



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ANTONIO FRANCISCO DE OLIVEIRA VELOSO

**UMA PROPOSTA PARA A UTILIZAÇÃO DOS VETORES
COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE GEOMETRIA**

Palmas - TO
2015

ANTONIO FRANCISCO DE OLIVEIRA VELOSO

**UMA PROPOSTA PARA A UTILIZAÇÃO DOS VETORES
COMO FERRAMENTA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DE GEOMETRIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática. Orientadora: Prof^a. Dr^a. Hellena Christina Fernandes Apolinário.

Palmas - TO
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

V443p Veloso, Antonio Francisco de Oliveira.
 Uma proposta para a utilização dos vetores como ferramenta de
 resolução de problemas de geometria. / Antonio Francisco de Oliveira
 Veloso. – Palmas, TO, 2015.
 66 f.

 Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do
 Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-
 Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2015.
 Orientadora : Profª Drª Hellen Christina Fernandes Apolinário.

 1. Vetores. 2. Geometria Plana. 3. Geometria Analítica. 4.
 Resolução de problemas. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

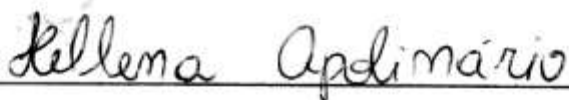
ANTONIO FRANCISCO DE OLIVEIRA VELOSO

UMA PROPOSTA PARA A UTILIZAÇÃO DOS VETORES COMO FERRAMENTA
DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA

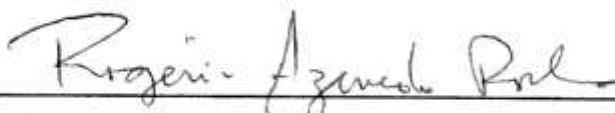
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientadora: Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário.

Aprovada em 31 / 07 / 2015

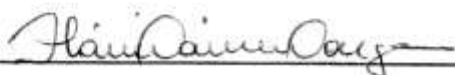
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (Orientadora-UFT)



Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza (IFG)

À minha querida esposa, Susiane Oliveira.
Aos meus filhos, Albert Oliveira e Yohann Oliveira.
Ao meu irmão, Anselmo Oliveira.
E aos meus pais, Francisco Veloso e Cecília Oliveira (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço a Deus, em primeiro lugar por ter me dado forças e sabedoria para realizar este trabalho, dando-me todas as condições suficientes para a conclusão deste mestrado.

À minha esposa Susiane Oliveira, pelo apoio e paciência desde o exame de acesso até a conclusão deste trabalho.

Aos meus filhos Albert Oliveira e Yohann Oliveira pela compreensão de tantas vezes ficar sem a minha presença, por estar envolvido nas atividades do curso, que foram meu alento nas horas mais difíceis.

À minha orientadora, Professora Doutora Hellen Christina Fernandes Apolinário, pela orientação, incentivo e contribuições dadas ao texto.

Aos meus colegas de turma pelo dois anos de convivência e enriquecimento intelectual, em particular a Lucas de Lucca, Jairo Barros, Paulo Roberto e Raylson Carneiro.

Aos membros da Sociedade Brasileira de Matemática, pela iniciativa de estimular e acreditar na melhoria do ensino de matemática através deste mestrado.

À Universidade Federal do Tocantins nas pessoas do professor coordenador Andrés Lázaro Barraza De La Cruz e dos professores Pedro Alexandre da Cruz, Gilmar Pires Novaes, Christian José Quintana Pinedo, Rogério Azevedo Rocha e Betty Clara Barraza La Cruz, o meu muito obrigado pelos conhecimentos transmitidos e pela dedicação aos alunos.

Agradeço aos professores Rui Marques Carvalho, Rafael Torres Anchieta e Enilton de Abreu Teixeira pela ajuda com o programa Latex e à professora Solange Francisca da Silva Gonçalves pela ajuda com a correção ortográfica.

*A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.
(Albert Einstein)*

Resumo

Este presente trabalho surgiu da observação da necessidade de uma abordagem vetorial à problemas relacionados as geometrias plana e analítica no ensino médio. Acreditamos que os vetores possibilitam o entendimento de propriedades geométricas de forma bem mais trivial e elegante. Neste sentido mostramos como explorar propriedades das figuras geométricas e resolver problemas relativos às geometrias usando os vetores. Sob esse prisma fizemos uma abordagem conceitual dos vetores com suas propriedades com o intuito de utilizar os conceitos na resolução de problemas. Nesse contexto, foi possível uma transição entre a Álgebra e a Geometria de modo natural contribuindo para o entendimento de conceitos fundamentais dos alunos.

