

SCHIRLANE DOS SANTOS AGUIAR RODRIGUES

A TEORIA DE VAN HIELE APLICADA AOS
TRIÂNGULOS: UMA SEQUÊNCIA
DIDÁTICA PARA O 8º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

JULHO DE 2015

SCHIRLANE DOS SANTOS AGUIAR RODRIGUES

A TEORIA DE VAN HIELE APLICADA AOS
TRIÂNGULOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA
PARA O 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Liliana Angelina Leon Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

JULHO DE 2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT / UENF**

59/2015

Rodrigues, Schirlane dos Santos Aguiar

A teoria de van Hiele aplicada aos triângulos: uma sequência didática para o 8º ano do ensino fundamental / Schirlane dos Santos Aguiar Rodrigues. – Campos dos Goytacazes, 2015.

125 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2015.

Orientador: Liliana Angelina Leon Mescua.

Área de concentração: Matemática.

Bibliografia: f. 90-92.

1. GEOMETRIA 2. TEORIA DE VAN HIELE 3. TRIÂNGULO 4. APRENDIZAGEM I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 516

SCHIRLANE DOS SANTOS AGUIAR RODRIGUES

**A TEORIA DE VAN HIELE APLICADA AOS
TRIÂNGULOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA
PARA O 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.”

Aprovada em 24 de Julho de 2015.



Profª. Mônica Souto da Silva Dias

D.Sc. - IFF



Prof. Oscar Alfredo Paz la Torre

D.Sc. - UENF



Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

D.Sc. - UENF



Prof. Liliana Angelina Leon Mescua

D.Sc. - UENF

(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho a todos aqueles que acreditam que Deus é poderoso para fazer infinitamente mais do que tudo que pedimos, pensamos ou sonhamos.

Agradecimentos

Ao bondoso Deus

Tu és grande, majestoso e poderoso. Deus da criação e autor da minha vida. Tudo que fazes é maravilhoso! Obrigada pelos milagres que tens realizado em minha vida, especialmente a conclusão deste curso. "Portanto, ao Rei eterno, imortal, invisível, Deus único, sejam honra e glória pelos séculos dos séculos. Amém!"(I Timóteo 1: 17)

Aos meus pais

Obrigada pois me trouxeram ao mundo e me ensinaram a viver. Sempre me incentivaram a estudar, mesmo quando parecia impossível fazê-lo. Quero honrá-los enquanto viver, obedecendo ao mandamento do Senhor: "Honra teu pai e tua mãe, a fim de que tenhas vida longa na terra que o Senhor, o teu Deus, te dá."(Êxodo 20: 12)

À minha irmã Cristina

Você é benção em minha vida. Em todos os momentos, de alegrias ou tristezas, você estava por perto, sorrindo ou chorando comigo. "Você foi escolhida para trilhar minha vida e ser minha amiga. Para risadas e choros, para conquistas e tristezas. Minha amiga, minha base, meu ponto de apoio. Presente dos céus. A escolhida por Deus. Com você sou mais feliz. Com você sou mais vencedora."(Larissa Alvarenga - Amiga irmã)

Ao meu esposo Gildo

Para sempre será o meu amado. Aquele que me dá apoio, incentivo, carinho e atenção. "Nossas vidas são a prova de que Deus sabe cuidar de cada família, que sonha seus sonhos, que crê em seus planos, que sempre obedece ao Pai, que sabe esperar por sua vontade. Somente onde Deus está existe amor de verdade. Nada é mais forte que o amor, só Deus sabe como te amo."(Eyshila - Meu jeito de amar)

Aos meus filhos

Laura e Arthur, obrigada pela paciência e compreensão durante este curso. Vocês são presentes de Deus! "Quanto a seus filhos, eles são herança do SENHOR: o fruto do ventre é um presente de Deus."(Salmos 127: 3) "Para a Tua glória, para o Teu louvor, para a existência o Senhor os chamou. Tudo planejado pelo Teu amor. Filhos, herança do Senhor."(Fernanda Brum - Filhos, herança do Senhor)

À minha amiga Juliana

Deus colocou você para caminhar comigo. O caminho era cheio de obstáculos, era escuro e assustador. Algumas vezes choramos achando que estávamos perdidas; outras vezes questionamos se valia a pena continuar. Agora chegamos ao fim do caminho. Vencemos! "Amigo é muito mais do que alguém pra conversar, alguém pra abraçar. Amigo é uma bênção que vem do coração de Deus pra gente cuidar. Amiga, eu nunca vou desistir de você e pela tua vida eu vou interceder. Eu acredito em você. Eu acredito nos sonhos de Deus pra tua vida. Amiga eu oro por você porque a tua vitória também é minha."(Fernanda Brum e Eyshila - Amigas)

À minha orientadora e professora Liliana

Grande foi o meu aprendizado com você. Obrigada pela atenção, disponibilidade e ajuda na elaboração deste trabalho. "Professora, pela vida inteira eu vou me lembrar de tudo o que me ensinou: que cada dia é um presente, que o meu futuro eu posso construir, que caminhar juntos é repartir, que só com amor um coração bate feliz, que lutar por um sonho é escrever a própria história, que os momentos com os amigos não se apagam da memória. Aceite o meu amor e eterna gratidão."(Ana Person - Professor)

Aos meus professores

Obrigada por todo o conhecimento transmitido. "A base de toda conquista é o professor. A fonte de sabedoria, um bom professor. Em cada descoberta, cada invenção. Todo bom começo tem um bom professor. No sonho que se realiza. Cada nova ideia tem um professor. O que se aprende, o que se ensina. Uma lição de vida, uma lição de amor."(Max Haetinger - Um bom professor, um bom começo)

Aos meus amigos do Profmat

Quantos desafios, medos, incertezas invadiram minha mente nesses dois anos de mestrado. Mas eu não estava sozinha. Vocês estavam lá, sempre dispostos a me ajudar. Obrigada pelas palavras de incentivo, pelas horas de estudo na biblioteca, pelos materiais compartilhados, pelas caronas, por tudo. "Que bom te ter aqui comigo, pra conversar e te conhecer. Entra na roda e vem comigo, só é feliz quem tem amigos. Que bom te conhecer. Pra mim foi um prazer, viver em comunhão. Amigos mais chegados que irmãos."(Quatro por um - Amizade)

E a todos que fazem parte da minha vida

Obrigada pelas orações, pelo incentivo, pelo apoio constante. Sem a ajuda de vocês tudo seria mais difícil. "Cada estrada que passei, cada história que eu vivi, os futuros que sonhei. Cada dia, cada mês, cada estação, cada choro, cada riso, cada emoção que eu dividi com vocês. Viveria tudo outra vez. E os laços que eu plantei, que formaram raízes no meu chão, vou colher por toda vida, amigos do meu coração."(Rafinha - Fim de ano)

Para ser sábio, é preciso primeiro temer a Deus, o Senhor.
Ele dá entendimento aos que obedecem aos seus mandamentos.
Salmos 111: 10

Resumo

Este trabalho apresentou uma proposta para o ensino de Geometria, especificamente o estudo dos conceitos relativos aos triângulos com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, os quais constituíram os sujeitos da pesquisa. Como fundamentação teórica é apresentada a teoria da van Hiele. O trabalho trouxe uma sequência didática para que o aluno venha conhecer e familiarizar-se com o triângulo quanto a sua classificação, condição de existência, medidas dos lados e ângulos, soma dos ângulos internos, teorema do ângulo externo e casos de congruência. Os instrumentos de pesquisa foram o teste de van Hiele, testes sobre triângulos e uma sequência de atividades sobre triângulos. Após análise dos resultados obtidos, estes mostraram que a sequência organizada de tarefas e a maneira como foram desenvolvidas através da intervenção pedagógica com uso de materiais manipuláveis, envolvendo a interação entre os alunos, entre a professora e os alunos e os momentos de discussão, foram fundamentais para a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

Palavras-chaves: Geometria, teoria de van Hiele, triângulo, aprendizagem.

Abstract

This work presents a proposal to the Geometry tuition, specifically the study about the concepts related to triangles with students from the 8th grade on elementary school, who were the people analyzed on the search. As a theoretical foundation, it is shown the van Hiele theory. The work brought a didactic sequence in order to make the student knows and become acquainted with the triangle in its classification, condition of existence, sides and angles measures, sum of the internal angles, external angle theorem and congruence cases. The research devices were the van Hiele test, test about triangles and a sequence of activities on triangles. After the analysis of the results obtained, these showed that the organized sequence of tasks and the way they were developed through the pedagogical intervention - with the use of manipulable materials involving the interaction among the students, between the teacher and them, and the discussion moments – were essential to the comprehension of the geometric concepts studied.

Key-words: Geometry, van Hiele theory, triangle, learning.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Hexágono decomposto em triângulos.	30
Figura 2 – Presença de triângulos no telhado de uma casa.	31
Figura 3 – Presença de triângulos na estrutura de uma ponte.	31
Figura 4 – Três pontos não-colineares	32
Figura 5 – Triângulo ABC de vértices A , B e C	32
Figura 6 – Triângulos equilátero, isósceles e escaleno.	33
Figura 7 – Triângulos congruentes.	34
Figura 8 – O caso de congruência LAL.	34
Figura 9 – O caso de congruência ALA.	35
Figura 10 – O caso de congruência LLL.	35
Figura 11 – ABC isósceles $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$	36
Figura 12 – Ângulos agudo, reto e obtuso.	36
Figura 13 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.	37
Figura 14 – O caso de congruência LAAo.	37
Figura 15 – O teorema do ângulo externo.	38
Figura 16 – Triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.	39
Figura 17 – Triângulo ABC com $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \overline{AC} > \overline{AB}$	40
Figura 18 – Desigualdade triangular.	40
Figura 19 – Níveis de van Hiele	48
Figura 20 – Resposta do sujeito S5 para a questão 1 do teste de van Hiele.	56
Figura 21 – Resposta do sujeito S4 para a questão 1 do teste de van Hiele.	56
Figura 22 – Resposta do sujeito S33 para a questão 2 do teste de van Hiele.	56
Figura 23 – Resposta do sujeito S3 para a questão 3 do teste de van Hiele.	57
Figura 24 – Resposta do sujeito S32 para a questão 4 do teste de van Hiele.	57
Figura 25 – Resposta do sujeito S10 para a questão 5 do teste de van Hiele.	57
Figura 26 – Resposta do sujeito S13 para a questão 7 do teste de van Hiele.	58
Figura 27 – Resposta do sujeito S2 para a questão 8 do teste de van Hiele.	58
Figura 28 – Resposta do sujeito S5 para a questão 10 do teste de van Hiele.	59
Figura 29 – Resposta do sujeito S9 para a questão 11 do teste de van Hiele.	59
Figura 30 – Resposta do sujeito S26 para a questão 13 do teste de van Hiele.	60
Figura 31 – Resposta do sujeito S3 para a questão 14 do teste de van Hiele.	60

Figura 32 – Resposta do sujeito S29 para a questão 15 do teste de van Hiele.	60
Figura 33 – Resposta do sujeito S4 para a questão 3 do teste sobre triângulos.	63
Figura 34 – Resposta do sujeito S13 para a questão 4 do teste sobre triângulos.	63
Figura 35 – Resposta do sujeito S21 para a questão 6 do teste sobre triângulos.	64
Figura 36 – Resposta do sujeito S2 para a questão 7 do teste sobre triângulos.	64
Figura 37 – Resposta do sujeito S2 para a questão 9 do teste sobre triângulos.	65
Figura 38 – Resposta do sujeito S8 para a questão 10 do teste sobre triângulos.	65
Figura 39 – Resposta do sujeito S14 para a questão 11 do teste sobre triângulos.	66
Figura 40 – Resposta do sujeito S27 para a questão 12 do teste sobre triângulos.	66
Figura 41 – Imagens de obras de arte.	68
Figura 42 – Alunos montando figuras com as peças do tangram.	68
Figura 43 – Pinturas feitas pelos alunos.	69
Figura 44 – Polígonos construídos com palitos.	70
Figura 45 – Fotos tiradas pelos alunos.	71
Figura 46 – Triângulos construídos com palitos e massa de modelar.	72
Figura 47 – Relação entre os lados de um triângulo.	72
Figura 48 – Conclusões do sujeito S1 sobre a condição de existência de um triângulo.	72
Figura 49 – Triângulo desenhado pelo sujeito S23.	73
Figura 50 – Alunos construindo triângulos no geoplano.	74
Figura 51 – Tangram.	76
Figura 52 – Resposta do sujeito S13 para a questão 2 da Atividade V.	77
Figura 53 – Alunos resolvendo o desafio usando moedas.	77
Figura 54 – Ângulos de um triângulo.	78
Figura 55 – Ângulos de um triângulo.	78
Figura 56 – Alunos observando a soma dos ângulos internos do triângulo.	79
Figura 57 – Construção de triângulos no Geogebra.	79
Figura 58 – Visualização dos ângulos internos de um triângulo no Geogebra.	80
Figura 59 – Soma dos ângulos internos de um triângulo no Geogebra.	80
Figura 60 – Conclusões de um aluno sobre os ângulos internos de um triângulo.	81
Figura 61 – Alunos desenhando Fractais - Triângulo de Sierpinski.	82
Figura 62 – Ângulos internos e externos de um triângulo pintados por um aluno.	83
Figura 63 – Conclusões de um aluno sobre os ângulos externos de um triângulo.	83
Figura 64 – Teorema do ângulo externo de um triângulo.	83

Lista de tabelas

Tabela 1 – Percentual de acertos no teste sobre triângulos	85
--	----

Lista de Quadros

3.1	Níveis de raciocínio da teoria de Van Hiele	45
4.1	Cronograma dos encontros com os alunos	54
5.1	Nível de pensamento geométrico dos sujeitos da pesquisa segundo o teste de van Hiele	61
5.2	Legenda do Quadro 5.1	62
5.3	Acertos de cada sujeito da pesquisa na aplicação e na reaplicação do teste sobre triângulos	86
5.4	Legenda do Quadro 5.3	86

Lista de abreviaturas e siglas

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação

Lista de símbolos

α	Letra grega Alpha
β	Letra grega Beta
γ	Letra grega Gamma
θ	Letra grega Theta
$=$	Igual
\neq	Diferente
$<$	Menor que
$>$	Maior que
\leq	Menor que ou igual a
\geq	Maior que ou igual a
\equiv	Congruente

Sumário

INTRODUÇÃO	18	
1	O ENSINO DE GEOMETRIA	21
1.1	Breve Histórico da Geometria	21
1.1.1	As Antigas Civilizações	22
1.1.2	Babilônia	22
1.1.3	Egito	23
1.1.4	China e Índia	23
1.2	Euclides e <i>Os Elementos</i>	24
1.3	A Matemática Moderna e o Ensino de Geometria	24
1.4	A Arte e o Ensino de Geometria	26
1.5	Materiais Manipuláveis e o Ensino de Geometria	27
1.5.1	Régua e Compasso	27
1.5.2	Geoplano	28
1.5.3	Tangram	29
2	TRIÂNGULOS	30
2.1	Definição, Elementos e Classificação	31
2.1.1	Classificação quanto aos Lados	32
2.2	Congruência	33
2.2.1	Casos de Congruência	34
2.2.2	Aplicação dos Casos de Congruência	36
2.3	Ângulos	36
2.3.1	Soma dos Ângulos Internos	37
2.3.2	Teorema do Ângulo Externo	38
2.3.3	Classificação quanto aos Ângulos	38
2.4	Desigualdade Triangular	39
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	42
3.1	A Teoria de van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: Origem e Difusão	42
3.2	Descrição da Teoria de van Hiele	43
3.2.1	Os Níveis de Raciocínio	44
3.2.2	Propriedades da Teoria de van Hiele	45
3.2.3	Fases de Aprendizagem	46
3.3	Testes para Identificação dos Níveis de Raciocínio	47

4	ASPECTOS METODOLÓGICOS	50
4.1	Tipo de Pesquisa	50
4.2	Campo da Pesquisa	51
4.3	Sujeitos da Pesquisa	51
4.4	Os Instrumentos da Pesquisa	52
4.4.1	Teste de van Hiele	52
4.4.2	Teste sobre Triângulos	52
4.4.3	Atividades	53
4.5	Os Procedimentos da Pesquisa	53
5	SEQUÊNCIA DIDÁTICA APLICADA EM SALA DE AULA	55
5.1	Aplicação do Teste de van Hiele	55
5.1.1	Conclusões da Aplicação do Teste de van Hiele	61
5.2	Aplicação do Teste sobre Triângulos	62
5.2.1	Conclusões da Aplicação do Teste sobre Triângulos	66
5.3	Intervenção Pedagógica	67
5.3.1	Atividade I - Observando formas triangulares	67
5.3.2	Atividade II - Rigidez triangular	69
5.3.3	Atividade III - Desigualdade triangular e construção com régua e compasso	70
5.3.4	Atividade IV - Classificação dos triângulos quanto aos lados	73
5.3.5	Atividade V - Congruência de triângulos	75
5.3.6	Atividade VI - Soma dos ângulos internos de um triângulo	78
5.3.7	Atividade VII - Classificação dos triângulos quanto aos ângulos	80
5.3.8	Atividade VIII - Ângulos externos de um triângulo	82
5.3.9	Conclusões da Intervenção Pedagógica	84
5.4	Reaplicação do Teste sobre Triângulos	84
5.4.1	Conclusões da Reaplicação do Teste sobre Triângulos	85
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
	Referências	89
	APÊNDICE A TESTE SOBRE TRIÂNGULOS	92
	APÊNDICE B ATIVIDADES	96
	 ANEXOS	 123
	ANEXO A – TESTE DE VAN HIELE	124

Introdução

É comum professores apontarem dificuldades para ensinar Matemática. Mas é incontestável a importância desta disciplina e, também, sua necessidade, “tanto como parte da cultura individual como por sua indispensabilidade para entender o mundo, para prever e, se possível, controlar os fenômenos” (LIMA, 2007, p. 155). O ensino da Matemática é uma forma de preparar a nação para o futuro. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático para que, no Ensino Médio, tenham condições de utilizá-los e ampliá-los, desenvolvendo “capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade” (BRASIL, 1997, p. 40).

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque, por meio deles desenvolvem-se habilidades básicas no aluno como a capacidade de comunicação, de percepção espacial, de análise e reflexão, bem como de abstração e generalização. A Geometria é um tema que desperta o interesse dos alunos naturalmente. O trabalho com noções geométricas facilita o aprendizado tanto de números como de medidas, levando o aluno à observação. Se esse trabalho for feito a partir da exploração de objetos do mundo físico, obras de arte, pintura, entre outros; garantirá que o aluno estabeleça conexões entre a Matemática e as demais áreas de conhecimento (BRASIL, 1997).

No ensino mais geral da Geometria, ressalta-se a importância do triângulo, uma vez que essa forma geométrica apresenta inúmeras aplicações práticas. “Os triângulos sempre fascinaram não só os matemáticos, mas também as pessoas em geral. Eles estão presentes na matemática, na arte, na arquitetura, na mecânica e no misticismo, entre outros” (PITOMBEIRA, 2013, p. 55). Verificamos a existência e a demasiada importância dos triângulos nas estruturas de cobertura e de sustentação em algumas edificações antigas e modernas e, também, no uso estrutural de equilíbrio de móveis e imóveis, nos revestimentos cerâmicos de piso e de paredes, além do uso de cortes de pedras preciosas, roupas e acessórios usados na moda contemporânea.

Nessa mesma direção, Holanda (2013) aponta que, com o estudo detalhado do

triângulo, o aluno pode adquirir conhecimentos e apoderar-se de uma ferramenta poderosa, tanto para a resolução de problemas gerais de Geometria, como na aprendizagem de conceitos envolvendo outros polígonos. Com as propriedades específicas dessa forma geométrica, é possível determinar características como número de diagonais, soma dos ângulos internos, medidas de segmentos internos e áreas desses outros polígonos.

Diante do exposto sobre o ensino de Matemática, a inquestionável importância da Geometria e, também, a necessidade do conhecimento sobre os triângulos; nesse sentido, esse trabalho objetiva propor uma sequência didática baseada na teoria de van Hiele buscando melhorar o aprendizado sobre triângulos no Ensino Fundamental. Partindo das ideias mais comuns, por mais simples que sejam, pois são dessas ideias que podemos fazer ligações com as mais complexas, o trabalho traz atividades para que o aluno venha conhecer e familiarizar-se com o triângulo quanto a sua classificação, condição de existência, medidas dos lados e ângulos, soma dos ângulos internos, teorema do ângulo externo e casos de congruência.

A escolha do tema se deve à necessidade de se enfatizar o aprendizado da Geometria no Ensino Fundamental, uma vez que nesse nível o aluno começa a entender os aspectos espaciais do mundo físico, desenvolvendo uma intuição espacial, o que lhe dará habilidades para a construção do pensamento lógico (SAMPAIO; ALVES, 2010). A questão de pesquisa apresentada, então, é: Como o uso de materiais manipuláveis aliado a uma sequência didática embasada na teoria de van Hiele, pode contribuir para a aprendizagem de conceitos relativos aos triângulos no 8º ano do Ensino Fundamental?

Como fundamentação teórica da pesquisa, é apresentada a teoria da van Hiele que, ainda pouco conhecida no Brasil, aparece como uma alternativa para minorar a grande dificuldade do ensino de Geometria. Para Sampaio e Alves (2010, p. 70), “a teoria de van Hiele é um guia para a aprendizagem e um instrumento para a avaliação das habilidades dos alunos em Geometria”.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, têm-se como principais referências os seguintes estudos: *Por que não ensinar Geometria?* (LORENZATO, 1995), *O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências* (PAVANELLO, 1993) e *Geometria da era da imagem e do movimento* (NASSER; LOPES, 1996) que tratam do ensino da Geometria; *O (Novo) Programa de Matemática do Ensino Básico e o desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros* (JANELA, 2012) sobre o ensino de triângulos; além de *Aprendendo e ensinando Geometria* (CROWLEY, 1996) e *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometria: El modelo de van Hiele* (JAIME; GUTIERREZ, 1990) tratando do modelo van Hiele do pensamento geométrico. A relevância desse trabalho se dá pelo fato de não haver uma pesquisa relacionada a aplicação da teoria de van Hiele estritamente ao ensino de triângulos.

A pesquisa tem caráter qualitativo e exploratório. Nesse sentido foram aplicados

testes e várias atividades para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental no Colégio Estadual Baltazar Carneiro, no município de Cardoso Moreira, no estado do Rio de Janeiro.

A dissertação está dividida em 5 capítulos. O capítulo 1 apresenta aspectos históricos da Geometria, descrevendo um panorama geral do início de seu uso prático nas antigas civilizações e de sua sistematização por Euclides. Destaca, também, a arte e o uso de materiais manipuláveis como recurso didático para o ensino desta disciplina.

O capítulo 2 traz a definição de triângulo e apresenta seus elementos e propriedades.

No capítulo 3, busca-se descrever a teoria de van Hiele: origem, difusão e descrição. Faz-se uma explanação dos principais componentes dessa teoria: níveis de raciocínio, propriedades, fases de aprendizagem e suas características.

O capítulo 4 aborda os aspectos metodológicos: descrição do tipo de pesquisa, escolha do campo, a caracterização dos participantes e a definição dos instrumentos e dos procedimentos para análise dos dados.

O último capítulo descreve a implementação da sequência didática constituída pelos testes e pelas atividades que foram aplicados aos sujeitos da pesquisa e traz a análise dos dados coletados a partir da aplicação desses instrumentos.

O trabalho se encerra com as considerações finais e alguns apêndices e anexos, contendo os testes e as atividades que constituem os instrumentos da pesquisa.

Capítulo 1

O Ensino de Geometria

Os alunos devem ser introduzidos ao ensino de Geometria de uma forma natural, pois ela está presente em diversas situações da vida cotidiana do ser humano: na natureza, nos objetos que usamos, nas brincadeiras infantis, nas construções, nas artes (NASSER; LOPES, 1996).

Em nosso entorno podemos observar as mais diferentes formas geométricas. Muitas delas fazem parte da natureza, outras já são resultados das ações do homem. Para Nasser e Lopes (1996, p. 15), “a linguagem matemática está de tal modo inserida no cotidiano que a consciência desse fato não é explicitamente percebida. É dever da escola explicitar tal fato a fim de mostrar que a geometria faz parte da vida”. As dificuldades mais frequentes detectadas no ensino/aprendizagem de Geometria podem ser superadas quando esta for solidamente trabalhada desde os primeiros anos de escolaridade.

Estudos e pesquisas vêm sendo desenvolvidos ao longo dos últimos anos com o objetivo de “dar ao professor elementos que possibilitem mudanças em sua atuação didática e onde o aluno seja o agente da construção de seu conhecimento”(NASSER; LOPES, 1996, p. 8). Dentre outros, podemos citar: *Um estudo sobre a habilidade matemática na solução de problemas de Geometria* (DOBARRO; BRITO, 2010), *Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental* (BRAGA; DORNELES, 2011) e *O (Novo) Programa de Matemática do Ensino Básico e o desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros* (JANELA, 2012).

A Geometria como a conhecemos hoje, com todos os postulados e teoremas, não surgiu de uma vez só. Os primeiros conhecimentos geométricos foram desenvolvidos pela necessidade do homem. A seguir, é feito um breve relato de alguns dos principais acontecimentos que influenciaram diversas culturas na construção desses conhecimentos.

1.1 Breve Histórico da Geometria

Segundo [Calabria \(2013, p. 5\)](#), “a Geometria é uma das áreas da Matemática mais antigas e foi utilizada pelas primeiras civilizações em atividades do dia a dia para resolver problemas na medição de áreas de terras”. Provavelmente vem daí a origem da palavra geometria que, em grego, significa medir terra (geo - terra / métron - medir).

Os gregos perceberam que os conhecimentos provenientes da Geometria não tinham apenas utilidade prática, mas podiam ser compreendidos e demonstrados, utilizando-se o raciocínio lógico-dedutivo. Para isso, observaram a forma como as antigas civilizações abordavam alguns pensamentos geométricos ([CALABRIA, 2013](#)).

1.1.1 As Antigas Civilizações

As primeiras civilizações surgiram entre 3500 e 500 a.C., próximas a regiões de vales de rios. Podemos citar o Egito, a Mesopotâmia, a China e o Vale do Indo. Todas essas civilizações eram dependentes da agricultura, de sistemas de irrigação e da astronomia. Tais atividades influenciaram o surgimento da matemática nessas culturas ([CALABRIA, 2013](#)).

“Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir as terras”([EVES, 2004, p. 57](#)).

Constata-se a importância da matemática e, especialmente, da geometria nas antigas civilizações, uma geometria concebida bem antes da que foi elaborada pela cultura grega ([CALABRIA, 2013](#)).

1.1.2 Babilônia

A civilização mesopotâmica, talvez, a mais antiga do mundo, criou um tipo de escrita e a registrou em tábulas de argila. Em uma dessas tábulas, a Tábula Plimpton 322, 1900 - 1600 a.C., encontra-se o mais antigo registro do teorema de Pitágoras. Mesmo esse teorema tendo sido batizado com o nome de Pitágoras, percebe-se que os babilônicos já o conheciam e o utilizavam muito antes desse matemático grego. Os babilônicos possuíam um método sistemático para encontrar ternas pitagóricas, bem conhecidas na época, e as utilizavam nas soluções de problemas geométricos ([CALABRIA, 2013](#)).

Segundo [Eves \(2004\)](#), a geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática. Exemplos concretos mostram que os babilônios do período 2000 a.C.

a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais da área do retângulo, da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles, da área do trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Os babilônios, também, sabiam que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais. A marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico, assim como a divisão da circunferência de um círculo em 360 partes iguais.

1.1.3 Egito

No Antigo Egito, a geometria foi se desenvolvendo a partir da necessidade de calcular áreas de terras, volumes de celeiros e pirâmides. Como os celeiros tinham a forma de cilindros circulares retos, os egípcios desenvolveram um método para determinar a área do círculo da base e, assim, calcular o volume (CALABRIA, 2013).

“O conhecimento geométrico da civilização egípcia era grande: construíram grandes obras arquitetônicas, como as pirâmides, além de construírem barcos, barragens e canais. Também se encontra geometria nas construções de suas estátuas, pórticos, templos, muralhas e lagos”(CALABRIA, 2013, p. 6).

Investigações recentes mostram que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer é o semiproduto da base pela altura. O papiro Rhind e o papiro Moscou são as principais fontes de informações referentes à matemática egípcia antiga. No papiro Moscou, encontra-se um exemplo da fórmula de volume de um tronco de pirâmide de bases quadradas (EVES, 2004).

1.1.4 China e Índia

Enquanto se dispõe de grande quantidade de informações sobre a matemática dos antigos babilônios e egípcios, pouco se sabe sobre essa matéria, no que diz respeito à China e Índia na mesma época. Isso ocorre porque os babilônios usavam tábulas de argila cozida e os egípcios usavam pedras e papiros. Mas os primitivos chineses e indianos usavam material muito perecível, como casca de árvore e bambu. Por consequência, muito do nosso conhecimento sobre a matemática dos chineses e indianos baseia-se em informações orais e interpretações posteriores de originais (EVES, 2004).

O mais influente livro chinês de matemática, Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Nas obras chinesas, chama a atenção a justaposição de resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. São usadas regras corretas para as áreas de triângulos e trapézios (BOYER, 1996).

Na Antiga Índia, seus habitantes mostravam ter conhecimento de geometria pelo planejamento das cidades e pelas cerâmicas decoradas com círculos que se interceptavam, quadrados, triângulos unidos pelos vértices, etc (CALABRIA, 2013).

“O conhecimento geométrico dos indianos também aparece para atender às necessidades dos rituais religiosos, sendo encontrado nos Sulbasutras (manuais sobre construção de altares), que continham regras para construção de altares de sacrifício. As figuras geométricas para formar os altares eram: triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, círculos e semicírculos”(CALABRIA, 2013, p. 6).

1.2 Euclides e Os Elementos

É desapontador, mas pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides de Alexandria, matemático grego dos séculos IV e III a.C., salvo que ele foi professor da escola de matemática de Alexandria. Desconhecem-se, também, a data e o local de seu nascimento, mas é provável que tenha se formado na escola platônica de Atenas (EVES, 2004).

A maior de todas as contribuições de Euclides à Matemática, bem como à ciência em geral, foi a obra *Os Elementos*, em que apresentou, sistematicamente, os conhecimentos de geometria de seu tempo - hoje chamada de geometria euclidiana -, muitos dos quais frutos de seu próprio trabalho. A importância desta obra deve ao fato de “ser o primeiro livro em que se considera um corpo de conhecimento matemático como parte de um sistema lógico-dedutivo bem definido” (NETO, 2012).

Os Elementos de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos. Foi composto em 300 a.C. aproximadamente e foi copiado e recopiado repetidamente depois. A primeira versão impressa de *Os elementos* apareceu em Veneza em 1482, um dos primeiros livros de matemática impressos; calcula-se que desde então pelo menos mil edições foram publicadas (BOYER, 1996, p. 82).

Os Elementos são praticamente tudo o que temos da matemática grega desde o seu início. Não sabemos se Euclides escreveu essa obra para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época. Naquele tempo, não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos. *Os Elementos* foram muito usados no aprendizado da matemática por mais de dois milênios (ÁVILA, 2001).

Para Eves (2004, p. 178), talvez mais importante que o conteúdo de *Os Elementos* seja a maneira formal como se apresenta esse conteúdo. “De fato, *Os Elementos* de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna”.

1.3 A Matemática Moderna e o Ensino de Geometria

Nos meados do século *XX*, a ênfase na abstração e a preocupação crescente com a análise das estruturas e modelos subjacentes começaram a chamar a atenção dos interessados no ensino da Matemática. Muitos entenderam que seria oportuno adaptar essas características ao ensino. Formaram-se “grupos competentes e entusiastas empenhados em reformular e modernizar a matemática escolar. Nascia a *Matemática Moderna*” (EVES, 2004, p. 690).

O movimento de reforma do ensino da Matemática iniciou-se nos Estados Unidos, França e Bélgica em 1950, mas logo se espalhou por vários outros países. Segundo os reformistas, o currículo estava ultrapassado, pois limitava-se a conhecimentos adquiridos antes de 1700. Portanto, havia a necessidade de incluir conhecimentos mais recentes, “como álgebra moderna, lógica simbólica, noções de topologia e teoria dos conjuntos” nos currículos de matemática (ÁVILA, 2010, p. 5).

Os conteúdos deveriam ser apresentados, enfatizando os axiomas, os conceitos fundamentais e rigor nas demonstrações. Isso iria trazer a integração das várias partes da Matemática, enquanto no ensino tradicional essas partes eram ensinadas de forma isolada (ÁVILA, 2010).

Porém, segundo Soares (2001), no Brasil, a geometria ensinada continuou sendo a euclidiana, usando apenas a linguagem dos conjuntos defendida pelos modernistas, pois os professores não encontraram uma maneira de apresentar os fatos geométricos segundo os seus critérios de rigor e, ao mesmo tempo, inviável nas escolas do ponto de vista didático.

“O formalismo da Matemática acentuou-se nas décadas de 1960 e 1970, durante o Movimento da Matemática Moderna, e a geometria, ao revestir-se de uma concepção voltada à linguagem, ficou relegada a um segundo plano nos currículos e livros didáticos brasileiros. Isso acabou por gerar o seu abandono pela escola básica, como evidenciamos em inúmeras pesquisas na área de Educação Matemática, principalmente na década de 1980” (GRANDO; NACARATO; GONCALVES, 2008).

A reforma não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior; criando assim, uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas a qual perdura até hoje.

Para Pavanello (1993), o ensino de geometria na abordagem tradicional já enfrentava problemas em relação ao conhecimento do professor, aos métodos utilizados, à passagem da geometria prática do ensino primário para a axiomática do ensino secundário. Com a proposta de que a geometria deveria ser ensinada focando nas transformações, problemas ainda maiores ocorreram. Por não dominar muito o assunto, professores passaram a deixar de ensinar a geometria sobre qualquer enfoque, apoiados na Lei de Diretrizes e Bases, a LDB 5692/71, a qual permitia que cada professor montasse seu programa de acordo com as necessidades da clientela.

Há de se considerar as razões pelas quais os professores ficam inquietos em relação ao abandono da geometria. Primeiramente, a ausência da Geometria e a valorização da Álgebra prejudicam a formação do aluno, uma vez que este não se desenvolve integralmente. É necessário desenvolver tanto o pensamento visual, proveniente da geometria, como o sequencial, predominante na Álgebra, pois os dois são necessários à resolução de problemas. Em segundo lugar, a supervalorização da Álgebra pode levar os alunos a executar as operações mecanicamente. Os indivíduos passariam a operar sem questionamento sobre as regras pré-estabelecidas. Já o trabalho efetuado com Geometria pode proporcionar o desenvolvimento crítico e autônomo (PAVANELLO, 1993).

