de 48 estados, 2 territórios e do Distrito de Columbia, com o auxílio dos talentos e competências de educadores, especialistas em conteúdo, pesquisadores, grupos comunitários, além dos comentários e opiniões de professores, pais, líderes empresariais e o público em geral. Em sua versão final, o *Common Core* estabelece um conjunto de diretrizes para o ensino de Artes e Linguagens em Inglês/Alfabetização e Matemática, formulado desde o Jardim de Infância (*Kindergarten*) até o Ensino Médio (*High School*). O documento descreve, de forma clara e consistente, as normas por grau de escolaridade, com intuito de assegurar que os estudantes oriundos do Ensino Médio estejam preparados para iniciar um curso universitário, curso técnico ou entrar no mercado de trabalho.

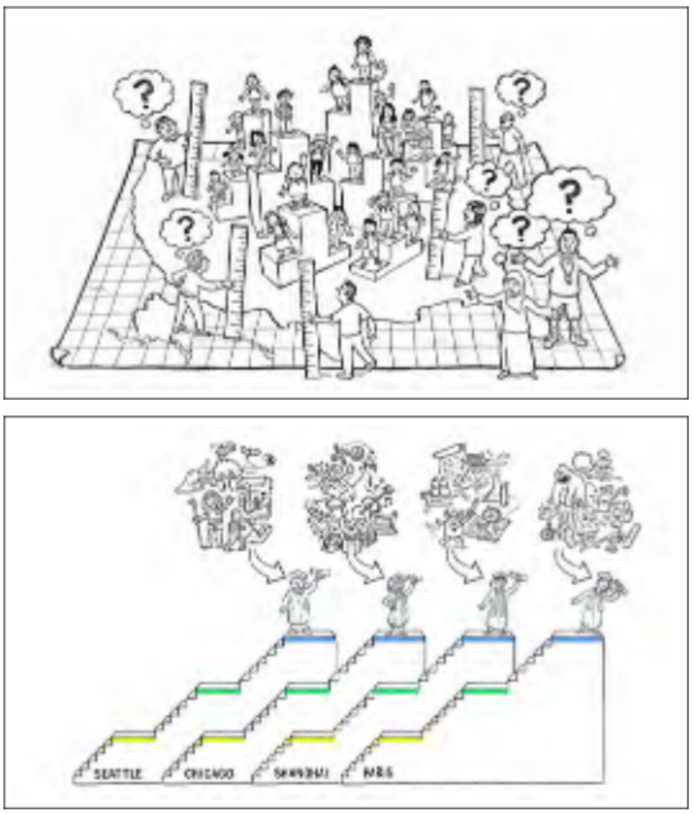


Figura 1.1: Comparação de desempenho no *Common Core*.

O *Common Core* não descreve "como" serão ensinadas ou aprendidas as habilidades, mas "o que" ensinar em cada série escolar. Cada comunidade escolar local tem a liberdade de escolher os materiais, atividades e estratégias que são mais adequadas para que os alunos atinjam com sucesso as habilidades propostas nos padrões mas, ao usar os mesmos *standards*, cada estudante pode ser comparado em um mesmo tipo de escala. Uma das mudanças significativas do ensino na prática, em particular de Matemática, é ensinar menos conteúdo, mas com mais profundidade e melhor. Os currículos de Matemática americanos são criticados e, por vezes, considerados com "uma milha de largura e uma polegada de profundidade": há um excesso de conteúdo em detrimento do entendimento profundo da disciplina. As habilidades descritas no *Common Core* convidam a reduzir significativamente o que se ensina em Matemática e a aprofundar na forma e desenvolvimento que são expostos na sala de aula, levando o aluno a fazer análises, a aplicar a teoria em sua vida real e a ser capaz de raciocinar sobre problemas, em vez de decorar fórmulas matemáticas.

Para fins de comparação, apresentamos na Tabela 1.1 da página 14 as várias características do sistema educativo americano antes dos *standards*, durante o desenvolvimento dos *standards* e no *Common Core* (Kendall, 2011, p. 4).

Entender como o *Common Core* difere de padrões anteriores e compreender as mudanças necessárias que são solicitadas foi essencial para implementar a nova proposta. As principais mudanças solicitadas pelo *Common Core* em Matemática são: (1) mais foco em menos tópicos; (2) coerência ligando temas e pensando entre os diversos graus; (3) rigor, buscando com igual intensidade, em três aspectos no trabalho de cada série, a saber, compreensão conceitual, fluência nas habilidades procedimentais e aplicações.

Do ponto de vista da *prática* da Matemática, o *Common Core* destaca oito habilidades que devem ser trabalhadas: (1) dar sentido aos problemas e perseverar em resolvê-los; (2) raciocinar abstrata e quantitativamente; (3) construir argumentos viáveis e criticar o raciocínio dos outros; (4) modelar matematicamente situações-problema; (5) usar ferramentas apropriadas estrategicamente; (6) usar uma linguagem precisa; (7) procurar e fazer uso da estrutura; (8) procurar e expressar regularidade em conclusões que se repetem.

Do ponto de vista do *conteúdo* da Matemática, o *Common Core* quer evitar que a Matemática seja trabalhada como uma lista de tópicos desconexos, truques ou decorebas de procedimentos mas, sim, que esta adquira a forma de um corpo coerente de conhecimento composto de conceitos interligados. Assim, os *standards* são projetados em torno de progressões coerentes de série para série. A aprendizagem é cuidadosamente ligada entre os diversos graus de modo que os alunos podem construir uma nova compreensão sobre as bases construídas em

	Antes dos *standards*	Durante o movimento dos *standards*	No *Common Core*
Adequação das expectativas para o tempo de instrução disponível	Tempo disponível = tempo necessário.	Depende do estado; sem critérios de escolha explíticos. Muitas vezes, sem tempo suficiente para atender todos os *standards*.	Os *standards* são projetados de forma a exigir 85% do tempo de instrução disponível.
Suporte ao currículo	O currículo é definido pelo livro didático.	Os *standards* direcionam o currículo, mas este fica sempre atrasado em comparação com os *standards*.	A publicação dos *standards* é seguida rapidamente pela construção do currículo.
Métodos para descrever o desempenho dos alunos	Créditos por carga horária (ênfase no que deve ser dado no período e não no que foi realmente aprendido).	Critérios que mudam de estado para estado.	Critérios definidos para serem usados por todos os estados.
O que se espera dos alunos	Aquilo que está nos livros didáticos ou créditos por carga horária.	Depende do estado; no processo, mudou de descrições tradicionais para o que é necessário para ingressar na universidade ou ter uma profissão.	O que é necessário para ingressar na universidade ou ter uma profissão; padrões internacionais.
Propósitos de avaliação primária	Comparação infrequente dos estudantes frente a uma amostra nacional; competência mínima em testes na década de 1970.	Responsabilização (*Accountability*); para entender o desempenho do aluno por grupo (*No Child Left Behind*).	Responsabilização (*Accountability*); para informar e melhorar o ensino e a aprendizagem.
Natureza sistêmica da reforma	Não sistêmica; reformas estabelecidas a nível de distritos.	A reforma depende e varia dentro do estado; algumas são fortemente alinhadas; estados com "controle local" são menos sistêmicos.	*Standards*, currículo e avaliação são compartilhados entre os estados e territórios participantes.

Tabela 1.1: O sistema educativo americano antes dos *standards*, durante o desenvolvimento dos *standards* e no *Common Core* (Kendall, 2011, p. 4).

anos anteriores. Nesta linha, o *Common Core* divide os conceitos-chave ao longo das séries iniciais (*Elementary School* e *Middle School*, equivalentes ao Ensino Fundamental no Brasil) da seguinte maneira (a Tabela 1.2 mostra a equivalência entre as séries escolares dos sistemas de ensino no Brasil e nos EUA):

- No nível K-1: (1) desenvolver a compreensão da adição, subtração e de estratégias para a adição e subtração até 20; (2) desenvolver a compreensão das relações entre números inteiros[a] e valor posicional, incluindo agrupamentos em dezenas e unidades; (3) desenvolver a compreensão de medidas lineares e medidas de comprimento como justaposições de comprimentos unitários; (4) raciocinar sobre composições e decomposições de formas geométricas e seus atributos.
- No nível K-2: (1) estender a compreensão da notação de base dez; (2) ganhar fluência na adição e na subtração; (3) usar unidades de medida padrão; (4) descrever e analisar formas.
- No nível K-3: (1) desenvolver a compreensão da multiplicação e divisão e estratégias para multiplicação e divisão até 100[b]; (2) desenvolver a compreensão de frações, especialmente frações unitárias (frações com numerador 1); (3) desenvolver a compreensão da estrutura de arranjos retangulares e de área; (4) descrever e analisar formas bidimensionais.
- No nível K-4: (1) desenvolver a compreensão e fluência com a multiplicação de vários dígitos e desenvolver a compreensão de dividir para encontrar quocientes envolvendo dividendos com vários dígitos; (2) desenvolver a compreensão da fração equivalente, adição e subtração de frações com denominadores iguais e multiplicação de números inteiror por frações; (3) desenvolver a compreensão de que as figuras geométricas podem ser analisadas e classificadas de acordo com suas propriedades, tais como ter lados paralelos, os lados perpendiculares, medidas de ângulo particular e simetria.
- No nível K-5: (1) ganhar fluência na adição e na subtração de frações e o desenvolvimento da compreensão da multiplicação de frações e da divisão de frações em casos especiais (frações unitárias divididas por um número inteiro e números inteiros divididos por frações unitárias); (2) estender a divisão para divisores com dois dígitos, integrando frações decimais com o sistema de valor posicional e o desenvolvimento da compreensão das operações com números decimais até a casa dos centésimos e da fluência em operações com números inteiros e números decimais; (3) desenvolver a compreensão de volumes.

[a]Aqui e no que se segue, está implícito no termo "número inteiro" (*whole number*) que este é não negativo.

[b]As divisões por 100 nessa série são apenas com múltiplos de 100, pois os números decimais só aparecerão na série seguinte.

- No nível K-6: (1) relacionar as ideias de razão/proporção e taxa com multiplicação e divisão de números inteiros e usar os conceitos de razão/proporção e taxa para resolver problemas; (2) concluir o estudo da divisão de frações e estender a noção de número para o conjunto dos números racionais que inclui os números negativos; (3) escrever, interpretar e usar expressões e equações lineares; (4) desenvolver a compreensão do pensamento estatístico.
- No nível K-7: (1) desenvolver a compreensão e aplicações das relações proporcionais; (2) desenvolver a compreensão das operações com números racionais e trabalhar com expressões e equações lineares; (3) resolver problemas que envolvam desenhos em escala e construções geométricas informais e trabalhar com formas planas e tridimensionais para resolver problemas envolvendo área, área de superfície e volume; (4) elaborar inferências sobre populações com base em amostras.
- No nível K-8: (1) formular e raciocinar com expressões e equações, incluindo a modelagem por uma equação linear de associações entre dados bivariados e resolução de equações e sistemas lineares; (2) entender o conceito de função e usar funções para descrever relações quantitativas; (3) analisar figuras bidimensionais e tridimensionais usando distâncias, ângulos, semelhança e congruência e entender e aplicar o Teorema de Pitágoras.

IDADE	BRASIL		EUA	
6-7 anos	Ensino Fundamental I	1º ano	*Elementary School*	Grade 1 (K-1)
7-8 anos		2º ano		Grade 2 (K-2)
8-9 anos		3º ano		Grade 3 (K-3)
9-10 anos		4º ano		Grade 4 (K-4)
10-11 anos		5º ano		Grade 5 (K-5)
11-12 anos	Ensino Fundamental II	6º ano	*Middle School*	Grade 6 (K-6)
12-13 anos		7º ano		Grade 7 (K-7)
13-14 anos		8º ano		Grade 8 (K-8)
14-15 anos		9º ano	*High School*	Grade 9 (K-9)
15-16 anos	Ensino Médio	1º ano		Grade 10 (K-10)
16-17 anos		2º ano		Grade 11 (K-11)
17-18 anos		3º ano		Grade 12 (K-12)

Tabela 1.2: Equivalência entre as séries escolares dos sistemas de ensino no Brasil e nos EUA.

Há três anos, os EUA colocaram em prática o *Common Core*. Quase todos os estados implementaram uma reforma nas suas bases curriculares. Atualmente, 43 unidades federativas adotam o *Common Core* e estão trabalhando em sua implementação (grande parte dessa participação se deve a um incentivo fiscal dado pelo governo federal a quem adotasse o *Com-*

mon Core), a exceção fica por conta de cinco estados que não aderiram à padronização: Alaska, Indiana, Minnesota, Oklahoma, Virgínia, Texas e Nebraska.

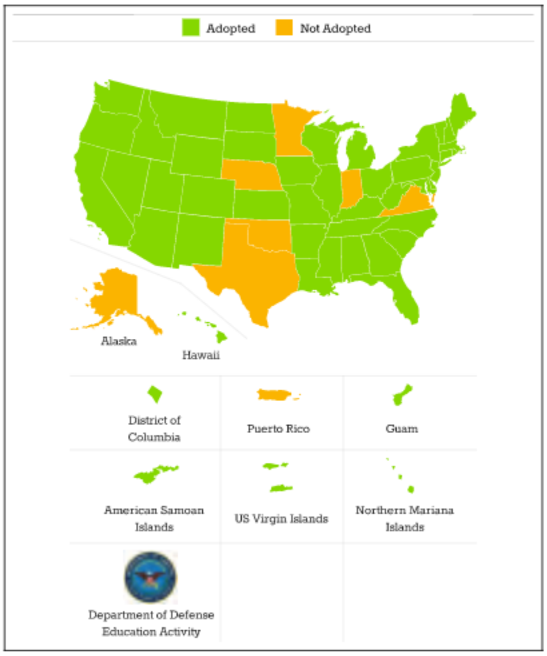


Figura 1.2: Adoção do *Common Core* nos EUA (disponível em <http://www.corestandards.org/standards-in-your-state/>).

Já estão sendo elaboradas avaliações para uma análise dos impactos no ensino após a implementação do *Common Core*. Dois consórcios comandados pelo estado, *Partnership for Assessment of Readiness for College and Career* (PARCC) e o *Smarter Balanced Assessment Consortium* (SBAC), estão trabalhando para desenvolver instrumentos que visam fornecer uma avaliação para garantir que os alunos estejam progredindo em direção a atingir as habilidades necessárias para ter sucesso na faculdade, carreira e vida. Estas avaliações são esperadas para estarem disponíveis no ano escolar 2014-2015[c].

1.2 Hung-Hsi Wu

Um dos colaboradores na elaboração das orientações do *Common Core* em Matemática é o matemático Hung-Hsi Wu. Wu é atualmente Professor Emérito da Universidade da Califórnia em Berkeley, onde atua desde 1973. Seus interesses originais de pesquisa estavam em Geometria Diferencial.

Durante as últimas duas décadas, Wu tem dedicado quase todo o seu tempo e conhecimento

[c]No entanto, até o momento, não tomamos conhecimento da publicação de tais avaliações.

Figura 1.3: Hung-Hsi Wu.

matemático para melhorar o ensino de Matemática na Educação Básica nos EUA. Seu primeiro contato com ensino de Matemática ocorreu em 1992, quando foi convidado a revisar um conjunto de novos livros didáticos e a elaborar um relatório do ponto de vista matemático, uma vez que os livros já tinham sido revisados por educadores. Ele ficou alarmado com a má qualidade dos livros escolares disponíveis. Em sua visão, a matemática presente nos livros didáticos estava bem diferente do que ele entende por matemática sólida e clara. Os conteúdos eram trabalhados de maneira informal, quase nunca com uma definição precisa, evitando o uso de símbolos, tanto quanto possível, porque preferiam expressões verbais sobre afirmações simbólicas. Seu relatório[d], quando saiu em abril de 1992, foi bastante criticado, sofrendo pressões políticas e legais (Leong, 2012).

Wu acredita que se os professores soubessem Matemática o suficiente, eles provavelmente poderiam afinar alguns dos pontos irregulares nos livros didáticos. No entanto, o que Wu constatou foi que os professores não sabiam Matemática, sobretudo pela forma como os professores foram ensinados nas universidades. Portanto, eles não poderiam ajudar seus alunos a darem sentido matemático aos conteúdos presentes nos livros didáticos. Suas preocupações profissionais logo se transformaram em uma missão pessoal para tentar sanar os inúmeros problemas que cercam a educação matemática de professores e educadores. Seu comprometimento com a formação dos professores da Educação Básica pode ser confirmado em sua fala na entrevista para a revista *Mathematical Medley*:

> *Não ensinamos aos nossos professores o conhecimento necessário para o seu trabalho. Cheguei a conclusão deste fato no começo do meu envolvimento com a educação, então eu fiquei determinado a ensinar Matemática aos professores acima de tudo.*
>
> (Wu *apud* Leong, 2012, p. 9, tradução nossa)

Wu tem se empenhado em escrever material de apoio para professores da Educação Básica.

[d]Disponível em https://math.berkeley.edu/~wu/IMP2.pdf.

Além de vários artigos disponíveis em sua página *web* pessoal (https://math.berkeley.edu/~wu/), seu livro, intitulado *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics* (Wu, 2011), fornece um tratamento abrangente e consistente dos tópicos relacionados ao ensino de números no currículo da matemática escolar.

Uma das preocupações de Wu se refere em como o conceito de fração deve ser desenvolvido na sala de aula, uma vez que este conceito, em nível escolar, segundo Wu, não é algo simples[e]. Neste sentido, Wu elaborou um relatório técnico especificamente sobre o ensino de fração e suas propriedades, *Teaching Fractions According To The Common Core Standards* (Wu, 2012), esmiuçando como trabalhar o que é proposto pelo *Common Core* em cada série, desde o K-3 até o K-7. Esse documento é a base de nossa dissertação. Como o leitor poderá perceber nos capítulos seguintes, Wu tem um caráter bem matemático em sua exposição, com uma preocupação na apresentação de definições claras seguidas de propriedades devidamente justificadas, sempre fazendo-o de forma que seja acessível ao Ensino Básico.

1.3 Nossa proposta de trabalho

Nosso trabalho consiste de três partes: (1) uma tradução para o Português das orientações curriculares do *Common Core* no que se refere ao ensino de frações; (2) uma elaboração de um resumo sistemático do relatório técnico feito por Wu (2012) e (3) uma análise comparativa do que é exposto no *Common Core* e Wu com o que é praticado nas coleções de livro didático utilizadas no Colégio Universitário Geraldo Reis–COLUNI/UFF em Niterói, Rio de Janeiro.

Os Capítulos 2, 3, 4 e 5 são destinados ao ensino de frações nas séries K-3, K-4, K-5 e K-6, respectivamente. Eles estão estruturados da seguinte maneira: apresentação das diretrizes gerais do *Common Core* para a série em questão; exibição dos campos de conhecimento matemático destinado à série; descrição das orientações específicas do *Common Core* ao campo do conhecimento relacionado às frações e a sistematização das orientações propostas por Wu (2012) para a série em relação ao ensino de frações.

O trabalho realizado nestes capítulos nos estimularam a investigar o que, como e quando o conceito de frações e suas propriedades aparecem no contexto escolar brasileiro à luz da proposta do *Common Core* para o ensino de frações e do desenvolvimento minucioso do trabalho de Wu. Vários desdobramentos são possíveis: investigação de propostas curriculares, investigação sobre a formação inicial e continuada de professores, investigação da prática escolar, etc.

[e]Certamente, definir o conjunto dos números racionais como uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros é abissalmente não apropriado para o Ensino Básico (Wu, 1998).

Como uma primeira iniciativa, escolhemos investigar o ensino de frações nos livros didáticos por considerarmos que estes ainda desempenham um papel importante na condução dos conteúdos na escola, uma vez que muitos professores utilizam o livro didático como o único recurso pedagógico. Para a análise, escolhemos as coleções utilizadas na escola em que trabalhamos, o Colégio Universitário Geraldo Reis–COLUNI/UFF. Por se tratar de uma instituição pública, a escolha do livro didático é pautada pelas orientações fornecidas por meio do PNLD (Plano Nacional do Livro Didático). Utilizamos as coleções adotadas nos Ensino Fundamental I e II, *Aprender Juntos – Matemática* de Roberta Taboada e Ângela Leite (PNLD 2013) e *Matemática* de Edwaldo Bianchini (PNLD 2014), respectivamente. Nossa investigação será conduzida a partir de perguntas oriundas da leitura das orientações de Wu. As perguntas que propomos aparecem no final de cada capítulo.

Por fim, apresentamos algumas considerações finais no Capítulo 7, em que contrapomos nossa experiência em sala de aula sobre o ensino de frações com relação ao que se é proposto pelo *Common Core* e por Wu. Também apresentamos sugestões de novos trabalhos que podem aprofundar e dar continuidade a presente pesquisa.

Gostaríamos de deixar claro que nossa proposta aqui tem uma posição imparcial quanto ao que se está sendo proposto pelo *Common Core* e por Wu. Existem outros documentos e pesquisadores que propõem outras abordagens, inclusive em oposição a estes documentos. Assim, nossa apresentação tem um caráter descritivo e não avaliativo.

2 O Nível K-3

2.1 Diretrizes gerais

Neste nível escolar, a orientação dada pelo *Common Core* é que o desenvolvimento do conteúdo matemático deve se concentrar em quatro áreas importantes: (1) desenvolver a compreensão da multiplicação e divisão e estratégias para multiplicação e divisão até 100[a]; (2) desenvolver a compreensão de frações, especialmente frações unitárias (frações com numerador 1); (3) desenvolver a compreensão da estrutura de arranjos retangulares e de área; (4) descrever e analisar formas bidimensionais.

2.2 Campos de conhecimento

Nesta série os conteúdos matemáticos estão subdivididos nos seguintes campos de conhecimento: *Operações e O Pensamento Algébrico*; *Números e Operações na Base Dez*; *Números e Operações–Frações*; *Medidas e Dados; Geometria.*

2.3 Orientações específicas ao campo Números e Operações–Frações[b]

O objetivo central nesse nível para o campo *Números e Operações–Frações* é desenvolver a compreensão de que uma fração é um número.

Compreender as frações como número

1. Compreender a fração $\frac{1}{b}$ como a quantidade formada por uma parte quando o todo é partido em b partes iguais; compreender a fração $\frac{a}{b}$ como a quantidade formada por a

[a]As divisões por 100 nessa série são apenas com múltiplos de 100, pois os números decimais só aparecerão na série seguinte.

[b]O trabalho com as frações no nível K-3 está limitado às frações com denominadores 2, 3, 4, 6 e 8.

partes de tamanho $\frac{1}{b}$.

2. Compreender uma fração como um número na reta numérica; representar frações em uma reta numérica.

   a. Representar uma fração $\frac{1}{b}$ em uma reta numérica definindo o intervalo de 0 a 1 como o todo e particionando-o em b partes iguais. Reconhecer que cada parte tem tamanho $\frac{1}{b}$ e que a extremidade final da parte que começa no ponto 0 localiza o número $\frac{1}{b}$ na reta numérica.

   b. Representar a fração $\frac{a}{b}$ em uma reta numérica marcando a comprimentos $\frac{1}{b}$ a partir do ponto 0. Reconhecer que o intervalo resultante tem comprimento $\frac{a}{b}$ e que sua extremidade final é o número $\frac{a}{b}$ na reta numérica.

3. Explicar a equivalência de frações em casos especiais e comparar frações por meio de seus tamanhos.

   a. Compreender que duas frações são equivalentes (iguais) se elas possuem o mesmo tamanho ou (representam) um mesmo ponto em uma reta numérica.

   b. Reconhecer e gerar frações equivalentes simples, e.g., $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Explicar por que as frações são equivalentes, e.g., usando um modelo visual de fração.

   c. Expressar números inteiros como frações e reconhecer as frações que são equivalentes a números inteiros. Exemplos: expressar 3 na forma $3 = \frac{3}{1}$; reconhecer que $\frac{6}{1} = 6$; localizar $\frac{4}{4}$ e 1 como o mesmo ponto em uma reta numérica.

   d. Comparar duas frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador por meio de seus tamanhos. Reconhecer que comparações são válidas somente quando as frações se referem a um mesmo todo. Registrar comparações usando os símbolos $>$, $=$ e $<$, e justificar as conclusões, e.g., usando um modelo visual de fração.

2.4 Algumas orientações de Wu

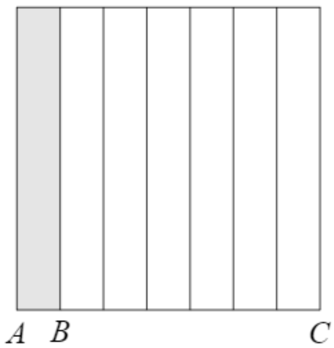
Sobre o significado das frações

(1) Modelos discretos $\times$ modelos contínuos: apesar de modelos discretos serem mais fáceis de se entender, eles são mais restritos (exemplo: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$ de 4 canetas fazem sentido, mas $\frac{5}{11}$ de 4 canetas não). Segundo Wu, modelos discretos limitam os alunos a pensarem apenas em "how many" ("quanto" para o caso de grandezas discretas), mas não em "how much" ("quanto" para o caso de grandezas contínuas).

(2) Motivando frações usando áreas de figuras geométricas: ao se usar figuras geométricas, frações não são partes das figuras, mas, sim, suas medidas (comprimentos, áreas e volumes). Um quadrado é uma figura geométrica e não um número. Sua área é um número.

Segundo Wu, áreas podem ser introduzidas no nível K-3 por meio do conceito de congruência: (a) duas figuras são congruentes se possuem o mesmo tamanho e o mesmo formato e (b) figuras congruentes possuem a mesma área. Assumido estes fatos, a área do *quadrado unitário* (o quadrado cujos lados têm comprimento 1) é, por definição, igual a 1 e, se este é dividido em n partes iguais (isto é, em n partes congruentes), então cada uma das partes, por definição, tem área $\frac{1}{n}$.