Palavras-chave: Vetores, Geometria, Resolução de problemas.

Abstract

This present work arose from the observation of the need for a vector approach to problems the flat and analytic geometry in high school. We believe that the vectors enable an understanding of geometric properties of far more trivial and elegant way. In this sense we show how to exploit properties of geometric figures and solve problems concerning the geometries using vectors. In this light we made a conceptual approach of the vectors with their properties in order to use the concepts in solving problems. In this context, a transition between Algebra and Geometry natural way of contributing to the understanding of fundamental concepts of the students was possible.

Key-words: Vectors, Geometry, Problems solving.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Segmentos orientados opostos	15
Figura 2 – Segmentos orientados paralelos	16
Figura 3 – Segmentos orientados colineares	16
Figura 4 – vetor oposto	17
Figura 5 – Adição de dois vetores	18
Figura 6 – regra do paralelogramo	19
Figura 7 – Propriedade Associativa	19
Figura 8 – Propriedade Comutativa	20
Figura 9 – Elemento Oposto	20
Figura 10 – Multiplicação de um número real por vetor	21
Figura 11 – Soma de um ponto com um vetor	21
Figura 12 – Ângulo entre dois vetores	22
Figura 13 – Base média de um triângulo	24
Figura 14 – Trapézio de bases AB e CD	26
Figura 15 – Quadrilátero convexo	28
Figura 16 – Quadrilátero não-convexo	30
Figura 17 – Encontro das diagonais de um paralelogramo	31
Figura 18 – Quadrilátero ABCD	32
Figura 19 – Baricentro de um triângulo	34
Figura 20 – Triângulo ABC	35
Figura 21 – Diagonais de um losango	36
Figura 22 – Ponto no plano Cartesiano	38
Figura 23 – Quadrantes no plano cartesiano	39
Figura 24 – Distância entre dois pontos	41
Figura 25 – Ponto médio de um segmento AB	42
Figura 26 – Igualdade de vetores em coordenadas	44
Figura 27 – Representando vetores no plano Cartesiano	44
Figura 28 – Ângulo entre dois vetores	46
Figura 29 – Diferença entre os vetores v e w	47
Figura 30 – Rotação entre dois vetores	48
Figura 31 – Divisão de segmentos	50
Figura 32 – Mediana da hipotenusa	51
Figura 33 – Quadrados no plano	52
Figura 34 – Diagonal do quadrado	56
Figura 35 – Ângulo entre as diagonais de um retângulo	57
Figura 36 – Trapézio isósceles ABCD	58

Figura 37 – Ortocentro de um triangulo	60
Figura 38 – Ângulo constante	61
Figura 39 – Ângulo constante 2	62
Figura 40 – Mapa do tesouro	63
Figura 41 – Mapa do tesouro com coordenadas	63

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	NOÇÕES PRELIMINARES	15
2.1	Equipolência de segmentos orientados	15
2.2	Adição de vetores	18
2.3	Multiplicação de um número real por vetor	20
2.4	Soma de um ponto com um vetor	21
2.5	Produto Interno	22
3	PROPOSTA DE ATIVIDADES I	24
4	PLANO CARTESIANO	38
4.1	Posições de um ponto em relação ao sistema	39
4.2	Distância entre dois pontos do plano	40
4.3	Coordenadas do ponto médio de um segmento	41
5	VETORES NO PLANO	43
5.1	Vetores no plano	43
5.2	Operações com vetores no plano	44
5.2.1	Adição de vetores em coordenadas	44
5.2.2	Multiplicação de vetores por escalares em coordenadas	45
5.2.3	Propriedades das operações com vetores	45
5.3	Produto interno	46
6	PROPOSTA DE ATIVIDADES II	49
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
	REFERÊNCIAS	66

1 Introdução

A presente dissertação tem como principal objetivo mostrar os vetores pela perspectiva da matemática, com o intuito de resolver e demonstrar propriedades geométricas por meio dos vetores, com isso ratificar a grande utilidade dos vetores como uma ferramenta poderosa na resolução de problemas da geometria plana e analítica.

O estudo dos vetores no Ensino Médio brasileiro fica a cargo do professor de Física, este por sua vez apresenta os vetores única e exclusivamente com a intenção de usá-los para resolver problemas relativos a sua disciplina.