Kaleff (1994) explica que, nos dias atuais, ao trabalhar com a Geometria, a escola ainda sofre influências do Movimento da Matemática Moderna. Desconsidera o mundo tridimensional em que vivemos e enfoca, prioritariamente, os desenhos sobre superfícies planas, a repetição, a classificação e a memorização das nomenclaturas das figuras planas, relegando a um momento posterior a exploração e a manipulação dos sólidos geométricos.

Até hoje se percebe o reflexo do formalismo no estudo da geometria, a qual está praticamente ausente nas escolas, ficando em segundo plano no planejamento dos professores (RABAIOLLI; STROHSCHOEN, 2013).

1.4 A Arte e o Ensino de Geometria

A Arte e a Matemática são inerentes à vida. Ao observar um corpo humano, suas proporções, simetrias, relações harmoniosas: estão presentes a Arte e a Matemática. Da mesma forma que em cada flor, em cada fruto, em cada árvore ou em cada animal. “Dizem que a Arte imita a vida, mas na verdade, a Arte é a expressão da vida através da Matemática” (CONTADOR, 2013, p. 7).

Desde as civilizações mais antigas, a Matemática e a Arte sempre estiveram intimamente ligadas aliando razão e sensibilidade. Pode-se observar no decorrer da história uma influência mútua de uma sobre a outra. Segundo Contador (2013), o homem tem demonstrado, desde a antiguidade, que é possível ser criativo mesmo sem conhecer Matemática de forma acadêmica, pois confeccionou belos objetos e realizou verdadeiras obras de arte. Isso foi possível porque possuímos um sentido geométrico primitivo, um sentido inato das formas geométricas.

“A Arte mobiliza sentidos e capacidades essenciais para o desenvolvimento humano, como a criatividade, imaginação e a observação. Sentidos e capacidades essenciais no desenvolvimento do raciocínio lógico, na capacidade de resolver problemas, de enfrentar situações novas” (LAPA; ARSIE; ANDRETT, 2011, p. 4).

Para Lapa, Arsie e Andrett (2011), o estudo da Geometria por meio das artes,

desenvolve no educando a capacidade de percepção, visualização e reconhecimento das formas podendo representá-las por meio de desenhos, identificando propriedades e construindo as definições necessárias. Ao observar uma obra de arte, o educando pode investigar relações entre as formas apresentadas nas obras, identificando características comuns e classificando-as segundo critérios estabelecidos.

1.5 Materiais Manipuláveis e o Ensino de Geometria

Segundo [Nasser e Lopes \(1996, p. 7\)](#), “o manuseio e a observação de objetos desperta na criança a curiosidade para os elementos geométricos quando devidamente explorados”. Quando o aluno se depara com uma situação desconhecida, o uso de um material que possa ilustrar o que está sendo discutido pode ser indispensável. Diante do exposto, é necessário que o aluno tenha acesso a atividades e materiais convenientes com cada nível de pensamento geométrico no qual ele se encontra.

Conforme [Nacarato \(2005, p. 1\)](#):

“O uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado pela primeira vez por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. No Brasil o discurso em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920”.

Após 1990, muitos recursos didáticos para o ensino de Matemática têm sido sugeridos. Além dos materiais manipuláveis; ressalta-se, também, o uso de calculadoras e de computador – apesar de que esses recursos ainda estão distantes da maioria das salas de aula ([NACARATO, 2005](#)).

Segundo [Pais \(2006\)](#), o uso de material concreto propicia aulas mais dinâmicas e amplia o pensamento abstrato por um processo de retificações sucessivas que possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração do conceito. Mas vale lembrar que utilizar o material concreto por si só, não garante aprendizagem. É fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas no material concreto e os conceitos matemáticos, para uma posterior abstração e sistematização. Para ter sucesso nas atividades, envolvendo materiais manipuláveis, devemos apresentá-los previamente aos nossos alunos, assim como planejar e definir exatamente o objetivo que queremos atingir com a sua utilização; para que, no decorrer da atividade, os alunos consigam chegar a fórmulas matemáticas que ainda lhes são abstratas.

Nesse trabalho, muitos materiais manipuláveis foram usados como: palitos de picolé, palitos de sorvete, papéis coloridos e de diferentes texturas. Porém, alguns recursos merecem um destaque especial: a régua e o compasso, o geoplano e, também, o tangram.

1.5.1 Régua e Compasso

As construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da matemática grega (WAGNER, 2007).

Desde *Os Elementos* de Euclides, o desenho geométrico acompanha a Geometria Plana. A proposta de Euclides, ao elaborar sua geometria, era o estudo da possibilidade de construir uma figura usando régua e compasso e não, simplesmente, a execução do traçado da figura com esses instrumentos. Porém, o desenho geométrico já não é mais trabalhado nas escolas e, paralelamente, a essa realidade ou como consequência dela, o ensino de Geometria tem se tornado o terror da Matemática, tanto para alunos quanto para professores (PUTNOKI, 2013).

Ainda, segundo Putnoki (2013, p. 369):

“A rigor, ensinar geometria sem esses instrumentos é como dar a uma criança um triciclo sem as duas rodas traseiras. Ela até consegue se locomover, mas muito mal. Estamos mutilando a geometria quando a ensinamos como o fazemos hoje, além de abrir mão de ferramentas cujo alcance didático é inesgotável”.

Torna-se relevante que o uso da régua e do compasso seja incorporado definitivamente à geometria.

1.5.2 Geoplano

Segundo Knijnik, Basso e Klüsener (2004), o criador do geoplano foi o Dr. Caleb Gattegno em 1961, na Inglaterra. A palavra geoplano vem do inglês “geoboards” ou do francês “geoplans” em que “geo” vem de geometria e “plano” de tábua ou tabuleiro ou superfície plana dando origem à palavra. É um recurso didático que auxilia no ensino de geometria plana elementar e frações, dentre outros.

Os geoplanos são tabuleiros quadrados, retangulares ou circulares que levam pregos formando uma malha, podendo ser confeccionados em madeira natural ou pintados. Para utilizá-lo, são necessários elásticos, de preferência coloridos, do tipo de borrachas de prender dinheiro, usadas pelos bancos, que servirão para a construção dos polígonos.

O geoplano é um instrumento didático que oferece um apoio à representação mental que auxilia na construção e consolidação de conceitos e na abstração, proporcionando uma experiência geométrica aos estudantes. Não devendo ser esquecido que a utilização de um recurso didático por si só não representa todo o ensino, devendo o professor no decorrer dos trabalhos ir questionando, complementando, assessorando o processo de descoberta (COSTA; PEREIRA; MAFRA, 2011).

Ainda, de acordo com [Costa, Pereira e Mafra \(2011\)](#), o geoplano é um material didático concreto que possibilita aos alunos uma melhor visualização das formas de figuras planas, como também auxilia nos cálculos de áreas e de perímetros de diversos tipos de polígonos regulares e irregulares, permitindo uma participação ativa dos alunos. Esse fato mostra um maior envolvimento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem o que, conseqüentemente, propiciará uma melhor compreensão dos conceitos, tornando-os mais significativos.

Nessa mesma direção, [Nasser e Lopes \(1996, p. 137\)](#) afirmam:

“O uso do geoplano pode ser observado nas várias regiões do país, na confecção de artesanato (pulseira, rede de pesca, etc.). Sendo assim, as atividades com o geoplano são também um ótimo meio para a integração das aulas de Matemática com as aulas de Arte.”

A construção do geoplano pode ser feita com materiais trazidos pelos próprios alunos. É um material didático de baixo custo, que pode ser facilmente construído. No presente trabalho, utilizou-se o geoplano quadrangular e o triangular.

1.5.3 Tangram

O tangram é um quebra-cabeça chinês de origem milenar. É formado por sete peças organizadas conforme a representação a seguir:

- dois triângulos retângulos isósceles grandes;
- dois triângulos retângulos isósceles pequenos;
- um triângulo retângulo isósceles médio;
- um quadrado;
- um paralelogramo.

É muito divulgado como possibilidade didática para aprendizagem de alguns conteúdos de Matemática no Ensino Fundamental. O uso do tangram em sala de aula apresenta muitos aspectos positivos, “pois a diretriz básica para seu uso didático é possibilitar ao aluno a ação-reflexão” ([MENDES, 2009, p. 28](#)).

Dessa forma, a observação das propriedades geométricas antecede às definições e demonstrações, as quais serão construídas posteriormente pelos alunos sob a orientação do professor ([MENDES, 2009](#)).

Corroborando, [Mori e Onaga \(2012, p. 51 - Manual do Professor\)](#) afirmam:

“O tangram é utilizado como material de apoio didático. Isso se deve ao fato de as formas geométricas que o compõem permitirem inúmeras explorações, como, por exemplo, a construção de polígonos: triângulos, quadriláteros, pentágonos e hexágonos. Este material é de fácil manuseio e contribui para que os alunos experimentem, explorem intuitivamente, visualizem e contextualizem situações geométricas, o que auxilia no processo de construção do raciocínio lógico-dedutivo e na explicitação formal desse raciocínio.”

Tanto como jogo quanto como arte, o tangram possui um forte apelo lúdico e oferece ao aluno um desafio envolvente (MORI; ONAGA, 2012).

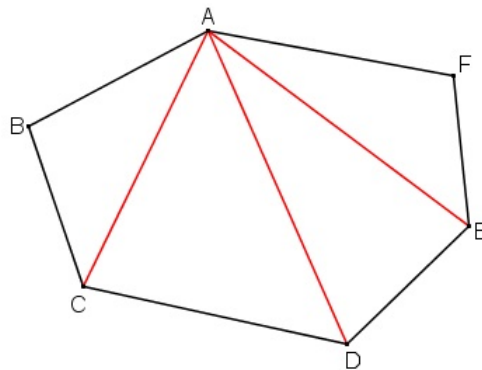
Capítulo 2

Triângulos

O triângulo é um dos polígonos mais utilizados tanto como base para estudo de outras figuras geométricas quanto em nosso dia a dia. Segundo [Pitombeira \(2013\)](#), os triângulos estão presentes em diversas áreas da vida humana; fascinando não só os matemáticos, mas as pessoas em geral.

Na Matemática, percebe-se sua importância para o ensino mais geral da Geometria e da Trigonometria. Como se pode observar na [Figura 1](#), “qualquer polígono com mais de três lados pode ser decomposto em triângulos” ([MORI; ONAGA, 2012](#), p. 274).

Figura 1 – Hexágono decomposto em triângulos.



Fonte: Elaboração própria

O triângulo, entre todos os polígonos, possui uma propriedade que os outros não têm: a rigidez. Uma vez construído, é impossível modificar a abertura de seus ângulos e construir outro triângulo. Essa propriedade vem do fato de que os três lados determinam o triângulo. Já um polígono com quatro lados ou mais não fica determinado apenas pelos seus lados ([MORI; ONAGA, 2012](#)).

O fato de o triângulo ser uma figura rígida, ou seja, não se deformar; faz com que essa forma geométrica tenha muitas aplicações práticas na carpintaria, na engenharia e na arquitetura. Essa rigidez proporcionada pelos triângulos é utilizada na sustentação das

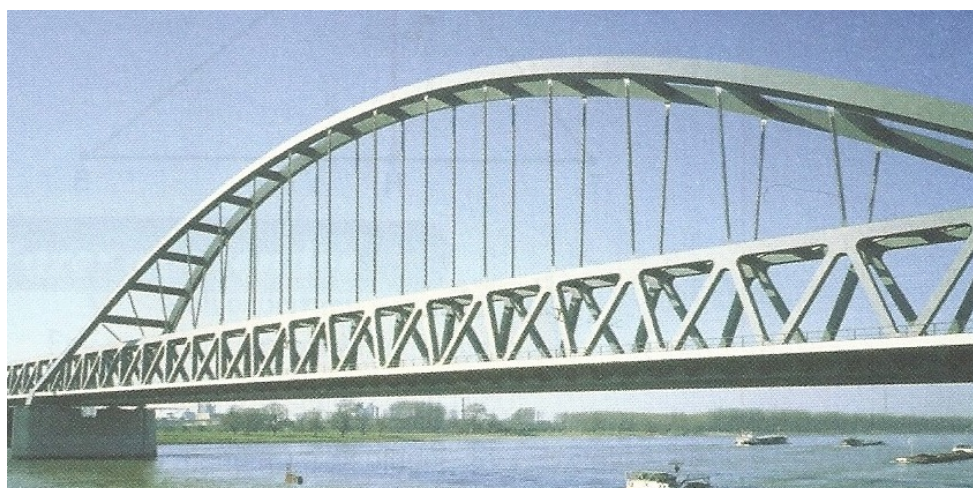
estruturas em construções de modo geral, proporcionando-lhes firmeza (MORI; ONAGA, 2012).

Figura 2 – Presença de triângulos no telhado de uma casa.



Fonte: (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p. 98)

Figura 3 – Presença de triângulos na estrutura de uma ponte.



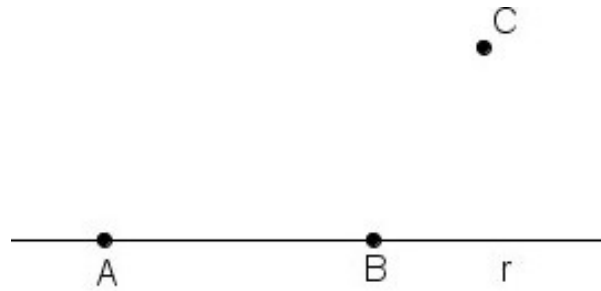
Fonte: (MORI; ONAGA, 2012, p. 274)

A seguir, serão apresentados os principais conceitos relativos aos triângulos extraídos da obra Tópicos de Matemática Elementar (NETO, 2012).

2.1 Definição, Elementos e Classificação

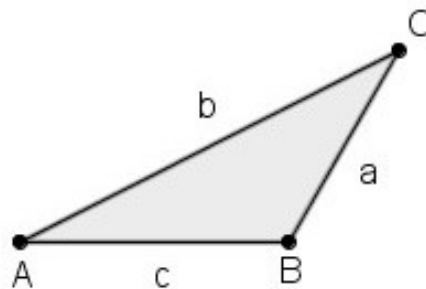
Considere três pontos A , B e C do plano. Se C estiver sobre a reta \overleftrightarrow{AB} , tem-se que A , B e C são colineares; caso contrário, A , B e C são não colineares, conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Três pontos não-colineares



Fonte: Elaboração própria

Três pontos não colineares formam um **triângulo**. Nesse caso, a região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A , B e C tais pontos, tem-se que A , B e C são os **vértices** do triângulo ABC (NETO, 2012, p. 21).

Figura 5 – Triângulo ABC de vértices A , B e C .

Fonte: Elaboração própria

Segundo Neto (2012, p. 21), ainda em relação ao triângulo genérico ABC , os segmentos \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} são os **lados** do triângulo; escreve-se em geral $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo ABC . A soma dos comprimentos dos lados do triângulo é seu **perímetro**. Os ângulos $\hat{A} = B\hat{A}C$, $\hat{B} = A\hat{B}C$ e $\hat{C} = A\hat{C}B$ são os **ângulos internos** do triângulo.

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras básicas: em relação aos comprimentos de seus lados ou em relação às medidas de seus ângulos internos. Por enquanto, serão classificados em relação a seus lados (NETO, 2012, p. 22).

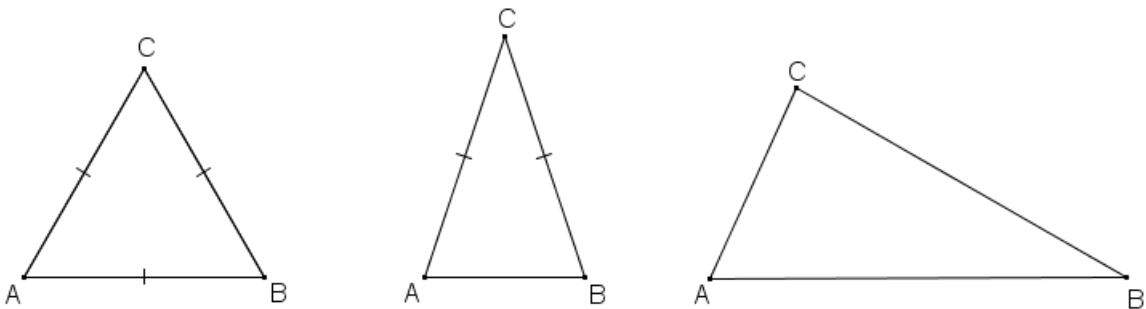
2.1.1 Classificação quanto aos Lados

Para Neto (2012), como todo triângulo tem três lados, as únicas possibilidades para os comprimentos dos mesmos são que haja, pelo menos, dois lados iguais ou que os três lados sejam diferentes dois a dois.

Definição 2.1 Um triângulo ABC é denominado:

- (i) **Equilátero**, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.
- (ii) **Isósceles**, se ao menos dois entre \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} forem iguais.
- (iii) **Escaleno**, se $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

Figura 6 – Triângulos equilátero, isósceles e escaleno.



Fonte: Elaboração própria

Pela definição, todo triângulo equilátero é isósceles; no entanto, a recíproca não é verdadeira.

Quando ABC for um triângulo isósceles, tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$, diz-se que o lado \overline{BC} é a **base** do triângulo. Para triângulos equiláteros, qualquer um dos seus lados pode ser chamado de base, mas, nesse caso, raramente se usa essa palavra, isto é, em geral reserva-se a palavra base para triângulos isósceles não equiláteros (NETO, 2012, p. 23).

2.2 Congruência

Definição 2.2 Um triângulo é congruente a outro se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

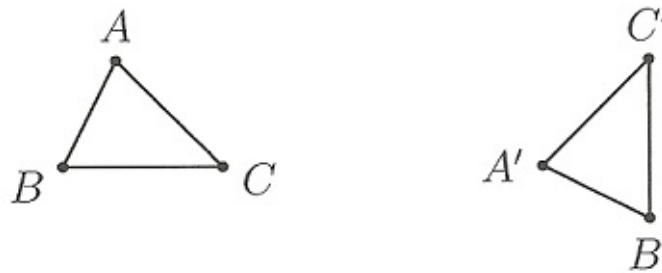
- seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;
- seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

A Figura 7 mostra dois triângulos congruentes ABC , $A'B'C'$, com a correspondência de vértices

$$A \leftrightarrow A'; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'.$$

Para tais triângulos, temos então:

Figura 7 – Triângulos congruentes.



Fonte: (NETO, 2012, p. 31)

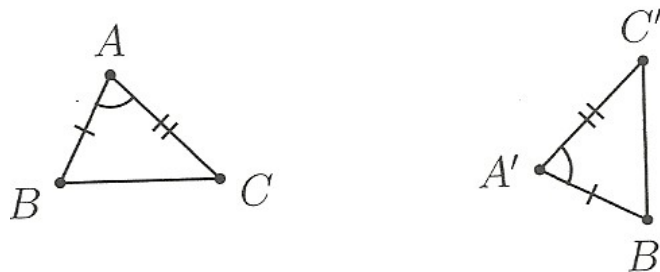
$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

2.2.1 Casos de Congruência

Axioma 2.1 *Caso LAL:* Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 8 – O caso de congruência LAL.



Fonte: (NETO, 2012, p. 34)

Em símbolos, o caso de congruência LAL garante que, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se:

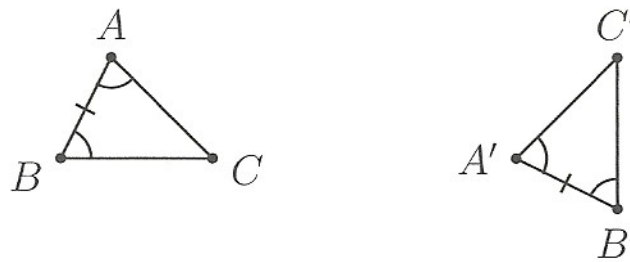
$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow ABC \equiv A'B'C'.$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'$. Em particular, segue, daí, que

$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

Axioma 2.2 *Caso ALA:* Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 9 – O caso de congruência ALA.



Fonte: (NETO, 2012, p. 36)

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se:

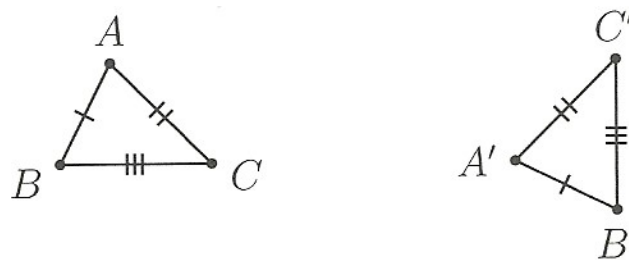
$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow ABC \equiv A'B'C'.$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também deve-se ter

$$\hat{C} = \hat{C}'; \overline{AC} = \overline{A'C'} \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

Axioma 2.3 *Caso LLL:* Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 10 – O caso de congruência LLL.



Fonte: (NETO, 2012, p. 37)

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, tem-se:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'}, \overline{CA} = \overline{C'A'} \Rightarrow ABC \equiv A'B'C'.$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também se observa que

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}'$$

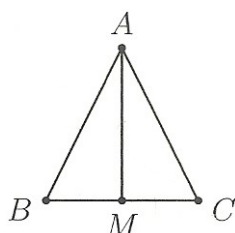
2.2.2 Aplicação dos Casos de Congruência

É válido conhecer algumas aplicações úteis dos casos de congruência de triângulos de acordo com Neto (2012, p. 44-45).

Proposição 2.1 *Se ABC é um triângulo isósceles de base BC , então $\hat{B} = \hat{C}$.*

Demonstração 2.1 *Dado o triângulo ABC , seja M o ponto médio do lado BC .*

Figura 11 – ABC isósceles $\Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$.



Fonte: (NETO, 2012, p. 44)

Como $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e AM é lado comum de AMB e AMC , segue do caso de congruência LLL que tais triângulos são congruentes. Logo, $\hat{A}BM = \hat{A}CM$.

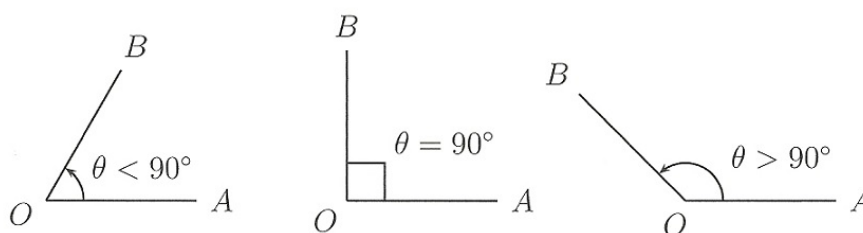
Corolário 2.1 *Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos iguais.*

Demonstração 2.2 *Basta observar que todos os lados de um triângulo equilátero podem ser vistos como bases do mesmo, considerado como triângulo isósceles.*

2.3 Ângulos

Considera-se que um ângulo $\angle AOB$ é **agudo** quando $0 < \angle AOB < 90^\circ$, **reto** quando $\angle AOB = 90^\circ$ e **obtuso** quando $90^\circ < \angle AOB < 180^\circ$. Observe, ainda, na Figura 12, a notação especial utilizada para ângulos retos (NETO, 2012, p. 17).

Figura 12 – Ângulos agudo, reto e obtuso.



Fonte: (NETO, 2012, p. 17)

Como anteriormente mencionado, um triângulo possui três ângulos internos.

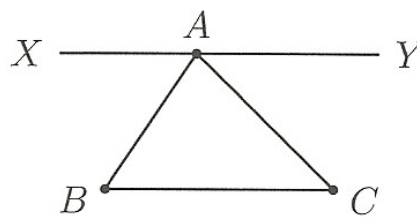
2.3.1 Soma dos Ângulos Internos

Segundo Neto (2012, p. 53-54) tem-se que:

Proposição 2.2 A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Demonstração 2.3 Seja ABC um triângulo qualquer, e \overleftrightarrow{XY} a reta paralela a \overleftrightarrow{BC} e passando por A .

Figura 13 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: (NETO, 2012, p. 54)

Tem-se que $\hat{B} = B\hat{A}X$ e $\hat{C} = C\hat{A}Y$ e daí,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + B\hat{A}X + C\hat{A}Y = 180^\circ$$

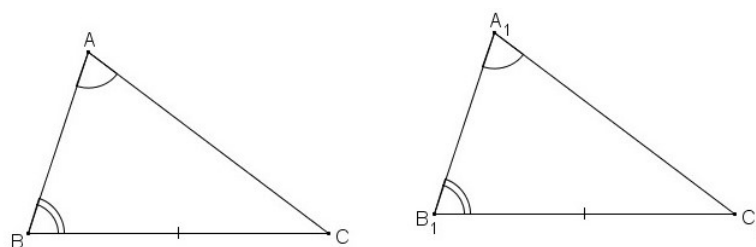
Corolário 2.2 Os ângulos de um triângulo equilátero são todos iguais a 60° .

Demonstração 2.4 Já se sabe que todo triângulo equilátero tem três ângulos iguais. Como a soma de tais ângulos é 180° , cada um deve medir 60° .

Apresenta-se a seguir mais um conjunto de condições suficientes para a congruência de triângulos, conhecido como o caso de congruência (NETO, 2012, p. 56).

Corolário 2.3 Caso LAAo: Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Figura 14 – O caso de congruência LAAo.



Fonte: Elaboração própria

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A_1B_1C_1$, tem-se:

$$\overline{BC} = \overline{B_1C_1}, \hat{A} = \hat{A}_1, \hat{B} = \hat{B}_1 \Rightarrow ABC \equiv A_1B_1C_1.$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A_1; B \leftrightarrow B_1; C \leftrightarrow C_1$. Em particular, também deve-se ter

$$\hat{C} = \hat{C}_1; \overline{AC} = \overline{A_1C_1} \text{ e } \overline{AB} = \overline{A_1B_1}.$$

Demonstração 2.5 Basta observar que $\hat{A} = \hat{A}_1$ tem-se que

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}_1 - \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

Portanto, tem-se para os triângulos ABC e $A_1B_1C_1$ que

$$\overline{BC} = \overline{B_1C_1}; \hat{B} = \hat{B}_1; \hat{C} = \hat{C}_1.$$

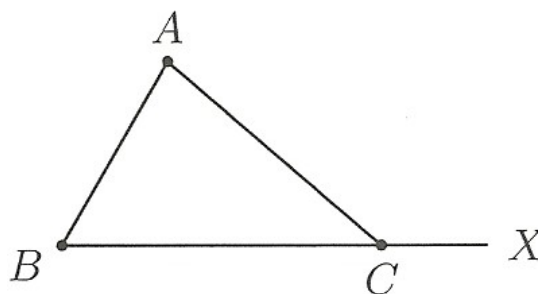
Pelo caso ALA, tais triângulos são congruentes.

2.3.2 Teorema do Ângulo Externo

Corolário 2.4 Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração 2.6 Basta ver que $\hat{ACX} = 180^\circ - \hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$.

Figura 15 – O teorema do ângulo externo.



Fonte: (NETO, 2012, p. 55)

2.3.3 Classificação quanto aos Ângulos

Agora, já pode ser visto como classificar triângulos quanto às medidas de seus ângulos internos. Para tanto, note primeiro que todo triângulo tem no máximo um ângulo interno maior que ou igual a 90° . De fato, se, em um triângulo ABC , ocorresse que $\hat{A} \geq 90^\circ$ e $\hat{B} \geq 90^\circ$, seria

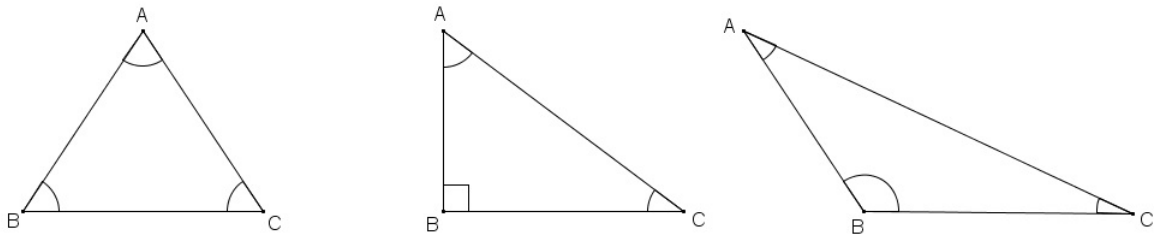
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \hat{A} + \hat{B} \geq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

o que é um absurdo (NETO, 2012, p. 54) . Assim, segue que:

Definição 2.3 Um triângulo é denominado:

- (i) **Acutângulo**, se todos os seus ângulos internos forem agudos.
- (ii) **Retângulo**, se tiver um ângulo reto.
- (iii) **Obtusângulo**, se tiver um ângulo obtuso.

Figura 16 – Triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.



Fonte: Elaboração própria

O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é sua **hipotenusa** e os outros dois são os **catetos** do triângulo.

2.4 Desigualdade Triangular

É importante ressaltar que, em todo triângulo, os comprimentos dos lados guardam uma certa relação. Há, também, uma relação entre os comprimentos dos lados e as medidas dos ângulos a eles opostos (NETO, 2012, p. 62).

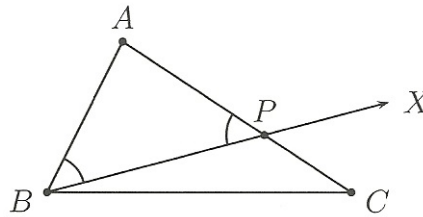
Proposição 2.3 Se ABC é um triângulo tal que $\hat{B} > \hat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Demonstração 2.7 Como $\hat{B} > \hat{C}$, podemos traçar a semirreta \overrightarrow{BX} , intersectando o interior de ABC e tal que $\hat{CBX} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$. Sendo P o ponto de interseção de \overrightarrow{BX} com o lado AC , segue do teorema do ângulo externo (Figura 17) que

$$\hat{APB} = \hat{CBP} + \hat{BCP} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) + \hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}).$$

Mas como $\hat{ABP} = \hat{B} - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$, segue que o triângulo ABP é isósceles de base BP . Portanto,

Figura 17 – Triângulo ABC com $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \overline{AC} > \overline{AB}$.



Fonte: (NETO, 2012, p. 63)

$$\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}$$

Corolário 2.5 Se ABC é um triângulo tal que $\hat{A} \geq 90^\circ$, então \overline{BC} é seu maior lado. Em particular, num triângulo retângulo a hipotenusa é o maior lado.

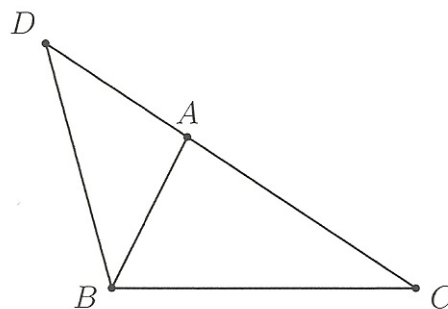
Demonstração 2.8 Basta observar que, se $\hat{A} \geq 90^\circ$, então \hat{A} é o maior ângulo de ABC , de modo que \overline{BC} é o maior lado.

A proposição a seguir é conhecida como a **desigualdade triangular** (NETO, 2012, p. 63).

Proposição 2.4 Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Demonstração 2.9 Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Será provada a desigualdade $a < b + c$, sendo a prova das demais totalmente análoga.

Figura 18 – Desigualdade triangular.



Fonte: (NETO, 2012, p. 64)

Marcando o ponto D sobre a semirreta \overrightarrow{CA} tal que $A \in \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$.

Uma vez que

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c$$

é suficiente mostrar que $B\hat{D}C < D\hat{B}C$. Mas como $B\hat{D}A = D\hat{B}A$, basta observar que

$$B\hat{D}C = B\hat{D}A = D\hat{B}A < D\hat{B}A + A\hat{B}C = D\hat{B}C.$$

Segue da desigualdade triangular que, sendo a , b e c os comprimentos dos lados de um triângulo, devemos ter

$$a < b + c, b < a + c \text{ e } c < a + b.$$

Reciprocamente, dados segmentos cujos comprimentos a , b e c satisfazem as desigualdades acima é sempre possível construir um triângulo tendo tais segmentos como lados (NETO, 2012, p. 64).

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, apresentaremos o modelo geométrico de Van Hiele, sua origem, implementação e difusão em diversos países, assim como as propriedades centrais desta teoria muito utilizadas para avaliar as habilidades dos alunos e facilitar a compreensão de conteúdos em geometria.

3.1 A Teoria de van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: Origem e Difusão

É comum professores de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio, apontarem falhas no desempenho de seus alunos nas aulas de Geometria. Os professores se lamentam de uma série de problemas, como a dificuldade de levar os alunos a aprender algum conceito novo ou a de aplicar os conceitos aprendidos em exemplos semelhantes, pelo fato de estarem presos a fórmulas. Essa problemática ocorre não só no Brasil, mas em todo o mundo e vem sendo enfrentada por muitos anos ([PAVANELLO, 1993](#)).

Foi a preocupação diante desse problema enfrentado por dois professores holandeses, que davam aula de Matemática no curso secundário, que os levou a estudar a fundo a situação com o objetivo de encontrar uma solução ([JAIME; GUTIERREZ, 1990](#)). Esses professores são Pierre Marie van Hiele e Dina van Hiele-Geldof, que, sob a orientação do educador matemático Hans Freudenthal, pesquisaram o ensino de Geometria com alunos de 12 e 13 anos, enfatizando a manipulação de figuras. O resultado dessa pesquisa foi publicado após concluírem o doutorado na Universidade de Utrecht. Dina faleceu logo depois de terminar a tese, então foi Pierre quem esclareceu, aperfeiçoou e promoveu a teoria de van Hiele, como é conhecida ([CROWLEY, 1996](#)).

A aplicação da metodologia de ensino baseada na teoria de Van Hiele, também considerada um modelo de aprendizagem, é uma possível estratégia para a reversão da problemática no ensino da geometria, pois, por ter sido originada em sala de aula, a teoria

aliou os aspectos cognitivo e pedagógico do ensino da geometria (NASSER, 1995).