Wu apresenta um exemplo de como é possível apresentar um modelo preciso para $\frac{1}{7}$ em uma sala de aula de uma turma K-3: comece com um segmento pequeno AB e, então, justaponha esse segmento mais 6 vezes para obter um segmento maior AC, conforme mostrado na figura a seguir. Declare que o comprimento de AC é igual a 1 (uma unidade) e, usando AC como lado, desenhe um quadrado, como na figura. Neste contexto, a área do retângulo hachurado na figura representa $\frac{1}{7}$.



(3) O importante papel do todo: ao se tratar de frações, é fundamental sempre estabelecer claramente quem é o todo. Wu destaca que jamais deve ser dada ao aluno a impressão de que se pode trabalhar com frações que se referem a dois todos diferentes sem antes deixar bem claro o que estes todos são. Observe o exemplo dado por Wu: a área da figura sombreada representa $\frac{3}{2}$ ou $\frac{3}{4}$?

(4) Frações próprias e impróprias: Wu salienta que não há necessidade de se introduzir estes conceitos no início do estudo de frações. Fazê-lo pode confundir os alunos.

A reta numérica

(1) O IMPORTANTE PAPEL DAS FRAÇÕES UNITÁRIAS: do mesmo modo que o número 1 (um) é a peça fundamental dos números inteiros, no sentido que todo número inteiro é obtido "combinando-se" um número suficiente de uns, as frações unitárias (frações da forma $\frac{1}{n}$, com n um número inteiro positivo) são as peças fundamentais que permitem definir frações mais gerais por meio de um processo análogo de justaposição.

(2) O IMPORTANTE PAPEL DA RETA NUMÉRICA: entre os vários modelos para frações, a reta numérica merece destaque, por suas várias vantagens. São elas:

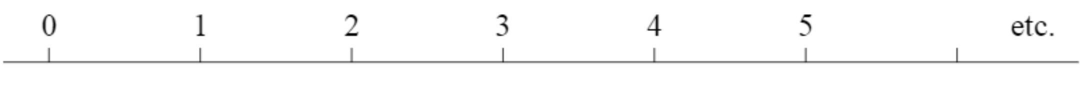
   (a) Em comparação com modelos de área (tais como setores circulares e retângulos), é mais fácil dividir o todo em partes iguais quando somente comprimentos estão envolvidos.

   (b) A reta numérica é um modelo que permite uma formulação simples e precisa para os conceitos básicos de "igual", "menor do que" e "maior do que" para frações.

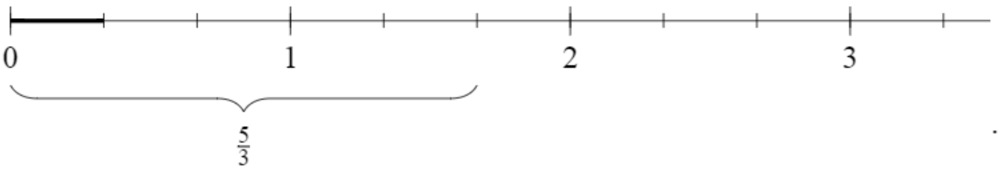
   (c) Ao representar frações como pontos da reta numérica, diferentes interpretações podem ser estabelecidas de acordo com o significado dado para a unidade. Por exemplo, se a unidade 1 representa o volume de um balde (digamos, em litros), então $\frac{1}{3}$ representa um terço do volume do balde em litros; se, por outro lado, a unidade 1 representa a altura de uma sala de aula (digamos, em metros), então $\frac{1}{3}$ representa um terço da altura desta sala em metros.

   (d) A reta numérica é um modelo pelo qual várias operações apresentadas para os números inteiros se estendem naturalmente para as frações. Wu aponta que este tipo de continuidade conceitual em Matemática torna o aprendizado mais fácil porque ela apresenta ao estudante um novo conceito que se integra harmoniosamente com o que o estudante já sabe.

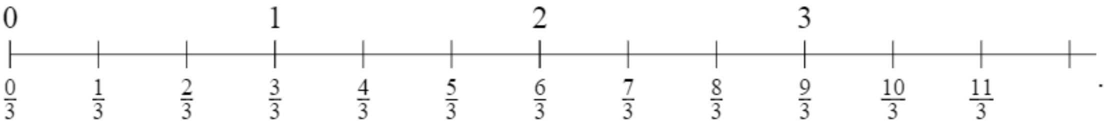
Na construção da reta numérica, Wu considera o número 1 como a **unidade** e o segmento $[0, 1]$, de 0 a 1, como o **segmento unitário**. Os demais números inteiros positivos são obtidos justapondo-se consecutivamente segmentos com o mesmo comprimento do segmento unitário. Aqui, o *todo* é o comprimento do segmento $[0, 1]$ (e não o próprio segmento).



Neste cenário, por exemplo, considerando-se o todo como o comprimento do segmento unitário $[0,1]$, então $\frac{5}{3}$ é o símbolo que denota o **comprimento** de 5 segmentos combinados onde cada segmento é uma parte quando $[0,1]$ é dividido em 3 partes de mesmo comprimento. Em outras palavras, ao se considerar o segmento destacado na figura a seguir como o "segmento unitário", então $\frac{5}{3}$ é apenas o "número 5" no sentido usual de contar até 5 no contexto dos números inteiros. De modo mais informal, Wu descreve esta construção dizendo que "$\frac{5}{3}$ são 5 cópias da fração unitária $\frac{1}{3}$".



Para representar $\frac{5}{3}$ como um **ponto da reta numérica**, Wu propõe o seguinte esquema: considera-se um segmento sobre a reta numérica de comprimento $\frac{5}{3}$ que tem uma de suas extremidades em 0 (o segmento indicado pela chave na figura anterior) e a outra extremidade[a] (um ponto da reta numérica) será rotulado por $\frac{5}{3}$. Ao rotular as demais frações de denominador 3, o aluno perceberá que os números inteiros podem ser representados por frações de denominador 3, isto é, $1 = \frac{3}{3}$, $2 = \frac{6}{3}$, $3 = \frac{9}{3}, \ldots$ (para Wu, rotular 0 por $\frac{0}{3}$ é uma convenção).



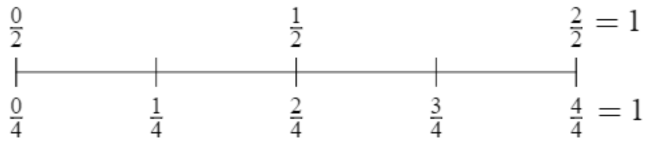
(3) Usando a reta numérica para definir a igualdade de frações: Wu enfatiza que, por meio da representação de frações como pontos na reta numérica, podemos definir de maneira precisa o que significa dizer que duas frações são "iguais": duas frações são iguais se elas representam (rotulam) o mesmo ponto da reta numérica. A afirmação usual nos livros didáticos é a de que "duas frações são iguais se elas nomeiam a mesma quantidade". Mas o que significa "nomear" a "mesma quantidade"? Wu observa que a literatura em Educação Matemática tem apontado para o fato dos alunos abusarem do sinal de igual e que isto acontece porque os alunos não são ensinados de forma cuidadosa sobre o significado preciso da igualdade entre dois objetos. Wu então sugere que o assunto de frações é um bom ponto para se começar a tratar deste tópico.

[a]Evidentemente, existem dois segmentos na reta numérica de comprimento $\frac{5}{3}$ que possuem 0 como uma de suas extremidades. Como apenas números não negativos estão sendo considerados e 0 divide a reta numérica em duas semirretas de origem em 0, escolhe-se aquele cuja outra extremidade está na mesma semirreta da qual 1 pertence.

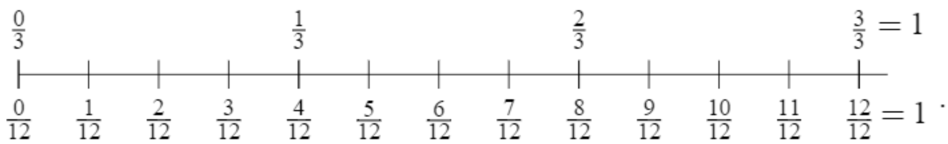
pertence.

Frações equivalentes

(1) Usando a reta numérica para introduzir as ideias iniciais de frações equivalentes: Wu aponta que, por meio de experimentos com a reta numérica, os alunos podem descobrir que muitas frações "simples" são iguais. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{2}{4}$.

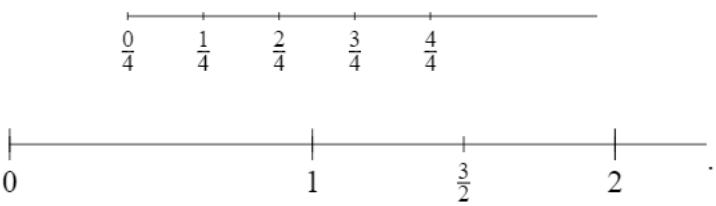


A ideia aqui não é fazer uma discussão mais geral sobre frações equivalentes (o que será feito na próxima série) mas, sim, evidenciar como frações equivalentes aparecem quando frações unitárias são divididas. Como exemplo, Wu considera a fração $\frac{2}{3}$. Ao se subdividir cada segmento de comprimento $\frac{1}{3}$ em, digamos, 4 partes de mesmo comprimento, obteremos que $\frac{2}{3} = \frac{4\times2}{4\times3} = \frac{8}{12}$.



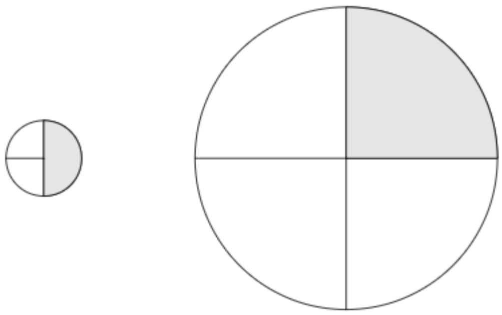
Comparação de frações

(1) Comparação de frações por meio da reta numérica: dadas duas frações como dois pontos na reta numérica, Wu define que aquela à esquerda é dita ser **menor** (notação: $<$) do que aquela mais à direita e, naturalmente, aquela mais à direita é dita ser **maior** (notação: $>$) do que aquela mais à esquerda. Por exemplo, $\frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ e $2 > \frac{3}{2}$.



Wu alerta que não se pode comparar duas frações, ou seja, determinar qual é maior, a menos que ambas refiram-se a *mesma* unidade (isto é, ao mesmo todo). Exemplo clássico: um estudante pode erroneamente pensar que $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ porque o um quarto da pizza à direita na figura a seguir é menor do que metade da pizza à esquerda.

na figura a seguir é menor do que metade da pizza à esquerda.



(2) Comparações simples de frações acessíveis ao nível K-3: mesmo ainda sem o conceito de frações equivalentes, Wu destaca três tipos de comparação de frações que são acessíveis ao nível K-3. São elas:

(a) Se duas frações têm o mesmo denominador, então aquela com maior numerador é a fração maior, uma consequência direta de como frações com o mesmo denominador são representadas como pontos na reta numérica.

(b) Para frações unitárias, quanto maior o denominador, menor a fração. Esta propriedade segue do fato de que se o todo é dividido em partes iguais, quanto mais partes, menores serão essas partes. Assim, quanto maior o denominador, menor a fração. Wu propõe introduzir algum raciocínio relacionando a quantidade de "cópias" de cada fração e o inteiro. Com isto, é possível justificar que $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, pois ao combinarmos 5 cópias de $\frac{1}{5}$ o resultado é 1 e ao combinarmos 5 cópias de $\frac{1}{6}$ o resultado é $\frac{5}{6}$ que é menor do que 1. Logo, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$.

(c) Se duas frações tem o mesmo numerador, então aquela com menor denominador é a maior. Por exemplo, por que $\frac{11}{5} > \frac{11}{6}$? Isto ocorre porque já sabemos que $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$. Então, se combinarmos 11 cópias de cada fração, obtemos que $\frac{11}{6} = 11$ cópias de $\frac{1}{6}$ < 11 cópias de $\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$.

2.5 Algumas questões para análise posterior

- Como os livros didáticos definem o que é uma fração? Eles o fazem usando apenas metáforas e analogias? [p. 75]
- Os livros didáticos usam figuras geométricas ao invés de suas dimensões (comprimento, área, volume) como modelos de frações? [p. 75]
- Os livros didáticos estabelecem alguma conexão entre as frações e a reta numérica? [p. 77]
- Como os livros didáticos definem que duas frações são iguais? Como eles apresentam as frações equivalentes? [p. 78]

as frações equivalentes? [p. 78]

- Como os livros didáticos definem que uma fração é menor do que outra? Como eles ensinam a comparar frações? [p. 78]

3 O Nível K-4

3.1 Diretrizes gerais

No nível K4, o desenvolvimento dos conceitos matemáticos deve se concentrar em três áreas importantes: (1) desenvolver a compreensão e fluência com a multiplicação de vários dígitos e desenvolver a compreensão de dividir para encontrar quocientes envolvendo dividendos com vários dígitos; (2) desenvolver a compreensão da fração equivalente, adição e subtração de frações com denominadores iguais e multiplicação de números inteiros por frações; (3) desenvolver a compreensão de que as figuras geométricas podem ser analisadas e classificadas de acordo com suas propriedades, tais como ter lados paralelos, os lados perpendiculares, medidas de ângulo particular e simetria.

3.2 Campos de conhecimento

Nesta série os conteúdos matemáticos estão subdivididos nos seguintes campos de conhecimento: *Operações e Pensamento Algébrico*; *Números e Operações na Base Dez*; *Números e Operações–Frações*; *Medidas e Dados*; *Geometria*.

3.3 Orientações específicas ao campo Números e Operações–Frações

Nesse nível, o campo *Números e Operações–Frações* tem três objetivos centrais: estender a compreensão do conceito de equivalência de frações e ordenação; construir frações a partir de frações unitárias, aplicando e ampliando os conhecimentos anteriores de operações com números inteiros; entender a notação decimal para frações e comparar frações decimais.

Estender a compreensão do conceito de equivalência de frações e ordenação

1. Explicar porque uma fração $\frac{a}{b}$ é equivalente a uma fração $\frac{n \times a}{n \times b}$ por meio de modelos visuais

de frações, com atenção em como o número e o tamanho das partes diferem, mesmo quando as duas frações são de mesmo tamanho. Utilizar este princípio para reconhecer e gerar frações equivalentes.

2. Comparar duas frações com numeradores diferentes e denominadores diferentes, e.g., por meio da criação de denominadores ou numeradores comuns ou pela comparação com uma fração modelo, como $\frac{1}{2}$. Reconhecer que as comparações são válidas apenas quando as duas frações se referem ao mesmo todo. Registrar os resultados de comparações com os símbolos $>$, $=$ ou $<$, e justificar as conclusões, e.g., por meio de um modelo visual de fração.

Construir frações a partir de frações unitárias, aplicando e ampliando os conhecimentos anteriores de operações com números inteiros

3. Compreender uma fração $\frac{a}{b}$, com $a > 1$, como uma soma de frações de $\frac{1}{b}$.

   a. Compreender a adição e a subtração de frações como processos de juntar e separar as partes referentes ao mesmo todo.

   b. Decompor uma fração em uma soma de frações com o mesmo denominador em mais de uma maneira, registrando cada decomposição por meio de uma igualdade. Justificar decomposições, e.g., por meio de um modelo visual de fração. Exemplos: $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$; $\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8}$; $2\frac{1}{8} = 1 + 1 + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{8}{8} + \frac{1}{8}$.

   c. Adicionar e subtrair números mistos, e.g., substituindo cada número misto por uma fração equivalente e/ou usando as propriedades das operações e a relação entre adição e subtração.

   d. Resolver problemas envolvendo adição e subtração de frações que se referem ao mesmo todo e que possuem o mesmo denominador, e.g., por meio de modelos visuais de fração e equações para representar o problema.

4. Aplicar e ampliar os conhecimentos anteriores de multiplicação para multiplicar um número inteiro por uma fração.

   a. Compreender a fração $\frac{a}{b}$ como um múltiplo de $\frac{1}{b}$. Por exemplo, usar um modelo visual para representar a fração $\frac{5}{4}$ como o produto $5 \times \frac{1}{4}$, registrando a conclusão pela igualdade $\frac{5}{4} = 5 \times \frac{1}{4}$.

   b. Compreender um múltiplo de $\frac{a}{b}$ como um múltiplo de $\frac{1}{b}$ e utilizar este conhecimento para multiplicar um número inteiro por uma fração. Por exemplo, usar um modelo visual para expressar $3 \times \frac{2}{5}$ como $6 \times \frac{1}{5}$, reconhecendo este produto como $\frac{6}{5}$. (Em geral, $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b}$).

c. Resolver problemas envolvendo multiplicação de um número inteiro por uma fração, e.g., por meio de modelos visuais e equações para representar o problema. Por exemplo, se cada pessoa em uma festa vai comer $\frac{3}{8}$ de uma libra[a] de carne assada e haverá 5 pessoas na festa, quantas libras de carne assada serão necessárias? Entre quais dois números inteiros sua resposta estará?

Entender a notação decimal para frações e comparar frações decimais

5. Expressar uma fração com denominador 10 como uma fração equivalente com denominador 100 e usar esta técnica para somar duas frações com denominadores 10 e 100[b]. Por exemplo, expressar $\frac{3}{10}$ como $\frac{30}{100}$ e somar $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} = \frac{34}{100}$.
6. Usar a notação decimal para frações com denominadores 10 ou 100. Por exemplo, escrever 0,62 como $\frac{62}{100}$; localizar 0,62 em uma reta numérica.
7. Comparar dois números decimais até a casa dos centésimos analisando seus tamanhos. Reconhecer que as comparações são válidas apenas quando os números decimais se referem ao mesmo todo. Registrar os resultados de comparações com os símbolos $>$,$=$, ou $<$, e justificar as conclusões por meio de um modelo visual.

3.4 Algumas orientações de Wu

Com relação ao campo *Números e Operações–Frações*, Wu salienta que os tópicos principais desta série são: o **fato fundamental sobre frações equivalentes**, a saber, uma fração fica inalterada (isto é, sua posição em uma reta numérica não é alterada) quando seu numerador e denominador são multiplicados por um mesmo número inteiro diferente de zero; as aplicações deste fato fundamental na comparação, adição e subtração de frações; o significado da multiplicação de um número inteiro por uma fração e a introdução de números decimais com um número finito de casas decimais.

Frações equivalentes

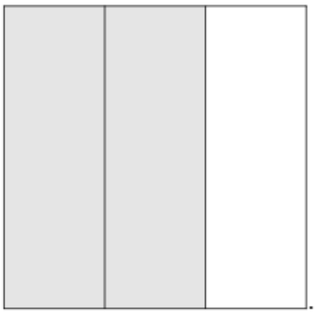
(1) O FATO FUNDAMENTAL SOBRE FRAÇÕES EQUIVALENTES: Wu sugere que os alunos podem entender esta propriedade por meio de modelos de área. Por exemplo, para ver que $\frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{8}{12}$, considera-se o todo como a área do quadrado unitário e que este está

[a]Uma libra internacional é equivalente a aproximadamente 453,6 gramas. Abreviação: lb.

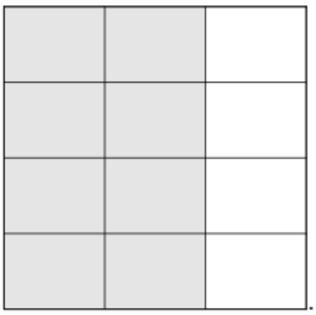
[b]Estudantes podem gerar frações equivalentes para desenvolver estratégias para somar frações com denominadores diferentes em geral. Mas adição e subtração com denominadores diferentes, em geral, não é um requisito

nadores diferentes em geral. Mas adição e subtração com denominadores diferentes, em geral, não é um requisito para esta série.

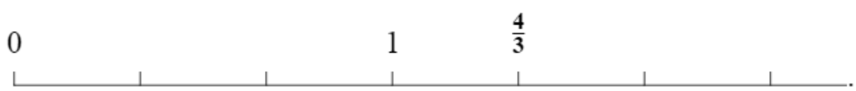
dividido em três retângulos de mesma área, de modo que $\frac{2}{3}$ é então a área da região hachurada na figura a seguir.



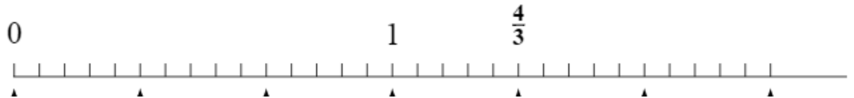
Agora, ao dividirmos esse mesmo quadrado unitário em 4 retângulos horizontais de mesma área, este fica então dividido em 4×3 retângulos pequenos de mesma área e a região hachurada fica pavimentada por 4×2 destes retângulos pequenos. Portanto, a área da região hachurada, que é igual a $\frac{2}{3}$, também é igual a $\frac{4\times 2}{4\times 3}$, uma vez que ela é a justaposição de 4×2 partes quando o todo é dividido em 4×3 partes de mesma área.



Wu observa, contudo, que fica mais complicado usar o modelo da área para reproduzir o argumento, dado anteriormente para $\frac{2}{3}$, para frações maiores do que 1 (por exemplo, $\frac{17}{4}$) e para frações cujo denominador é um número maior (por exemplo, 12). Neste caso, Wu sugere usar a reta numérica que permite dar uma abordagem mais uniforme a esse fato fundamental sobre frações equivalentes. Por exemplo, para mostrar porque $\frac{4}{3} = \frac{5\times 4}{5\times 3}$, observe inicialmente que $\frac{4}{3}$ é igual a 4 cópias de $\frac{1}{3}$. Queremos mostrar que $\frac{4}{3}$ também é igual a 20 cópias de $\frac{1}{15}$. Na reta numérica, $\frac{4}{3}$ é o 4º múltiplo de $\frac{1}{3}$:



Dividindo-se agora cada segmento de comprimento $\frac{1}{3}$ em 5 segmentos menores todos de mesmo comprimento (o "5" é porque estamos considerando $\frac{5\times 4}{5\times 3}$), obtemos a figura:



Estes segmentos menores dividem o segmento unitário em 5×3 partes de mesmo comprimento e a fração $\frac{4}{3}$ é igual a 5×4 cópias destes segmentos menores. Assim, $\frac{4}{3}$ é igual a $\frac{5\times 4}{5\times 3} = \frac{20}{15}$.

(2) Importância exagerada dada às frações irredutíveis: o fato fundamental sobre frações equivalentes é usualmente apresentada mais em termos da divisão do que da multiplicação, o que conhecemos como "simplificação" de frações, e.g.,

$$\frac{20}{15} = \frac{20 \div 5}{15 \div 5} = \frac{4}{3}.$$

Wu observa que livros didáticos e professores dão uma importância exagerada a essa habilidade de cancelar fatores comuns e "simplificar" a fração. De fato, existe uma tradição no Ensino Básico em "simplificar" toda e qualquer fração até obter uma fração irredutível equivalente. Neste aspecto, Wu é enfático: esta tradição não encontra respaldo matemático, pois não há teorema da Matemática que diga que frações redutíveis são proibidas.

(3) Usando frações equivalentes para comparar duas frações quaisquer: do ponto de vista da compreensão conceitual das frações, a consequência mais importante do fato fundamental sobre frações equivalentes é a propriedade de que *quaisquer duas frações podem ser reescritas como frações com o mesmo denominador*. Wu mostra como esta propriedade pode ser usada para comparar duas frações quaisquer. Por exemplo, qual fração é menor: $\frac{5}{8}$ ou $\frac{7}{12}$? Uma vez que

$$\frac{5}{8} = \frac{12 \times 5}{12 \times 8} = \frac{60}{96} \qquad \text{(60 cópias de } \frac{1}{96}\text{)}$$

e

$$\frac{7}{12} = \frac{8 \times 7}{8 \times 12} = \frac{56}{96} \qquad \text{(56 cópias de } \frac{1}{96}\text{)},$$

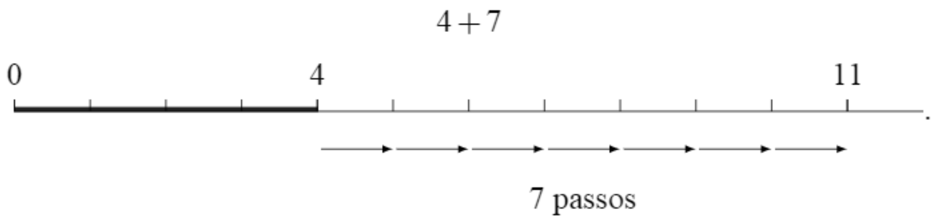
conclui-se que $\frac{7}{12} < \frac{5}{8}$. Wu observa que esta conclusão pode ser obtida comparando-se os produtos cruzados 7×8 e 12×5. De fato, dependendo da turma K-4, Wu sugere a possibilidade de apresentar esta propriedade na forma de algoritmo usando notação simbólica: se a, b, c e d são inteiros positivos, então $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad < bc$.

Adição e subtração de frações

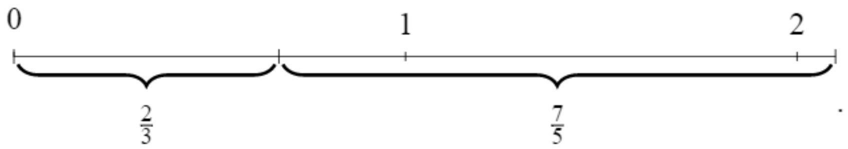
(1) adição e subtração de frações como uma extensão conceitual destas operações nos inteiros: Wu propõe que as ideias conceituais da adição e subtração de frações sejam uma extensão natural das mesmas ideias conceituais já apresentadas

para os números inteiros. Observe que a adição de dois números inteiros, tais como 4 e 7,

pode ser modelada pelo comprimento total do segmento obtido pela justaposição de dois segmentos de comprimentos 4 e 7, sendo o comprimento total igual a 11, como ilustrado a seguir:

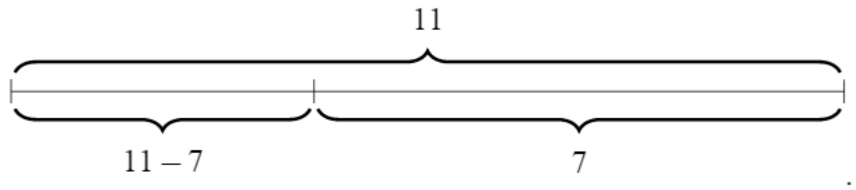


Wu observa que o uso da justaposição de dois segmentos na reta numérica incorpora a noção intuitiva de que adição é "juntar coisas". Exatamente a mesma ideia pode ser usada para construir o conceito de adição de frações. Assim, $\frac{2}{3}+\frac{7}{5}$ é visto como o comprimento total da justaposição de dois segmentos na reta numérica, um de comprimento $\frac{2}{3}$ e o outro de comprimento $\frac{7}{5}$.