O modelo de van Hiele só não ficou totalmente no obscurantismo porque a União Soviética o adotou nos anos 60, após a reformulação do currículo de geometria em suas escolas. O modelo demorou a merecer atenção internacional. Nos Estados Unidos, somente na década de 1970, motivados por encontrar soluções para os problemas com o ensino de geometria na escola secundária, muitos pesquisadores tomaram como base de estudos a teoria dos van Hiele. Em 1973, Hans Freudenthal publicou um livro intitulado *Mathematical as an Task Educational* no qual citava o trabalho dos van Hiele e, em 1976, o professor americano Izaak Wirsup começou a divulgar o modelo em seu país. O interesse pelas contribuições dos van Hiele tornou-se cada vez maior após as traduções para o inglês feitas em 1984 por Geddes, Fuls e Tisher. De modo geral, tais pesquisas objetivavam testar a validade do modelo, a viabilidade, as vantagens de sua aplicação (KALEFF et al., 1994).

No Brasil, uns dos trabalhos pioneiros foram apresentados pelo professor Nilson José Machado no livro *Matemática e Língua Materna* da editora Cortez publicado em 1990, e em 1992, uma aplicação do modelo foi publicada pelo Projeto Fundão, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, numa apostila chamada *Proposta de Geometria segundo a teoria da van Hiele* (KALEFF et al., 1994).

Andrade e Nacarato (2004), em pesquisa produzida no Brasil sobre as tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria a partir de trabalhos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática no período de 1987 a 2001, apontam que, teoricamente, os trabalhos produzidos vêm se pautando pelo modelo van Hiele, pela didática da Matemática Francesa e pelos construtos epistemológicos relativos à visualização e representação.

O modelo de van Hiele tem servido de base para trabalhos desenvolvidos no Ensino Fundamental e Médio abordando, principalmente, os níveis iniciais do mesmo. Entre vários trabalhos, podemos citar: *Algumas reflexões sobre a Teoria de van Hiele* (VILLIERS, 2010) e *Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental* (BRAGA; DORNELES, 2011). O modelo tem influenciado, também, pesquisas desenvolvidas em ambientes computacionais envolvendo a Geometria como: *O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica* (SAMPAIO; ALVES, 2010).

3.2 Descrição da Teoria de van Hiele

O modelo de desenvolvimento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidas pelos Van Hiele propõem um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro. Ressalta-se que, mais do que a maturidade, é o ensino o fator que contribui significativamente para

esse modelo. A teoria de Van Hiele propõe que o desenvolvimento do pensamento em Geometria seja dividido em níveis. A composição desses níveis se deu por influência da teoria piagetiana, identificando quatro fatores atuantes no processo de desenvolvimento cognitivo: maturação, experiência com o mundo físico, experiências sociais e equilíbrio. Na teoria de Van Hiele, contudo, atenção maior é dada ao processo de ensino-aprendizagem, sendo este um meio através do qual o estudante atinge certo nível de desenvolvimento (SAMPAIO; ALVES, 2010).

O modelo criado pelo casal van Hiele é sequencial e hierárquico, subdividido em cinco níveis que descrevem o desenvolvimento da compreensão dos alunos em Geometria (BRAGA; DORNELES, 2011).

Para Villiers (2010), a distinção destes cinco níveis de raciocínio é a principal característica do modelo. Cada nível envolve a compreensão e utilização de conceitos geométricos de uma maneira diferente, o que se reflete na forma de interpretá-los, defini-los, classificá-los e fazer demonstrações. Os níveis são sequenciais e ordenados de tal forma que não se pode pular nenhum. Portanto, há uma relação hierárquica entre os cinco níveis, uma vez que o aluno só atinge um nível superior após passar por todos os níveis anteriores.

A passagem de um nível para o seguinte se dá pela vivência de atividades adequadas e ordenadas, passando por cinco fases de aprendizagem. Conclui-se, então, que o progresso de níveis relaciona-se mais com a aprendizagem que com a idade ou a maturação do aluno. Para van Hiele, um nível mais elevado é alcançado à medida que as regras do nível precedente tornam-se explícitas, a fim de se obterem novas estruturas. Considera-se também a maturação do sujeito durante o processo (NASSER; LOPES, 1996).

“É evidente que o alcance de um nível é resultado de um processo de aprendizagem. (...) De qualquer modo, seria um deplorável erro supor que um nível é alcançado como resultado de uma maturação biológica que o professor ajuda a influenciar” (HIELE, 1986, p. 65) apud (DOBARRO; BRITO, 2010, p. 37).

O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico pode ser utilizado para orientar a formação assim como para avaliar as habilidades dos alunos.

3.2.1 Os Níveis de Raciocínio

De acordo com o modelo original da Teoria de van Hiele, as pessoas desenvolveriam o pensamento geométrico conforme cinco níveis, enumerados de 0 a 4. Respeitando as críticas dos pesquisadores americanos sobre a relevância do nível zero, em 1986, Pierre M. van Hiele escreveu o livro *Structure e insight: a theory of mathematics education*, propondo uma simplificação do modelo original, com os níveis enumerados de 1 a 5, descritos em termos gerais e comportamentais (OLIVEIRA, 2012).

Segundo [Crowley \(1996\)](#), os níveis de raciocínio podem ser descritos como segue no Quadro 3.1:

Quadro 3.1 – Níveis de raciocínio da teoria de Van Hiele

Nível 0	Visualização	Neste nível, os alunos reconhecem as figuras geométricas por sua aparência global. Reconhecem triângulos, quadrados, paralelogramos, entre outros, por sua forma, não conseguindo identificar suas partes ou propriedades. São capazes de reproduzir figuras dadas e aprender um vocabulário geométrico básico.
Nível 1	Análise	É onde se inicia a análise dos conceitos geométricos. Neste nível, os alunos começam a discernir as características e propriedades das figuras, mas não conseguem ainda estabelecer relações entre essas propriedades e nem entendem as definições ou vê inter-relações entre figuras.
Nível 2	Dedução informal	Aqui o aluno começa a estabelecer inter-relações de propriedades dentro de figuras e entre figuras, deduzindo propriedades e reconhecendo classes de figuras. Agora, a definição já tem significado; todavia, o aluno ainda não entende o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas nas provas formais.
Nível 3	Dedução formal	Neste estágio, o aluno analisa e compreende o processo dedutivo e as demonstrações com o processo axiomático associado. Agora, ele já consegue construir demonstrações e desenvolvê-las de mais de uma maneira, também faz distinções entre uma afirmação e sua recíproca.
Nível 4	Rigor	Agora, o aluno já é capaz de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos; analisa e compreende geometrias não euclidianas. A geometria é entendida sob um ponto de vista abstrato.

Fonte: ([CROWLEY, 1996](#))

3.2.2 Propriedades da Teoria de van Hiele

Junto com as características particulares de cada nível de raciocínio, faz-se necessário mencionar algumas propriedades globais da teoria de van Hiele. Para [Crowley \(1996, p. 4\)](#), “essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino”. São elas:

1. Sequencial

O aluno deve, necessariamente, passar por todos os níveis, uma vez que não é possível atingir um nível posterior sem dominar os anteriores.

2. Avanço

A progressão ou não de um nível para outro depende mais dos métodos de ensino e do conteúdo do que da idade ou maturação biológica. Nenhum método de ensino permite ao aluno pular um nível, alguns acentuam o progresso, mas há alguns que retardam.

3. Intrínseco e Extrínseco

Os objetivos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte.

4. Linguística

Cada nível tem sua própria linguagem e um conjunto de relações interligando-os. Assim, uma relação que é correta em um certo nível, pode se modificar em outro nível.

5. Combinação inadequada

O professor e o aluno precisam raciocinar em um mesmo nível, caso contrário, o aprendizado não ocorre. Ou seja, professor, material didático, conteúdo e vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno.

3.2.3 Fases de Aprendizagem

Para completar a descrição da teoria, vamos expor a proposta de van Hiele sobre os passos que o professor deve seguir para ajudar seus alunos a avançar nos níveis de raciocínio. Como já foi mencionado, os van Hiele afirmam que o progresso ao longo dos níveis depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno. “Portanto o método e a organização do curso, assim como o conteúdo e o material usados, são importantes áreas de preocupação pedagógica” (CROWLEY, 1996, p. 6).

Dessa forma, os van Hiele propuseram uma sequência didática de cinco fases de aprendizagem: interrogação informada, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. As fases não são, por conseguinte, associada a um determinado nível, mas cada nível de raciocínio começa com atividades da primeira fase e continua com as atividades das fases seguintes. No final da quinta fase, os alunos devem ter atingido o próximo nível de raciocínio (CROWLEY, 1996).

Para Crowley (1996), as principais características das fases de aprendizagem são:

1. Interrogação informada

Professor e aluno conversam e desenvolvem atividades sobre os objetos de estudo do respectivo nível. Aqui se introduz o vocabulário específico do nível, são feitas observações e várias perguntas. É uma fase preparatória para estudos posteriores.

2. Orientação dirigida

Atividades são desenvolvidas para explorarem as características de um nível e isso deve ser feito com o uso de material selecionado e preparado pelo professor.

3. Explicação

Agora, o papel do professor é de somente orientar o aluno no uso de uma linguagem precisa e adequada. Baseando-se em experiências anteriores, os alunos revelam seus pensamentos e modificam seus pontos de vista sobre as estruturas trabalhadas e observadas.

4. Orientação livre

Diante de tarefas mais complexas, os alunos procuram soluções próprias que podem ser concluídas de maneiras diferentes. Assim, eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas.

5. Integração

Nesta fase, o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações. Assim, o aluno alcança um novo nível de pensamento.

“Agora são necessários professores e pesquisadores para se aprimorarem as fases de aprendizagem, desenvolver materiais baseados no modelo Van Hiele e implementar o uso desses materiais e essa filosofia no contexto da sala de aula. O raciocínio geométrico pode ser acessível a todas as pessoas” (CROWLEY, 1996, p. 19).

3.3 Testes para Identificação dos Níveis de Raciocínio

Professores e pesquisadores que trabalham com o modelo van Hiele utilizam testes para determinar o nível de raciocínio geométrico dos alunos. Estes testes são necessários tanto para iniciar um trabalho apoiado no modelo van Hiele, como para avaliar a evolução dos alunos.

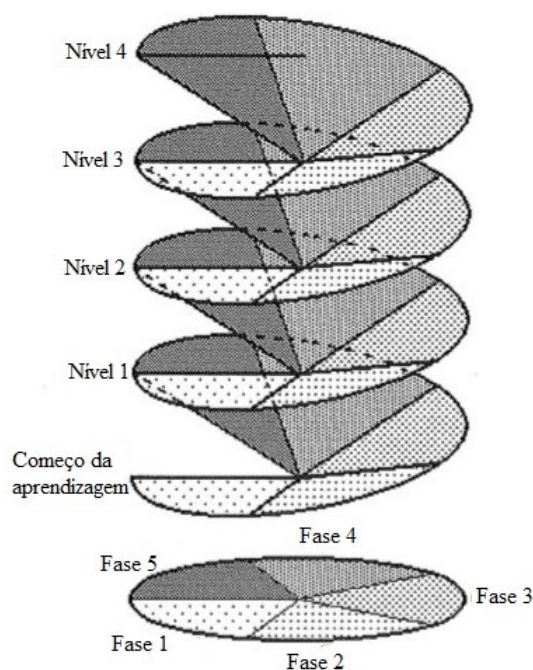
O teste pode ser oral, que consiste de entrevistas clínicas individuais entre professor e aluno, ou escrito. Pode ser elaborado com questões de múltipla escolha ou com questões de respostas livres. O de múltipla escolha, além da facilidade de aplicação, apresentam a vantagem da agilidade na organização dos dados. Obviamente, a entrevista individual é a que proporciona resultados mais confiáveis sobre o nível de raciocínio geométrico de uma pessoa (JAIME; GUTIERREZ, 1990). Porém, este método não é muito viável à nossa realidade, pois consome muito tempo não podendo ser aplicado a grupos muito grandes.

Para [Jaime e Gutierrez \(1990\)](#), em qualquer caso, ao se preparar um questionário para avaliar o nível de raciocínio dos alunos, é conveniente seguir algumas normas para torná-lo o mais confiável possível. São elas:

1. as atividades devem ser selecionadas de tal forma que os estudantes possam expressar suas ideias e sua forma de raciocinar por meio das respostas;
2. não se deve confundir o questionário para conhecer o nível de raciocínio com um exame tradicional que se trata de avaliar o nível de conhecimento dos alunos. Para determinar o nível de raciocínio, a coisa mais importante não é saber se os alunos responderam de forma certa ou errada, mas como e porque eles responderam assim;
3. mesmo que o professor tenha alguma ideia prévia sobre o nível de raciocínio dos alunos, para fazer a seleção dos exercícios é conveniente que estes sejam selecionados de tal forma a cobrir todos os níveis ou, pelo menos, os níveis de 0 a 2, no caso de alunos de séries menos avançadas.

A busca por testes para definir o nível de raciocínio em que um aluno se encontra ajudou na evolução do modelo. Inicialmente, van Hiele considerava que a passagem de um nível para o seguinte ocorria de forma brusca. Mas, foi notado pelos pesquisadores que, nas entrevistas, as respostas oscilavam entre dois níveis, levando-os a considerar que a evolução dos níveis ocorre de maneira contínua conforme retratado na Figura 19.

Figura 19 – Níveis de van Hiele



Fonte: [Jaime e Gutierrez \(1990, p. 336\)](#)

De acordo com [Jaime e Gutierrez \(1990\)](#), na prática, nenhum salto brusco ocorrerá quando você terminar de trabalhar em um nível e começar o seguinte.

A teoria de Van Hiele considera a linguagem como fator de grande importância para o avanço dos níveis, destacando também a importância da linguagem empregada pelo professor em sala de aula de forma a ser compreendido pelos alunos. Van Hiele considera que os conceitos são dinâmicos e o processo de aprendizagem é influenciado pelas pessoas daquele período ([DOBARRO; BRITO, 2010](#)).

Uma importante contribuição para a realização de testes para avaliar os níveis de raciocínio da teoria de van Hiele no Brasil, vem de um projeto da professora Lílian Nasser do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro ([SAMPAIO; ALVES, 2010](#)). Testes aplicados por esse projeto, conhecido como Projeto Fundação, em alunos brasileiros confirmaram que o nível de aprendizado em geometria é muito baixo.

Capítulo 4

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo, são apresentados os aspectos metodológicos do estudo: descrição do tipo de pesquisa, apresentação do campo onde a pesquisa decorre, caracterização dos sujeitos e definição dos instrumentos e dos procedimentos para análise dos dados da pesquisa.

Para [Neves e Domingues \(2007\)](#), a metodologia deve ser entendida como um conjunto de etapas dispostas de forma lógica que devem ser vencidas na investigação de um fenômeno.

4.1 Tipo de Pesquisa

Quanto à forma de abordagem do problema, cuja resposta se deseja buscar e quanto ao seu objetivo, a referida pesquisa tem um caráter qualitativo e exploratório. De acordo com [Neves e Domingues \(2007, p. 57\)](#), a pesquisa qualitativa “é vista como uma relação entre sujeitos, portanto dialógica, na qual o pesquisador é uma parte integrante do processo investigativo”. Cabe destacar que a análise qualitativa pode ter apoio quantitativo, contudo geralmente se omite a análise estatística ou seu emprego não é sofisticado.

Nesta mesma direção, [Godoy \(1995\)](#) afirma que uma pesquisa qualitativa possui como característica seu caráter descritivo, considerando:

“O ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento chave; o processo é o foco principal de abordagem e não o resultado ou o produto; a análise dos dados é realizada de forma intuitiva e indutivamente pelo pesquisador; não requer o uso de técnicas e métodos estatísticos; e, por fim, tem como preocupação maior a interpretação de fenômenos e a atribuição de resultados.”([GODOY, 1995, p. 58](#)).

Para [Gil \(2002, p. 41\)](#), a pesquisa exploratória tem por objetivo o esclarecimento de ideias, que são desenvolvidas de forma a proporcionar uma maior familiaridade com o problema, a fim de melhor explicitá-lo, construindo uma visão geral acerca de determinado

fato, envolvendo levantamento bibliográfico, entrevistas e análise de exemplos que auxiliem sua compreensão.

A pesquisa exploratória é utilizada quando o pesquisador se depara com temas pouco estudados, o que torna difícil a formulação de hipóteses precisas, assumindo, geralmente, as formas de pesquisas bibliográficas e estudos de caso (GIL, 2002).

4.2 Campo da Pesquisa

A pesquisa ocorreu no Colégio Estadual Baltazar Carneiro localizado no município de Cardoso Moreira no estado do Rio de Janeiro. Criado em Campos dos Goytacazes, em 06 de setembro de 1918 e transferido para Cardoso Moreira em 1945, seu nome é uma justa homenagem ao Professor Baltazar Dias Carneiro, poeta e educador da cidade de Campos. Atualmente, o Colégio conta com boas instalações, como biblioteca, sala de vídeo, sala de jogos, laboratório de informática, laboratório de ciências, quadra de esportes e auditório. Funciona em 3 turnos com 494 alunos ao todo. Está localizado no centro da cidade e, por ser a única escola que oferece a modalidade de Ensino Médio, atende alunos de todo o município.

A escolha dessa escola como campo de pesquisa se deu pelo fato de ser o local onde a pesquisadora leciona a disciplina de Matemática, desde 2009, para os níveis Fundamental e Médio. Presenciando, assim, as dificuldades apresentadas pelos alunos nesta disciplina e, mais notadamente, em relação aos conceitos geométricos. Tendo anseio por proporcionar a esses alunos experiências e atividades significativas e diversificadas que lhes deem a oportunidade de intervir ativamente no processo de ensino/aprendizagem.

4.3 Sujeitos da Pesquisa

Partindo do pressuposto que, “a escolha dos informantes ou sujeitos do estudo deve ser baseada na procura por indivíduos sociais que tenham uma vinculação significativa com o objeto de estudo” (NEVES; DOMINGUES, 2007, p. 57), os testes e a intervenção pedagógica propostos neste trabalho foram submetidos a alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, visto que o tema sobre triângulos é parte integrante do currículo mínimo para este ano de escolaridade.

A pesquisa foi realizada nas turmas 801 e 802 do Colégio Estadual Baltazar Carneiro que ocupam, respectivamente, as salas de número 1 e 2 do primeiro pavimento no turno da manhã. Na turma 801, estão matriculados 21 alunos, porém um não frequenta. Na 802, são 17 matriculados com apenas 15 frequentando. Totalizando 35 alunos como sujeitos desta pesquisa.

Neste trabalho, cada sujeito da pesquisa foi identificado em ordem alfabética, por S1 a S35, respectivamente.

4.4 Os Instrumentos da Pesquisa

4.4.1 Teste de van Hiele

O teste de van Hiele (Anexo A) foi elaborado pela equipe do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997). Consta de 15 questões, distribuídas em três blocos, cada um deles correspondente a um dos níveis de van Hiele. Tem por objetivo investigar o nível de pensamento geométrico de cada aluno para que as atividades, a serem preparadas e aplicadas, estejam em consonância com este nível. Relembrando Crowley (1996), as propriedades da teoria de van Hiele orientam os educadores na tomada de decisões quanto ao ensino. Não é possível um aluno atingir um nível posterior sem dominar os anteriores e a progressão de um nível para o outro depende dos métodos de ensino. Daí, percebe-se que são necessárias vivências de atividades adequadas para cada nível.

O primeiro bloco de questões pauta-se no nível básico. Esse nível caracteriza-se pela capacidade de identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas com base em sua aparência global. Com essas cinco questões, busca-se verificar as habilidades dos alunos em identificar, comparar e nomear figuras geométricas.

As questões de 6 a 10 referem-se ao nível 1, que tem como característica a análise dos componentes de uma figura geométrica, o reconhecimento de suas propriedades e o uso dessas propriedades para resolver problemas.

O terceiro bloco de questões procura avaliar habilidades pertinentes ao nível 2, segundo a teoria de van Hiele. Esse nível caracteriza-se pelas seguintes capacidades: percepção da necessidade de uma definição precisa, percepção de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.

4.4.2 Teste sobre Triângulos

O teste sobre triângulos (Apêndice A), elaborado pela autora, consta de 13 questões, algumas de múltipla escolha e outras de respostas livres, conforme considerações de Jaime e Gutierrez (1990) mencionadas no capítulo 3. Essas questões abordam os principais conceitos relativos aos triângulos. Esse teste aplicado no início e reaplicado no fim da pesquisa, objetiva investigar o conhecimento específico de cada aluno sobre esse assunto antes e após a intervenção pedagógica.

Assim como no teste do Projeto Fundão (NASSER; SANTANNA, 1997), as questões deste teste abordam os três primeiros níveis da teoria de van Hiele.

4.4.3 Atividades

Além dos testes já citados, propõe-se uma intervenção pedagógica por meio da aplicação de oito atividades sobre triângulos (Apêndice B), focando o uso de materiais manipuláveis e obedecendo às fases de aprendizagem segundo a teoria de van Hiele. O objetivo principal dessa intervenção pedagógica é favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades, promovendo o avanço na aprendizagem dos conceitos sobre triângulos pelos sujeitos da pesquisa.

Segundo Crowley (1996, p. 9), “nos escritos de van Hiele está implícita a noção de que seria apresentada às crianças uma variedade ampla de experiências geométricas.” Partindo desse princípio, as atividades propostas, neste trabalho, permitirão aos alunos experiências exploratórias através de pinturas, recortes, varetas, canudinhos, geoplanos, trabalhos em malhas e outros.

Como relatado no capítulo 3; o progresso, ao longo dos níveis, depende mais da instrução recebida do que da maturidade do aluno. O modelo de pensamento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidos pelos van Hiele, além de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro. Sendo o ensino, o fator que contribui mais significativamente para esse desenvolvimento (CROWLEY, 1996).

4.5 Os Procedimentos da Pesquisa

A pesquisa foi realizada em quatro momentos:

1. aplicação do teste de van Hiele;
2. aplicação do teste sobre triângulos;
3. intervenção pedagógica com atividades sobre os principais conceitos relativos aos triângulos;
4. reaplicação do teste sobre triângulos.

A investigação deu-se a partir das informações coletadas no período de fevereiro a abril do ano de 2015. Ao todo, foram 11 encontros com os alunos conforme Quadro 4.1.

Quadro 4.1 – Cronograma dos encontros com os alunos

Data	Tarefa	Participantes
12/02	Aplicação do teste de van Hiele	35 alunos
24/02	Aplicação do teste sobre triângulos	35 alunos
25/02	Atividade I - Observando formas triangulares	35 alunos
26/02	Atividade II - Rigidez triangular	35 alunos
05/03	Atividade III - Desigualdade triangular e construção com régua e compasso	35 alunos
12/03	Atividade IV - Classificação dos triângulos quanto aos lados	35 alunos
20/03	Atividade V - Congruência de triângulos	35 alunos
26/03	Atividade VI - Soma dos ângulos internos	35 alunos
09/04	Atividade VII - Classificação dos triângulos quanto aos ângulos	35 alunos
16/04	Atividade VIII - Ângulos externos de um triângulo	35 alunos
30/04	Reaplicação do teste sobre triângulos	35 alunos

Capítulo 5

Sequência Didática Aplicada em Sala de Aula

Este capítulo descreve a implementação da sequência didática constituída pelos testes e pela intervenção pedagógica com atividades sobre triângulos baseados na teoria de van Hiele.

5.1 Aplicação do Teste de van Hiele

Neste item, é descrita e analisada a aplicação do teste de van Hiele, cujo objetivo é:

- investigar o nível de pensamento geométrico de cada aluno de acordo com a teoria de van Hiele.

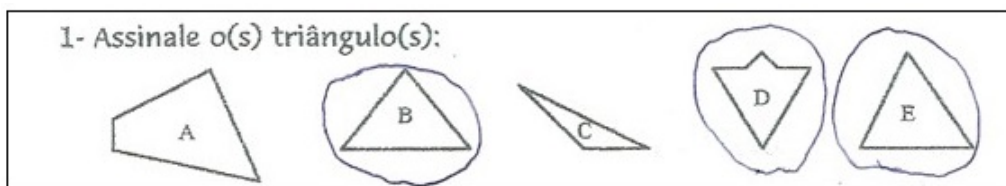
A aplicação desse instrumento ocorreu no dia 10/02/2015 com a participação dos 35 sujeitos da pesquisa. Inicialmente, os alunos ficaram apreensivos em saber que fariam um teste, mas após a explanação do objetivo deste, sentiram-se mais seguros e a aplicação transcorreu sem problemas.

É apresentada, a seguir, uma análise das respostas dos alunos para cada questão:

Questão 1

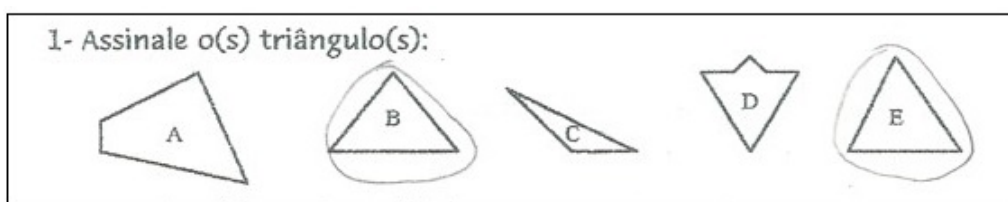
Apenas dezenove alunos acertaram a questão, identificando como triângulos as figuras B, C e E. Cinco alunos assinalaram as figuras B, D e E, possivelmente, eles tenham considerado apenas a aparência global dessas figuras e tenham sido levados a assinalar a figura D, porque apresenta um ângulo nitidamente agudo, como, provavelmente, muitas das representações de triângulos que conhecem (Figura 20). Usando esse mesmo raciocínio, onze alunos assinalaram apenas as figuras B e E, não identificando a figura C como triângulo, talvez porque tenha um ângulo obtuso (Figura 21). Nenhum aluno considerou a figura A como triângulo.

Figura 20 – Resposta do sujeito S5 para a questão 1 do teste de van Hiele.



Fonte: Elaboração própria

Figura 21 – Resposta do sujeito S4 para a questão 1 do teste de van Hiele.

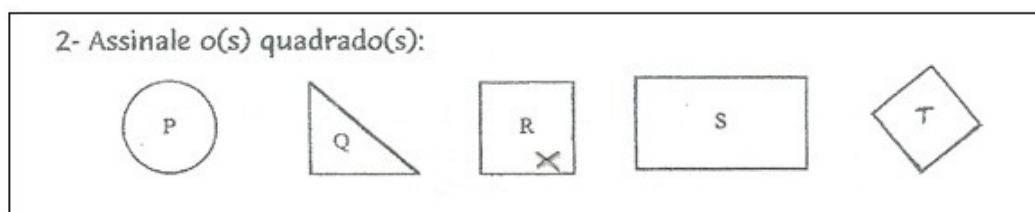


Fonte: Elaboração própria

Questão 2

Vinte e um alunos assinalaram as duas opções corretas. Onze marcaram apenas a figura identificada pela letra R como sendo um quadrado, desconsiderando a figura T, que não estava com os lados paralelos às bordas da folha, conforme mostra a Figura 22. Os demais alunos assinalaram as figuras R e S.

Figura 22 – Resposta do sujeito S33 para a questão 2 do teste de van Hiele.



Fonte: Elaboração própria

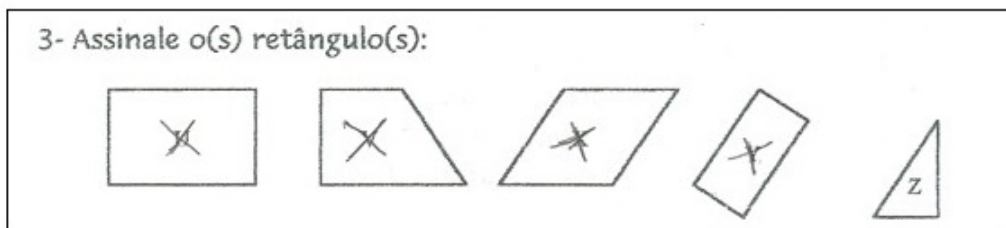
É válido destacar que nenhum aluno assinalou as figuras P ou Q, mostrando que distinguem de forma clara círculos e triângulos de quadrados.

Questão 3

Nessa questão, ocorreu o mesmo fato que havia acontecido na questão anterior. Alguns alunos só consideraram como retângulo a figura U por terem lados paralelos às bordas da folha. Vinte e dois alunos acertaram a questão, pois assinalaram as figuras U e Y. Os demais consideraram o paralelogramo ou o trapézio como retângulo.

A resposta de um aluno foi bem curiosa, reproduzida na Figura 23, pois este considerou todos os quadriláteros (figuras U, V, X e Y) como sendo retângulos.

Figura 23 – Resposta do sujeito S3 para a questão 3 do teste de van Hiele.

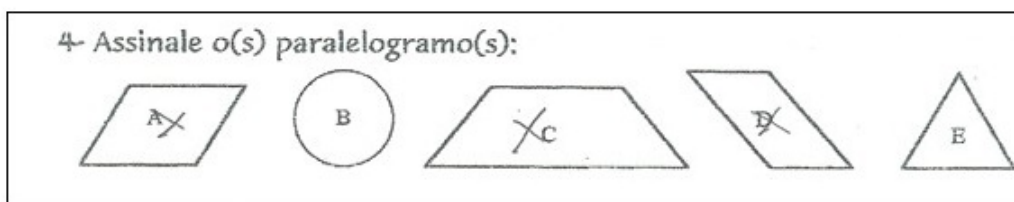


Fonte: Elaboração própria

Questão 4

Somente treze alunos acertaram a questão. A maioria assinalou apenas a figura A, não considerando a figura D como paralelogramo, outros assinalaram somente a figura C e, alguns assinalaram todos os quadriláteros como sendo paralelogramos, como ilustrado na Figura 24. Nenhum aluno assinalou o círculo ou o triângulo.

Figura 24 – Resposta do sujeito S32 para a questão 4 do teste de van Hiele.

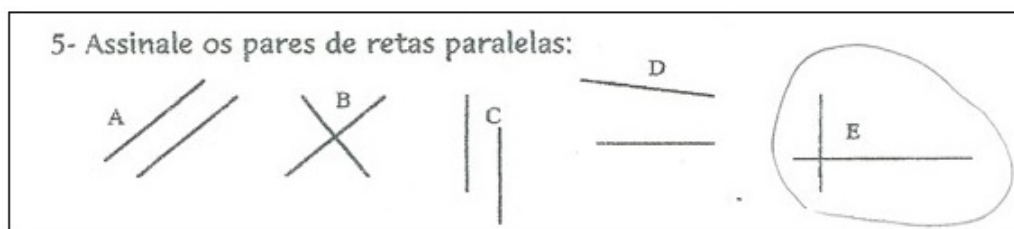


Fonte: Elaboração própria

Questão 5

Nesta questão, onze alunos acertaram os pares de retas paralelas, pois marcaram as figuras A e C. Seis alunos marcaram as retas da figura E, confundindo os conceitos de paralelismo e perpendicularismo como mostrado na Figura 25.

Figura 25 – Resposta do sujeito S10 para a questão 5 do teste de van Hiele.



Fonte: Elaboração própria

Os demais sujeitos da pesquisa erraram por terem considerado como paralelas as retas das figuras A, C e D, pois entendem que retas paralelas são aquelas que não se cruzam, esquecendo-se, porém, de que o desenho D representa apenas parte das retas que, prolongadas, cruzar-se-iam.

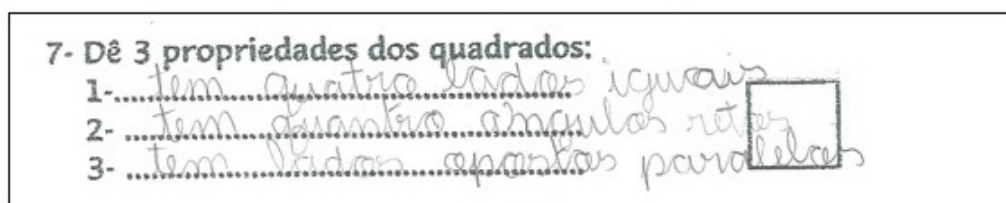
Questão 6

Apenas quatro alunos acertaram completamente a questão, marcando como alternativas corretas as letras A, B e C. Os demais consideraram apenas uma ou duas entre as alternativas corretas.

Questão 7

Cinco alunos não escreveram nenhuma propriedade. Trinta alunos escreveram que os quadrados possuem lados iguais; alguns destes colocaram apenas mais uma propriedade e apenas quatro alunos escreveram de forma correta três propriedades como era pedido (Figura 26).

Figura 26 – Resposta do sujeito S13 para a questão 7 do teste de van Hiele.



Fonte: Elaboração própria

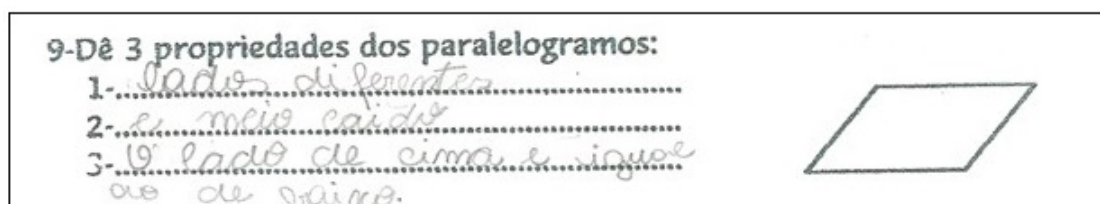
Questão 8

Dos trinta e cinco sujeitos da pesquisa, apenas oito acertaram a questão. Entre os que erraram, alguns assinalaram mais de uma opção, porém o enunciado é bem claro ao pedir para assinalar “a alternativa verdadeira”; outros, induzidos pela imagem, assinalaram a opção D a qual afirmava que os três ângulos têm a mesma medida.

Questão 9

Nenhum aluno escreveu de forma correta três propriedades dos paralelogramos. Muitos deixaram essa questão em branco e entre os que tentaram responder observou-se um vocabulário geométrico muito restrito como visto na Figura 27.

Figura 27 – Resposta do sujeito S2 para a questão 8 do teste de van Hiele.



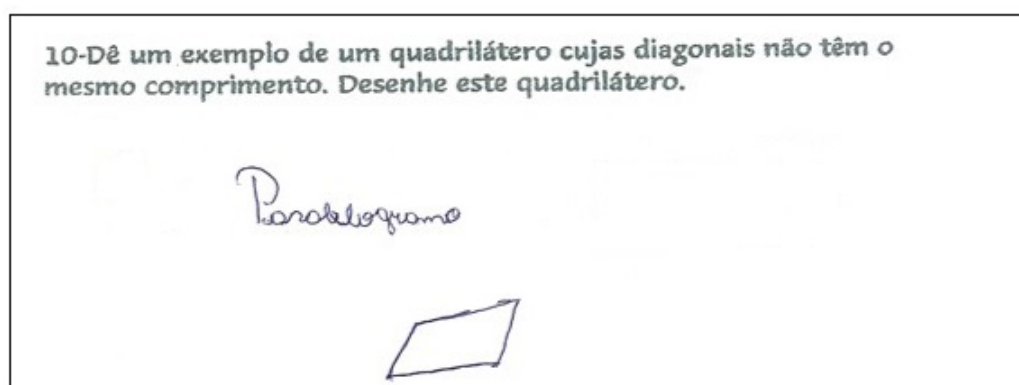
Fonte: Elaboração própria

Questão 10

A Figura 28 reproduz a resposta do único aluno que acertou a questão. Dez alunos desenharam paralelogramos ou trapézios, porém não souberam nomear estes quadriláteros.

Os demais sujeitos da pesquisa deixaram a questão em branco.

Figura 28 – Resposta do sujeito S5 para a questão 10 do teste de van Hiele.

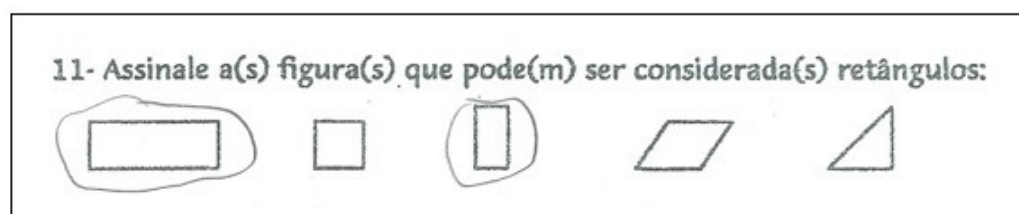


Fonte: Elaboração própria

Questão 11

Nenhum dos sujeitos da pesquisa acertou a questão, pois não identificaram o quadrado como retângulo, conforme Figura 29. Esse fato pode ser observado nas questões 6 e 7, pois os alunos que responderam corretamente à questão 6 erraram a questão 7, ou seja, não perceberam que todas as propriedades dos retângulos são válidas, também, para os quadrados.

Figura 29 – Resposta do sujeito S9 para a questão 11 do teste de van Hiele.



Fonte: Elaboração própria

Questão 12

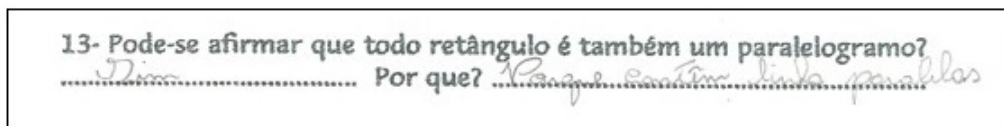
Em relação a essa questão, somente três alunos responderam corretamente aos três itens. O sujeito S13 respondeu que não se pode afirmar que ABCD é um quadrado porque “um retângulo também tem ângulos iguais”. Outros doze sujeitos da pesquisa responderam corretamente apenas ao item “a”, sem justificar o item “b”, nem souberam classificar o quadrilátero no item “c”. Dez alunos responderam “sim” ao item “a” e os demais não responderam a nenhum item.

Questão 13

Dez alunos não responderam essa questão. Dezoito alunos responderam “não” e os demais responderam “sim”, porém apenas um aluno apresentou justificativa coerente,

mesmo assim, usando um vocabulário muito restrito, o que pode ser observado na Figura 30.

Figura 30 – Resposta do sujeito S26 para a questão 13 do teste de van Hiele.

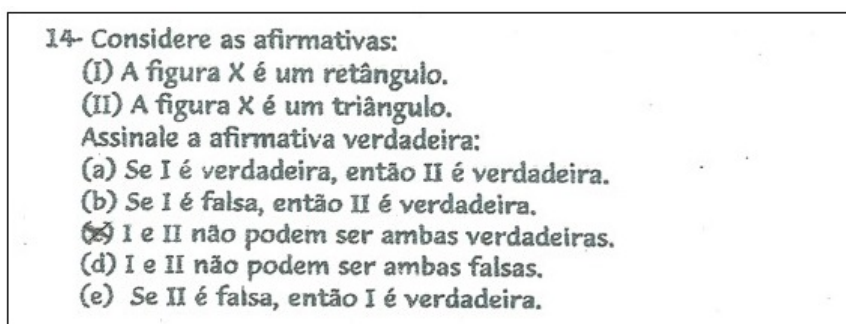


Fonte: Elaboração própria

Questão 14

Apenas cinco alunos assinalaram a opção correta. Os demais marcaram de forma aleatória qualquer uma das opções apenas para que a questão não ficasse em branco, conforme Figura 31.

Figura 31 – Resposta do sujeito S3 para a questão 14 do teste de van Hiele.

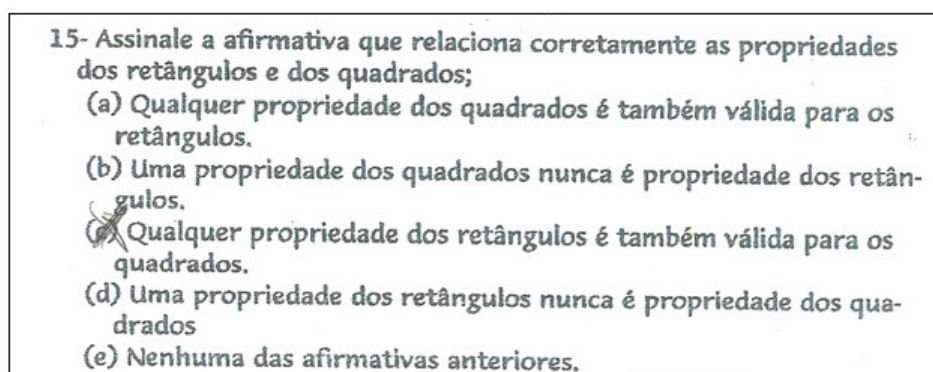


Fonte: Elaboração própria

Questão 15

Foi observado que, nessa última questão, ocorreu o mesmo fato descrito na questão anterior. Alguns alunos assinalaram de forma aleatória qualquer alternativa. Apenas dois sujeitos da pesquisa acertaram, como mostra a Figura 32.

Figura 32 – Resposta do sujeito S29 para a questão 15 do teste de van Hiele.



Fonte: Elaboração própria

5.1.1 Conclusões da Aplicação do Teste de van Hiele

A verificação do nível de pensamento geométrico de cada aluno é apresentado no Quadro 5.1, considerando que o sujeito da pesquisa tenha que acertar a maioria das questões de cada bloco para atingir o referido nível.

Quadro 5.1 – Nível de pensamento geométrico dos sujeitos da pesquisa segundo o teste de van Hiele

Questões/ Sujeitos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
S1	-	x	x	x	x	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	0
S2	-	x	x	x	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	0
S3	x	-	-	x	x	-	-	x	-	-	-	-	-	x	-	0
S4	-	-	-	-	x	x	-	-	-	-	-	x	-	-	-	
S5	-	-	x	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	
S6	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S7	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S8	x	-	x	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	0
S9	x	x	x	x	-	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-	0
S10	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S11	-	x	x	x	-	x	-	x	-	-	-	-	-	-	-	0
S12	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S13	x	x	x	x	x	-	x	-	-	-	-	x	-	-	-	0
S14	x	x	x	x	x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	0
S15	x	x	x	-	-	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	0
S16	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	
S17	x	-	x	-	x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	0
S18	x	x	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
S19	x	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S20	-	x	x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
S21	x	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S22	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S23	x	-	x	-	x	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	0
S24	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S25	x	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
S26	x	x	x	x	-	x	-	-	-	-	-	-	x	-	-	0
S27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S28	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S29	x	x	-	x	-	-	x	x	-	-	-	-	-	-	x	0
S30	-	x	x	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	0
S31	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S32	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
S33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	
S34	-	x	x	x	x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	0
S35	-	-	x	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	

Fonte: Elaboração própria

Quadro 5.2 – Legenda do Quadro 5.1

x	Indica que o aluno acertou a questão.
-	Indica que o aluno errou a questão.
0	Indica que o aluno atingiu o nível 0 (básico).
1	Indica que o aluno atingiu o nível 1.
2	Indica que o aluno atingiu o nível 2.
	Indica que o aluno não atingiu nenhum dos níveis.

Fonte: Elaboração própria

Conforme foi dito anteriormente, o objetivo da aplicação do teste de van Hiele era investigar em que nível de pensamento geométrico os sujeitos da pesquisa se encontravam. O resultado obtido mostra que, dos 35 sujeitos, 17 deles não atingiram nem mesmo o nível 0 (básico), 18 alunos atingiram o nível 0 (básico) e nenhum atingiu o nível 1 ou o nível 2.

É válido observar que, por vezes, um aluno pode estar situado em um determinado nível na aprendizagem dos conceitos geométricos segundo a teoria de van Hiele, mas domina algumas habilidades do nível seguinte, ou seja, as respostas no teste podem oscilar entre dois níveis. Isso foi constatado por [Jaime e Gutierrez \(1990\)](#) e retratado na Figura 19 do capítulo 3.

5.2 Aplicação do Teste sobre Triângulos

Neste item, é descrita e analisada a aplicação do teste sobre triângulos, cujo objetivo é:

- investigar o conhecimento geométrico de cada aluno em relação aos conceitos sobre triângulos.

A aplicação desse instrumento aconteceu no dia 24/02/2015 com a participação dos 35 sujeitos da pesquisa.

A seguir, apresenta-se a análise das respostas dos alunos para cada uma das questões.

Questão 1

Oito alunos não responderam à questão, dizendo não saber o que era forma geométrica. Todos os outros acertaram, pois identificaram o triângulo como a forma geométrica que aparece em maior quantidade na obra.

Questão 2

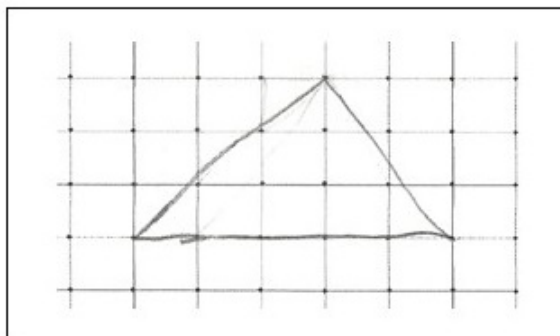
Nessa questão, os triângulos não foram apresentados como figuras isoladas, mas estavam “dentro” de outras figuras planas.

Apenas dois alunos acertaram a questão, pois identificaram 13 triângulos. Um aluno identificou 12 triângulos, apenas deixou de perceber que há um triângulo que é formado por outros triângulos. Vinte e dois alunos encontraram menos de 13 triângulos e dez identificaram mais de 13 triângulos, possivelmente tentaram criar novos triângulos a partir das figuras apresentadas.

Questão 3

Os alunos apresentaram muita dificuldade nessa questão. Inicialmente, mostraram-se inseguros sobre quais pontos escolher. Depois, traçaram os lados do triângulo à mão livre, não formando segmentos de reta, conforme apresentado na Figura 33 e, por fim, não perceberam que só é possível desenhar um triângulo se os pontos escolhidos não forem colineares. Nenhum sujeito da pesquisa acertou a questão.

Figura 33 – Resposta do sujeito S4 para a questão 3 do teste sobre triângulos.

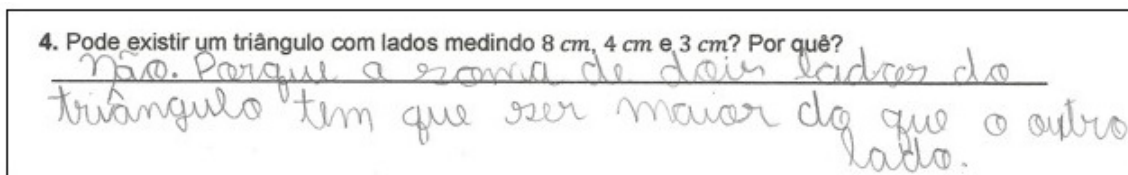


Fonte: Elaboração própria

Questão 4

Apenas um aluno acertou completamente a questão, pois afirmou não existir o triângulo (Figura 34). Quatro alunos não responderam. Dez afirmaram existir o triângulo, mas não justificaram. Entre os vinte alunos restantes, dez destes responderam não existir o triângulo, pois “os lados devem ser iguais” e os outros dez alunos, também, responderam não existir o triângulo, pois este deveria ter “dois lados iguais e um diferente”.

Figura 34 – Resposta do sujeito S13 para a questão 4 do teste sobre triângulos.



Fonte: Elaboração própria

Questão 5

Catorze alunos não responderam à questão. Do restante, cinco erraram por terem escrito que triângulos “tem três lados iguais”, alguns alunos escreveram apenas “tem três

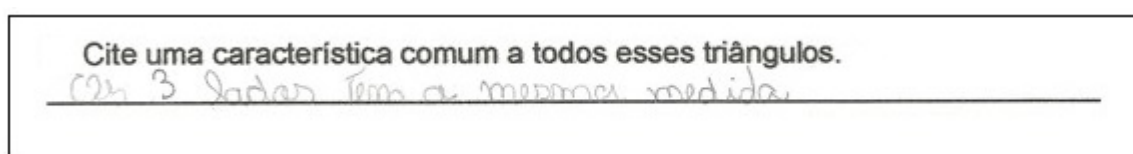
lados” e dois alunos responderam: “possuem três lados e três ângulos internos”.

Observa-se que nenhum aluno atingiu o objetivo da questão e, também, mostraram um vocabulário geométrico muito restrito.

Questão 6

Doze alunos não responderam à questão. Quinze alunos escreveram que a característica comum entre os triângulos apresentados é que “tem três lados” e somente o restante dos sujeitos da pesquisa perceberam que os lados dos triângulos têm medidas iguais, conforme mostra a Figura 35.

Figura 35 – Resposta do sujeito S21 para a questão 6 do teste sobre triângulos.



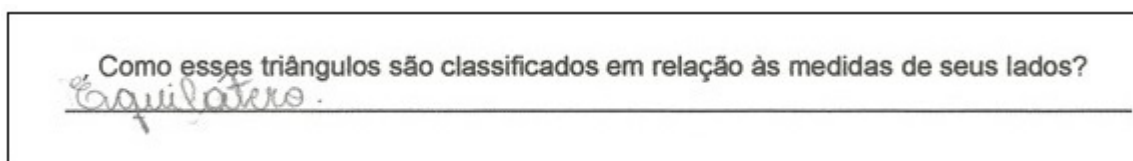
Fonte: Elaboração própria

Nenhum dos sujeitos da pesquisa ressaltou como característica comum que os ângulos internos têm medidas iguais.

Questão 7

Apenas três alunos acertaram a questão: dois afirmaram que os triângulos são equiláteros (Figura 36) e um escreveu que são isósceles. Vinte não responderam e os demais escreveram palavras sem sentido como, por exemplo: “perímetro”, “palitos”, “ângulos”, etc.

Figura 36 – Resposta do sujeito S2 para a questão 7 do teste sobre triângulos.



Fonte: Elaboração própria

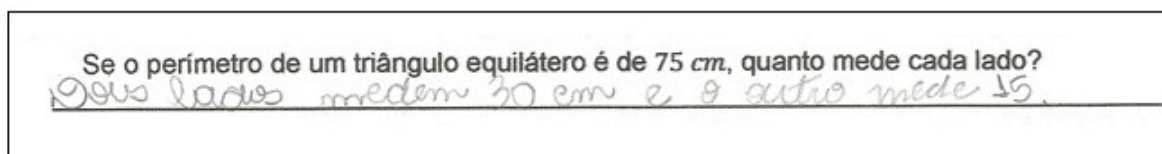
Questão 8

Os alunos ficaram muito incomodados com essa questão; pois, segundo eles, era impossível de ser respondida já que não havia nenhuma medida dos ângulos. Dessa forma, vinte e sete alunos não responderam. Entre os que tentaram responder, dois escreveram que cada ângulo mede 90° , um respondeu que mede 70° e, apenas dois alunos escreveram corretamente que os ângulos medem 60° cada. Porém, nenhum sujeito da pesquisa classificou os triângulos em relação aos ângulos, ou seja, nenhum deles atingiu o objetivo da questão.

Questão 9

Onze alunos responderam corretamente que os lados do triângulo medem 25 cm cada. Dois alunos escreveram que o triângulo possui dois lados medindo 30 cm e um lado de medida 15 cm, conforme mostra a Figura 37. Os demais alunos não souberam responder.

Figura 37 – Resposta do sujeito S2 para a questão 9 do teste sobre triângulos.

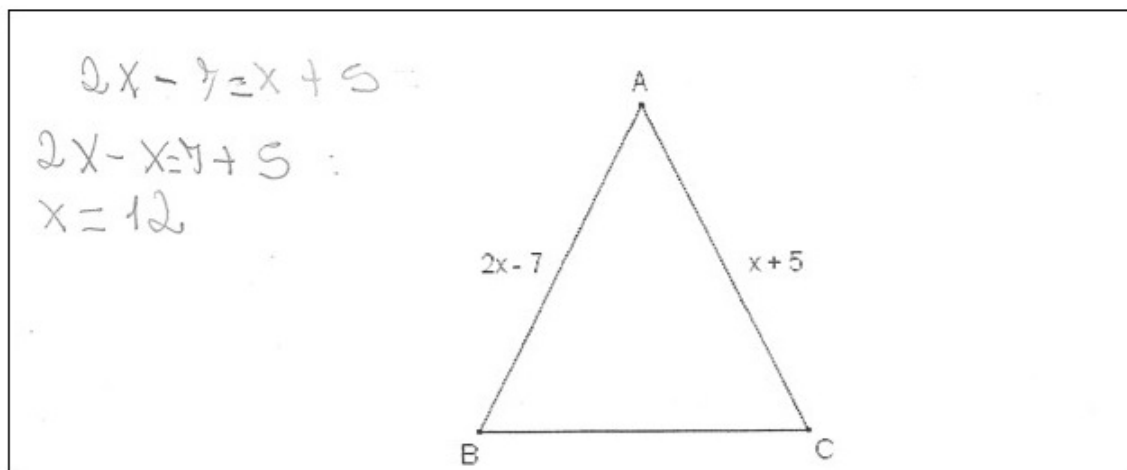


Fonte: Elaboração própria

Questão 10

Nessa questão, o aluno precisava conhecer a definição de triângulos isósceles e resolver a equação formada. Apenas dois alunos acertaram completamente a questão (Figura 38). Onze tentaram resolver mas erraram ou na montagem da equação ou na resolução da mesma. Vinte e dois não resolveram.

Figura 38 – Resposta do sujeito S8 para a questão 10 do teste sobre triângulos.

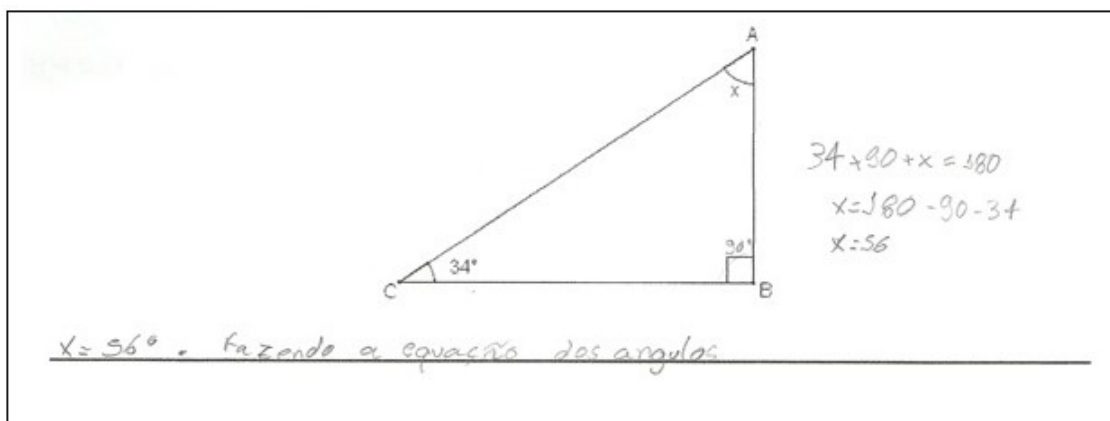


Fonte: Elaboração própria

Questão 11

Vinte e dois alunos não responderam à questão. Apenas cinco responderam corretamente o valor do ângulo; mas, ao justificarem, como encontraram o valor usaram frases muito vagas do tipo: “Fazendo as contas”, “Escrevendo e resolvendo a equação”, como pode ser observado na Figura 39. Os demais sujeitos da pesquisa atribuíram valores quaisquer para o ângulo como, por exemplo: 34° , 90° , 124° , etc.

Figura 39 – Resposta do sujeito S14 para a questão 11 do teste sobre triângulos.

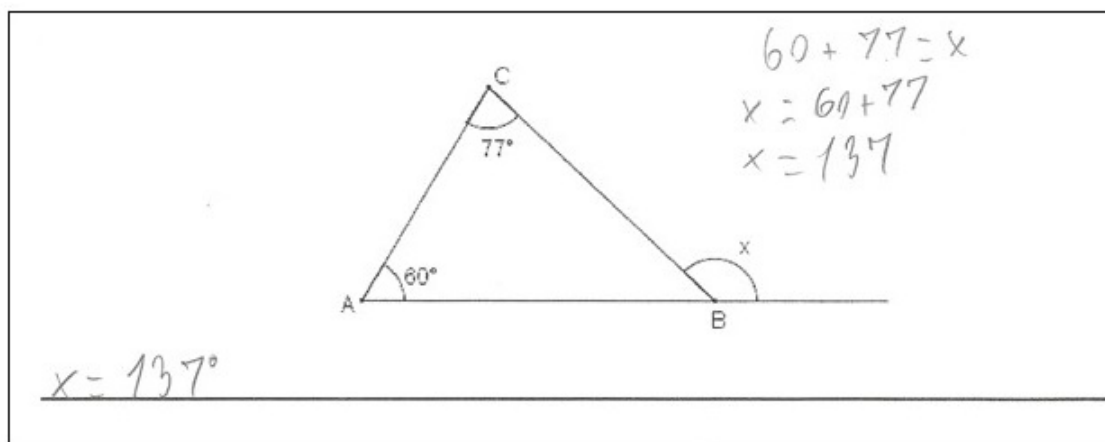


Fonte: Elaboração própria

Questão 12

Seis alunos acertaram a questão como pode ser observado na Figura 40 e os demais sujeitos da pesquisa não responderam.

Figura 40 – Resposta do sujeito S27 para a questão 12 do teste sobre triângulos.



Fonte: Elaboração própria

Questão 13

Apenas três alunos acertaram o valor da medida do segmento, porém nenhum deles conseguiu identificar o caso que garantia a congruência dos triângulos. Todos os demais alunos não responderam à questão. Dessa forma, nenhum sujeito da pesquisa atingiu o objetivo da mesma.

5.2.1 Conclusões da Aplicação do Teste sobre Triângulos

Após a análise dos dados sobre a aplicação desse teste, percebe-se que os sujeitos da pesquisa mostraram interesse em resolver as questões, mas apresentaram muita dificuldade na resolução destas.

Como o objetivo desse instrumento era investigar o conhecimento geométrico de cada aluno em relação aos conceitos sobre triângulos; conclui-se que o conhecimento destes é muito baixo para esse tópico.

Uma análise mais aprofundada será realizada após o término da pesquisa, depois da reaplicação desse mesmo teste, pois a comparação entre os dois resultados será imprescindível para concluir se houve avanço na aprendizagem sobre triângulos, à luz da teoria de van Hiele.

5.3 Intervenção Pedagógica

Após a aplicação do teste de van Hiele e do teste sobre triângulos, foi realizada uma intervenção pedagógica com atividades que favoreçam o desenvolvimento de habilidades e competências, buscando promover o avanço na aprendizagem dos conceitos sobre triângulos pelos sujeitos da pesquisa. Tais atividades estão em consonância com as fases de aprendizagem propostas por van Hiele, pois, segundo ele, o aluno precisa ser estimulado por determinadas atividades que propiciem esta aprendizagem. As referidas fases de aprendizagem são passos que o professor deve seguir para garantir a aprendizagem (CROWLEY, 1996).

Foram realizados 8 encontros que duraram em média 90 minutos cada. É importante ressaltar que em todas as atividades desenvolvidas buscou-se priorizar o uso de materiais manipuláveis com o objetivo de tornar o trabalho mais dinâmico e a aprendizagem mais significativa.

5.3.1 Atividade I - Observando formas triangulares

A seguir, é descrita e analisada a aplicação da Atividade I. Esta atividade se enquadra na primeira fase de aprendizagem da Teoria de van Hiele (Interrogação informada). Como os resultados da aplicação do teste de van Hiele mostraram que muitos alunos não haviam atingido nem mesmo o nível básico (visualização), esta primeira atividade tem como objetivo:

- desenvolver no educando a capacidade de percepção, visualização e reconhecimento de triângulos.

Segundo Janela (2012, p.36), “a percepção humana é muito visual, por isso o recurso a aspectos visuais e representações em tarefas matemáticas é natural e é uma parte integrante do desenvolvimento dessas tarefas”.

Inicialmente, os alunos foram convidados a observar imagens de diferentes obras de arte, retratadas na Figura 41. Por meio de indagações feitas pela professora, os alunos

concluíram que em todas as obras de arte observavam a presença de triângulos. Ainda, destacaram semelhanças e diferenças entre os triângulos visualizados.

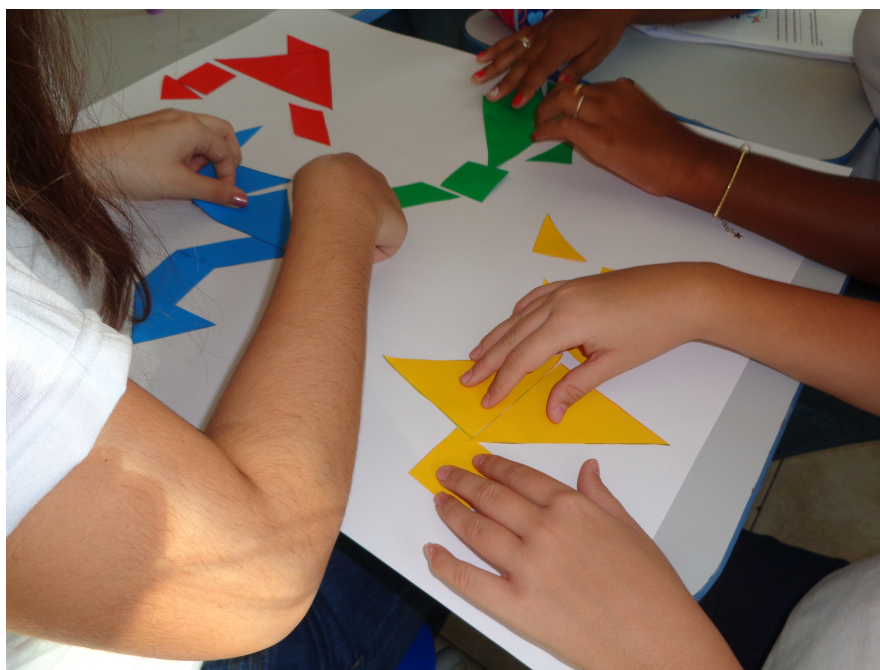
Figura 41 – Imagens de obras de arte.



Fonte: Elaboração própria

Em seguida, receberam em papel colorido a reprodução de um tangram, recortaram suas peças e a partir delas criaram desenhos variados, montando diversos painéis como o apresentado na Figura 42. Não era difícil perceber que a forma geométrica que mais se destacava nos painéis eram os triângulos, uma vez que, das sete peças do tangram, cinco são triângulos.

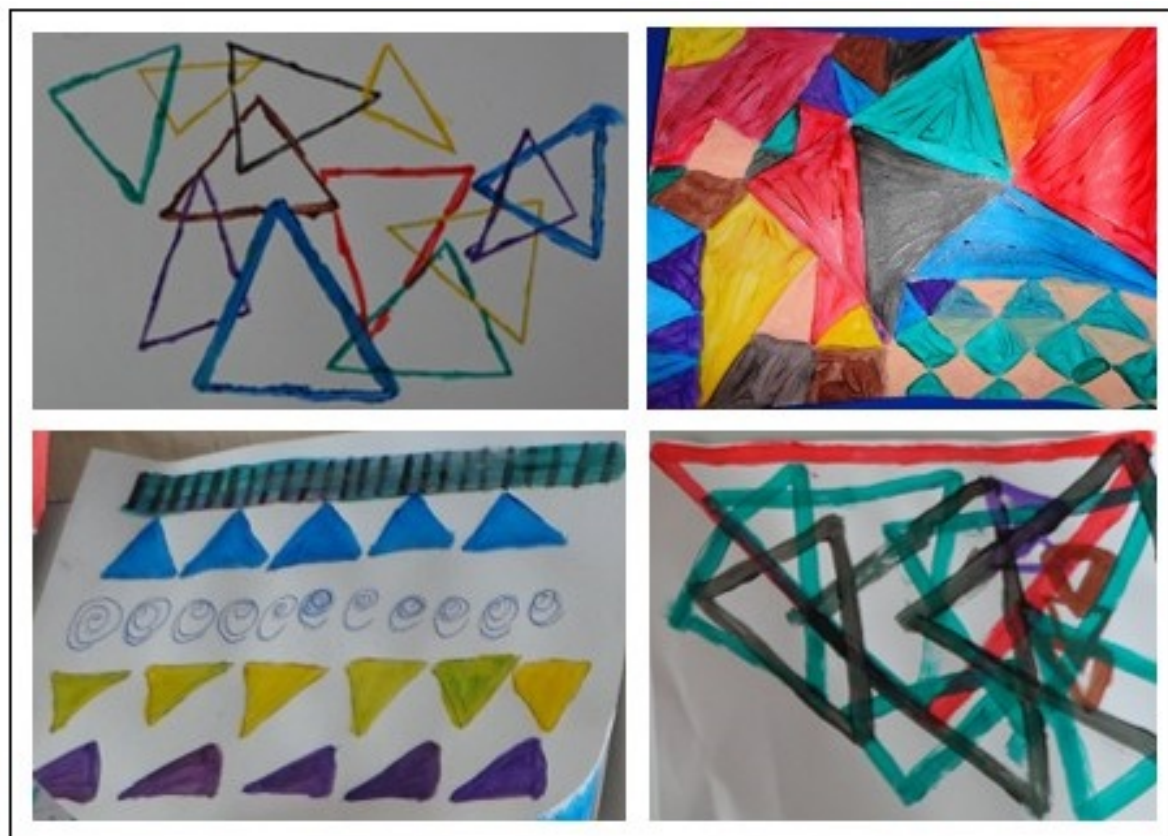
Figura 42 – Alunos montando figuras com as peças do tangram.



Fonte: Elaboração própria

Para encerrar o encontro, os alunos foram desafiados a fazer suas próprias obras de arte. Foi um momento muito divertido, em que cada aluno pode expressar sua criatividade e imaginação. Alguns desses desenhos estão reproduzidos na Figura 43.

Figura 43 – Pinturas feitas pelos alunos.



Fonte: Elaboração própria

5.3.2 Atividade II - Rigidez triangular

Este item descreve e analisa a aplicação da Atividade II, que tem como objetivo:

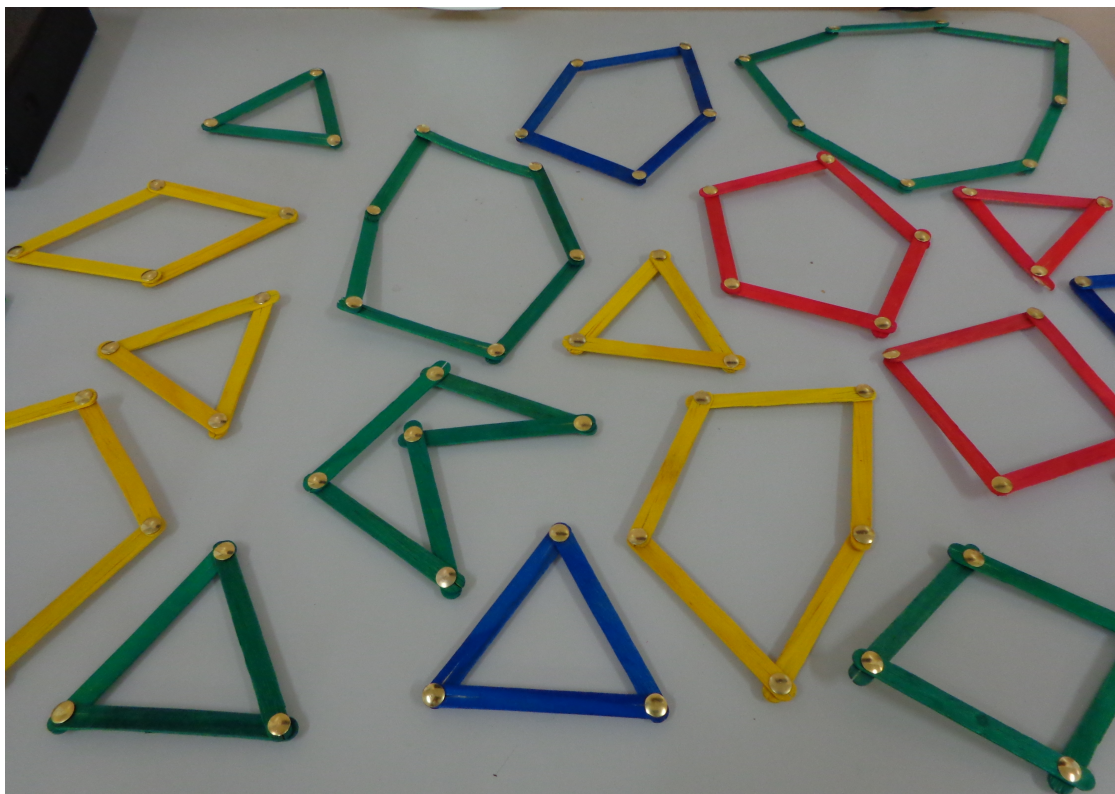
- facilitar a percepção do fato que o triângulo é o único polígono que tem rigidez e que as inúmeras aplicações práticas dessa forma geométrica se deve a esta propriedade.

Esta atividade está em consonância com as duas primeiras fases de aprendizagem da teoria de van Hiele: interrogação informada e orientação dirigida.