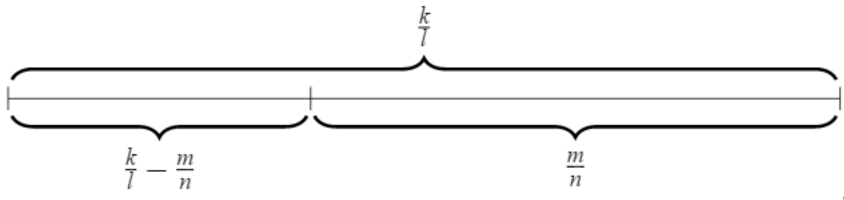


Wu salienta que, nesta série, não é importante saber o resultado exato da operação, mas, sim, a ideia conceitual relacionada à operação. O cálculo propriamente dito será apresentado somente na série seguinte K-5. Na série K-4, os exemplos explorados devem ser os de frações com o mesmo denominador.

No caso da subtração de dois números inteiros, a ideia intuitiva associada é a de "tirar uma coisa de outra". Por exemplo, $11-7$ significa "tirar" 7 de 11. Em termos da reta numérica, $11-7$ é o comprimento do segmento resultante quando um segmento de comprimento 7 é tirado a partir da extremidade final do segmento de comprimento 11:

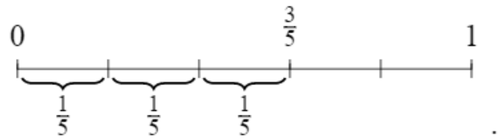


O mesmo princípio se estende para o caso de frações: se $\frac{k}{l} \geq \frac{m}{n}$, então $\frac{k}{l}-\frac{m}{n}$ é igual ao comprimento do segmento que sobra quando um segmento de comprimento $\frac{m}{n}$ é removido a partir de uma extremidade de um segmento de comprimento $\frac{k}{l}$:



Wu ressalta o fato de que, com este aparato conceitual via reta numérica, os alunos podem ver a adição e a subtração de frações como uma extensão direta dos conceitos de adição e subtração de números inteiros. Segundo Wu, este tipo de continuidade conceitual em Matemática torna o aprendizado mais fácil, porque mostra aos alunos que o novo conceito se encaixa perfeitamente com o que eles já sabem.

(2) O IMPORTANTE PAPEL DAS FRAÇÕES UNITÁRIAS: Wu enfatiza mais uma vez que, em termos da adição, as frações unitárias são o alicerce para a construção de frações mais gerais. Da mesma forma que cada número inteiro é apenas a adição repetida de 1's, cada fração é a adição repetida de uma fração unitária. Por exemplo, $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$, porque $\frac{3}{5}$ é o comprimento total de 3 cópias de $\frac{1}{5}$:



Wu observa que, usando frações unitárias, é fácil concluir que $\frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7+4}{5}$, pois

$$\frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \overbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5}}^{7} + \overbrace{\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5}}^{4} = \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{7+4}}{5} = \frac{7+4}{5}.$$

De fato, este mesmo raciocínio leva o resultado geral: se somarmos frações com o mesmo denominador, obtemos uma fração com o mesmo denominador cujo numerador é a soma dos numeradores das frações iniciais.

(3) NÚMEROS MISTOS DEVEM SER APRESENTADOS SOMENTE DEPOIS DA ADIÇÃO DE FRAÇÕES TER SIDO DEFINIDA: Wu constata que, nos livros didáticos, os números mistos são apresentados logo após a introdução de frações e antes mesmo da adição de frações ter sido estudada. Nestes livros, um número misto como $7\frac{1}{5}$ é definido simplesmente como "7 **e** $\frac{1}{5}$" e o significado do **e** nesta definição não é esclarecido. De fato, $7\frac{1}{5}$ é uma notação para $7 + \frac{1}{5}$ (o sinal de $+$ é omitido) e, portanto, o **e** significa $+$. Wu considera que este desrespeito (apresentar números mistos antes da adição de frações) com a trajetória lógica

desrespeito (apresentar números mistos antes da adição de frações) com a trajetória lógica da aprendizagem dos alunos tem contribuído para a não-aprendizagem de frações. Wu

observa também que, como uma consequência desse descaso, a conversão de um número misto em uma fração imprópria é dada como uma simples habilidade de memorização. Este não é o caso, pois a conversão de um número misto em uma fração imprópria é apenas uma questão de soma de frações, e.g.,

$$7\frac{1}{5} = 7 + \frac{1}{5} = \frac{35}{5} + \frac{1}{5} = \frac{36}{5}.$$

Por outro lado, Wu observa que a conversão de uma fração imprópria em um número misto se dá pela divisão com resto. Veja que, ao dividir 47 por 6, obtemos quociente 7 e resto 5. A maneira correta de expressar este fato é escrevendo $47 = (7 \times 6) + 5$. Portanto,

$$\frac{47}{6} = \frac{(7 \times 6) + 5}{6} = \frac{7 \times 6}{6} + \frac{5}{6} = 7 + \frac{5}{6} = 7\frac{5}{6}.$$

Nesse processo, o aluno deve usar seus conhecimentos de adição de frações com mesmo denominador, frações equivalentes e a definição de número misto (na última etapa) e esse método é aplicável para todas as frações impróprias.

Multiplicação de um número inteiro por uma fração

(1) A MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO INTEIRO POR UMA FRAÇÃO COMO UMA EXTENSÃO CONCEITUAL DA MULTIPLICAÇÃO NOS INTEIROS: Wu relembra o significado da multiplicação de números inteiros como a soma de parcelas iguais, e.g., que 3×7 significa $7+7+7$ e que 5×4 significa $4+4+4+4+4$. Wu propõe, novamente pelo princípio da continuidade conceitual, que o mesmo raciocínio seja usado para definir a multiplicação de um número inteiro por uma fração. Desta forma, é razoável estabelecer que

$$3 \times \frac{2}{5} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5}$$

e, analogamente, que

$$11 \times \frac{5}{4} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \cdots + \frac{5}{4}}_{11\text{vezes}},$$

onde o símbolo "$\stackrel{\text{def}}{=}$" significa que estamos dando uma definição. Mais geralmente, dizemos que um número inteiro n multiplicado por uma fração dada tal como $\frac{5}{8}$ é igual a n **cópias de** $\frac{5}{8}$ no sentido que o resultado é igual a:

$$\underbrace{\frac{5}{8} + \frac{5}{8} + \cdots + \frac{5}{8} + \frac{5}{8}}.$$

(2) Frações como múltiplos de frações unitárias: Wu propõe olharmos uma fração como a multiplicação de um número inteiro por uma fração unitária. Por exemplo,

$$\frac{7}{5} = 7 \times \frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad \frac{11}{3} = 11 \times \frac{1}{3}.$$

Wu expressa as igualdades acima, dizendo que $\frac{7}{5}$ é o 7º **múltiplo de** $\frac{1}{5}$ e $\frac{11}{3}$ é o 11º **múltiplo de** $\frac{1}{3}$. De modo geral, Wu traz uma nova leitura para as frações: a fração $\frac{m}{n}$ é o m-**ésimo múltiplo de** $\frac{1}{n}$.

Wu acrescenta que o conceito de multiplicação de um número inteiro por uma fração nos permite transportar a forma de pensar sobre um problema de números inteiros para um problema envolvendo frações. Por exemplo, considere o seguinte problema: se a capacidade de um balde é de 2 galões[c] e se 43 baldes de água enchem um tanque, então a capacidade do tanque é de $43 \times 2 = 86$ galões de água. Agora, suponha que a capacidade de um balde seja $2\frac{3}{4}$ de galão e que, como antes, 43 baldes de água encham um tanque, qual é a capacidade do tanque? A resposta é $43 \times 2\frac{3}{4}$ de galão. Isso ocorre porque a capacidade do tanque é igual a

$$\underbrace{2\frac{3}{4} + 2\frac{3}{4} + \cdots + 2\frac{3}{4}}_{43 \text{ vezes}} \text{ galões.}$$

Números decimais (com um número finito de casas decimais)

(1) Números decimais com um número finito de casas decimais são notações para frações decimais: Wu destaca que não é surpresa que as frações com denominadores 10, 100, 1000, etc sejam especiais, visto que o sistema de numeração que adotamos é o decimal (de base 10). Frações deste tipo são chamadas de **frações decimais**. O fato fundamental sobre frações equivalentes nos diz, imediatamente, que uma fração com denominador 10 pode ser reescrita como uma fração com denominador 100. Por exemplo,

$$\frac{7}{10} = \frac{10 \times 7}{10 \times 10} = \frac{70}{100}.$$

Wu sugere que esta pode ser a ocasião, em uma sala de aula do nível K-4, para discutir o porquê de 7 moedas de 10 centavos representarem o mesmo valor que 70 moedas de 1 centavo.

Segundo Wu, pelo fato das frações com denominadores iguais a 10, 100, 1000, etc serem usadas com tanta frequência, o padre jesuíta alemão Christopher Clavius (1538–1612)

[c]O galão (abreviação: gal) é uma unidade de medida de volume de líquidos, utilizada na comunidade anglo-saxônica e corresponde a aproximadamente 3,785 litros.

surgiu com a ideia, em 1593, de abreviá-las usando o chamado **ponto decimal**. Neste caso, escrevemos:

$$\frac{27}{10} = 2.7, \quad \frac{27}{100} = 0.27 \quad \text{e} \quad \frac{27}{1000} = 0.027.$$

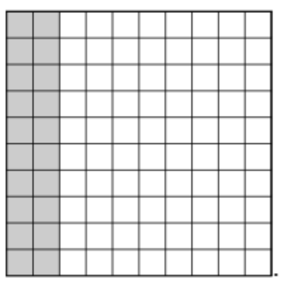
Observação: aqui no Brasil, utilizamos a notação decimal com a vírgula e não com o ponto. Ou seja, 2,7 para nós é o mesmo que 2.7 nos EUA.

(2) $2{,}70 = 2{,}7$ COMO UMA CONSEQUÊNCIA DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES: Wu observa que um número decimal como 2,70 é considerado como tendo duas casas decimais, a saber, 7 e 0. Entretanto, se aplicarmos a propriedade fundamental das frações equivalentes, veremos então que $2{,}70 = 2{,}7$, pois, por definição,

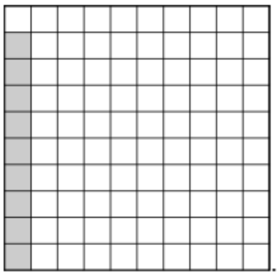
$$2{,}70 = \frac{270}{100} = \frac{10 \times 27}{10 \times 10} = \frac{27}{10} = 2{,}7.$$

Wu afirma que é fácil comparar números decimais quando utilizamos seu significado (ou seja, sua definição como frações decimais) e aplicamos o fato fundamental sobre frações equivalentes para reescrever as frações envolvidas com um mesmo denominador: considere, como exemplo, a comparação entre 0,2 e 0,09, isto é, a comparação entre $\frac{2}{10}$ e $\frac{9}{100}$. Já sabemos que $\frac{2}{10} = \frac{20}{100}$ e que $20 > 9$, logo $\frac{20}{100} > \frac{9}{100}$, ou seja, $0,2 > 0,09$.

(3) REPRESENTAÇÃO PICTÓRICA DOS NÚMEROS DECIMAIS COM UM NÚMERO FINITO DE CASAS DECIMAIS: Wu sugere recorrer a um desenho para obter uma compreensão mais intuitiva do porquê $0{,}2 > 0{,}09$. Considerando o todo como a área de um quadrado unitário e dividindo-o em 100 partes de mesma área, podemos representar 0,2 (equivalente à área de 2 partes quando o todo é dividido em 10 partes de mesma área) como a área hachurada na figura a seguir:



De modo análogo, 0,09 (a área de 9 partes quando o todo é dividido em 100 partes de mesma área) pode ser representado pela área hachurada na seguinte figura:



Então, claramente, $0{,}2 > 0{,}09$. Wu salienta que este recurso visual é certamente um conhecimento útil, mas que isto não deve ser tudo o que um aluno desta série deve saber sobre comparações de números decimais. O argumento dado anteriormente com o uso do significado de um número decimal e o fato fundamental sobre frações equivalentes é mais importante e deve ser apresentado obrigatoriamente no nível K-4, pois ele é universalmente aplicável a todos os números decimais com um número finito de casas decimais, enquanto que o argumento visual não o é.

3.5 Algumas questões para análise posterior

- Os livros apresentam a regra do produto cruzado (isto é, para a, b, c e d inteiros positivos, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \times d < b \times c$)? [p. 78]
- Os livros passam a ideia de que toda fração deve ser obrigatoriamente escrita em sua forma reduzida? [p. 80]
- Como os livros apresentam frações mistas? Eles dão alguma aplicação para este tipo de fração? [p. 80]
- Como a multiplicação de um inteiro por uma fração é apresentada? [p. 83]
- Como os números decimais com um número finito de casas decimais são definidos? [p. 87]
- Como os livros justificam, por exemplo, que $2{,}70 = 2{,}7$? [p. 87]

4 O Nível K-5

4.1 Diretrizes gerais

No nível K-5, o desenvolvimento dos conceitos matemáticos deve se concentrar em três áreas importantes: (1) ganhar fluência na adição e na subtração de frações e o desenvolvimento da compreensão da multiplicação de frações e da divisão de frações em casos especiais (frações unitárias divididas por um número inteiro e números inteiros divididos por frações unitárias); (2) estender a divisão para divisores com 2 dígitos, integrando frações decimais com o sistema de valor posicional e o desenvolvimento da compreensão das operações com números decimais até a casa dos centésimos e da fluência em operações com números inteiros e números decimais; (3) desenvolver a compreensão de volumes.

4.2 Campos de conhecimento

Nesta série os conteúdos matemáticos estão subdivididos nos seguintes campos de conhecimento: *Operações e O Pensamento Algébrico*; *Números e Operações na Base Dez*; *Números e Operações–Frações*; *Medidas e Dados*; *Geometria*.

4.3 Orientações específicas ao campo Números e Operações–Frações

No campo *Números e Operações–Frações* se destacam dois objetivos centrais: usar frações equivalentes como uma estratégia para somar e subtrair frações; aplicar e estender os conhecimentos anteriores de multiplicação e divisão para multiplicar e dividir frações.

Usar frações equivalentes como uma estratégia para somar e subtrair frações

1. Somar e subtrair frações com denominadores diferentes (incluindo números mistos) substituindo as frações dadas por frações equivalentes, de modo a produzir uma soma ou

subtração de frações com denominadores iguais equivalentes. Por exemplo, $\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{23}{12}$. De modo geral, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.
2. Resolver problemas envolvendo adição e subtração de frações que se referem a um mesmo todo, incluindo os casos de denominadores diferentes, por meio de modelos visuais de fração ou expressões para representar o problema. Usar frações de referência e o senso numérico de frações para estimar mentalmente e avaliar a razoabilidade das respostas. Por exemplo, reconhecer o resultado incorreto $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{3}{7}$, observando que $\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$.

Aplicar e estender os conhecimentos anteriores de multiplicação e divisão para multiplicar e dividir frações

3. Interpretar uma fração como uma divisão do numerador pelo denominador ($\frac{a}{b}=a\div b$). Resolver problemas envolvendo divisão de números inteiros que levem a respostas na forma de frações ou números mistos, e.g., usando-se modelos visuais de frações ou expressões para representar o problema. Por exemplo, interpretar $\frac{3}{4}$ como o resultado da divisão de 3 por 4, observando que $\frac{3}{4}$ multiplicado por 4 é igual a 3 e que, quando três inteiros são divididos igualmente entre quatro pessoas, cada pessoa recebe uma porção de tamanho $\frac{3}{4}$. Se 9 pessoas querem dividir igualmente pelo peso um saco de 50 libras de arroz, quantas libras de arroz cada pessoa deve receber? Entre quais dois números inteiros estará a resposta?

4. Aplicar e estender os conhecimentos anteriores de multiplicação para multiplicar uma fração por um número inteiro ou por uma fração.

    a. Interpretar o produto $\frac{a}{b}\times q$ como a partes de uma partição de q em b partes iguais; equivalentemente, como o resultado de uma sequência de operações $a\times(q\div b)$. Por exemplo, usar um modelo visual de fração para mostrar que $\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$ e criar um contexto para esta igualdade. Fazer o mesmo com $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$. (Em geral, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.)

    b. Encontrar a área de um retângulo cujos comprimentos dos lados são frações ladrilhando-o com retângulos unitários[a] adequados e mostrar que ela é a mesma que seria encontrada multiplicando-se os comprimentos dos lados. Multiplicar comprimentos laterais fracionários para encontrar áreas de retângulos e representar produtos de frações como áreas de retângulos.

[a]Isto é, retângulos cujos lados são frações unitárias.

5. Interpretar multiplicação como uma mudança de escala (redimensionamento) por meio das seguintes estratégias:

    a. Comparando-se o valor de um produto com o valor de um de seus fatores com base no valor do outro fator sem realizar a multiplicação indicada.

    b. Explicando-se porque multiplicar um número dado por uma fração maior que 1 resulta em um produto maior do que o número dado (reconhecendo a multiplicação por números inteiros maiores que 1 como um caso familiar); explicando-se porque multiplicar um dado número por uma fração menor que 1 resulta em um produto menor do que o número dado; e relacionando-se o conceito de frações equivalentes $\frac{a}{b} = \frac{n \times a}{n \times b}$ com o efeito de se multiplicar $\frac{a}{b}$ por 1.

6. Resolver problemas do mundo real que envolvam a multiplicação de frações e números mistos, e.g., por meio de modelos visuais de fração ou expressões para representar o problema.

7. Aplicar e estender os conhecimentos anteriores de divisão para dividir frações unitárias por números inteiros e números inteiros por frações unitárias[a].

    a. Interpretar a divisão de uma fração unitária por um número inteiro diferente de zero e calcular esses quocientes. Por exemplo, criar um contexto para $\frac{1}{3} \div 4$ e usar um modelo visual de fração para mostrar o quociente. Utilizar a relação entre a multiplicação e a divisão para explicar que $\frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{12}$ porque $\frac{1}{12} \times 4 = \frac{1}{3}$.

    b. Interpretar a divisão de um número inteiro por uma fração unitária e calcular esses quocientes. Por exemplo, criar um contexto para $4 \div \frac{1}{5}$ e usar um modelo visual de fração para mostrar o quociente. Utilizar a relação entre a multiplicação e a divisão para explicar que $4 \div \frac{1}{5} = 20$ porque $20 \times \frac{1}{5} = 4$.

    c. Resolver problemas do mundo real que envolvam divisão de frações unitárias por números inteiros diferentes de zero e divisão de números inteiros por frações unitárias, e.g., usando-se modelos visuais de fração e expressões para representar o problema. Por exemplo, qual é a quantidade de chocolate que cada pessoa vai receber se três pessoas compartilham $\frac{1}{2}$ libra de chocolate igualmente? Quantas porções de $\frac{1}{3}$ de xícara cabem em 2 xícaras de passas?

[a]Os alunos capazes de multiplicar frações em geral podem desenvolver estratégias para dividir frações em geral raciocinando sobre a relação entre a multiplicação e a divisão. Mas a divisão de uma fração por uma fração

não é um requisito desta série.

4.4 Orientações específicas ao campo Números e Operações na Base Dez

No campo *Números e Operações na Base Dez* se destaca um único objetivo relacionado às frações: efetuar operações com números inteiros com vários dígitos e com números decimais até a casa dos centésimos.

Efetuar operações com números inteiros com vários dígitos e com números decimais até a casa dos centésimos

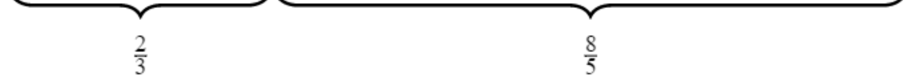
7. Adicionar, subtrair, multiplicar e dividir números decimais até centésimos, usando modelos concretos ou desenhos e estratégias baseadas no valor posicional, propriedades das operações, e/ou a relação entre adição e subtração; relacionar a estratégia a um método e explicar por escrito o raciocínio usado.

4.5 Algumas orientações de Wu

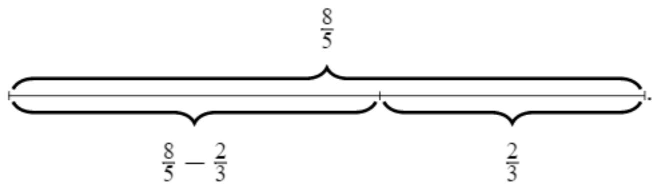
Wu começa chamando atenção que o estudo das frações é o tema dominante em Matemática nesta série e que requer uma discussão cuidadosa e detalhada. Ele destaca os principais tópicos: adição e subtração de duas frações quaisquer; a interpretação de uma fração como uma divisão; a multiplicação de duas frações quaisquer e suas aplicações; a aritmética dos números decimais (até a casa dos centésimos); casos simples da divisão de frações.

Somando e subtraindo frações

(1) ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COMO UMA EXTENSÃO CONCEITUAL DESTAS OPERAÇÕES NOS INTEIROS VIA FRAÇÕES EQUIVALENTES: a primeira coisa que Wu destaca é que, conceitualmente, não há diferença entre somar e subtrair números inteiros e somar e subtrair frações, ou seja, adição significa "juntar" as coisas e subtração significa "tirar" uma coisa da outra. Wu considera que esse fato deve ser enfatizado em sala de aula. Relembrando que esses significados já foram trabalhados na série anterior, Wu revê cada significado com os exemplos $\frac{2}{3}+\frac{8}{5}$ e $\frac{8}{5}-\frac{2}{3}$. A soma $\frac{2}{3}+\frac{8}{5}$ é o comprimento total da justaposição de um segmento de comprimento $\frac{2}{3}$ com outro de comprimento $\frac{8}{5}$.



Já a subtração $\frac{8}{5}-\frac{2}{3}$ é o comprimento do segmento resultante quando retiramos um segmento de comprimento $\frac{2}{3}$ de um segmento de comprimento $\frac{8}{5}$.



Enquanto que na série anterior o foco estava nesta compreensão conceitual das operações de adição e subtração, Wu mostra como o cálculo propriamente dito destas operações pode ser realizado facilmente com o uso de frações equivalentes e, mais ainda, que ele não difere dos cálculos de adição e subtração que os alunos já sabem fazer com os números inteiros. Como calcular $\frac{2}{3}+\frac{8}{5}$, por exemplo? Como sabemos somar frações de mesmo denominador, a ideia é então encontrar frações equivalentes às frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{5}$. Como $\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{5\times 3}=\frac{10}{15}$ e $\frac{8}{5}=\frac{3\times 8}{3\times 5}=\frac{24}{15}$, segue-se que$\frac{2}{3}$ e $\frac{8}{5}$ são equivalentes, respectivamente, a $\frac{10}{15}$ e $\frac{24}{15}$. Desta maneira, por definição, a soma $\frac{2}{3}+\frac{8}{5}$ é o comprimento total de 10 cópias de $\frac{1}{15}$ com 24 cópias de $\frac{1}{15}$, ou seja, o comprimento total é $(10+24)$ cópias de $\frac{1}{15}$. Na escrita simbólica, isso se torna

$$\frac{2}{3}+\frac{8}{5}=\frac{10}{15}+\frac{24}{15}=\frac{10+24}{15}=\frac{34}{15}.$$

Wu atenta para o fato de que o que foi feito não difere do que se faz com números inteiros: juntou-se 10 com 24 objetos (no caso, os objetos são as frações unitárias $\frac{1}{15}$). De modo geral, se m, n, k e ℓ são números inteiros, com $\ell \neq 0$ e $n \neq 0$, então esse mesmo raciocínio pode ser aplicado para concluir que

$$\frac{k}{\ell}+\frac{m}{n}=\frac{kn}{\ell n}+\frac{\ell m}{\ell n}=\frac{kn+\ell m}{\ell n}.$$

O conceito de subtração de frações é semelhante ao de adição de frações. Considere $\frac{8}{5}-\frac{2}{3}$. Wu observa que, assim como no caso da subtração de números inteiros, é preciso primeiro verificar se $\frac{8}{5}>\frac{2}{3}$. De fato: $\frac{8}{5}>1$ enquanto que $\frac{2}{3}<1$. De maneira geral, Wu sugere utilizar o algoritmo do produto cruzado para fazer essa verificação, isto é, $\frac{8}{5}>\frac{2}{3}$ pois $8\cdot 3>5\cdot 2$. Tal como no caso da adição de $\frac{2}{3}+\frac{8}{5}$, o mesmo raciocínio pode ser aplicado para calcular $\frac{8}{5}-\frac{2}{3}$:

$$\frac{8}{5}-\frac{2}{3}=\frac{3\times 8}{3\times 5}-\frac{5\times 2}{5\times 3}=\frac{24-10}{15}=\frac{14}{15}.$$

(2) A irrelevância do mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores das frações nas operações de adição e subtração: como visto no item anterior,

para se somar ou se subtrair frações, se faz necessário reescrevê-las em frações equivalentes com um mesmo denominador. Wu expõe que, de forma geral, uma maneira simples e eficiente de se fazer isto é tomar o produto dos denominadores envolvidos. No exemplo $\frac{2}{3}+\frac{8}{5}$ dado anteriormente, basta tomar $3\times 5=15$ como denominador comum. Wu ainda coloca que, em casos especiais, no entanto, pode-se fazer uma escolha mais óbvia de um denominador comum. Considere $\frac{2}{3}+\frac{23}{18}$. Claramente, deveríamos usar 18 como denominador comum neste caso, porque 18 já é um múltiplo de 3:

$$\frac{2}{3}+\frac{23}{18}=\frac{6\times 2}{6\times 3}+\frac{23}{18}=\frac{12+23}{18}=\frac{35}{18}.$$

Porém, Wu observa que caso tivéssemos tomado 3×18 como denominador comum, obteríamos

$$\frac{2}{3}+\frac{23}{18}=\frac{18\times 2}{18\times 3}+\frac{3\times 23}{3\times 18}=\frac{36+69}{54}=\frac{105}{54}.$$

Mas, pelo fato fundamental sobre frações equivalentes, segue-se que

$$\frac{105}{54}=\frac{3\times 35}{3\times 18}=\frac{35}{18},$$

que é a mesma resposta obtida anteriormente. Neste exemplo, o número 18 é o que chamamos de *mínimo múltiplo comum* (mmc) entre os inteiros 3 e 18. Entretanto, Wu enfatiza que a habilidade de fazer o uso do mmc para o cálculo da adição (ou da subtração) de frações, apesar de trazer alguma simplificação no cálculo, não é de maneira alguma algo mandatório para se obter a resposta. Segundo Wu, esta habilidade deve ser ensinada como um tópico de enriquecimento se houver tempo e ela não é exigida de acordo com o *Common Core*.

Somando e subtraindo números decimais (com um número finito de casas decimais)

(1) Justificando o algoritmo usual de adição de números decimais (com um número finito de casas decimais) por meio das frações decimais e frações equivalentes: Wu orienta que, antes de mais nada, é preciso estar bem compreendido qual é o significado dos números decimais como frações decimais, pois o algoritmo usual de adição destes números nada mais é do que uma consequência imediata deste significado. Considere o exemplo $15{,}6+2{,}74$. Usando-se a definição de número

decimal (com um número finito de casas decimais) e frações equivalentes, segue-se que:

$$\begin{aligned}
15{,}6+2{,}74 &= \frac{156}{10}+\frac{274}{100} && \text{(por definição de número decimal)} \\
&= \frac{1560}{100}+\frac{274}{100} && \text{(frações equivalentes)} \qquad (4.1)\\
&= \frac{1560+274}{100} && (4.2)\\
&= \frac{1834}{100} \\
&= 18{,}34. && (4.3)
\end{aligned}$$

Wu usa então este raciocínio para explicar o algoritmo que conhecemos para somar ou subtrair números decimais:

(a) Escreva os dois números decimais, um embaixo do outro, alinhando pela vírgula decimal.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 5 & ,6 & \\
+ & & 2 & ,7 & 4 \\
\hline
\end{array}$$

(b) Adicione os números como se fossem números inteiros, ignorando as vírgulas decimais.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 5 & 6 & 0 \\
+ & & 2 & 7 & 4 \\
\hline
 & 1 & 8 & 3 & 4
\end{array}$$

(c) Coloque a vírgula decimal na Etapa (b), onde ela pertencia, obtendo assim a resposta.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 5 & ,6 & \\
+ & & 2 & ,7 & 4 \\
\hline
 & 1 & 8 & ,3 & 4
\end{array}$$

Wu compara as Igualdades (4.1), (4.2) e (4.3) com as Etapas (a), (b) e (c) da seguinte maneira: a Etapa (a) equivale a Igualdade (4.1), pois, de fato, quando alinhamos os dois números decimais por suas vírgulas decimais, o que estamos fazendo é aumentar o número de casas decimais em 15,6 escrevendo-o como 15,60, o que é válido pelo fato fundamental sobre frações equivalentes ($15{,}6 = \frac{156}{10} = \frac{1560}{100} = 15{,}60$); a Etapa (b) equivale a Igualdade (4.2) porque, quando operamos com os números "sem" a vírgula decimal, o que estamos fazendo é operar com os numeradores de $\frac{1560}{100}$ e $\frac{274}{100}$, ignorando momentaneamente

o denominador (no caso, 100), que é o que acontece quando somamos duas frações com mesmo denominador; e por fim, a Etapa (c) equivale a Igualdade (4.3): como precisamos dar a resposta usando números decimais, basta lembrar que estamos operando com frações decimais com denominador 100. Encerrando, Wu afirma que há, naturalmente, um algoritmo semelhante para se subtrair números decimais.

Interpretação de uma fração como uma divisão

(1) Frações como uma extensão da interpretação da divisão como uma partição em partes iguais: Wu inicia esta seção relembrando o conceito de divisão de números inteiros. O que significa dizer que $36 \div 9 = 4$? Para contextualizar a questão, Wu propõe o seguinte problema: considere um reservatório de água com capacidade de 36 galões. Se queremos enchê-lo com 9 baldes de água, qual deve ser a capacidade do balde? A resposta é 4, pois se dividirmos 36 em 9 partes iguais, então o tamanho de cada parte é 4 porque $36 = 4+4+4+4+4+4+4+4+4 = 9 \times 4$ (pela definição de multiplicação de números inteiros). Esse modo conceitual de interpretar a divisão é comumente chamada de **intepretação da divisão (de números inteiros) como partição em partes iguais**. Mais geralmente:

> Quando m é um múltiplo de n, então $m \div n = q$ (onde q é um número inteiro, denominado *quociente* da divisão) significa que q é o tamanho de uma parte quando m é particionado em n partes iguais, isto é,
>
> $$m = \underbrace{q + \cdots + q}_{n} = n \cdot q.$$

Wu salienta que, até este momento, os estudantes só efetuam divisões onde o dividendo é múltiplo inteiro do divisor. Assim, nesta etapa, não faz sentido perguntar por $37 \div 9$. No entanto, com a disponibilidade das frações, Wu apresenta a extensão do significado da divisão para quaisquer dois números inteiros m e n, e não somente quando m é múltiplo de n:

> Sejam m e n dois números inteiros (com $n \neq 0$). Então, $m \div n = q$ (onde q é uma fração, denominada o *quociente* da divisão) significa que q é o tamanho de uma parte quando m é dividido em n partes iguais, isto é,

$$m = \underbrace{q + \cdots + q}_{n} = n \cdot q.$$

Colocada esta interpretação, Wu mostra que o quociente dessa divisão $m \div n$ é exatamente a fração $\frac{m}{n}$, isto é, Wu mostra porque o tamanho de uma parte é $\frac{m}{n}$ quando m é dividido em n partes iguais. Para tal, Wu utiliza dois conceitos importantes abordados na série anterior: a adição de frações com o mesmo denominador e a definição de multiplicação (de um número inteiro por uma fração). Mais precisamente, por um lado, segue-se da adição de frações que:

$$\underbrace{\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}}_{n} = \frac{nm}{n} = m.$$

Por outro lado, da definição da multiplicação de um número inteiro por uma fração, segue-se que:

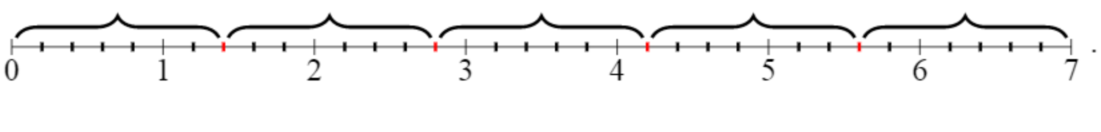
$$\underbrace{\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}}_{n} = n \cdot \frac{m}{n}.$$

Portanto, $m = \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n} = n \cdot \frac{m}{n}$, de onde podemos concluir que $m \div n = \frac{m}{n}$. Resumindo, uma fração ganha agora uma nova interpretação: ela é o resultado de uma divisão de dois números inteiros. Esse fato é muitas vezes apenas falado, tratado como natural e sem nenhuma explicação. Porém, Wu é enfático em afirmar que se deve dar uma explicação cuidadosa, como a que foi dada aqui.

(2) A INTERPRETAÇÃO DE UMA FRAÇÃO COMO UMA DIVISÃO NO CONTEXTO DA RETA NUMÉRICA: Wu usa a reta numérica para mostrar visualmente que

$$m \div n = \textit{o tamanho de uma parte quando } m \textit{ é dividido em } n \textit{ partes iguais} = \frac{m}{n}. \quad (4.4)$$

Para isto, ele considera um exemplo específico (o qual pode ser generalizado). Para mostrar que $7 \div 5 = \frac{7}{5}$ usando a reta numérica, Wu mostrará que $\frac{7}{5}$ é o comprimento de uma parte, quando um segmento de comprimento 7 é dividido em 5 partes iguais. Dividindo-se cada segmento entre números inteiros consecutivos em 5 partes iguais (o 5 vem do denominador de $\frac{7}{5}$), obtém-se o segmento de 0 a 7 dividido em 35 partes com comprimento $\frac{1}{5}$ cada. Tomando-se 7 destas partes por vez, o que é indicado pelas marcas vermelhas na figura a seguir, então as marcas vermelhas darão uma divisão do segmento de 0 a 7 em 5 partes iguais. Como cada parte destacada tem comprimento de $\frac{7}{5}$, segue-se que $7 \div 5 = \frac{7}{5}$.



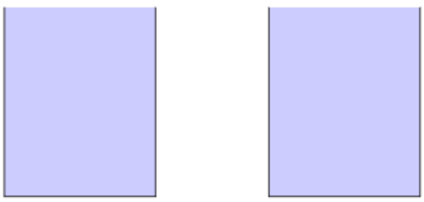
Wu contextualiza esta interpretação de fração como resultado de uma divisão com o seguinte problema: se 9 pessoas querem compartilhar igualmente pelo peso um saco de

50 libras de arroz, quantas libras de arroz deve receber cada pessoa? Assim, somos convidados a dividir o segmento de 0 a 50 na reta numérica (cuja unidade é 1 libra) em 9 partes iguais. Aqui entra a fração como divisão que, em virtude da Equação 4.4, nos dá como resposta ao problema o valor $\frac{50}{9}$ libras de arroz.

(3) Uma questão de ordem nos dois significados de fração: Wu alerta para uma questão de ordem nas duas interpretações que temos para a fração $\frac{m}{n}$ na reta numérica. Pela **definição**, a fração $\frac{m}{n}$ significa m cópias de um segmento de comprimento $\frac{1}{n}$. Por esta definição, começa-se primeiro com um segmento de comprimento $\frac{1}{n}$ para depois se justapor m tais segmentos. Como **divisão**, a fração $\frac{m}{n}$ significa o tamanho de uma parte quando um segmento de comprimento m é dividido em n partes iguais. Nesse caso, começa-se primeiro com segmento de comprimento m para depois dividi-lo em n partes iguais.

Multiplicação de frações

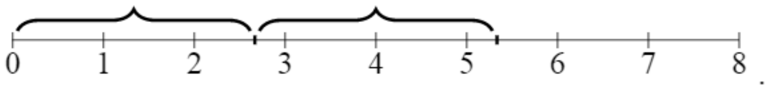
(1) Usando a expressão "fração de" para motivar a multiplicação de frações: se você beber 2 copos cheios de leite e cada copo tem capacidade de 8 fl oz., qual é a quantidade de leite em fl oz.[b] que você bebe? Resposta: você deve ter bebido 2×8 fl oz., ou seja, 16 de fl oz. de leite.



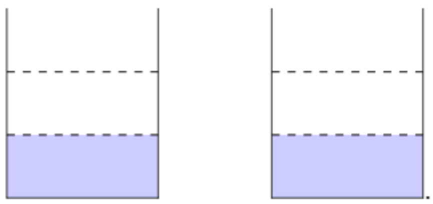
Então, com este problema de multiplicação de números inteiros em mente, Wu, agora propõe a seguinte adaptação, incluindo uma fração: se você beber *dois terços de* um copo de leite e o copo tem capacidade de 8 fl oz., qual é a quantidade de leite em fl oz. que você bebe? Wu então observa que o que se quer é uma resposta matemática precisa para um problema enunciado de forma coloquial. Segundo Wu, expressões coloquiais são vagas e é preciso praticar bastante com os alunos este exercício de traduzir uma expressão coloquial em um enunciado preciso: o que significa "dois terços de um copo"? No problema em questão, "dois terços de um copo" significa o montante total de 2 partes, quando 8 fl oz. de líquido é dividido em 3 partes iguais. No contexto da reta numérica,

[b]fl oz. é a abreviação de *fluid ounce*, que significa onça líquida, que é uma medida de volume. Aproximadamente, 1 fl oz. é equivalente a 29,57 ml.

o problema pode ser lido da seguinte maneira: o segmento 0 a 8 de comprimento 8 (onde a unidade é 1 fl oz.) é dividido em três segmentos de igual comprimento. Pela Equação (4.4), cada um destes três segmentos tem comprimento de $\frac{8}{3}$, de modo que dois terços de um copo é então $\frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{8+8}{3} = \frac{2\times 8}{3}$ fl oz..



Em termos diretamente do copo de leite, este valor total das duas porções de um terço do copo pode ser representado por:



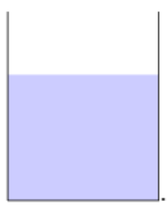
Para Wu, a relação com a situação anterior é óbvia: lembrando que dois copos foram expressos como 2×8 fl oz., por analogia, somos tentados a dizer que

> a quantidade de leite em *dois terços de* um copo de leite deve ser expresso como $\frac{2}{3} \times 8$ fl oz.

Wu considera que esse raciocínio é muito razoável e então sugere que o aceitemos e sigamos em frente. Na visão do Wu, assim, a multiplicação de uma fração por um número inteiro surge naturalmente:

$$\frac{2}{3} \times 8 = \frac{2 \times 8}{3}.$$

Wu propõe o exercício de considerarmos não um copo cheio de leite, mas um copo com apenas $5\frac{1}{3}$ fl oz. de leite.



Quanto é *três quartos desse* montante? Wu relembra que isso significa que temos que descobrir a quantidade de leite em três partes quando $5\frac{1}{3}$ fl oz. é dividido em quatro partes iguais. Como

$$5\frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3},$$

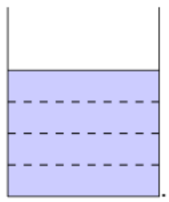
vemos que

$$\frac{3}{4} \text{ de } 5\frac{1}{3} \text{ é } \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3 \times \frac{4}{3} = 4 \text{ fl oz..}$$

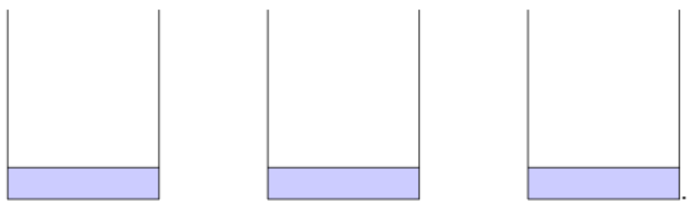
Wu recorda que, estendendo o que foi feito anteriormente com relação a multiplicação de uma fração por um número inteiro, podemos expressar esse fato simbolicamente como:

$$\frac{3}{4} \times \frac{16}{3} = 4 \text{ fl oz..}$$

Wu sugere a ilustração desta multiplicação da seguinte forma: primeiro dividimos $5\frac{1}{3}$ fl oz. de leite em 4 partes de igual volume, assim:



Então, o montante de 3 dessas partes é a quantidade total das três partes quando $5\frac{1}{3}$ fl oz. é dividida em 4 partes iguais:



Wu, finalmente, formaliza, de modo geral, o conceito de **multiplicação de fração**: dadas duas frações quaisquer $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, o significado de seu produto é

$$\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} = \textit{ o comprimento de } m \textit{ partes quando } \frac{k}{\ell} \textit{ é dividida em } n \textit{ partes iguais.}$$

Wu propõe usar a frase $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ **de** $\boldsymbol{\frac{k}{\ell}}$ para abreviar a sentença da direita ou, também, em certas ocasiões, para expressar a sentença da direita como $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ **cópias de** $\boldsymbol{\frac{k}{\ell}}$. Assim, por definição, $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}$ é igual a $\frac{m}{n}$ cópias de $\frac{k}{\ell}$.

Wu salienta que é importante, neste momento, confirmarmos que esta definição de multiplicação de fração não entra em conflito com a definição dada anteriormente para a multiplicação de um número inteiro por uma fração. De fato, consideremos o produto $m \times \frac{k}{\ell} = \frac{m}{1} \times \frac{k}{\ell}$. De acordo com a definição anterior, $\frac{m}{1} \times \frac{k}{\ell}$ é igual ao comprimento de m partes quando $\frac{k}{\ell}$ é dividido em 1 parte igual (o que é, obviamente, o próprio $\frac{k}{\ell}$), isto é, quando $\frac{k}{\ell}$ é dividido em 1 parte igual (o que é, obviamente, o próprio $\frac{k}{\ell}$), isto é,

$$\underbrace{\frac{k}{\ell}+\frac{k}{\ell}+\cdots+\frac{k}{\ell}}_{m}.$$

Mas este é exatamente o significado estabelecido para $m \times \frac{k}{\ell}$ como a multiplicação de um número inteiro por uma fração.

(2) Multiplicação de frações e questões de escala: Wu observa que a definição de multiplicação implica que

$$\text{se } \frac{m}{n} > 1, \text{ então } \frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} > \frac{k}{\ell} \quad \text{e}$$

$$\text{se } \frac{m}{n} < 1, \text{ então } \frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} < \frac{k}{\ell}$$

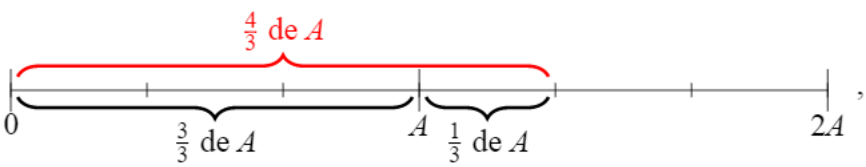
(evidentemente, estamos considerando que $k > 0$ e $l > 0$). Wu justifica a primeira proposição da seguinte maneira (a justificativa da segunda é análoga): se $\frac{m}{n} > 1$, então $m > n$. Logo, existe um número inteiro c positivo, tal que, $m = n + c$, de modo que

$$\frac{m}{n} = \frac{n+c}{n} = \frac{n}{n} + \frac{c}{n} = 1 + \frac{c}{n}.$$

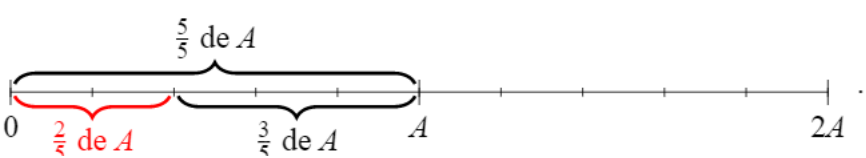
Desta maneira, se dividirmos $\frac{k}{l}$ em n partes iguais, o montante de m destas partes é a combinação do próprio $\frac{k}{l}$ (que é o montante de n destas partes) mais um adicional de c destas partes. Então, por definição, $\frac{m}{n} \times \frac{k}{l}$ é a totalidade de c dessas partes a mais do que $\frac{k}{l}$ e, sendo assim, $\frac{m}{n} \times \frac{k}{l}$ é maior do que $\frac{k}{l}$. Nos parece que Wu, de forma coloquial, está usando a propriedade distributiva em seu argumento:

$$\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} = \left(1 + \frac{c}{n}\right) \times \frac{k}{\ell} = \frac{k}{\ell} + \frac{c}{n} \times \frac{k}{\ell} = \frac{k}{l} + c \times \left(\frac{1}{n} \times \frac{k}{l}\right).$$

Wu acredita que, de um modo mais geral, esta explicação dá uma imagem intuitiva para o fato de que, por exemplo, $\frac{4}{3} \times A$ aumenta o tamanho de A em $\frac{1}{3}$ de A (pois $4 = 3 + 1$), para qualquer fração A,



enquanto que $\frac{2}{5} \times A$ diminui o tamanho de A em $\frac{3}{5}$ de A (pois $2 = 5 - 3$):



Wu destaca ainda que inicia-se aqui, de forma ingênua, o conceito de “escala”, cuja compreensão completa aparecerá no estudo de semelhança em Geometria no Ensino Médio.

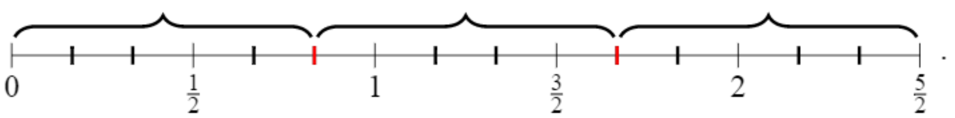
(3) A FÓRMULA DO PRODUTO DE DUAS FRAÇÕES: nesta parte, Wu justifica a fórmula do produto de duas frações, a saber,

$$\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} = \frac{mk}{n\ell}. \tag{4.5}$$

Wu começa explicando o exemplo particular $\frac{4}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{4\times 5}{3\times 2}$ associado ao seguinte problema: “Se a capacidade de um balde é de $2\frac{1}{2}$ galões e $1\frac{1}{3}$ baldes de água enchem um recipiente, qual é a capacidade desse recipiente?”. Primeiramente, Wu reescreve o número misto na forma de fração imprópria, isto é, $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ e $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ e, em seguida, propõe descobrir qual é o tamanho de uma parte quando $\frac{5}{2}$ é dividido em 3 partes iguais. Para isso, Wu relembra o exemplo dado inicialmente quando estávamos construindo o conceito de multiplicação de frações (p. 50): $\frac{16}{3}$ é dividido em 4 partes iguais e cada parte é fácil de se obter porque 16 é um múltiplo de 4, logo, cada parte equivale a $\frac{4}{3}$. Porém, Wu observa que agora (em $\frac{5}{2}$ dividido em 3 partes iguais), infelizmente, 5 não é um múltiplo de 3. De modo a contornar essa situação, Wu lembra que podemos usar o fato fundamental sobre frações equivalentes:

$$\frac{5}{2} = \frac{3\times 5}{3\times 2}$$

e, assim, o numerador 3×5 é certamente um múltiplo de 3. Wu ainda salienta que este raciocínio pode ser mais intuitivo, traçando-se uma imagem que corresponda à forma de como a igualdade $\frac{5}{2} = \frac{3\times 5}{3\times 2}$ é estabelecida: se subdividirmos cada um dos cinco segmentos de comprimento $\frac{1}{2}$ da reta numérica na figura a seguir em três partes iguais, teremos uma divisão do segmento de 0 a $\frac{5}{2}$ em 15 ($= 3 \times 5$) partes iguais, de modo que, ao tomar 5 destas partes por vez, teremos uma divisão do segmento de 0 a $\frac{5}{2}$ em três partes iguais, como indicado na figura.



Então, se $\frac{5}{2} = \frac{3\times 5}{3\times 2}$ é dividido em 3 partes iguais, então uma parte corresponde a $\frac{5}{3\times 2}$. Portanto, 4 destas partes é igual a $\frac{4\times 5}{3\times 2}$ e, sendo assim, segue-se que $\frac{4}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{4\times 5}{3\times 2}$, que é exatamente a fórmula do produto das frações $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{2}$. Wu considera que, para uma sala de aula do nível K-5, exercitar este tipo de raciocínio com casos particulares (tais como $\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{2\times 4}{5\times 3}, \frac{5}{6} \times \frac{8}{7} = \frac{5\times 8}{6\times 7}$, etc.) é suficiente para explicar a Fórmula 4.5, não sendo necessário, neste momento, envolver argumentos simbólicos para provar a fórmula geral.

Aplicações imediatas da fórmula do produto de duas frações

(1) A multiplicação de frações é associativa, comutativa e distributiva com relação à adição: Wu observa que, em virtude da multiplicação de números inteiros ser associativa, comutativa e distributiva com relação à adição, a Fórmula 4.5 permite estabelecer que estas mesmas propriedades valem para a multiplicação de frações. Para ilustrar que estas propriedades têm significado, Wu propõe a seguinte questão: "O que é mais pesado: $\frac{7}{9}$ de $\frac{11}{4}$ kg de areia ou $\frac{11}{4}$ de $\frac{7}{9}$ kg de areia?".

(2) A lei do cancelamento: para cálculos com frações, a Fórmula (4.5) para o produto de duas frações e o fato fundamental sobre frações equivalentes nos dão, como consequência, a **lei do cancelamento**. De fato, seja c um número inteiro diferente de zero, então

$$\frac{cm}{n} \times \frac{k}{c\ell} = \frac{cmk}{cn\ell} = \frac{mk}{n\ell} = \frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell}. \tag{4.6}$$

Como uma consequência da lei do cancelamento, Wu observa o seguinte fato: dada qualquer fração $\frac{m}{n}$ diferente de zero, é sempre possível encontrar uma fração que, quando multiplicado por $\frac{m}{n}$, obtém-se o número 1, a saber, a fração $\frac{n}{m}$, denominada a **fração recíproca** de $\frac{m}{n}$. De fato, aplicando a lei do cancelamento duas vezes, obtemos:

$$\frac{n}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{nm}{mn} = \frac{n}{n} \times \frac{m}{m} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = 1.$$

(3) Justificativa para o algoritmo da multiplicação de números decimais (com um número finito de casas decimais): outra aplicação importante da fórmula do produto de frações, exposta por Wu, é a justificativa para o algoritmo da multiplicação de números decimais com um número finito de casas decimais. Wu considera o exemplo $34{,}5 \times 4{,}78$. Para calcular este produto, o algoritmo da multiplicação diz para:

(a) Multiplicar os dois números como números inteiros, ignorando a vírgula decimal (obtendo então 164 910).