Com a supervisão e orientação da professora, os alunos usaram palitos de sorvete e percevejos e construíram polígonos variados: triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc. Pressionando os vértices desses polígonos, os sujeitos da pesquisa perceberam que com exceção do triângulo, todos os demais polígonos são deformáveis, não têm rigidez. O polígono de quatro lados pode ser um quadrado que se transforma num losango. O de cinco

lados pode ser um pentágono regular, que se torna não regular e depois pode ficar não convexo (Figura 44).

Figura 44 – Polígonos construídos com palitos.



Fonte: Elaboração própria

A rigidez do triângulo de palitos tem a ver com a propriedade: os três lados determinam um triângulo. Ao passo que um polígono com quatro lados ou mais não fica determinado apenas pelos seus lados.

Usando esse material simples, foi possível explorar muitas ideias interessantes. Os alunos ficaram muito empolgados e acharam a aula muito divertida, o que reforça a afirmação de Pais (2006) que o uso de material concreto propicia aulas mais dinâmicas.

Na questão 2, os alunos foram desafiados a observar imagens de diferentes objetos e construções e concluíram que, em todas as imagens, o triângulo estava sendo usado para garantir estabilidade. Todas as observações e conclusões eram registradas nas folhas de tarefas.

E, em seguida, usando a câmera do celular, capturaram imagens de triângulos em construções diversas. Algumas das fotos estão reproduzidas na Figura 45. Nessa etapa da intervenção pedagógica, os alunos já identificam triângulos e reconhecem sua aplicabilidade para sustentação em virtude da rigidez que apresentam.

Figura 45 – Fotos tiradas pelos alunos.



Fonte: Elaboração própria

5.3.3 Atividade III - Desigualdade triangular e construção com régua e compasso

Este item descreve e analisa a aplicação da Atividade III, que tem como objetivo:

- levar o aluno a descobrir a condição de existência de um triângulo.

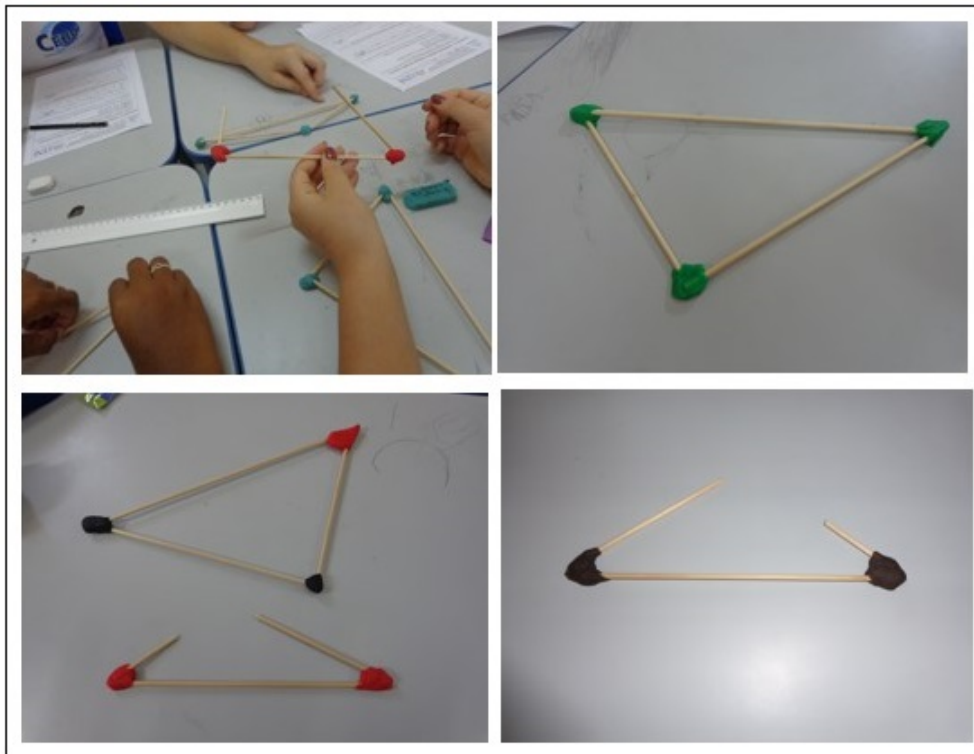
Esta atividade se enquadra na terceira fase de aprendizagem da teoria de van Hiele (Explicação); pois, seguindo Crowley (1996), nessa fase o papel do professor é de somente orientar os alunos. Estes, baseando-se em experiências anteriores, revelam seus pensamentos e modificam seus pontos de vista.

Os alunos foram dispostos em grupos e receberam os palitos de churrasco com tamanhos determinados como descritos na questão 1 da folha de tarefas. Por meio de uma conversa entre professora e alunos, estes expressaram que em todas as tentativas seria possível construir os triângulos.

Iniciaram as construções usando os palitos e massa de modelar, conforme Figura 46 e, ficaram curiosos ao perceberem que nem sempre era possível formar o triângulo desejado. Começaram a perceber que havia uma relação entre os lados de um triângulo, mas não a conseguiam identificar. Todas essas observação eram registradas na folha de tarefas.

Após essas construções, os alunos foram orientados a completarem a tabela representada na Figura 47; na qual, as medidas a , b e c são os comprimentos dos lados dos triângulos. A linguagem simbólica começa a ser usada, porém, observa-se uma certa resistência por parte dos alunos.

Figura 46 – Triângulos construídos com palitos e massa de modelar.



Fonte: Elaboração própria

Figura 47 – Relação entre os lados de um triângulo.

TENTATIVA	LADO a	b + c	LADO b	a + c	LADO c	a + b	FORMA TRIÂNGULO	
							SIM	NÃO
1ª								
2ª								
3ª								
4ª								

Fonte: Elaboração própria

Após a observação dos dados da tabela, os alunos concluíram a condição de existência de um triângulo (Figura 48).

Figura 48 – Conclusões do sujeito S1 sobre a condição de existência de um triângulo.

e) Após completar esta tabela, podemos observar que existe uma relação entre as medidas dos lados para que seja possível a construção de um triângulo. Qual é esta relação?
Cada lado deve ser menor que a soma dos outros dois lados. $a < b + c$

Fonte: Elaboração própria

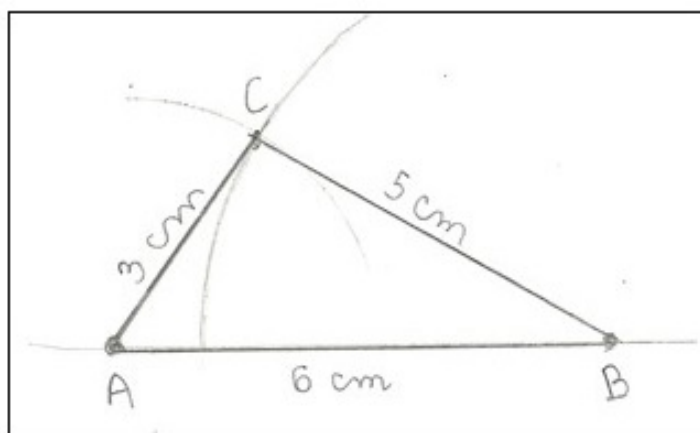
Em seguida, foi proposta a construção de triângulos, usando régua e compasso numa tentativa de dar subsídios aos alunos para a compreensão das condições que determinam a existência de um triângulo: a relação entre as medidas dos lados. As instruções da folha

de tarefas deveriam ser seguidas, tais como estão descritas abaixo:

- Desenhe uma reta r qualquer e, sobre ela, marque o ponto A. Com a ponta-seca do compasso em A e abertura igual à medida de \overline{AB} , trace um arco e marque o ponto B sobre a reta r .
- Com a ponta-seca do compasso no ponto B e abertura igual à medida de \overline{BC} , trace um arco.
- Com a ponta-seca do compasso em A e abertura igual à medida de \overline{AC} , trace um arco intersectando o primeiro arco traçado e marque o ponto C.
- Traçando os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , construímos o triângulo ABC.

Como era a primeira vez que os alunos usavam o compasso, tiveram muita dificuldade na construção do primeiro triângulo. Mas, a partir da segunda construção, a maioria conseguiu desenhar os triângulos sem ajuda. A Figura 49 mostra um triângulo construído por uma aluna.

Figura 49 – Triângulo desenhado pelo sujeito S23.



Fonte: Elaboração própria

5.3.4 Atividade IV - Classificação dos triângulos quanto aos lados

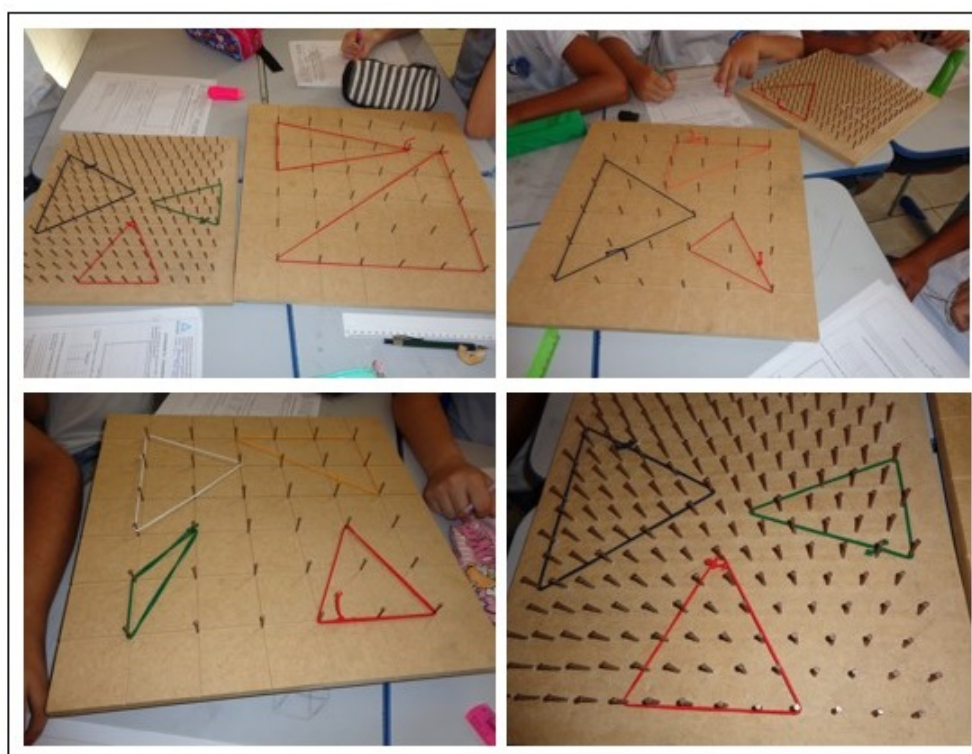
Este item descreve e analisa a aplicação da Atividade IV, cujos objetivos são:

- construir triângulos no geoplano;
- sistematizar a classificação dos triângulos em relação às medidas de seus lados;
- construir o conceito de perímetro de um triângulo;
- calcular o perímetro de um triângulo.

Assim como a anterior, esta atividade refere-se à fase de explicação da teoria de van Hiele.

Inicialmente, os alunos se organizaram em quatro grupos e, usando os geoplanos quadrangular e triangular, construíram diferentes tipos de triângulos, conforme Figura 50.

Figura 50 – Alunos construindo triângulos no geoplano.



Fonte: Elaboração própria

Como dito anteriormente, o geoplano é um material didático concreto que possibilita aos alunos uma melhor visualização das formas de figuras planas, como também auxilia nos cálculos de áreas e de perímetros de diversos tipos de polígonos, permitindo uma participação ativa dos alunos (COSTA; PEREIRA; MAFRA, 2011).

Ao visualizar os triângulos construídos, os alunos puderam perceber que nem todos eram iguais. Dessa forma, poderiam separá-los em grupos de acordo com as características comuns e, assim, poderiam classificá-los. Usando régua, mediram os lados de cada triângulo e identificaram os três casos que podem ocorrer em relação às medidas dos lados de um triângulo. As observações iam sendo registradas na folha de tarefas na qual, também, constava a definição abaixo.

Um triângulo ABC é denominado:

- equilátero, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$;
- isósceles, se ao menos dois dentre \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} forem iguais;

- escaleno, se $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$;

Após ser-lhes apresentada a definição de perímetro, os alunos completaram a tabela com os valores do perímetro de cada triângulo construído inicialmente nos geoplanos. Em seguida, realizaram as demais atividades da folha de tarefas. Dada a sua importância, nesse momento, é retomada a construção com régua e compasso pois, segundo Putnoki (2013, p. 369), não podemos abrir “mão de ferramentas cujo alcance didático é inesgotável”

5.3.5 Atividade V - Congruência de triângulos

Este item descreve e analisa a aplicação da Atividade V. Esta atividade está de acordo com a quarta fase de aprendizagem segundo a teoria de van Hiele (Orientação livre). Nesse momento, diante de tarefas mais complexas, os alunos procuram soluções próprias que podem ser concluídas de maneiras diferentes. Assim, eles ganham experiência ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas (CROWLEY, 1996). Os objetivos desta atividade são:

- comprovar a congruência de triângulos em situações do mundo físico;
- perceber quando dois triângulos são congruentes;
- identificar os casos de congruência de triângulos.

Em geral, os alunos apresentam muita dificuldade na compreensão dos casos de congruência e na sua aplicação para resolver os exercícios que exijam justificativas e demonstrações. Essas dificuldades podem ser explicadas pelo fato de que este tipo de exercício exige raciocínio no nível 3 de van Hiele (Dedução formal), enquanto a maioria dos alunos do 8º ano atingiu, no máximo, o nível 1 (Análise)(NASSER; LOPES, 1996).

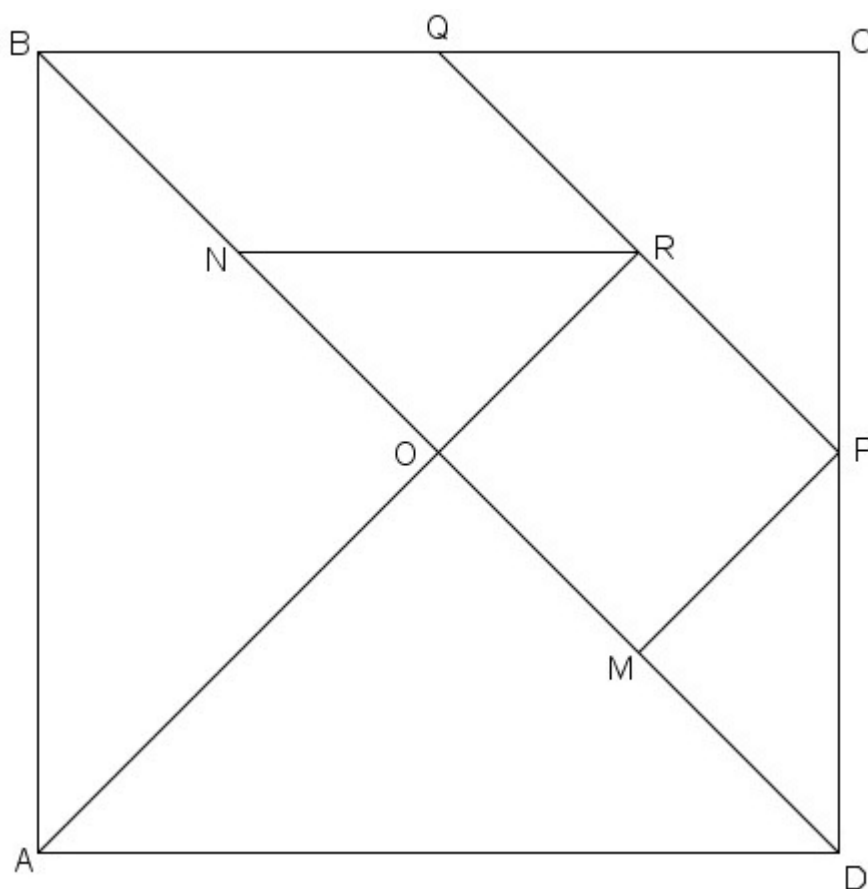
Dessa forma, as demonstrações envolvendo os casos de congruência serão evitadas nessa abordagem. Assim, a definição de congruência e a conclusão sobre os casos de congruência nos triângulos serão trabalhadas através da justaposição de figuras e com auxílio de régua e transferidor para a medição de lados e ângulos.

Ao iniciar a aula, os alunos receberam as folhas de tarefas e, seguindo as instruções descritas, construíram o tangram (Figura 51).

- Construa um quadrado de lado 15cm e nomeie seus vértices ($ABCD$);
- trace a diagonal \overline{AB} ;
- marque o ponto médio nessa diagonal e o nomeie (ponto médio O);
- trace uma perpendicular a \overline{DB} , passando pelos pontos O e A ;

- marque os pontos médios de \overline{DO} (ponto médio M) e de \overline{OB} (ponto médio N);
- marque os pontos médios de \overline{DC} (ponto médio P) e de \overline{CB} (ponto médio Q);
- trace o segmento \overline{PQ} , marque o seu ponto médio e o nomeie (ponto médio R);
- trace os segmentos \overline{PM} , \overline{OR} e \overline{NR} .

Figura 51 – Tangram.



Fonte: Elaboração própria

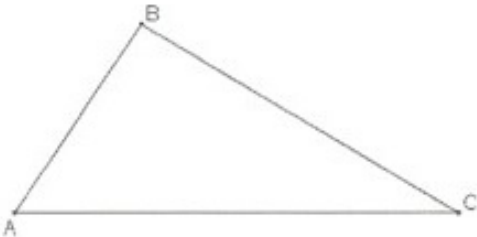
Recortando as peças e fazendo a sobreposição das mesmas, responderam aos itens da questão 1 proposta nas folhas de tarefas.

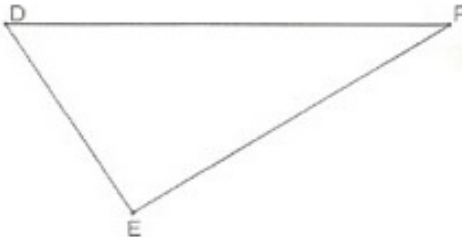
Em seguida, os alunos usaram régua e transferidor e fizeram as medições dos lados e ângulos dos triângulos ABC e DEF , completando as tabelas conforme reproduzidas na Figura 52.

Ao realizar essa tarefa, foi possível verificar que as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo são as mesmas dos lados e dos ângulos do outro e, também, que ao recortá-los e fazer a justaposição, os vértices de um coincidiam com os vértices do outro. Dessa forma, os alunos concluíram que os triângulos eram congruentes.

Figura 52 – Resposta do sujeito S13 para a questão 2 da Atividade V.

2. Com a ajuda de uma régua e um transferidor, preencha as tabelas relacionadas aos triângulos abaixo:





Triângulo ABC	
Medida de \overline{AB}	3,2 cm
Medida de \overline{BC}	6 cm
Medida de \overline{CA}	7,2 cm
Medida de \widehat{CAB}	56°
Medida de \widehat{ABC}	93°
Medida de \widehat{BCA}	31°

Triângulo DEF	
Medida de \overline{DE}	3,2 cm
Medida de \overline{EF}	6 cm
Medida de \overline{FD}	7,2 cm
Medida de \widehat{FDE}	56°
Medida de \widehat{DEF}	93°
Medida de \widehat{EFD}	31°

a) O que se pode afirmar sobre os lados do ΔABC e do ΔDEF ?

Os lados não são congruentes

b) E sobre os ângulos?

Eles também são iguais

Fonte: Elaboração própria

A questão 3 afirmava que nem sempre é possível recortar as figuras e usar a sobreposição para verificar se dois triângulos são congruentes. Para tanto, o conhecimento das medidas dos lados e dos ângulos desses triângulos torna-se necessário para a verificação da congruência. Por outro lado, não é necessário conhecer todas essas medidas.

A partir desse momento, os alunos foram seguindo as orientações da folhas de tarefas e deduzindo os casos de congruência. Usavam os instrumentos de medida (régua e transferidor) e recortavam os triângulos para confirmar a congruência. Ao chegarem à questão de número 5, a qual exigia o reconhecimento de triângulos congruentes através da identificação de um dos casos de congruência, a maioria dos alunos não apresentou dúvidas, mostrando que assimilaram o conceito de congruência, bem como, a identificação dos casos.

Quando se depararam com o desafio, ficaram um pouco intrigados, mas logo conseguiram decifrar o enigma usando, para isso, moedas que haviam sido levadas pela professora, conforme a Figura 53.

Figura 53 – Alunos resolvendo o desafio usando moedas.



Fonte: Elaboração própria

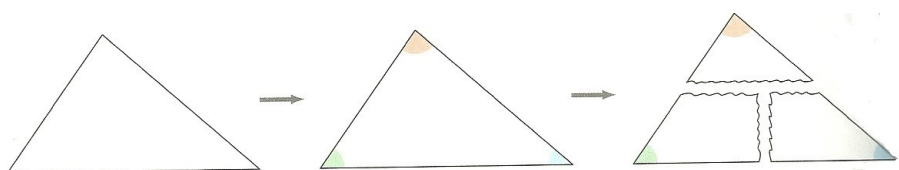
5.3.6 Atividade VI - Soma dos ângulos internos de um triângulo

Este item descreve e analisa a aplicação da Atividade VI. Esta atividade está de acordo com a quarta fase de aprendizagem segundo a teoria de van Hiele. Tem como objetivos:

- construir um procedimento para deduzir a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo;
- determinar a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

Iniciando a aula, foi proposto que os alunos desenhassem um triângulo qualquer, destacassem os ângulos internos com lápis colorido e, em seguida, rasgassem o triângulo em três partes, conforme a Figura 54.

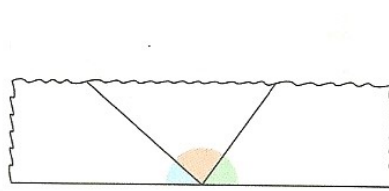
Figura 54 – Ângulos de um triângulo.



Fonte: (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p. 104)

Em seguida, foi solicitado que os alunos deslocassem os três pedaços e os juntassem de modo a obter três ângulos adjacentes e consecutivos, conforme a Figura 55.

Figura 55 – Ângulos de um triângulo.



Fonte: (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2005, p. 104)

Realizando todas as etapas propostas anteriormente (Figura 56), os alunos perceberam que o ângulo formado era um ângulo raso, ou seja, de 180° .

Figura 56 – Alunos observando a soma dos ângulos internos do triângulo.

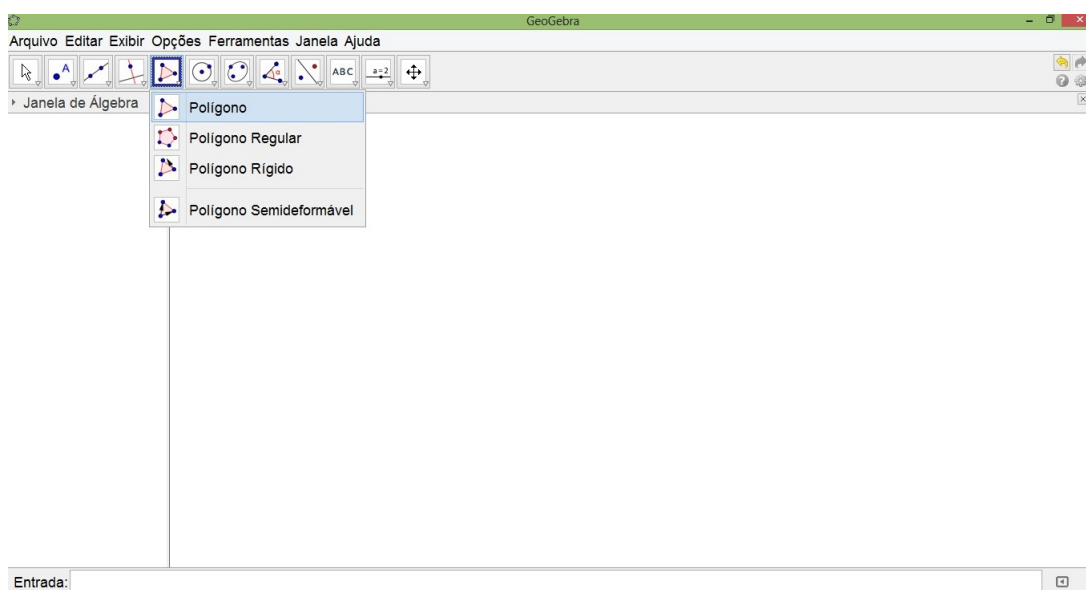


Fonte: Elaboração própria

Seguidamente, os alunos, trabalhando em duplas, abriram o Geogebra instalado nos computadores do laboratório de informática da escola. Foi a primeira vez que utilizaram esse programa de geometria dinâmica, por isso apresentaram muita dificuldade na utilização dos comandos.

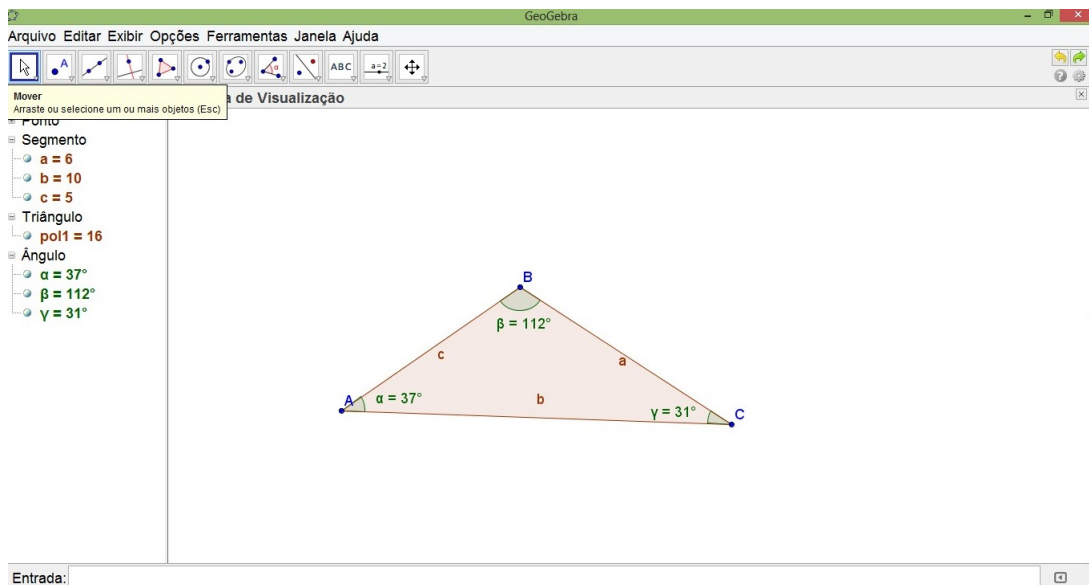
Acompanhando as sugestões da folha de tarefas, escolheram a opção do menu Polígono para construir o triângulo (Figura 57) e visualizaram as medidas dos ângulos internos (Figura 58).

Figura 57 – Construção de triângulos no Geogebra.



Fonte: Elaboração própria

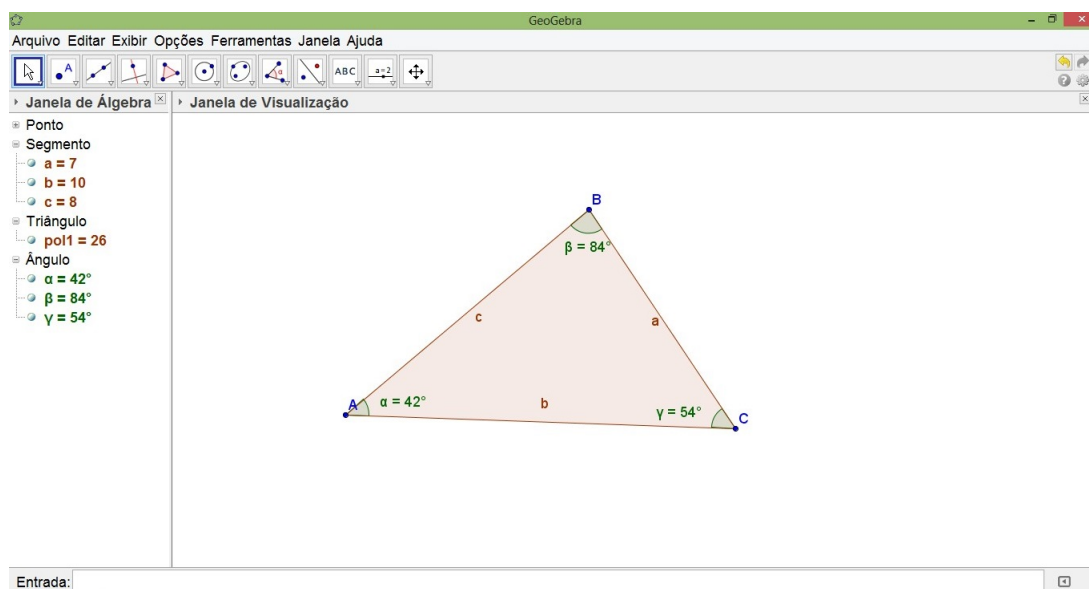
Figura 58 – Visualização dos ângulos internos de um triângulo no Geogebra.



Fonte: Elaboração própria

Na construção do triângulo, a maioria dos alunos optou por fazer como estava no enunciado, ou seja, por construir um triângulo e arrastar um dos vértices para obter um outro triângulo (Figura 59).

Figura 59 – Soma dos ângulos internos de um triângulo no Geogebra.



Fonte: Elaboração própria

Facilmente, os alunos concluíram que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , como se constata pelas descrições das conclusões elaboradas pelos alunos, conforme mostra a Figura 60. Na terceira questão, os alunos registraram a que conclusão tinham chegado após as experiências I e II.

Figura 60 – Conclusões de um aluno sobre os ângulos internos de um triângulo.

<p>Q que acontece com as medidas dos ângulos e com a respectiva soma? <u>As medidas mudariam. Mas a soma dos ângulos continua 180°</u></p> <p>e) Arraste novamente um vértice qualquer do triângulo. Some as medidas dos ângulos internos. Compare esta nova soma com as anteriores. <u>A soma continua 180°</u></p> <p>3. Após realizar as duas experiências, a que conclusão você chega? <u>Que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.</u></p>
--

Fonte: Elaboração própria

Foi pedido, então, a vários alunos que explicassem as suas conclusões. Desta discussão, em consequência do que os alunos tinham observado durante a resolução da atividade, resultou a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo.

5.3.7 Atividade VII - Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Este item descreve e analisa a aplicação da Atividade VII, cujos objetivos são:

- vivenciar a construção de um fractal geométrico, percebendo regularidades;
- construir triângulos no geoplano;
- classificar os triângulos em relação aos ângulos.

Esta atividade também está de acordo com a quarta fase de aprendizagem segundo a teoria de van Hiele.

A aula se iniciou com uma conversa sobre os fractais. Essas formas possuem características especiais, como a simplicidade em sua lei de formação, a construção por processos recorrentes e a autossimilaridade, sendo esta a principal delas, uma vez que constituem uma imagem de si próprias em cada uma das partes. (JELINEK; KAMPFF, 2009)

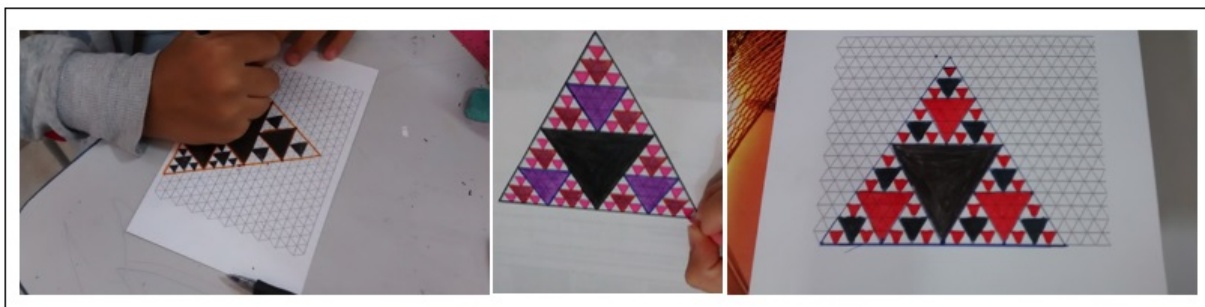
Os alunos receberam a folha de tarefas e, seguindo as instruções, construíram o fractal - Triângulo de Sierpinski.

- Construa na malha triangular um triângulo equilátero de lado 16.
- Marque o ponto médio de cada um de seus lados.
- Construa segmentos unindo esses pontos médios.
- Quantos triângulos você possui agora?

- Para cada triângulo, exceto o do centro da figura, marque o ponto médio de cada um de seus lados e construa segmentos unindo esses pontos médios.
- Repita a operação quantas vezes o desenho permitir.

Inicialmente, alguns tiveram muita dificuldade, errando o padrão diversas vezes. Por fim, todos realizaram a tarefa e ficaram impressionados com o resultado. Alguns podem ser observados na Figura 61.

Figura 61 – Alunos desenhando Fractais - Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Elaboração própria

Em seguida, os alunos começaram a ser instigados sobre as características dos lados e ângulos dos triângulos que visualizavam. Todas as observações eram registradas na folha de tarefas. Assim, perceberam que os triângulos podem ser classificados, também, em relação aos seus ângulos e, que levando-se em consideração que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180° , podem ocorrer as seguintes situações:

- os três ângulos são agudos; então, o triângulo é acutângulo;
- um dos ângulos é reto; nesse caso, o triângulo é retângulo;
- um dos ângulos é obtuso; temos, então, um triângulo obtusângulo.

Em um segundo momento, os alunos construíram diferentes triângulos usando os geoplanos e os classificaram em relação às medidas de seus ângulos.

Na última questão, quando foi pedido para mostrar que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, os alunos puderam constatar que essa relação entre os elementos citados é justificada com a aplicação imediata dos casos de congruência.