(b) Converter a resposta do Item (a) em um número decimal pela seguinte regra: esse número deve ter $1 + 2\ (= 3)$ casas decimais após a vírgula, pois 35,4 tem uma casa decimal após a vírgula e 4,78 tem duas casas decimais após a vírgula (obtendo então 164,910).

Wu considera que a explicação para este algoritmo é extremamente simples, desde que lembremos da definição, a partir das frações decimais, de um número decimal com um

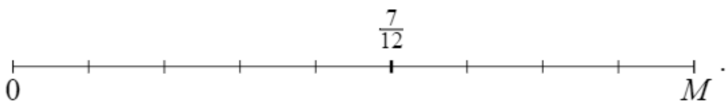
número finito de casas decimais:

$$
\begin{aligned}
34{,}5 \times 4{,}78 &= \frac{345}{10} \times \frac{478}{100} && \text{(definição de número decimal)} \\
&= \frac{345 \times 478}{10 \times 100} && \text{(fórmula do produto)} \qquad (4.7) \\
&= \frac{164910}{1000} \\
&= 164{,}910. && \text{(definição de número decimal)} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Wu então observa que o Passo (a) do algoritmo corresponde à Igualdade (4.7) e que o Passo (b) corresponde à Igualdade (4.8).

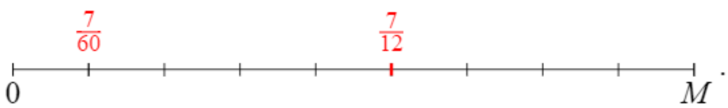
(4) Um exemplo de problema: Wu comenta que existem várias aplicações da fórmula do produto de frações em problemas. Ele dá o seguinte exemplo: "Ao caminhar em uma trilha, depois de andar $\frac{7}{12}$ de uma milha[a], percebi que já tinha caminhado $\frac{5}{9}$ da trilha. Quão longa é essa trilha?".

Wu então mostra duas maneiras diferentes de se calcular o comprimento M em milhas da trilha. A primeira faz uso de uma reta numérica onde a unidade corresponde a 1 milha: dividindo o segmento de 0 a M em 9 partes iguais, conforme a figura a seguir, observamos que o quinto ponto marcado à direita de 0 corresponde a $\frac{7}{12}$ de uma milha.



Agora, o primeiro ponto marcado à direita de 0 corresponde a $\frac{1}{5}$ da distância de 0 a $\frac{7}{12}$. Aplicando a definição de multiplicação de fração para "$\frac{1}{5}$ de $\frac{7}{12}$" e usando a fórmula do produto, concluímos que este ponto marcado é

$$\frac{1}{5} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{60}.$$



[a]A milha terrestre é uma unidade de medida de comprimento usada nos EUA e é equivalente a aproximada-

mente 1 609,3 metros. Abreviação: mi.

Como M é o nono ponto marcado à direita de 0, podemos cálculá-lo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 9 \times \frac{7}{60} &= \frac{9}{1} \times \frac{7}{60} \\ &= \frac{3}{1} \times \frac{7}{20} && \text{(lei do cancelamento)} \\ &= \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}. && \text{(definição de fração mista via frações equivalentes)} \end{aligned}$$

Como a unidade utilizada na reta numérica corresponde a 1 milha, temos que a trilha toda tem comprimento igual a $1\frac{1}{20}$ milhas. A segunda solução proposta é um pouco mais sofisticada, mas, segundo Wu, ela será importante quando considerarmos a divisão de frações mais adiante. De acordo com a definição de multiplicação de fração, podemos expressar simbolicamente a informação dada no problema como $\frac{5}{9} \times M = \frac{7}{12}$ milha. Uma vez que os dois números $\frac{5}{9} \times M$ e $\frac{7}{12}$ são o mesmo número (isto é, o mesmo ponto da reta numérica), multiplicando-se cada número por uma mesma fração resultará num mesmo número novamente. Assim, multiplicando-se ambos os lados da equação $\frac{5}{9} \times M = \frac{7}{12}$ por $\frac{9}{5}$, obtemos

$$\frac{9}{5} \times \left(\frac{5}{9} \times M\right) = \frac{9}{5} \times \frac{7}{12}.$$

Aplicando-se a lei associativa da multiplicação, o lado esquerdo desta equação é igual a

$$\frac{9}{5} \times \frac{5}{9} \times M = 1 \times M = M,$$

e, sendo assim,

$$M = \frac{9}{5} \times \frac{7}{12} = \frac{63}{60} = 1\frac{1}{20},$$

que é o mesmo valor obtido na solução apresentada anteriormente.

(5) Fórmula para o cálculo da área de uma região retangular com dimensões fracionárias: segundo Wu, esta é a aplicação mais fundamental da fórmula do produto de frações. Wu ressalta que o resultado não está sendo questionado (é o produdo da medida da base pela medida da altura, como todos sabemos), mas, sim, o porquê dele ser verdadeiro. Aqui, Wu é muito cuidoso e ele começa sua exposição recordando os pressupostos usuais de como (medidas de) áreas são atribuídas às regiões planas:

Pressuposto (a). A área de uma região plana é sempre um número ≥ 0.

Pressuposto (b). A área do quadrado unitário (o quadrado cujos lados têm comprimento 1) é, por definição, o número 1.

Pressuposto (c). Se duas regiões são congruentes, então suas áreas são iguais.

Pressuposto (d). (Aditividade) Se duas regiões tem, no máximo, seus bordos ou partes

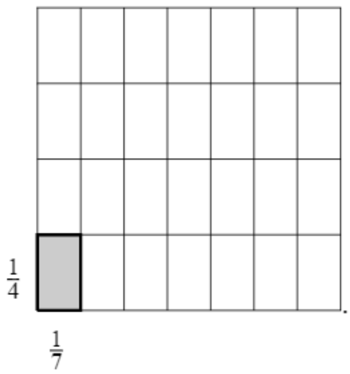
deles em comum, então a área da região obtida pela justaposição das duas é a soma das áreas individuais.

Feito isto, Wu mostra como calcular a área de um retângulo com os lados medindo $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{7}$. Ele divide o cálculo em duas etapas:

(1) Cálculo da área de um retângulo com os lados medindo $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{7}$.

(2) Cálculo da área de um retângulo com os lados medindo $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{7}$.

Cálculo (1): para obter um retângulo com os lados medindo $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{7}$, Wu divide os lados verticais de um quadrado unitário em 4 partes iguais e os lados horizontais em 7 partes iguais. Estas divisões, por sua vez, geram uma decomposição do quadrado unitário em 4×7 $(= 28)$ retângulos congruentes e, portanto, todos com a mesma área (pelo Pressuposto (c)). Wu então observa que cada pequeno retângulo nesta divisão tem lado vertical com comprimento $\frac{1}{4}$ e lado horizontal com comprimento $\frac{1}{7}$.

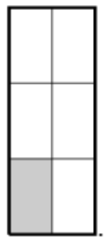


Pelo Pressuposto (d), segue-se que a área total destes 28 pequenos retângulos é igual a área do quadrado unitário e, pelo Pressuposto (b), a área do quadrado unitário é 1. Pela definição de fração, temos que cada uma dessas 28 áreas representam $\frac{1}{28}$ do quadrado unitário, o que é igual a $\frac{1}{4\times 7}$. Por conseguinte,

$$\text{a área de um retângulo com lados medindo } \frac{1}{4} \text{ e } \frac{1}{7} \text{ é igual a } \frac{1}{4\times 7} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} \tag{4.9}$$

onde, na última igualdade, a fórmula do produto de frações foi usada.

Cálculo (2): Wu enfatiza que, agora, a estratégia muda completamente. Ao invés de dividir o quadrado unitário, Wu usa pequenos retâgulos de lados medindo $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{7}$ para construir um retângulo de lados medindo $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{7}$. Pela definição de fração, $\frac{3}{4}$ é igual a três cópias de um segmento de comprimento $\frac{1}{4}$. Da mesma forma, $\frac{2}{7}$ é constituído pela justaposição de dois segmentos de comprimento $\frac{1}{7}$ cada. Assim, se empilharmos três linhas e duas colunas desses pequenos retângulos, obtemos um retângulo de lados medindo $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{7}$, conforme figura a seguir.



Pela Igualdade (4.9) obtida anteriormente, cada um desses pequenos retângulos tem área igual a $\frac{1}{4\times 7}$. Uma vez que o retângulo construído contém exatamente 3×2 pequenos retângulos congruentes, pelo Pressuposto (d), a sua área é igual a

$$\underbrace{\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{4\times 7}+\cdots+\frac{1}{4\times 7}}_{3\times 2}=\frac{3\times 2}{4\times 7}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}$$

onde, na última igualdade, fez-se o uso mais uma vez da fórmula do produto de frações. Por conseguinte,

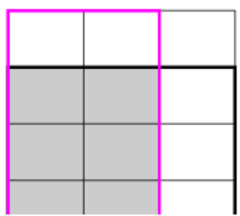
$$\text{a área de um retângulo com lados medindo } \frac{3}{4} \text{ e } \frac{2}{7} \text{ é igual a } \frac{3}{4}\times\frac{2}{7}.$$

Segundo Wu, o caso geral pode ser obtido seguindo este racicínio palavra por palavra. Wu acredita que, para a maioria das turmas do nível K-5, é benéfico *enunciar* a fórmula geral: se m, n, k e ℓ são números inteiros diferentes de zero, então

$$\text{a área de um retângulo com lados medindo } \frac{m}{n} \text{ e } \frac{k}{\ell} \text{ é igual a } \frac{m}{n}\times\frac{k}{\ell}. \tag{4.10}$$

Contudo, ao invés de tentar justificar esta fórmula simbolicamente, Wu acha que é mais produtivo calcular, como foi feito anteriormente, as áreas de retângulos cujos lados têm medidas "razoáveis", tais como $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{3}$ e $\frac{5}{6}$, etc.

Uma das apresentações pictóricas para o produto de duas frações é feita por meio da interseção de faixas horizontais e verticais no quadrado unitário, como ilustrada na figura a seguir para a multiplicação $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$:



1

Segundo Wu, o diagrama está correto, porém, ele é geralmente ensinado sem nenhuma explicação. Ao se dividir os lados verticais do quadrado unitário em 4 partes iguais, o re-

tângulo de bordas pretas engrossadas na figura engloba $\frac{3}{4}$ da área do quadrado unitário. Da mesma forma, ao se dividir os lados horizontais em 3 partes iguais, o retângulo de bordas magentas engrossadas engloba $\frac{2}{3}$ da área do quadrado unitário. A interseção desses dois retângulos é, então, um retângulo com os lados de comprimentos $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$ cuja área é igual a $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$, como visto anteriormente. Em resumo: esta representação pictórica para a multiplicação de frações é feita considerando-se a unidade como a área do quadrado unitário e ela faz uso do fato de que a área de um retângulo é obtida pelo produto das medidas de seus lados.

Divisão de frações (início)

(1) Divisão de frações como uma extensão conceitual desta operação nos inteiros via interpretação da divisão como medição: Wu inicia esta parte lembrando o significado dado para $36 \div 9$, isto é, $36 \div 9 = 4$ porque $36 = 9 \times 4$. No Item (1) na página 47, Wu deu o seguinte contexto para esta igualdade: se um reservatório que tem capacidade de 36 galões é enchido completamente com 9 baldes de água, então a capacidade de cada balde é de 4 galões. Agora, Wu propõe modelar a divisão $36 \div 9 = 4$ de outra maneira: se 36 galões de água são distribuídos em baldes com capacidade de 9 galões, quantos baldes serão necessários? A resposta é 4 de novo, porque

$$\begin{aligned} 36 &= 9 \times 4 \\ &= 4 \times 9 && \text{(a multiplicação de inteiros é comutativa)} \\ &= 9+9+9+9. && \text{(definição de multiplicação de inteiros)} \end{aligned}$$

Neste caso, a ideia foi verificar quantos 9's cabem em 36. Esse modo de interpretar a divisão é comumente chamado de **intepretação da divisão (de números inteiros) como medição**, ou seja, medir o quanto um número cabe no outro. Assim, o quociente q da divisão $36 \div 9$ é a quantidade de 9's que cabem em 36, ou ainda, q é o número que satisfaz $36 = q \times 9$. Em virtude da definição de multiplicação de frações, Wu observa que uma equação do tipo $m = q \times n$ continua mantendo o mesmo significado de que m é igual a q de n, mesmo se o quociente q for uma fração e não um número inteiro. Com isto, podemos estender a interpretação da divisão $m \div n$ como medição para quaisquer m e n inteiros ($n \neq 0$ e m não necessariamente um múltiplo inteiro de n):

inteiros ($n \neq 0$ e m não necessariamente um múltiplo inteiro de n).

Sejam m e n dois números inteiros ($n \neq 0$). Então $m \div n = q$ (onde q é uma *fração*, denominada o *quociente* da divisão) significa que m é igual a q de n,

isto é,

$$m = q \cdot n.$$

A justificativa para proceder assim é bem simples: por definição, $m \div n = q$ significa $m = n \cdot q$ (definição na página 47). Uma vez que a multiplicação de frações é comutativa, segue-se que $m = q \cdot n$. Mas, em virtude da definição de multiplicação de frações (ver o desenvolvimento do Item (1) a partir da página 49), isto significa dizer que m é q de n. Uma vez que os significados das operações aritméticas são basicamente os mesmos para frações como para números inteiros (afinal, as operações para frações foram construídas como extensões das operações para números inteiros), Wu nota que, se no desenvolvimento que acabamos de fazer, m, n e q fossem frações e não números inteiros, o significado de $m \div n = q$ permaneceria o mesmo. Assim, formalmente, se A, B e C são frações com $B \neq 0$, então

dizemos que $A \div B = C$ se $A = C \times B$.

Wu deixa claro que essa definição deve ser desvendada lentamente ao longo dos níveis K-5 e K-6, deixando para o nível K-5 apenas os casos mais simples. Ele, em seguida, dá alguns exemplos de como proceder:

(a) *Divisão de um número inteiro por uma fração unitária.* Qual é o significado de $5 \div \frac{1}{3}$? Se C é uma fração tal que $5 \div \frac{1}{3} = C$, então $5 = C \cdot \frac{1}{3}$. Pelo senso comum, 3 cópias de $\frac{1}{3}$ é 1 e 5 cópias de 1 é 5. Assim, 3×5 cópias de $\frac{1}{3}$ é igual a 5 e, portanto, $C = 3 \times 5$. Já antecipando o que virá no nível K-6, podemos escrever:

$$5 \div \frac{1}{3} = 5 \times \frac{3}{1}.$$

A sugestão de Wu é que, fazendo mais alguns exemplos como este, é possível estabelecer que se m e n são quaisquer números inteiros diferentes de zero, então

$$m \div \frac{1}{n} = m \times \frac{n}{1}.$$

Wu ainda lembra que $m \div \frac{1}{n} = C$ significa que C cópias de $\frac{1}{n}$ resultam em m. Como aplicação, Wu apresenta o seguinte problema: quantos convidados de um jantar podemos servir com 8 libras de bife de carne supondo que, em média, cada convidado consome $\frac{1}{3}$ de uma libra de bife? Representando a quantidade de convidados por C, temos que C cópias de $\frac{1}{3}$ dão 8. Desta maneira, $C = 8 \div \frac{1}{3} = 8 \times 3 = 24$ convidados.

(b) *Divisão de uma fração unitária por um número inteiro*. Qual é o significado de $\frac{1}{4} \div 5$? Se C é uma fração tal que $\frac{1}{4} \div 5 = C$, então $\frac{1}{4} = C \times 5$. Agora, sabendo que

a multiplicação de frações é comutativa, segue-se que

$$\frac{1}{4} = 5 \times C.$$

Esta igualdade significa que 5 cópias da fração C tem que ser igual a $\frac{1}{4}$. Qual deve ser o valor de C? Novamente, Wu apela para o senso comum: 5 cópias de $\frac{1}{5}$ é igual a 1 e, claramente, $\frac{1}{4}$ cópias de 1 é $\frac{1}{4}$. Como, $5 \times \frac{1}{5} = 1$, segue-se que $\frac{1}{4} \times \left(5 \times \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}$. Usando as propriedades comutativa e associativa, obtemos que

$$5 \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$C = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}.$$

Desta maneira,

$$\frac{1}{4} \div 5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \times 4}$$

onde, no último passo, usamos a fórmula do produto de frações. O fato marcante ao se dividir uma fração, tal como $\frac{1}{4}$, por um número inteiro, tal como 5, é que obtemos uma fração unitária cujo denominador é o produto 5×4. Segundo Wu, com mais alguns exemplos deste tipo, é possível estabelecer o padrão: se m e n são números inteiros diferentes de zero, então

$$\frac{1}{m} \div n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{mn}.$$

Wu encerra esta parte explicando porque esta fórmula geral é verdadeira: se $\frac{1}{m} \div n = C$, então $\frac{1}{m} = C \cdot n = n \cdot C$. Assim, n cópias de C é igual a $\frac{1}{m}$, isto é, C é o tamanho de uma parte quando $\frac{1}{m}$ é dividido em n partes iguais. Desta maneira, por um lado, $\frac{1}{m} \div n$ é o tamanho de uma parte quando $\frac{1}{m}$ é dividida em n partes iguais e, por outro lado, pela definição de multiplicação de frações, o tamanho de uma destas partes é precisamente $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}$. Juntando-se estes dois fatos, concluímos que $\frac{1}{m} \div n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{mn}$.

4.6 Algumas questões para análise posterior

- Como os livros apresentam a soma de frações quaisquer? Eles enfatizam a continuidade conceitual com a soma de inteiros? Como o mínimo múltiplo comum se enquadra nesta situação? [p. 83]

- O algoritmo para a soma de números decimais (com um número finito de casas decimais) é justificado? [p. 88]

- Como os livros apresentam a multiplicação de frações, em especial a multiplicação de um inteiro por uma fração e a multiplicação de uma fração por um inteiro? [p. 83]
- A fórmula do produto $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} = \frac{m \times k}{n \times \ell} = \frac{mk}{n\ell}$ é justificada? [p. 83]
- As propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação são apresentadas? [p.89]
- O algoritmo para a multiplicação de números decimais com um número finito de casas decimais é justificado? [p. 88]
- A fórmula para a área de um retângulo com dimensões fracionárias é justificada? [p. 83]
- Como a divisão de frações é apresentada? É feita de casos simples para mais complicados? [p. 89]

5 O Nível K-6

5.1 Diretrizes gerais

Na série K-6, o ensino da Matemática deve se concentrar em quatro áreas importantes: (1) relacionar as ideias de razão/proporção e taxa com multiplicação e divisão de números inteiros e usar os conceitos de razão/proporção e taxa para resolver problemas; (2) concluir o estudo da divisão de frações e estender a noção de número para o conjunto dos números racionais, que inclui os números negativos; (3) escrever, interpretar e usar expressões e equações lineares; (4) desenvolver a compreensão do pensamento estatístico.

5.2 Campos de conhecimento

Nesta série os conteúdos matemáticos estão subdivididos nos seguintes campos de conhecimento: *Razões e Relações Proporcionais*; *O Sistema de Numeração*; *Expressões e Equações*; *Geometria*; *Estatística e Probabilidade*.

Os alunos, neste estágio, são conduzidos a concluir a noção de número racional, fechando as ideias relacionadas às operações com frações. Apresentam-se novos conceitos: razão/proporção e taxa.

A partir desta série, o campo *Números e Operações–Frações* já não aparece mais e surge o campo *Razões e Relações Proporcionais*, cujo objetivo central é compreender o conceito de razão usá-lo para resolver problemas. No campo *O Sistema de Numeração*, o *Common Core* coloca como objetivos centrais: aplicar e estender os conhecimentos anteriores de multiplicação e divisão de números inteiros para dividir frações por frações e ampliar a noção de número para o conjunto dos números racionais; multiplicar e dividir números com vários dígitos e encontrar o conjunto dos números racionais, multiplicar e dividir números com vários dígitos e encontrar fatores e múltiplos comuns.

5.3 Orientações específicas ao campo Razões e Relações Proporcionais

Compreender o conceito de razão e usá-lo para resolver problemas

1. Compreender o conceito de razão e incorporar o seu uso na linguagem para descrever uma relação entre duas grandezas. Por exemplo, "A razão entre asas e bicos dos pássaros no zoológico era de $2:1$, porque para cada 2 asas havia um bico.". "Para cada voto que o candidato A recebeu, o candidato C recebeu aproximadamente 3 votos.".
2. Compreender o conceito de taxa unitária $\frac{a}{b}$ relacionado-a com uma razão $a:b$ com $b \neq 0$, e usar a linguagem de taxa no contexto de uma relação de proporção. Por exemplo, "Esta receita tem uma proporção de 3 xícaras de farinha para 4 xícaras de açúcar, por isso há $\frac{3}{4}$ de xícara de farinha para cada xícara de açúcar.". "Nós pagamos US$ 75 por 15 hambúrgueres, o que gera uma taxa de US$ 5 por cada hambúrguer".
3. Raciocionar com razões e taxas para resolver problemas matemáticos e do mundo real, e.g., raciocinando sobre tabelas de razões equivalentes, *tape diagrams*, diagramas com duas retas numéricas (*double number line diagrams*) ou equações.
   a. Fazer tabelas de razões equivalentes relacionando quantidades com medidas inteiras, encontrar os valores desconhecidos nas tabelas e marcar os pares de valores no plano cartesiano. Usar tabelas para comparar razões.
   b. Resolver problemas de taxa unitária incluindo os que envolvem preço por unidade e velocidade constante. Por exemplo, se demorou 7 horas para cortar 4 gramados, então a essa mesma taxa, quantos gramados poderiam ser cortados em 35 horas? A que taxa foi cortado esse gramado?
   c. Encontrar a porcentagem de uma quantidade como uma razão por 100 (por exemplo, 30% de uma quantidade equivale a $\frac{30}{100}$ vezes a quantidade); resolver problemas que envolvam encontrar o todo, dada uma parte e a porcentagem.
   d. Raciocionar com razões para converter unidades de medida; manipular e transformar unidades de forma adequada ao multiplicar ou dividir quantidades.

5.4 Orientações específicas ao campo O Sistema de Numera-

ção

Aplicar e estender os conhecimentos anteriores de multiplicação e divisão para dividir frações por frações

1. Interpretar e calcular quocientes de frações e resolver problemas envolvendo divisão de frações por frações, e.g., por meio de modelos visuais de frações e equações para representar o problema. Por exemplo, criar um contexto para $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$ e usar um modelo visual de fração para mostrar o quociente; usar a relação entre a multiplicação e a divisão para explicar que $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$, porque $\frac{3}{4}$ de $\frac{8}{9}$ é $\frac{2}{3}$. (Em geral, $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.) Quanto chocolate cada pessoa receberá se 3 pessoas compartilham $\frac{1}{2}$ lb de chocolate igualmente? Quantas porções de $\frac{3}{4}$ de copo existem em $\frac{2}{3}$ de um copo de iogurte? Qual é a largura de um terreno retangular com comprimento $\frac{3}{4}$ mi e área de $\frac{1}{2}$ mi^2?

Calcular fluentemente com números com vários dígitos e encontrar fatores comuns e múltiplos

2. Dividir números com vários dígitos usando o algoritmo padrão de modo fluente.

3. Somar, subtrair, multiplicar e dividir, fluentemente, números decimais com vários dígitos usando o algoritmo padrão para cada operação.

4. Encontrar o máximo divisor comum de dois números inteiros menores ou iguais a 100 e o mínimo múltiplo comum de dois números inteiros inferiores ou iguais a 12. Usar a propriedade distributiva para expressar a soma de dois números inteiros entre 1 e 100 como um múltiplo da soma de dois números inteiros que não possuem um fator comum. Por exemplo, expressar $36+8$ como $4(9+2)$.

Aplicar e estender os conhecimentos anteriores sobre números (inteiros) para o sistema dos números racionais

5. Compreender que os números positivos e negativos são usados juntos para descrever quantidades ou valores que têm direções opostas (e.g., temperatura acima/abaixo de zero, a elevação acima/abaixo do nível do mar, créditos/débitos, carga elétrica positiva/negativa); usar números positivos e negativos para representar quantidades em contextos do mundo real, explicando o significado do 0 (zero) em cada situação.

6. Compreender um número racional como um ponto na reta numérica. Estender a representação da reta numérica e os eixos coordenados estudados anteriormente para representar

pontos com coordenadas negativas na reta numérica e no plano.

(a) Reconhecer os números de sinais opostos como indicativo de locais em lados opostos da reta numérica em relação ao 0; reconhecer que o oposto do oposto de um número é o próprio número, e.g., $-(-3) = 3$ e que 0 é o oposto dele mesmo.

(b) Compreender que os sinais das coordenadas de um par ordenado indicam em que quadrante do plano o ponto está localizado; reconhecer que quando dois pares ordenados diferem apenas pelos seus sinais, as posições dos pontos estão relacionadas por reflexões em um ou em ambos os eixos.

(c) Localizar e posicionar números inteiros e números racionais em representações horizontais e verticais da reta numérica; localizar e posicionar pares de números inteiros e outros números racionais em um plano coordenado.

7. Entender a relação de ordem e valor absoluto de números racionais.

(a) Interpretar desigualdades como afirmações sobre a posição de dois números representados na reta numérica. Por exemplo, interpretar $-3 > -7$ como uma afirmação de que -3 está localizado à direita de -7 na reta numérica orientada da esquerda para a direita.

(b) Escrever, interpretar e explicar as relações de ordem para números racionais em contextos do mundo real. Por exemplo, escrever $-3°\text{C} > -7°\text{C}$ para indicar o fato de que $-3°\text{C}$ é mais quente que $-7°\text{C}$.

(c) Compreender o valor absoluto de um número racional como a sua distância até 0 na reta numérica; interpretar o valor absoluto como a magnitude de uma quantidade positiva ou negativa em uma situação do mundo real. Por exemplo, para um saldo de conta de -30 dólares, escrever $|-30| = 30$ para descrever o tamanho da dívida em dólares.