5.3.8 Atividade VIII - Ângulos externos de um triângulo

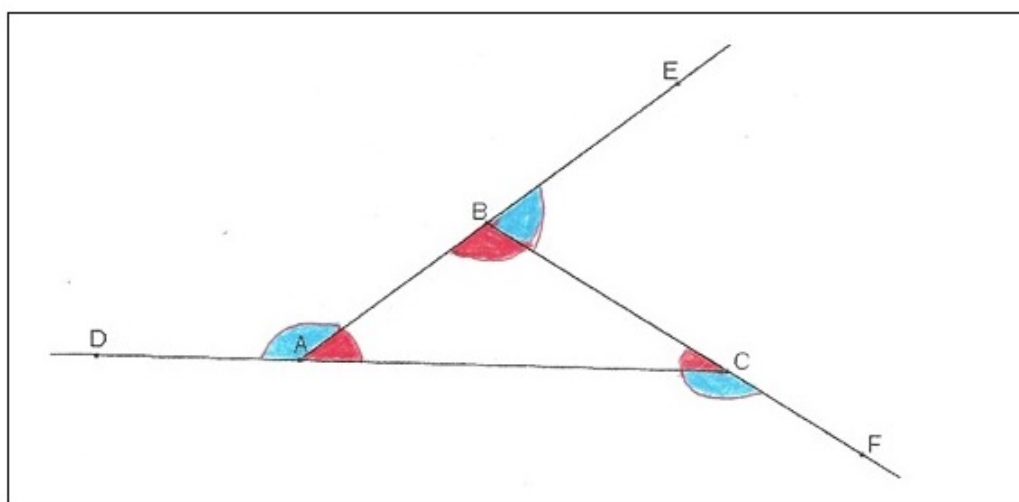
Este item descreve e analisa a aplicação da última atividade da intervenção pedagógica proposta, cujos objetivos são:

- deduzir a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo;
- determinar a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo qualquer;
- deduzir o teorema do ângulo externo.

Esta atividade está de acordo com a quinta fase de aprendizagem da teoria de van Hiele (Integração). A linguagem simbólica foi muito utilizada e, também, as generalizações e demonstrações. Segundo Crowley (1996), nesta fase, o aluno relê e resume o que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações.

Inicialmente, os alunos foram interrogados sobre a figura que visualizavam na folha de tarefas. Em seguida, foram orientados a pintarem os ângulos do triângulo conforme estava sendo pedido na questão 1 (Figura 62).

Figura 62 – Ângulos internos e externos de um triângulo pintados por um aluno.



Fonte: Elaboração própria

À medida que iam lendo os itens da questão 1, os alunos concluíram que a relação entre o ângulo vermelho e o ângulo azul era que a soma deles formava um ângulo raso, ou seja, igual a 180° . Efetuaram a soma pedida no item c e conseguiram verificar que eram três ângulos rasos, ou seja, 540° e, que subtraindo a soma dos ângulos internos do triângulo, obtinham 360° ; conforme item d retratado na Figura 63, conseguindo assim deduzir que em qualquer triângulo a soma dos ângulos externos é sempre igual a 360° .

Figura 63 – Conclusões de um aluno sobre os ângulos externos de um triângulo.

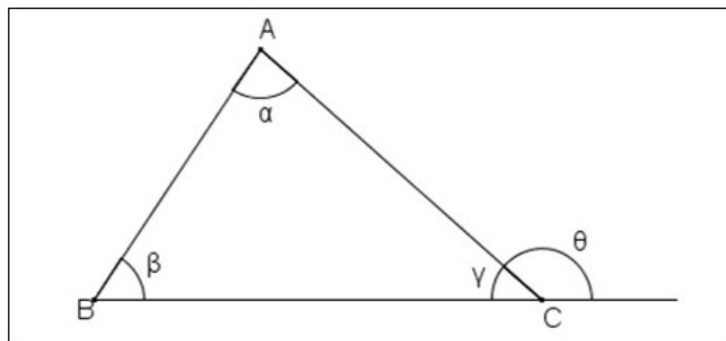
d) Sabendo que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° , é possível saber o valor da soma dos ângulos externos desse triângulo? Como?

Sim. Basta fazer $540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$

Fonte: Elaboração própria

Na segunda questão, os alunos observaram os ângulos assinalados (Figura 64) e, na folha de tarefas, foram anotando as relações entre esses ângulos.

Figura 64 – Teorema do ângulo externo de um triângulo.



Fonte: Elaboração própria

No item c, chegaram à igualdade:

$$\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \theta$$

$$\alpha + \beta = \gamma + \theta - \gamma$$

$$\alpha + \beta = \theta$$

Por fim, puderam sintetizar suas ideias e concluíram que a medida de qualquer ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele. Esse teorema é conhecido como o teorema do ângulo externo.

5.3.9 Conclusões da Intervenção Pedagógica

Em todas as atividades desenvolvidas, a pesquisadora observou que os alunos demonstraram interesse na realização das mesmas. Percebeu-se que o envolvimento deles se deveu às tarefas em si e à sua concretização na sala de aula e não apenas ao uso dos materiais manipuláveis usados. Os alunos viram esses materiais como ferramentas facilitadoras, as quais se tornaram parte integrante da sua atividade. Reconheceram o seu valor porque os ajudou, através da experimentação, a descobrir as propriedades e as relações dos triângulos, de um modo que não seria possível apenas com o lápis e papel.

A organização das tarefas, pela sua estruturação e coerência, associada à dinâmica de sala de aula, foi determinante para o empenho e envolvimento dos alunos.

Outro fator determinante para o sucesso da intervenção pedagógica, foi o fato de as atividades terem sido preparadas de acordo com o nível de raciocínio geométrico dos alunos. Como já visto, (CROWLEY, 1996) afirma que o professor e o aluno precisam raciocinar em um mesmo nível, caso contrário, o aprendizado não ocorre. Ou seja, professor, material didático, conteúdo e vocabulário devem estar compatíveis com o nível do aluno.

5.4 Reaplicação do Teste sobre Triângulos

Este item descreve e analisa a reaplicação do teste sobre Triângulos, o qual objetiva:

- investigar se, de fato, as atividades propostas e realizadas na intervenção pedagógica, contribuíram para a aprendizagem dos conceitos sobre triângulos.

Após a intervenção pedagógica, os sujeitos da pesquisa foram submetidos novamente ao teste sobre triângulos. Este instrumento foi aplicado no dia 30/04/15 com a participação de todos os 35 alunos. Como dito anteriormente, este teste foi elaborado pela pesquisadora e a proposta para a sua aplicação neste momento era comprovar se as atividades desenvolvidas contribuíram para a aprendizagem dos conceitos sobre triângulos.

5.4.1 Conclusões da Reaplicação do Teste sobre Triângulos

Finalizada a recolha de dados, é possível analisar, quantitativamente, os resultados obtidos por meio da intervenção pedagógica.

A Tabela 1 apresenta o percentual de acertos, por questão, na aplicação e na reaplicação do teste sobre triângulos.

Tabela 1 – Percentual de acertos no teste sobre triângulos

Questões	Aplicação	Reaplicação
01	77%	100%
02	6%	51%
03	0%	91%
04	3%	71%
05	0%	66%
06	23%	97%
07	6%	83%
08	0%	80%
09	31%	66%
10	6%	54%
11	14%	69%
12	17%	60%
13	0%	51%

Fonte: Elaboração própria

Pelos dados expostos, observa-se aumento significativo no percentual de acertos, em cada questão, na reaplicação do teste. Isso mostra que uma sequência organizada de tarefas e a maneira como estas foram desenvolvidas através da intervenção pedagógica com uso de materiais manipuláveis foram fundamentais para a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos.

No quadro 5.3, observam-se os acertos, por sujeito da pesquisa, na aplicação do teste sobre triângulos e, também, na reaplicação deste mesmo teste. Concluindo, portanto, que todos os 35 sujeitos da pesquisa apresentaram avanço no que se refere aos conceitos relativos aos triângulos após a intervenção pedagógica.

Quadro 5.3 – Acertos de cada sujeito da pesquisa na aplicação e na reaplicação do teste sobre triângulos

Questões/ Sujeitos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Avanço
S1	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	SIM
S2	x/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	x/x	-/x	-/-	-/-	-/-	-/-	-/-	SIM
S3	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	x/x	-/x	SIM
S4	x/x	x/-	-/-	-/x	-/x	-/x	-/-	-/-	-/x	-/-	-/x	-/-	-/-	SIM
S5	-/x	-/-	-/x	-/-	-/-	-/x	-/x	-/x	-/-	-/-	-/-	-/-	-/-	SIM
S6	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	SIM
S7	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/-	-/-	-/-	SIM
S8	x/x	-/-	-/x	-/-	-/x	-/x	-/-	-/x	-/-	x/-	-/-	x/-	-/x	SIM
S9	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	SIM
S10	-/x	-/-	-/-	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	SIM
S11	x/x	-/-	-/x	-/x	-/-	-/-	-/-	-/-	-/x	-/-	-/x	-/-	-/-	SIM
S12	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/-	-/-	-/x	-/-	-/-	-/-	-/-	SIM
S13	x/x	x/x	-/x	x/x	-/x	x/x	x/x	-/x	x/x	-/x	x/x	x/x	-/x	SIM
S14	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	x/x	-/x	x/x	x/x	-/x	SIM
S15	x/x	-/-	-/x	-/x	-/-	x/x	-/x	-/x	x/-	-/x	-/x	-/x	-/x	SIM
S16	x/x	-/-	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/-	SIM
S17	x/x	-/-	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/-	-/x	-/-	-/-	SIM
S18	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	SIM
S19	x/x	-/x	-/x	-/-	-/-	x/x	x/x	-/x	x/x	-/-	-/x	x/x	-/-	SIM
S20	x/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	x/x	x/x	-/x	-/x	-/x	SIM
S21	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	x/x	-/x	-/x	-/-	-/-	-/x	-/x	-/-	SIM
S22	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/-	-/-	-/-	-/x	-/-	-/-	-/x	SIM
S23	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	x/x	-/x	-/x	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	SIM
S24	-/x	-/x	-/-	-/-	-/x	-/x	-/-	-/x	-/-	-/-	-/-	-/-	-/-	SIM
S25	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	x/x	-/x	-/x	-/x	-/-	SIM
S26	x/x	-/x	-/x	-/-	-/x	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	SIM
S27	x/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	x/x	-/x	-/-	-/x	-/x	SIM
S28	-/x	-/-	-/x	-/-	-/x	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/-	SIM
S29	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	x/x	-/x	-/x	SIM
S30	x/x	-/x	-/x	-/-	-/-	x/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/-	-/x	-/-	SIM
S31	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/-	x/x	-/-	x/x	-/-	-/x	SIM
S32	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/x	x/x	-/x	SIM
S33	x/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/-	-/-	-/-	-/x	SIM
S34	x/x	-/-	-/x	-/x	-/-	-/x	-/x	-/x	x/x	-/-	-/-	-/x	-/-	SIM
S35	x/x	-/-	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	-/x	x/x	-/x	-/x	SIM

Fonte: Elaboração própria

Quadro 5.4 – Legenda do Quadro 5.3

x	Indica que o aluno acertou a questão.
-	Indica que o aluno errou a questão.
/	Indica separação entre aplicação e reaplicação do teste.

Fonte: Elaboração própria

Outro dado importante que foi verificado por meio dos dados obtidos é que o processo de intervenção não atingiu igualmente a todos os sujeitos, uma vez que o processo educativo é de grande complexidade.

A análise dos dados coletados para este trabalho representa uma contribuição para novos conhecimentos sobre o processo de ensino - aprendizagem de Geometria. Portanto, é importante que o professor busque formas eficazes para melhorar a aprendizagem, como por exemplo, o modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.

Considerações Finais

A Matemática está presente na vida de todos nós. É inquestionável sua importância e, também, sua necessidade enquanto disciplina da Educação Básica para a formação de um cidadão consciente. Por meio dela, compreendemos e transformamos o mundo em que vivemos. Uma das áreas mais antigas da Matemática é a Geometria, a qual foi utilizada pelas primeiras civilizações em atividades do dia a dia.

Nas décadas de 1960 e 1970, durante o Movimento da Matemática Moderna, acentuou-se o formalismo dessa disciplina. Pregava-se que os conteúdos deveriam ser apresentados enfatizando os axiomas, os conceitos fundamentais e o rigor nas demonstrações (ÁVILA, 2010). Os professores, não encontrando uma maneira de transmitir os conceitos geométricos segundo os critérios defendidos pelos modernistas, passaram a deixar de ensinar esses conceitos apoiados na LDB 5692/71 que lhes dava autonomia para que montassem seus próprios programas. Nesse contexto, ao revestir a Geometria de uma concepção voltada à linguagem, esta foi ficando em segundo plano nos currículos da Matemática (SOARES, 2001).

Em contrapartida a uma educação que tem negligenciado o ensino da Geometria, este trabalho trouxe à tona sua importância desde a Antiguidade quando da divisão de terras, na construção de objetos, nos monumentos a exemplo das pirâmides, entre outros; até os dias atuais, quando a Geometria se faz presente na arquitetura, nos objetos, nas brincadeiras, nas artes, etc.

Partindo do pressuposto que a aplicação da metodologia de ensino baseada na teoria de van Hiele é uma estratégia para a reversão da problemática no ensino da Geometria (NASSER, 1995); o presente trabalho apresentou uma sequência didática para o ensino de triângulos no 8º ano do Ensino Fundamental. Por meio da aplicação de testes, que buscavam investigar o nível de conhecimento geométrico dos sujeitos da pesquisa, e de uma intervenção pedagógica, constituída por atividades elaboradas de acordo com as fases de aprendizagem da teoria de van Hiele e realizadas com auxílio de materiais manipuláveis, buscou-se apresentar os conceitos sobre triângulos de forma dinâmica e com a participação direta dos sujeitos da pesquisa.

Mediante os resultados obtidos na reaplicação do teste sobre triângulos e a tudo que presenciei em sala de aula durante o processo investigativo, considero que o objetivo

do estudo foi alcançado, que era tornar significativa a aprendizagem dos conceitos sobre triângulos no Ensino Fundamental.

Sendo assim, pode-se responder à questão de pesquisa proposta, ou seja, pode-se afirmar que, por meio de atividades adequadas ao nível de raciocínio geométrico que os alunos se encontram, o uso de materiais manipuláveis aliado a uma sequência didática embasada na teoria de van Hiele contribuiu de forma significativa para a aprendizagem dos conceitos relativos aos triângulos no 8º ano do Ensino Fundamental. Destaca-se que o modelo de aprendizagem baseado na teoria de van Hiele foi de extrema importância, à medida que auxiliou na análise do nível de raciocínio geométrico dos sujeitos da pesquisa e norteou a elaboração de atividades, as quais estavam de acordo com as fases de aprendizagem da referida teoria.

Ainda, a experiência relatada neste trabalho nos apresenta a possibilidade de oferecer aos alunos do Ensino Fundamental uma aula mais dinâmica, em que possam participar mais ativamente de todo o processo de construção do conhecimento.

Assim, foi possível concluir que, no processo de ensino-aprendizagem, especificamente nos conceitos relativos aos triângulos, o uso de atividades e recursos adequados, favorecem o desenvolvimento de várias habilidades.

Muito ainda há de ser feito no tocante à aprendizagem em Geometria, pois esse estudo não esgotou o assunto. Outras pesquisas poderão ser realizadas buscando investigar o nível de raciocínio geométrico em alunos de outros anos de escolaridade, outras escolas, entre outros, oferecendo propostas de atividades adequadas ao nível de raciocínio em que estes se encontram.

Referências

- ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. Tendências didaticopedagógicas no Ensino de Geometria: Um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista. Recife, PE*, v. 11, n. 17, p. 61–70, 2004. Citado na página 43.
- ÁVILA, G. Euclides, Geometria e Fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*, n. 45, 2001. Citado na página 24.
- ÁVILA, G. Reflexões sobre o Ensino de Geometria. *Revista do Professor de Matemática*, n. 71, p. 3–8, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 87.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo, SP: Edgard Blucher LTDA, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- BRAGA, E. R.; DORNELES, B. V. Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 13, n. 2, p. 273–289, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 21, 43 e 44.
- BRASIL, M. da Educação do. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, DF: MEC/SE, 1997. Citado na página 18.
- CALABRIA, A. R. A geometria fora da Grécia. *Revista do Professor de Matemática*, n. 81, p. 5–9, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 21, 22, 23 e 24.
- CONTADOR, P. R. M. *A Matemática na arte e na vida*. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2013. Citado na página 26.
- COSTA, D. E.; PEREIRA, M. J.; MAFRA, J. R. e S. Geoplano no ensino de Matemática: Alguns aspectos e perspectivas da sua utilização na sala de aula. *AMAZÔNIA - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 7, n. 14, dez-jan 2011. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 74.
- CROWLEY, M. L. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo, SP: Atual, 1996. Citado 13 vezes nas páginas 19, 42, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 67, 71, 75, 82 e 84.
- DOBARRO, V. R.; BRITO, M. R. F. de. Um estudo sobre a habilidade matemática na solução de problemas de geometria. *REnCiMa - Revista do Ensino de Ciências e Matemática*, v. 1, n. 1, p. 34–46, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 21, 44 e 49.
- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 24 e 25.
- GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo, SP: Editora Atlas, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

- GODOY, A. S. Introdução a pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, v. 35, n. 2, p. 57–63, 1995. Citado na página 50.
- GRANDO, R. C.; NACARATO, A. M.; GONCALVES, L. M. G. Compartilhando saberes em geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. *Caderno Cedes*, v. 28, n. 74, p. 39–56, jan./abr. 2008. Citado na página 25.
- HIELE, P. M. van. *Structure and insight: a theory of mathematics education*. [S.l.]: Academic Press, 1986. Citado na página 44.
- HOLANDA, A. J. M. *Os mistérios da mais bela forma geométrica: o triângulo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Semi Árido, 2013. Citado na página 18.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade*. São Paulo, SP: Atual, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 78.
- JAIME, A.; GUTIERREZ, A. *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele*. [S.l.]: S. Linares and M. V. Sánchez, 1990. Citado 6 vezes nas páginas 19, 42, 47, 48, 52 e 62.
- JANELA, M. A. C. R. M. P. *O (Novo) Programa de Matemática do Ensino Básico e o desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 67.
- JELINEK, K. R.; KAMPPFF, A. J. C. A geometria que existe além do olhar: Levando a geometria da natureza para dentro da escola. *Educação Matemática em Revista*, v. 1, p. 75–81, 2009. Citado na página 81.
- KALEFF, A. M. Tomando o ensino da Geometria em nossas mãos. *Educação Matemática em Revista*, n. 2, p. 19–25, 1994. Citado na página 26.
- KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. *Bolema*, v. 10, p. 21–30, 1994. Citado na página 43.
- KNIJNIK, G.; BASSO, M. V. de A.; KLÜSENER, R. *Aprendendo e ensinando matemática com geoplano*. RS: UNIJUI, 2004. Citado na página 28.
- LAPA, C. C. P.; ARSIE, K. C.; ANDRETT, P. O ensino de Geometria por meio das diferentes linguagens. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Junho 2011. Citado na página 26.
- LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. Citado na página 18.
- LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? *A educação Matemática em Revista*, v. 4, p. 3–13, 1995. Citado na página 19.
- MENDES, I. A. *Matemática e investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2009. Citado na página 29.
- MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática: Ideias e desafios*. São Paulo, SP: Saraiva, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.

- NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, v. 9, n. 9-10, p. 1–6, 2005. Citado na página 27.
- NASSER, L. A teoria de van hiele para o ensino de Geometria. Pesquisa e Aplicação. *Anais do I Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, UFRJ*, p. 29–40, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 87.
- NASSER, L.; LOPES, M. L. M. L. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 19, 21, 27, 28, 44 e 75.
- NASSER, L.; SANTANNA, N. P. *Geometria segundo a teoria de van Hiele*. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997. Citado na página 52.
- NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado 12 vezes nas páginas 24, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40 e 41.
- NEVES, E. B.; DOMINGUES, C. A. *Manual da Metodologia da Pesquisa Científica*. Rio de Janeiro, RJ: ESAO, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.
- OLIVEIRA, M. de Castro e. *Ressignificando conceitos de Geometria Plana a partir dos estudos dos sólidos geométricos*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2012. Citado na página 44.
- PAIS, L. C. *Ensinar e aprender Matemática*. São Paulo, SP: Autêntica, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 70.
- PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, v. 1, n. 1, p. 7–17, 1993. Citado 4 vezes nas páginas 19, 25, 26 e 42.
- PITOMBEIRA, J. B. São três lados, são três lados de um triângulo. *Geometria em sala de aula*, p. 55–62, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 30.
- PUTNOKI, J. C. Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso. *Geometria em sala de aula*, p. 368–374, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 74.
- RABAIOLLI, L. L.; STROHSCHOEN, A. A. G. A formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental e o ensino da geometria. *Revemat*, v. 8, n. Edição Especial, p. 63–78, Dezembro 2013. Florianópolis (SC). Citado na página 26.
- SAMPAIO, F. F.; ALVES, G. de S. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*, n. 5, p. 69–76, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 19, 43, 44 e 49.
- SOARES, F. S. *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso*. Dissertação (Mestrado) — PUCRJ, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 87.
- VILLIERS, M. de. Algumas reflexões sobre a teoria de van Hiele. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 12, n. 3, p. 400–431, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.
- WAGNER, E. *Construções geométricas*. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007. Citado na página 27.

APÊNDICE A

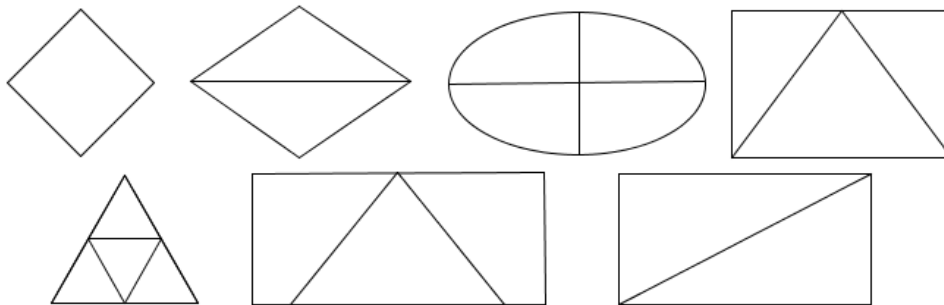
Teste sobre triângulos

TESTE SOBRE TRIÂNGULOS

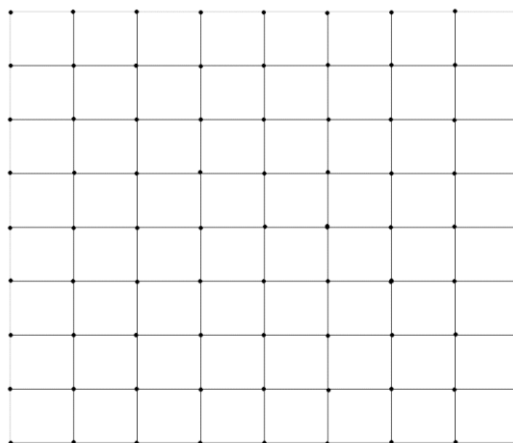
1. Kandinsky utiliza frequentemente nas suas obras figuras geométricas simples. Observando a tela abaixo, qual forma geométrica aparece em maior quantidade? _____



2. Quantos triângulos você consegue identificar nas figuras abaixo? _____



3. Escolha três pontos da malha abaixo e tente desenhar um triângulo.



Foi possível desenhar o triângulo a partir dos pontos escolhidos? É sempre possível desenhar um triângulo cujos vértices sejam três pontos quaisquer?

4. Pode existir um triângulo com lados medindo 8 cm, 4 cm e 3 cm? Por quê?

5. Quais são as características (propriedades) geométricas de um triângulo?

Observe a sequência abaixo formada por triângulos e responda às questões 6, 7 e 8:



Fonte: <http://www.questoesdeconcursos.com.br/>

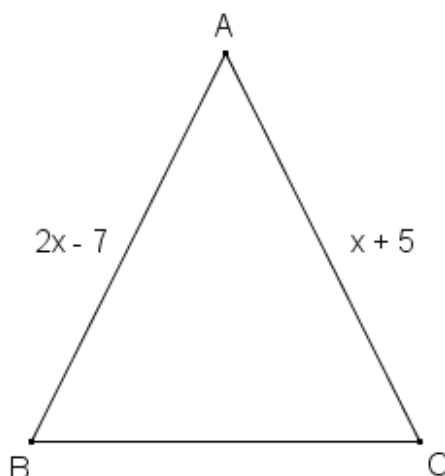
6. Cite uma característica comum a todos esses triângulos.

7. Como esses triângulos são classificados em relação às medidas de seus lados?

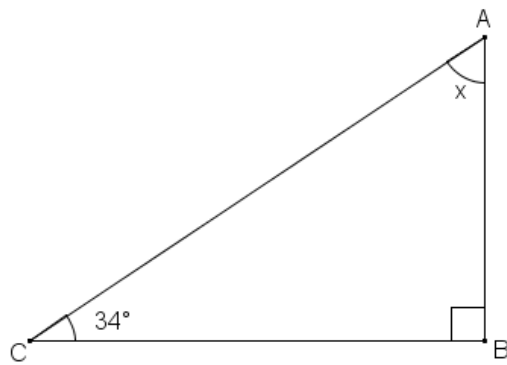
8. Quanto mede cada um dos ângulos desses triângulos? Como são classificados esses triângulos de acordo com as medidas de seus ângulos?

9. Se o perímetro de um triângulo equilátero é de 75 cm, quanto mede cada lado?

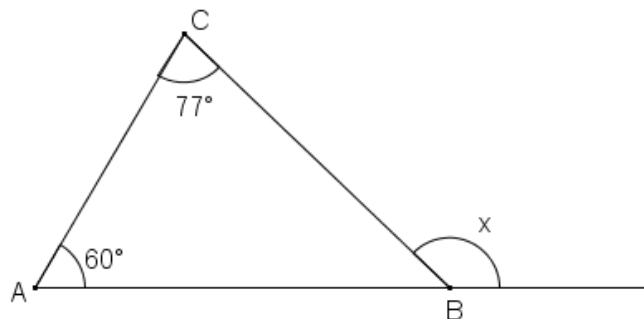
10. Se o $\triangle ABC$ é isósceles de base \overline{BC} , determine o valor de x .



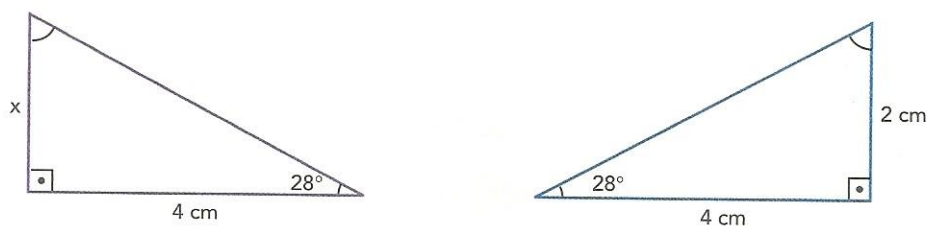
11. No triângulo abaixo, qual a medida de x ? Como você descobriu?



12. No triângulo ABC abaixo, qual a medida de x ?



13. Qual é o caso que garante a congruência destes dois triângulos? Qual o valor de x ?



APÊNDICE B

Atividades

ATIVIDADE I – Observando formas triangulares

1. O que há em comum entre estas obras de arte? _____



Artista: ELIANE STAHL

Obra: TRIANGULOS

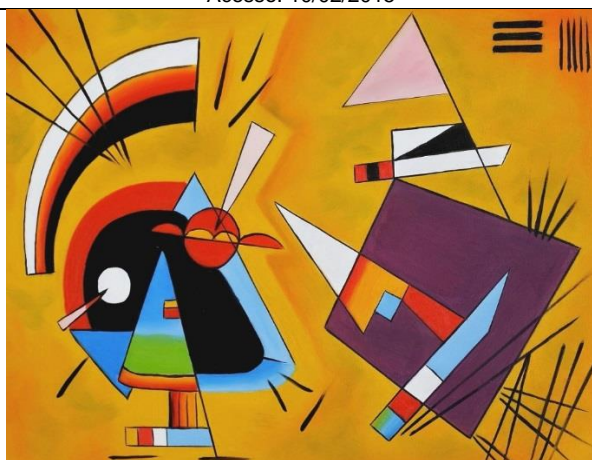
Fonte: <http://galeriadearte.arteblog.com.br/r3648/ELIANE-STAHL/2/>
Acesso: 10/02/2015



Artista: WASSILY KANDINSKY

Obra: DECISIVE PINK

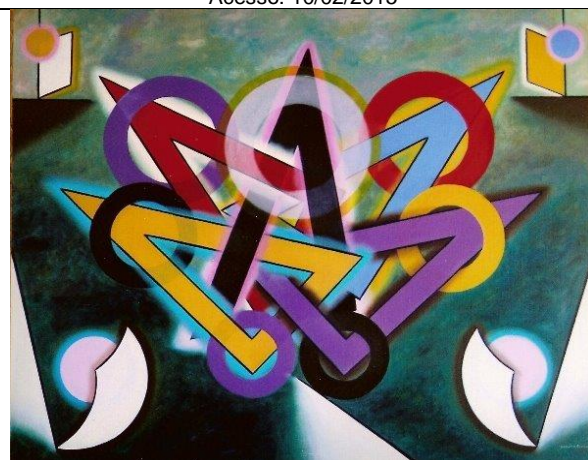
Fonte: <http://www.wassilykandinsky.net/work-262.php>
Acesso: 10/02/2015



Artista: WASSILY KANDINSKY

Obra: BLACK AND VIOLET

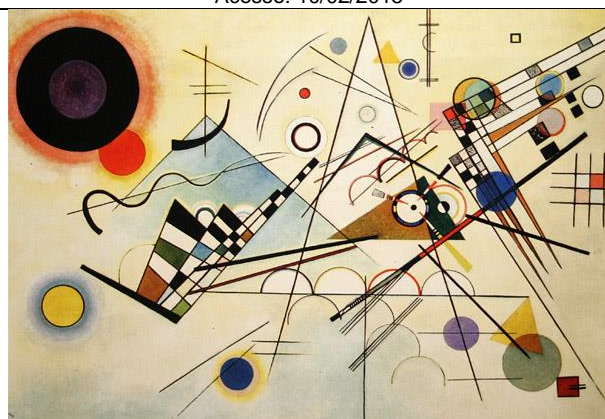
Fonte: <http://totallyhistory.com/black-and-violet/nio>
Acesso: 10/02/2015



Artista: ERMINIO SOUZA

Obra: OS TRIANGULOS

Fonte: <http://falandodearte.arteblog.com.br/30899/ERMINIO-SOUZA/>
Acesso: 10/02/2015



Artista: WASSILY KANDINSKY

Obra: COMPOSIÇÃO VIII

Fonte: <http://www.wassilykandinsky.net/work-50.php>
Acesso: 10/02/2015

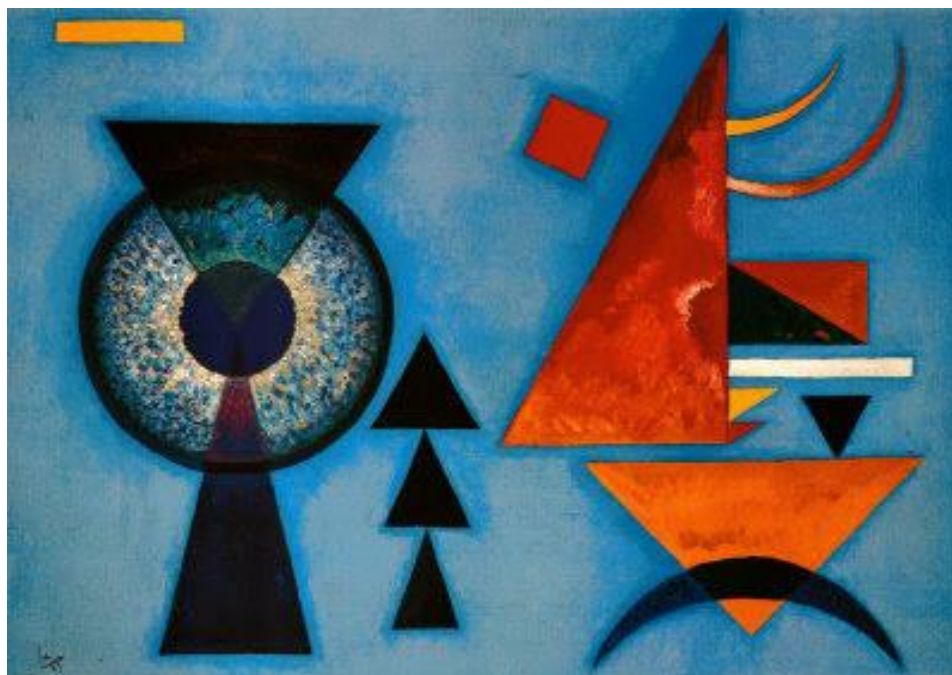


Artista: VICENTE DO REGO MONTEIRO

Obra: COMPOSIÇÃO COM TRIÂNGULOS

Fonte: <http://totallyhistory.com/black-and-violet/nio>
Acesso: 10/02/2015

2. Kandinsky utiliza frequentemente nas suas obras figuras geométricas simples tais como círculos, triângulos e quadriláteros. Observe a tela abaixo e considere as questões:



Fonte: http://www.allposters.com.br/-st/Wassily-Kandinsky-posters_c25627_.htm
Acesso: 10/02/2015

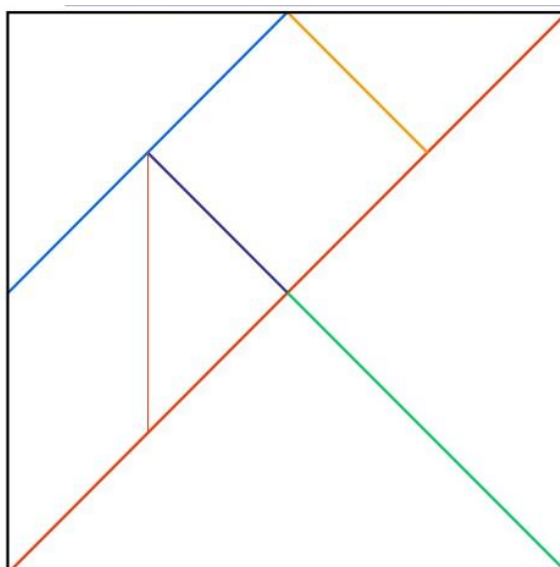
a) Enumere as formas geométricas presentes na obra.

b) Quantos triângulos você consegue identificar?

c) Esses triângulos são todos iguais? Justifique.

d) Destaque algumas semelhanças e diferenças entre esses triângulos.

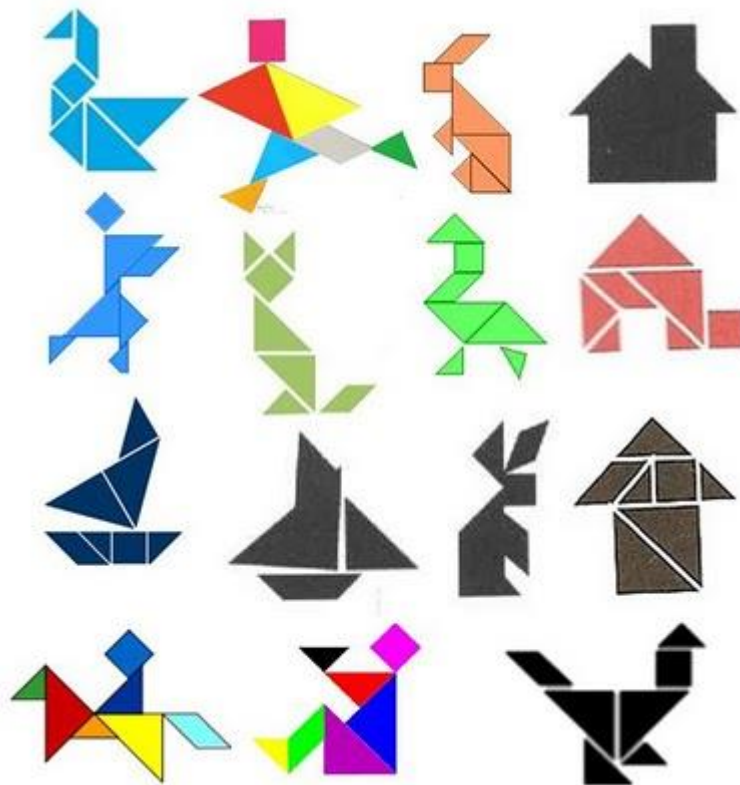
3. Você irá receber um quadrado como o da figura abaixo. Recorte-o pelas linhas coloridas a fim de obter as peças do TANGRAM.



a) Quantas formas geométricas você obteve? Quantas são triângulos?

b) Que semelhanças você consegue identificar entre estes triângulos?

4. Com as peças do tangram é possível formar vários desenhos diferentes como animais, objetos, pessoas em diferentes posições, números, letras, etc. Veja estes exemplos:



Fonte: <http://falandoemmatematika.blogspot.com.br/>
Acesso: 10/02/2015

a) Usando as peças do seu tangram, monte um desenho.

b) Reúna, com seus colegas, e organizem todos os desenhos formando um lindo painel.

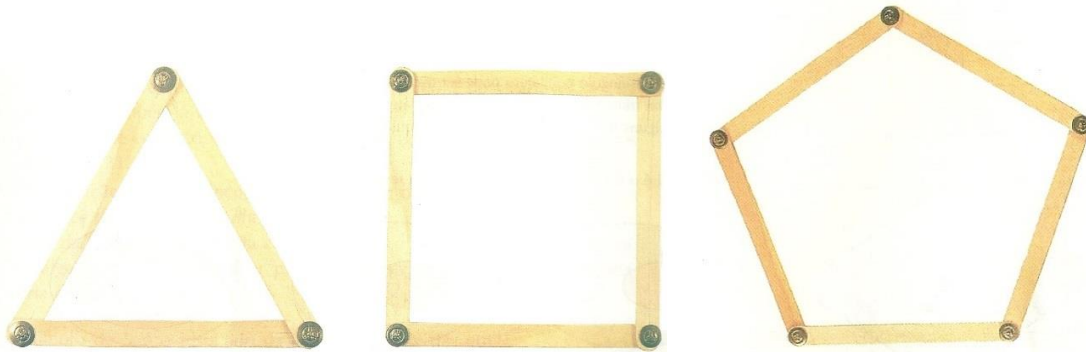
c) Qual a figura geométrica que mais se observa no painel?

5. Agora, é a sua vez de fazer uma obra de arte!

Usando tela, pincel e tinta, faça uma pintura usando as formas geométricas. Dê preferência ao triângulo.

ATIVIDADE II – Rigidez triangular

1. Usando palitos de sorvete e percevejos, construa um triângulo, um quadrado e um pentágono como os das imagens abaixo:



Fonte: Imenes e Lellis. Matemática. 7ª série. Editora Scipione

a) Que semelhanças você consegue identificar nos polígonos construídos?

b) Tente transformar o quadrado em um losango sem remover os percevejos. Você conseguiu? Como fez?

c) Será que você consegue transformar o pentágono inicial em um pentágono diferente também sem remover os percevejos? Desenhe como ficou o novo pentágono. _____

d) Agora, puxe os lados do triângulo. O que acontece?

e) Ainda usando palitos de sorvetes, construa um hexágono e um heptágono. Se você puxar seus lados eles se deformam? _____

f) Após essas construções, que características podemos atribuir ao triângulo?

2. Ao observar as construções e os objetos à nossa volta, percebemos diferentes figuras geométricas. Veja essas imagens.



<http://www.i-decoracao.com/moveis/m-stool-modular-modular-j1-studio>
Acesso: 10/02/2015



<http://www.lojaskd.com.br/base-para-mesa-cavelete-triangular>
Acesso: 20/02/2015



<http://magiasdamatematica.blogspot.com.br>
Acesso: 20/02/2015



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Large_Timber_Howe
Acesso: 20/02/2015



<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=21071>
Acesso: 20/02/2015



<http://www.encontraaraguari.com.br/empresas/triangulo-estruturas>
Acesso: 20/02/2015

a) Que forma geométrica está sendo usada nas estruturas desses objetos e construções?

b) Por que essa forma foi escolhida?

3. E você... Onde mais vê triângulos?

4. Agora, você é o fotógrafo! Com uma câmera, capture imagens de triângulos em objetos, móveis, construções ou outras estruturas. Faça uma exposição das fotos em sua classe.



ATIVIDADE III – Desigualdade triangular e construção com régua e compasso

1. Vamos construir triângulos usando palitos para churrasquinho. Você vai precisar de 12 palitos de madeira: 2 de 25 cm, 3 de 20 cm, 3 de 15 cm, 3 de 10 cm e 1 de 5 cm .

a) Tente construir triângulos usando palitos com as seguintes medidas:

1ª tentativa - 25 cm, 15 cm e 20 cm

2ª tentativa - 20 cm, 15 cm e 10 cm

3ª tentativa - 25 cm, 15 cm e 10 cm

4ª tentativa - 20 cm, 10 cm e 5 cm

b) Sempre que você utilizou três palitos foi possível construir um triângulo? _____

c) Escreva as possibilidades com as quais você não conseguiu formar triângulos. Explique o que aconteceu.

d) Denotando por a, b e c, respectivamente, os lados de cada triângulo; complete a tabela abaixo:

TENTATIVA	LADO a	b + c	LADO b	a + c	LADO c	a + b	FORMA TRIÂNGULO	
							SIM	NÃO
1ª								
2ª								
3ª								
4ª								

e) Após completar esta tabela, podemos observar que existe uma relação entre as medidas dos lados para que seja possível a construção de um triângulo. Qual é esta relação?

f) Agora complete esta outra tabela:

TENTATIVA	LADO a	b – c	LADO b	a – c	LADO c	a – b	FORMA TRIÂNGULO	
							SIM	NÃO
1ª								
2ª								
3ª								
4ª								

g) Observando os dados da segunda tabela, percebemos a existência de outra relação entre as medidas dos lados de um triângulo. Descreva-a.

f) Usando desigualdades, escreva a relação que deve existir entre os lados (a, b e c) de um triângulo.

2. Usando régua e compasso, construa um triângulo cujos lados sejam os segmentos de reta a seguir.

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{BC} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 3 \text{ cm}$$

Siga as instruções:

- Desenhe uma reta r qualquer e, sobre ela, marque o ponto A . Com a ponta-seca do compasso em A e abertura igual à medida de \overline{AB} , trace um arco e marque o ponto B sobre a reta r .
- Com a ponta-seca do compasso no ponto B e abertura igual à medida de \overline{BC} , trace um arco.
- Com a ponta-seca do compasso em A e abertura igual à medida de \overline{AC} , trace um arco intersectando o primeiro arco traçado e marque o ponto C .
- Traçando os segmentos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , construímos o triângulo ABC .

3. Agora construa o triângulo PQR , usando as seguintes medidas:

$$\overline{PQ} = 7 \text{ cm}$$

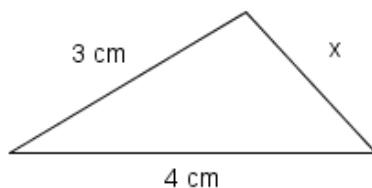
$$\overline{QR} = 4 \text{ cm}$$

$$\overline{PR} = 2 \text{ cm}$$

Foi possível traçar o triângulo PQR ? Por quê?

4. É possível construir um triângulo com lados medindo 3 cm , 10 cm e 5 cm ? Por quê?

5. Que valores x pode assumir para ser possível construir um triângulo com lados medindo x cm, 3 cm e 4 cm, como o exemplo que segue?



6. Sabendo que dois lados de um triângulo medem 8 cm e 6 cm, qual é a menor medida inteira que o terceiro lado pode ter?

7. Usando régua, compasso e transferidor, construa o triângulo ABC, conhecendo as medidas de dois lados e a medida do ângulo compreendido entre eles.

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AC} = 3 \text{ cm}$$

$$\hat{A} = 60^\circ$$

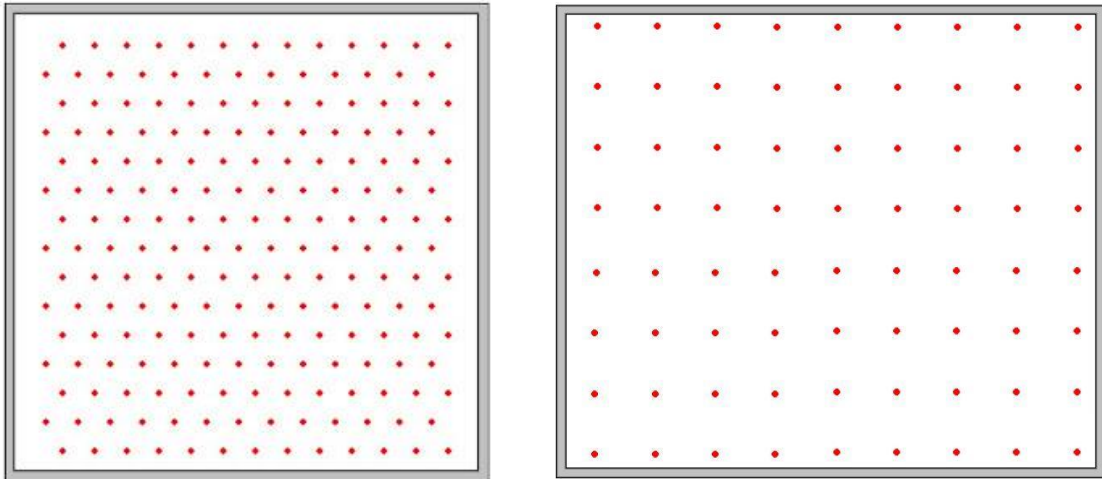
Procedimento:

- Desenhe uma reta r qualquer e, sobre ela, marque o ponto A. Com a ponta-seca do compasso em A e abertura igual à medida de \overline{AB} , trace um arco e marque o ponto B sobre a reta r .
- Trace \overline{AB} .
- Com o transferidor, construa um ângulo de 60° com A, um lado \overline{AB} e outro \overline{AX} .
- Com a ponta-seca do compasso no ponto A e abertura igual à medida de \overline{AC} , trace um arco sobre a semirreta \overline{AX} marcando o ponto C.
- Traçando os segmentos \overline{AC} e \overline{BC} construímos o triângulo ABC.

ATIVIDADE IV – Classificação dos triângulos quanto aos lados

1. Observando as estruturas dos objetos e das construções, percebemos que existem tipos diferentes de triângulos.

a) Usando geoplanos (como os modelos) e elásticos coloridos, construa 5 triângulos diferentes.



Fonte: <http://matunifal.blogspot.com.br/2011/05/geoplano.html>
 Acesso: 26/02/2015

b) Com uma régua, meça cada um dos lados dos triângulos e registre as medidas na tabela que segue.

Triângulo	Medidas dos lados		
1			
2			
3			
4			
5			

c) Compare as medidas dos lados de cada triângulo.

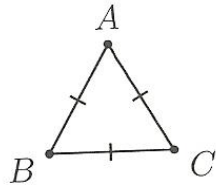
d) Ao fazer as comparações, você deve ter percebido que três casos podem ocorrer. Descreva-os.

2. Leia com atenção esta definição:

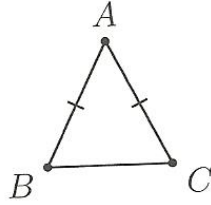
Um triângulo ABC é denominado:

- Equilátero, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$.
- Isósceles, se ao menos dois dentre \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} forem iguais.
- Escaleno, se $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$.

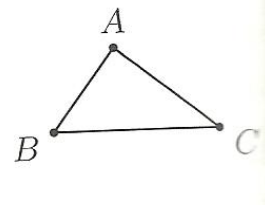
Equilátero



Isósceles



Escaleno



Fonte: Tópicos de Matemática Elementar

Agora, classifique cada triângulo construído no geoplano de acordo com as medidas dos seus lados.

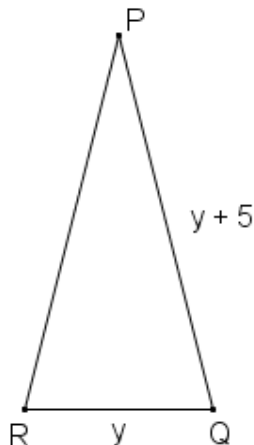
3. A soma dos comprimentos dos lados do triângulo é chamada de **perímetro**. Preencha a tabela com o perímetro de cada triângulo.

Triângulo	Perímetro
1	
2	
3	
4	
5	

4. No geoplano triangular, construa um triângulo equilátero de perímetro igual a 18.

5. O perímetro de um triângulo equilátero é 48 *cm*. Quanto mede cada lado?

6. O ΔPQR é isósceles, sendo $\overline{PQ} \equiv \overline{PR}$. O perímetro desse triângulo é 25,6 *cm*. Quanto mede cada lado do ΔPQR .



7. Com régua e compasso, desenhe os seguintes triângulos:

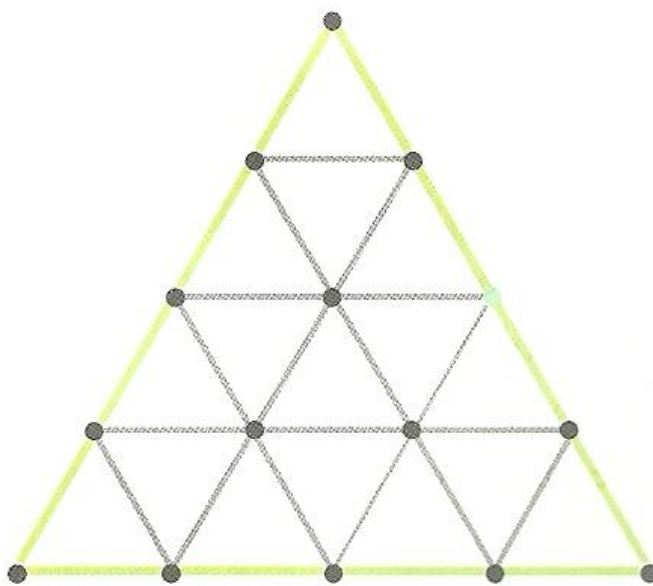
a) equilátero de perímetro 12 *cm*.

b) isósceles de base 2 *cm* e perímetro 8 *cm*.

c) escaleno de lados 3 *cm*, 5 *cm* e 6 *cm*.

8. Desafio: **Contando triângulos**

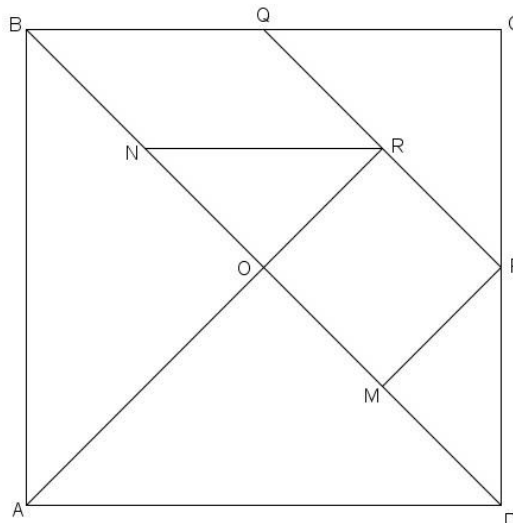
Um triângulo equilátero de lado 4 é composto por triângulos equiláteros unitários de lado 1, como na figura. Quantos triângulos, com lados contidos na malha triangular, há nessa figura?



ATIVIDADE V – Congruência de triângulos

1. Nesta atividade, vamos continuar investigando os triângulos. Para tanto, providencie régua, tesoura e papel quadriculado.

- Construa um quadrado de lado 15 cm e nomeie seus vértices (ABCD).
- Trace a diagonal DB.
- Marque o ponto médio nessa diagonal e o nomeie (ponto médio O).
- Trace uma perpendicular a DB, passando pelos pontos O e A .
- Marque os pontos médios de DO (ponto médio M) e de OB (ponto médio N).
- Marque os pontos médios de DC (ponto médio P) e de CB (ponto médio Q).
- Trace o segmento PQ , marque o seu ponto médio e o nomeie (ponto médio R).
- Trace os segmentos PM , OR e RN .



a) Você conhece a figura que acabou de construir? Como ela se chama?

b) Essa figura é formada por quais formas geométricas?

c) Com o auxílio da tesoura, destaque as sete formas geométricas e separe os triângulos.

d) Quantos triângulos PMD são necessários para formar um triângulo AOD? _____

e) Quantos triângulos NRO são necessários para formar um triângulo AOD? _____

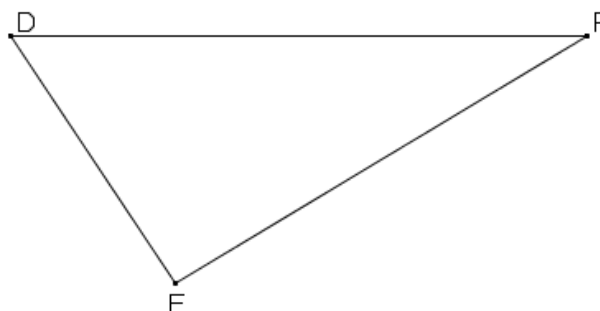
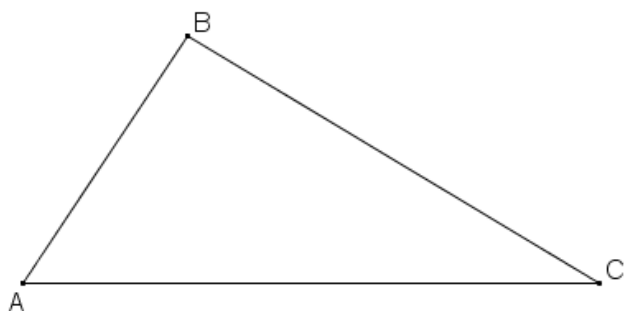
f) Quantos triângulos PMD são necessários para formar um triângulo NRO? _____

g) Quantos triângulos BAO são necessários para formar um triângulo AOD? _____

h) Ao manipular as peças recortadas para responder os itens anteriores, o que você observou sobre os triângulos:

- PMD e NRO? _____
- BAO e AOD? _____

2. Com a ajuda de uma régua e um transferidor, preencha as tabelas relacionadas aos triângulos abaixo:



Triângulo ABC

Medida de \overline{AB}	
Medida de \overline{BC}	
Medida de \overline{CA}	
Medida de \widehat{CAB}	
Medida de \widehat{ABC}	
Medida de \widehat{BCA}	

Triângulo DEF

Medida de \overline{DE}	
Medida de \overline{EF}	
Medida de \overline{FD}	
Medida de \widehat{FDE}	
Medida de \widehat{DEF}	
Medida de \widehat{EFD}	

a) O que se pode afirmar sobre os lados do ΔABC e do ΔDEF ?

b) E sobre os ângulos?

c) Recorte o triângulo ABC e sobreponha ao triângulo DEF.

Você deve ter observado que os vértices de um coincidiram com os vértices do outro.

Ao realizar esta tarefa, foi possível verificar que as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo são as mesmas dos lados e dos ângulos do outro.

Nesse caso, dizemos que ΔABC e ΔDEF são **congruentes**.

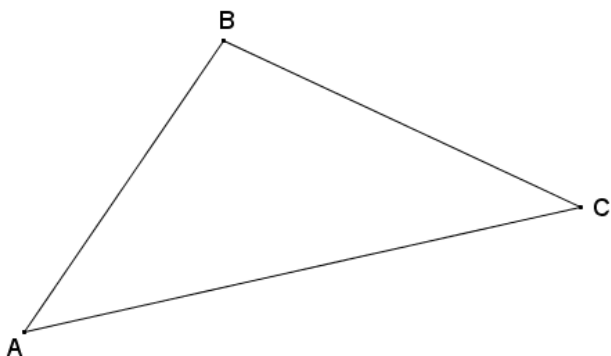
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

3. Nem sempre é possível recortar as figuras e usar a sobreposição para observar e verificar se dois triângulos são congruentes.

Para tanto, o conhecimento da medida dos lados e dos ângulos pode ajudar.

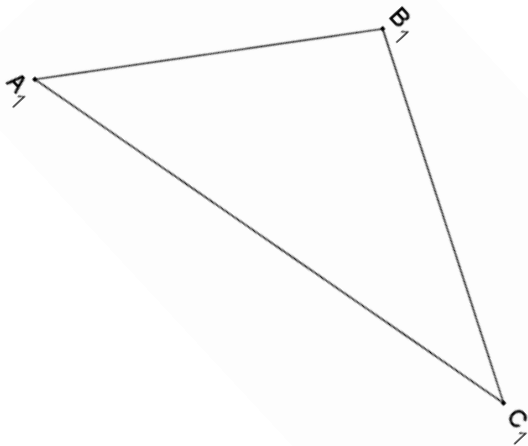
Mas será necessário conhecer todas as medidas dos lados e dos ângulos para garantir que dois triângulos sejam congruentes? Vejamos:

a) Usando régua, meça os lados dos triângulos 1 e 2.



Triângulo 1

Medida de \overline{AB}	
Medida de \overline{BC}	
Medida de \overline{CA}	



Triângulo 2

Medida de $\overline{A_1B_1}$	
Medida de $\overline{B_1C_1}$	
Medida de $\overline{C_1A_1}$	

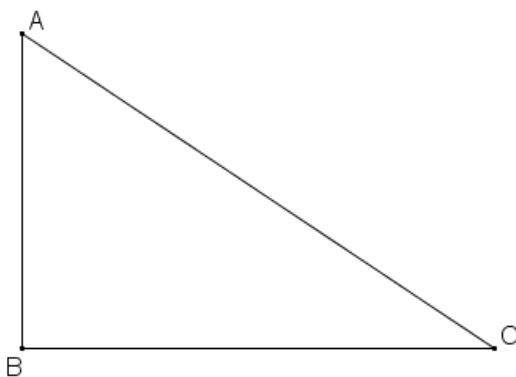
Agora, recorte os triângulos 1 e 2 e observe se é válida a sobreposição.

Os triângulos 1 e 2 são congruentes? _____

Você percebeu que conhecer os lados e o fato destes terem a mesma medida foi o suficiente para garantir a congruência entre os triângulos.

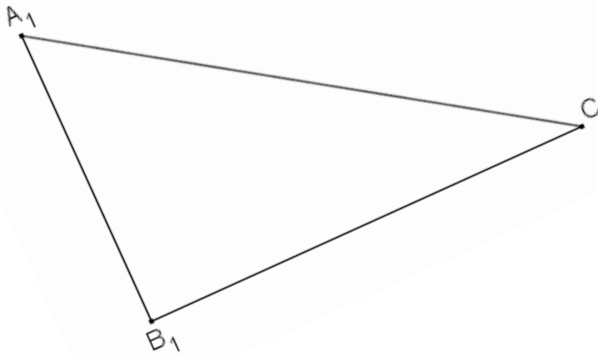
Como é conhecido esse caso de congruência? _____

b) Agora, complete a tabela em relação aos triângulos 3 e 4.



Triângulo 3

Medida de \overline{AB}	
Medida de \overline{BC}	
Medida de \widehat{ABC}	



Triângulo 4

Medida de $\overline{A_1B_1}$	
Medida de $\overline{B_1C_1}$	
Medida de $\widehat{A_1B_1C_1}$	

Agora, recorte os triângulos 3 e 4 e observe se é válida a sobreposição.

Os triângulos 3 e 4 são congruentes? _____

Você percebeu que conhecer apenas a medida de dois lados, e o ângulo formado entre eles, foi suficiente para garantir a congruência entre os triângulos.

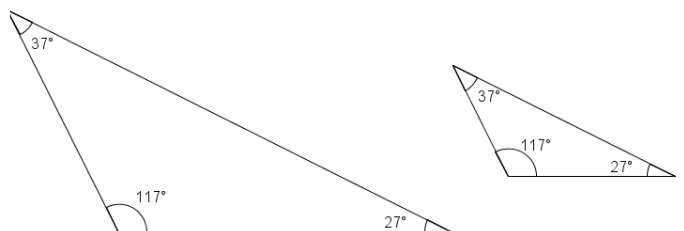
Como é conhecido esse caso de congruência? _____

4. Nos itens anteriores, você conheceu dois casos de congruência de triângulos, mas não são os únicos. Confira, agora, todos os casos:

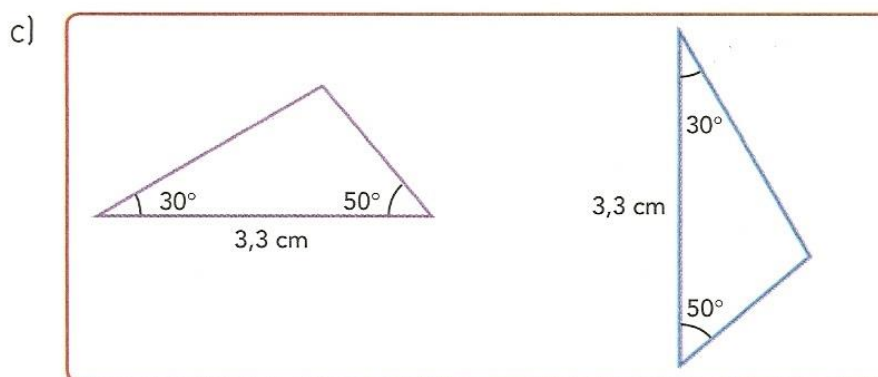
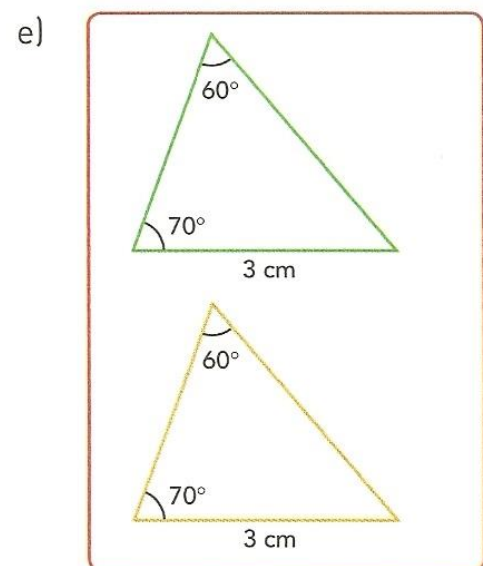
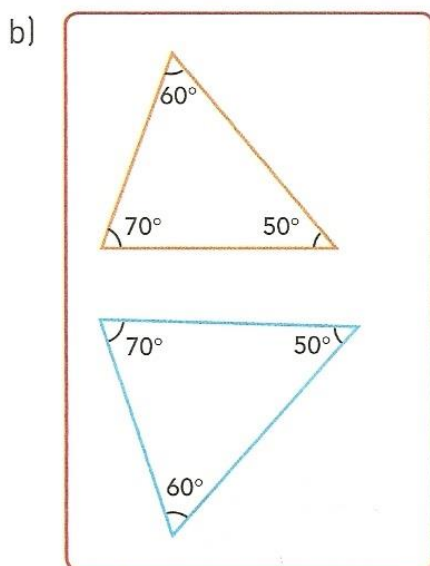
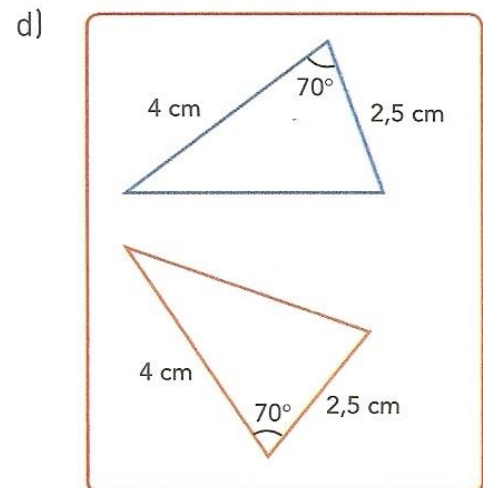
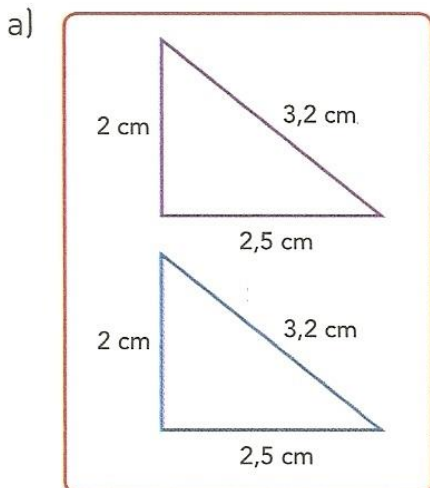
- **Caso LLL: lado, lado, lado**
Dois triângulos são congruentes quando possuem os três lados respectivamente congruentes.
- **Caso LAL: lado, ângulo, lado**
Dois triângulos são congruentes quando possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes.
- **Caso ALA: ângulo, lado, ângulo**
Dois triângulos são congruentes quando possuem um lado e os dois ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes.
- **Caso LAA_o : lado, ângulo, ângulo oposto**
Dois triângulos são congruentes quando possuem um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.

Atenção!

As figuras ao lado mostram que a congruência dos três ângulos não garante a congruência dos triângulos.



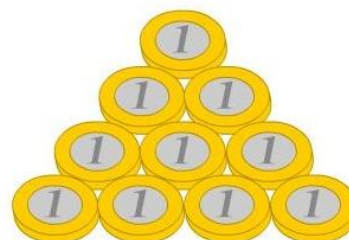
5. Verifique em cada item se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes sem efetuar medições. Em caso positivo, indique o caso que garante a congruência (LLL, LAL, ALA ou LAA_o).



Fonte: Dante. Tudo é Matemática. 8º ano. Editora Ática

6. Desafio: Triângulo invertido

Movendo apenas três moedas, faça com que o triângulo fique com a base para cima e o vértice oposto para baixo (enfim, fique em posição contrária à dada ao lado).

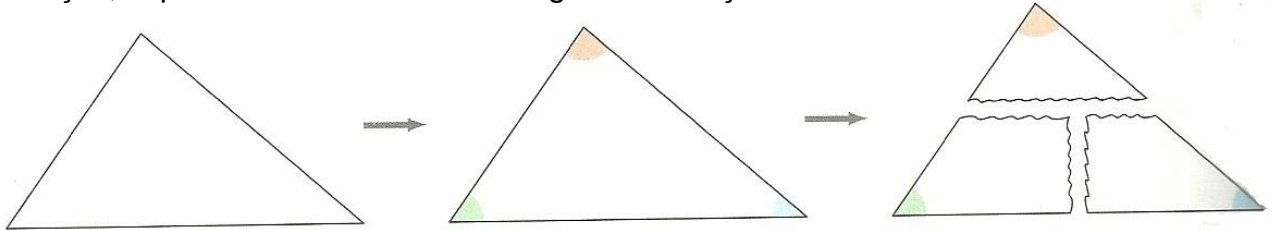


Fonte: <http://www.distico.com/enigmas2008>
: 26/02/2015

ATIVIDADE VI – Soma dos ângulos internos de um triângulo

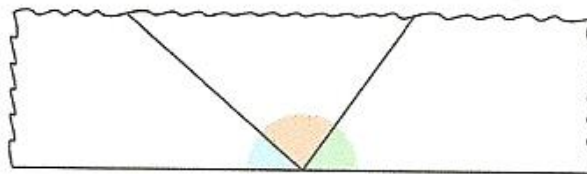
1. Experiência I:

a) Desenhe um triângulo, recorte, pinte cada ângulo de uma cor e, a seguir, rasgue o triângulo em três pedaços, separando os três vértices. Siga as ilustrações abaixo.



Fonte: lezzi et al. Matemática e Realidade. Ensino Fundamental. 7ª série. Editora Atual

b) Desloque os três pedaços e junte-os de modo a obter três ângulos adjacentes e consecutivos.



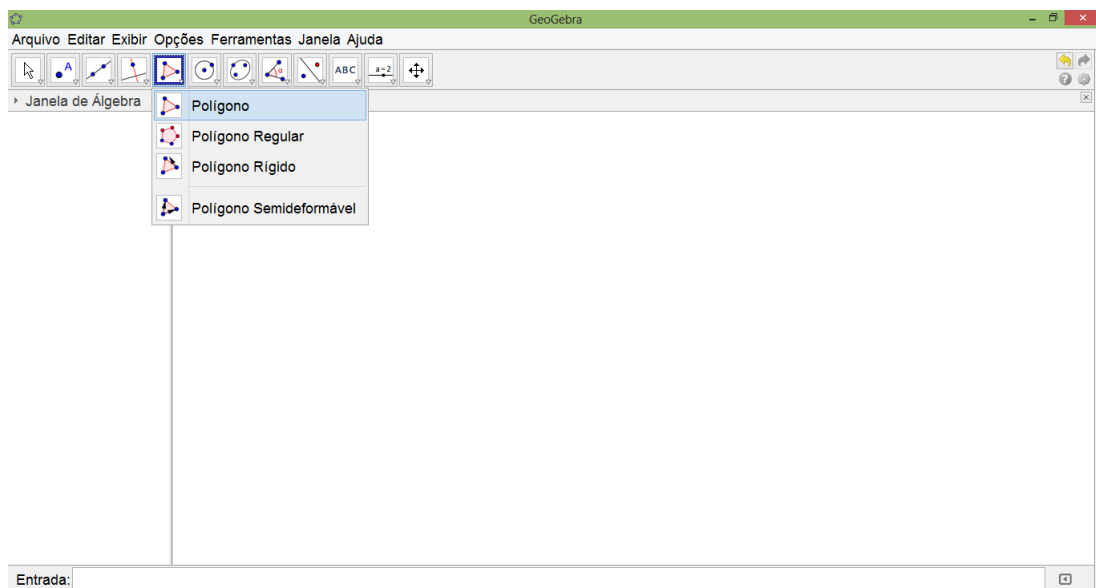
Fonte: lezzi et al. Matemática e Realidade. Ensino Fundamental. 7ª série. Editora Atual

c) O que você observa?