(d) Distinguir as comparações de valor absoluto das relações de ordem. Por exemplo, reconhecer que um saldo de conta menor do que -30 dólares representa uma dívida maior que 30 dólares.

8. Resolver problemas matemáticos e do mundo real marcando-se pontos em todos os quatro quadrantes do plano coordenado. Incluir o uso de coordenadas e valor absoluto para encontrar as distâncias entre os pontos que possuem as primeiras coordenadas iguais ou as segundas coordenadas iguais.

5.5 Algumas orientações de Wu

5.5 Algumas orientações de Wu

Wu deixa claro logo de início que o conceito de divisão de frações está na base de toda a discussão de frações nessa série. Wu usará este conceito de forma explícita para explicar razão, taxa e porcentagem.

Divisão de frações (conclusão)

(1) Entendendo o conceito da divisão por meio da definição dada a partir da multiplicação: Wu considera importante recordar inicialmente a definição apresentada na série anterior para a divisão de frações: dadas A, B e C frações, com $C \neq 0$,

$$A \div C = B \text{ se } A = B \cdot C.$$

Neste contexto, B é chamado de *quociente* da divisão. Como $B \cdot C$ significa B cópias de C, então a divisão $A \div C$ mede quantas cópias de C existem em A. Essa definição exibe a divisão com a interpretação de medição. Wu alerta então para uma questão sutil: como saber que sempre existe o quociente B de duas frações A e C ($C \neq 0$) quaisquer? Aqui, Wu sugere que se suponha que tal B exista para então determinar qual seria sua expressão em termos dos numeradores e denominadores de A e C . Feito isto, mostra-se que esta expressão explícita para B de fato satisfaz a condição $A = B \cdot C$. Wu inicia com um exemplo: sejam as frações $A = \frac{3}{4}$ e $C = \frac{2}{3}$. Suponha que B é uma fração tal que

$$B = \frac{3}{4} \div \frac{2}{3}.$$

Pela definição de divisão de fração, isto significa que B deve satisfazer

$$\frac{3}{4} = B \times \frac{2}{3}, \tag{5.1}$$

isto é, deve existir B cópias de $\frac{2}{3}$ em $\frac{3}{4}$. Wu observa que descobrir quantas cópias de $\frac{2}{3}$ cabem em $\frac{3}{4}$ pode ser algo difícil, porém, com o uso do fato fundamental sobre frações equivalentes, isso se torna mais simples. Observando que $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ e $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, então devemos calcular quantas cópias de $\frac{8}{12}$ existem em $\frac{9}{12}$, isto é, queremos encontrar a fração B que satisfaz a igualdade

$$\frac{9}{12} = B \times \frac{8}{12}.$$

Para Wu, é fácil verificar que a resposta é $\frac{9}{8}$, uma vez que $\frac{1}{8}$ de $\frac{8}{12}$ é $\frac{1}{12}$ e nove cópias de $\frac{1}{12}$ é $\frac{9}{12}$. De forma alternativa, pela lei do cancelamento (p. 54),

$$\frac{9}{8} \times \frac{8}{12} = \frac{9}{12},$$

de modo que

$$B = \frac{9}{8} = \frac{3 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}. \tag{5.2}$$

Wu ressalta que o procedimento descrito acima não prova que $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$ é o quociente $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$, mas, sim, que, caso ele exista, então esse deverá ser o resultado. Nesse momento, se faz

necessário verificar se, de fato, $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$ satisfaz a Equação (5.1). Com efeito, usando-se as leis associativa e comutativa da multiplicação de frações, constamos que

$$\left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

(2) Descobrindo a fórmula da divisão de duas frações a partir da observação de padrões presentes em exemplos: Wu propõe que a fórmula geral da divisão de duas frações seja estabelecida por meio da regularidade observada em exemplos numéricos. Para isso, Wu formaliza o raciocínio descrito no item anterior: se

$$B = \frac{3}{4} \div \frac{2}{3},$$

então, por definição da divisão, temos que B é a fração que satisfaz: $\frac{3}{4} = B \times \frac{2}{3}$, condição esta que pode ser escrita, de forma equivalente, a $\frac{3\times3}{3\times4} = B \times \frac{4\times2}{4\times3}$, ou, ainda,

$$\frac{3 \times 3}{12} = B \times \frac{4 \times 2}{12}.$$

Agora, por inspeção e pelo uso da lei do cancelamento (p. 54) podemos concluir que

$$B = \frac{3 \times 3}{4 \times 2}$$

e, sendo assim,

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = B = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}.$$

Wu sugere que, em sala de aula, várias situações desse tipo sejam trabalhadas para que os alunos percebam, por exemplo, que

$$\frac{2}{5} \div \frac{7}{8} = \frac{2}{5} \times \frac{8}{7}.$$

Esse raciocínio é considerado por Wu suficiente para estabelecer a fórmula geral da divisão de frações: dadas as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{k}{\ell}$, com $\frac{k}{\ell} \neq 0$, tem-se

$$\frac{m}{n} \div \frac{k}{\ell} = \frac{m}{n} \times \frac{\ell}{k}.$$

Essa é a regra conhecida como a **regra de inverter e multiplicar**[a], uma habilidade bastante usada no cálculo da divisão de frações.

Wu destaca que esse tipo de raciocínio também é importante por outra razão: ele incorpora uma habilidade que permite resolver vários problemas. Wu exemplifica:

[a]Aqui no Brasil, dizemos que a regra da divisão de frações é: repete-se a primeira fração e multiplica-se pelo inverso da segunda fração.

> *Uma haste de* $43\frac{3}{8}$ *metros de comprimento é cortada em pedaços de* $\frac{5}{3}$ *metros de comprimento. Quantos pedaços desse comprimento podemos obter com esta haste?*

Seja B a fração tal que B cópias de $\frac{5}{3}$ metros (o comprimento de cada pedaço) remontam $43\,\frac{3}{8}$ metros (o comprimento da haste). Desta maneira, existe uma situação análoga à da Equação (5.1):

$$43\,\frac{3}{8} = B \times \frac{5}{3}. \tag{5.3}$$

Considerando a definição de divisão, Wu observa que B deve ser o quociente de um problema de divisão, a saber,

$$\begin{aligned} B \;=\; 43\,\frac{3}{8} \div \frac{5}{3} \;&=\; \frac{347}{8} \div \frac{5}{3} \\ &=\; \frac{347}{8} \times \frac{3}{5} \quad \text{(inverter e multiplicar)} \\ &=\; 26\,\frac{1}{40}. \end{aligned}$$

A resposta é 26 pedaços com $\frac{1}{40}$ de sobra. Wu, em seguida, instiga: o que significa "$\frac{1}{40}$"? Para responder a essa questão, Wu afirma que é necessário permitir que a Matemática fale por ela mesma e que os estudantes do nível K-6 comecem a ser expostos a este tipo raciocínio: tomando-se a Equação (5.3), temos que

$$\begin{aligned} 43\,\frac{3}{8} = 26\,\frac{1}{40} \times \frac{5}{3} \;&=\; \left(26 + \frac{1}{40}\right) \times \frac{5}{3} \\ &=\; \left(26 \times \frac{5}{3}\right) + \left(\frac{1}{40} \times \frac{5}{3}\right). \quad \text{(propriedade distributiva)} \end{aligned}$$

Assim, Wu esclarece que, observando-se a última linha, percebe-se explicitamente que $43\frac{3}{8}$ é igual a 26 cópias do pedaço de $\frac{5}{3}$ metros junto com $\frac{1}{40}$ do pedaço de $\frac{5}{3}$ metros. Este é o significado matemático dado a $\frac{1}{40}$.

Wu considera que duas observações são pertinentes nesse contexto: (1) o processo inverter-e-multiplicar pode ser uma ferramenta eficaz no raciocínio matemático; (2) a compreensão da divisão passa, em última análise, pela compreensão da multiplicação. Esse exemplo mostra não somente a compreensão do porquê deve-se usar a divisão para resolver esse tipo de problema (isso vem da afirmação multiplicativa da Equação (5.3)) mas, também a descoberta do significado de $\frac{1}{40}$. Para Wu, a compreensão da divisão requer uma base sólida em multiplicação de frações.

(3) Trabalhando a divisão de frações por meio da interpretação partitiva da divisão: Wu expõe um outro problema que pode ser trabalhado a divisão de frações, só que agora com outra interpretação para a divisão, a interpretação partitiva.

A capacidade de um tanque de água é de 61 galões e pode ser enchido por $19\frac{1}{2}$ baldes de água. Qual é a capacidade do balde?

Antes de resolver propriamente este problema, Wu sugere que a divisão seja motivada pensando num problema mais simples:

A capacidade de um tanque de água é de 61 galões e pode ser enchido por 19 baldes de água. Qual é a capacidade do balde?

Wu considera que assim é fácil imaginar que estamos particionando 61 em 19 partes iguais e que a capacidade do balde é o tamanho de uma dessas partes. Neste caso, a solução é dada por $61 \div 19$, de modo que pelo raciocínio da fração como uma divisão (ver página 48), a capacidade do balde é de $\frac{61}{19} = 3\frac{4}{19}$ galões. Por analogia, a solução do problema original pode ser obtida substituindo 19 por $19\frac{1}{2}$ e, da mesma maneira, obtida usando divisão.

Para Wu, compreendido este raciocínio, pode-se então dizer que a divisão de $61 \div 19\frac{1}{2}$ é também uma divisão por partição no sentido de que ela dá o tamanho de uma parte quando "61 é dividido em $19\frac{1}{2}$ partes iguais".

Operações aritméticas com números decimais (com um número finito de casas decimais)

(1) Definição de fração complexa: uma vez que, na série anterior, frações já foram apresentadas como o resultado de uma divisão, isto é, se m e n são números inteiros, com $n \neq 0$, então $\frac{m}{n} = m \div n$, Wu propõe uma nova notação para a divisão de frações: reescrever $\frac{m}{n} \div \frac{k}{\ell}$ como

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{k}{\ell}},$$

retirando o símbolo $\div$ completamente. Para Wu, não há nenhuma razão para usar dois símbolos quando um é suficiente e, uma vez que a notação de fração e o conceito de fração são mais fundamentais, a opção será pela notação $\frac{m}{n}$.

A divisão entre duas frações, nesta nova notação para a divisão, é o que Wu chama de uma **fração complexa**. Assim, se A e B são frações e $B \neq 0$, então $\frac{A}{B}$ é uma fração complexa, onde A e B são chamados numerador e denominador, respectivamente, da fração complexa. Wu ressalta que esta terminologia é consistente com o conceito usual de “numerador” e “denominador”, porque uma fração comum é também uma fração complexa, dado que se m e n são números inteiros ($n \neq 0$), então

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{m}{1}}{\frac{n}{1}}.$$

Wu mostra que o fato fundamental sobre frações equivalentes também é válido para as frações complexas, ou seja, se D é uma fração qualquer diferente de zero, então

$$\frac{DA}{DB} = \frac{A}{B}. \tag{5.4}$$

A validade da Igualdade (5.4) é decorrente da regra inverter e multiplicar para a divisão de frações. De fato, considere $A = \frac{a'}{a}$, $B = \frac{b'}{b}$ e $D = \frac{d'}{d}$, então

$$\frac{DA}{DB} = \frac{\frac{d'd'}{da}}{\frac{d'b'}{db}} = \frac{a'd'db}{b'd'ad} = \frac{a'b}{ab'},$$

onde, na última etapa, usamos o fato fundamental sobre frações equivalentes. Ao aplicar a regra inverter e multiplicar novamente, temos que

$$\frac{a'b}{ab'} = \frac{\frac{a'}{a}}{\frac{b'}{b}} = \frac{A}{B},$$

o que verifica que o fato fundamental sobre frações equivalentes continua válido para as frações complexas.

(2) A divisão de números decimais vista como uma divisão de números inteiros: assim como no caso da adição, subtração e multiplicação de números decimais, os cálculos da divisão de números decimais (com um número finito de casas decimais) são reduzidos aos cálculos com números inteiros.

Wu considera que é suficiente olhar para alguns casos especiais, porque fica claro que o raciocínio é completamente geral. Considere, por exemplo, $1{,}0027 \div 8{,}5$, o qual podemos reescrever como $\frac{1{,}0027}{8{,}5}$. Recordando a definição de números decimais (com um número finito de casas decimais) como frações decimais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1{,}0027}{8{,}5} &= \frac{\frac{10027}{10^4}}{\frac{85}{10}} \\ &= \frac{\frac{10027}{10^4} \times 10^4}{\frac{85}{10} \times 10^4} \qquad \text{(Igualdade (5.4))} \end{aligned}$$

$$= \frac{10027}{85000}.$$

Assim, a divisão de 1,0027 por 8,5 é o mesmo que a divisão dos números inteiros 10027 por 85000.

Wu chama a atenção para o fato de que se dividimos um número decimal (com um número

finito de casas decimais) por outro, esperamos que o quociente seja expresso como um número decimal (com um número finito de casas decimais) em vez de uma fração. Infelizmente, o quociente não será, na maioria das vezes, um número decimal (com um número finito de casas decimais), mas um número decimal com um número "infinito" de casas decimais, porém, esse assunto só será tratado na próxima série (K-7).

Porcentagem

(1) Definição de porcentagem como uma fração complexa: Wu define porcentagem como uma fração complexa cujo denominador é 100. O número $\frac{N}{100}$, onde N é uma fração, é chamado de N por cento e denotado por $N\%$. Wu menciona que, geralmente, é dado aos alunos uma descrição intuitiva de porcentagem: "$N\%$ de alguma coisa" é interpretado como a totalidade de N partes de algo que é dividido em 100 partes iguais. A proposta de Wu é que seja dada uma definição mais precisa, usando a definição de porcentagem como uma fração complexa e a definição de multiplicação de frações, possibilitando ao aluno perceber que a ideia intuitiva está correta. Para esclarecer a definição, Wu utiliza como exemplo a seguinte afirmação:

"$7\frac{1}{2}\%$ de 512 dólares" significa a totalidade de $7\frac{1}{2}$ partes quando dividimos 512 dólares em 100 partes iguais.

Wu observa que, como $7\frac{1}{2}\%$ é uma fração, a definição de multiplicação de fração implica que

$$7\frac{1}{2}\% \text{ de } 512 = 7\frac{1}{2}\% \times 512 = \frac{7\frac{1}{2}}{100} \times 512 = 7\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{100} \times 512\right).$$

Novamente, pela definição de multiplicação de fração, $\frac{1}{100} \times 512$ é uma parte quando 512 é dividido em 100 partes iguais. Assim, o produto $7\frac{1}{2} \times (\frac{1}{100} \times 512)$ equivale a

$$7\tfrac{1}{2} \textit{ cópias de } \left(\tfrac{1}{100} \times 512\right),$$

que é, portanto,

$$7\tfrac{1}{2} \textit{ partes quando 512 é dividido em 100 partes iguais}.$$

Wu esclarece que esse raciocínio possibilita ver a porcentagem de duas formas. De um lado, a porcentagem não é apenas uma fração, mas, sim, uma fração complexa de denominador 100. Por outro lado, a porcentagem é um número e Wu enfatiza que a vantagem desta segunda leitura é que podemos aplicar tudo o que sabemos sobre frações para calcular com porcentagens.

(2) Tipos tradicionais de problemas envolvendo porcentagem: Wu expõe que, utilizando a ideia de que porcentagem é uma fração, é possível tratar qualquer problema envolvendo porcentagem como um problema já *usual* (envolvendo frações). Wu apresenta as vantagens dessa definição resolvendo quatro problemas clássicos sobre porcentagem, são eles:

   (1) Quanto é 45% de 70?
   (2) Expressar $\frac{5}{16}$ como uma porcentagem.
   (3) Quantos porcento de 70 equivale a 45?
   (4) 70 é 45% de que número?

   Vejamos como Wu propõe resolver cada um desses problemas.

   (1) Por definição de multiplicação de fração, a resposta é

   $$45\% \times 70 = \frac{45}{100} \times 70 = \frac{3150}{100} = 31{,}5.$$

   (2) Se $\frac{5}{16} = C\%$, então $\frac{5}{16} = C \times \frac{1}{100}$. Multiplicando-se ambos os membros por 100 encontramos que

   $$C = 100 \times \frac{5}{16} = 31\,\frac{1}{4}.$$

   Então, $\frac{5}{16} = 31\frac{1}{4}\%$.

   (3) Digamos que 45 é $N\%$ de 70. Assim, pela definição de multiplicação de fração, tem-se $45 = N\% \times 70$. Logo,

   $$45 = N \times \frac{1}{100} \times 70 \;\text{ e }\; N = \frac{45 \times 100}{70} = 64\,\frac{2}{7}.$$

   A resposta é, portanto, $64\,\frac{2}{7}\%$.

   (4) Seja N esse número. Então temos que $70 = 45\% \times N = N \times 45\%$, e, portanto, pela definição da divisão,

   $$N = \frac{70}{45\%} = \frac{70}{\frac{45}{100}} = 70 \times \frac{100}{45} = \frac{7000}{45} = 153\frac{1}{3}.$$

   Wu, porém, chama a atenção para o fato de que os alunos experimentam grandes dificuldades na aprendizagem de porcentagem. Wu considera que pode haver muitas razões, mas é fato que, se não for dito aos alunos que "porcentagem" é mais do que uma simples ideia vaga sobre "parte de 100", então eles não terão as ferramentas necessárias para a aprendizagem do conceito. No entanto, Wu acredita que, com a definição de porcentagem como uma fração complexa, é possível desenvolver cada passo de cada uma das

soluções dos problemas acima baseando-se inteiramente no que os alunos já sabem sobre a multiplicação e divisão de frações. Isso não é um raciocínio sutil e não há nenhuma adivinhação, afirma Wu.

5.6 Algumas questões para análise posterior

- Como os livros apresentam frações de frações? [p. 87]
- Como os livros apresentam a técnica de "inverter e multiplicar"? [p. 90]
- De que tipo são os problemas apresentados sobre divisão de frações? [p.90]
- Como porcentagens são apresentadas? [p. 90]

6 *Análise de Duas Coleções de Livros Didáticos do PNLD*

Nesse capítulo tentamos responder às questões levantadas no final dos capítulos anteriores a partir das observações realizadas nas coleções dos livros didáticos escolhidos (*Aprender Juntos – Matemática* de Roberta Taboada e Ângela Leite e *Matemática* de Edwaldo Bianchini). Vale salientar que, independentemente da motivação dada pelo trabalho do Wu, consideramos que essas perguntas são, em si, pertinentes para o próprio ensino de frações.

1. Como os livros didáticos analisados definem o que é uma fração? Eles o fazem usando apenas metáforas e analogias?

   Nossa análise: os livros não definem fração como um número mas, sim, como uma notação de situações em que é preciso representar parte de um todo. São apresentados apenas exemplos e, a partir desses exemplos, definem-se nomenclaturas relacionadas aos termos de uma fração como pode ser observado nos exemplos expostos nas Figuras 6.1 e 6.2.

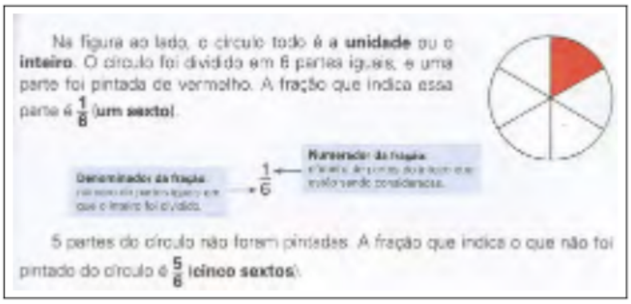


Figura 6.1: Definição apresentada para fração (Taboada e Leite, 4º ano, p. 107).

2. Os livros didáticos analisados usam figuras geométricas ao invés de suas dimensões (comprimento, área, volume) como modelos de frações?

   Nossa análise: sim. Ambas as coleções usam figuras geométricas sem a preocupação de chamar a atenção para as dimensões envolvidas. O que observamos com frequência


Ao perceber que não obteve um número inteiro de passos, ele usou o comprimento do pé para medir o "pedaço" que faltava (Figura 2).

Note que Antônio obteve 63 passos e 2 pés como medida para o comprimento da quadra. Acompanhe a relação que podemos estabelecer entre o passo e o pé de Antônio.

Isso significa que o comprimento do pé de Antônio é a terça parte do comprimento de seu passo.

Tudo se passa como se dividíssemos o passo em 3 partes iguais e o pé representasse uma dessas partes.

Cada uma dessas partes é representada pela **fração** $\frac{1}{3}$ (lemos "um terço").

Cada passo de Antônio é chamado de **todo** ou de **inteiro**. E cada pé representa uma **parte do inteiro**; nesse caso, cada pé mede $\frac{1}{3}$ do passo e 2 pés **valem** $\frac{2}{3}$ **do passo**.

Conhecendo **essa relação entre** o comprimento do pé e o do passo de Antônio, podemos dizer, então, que o comprimento da quadra é de 63 passos e $\frac{2}{3}$ do passo de Antônio. Essa medida não é um número natural, mas um exemplo de número que chamamos de número racional.

Figura 6.2: Introdução à ideia de fração (Bianchini, 6º ano, p. 141 e p. 142).

é o uso da expressão “parte pintada” (ver Figura 6.3). No livro do 6º ano ainda há um exercício cuja resposta sugerida no livro do professor induz o leitor a pensar erroneamente que uma fração só pode ser considerada quando a figura é dividida em partes de igual forma (Figura 6.4) e que, assim, partes com formas diferentes nunca poderiam ter uma mesma área.

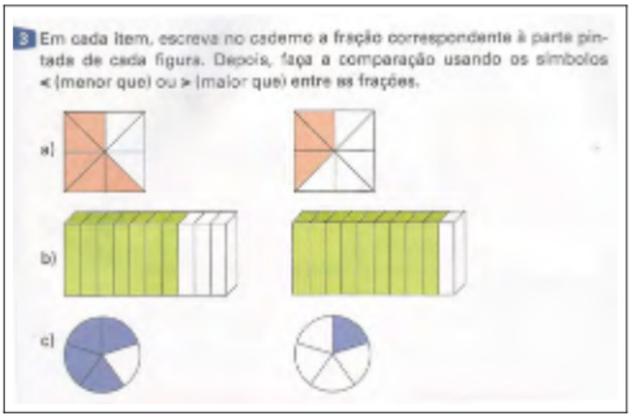


Figura 6.3: Comparação das frações com mesmo denominador (Taboada e Leite, 4º ano, p. 113).

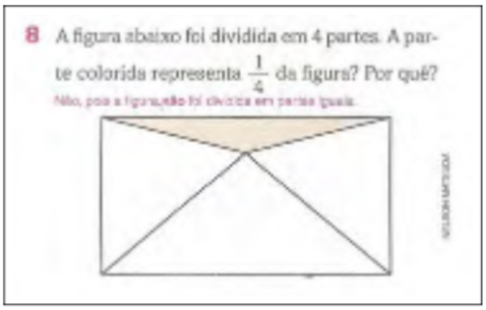


Figura 6.4: Exercício sobre o conceito de fração (Bianchini, 6º ano, p. 145).

3. Os livros didáticos analisados estabelecem alguma conexão entre as frações e a reta numérica?

   Nossa análise: na coleção do Ensino Fundamental I, encontramos algumas conexões das frações com a reta numérica, mas elas são isoladas. Uma conexão que vale ressaltar é o uso da reta numérica na comparação de frações (Figura 6.5). Mais adiante, o livro revê as frações equivalentes sem nenhuma referência ao recurso já utilizado da reta numérica para comparação de frações. No livro do 6º ano, há uma subseção intitulada "A reta numérica" dentro do tópico "Os números racionais na forma decimal e suas operações" onde se apresenta a associação dos números racionais (incluindo os naturais e os números

decimais) com os pontos da reta numérica (Figura 6.6). No entanto, não há nenhum trabalho posterior relacionando as frações com a reta numérica nos exercícios ou no desenvolvimento do conteúdo. Nas duas coleções, a reta numérica aparece fortemente associada, quase que exclusivamente, aos números decimais.

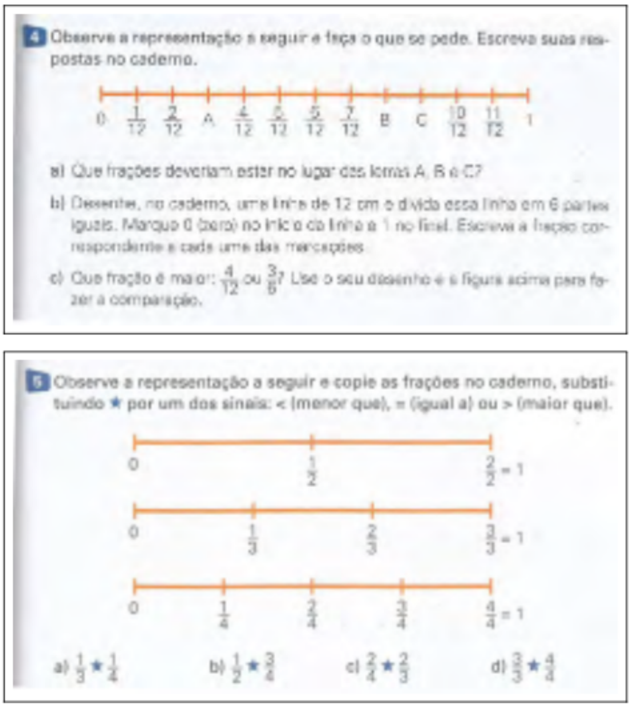


Figura 6.5: Utilização da reta numérica para explicar comparação de frações (Taboada e Leite, 5º ano, p. 103 e p. 105).