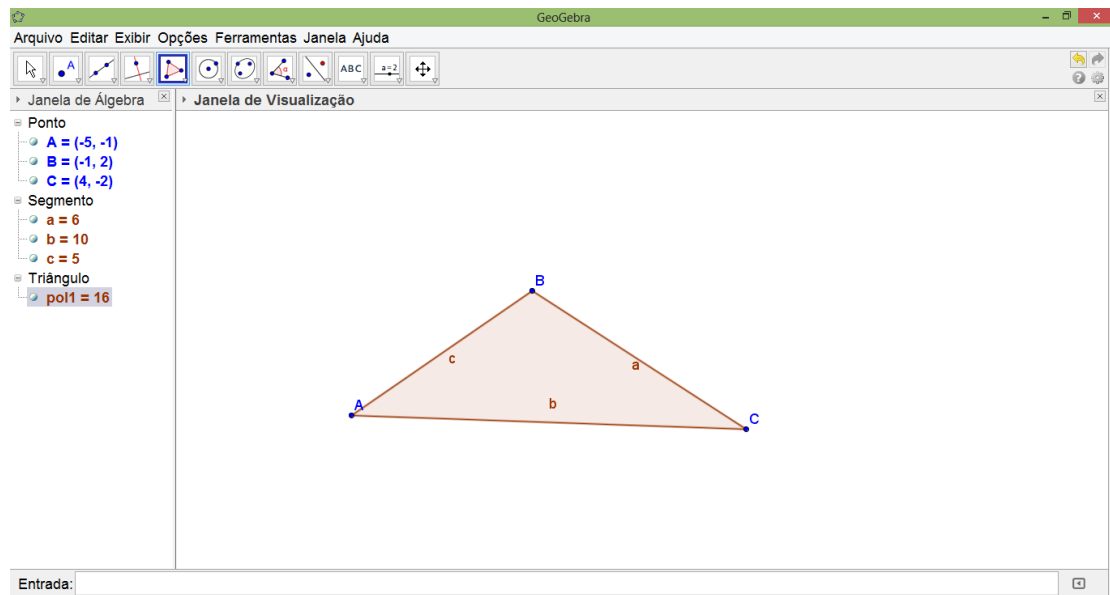
2. Experiência II:

a) Usando o software de geometria dinâmica Geogebra, construa um triângulo. Siga as instruções abaixo:

- Clique na ferramenta *Polígono*,

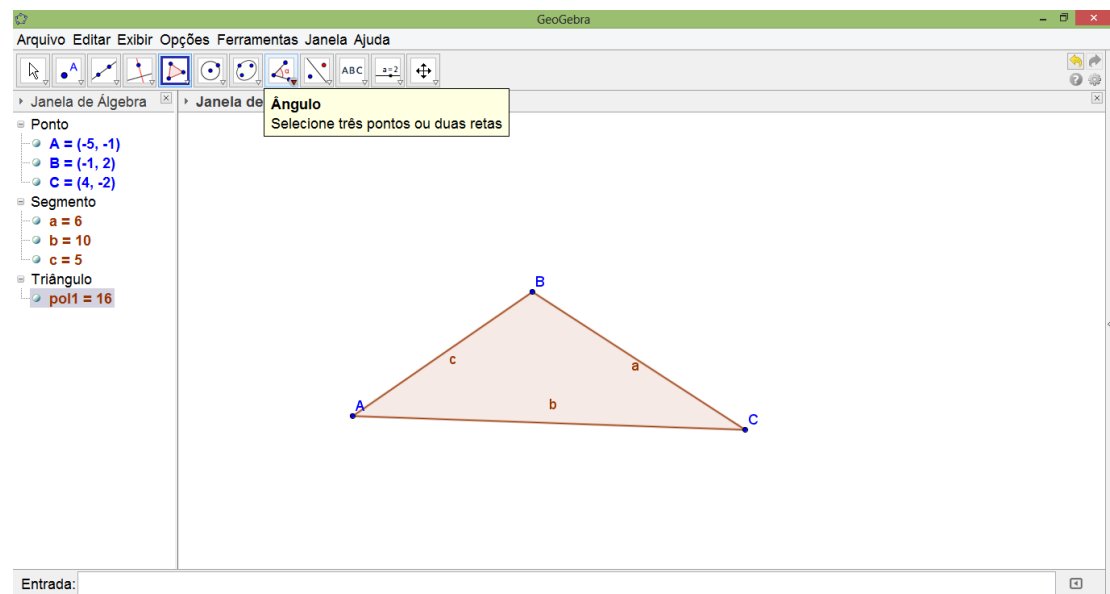


- Selecione sucessivamente três pontos, os quais serão os vértices do triângulo. Depois, clique outra vez no primeiro ponto para fechar o triângulo.

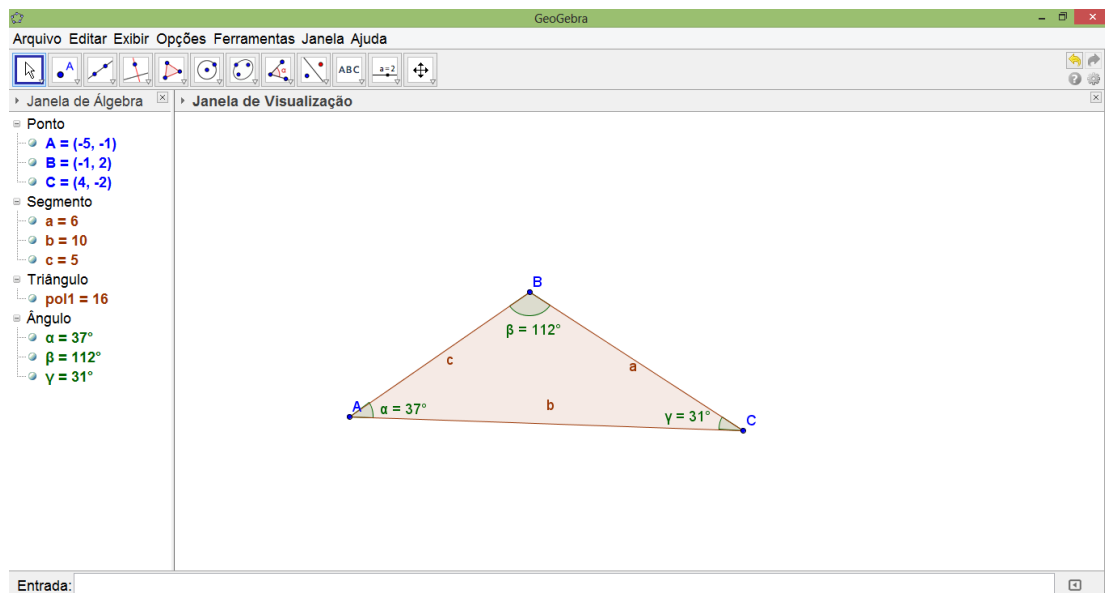


b) Visualize as medidas dos ângulos internos do triângulo.

- Volte na barra de ferramentas e clique em Ângulo.



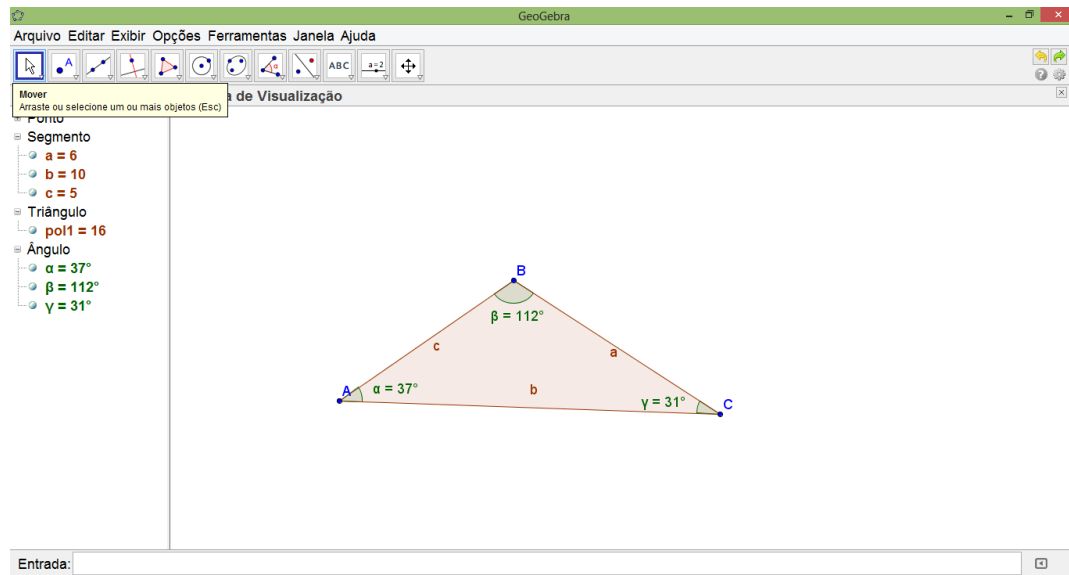
- Depois clique em três pontos distintos, sempre em sentido anti-horário em relação aos pontos do triângulo, sendo o ponto do centro, o ângulo a ser medido.



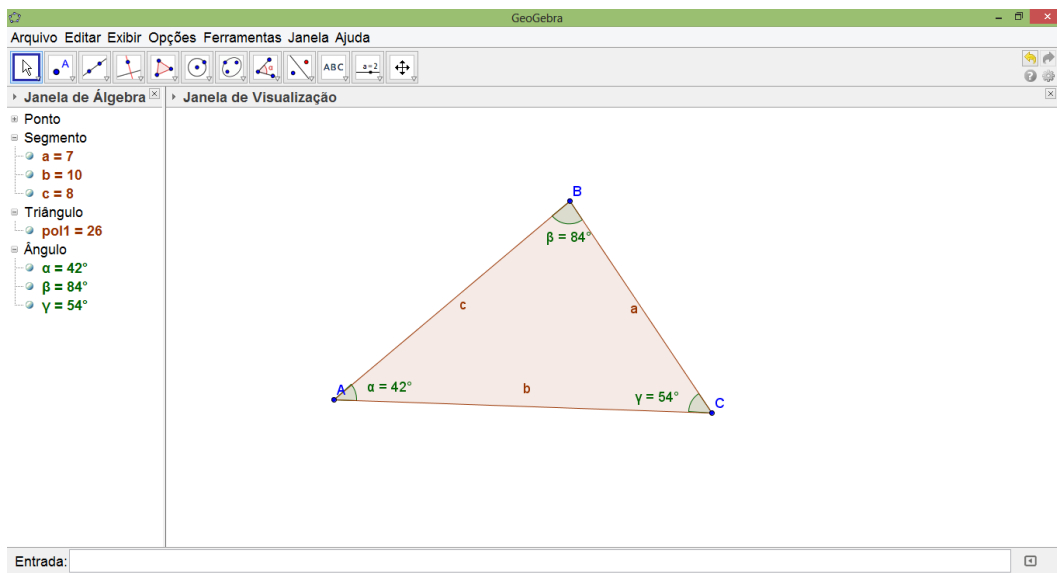
c) Agora some as medidas desses ângulos. Qual valor você obtém? _____

d) Arraste um vértice qualquer de modo a obter um novo triângulo.

- Clique na ferramenta Mover.



- Em seguida, clique em um dos vértices do triângulo e arraste até o local desejado.



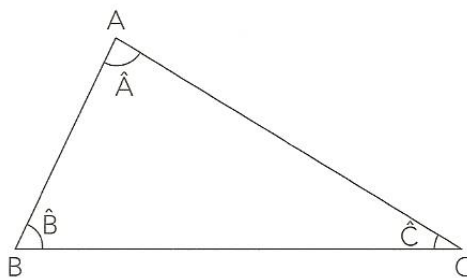
O que acontece com as medidas dos ângulos e com a respectiva soma?

e) Arraste, novamente, um vértice qualquer do triângulo. Some as medidas dos ângulos internos. Compare esta nova soma com as anteriores.

3. Após realizar as duas experiências, a que conclusão você chega?

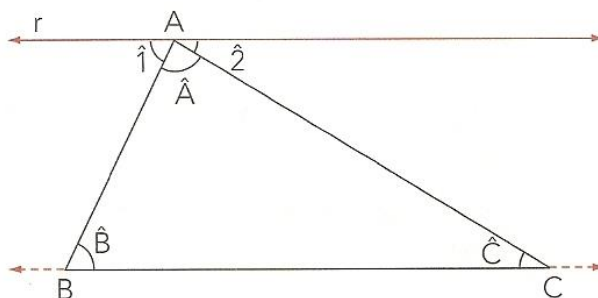
4. Acompanhe a demonstração:

Vamos considerar um triângulo ABC e observar os ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} do triângulo.



Fonte: Iezzi et al. Matemática e Realidade. Ensino Fundamental. 7ª série. Editora Atual

Pelo vértice A , vamos traçar uma reta r paralela ao lado \overline{BC} e observar os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$.



Fonte: Iezzi et al. Matemática e Realidade. Ensino Fundamental. 7ª série. Editora Atual

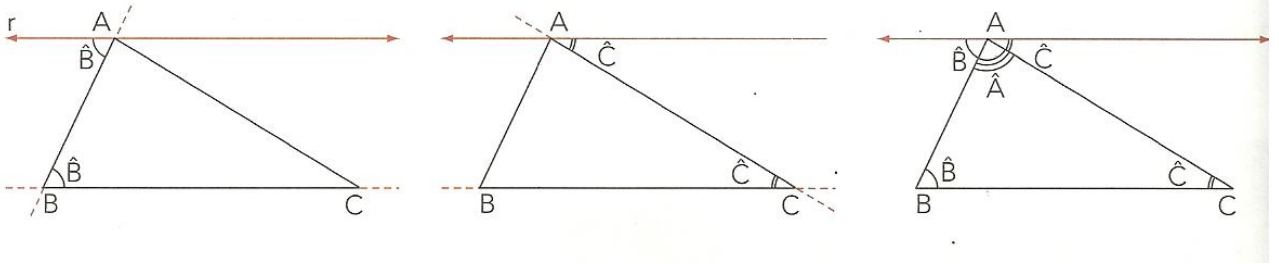
Do paralelismo de r e \overrightarrow{BC} , considerando-se a transversal \overrightarrow{AB} , decorre que:

$$\hat{1} \equiv \hat{B}$$

Do paralelismo de r e \overrightarrow{BC} , considerando-se a transversal \overrightarrow{AC} , decorre que:

$$\hat{2} \equiv \hat{C}$$

Substituindo então $\hat{1}$ por \hat{B} e $\hat{2}$ por \hat{C} , temos:



Fonte: Iezzi et al. Matemática e Realidade. Ensino Fundamental. 7ª série. Editora Atual

Observando o triângulo da direita e somando os ângulos que têm vértice em A , concluímos que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \equiv \text{ângulo raso}$$

Resumindo: **A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .**

5. Com base no que você acabou de ver, responda:

a) Se o $\triangle ABC$ tem \hat{A} de 47° e \hat{B} de 103° , qual é a medida do \hat{C} ?

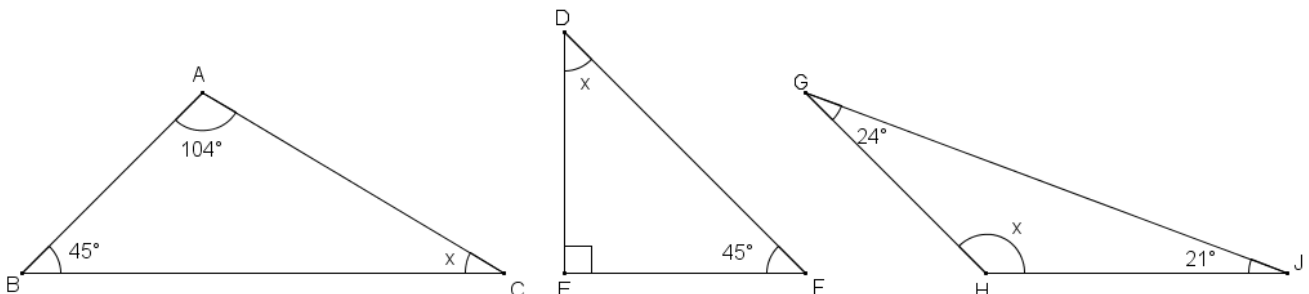
b) Se os três ângulos internos de um triângulo são congruentes (de medidas iguais), qual é a medida de cada um?

c) É possível desenhar um triângulo cujos ângulos internos medem 90° , 50° e 60° ? Justifique.

d) Um triângulo pode ter dois ângulos internos retos? Por quê?

e) Um triângulo pode ter um ângulo interno agudo, um obtuso e um reto? Justifique.

6. Em cada item, calcule o valor de x .



ATIVIDADE VII – Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

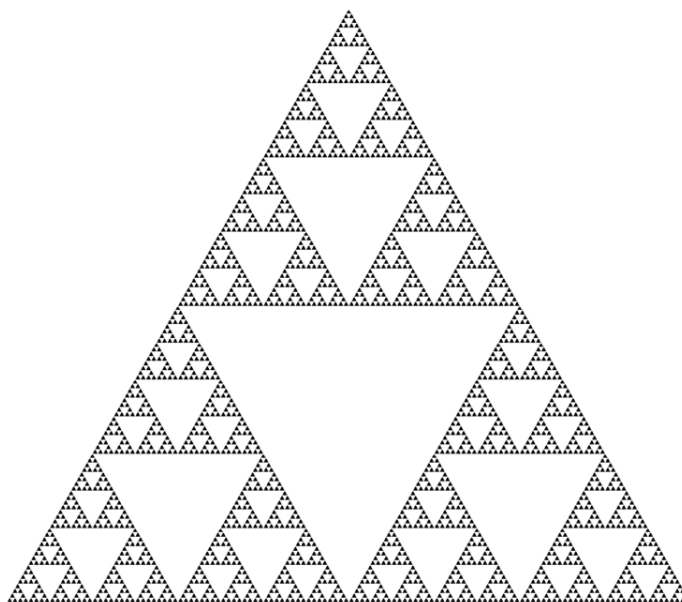
1. Fractais (do latim fractus, fracção, quebrado) são formas em que as partes são semelhantes ao todo.

Vamos aprender a construir um fractal. Para isso, você precisa de régua, malha triangular e caneta preta.

Siga as instruções abaixo:

- *Construa na malha triangular um triângulo equilátero de lado 16.*
- *Marque o ponto médio de cada um de seus lados.*
- *Construa segmentos unindo esses pontos médios.*
- *Quantos triângulos você possui agora?*
- *Para cada triângulo, exceto o do centro da figura, marque o ponto médio de cada um de seus lados e construa segmentos unindo esses pontos médios.*
- *Repita a operação quantas vezes o desenho permitir.*

Esse fractal é conhecido pelo nome de **Triângulo de Sierpinski**



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski
Acesso: 02/03/2015

a) Como esses triângulos são classificados quanto às medidas de seus lados?

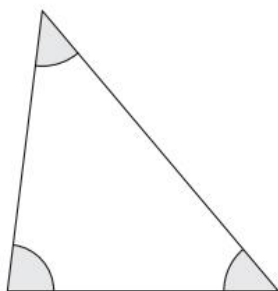
b) Registre na tabela a medida dos lados e dos ângulos em cada etapa da construção:

Etapa	Medida dos lados	Medida dos ângulos
0		
1		
2		
3		
4		

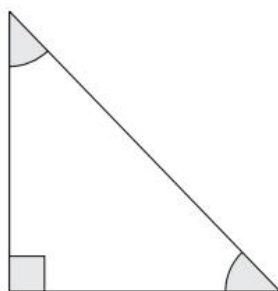
c) Através da observação dos dados registrados na tabela, percebemos que nesses triângulos equiláteros os ângulos internos medem 60° cada um. Esse fato é válido para qualquer triângulo equilátero? Por quê?

2. Os triângulos podem ser classificados em relação aos ângulos. Levando-se em consideração que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180° , podem ocorrer as seguintes situações:

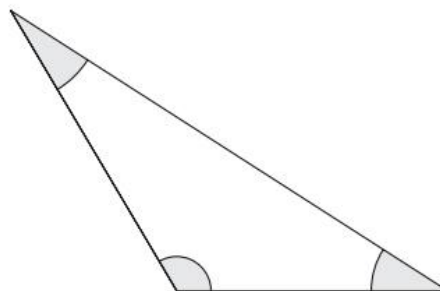
- Os três ângulos são agudos. O triângulo é **acutângulo**.
- Um dos ângulos é reto e os outros dois são agudos. Nesse caso, o triângulo é **retângulo**.
- Um dos ângulos é obtuso e os outros dois são agudos. Temos um triângulo **obtusângulo**.



Acutângulo

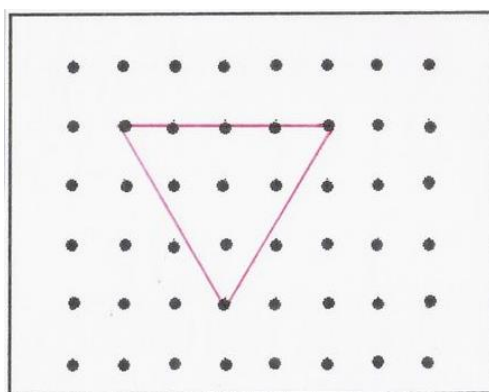


Retângulo



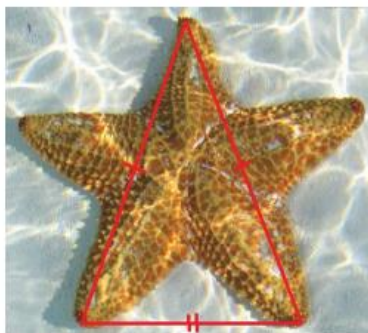
Obtusângulo

3. Usando o geoplano e elásticos coloridos, construa triângulos e classifique-os quanto aos ângulos. Veja o exemplo:

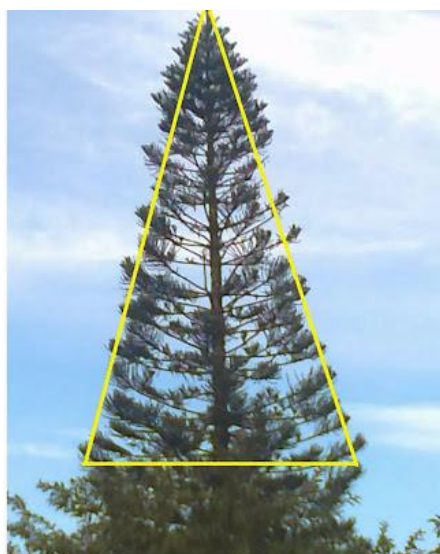
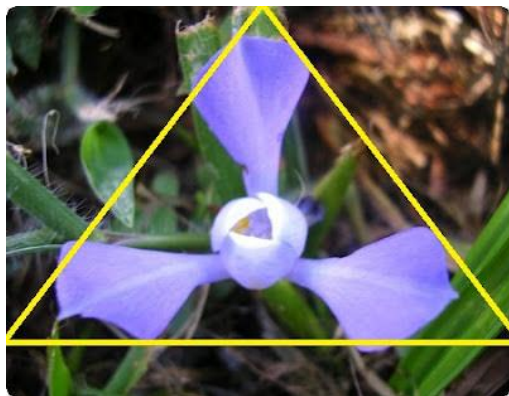


Triângulo acutângulo

4. Classifique cada forma triangular destacadas nessas imagens quanto aos lados e quanto aos ângulos.



5. Em relação aos ângulos, todos os triângulos destacados abaixo são classificados como triângulos _____.



Fonte: <http://frankderodrigues.blogspot.com.br/p/geometria.html>
Acesso: 02/03/2015

6. Dois ângulos de um triângulo medem, respectivamente, 45° e 57° . O triângulo é acutângulo, retângulo ou obtusângulo?

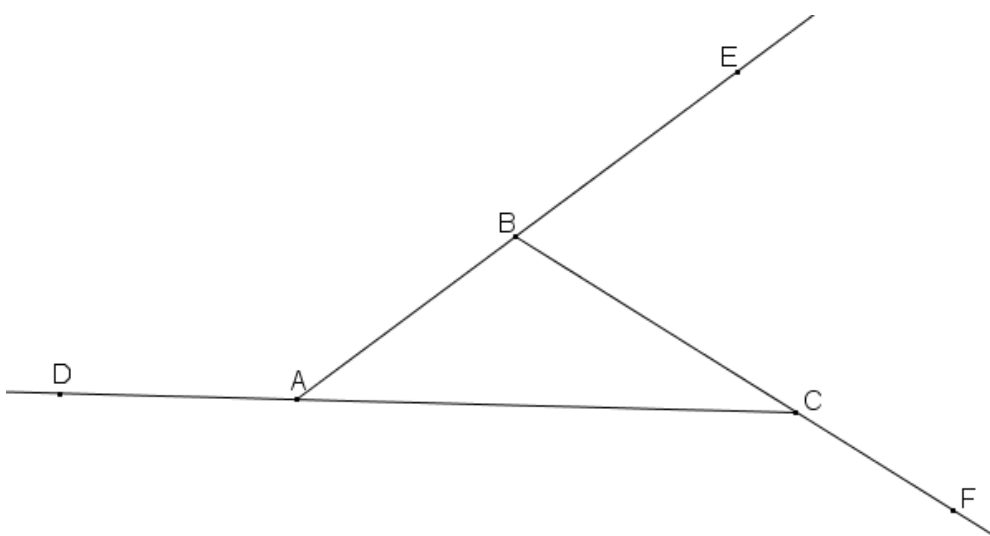
7. Um triângulo pode ter dois ângulos obtusos? E dois ângulos retos?

8. Mostre que em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes (iguais).

ATIVIDADE VIII – Ângulos externos de um triângulo

1. Os polígonos também têm ângulos externos. No triângulo ABC , abaixo, um dos ângulos externos é o ângulo $D\hat{A}B$ que se obtém construindo a semirreta CA (prolongando o lado AC) e o ponto D exterior ao segmento de reta AC .

São igualmente ângulos externos os ângulos $E\hat{B}C$ e $F\hat{C}A$.



a) Pinte os ângulos internos de vermelho e os ângulos externos de azul.

b) Escreva a relação entre a medida do ângulo interno e a do ângulo externo de cada vértice do triângulo.

c) Qual é o valor da soma $B\hat{A}C + D\hat{A}B + C\hat{B}A + E\hat{B}C + A\hat{C}B + F\hat{C}A$?

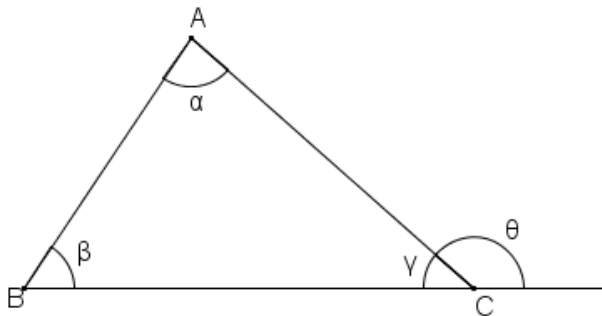
d) Sabendo que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180° , é possível saber o valor da soma dos ângulos externos desse triângulo? Como?

e) A conclusão tirada do item anterior permanece válida se considerarmos outro triângulo? Por quê?

f) Conclui-se que:

Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos externos é sempre igual a 360° .

2. Considere o triângulo ABC a seguir:



a) Escreva a relação existente entre as medidas dos ângulos internos desse triângulo.

b) Qual a relação entre as medidas dos ângulos γ e θ ?

c) Com base nessas duas igualdades que você determinou, temos:

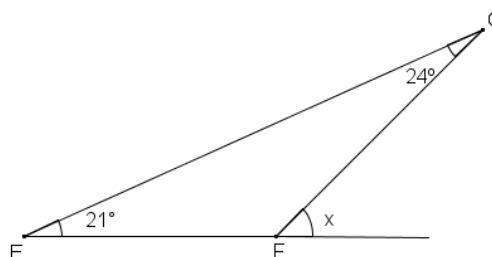
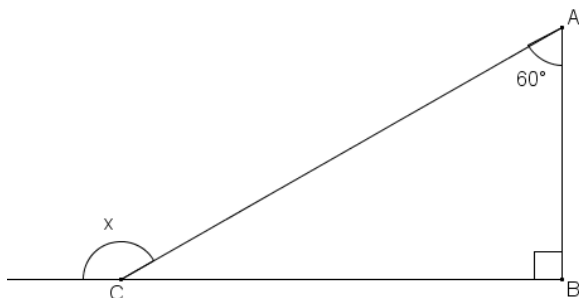
$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= \gamma + \theta \\ \alpha + \beta &= \gamma + \theta - \gamma \\ \alpha + \beta &= \theta\end{aligned}$$

d) A conclusão tirada do item anterior permanece válida se considerarmos outro triângulo? Por quê?

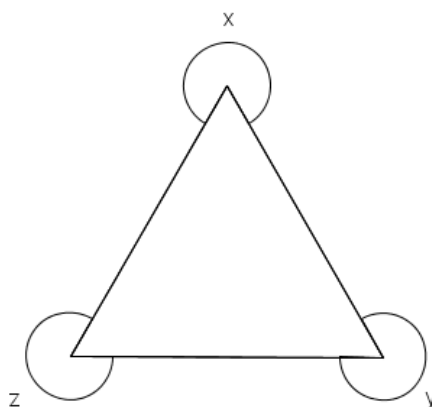
e) Conclui-se que:

A medida de qualquer ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

3. Em cada item, calcule o valor de x :



4. Calcule a soma $x + y + z$ na seguinte figura:



Anexos

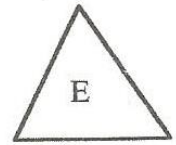
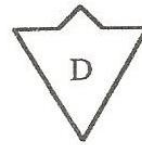
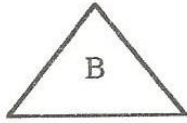
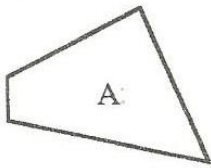
ANEXO A

Teste de van Hiele

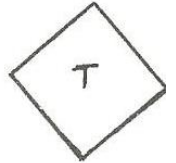
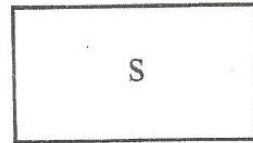
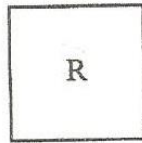
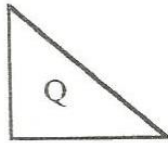
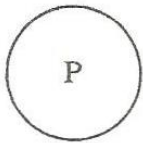
TESTE DE VAN HIELE

Nome: Turma:..... Idade:

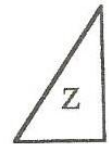
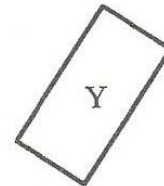
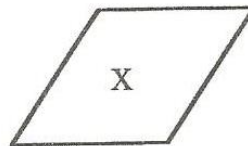
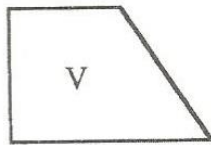
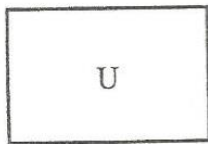
1- Assinale o(s) triângulo(s):



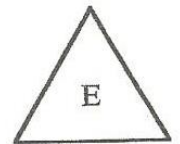
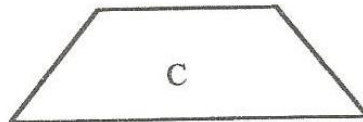
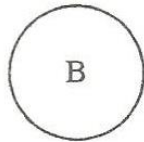
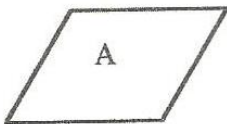
2- Assinale o(s) quadrado(s):



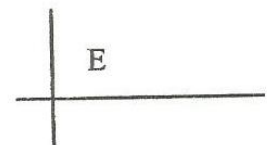
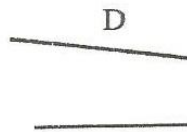
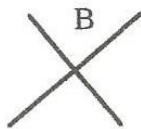
3- Assinale o(s) retângulo(s):



4- Assinale o(s) paralelogramo(s):



5- Assinale os pares de retas paralelas:

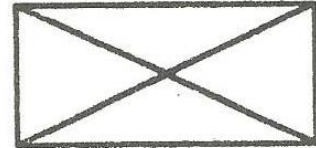


Básico:	S
	N

Nome: Turma: Idade:.....

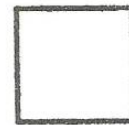
6- No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

- a) Têm 4 ângulos retos.
- b) Têm lados opostos paralelos.
- c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
- d) Têm os 4 lados iguais.
- e) Todas são verdadeiras.



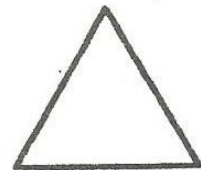
7- Dê 3 propriedades dos quadrados:

- 1-.....
- 2-.....
- 3-.....



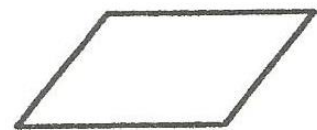
8- Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

- (a) Pelo menos um dos ângulos mede 60° .
- (b) Um dos ângulos mede 90° .
- (c) Dois ângulos têm a mesma medida.
- (d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
- (e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

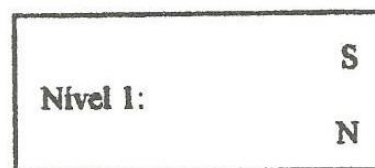


9-Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

- 1-.....
- 2-.....
- 3-.....



10-Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.



Nome:..... Turma:..... Idade:.....

11- Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:



12- Os quatro ângulos A,B,C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

- (a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?
- (b) Por que?.....
- (c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?

13- Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Por que?

14- Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.

(II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

- (a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
- (b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
- (c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
- (d) I e II não podem ser ambas falsas.
- (e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15- Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados;

- (a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
- (b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
- (c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
- (d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados
- (e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Nível 2:	S
	N