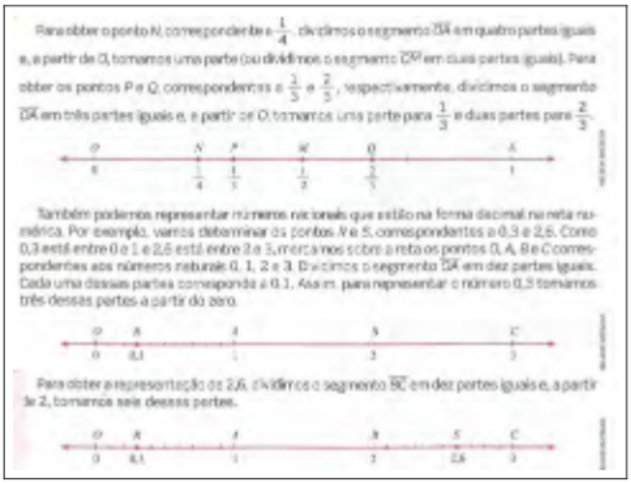
4. Como os livros didáticos analisados definem que duas frações são iguais? Como eles apresentam as frações equivalentes?

   Nossa análise: não há uma definição de igualdade de frações. O que se observa é a definição de frações equivalentes por meio visual, isto é, de que frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo e usando o sinal de igual (=) entre as frações para indicar este fato, sem nenhuma explicação, como no exemplo da Figura 6.7.

5. Como os livros didáticos analisados definem que uma fração é menor do que outra? Como eles ensinam a comparar frações? Os livros analisados apresentam a regra do produto

cruzado?

Nossa análise: na coleção dos anos finais do Ensino Fundamental I, encontramos quatro procedimentos distintos para comparar duas frações: por meio visual quando as frações possuem o mesmo denominador (Figura 6.3), utilizando a representação na reta numérica (Figura 6.5), por meio de uma comparação de ambas com uma fração padrão (Figu-

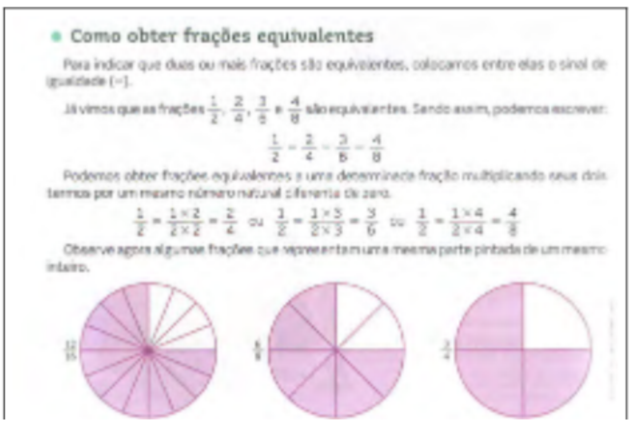


Para obter o ponto N, correspondente a $\frac{1}{4}$, dividimos o segmento $\overline{OA}$ em quatro partes iguais e, a partir de O, tomamos uma parte (ou dividimos o segmento $\overline{OM}$ em duas partes iguais). Para obter os pontos P e Q, correspondentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, respectivamente, dividimos o segmento $\overline{OA}$ em três partes iguais e, a partir de O, tomamos uma parte para $\frac{1}{3}$ e duas partes para $\frac{2}{3}$.

Também podemos representar números racionais que estão na forma decimal na reta numérica. Por exemplo, vamos determinar os pontos R e S, correspondentes a 0,3 e 2,6. Como 0,3 está entre 0 e 1 e 2,6 está entre 2 e 3, marcamos sobre a reta os pontos O, A, B e C correspondentes aos números naturais 0, 1, 2 e 3. Dividimos o segmento $\overline{OA}$ em dez partes iguais. Cada uma dessas partes corresponde a 0,1. Assim, para representar o número 0,3 tomamos três dessas partes a partir do zero.

Para obter a representação de 2,6, dividimos o segmento $\overline{BC}$ em dez partes iguais e, a partir de 2, tomamos seis dessas partes.

Figura 6.6: Associação de um número racional com um ponto na reta numérica (Bianchini, 6º ano, p. 212).



Como obter frações equivalentes

Para indicar que duas ou mais frações são equivalentes, colocamos entre elas o sinal de igualdade (=).

Já vimos que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes. Sendo assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

Podemos obter frações equivalentes a uma determinada fração multiplicando seus dois termos por um mesmo número natural diferente de zero.

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{3}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{1\times 4}{2\times 4} = \frac{4}{8}$$

Observe agora algumas frações que representam uma mesma parte pintada de um mesmo inteiro.

Figura 6.7: Apresentação das frações equivalentes (Bianchini, 6º ano, p. 156).

ra 6.8) e substituindo-as por frações equivalentes (Figura 6.9). No entanto, os procedimentos são apresentados isoladamente sem qualquer conexão entre eles. Já na coleção dos anos iniciais do Ensino Fundamental II, a comparação de duas frações baseia-se em trocar as frações originais por frações equivalentes de modo a comparar duas frações com o mesmo denominador. Em ambas as coleções, não há menção à regra do produto cruzado.

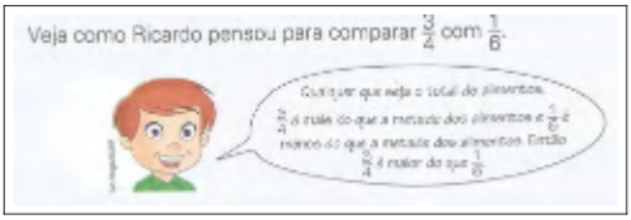


Figura 6.8: Comparação de frações por meio da comparação com a fração padrão $\frac{1}{2}$ (Taboada e Leite, 5º ano, p. 172).

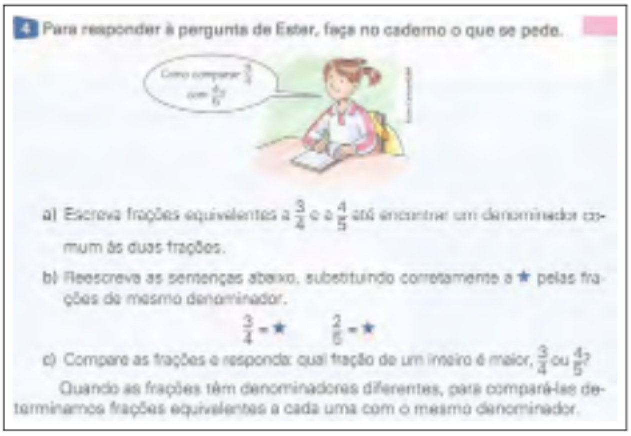


Figura 6.9: Comparação de frações fazendo uso de frações equivalentes (Taboada e Leite, 5º ano, p. 173).

6. Os livros analisados passam a ideia de que toda fração deve ser obrigatoriamente escrita em sua forma reduzida?

   Nossa análise: na coleção do 4º e 5º anos, menciona-se a fração irredutível, porém não se exige, em nenhum momento, que a resposta final de um problema esteja na forma se exige, em nenhum momento, que a resposta final de um problema esteja na forma reduzida. Isto já não acontece na coleção do Ensino Fundamental II, onde o autor sempre salienta nos enunciados dos exercícios que a resposta deve estar na forma simplificada, isto é, na forma reduzida (Figura 6.10).

7. Como os livros analisados apresentam frações mistas? Eles dão alguma aplicação para este tipo de fração?

4 Efetue as subtrações em seu caderno, simplificando o resultado quando possível.

a) $\frac{8}{9} - \frac{2}{9}$ $\frac{2}{3}$

b) $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}$ $\frac{6}{5}$

c) $\frac{15}{8} - \frac{9}{8}$ $\frac{3}{4}$

d) $\frac{9}{5} - \frac{4}{5}$ 1

e) $\frac{3}{7} - \frac{3}{7}$ 0

f) $\frac{11}{12} - \frac{3}{12}$ $\frac{2}{3}$

26 Calcule os produtos em seu caderno, simplificando quando possível:

a) $\frac{9}{20} \times \frac{5}{6}$ $\frac{3}{8}$

b) $\frac{3}{8} \times \frac{5}{3}$ $\frac{5}{8}$

c) $3 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$

d) $2\frac{1}{3} \times 3\frac{2}{5}$ $\frac{119}{15}$

e) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{11} \times \frac{3}{7}$ $\frac{3}{77}$

f) $\frac{4}{5} \times 0 \times \frac{5}{4}$ 0

g) $\frac{6}{15} \times \frac{5}{2}$ 1

h) $\frac{7}{3} \times \frac{3}{7}$ 1

Efetue as divisões indicadas em seu caderno, simplificando quando possível.

a) $6 : \frac{2}{5}$ 15

b) $\frac{2}{5} : 3$ $\frac{2}{15}$

c) $\frac{5}{8} : \frac{7}{6}$ $\frac{15}{28}$

d) $\frac{9}{5} : \frac{3}{2}$ $\frac{6}{5}$

e) $\frac{1}{8} : \frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

f) $3\frac{1}{2} : 7$ $\frac{1}{2}$

g) $2 : 1\frac{5}{2}$ $\frac{4}{7}$

h) $0 : 3\frac{1}{9}$ 0

Figura 6.10: Exigência da simplificação de frações (Dimenstein 6º ano, p. 171, p. 185 e p. 191)

Figura 6.10: Exigência da simplificação de frações (Bianchini, 6º ano, p. 171, p. 185 e p. 191).

Nossa análise: no 5º ano, as frações mistas aparecem como uma classificação das frações quando são apresentadas as nomenclaturas dos tipos de frações: próprias, impróprias e aparentes. Em sua definição, aparece a ideia de que uma fração mista é uma fração que representa mais do que um inteiro, porém são raras as aplicações dessa fração, aparecendo apenas nos exemplos iniciais, como na Figura 6.11. Já nos exercícios, são exploradas somente a escrita da fração mista representada num modelo visual, como nos exercícios expostos na Figura 6.12.

Figura 6.11: Apresentação da forma mista e frações impróprias (Taboada e Leite, 5º ano, p. 78).

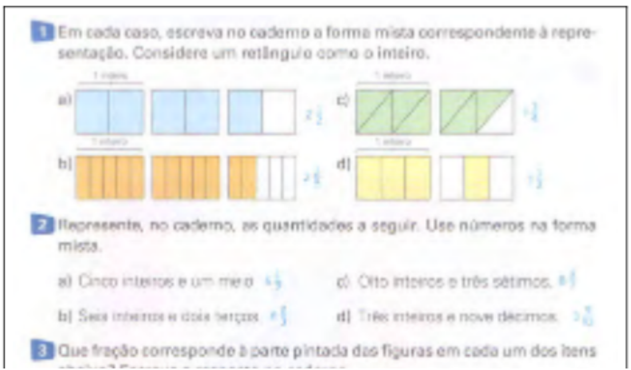


Figura 6.12: Exercícios sobre formas mistas (Taboada e Leite, 5º ano, p. 82).

8. Como os livros analisados apresentam a soma de frações quaisquer? Eles enfatizam a continuidade conceitual com a soma de inteiros? Como o mínimo múltiplo comum se enquadra nesta situação?

   Nossa análise: a soma de frações é apresentada, inicialmente, por meio visual com frações de mesmo denominador e, quando são apresentadas as frações com denominadores diferentes, utilizam-se as frações equivalentes, como exposto nas Figuras 6.13 e 6.14. A utilização do mmc para somar frações só aparece no livro do 6º ano como uma observação de que o mmc pode ser usado para obter frações equivalentes, no entanto, não se enfatiza seu emprego. Nas coleções analisadas, não há nenhuma conexão entre a soma de frações e a soma de inteiros o que, segundo Wu, seria perfeitamente viável com o uso da reta numérica.

9. Como os livros analisados apresentam a multiplicação de frações, em especial a multiplicação de um inteiro por uma fração e a multiplicação de uma fração por um inteiro?

   Nossa análise: as duas coleções têm tratamentos muito distintos para a multiplicação. Na coleção do Ensino Fundamental I, a multiplicação só aparece no livro do 5º ano e, para cada tipo de multiplicação, são trabalhadas as ideias matemáticas diferenciadas em cada um. A abordagem utilizada para multiplicação de um inteiro por uma fração é a de que a multiplicação é uma soma de parcelas iguais, transformando o produto em uma adição de frações (ver Figura 6.15). Para a multiplicação de uma fração por um inteiro, o livro emprega o aspecto de que o inteiro é dividido em partes iguais e se toma algumas dessas partes (Figura 6.16). Já o produto de duas frações quaisquer é trabalhado exclusivamente por meio de ilustração da divisão de áreas (Figura 6.17) e a fórmula do produto não é apresentada. No livro do 6º ano, a multiplicação aparece dividida em dois tópicos (quando um dos fatores é um número natural e quando os dois fatores são escritos na forma de fração) dentro do item "Operações com números racionais na forma de fração", mas apesar de aparecer como tópicos separados, não é dada uma interpretação diferente para cada tópico. Apenas são apresentados exemplos nos diferentes casos, onde o cálculo recai na utilização do algoritmo da multiplicação de frações (Figura 6.18). No caso da multiplicação de duas frações quaisquer, o autor também introduz o assunto por meio de uma ilustração da divisão de áreas (Figura 6.19). Contudo, o trabalho desenvolvido em seguida é todo voltado apenas para o algoritmo da multiplicação de frações.

10. A fórmula do produto de frações, $\frac{m}{n} \times \frac{k}{\ell} = \frac{m \times k}{n \times \ell} = \frac{mk}{n\ell}$, é justificada?

    Nossa análise: não.

11. A fórmula para a área de um retângulo com dimensões fracionárias é justificada?

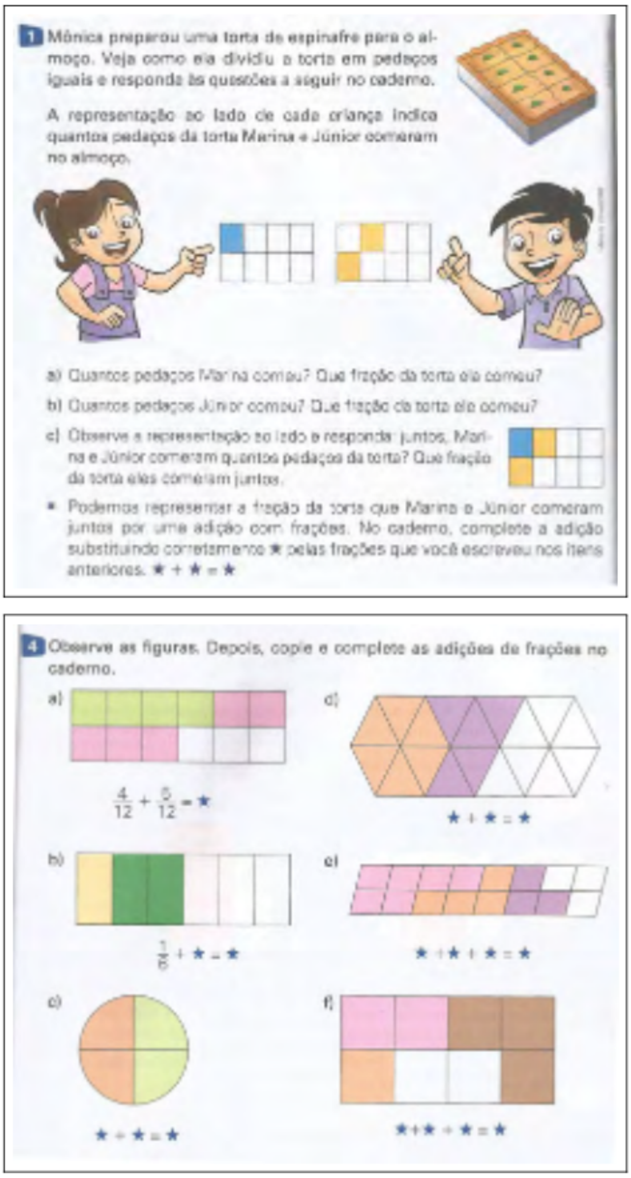
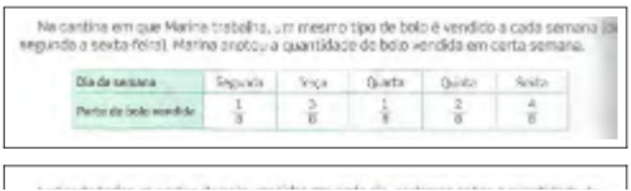
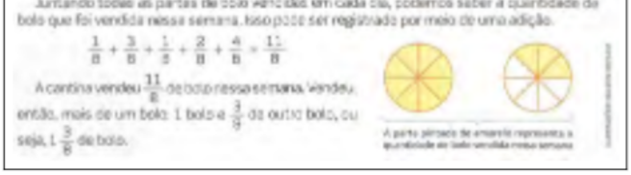


Figura 6.13: Adição de frações com mesmo denominador (Taboada e Leite, 4º ano, p. 194 e p. 195).


Na cantina em que Marina trabalha, um mesmo tipo de bolo é vendido a cada semana (de segunda a sexta-feira). Marina anotou a quantidade de bolo vendida em certa semana.

Dia da semana	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
Parte do bolo vendida	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$

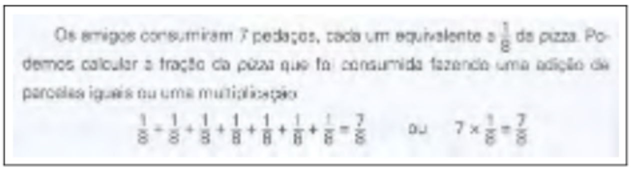


Juntando todas as partes de bolo vendidas em cada dia, podemos saber a quantidade de bolo que foi vendida nessa semana. Isso pode ser registrado por meio de uma adição.

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{4}{8}=\frac{11}{8}$$

A cantina vendeu $\frac{11}{8}$ de bolo nessa semana. Vendeu, então, mais de um bolo: 1 bolo e $\frac{3}{8}$ de outro bolo, ou seja, $1\frac{3}{8}$ de bolo.

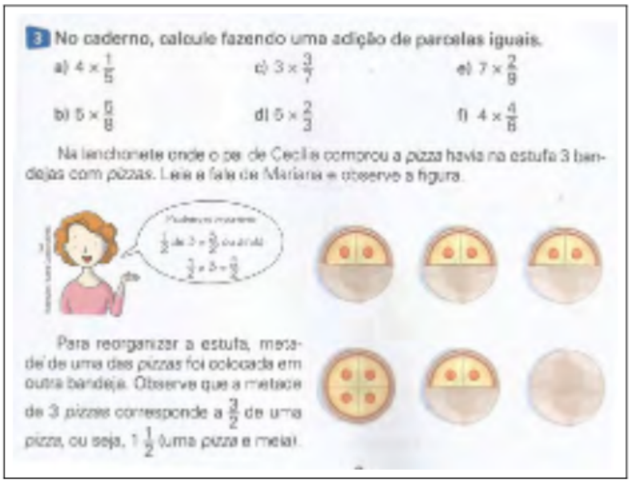
Figura 6.14: Exemplo de adição de frações com mesmo denominador (Bianchini, 6º ano, p. 170 e p. 171).



Os amigos consumiram 7 pedaços, cada um equivalente a $\frac{1}{8}$ da *pizza*. Podemos calcular a fração da *pizza* que foi consumida fazendo uma adição de parcelas iguais ou uma multiplicação.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \quad \text{ou} \quad 7\times\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

Figura 6.15: Multiplicação de um número inteiro por uma fração (Taboada e Leite, 5º ano, p. 230).



3 No caderno, calcule fazendo uma adição de parcelas iguais.

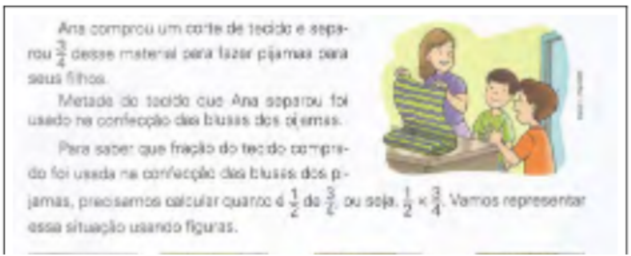
a) $4\times\frac{1}{5}$ c) $3\times\frac{3}{7}$ e) $7\times\frac{2}{9}$

b) $5\times\frac{5}{8}$ d) $5\times\frac{2}{3}$ f) $4\times\frac{4}{8}$

Na lanchonete onde o pai de Cecília comprou a *pizza* havia na estufa 3 bandejas com *pizzas*. Leia a fala de Mariana e observe a figura.

Para reorganizar a estufa, metade de uma das *pizzas* foi colocada em outra bandeja. Observe que a metade de 3 *pizzas* corresponde a $\frac{3}{2}$ de uma *pizza*, ou seja, $1\frac{1}{2}$ (uma *pizza* e meia).

Figura 6.16: Multiplicação de uma fração por um número inteiro (Taboada e Leite, 5º ano, p. 231).



Ana comprou um corte de tecido e separou $\frac{3}{4}$ desse material para fazer pijamas para seus filhos.

Metade do tecido que Ana separou foi usado na confecção das blusas dos pijamas.

Para saber que fração do tecido comprado foi usada na confecção das blusas dos pijamas, precisamos calcular quanto é $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$, ou seja, $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$. Vamos representar essa situação usando figuras.

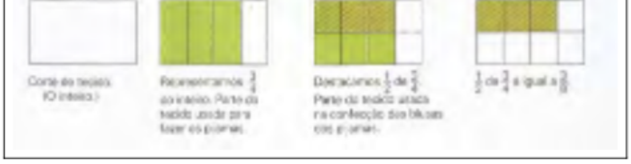


Figura 6.17: Multiplicação de frações (Taboada e Leite, 5º ano, p. 232).

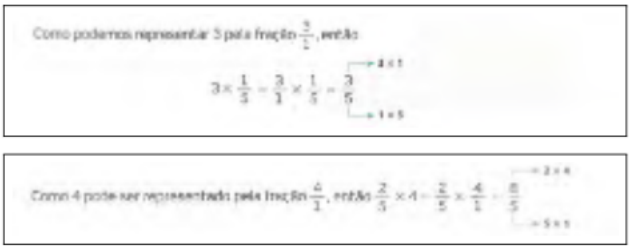


Figura 6.18: Abordagem dada a multiplicação de um número inteiro por uma fração e vice-versa (Bianchini, 6º ano, p. 180 e p. 181).

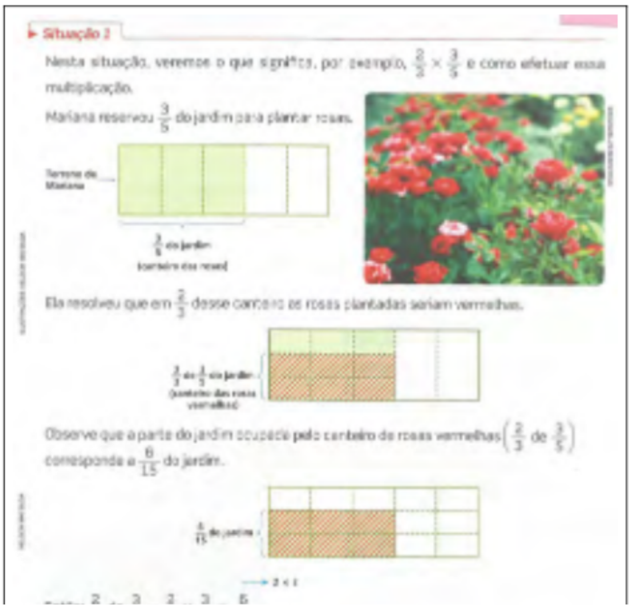


Figura 6.19: Multiplicação de frações (Bianchini, 6º ano, p. 183).

Nossa análise: não. Na verdade, o que se apresenta é a fórmula e, então, ela é aplicada com qualquer tipo de número, sem nenhuma explicação adicional.

12. Como os livros analisados apresentam frações de frações?

    Nossa análise: as frações de frações aparecem no contexto da multiplicação de frações. Em ambas as coleções, constatamos a presença de uma apresentação dessa ideia por meio de representações em modelos visuais, como pode ser observado nas Figuras 6.17 e 6.19, onde se estabelece a troca do “de” por “×” para a realização da operação aritmética.

13. Como os números decimais com um número finito de casas decimais são definidos?

    Nossa análise: em ambas as coleções, os números decimais são definidos como uma notação para fração decimal e, em seguida, eles são apresentados na classe de ordens do sistema de numeração decimal, como pode ser observado nas Figuras 6.20 e 6.21.

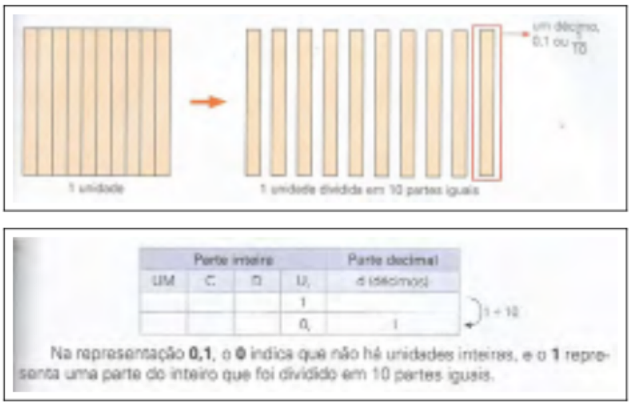
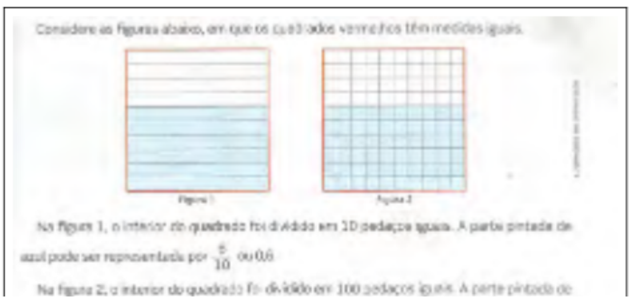


Figura 6.20: Introdução aos números decimais (Taboada e Leite, 4º ano, p. 129).



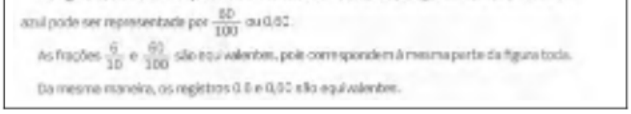


Figura 6.21: Igualdade de decimais com ordens diferentes (Bianchini, 6º ano, p. 209).

14. Como os livros analisados justificam, por exemplo, que 2,70 = 2,7?

Nossa análise: esse tipo de igualdade é justificada pela equivalência de frações decimais, usando um modelo visual, como mostram as Figuras 6.22 e 6.21.

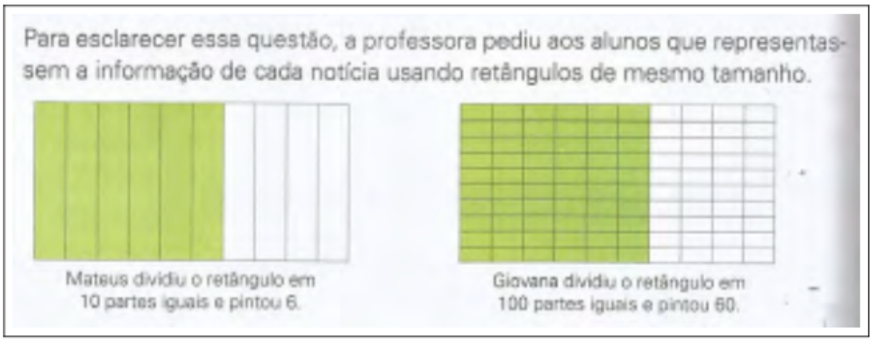


Figura 6.22: Justificativa para igualdade de números decimais em décimos e centésimos (Taboada e Leite, 4º ano, p. 154).

15. Os livros analisados justificam os algoritmos das operações com números decimais com um número finito de casas decimais?

    Nossa análise: na coleção das séries finais do Ensino Fundamental I, não há nenhuma justificativa para os algoritmos das operações com números decimais. Esses algoritmos aparecem com modelos a serem seguidos, sem nenhuma explicação, como pode ser observado na Figura 6.23[a]. Já no livro do 6º ano, a justificativa dos algoritmos é fundamentada nas operações com frações decimais, como pode ser visto nos exemplos expostos nas Figuras 6.24, 6.25 e 6.26.

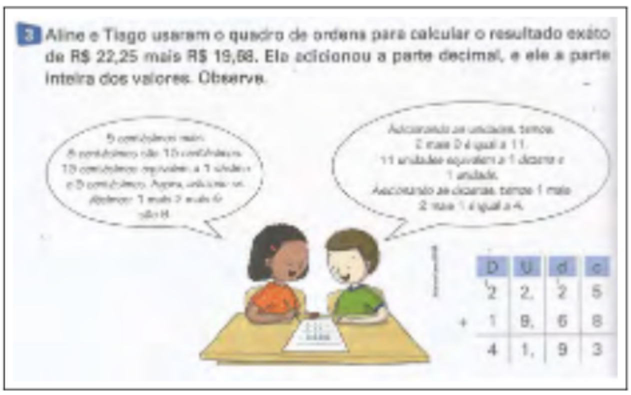


Figura 6.23: Algoritmo da adição com números decimais (Taboada e Leite, 4º ano, p. 218).

[a]A propósito, esta figura pode sugerir que, ao se somar dois números decimais, as partes inteira e decimais podem ser somadas de forma independente, o que não é sempre o caso.

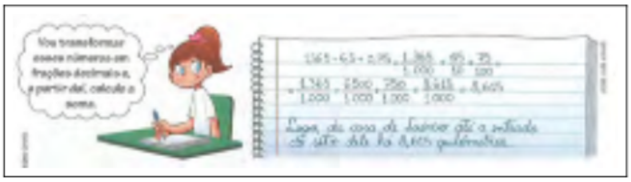


Figura 6.24: Justificativa da adição de números decimais por meio das frações decimais (Bianchini, 6º ano, p. 213).

$$2{,}2 \times 3{,}75 = \frac{22}{10} \times \frac{375}{100} = \frac{8.250}{1.000} = 8{,}250 = 8{,}25$$

Figura 6.25: Justificativa da multiplicação de números decimais por meio das frações decimais (Bianchini, 6º ano, p. 218).

$$\underline{12{,}5 : 0{,}25} = \frac{125}{10} : \frac{25}{100} = \frac{125}{10} \times \frac{100}{25} = \frac{12.500}{250} = \frac{1.250}{25} = \underline{1.250 : 25}$$

Então, $12{,}5 : 0{,}25 = 1.250 : 25 = 50$

Figura 6.26: Justificativa da divisão de números decimais por meio das frações decimais (Bianchini, 6º ano, p. 226).

16. As propriedades comutativa, associativa e distributiva da multiplicação são apresentadas?

    Nossa análise: essas propriedades só aparecem explicitamente na coleção do Ensino Fundamental II. No entanto, elas só são relacionadas com as operações com números naturais no 6º ano e com os números inteiros no 7º ano e, em nenhum momento, é dito que essas propriedades são válidas no contexto dos números racionais. Elas são apenas utilizadas sem nenhuma explicação.

17. Como a divisão de frações é apresentada? É feita de casos simples para casos mais complicados?

Nossa análise: no livro do 5º ano só é trabalhada a divisão de uma fração por um número inteiro e, para isso, é usado o recurso da representação da fração num modelo visual de área (Figura 6.27). A regra para a divisão de frações não é mencionada. Já no livro do 6º ano, o estudo da divisão é dividido em três casos: quando o divisor é um número natural; quando o dividendo é um número natural e quando a divisão envolve duas frações (exemplos nas Figuras 6.28, 6.29 e 6.30). Assim como na multiplicação, apesar dessa separação em casos, o livro não expõe ideias matemáticas diferentes para cada situação.

Em todos os casos, a finalização dos exemplos remete ao uso direto da regra da divisão (sem sua explicação).

Figura 6.27: Divisão de uma fração por um número inteiro (Taboada e Leite, 5º ano, p. 238).

18. Como os livros analisados apresentam a técnica de “inverter e multiplicar”?

    Nossa análise: como uma regra, sem justificativa e que apenas funciona.

19. De que tipo são os problemas apresentados sobre divisão de frações?

    Nossa análise: não é apresentado nenhum problema contextualizado para divisão de duas frações, inclusive na introdução do assunto, como mostra a Figura 6.30. Nos exercícios, a divisão entre frações aparece apenas em questões de efetuar cálculos diretos como exemplificado na Figura 6.31.

20. Como porcentagens são apresentadas?

    Nossa análise: as porcentagens são apresentadas inicialmente associadas às frações com denominador 100 e elas são trabalhadas em problemas do tipo porcentagem de uma quantidade. No 5º ano, são exploradas somente as porcentagens de 5%, 10%, 20%, 25% e


Consideremos a seguinte expressão: $\frac{\frac{1}{8}}{2}$. Em seguida, vamos proceder como se ela fosse uma fração e considerar válidas as seguintes igualdades:

$$\frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{16} : \frac{2}{2} = \frac{1}{16} : 1 = \frac{1}{16}$$

Dividir um número na forma de fração por um número natural é equivalente a obter uma parte de outra parte:

$$\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

Note que esse quociente também pode ser obtido multiplicando-se $\frac{1}{8}$ pelo inverso de 2:

$$\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Figura 6.28: Divisão envolvendo frações, onde o divisor é um número natural (Bianchini, 6º ano, p. 188).


Acompanhe outra situação em que calcularemos quantas vezes uma parte cabe em mais de um inteiro.

Quantas garrafas cheias de suco Maria precisa despejar para encher 4 recipientes que comportam no máximo 1 litro cada um, sabendo que na garrafa só cabem $\frac{2}{3}$ de litro?

Para resolver o problema de Maria, vamos representar cada recipiente por uma figura retangular.

Cada $\frac{2}{3}$ de litro representa o conteúdo de uma garrafa de suco e cada ▢ representa o conteúdo de $\frac{1}{2}$ garrafa. Logo, 4 litros equivalem a $\frac{12}{2}$ de garrafa, isto é, a 6 garrafas.

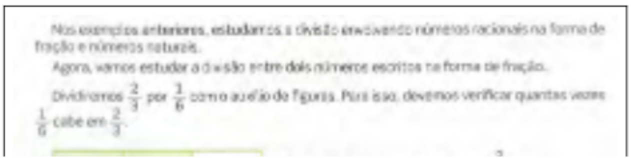
Vemos nas figuras que $\frac{2}{3}$ de litro cabem 6 vezes em 4 recipientes, ou seja, $4 : \frac{2}{3} = 6$

Logo, Maria precisa despejar 6 garrafas cheias de suco para encher 4 recipientes vazios.

Como no exemplo da divisão da goiabada de Pedro, esse quociente pode ser obtido multiplicando 4 pelo inverso de $\frac{2}{3}$.

$$4 : \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Figura 6.29: Divisão envolvendo frações onde o dividendo é um número natural (Bianchini, 6º ano, p. 189).


Nos exemplos anteriores, estudamos a divisão envolvendo números racionais na forma de fração e números naturais.

Agora, vamos estudar a divisão entre dois números escritos na forma de fração.

Dividiremos $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{6}$ com o auxílio de figuras. Para isso, devemos verificar quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{2}{3}$.

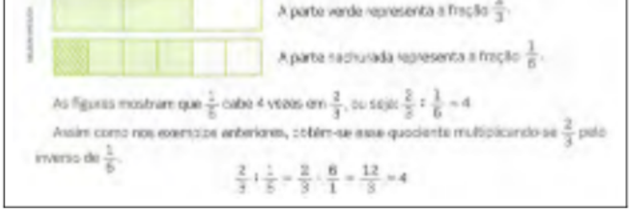
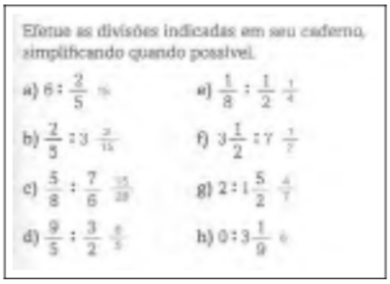


Figura 6.30: Divisão de frações (Bianchini, 6º ano, p. 190).


Efetue as divisões indicadas em seu caderno, simplificando quando possível.

a) $6 : \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{5} : 3$

c) $\frac{5}{8} : \frac{7}{6}$

d) $\frac{9}{5} : \frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{8} : \frac{1}{2}$

f) $3\frac{1}{2} : 7$

g) $2 : 1\frac{5}{2}$

h) $0 : 3\frac{1}{9}$

Figura 6.31: Exercícios de divisão de frações (Bianchini, 6º ano, p. 191).

50%. No 6º ano, é retomada a porcentagem qualquer de uma quantidade e são trabalhados problemas do tipo porcentagem equivalente a uma quantidade para que se encontre o todo. No trabalho com as porcentagens, é utilizada sempre a transformação da porcentagem em uma fração e os cálculos são efetuados com os conhecimentos já adquiridos sobre operações com frações.

7 Considerações Finais

No que se refere ao ensino de frações, pela análise do *Common Core*, percebemos uma distribuição gradual dos conteúdos ao longo das séries escolares (do K-3 ao K-6) com o desenvolvimento de conceitos mais básicos aos mais complexos. As tabelas que seguem fazem uma comparação da disposição por série dos conteúdos relacionados à fração entre o proposto pelo *Common Core* e os livros didáticos analisados.

Ao longo dos anos de experiência enquanto docentes, temos constatado, de modo geral, que as abordagens sobre frações se desenvolvem por meio de exemplos que buscam mostrar como se faz, deixando em segundo plano (ou até mesmo omitindo) a formalização e sistematização dos conceitos. E, nesse ponto, destacamos a descrição minuciosa que o *Common Core* traz de cada item a ser abordado por série. E, bem diferente do que estamos acostumados a ver, não é mencionado apenas o conteúdo a ser trabalhado, mas qual a intenção do conteúdo na série. A nosso ver, as orientações do *Common Core* sugerem um trabalho conceitual mais sistematizado e consolidado possibilitando ao aluno um aprendizado com significado e continuidade conceitual, uma vez que percebemos uma conectividade dos conceitos já trabalhados e compreendidos com os novos conceitos a serem apresentados.

Nos chama atenção a abordagem das frações no *Commom Core* estar diretamente e fortemente ligada à reta numérica, o que parece não ser uma prática comum no Brasil. Acreditamos que tal fato tenha grande influência do trabalho de Wu, uma vez que este foi colaborador direto na redação do documento.

O núcleo da proposta de Wu para o conceito de fração está ligado ao uso e à representação

O núcleo da proposta de Wu para o conceito de fração está ligado ao uso e à representação da fração na reta numérica. A própria definição de fração, considerada por Wu um item essencial para a compreensão do assunto (e que está ausente nos livros didáticos que analisamos) é baseada na representação da reta numérica. Do ponto de vista de Wu, esta concepção permite uma extensão conceitual dos conhecimentos já adquiridos sobre números inteiros.

Série	*Common Core*	Livros didáticos analisados
K-3 (3º ano EF I) (8-9 anos)	• Fração unitária. • Representação das frações em uma reta numérica. • Frações equivalentes. • Comparação de duas frações com o mesmo numerador ou o mesmo denominador.	Ainda não são apresentadas as frações.

Tabela 7.1: Comparação da disposição dos conteúdos relacionados à fração entre o proposto pelo *Common Core* e os livros didáticos analisados no nível K-3 (3º ano EF I).

Série	*Common Core*	Livros didáticos analisados
K-4 (4º ano EF I) (9-10 anos)	• Frações equivalentes (explicação porque uma fração $\frac{a}{b}$ é equivalente a uma fração $\frac{n\times a}{n\times b}$). • Comparação de duas frações. • Frações unitárias. • Compreensão de uma fração $\frac{a}{b}$, com $a > 1$, como uma soma das frações $\frac{1}{b}$. • Adição e subtração de frações com mesmo denominador e, no caso de denominadores diferentes, somente as ideias conceituais relacionadas às ações de juntar e separar. • Multiplicação de um inteiro por uma fração. • Notação decimal para as frações deci-	• Frações: ideias de parte e todo. • Fração de quantidade. • Termos de uma fração: numerador e denominador. • Equivalência de frações. • Comparação entre frações. • Adição e subtração de frações de mesmo numerador e adição e subtração de frações de mesmo denominador. • Fração decimal e número decimal.

	• mais. • Localização de números decimais na reta numérica. • Comparação de números decimais.	• Números decimais: adição e subtração.

Tabela 7.2: Comparação da disposição dos conteúdos relacionados à fração entre o proposto pelo *Common Core* e os livros didáticos analisados no nível K-4 ($4^{\underline{o}}$ ano EF I).

Série	*Common Core*	Livros didáticos analisados
K-5 ($5^{\underline{o}}$ ano EF I) (10 - 11 anos)	• Frações equivalentes. • Adição e subtração de frações com denominadores diferentes. • Fração como uma divisão. • Multiplicação de uma fração por um número inteiro ou por uma fração. • Área de retângulo cujos comprimentos dos lados são frações. • Divisão de frações unitárias por números inteiros e números inteiros por frações unitárias. • Adição e subtração de números decimais.	• Frações: ideias de parte e todo (revisão em espiral). • Fração de quantidade (revisão em espiral). • Fração como divisão. • Frações próprias e impróprias. • Equivalência de frações. • Comparação entre frações. • Adição e subtração de frações. • Simplificação de frações. • Números decimais: relação com frações decimais • Operações com decimais. • Multiplicação e divisão de fração por inteiro e entre frações

Tabela 7.3: Comparação da disposição dos conteúdos relacionados à fração entre o proposto pelo *Common Core* e os livros didáticos analisados no nível K-5 ($5^{\underline{o}}$ ano EF I).

Série	*Common Core*	Livros didáticos analisados
K-6 (6º ano EF II) (11 - 12 anos)	• Multiplicação e divisão de frações por frações. • Adição, subtração, multiplicação e divisão de números decimais com vários dígitos usando o algoritmo padrão para cada operação. • Cálculo do mmc e mdc. • Números positivos e negativos. • Número racional como um ponto na reta numérica. • Porcentagem. • Razão. • Taxa. • Proporção.	• Cálculo do mmc e mdc. • Números racionais na forma de fração (leitura, escrita e representação). • Fração como parte e todo. • Fração como quociente. • Fração como razão. • Frações equivalentes. • Simplificação de frações. • Comparação de números escritos na forma de fração. • Operações com números racionais na forma de fração (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada). • Números racionais na forma decimal (leitura, escrita e representação). • Fração decimal. • Comparação de números racionais escritos na forma decimal. • Localização nos números racionais na forma decimal na reta numérica. • Relação entre as representações dos números racionais na forma de fração e decimal. • Operações com números racionais na forma decimal (adição, subtração,

		na forma decimal (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). • Porcentagem.

Tabela 7.4: Comparação da disposição dos conteúdos relacionados à fração entre o proposto pelo *Common Core* e os livros didáticos analisados no nível K-6 (6º ano EF II).

> *Precisamos dizer claramente o que é uma fração. Uma fração tem de ser um número e, assim, a definição de uma fração como "parte de um todo" não serve. Os alunos precisam ver que as frações são a extensão natural dos números inteiros, de modo que as operações aritméticas ($+$, $-$, $\times$ e $\div$) com números inteiros podem ser transferidas de maneira natural para as frações.* $[\cdots]$ *A definição de uma fração (ou, de fato, qualquer número racional) como um ponto na reta numérica obtido por um processo de particionamento serviria admiravelmente para efetuar esta transição.*
>
> (Wu, 2005, p. 2, tradução nossa)

Em conformidade com Wu, consideramos que o trabalho com a reta numérica pode configurar-se como importante instrumento no aprendizado das frações. Uma vantagem imediata da utilização da reta numérica é a percepção da fração como número, pois toda fração pode ser associada a um ponto da reta numérica. Desta forma, cada fração está relacionada a um comprimento de segmento de reta, o que permite formulações simples e precisas de conceitos básicos como "igual", "menor que", "maior que" e equivalência, além de estender naturalmente para as frações várias operações já apresentadas para os números inteiros. Nessa linha de raciocínio, a utilização da reta numérica permite o trabalho com o significado das operações em si, entendendo a adição como juntar, subtração como tirar, multiplicação como a ideia da disposição retangular e a divisão tanto como partição em partes iguais como medida.

Por outro lado, num sentido completamente contrário à proposta de Wu, constatamos nos livros didáticos analisados a ausência da reta numérica como suporte para trabalhar os conceitos relacionados à fração. E um indício de que tal fato não se restringe às obras analisadas é o exposto por Marinho (2013) em sua dissertação de mestrado:

> *No entanto, a introdução das frações por meio de medida de comprimento não é valorizada nas obras. Não foram identificadas atividades que explorassem situações de medição e de divisão de um segmento de reta qualquer em partes com a mesma medida. Quando algum exemplo relacionado a ideias de medida de comprimento com a de fração está presente, ele tem um caráter ilustrativo, a ponto de poder ser retirado sem comprometer o restante do que é proposto.*
>
> (Marinho, 2013, p. 124)

Entendemos que essa simples contraposição já evidencia que a proposta formulada por Wu

Entendemos que essa simples contraposição já evidencia que a proposta formulada por Wu, pode trazer contribuições relevantes à discussão acerca do ensino e aprendizagem de frações.

Em termos de ensino de frações, Wu aponta quatro pontos críticos, a saber:

> *(1) O conceito de fração nunca é definido claramente e sua afinidade com os números inteiros não é enfatizada suficientemente.*
>
> *(2) As complexidades conceituais associadas ao emprego de frações são enfatizadas desde o início em detrimento do conceito básico.*

> *(3) As regras das operações aritméticas com frações são apresentadas sem relacioná-las às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos têm familiaridade.*
>
> *(4) Em geral, explicações matemáticas de quase todos os aspectos essenciais do conceito de fração ficam faltando.*
>
> (Wu, 2001, p. 118, tradução nossa)

Na análise dos livros didáticos, percebemos que a introdução do conceito de fração é feita de modo bastante superficial. De modo geral, a abordagem dos livros se desenvolve por meio de exemplos, como se estes fossem suficientes para promover a compreensão do conceito de fração. Por certo, apenas exemplos não são suficientes para que um aluno do Ensino Fundamental compreenda as frações como um número de forma a ampliar os conjuntos numéricos já conhecidos.

Não encontramos nos livros analisados nenhuma relação das operações envolvendo frações com as operações já conhecidas com os números naturais. A apresentação e explanação das operações aritméticas com frações também é desenvolvida somente com exemplos e tal desenvolvimento pressupõe que seja possível compreender o conceito matemático seguindo os passos apresentados nos exemplos. Mais ainda, o desfecho das operações se resume na aplicação direta de algoritmos sem, ao menos, uma justificativa dos procedimentos adotados.

Em relação ao que é proposto por Wu, queremos fazer uma consideração sobre a abordagem com os números mistos. A ênfase dada aos números mistos por Wu faz sentido no contexto americano, uma vez que as unidades de medida nos EUA são as do Sistema Imperial Britânico que faz um uso significativo dos números mistos. Em contrapartida, no Brasil, entendemos que não há tanta relevância em se trabalhar com os números escritos na forma mista, uma vez que encontramos poucas aplicações práticas nessa utilização.

O relatório técnico de Wu, analisado em nossa pesquisa, é um trabalho minucioso e traz um arco completo dos conceitos relacionados às frações, partindo da definição de uma fração aos conceitos mais complexos como taxa, razão e proporção. No entanto, em nossa pesquisa, decidimos não incluir a parte final do relatório que trata exatamente de taxa e razão, por condecidimos não incluir a parte final do relatório que trata exatamente de taxa e razão, por considerarmos que, mesmo com o cuidado de Wu em esclarecer os conceitos envolvidos, as ideias apresentadas precisam ser melhor esclarecidas (talvez, em um trabalho futuro).

Não coube a esse trabalho investigar quais são as problemáticas existentes no ensino de frações, mas gostaríamos de mencionar nossa inquietação quanto à questão da formação do professor, o qual consideramos agente disparador de qualquer avanço ou modificação no ensino. Wu enfatiza que o conceito de fração não é algo simples, concordando com a pesquisadora Liping Ma:

> *Uma outra observação é que não importa qual seja a melhoria curricular, pois, em última análise, a sua implementação cabe ao professor na sala de aula. O livro pioneiro de Liping Ma,* Saber e Ensinar Matemática Elementar*, acabou com o mito de que a matemática elementar é simples. Em nenhum lugar, a observação de Ma é mais evidente do que no ensino de frações. As frações são difíceis, não só para os alunos, mas também para os seus professores, que, em sua maior parte, são as próprias vítimas de uma educação matemática pobre.*
>
> (Wu, 2001, p. 7, tradução nossa)

Em especial, queremos salientar que o conceito de fração, sendo ministrado nas séries iniciais, fica, em sua maioria, a cargo de professores não especialistas em Matemática e mesmo os professores que possuem formação matemática, frequentemente, se veem diante do problema de desenvolver sua ação pedagógica a partir de uma formação na qual uma série de questões fundamentais na prática escolar não foram discutidas.

Por fim, em tempos de discussão e formulação acerca de um novo currículo de Matemática a ser implementado no Brasil, esperamos que o presente trabalho possa consolidar-se como uma contribuição a enriquecer tal discussão. Esperamos também que o trabalho sirva como fonte para professores, futuros professores e pesquisadores interessados no ensino de frações na Escola Básica.

Referências Bibliográficas

Bianchini, E. *Matemática: Bianchini*. Ensino Fundamental, 7ª edição, Ed. Moderna, São Paulo, 2011.

Brasil. MEC. *Guia de Livros Didáticos – PNLD 2013: Alfabetização Matemática e Matemática – Ensino Fundamental Anos Iniciais*. Secretaria de Educação Básica, Ministério da Educação, Brasília, 2012.

Brasil. MEC. *Guia de Livros Didáticos – PNLD 2014: Matemática – Ensino Fundamental Anos Finais*. Secretaria de Educação Básica, Ministério da Educação, Brasília, 2013.

Common Core State Standards Initiative. *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington DC, 2010. Disponível em: <http://www.corestandards.org/Math/>. Acessado em: outubro de 2013.

Kendall, J. *Understanding Common Core State Standards*. Heinle ELT, 2011.

Leong, Y. K. *Mathematics K12: Crisis in Education*. Mathematical Medley, v. 38, n. 1, p. 4-15, junho, 2012. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/Interview-MM.pdf>. Acessado em: janeiro de 2015.

Ma, L. *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Tradução: Sara Lemos e Ana Sofia Duarte, Gradiva, Lisboa, 2009.

Marinho, A. *As Frações nos Livros Didáticos do Sexto Ano do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 2013.

Quintanilha, R. *Saberes Docentes de Professores dos Anos Iniciais sobre Frações*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.

Sant'Anna, N. da F. P. *Práticas Pedagógicas para O Ensino de Frações Objetivando A Introdução à Álgebra*. Tese de Doutorado em Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Taboada, R.; Leite, A. *Aprender Juntos Matemática*. Ensino Fundamental, 3ª edição, Edições SM, São Paulo, 2011.

Wu, H.-H. *Teaching Fractions According to The Common Core Standards*. Technical report, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA, 2012 (revisado em 2014). Disponível em: <http://math.berkeley.edu/~wu/CCSS-Fractions_1.pdf>. Acessado em: março de 2014.

Wu, H.-H. *Teaching Fractions in Elementary School: A Manual for Teachers*. Article, Berkeley, CA, 1998. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/fractions1998.pdf>. Acessado em: março de 2014.

Wu, H.-H. *Chapter 2: Fractions (Draft) - Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*. Berkeley, CA, 2001. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/EMI2a.pdf>. Acessado em: março de 2014.

Wu, H.-H. *Key Mathematical Ideas in Grades 5-8*. Berkeley, CA, September 12, 2005. Disponível em: <https://math.berkeley.edu/~wu/NCTM2005a.pdf>. Acessado em: março de 2014.

Wu, H.-H. *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics*. American Mathematical Society, 2011.