No entanto, os vetores podem e devem ser utilizados como ferramenta de resolução de problemas puramente matemáticos, todavia a não exploração do assunto pelos professores de matemática deixa a ideia de que eles são elementos físicos e não matemáticos.

Com o intuito de chamar a atenção para o tema escrevemos este trabalho na intenção de motivar e encorajar os docentes de matemática a abordar este assunto tão relevante em suas aulas de geometria, considerando que o mesmo servirá como um norte para que o tema seja abordado em sala de aula. O trabalho sistematiza na forma de apresentação de algumas propriedades operatórias de vetores que dá a sustentação teórica para a aplicação do estudo dos vetores na resolução de problemas da Geometria Plana e Analítica.

O trabalho desencadeia a seguinte questão: Por que os vetores não são lecionados nas aulas de matemática?

A definição de vetores dada por (JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2007) ao introduzir o conceito de vetores em seu livro do 1º Ano do ensino médio: "É um ente matemático caracterizado pelo que há de comum ao conjunto dos segmentos orientados acima descrito: o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido". Os docentes de Física logo no 1º Ano se utilizam dos vetores para lecionar assunto como dinâmica, gravitação universal, estática e hidrostática. Em todos esses segmentos da área da Física necessitam de análise e aplicação vetorial, então sendo os vetores um ente por que não utilizá-los para solucionar problemas puramente matemáticos?

Com a finalidade de respondermos o questionamento acima, no trabalho mostramos o ganho que o discente tem ao adquirir conhecimento sobre os vetores, nele exibimos vários problemas de difíceis soluções utilizando os conceitos das geometria euclidiana e analítica, que quando utilizamos os conceitos de vetores essas soluções podem ser obtidas de forma simplificada e muitas vezes de forma elementar e elegante.

A análise de conteúdo foi a metodologia escolhida para produzir uma proposta de

abordagem das Geometria Plana e Analítica sob a ótica vetorial, buscando estabilidade entre conceituação, manipulação e aplicação.

O presente texto está organizado em cinco capítulos, em que trouxemos a discussão os vetores e suas propriedades operatórias sem e com o uso de coordenadas bem como a aplicação acerca de problemas relevantes e interessantes relativos à Geometria.

No Capítulo 2, introduzimos o conceito de equipolência de segmentos orientados que é fundamento para a introdução do conceito de vetores, logo após abordamos o conceito de vetores por meio do conceito de equipolência de segmentos orientados, em seguida discorremos as operações com vetores bem como introduzimos o conceito de produto interno.

No Capítulo 3, utilizamos os conceitos abordados no capítulo anterior para resolução de questões relativas à Geometria Plana, problemas que por vezes só utilizando os axiomas e propriedades da geometria euclidiana pode ser um trabalho árduo, mas utilizando o conceito de vetores esses problemas são diluídos em operações básicas.

No Capítulo 4, fizemos uma abordagem sucinta do Plano Cartesiano e, de posse do conceito, abordamos dois resultados importantes para o prosseguimento do trabalho que são: distância entre dois pontos e coordenadas do ponto médio.

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo dos vetores no plano, onde fizemos uma breve revisão de segmentos equipolentes para em seguida definir os vetores no plano, onde abordamos novamente as operações de vetores só que desta feita fazendo uso das coordenadas. Em seguida tratamos do produto interno e suas respectivas propriedades.

No Capítulo 6, usamos a teoria do capítulo anterior para solucionarmos problemas de geometria plana utilizando o conceito de vetores no plano e usamos problemas atraentes de modo que o estudo da geometria analítica seja mais eficiente e educativo, na oportunidade empregamos problemas em que é necessário escolher um sistema de coordenadas adequado já que nos livros didáticos geralmente problemas de geometria analítica tudo já aparece em coordenadas dando a falsa impressão de que os problemas de geometria analítica devem sempre conter um sistema de coordenadas.

Propomos que a apresentação do trabalho seja feito em duas fases, que são:

Na primeira fase, propomos que a apresentação dos vetores no 2º Ano seja sem a utilização de coordenadas, na ocasião da apresentação dos conteúdos relativos à geometria plana por acreditar que os alunos já possuem ferramentas matemáticas suficientes para operar as propriedades necessárias nesta fase. Na atual conjuntura acreditamos que deve ser dispensado 5% da carga horária anual para a apresentação e aplicação dos conteúdos.

Na segunda fase, a proposta consiste em apresentar os vetores com a utilização das coordenadas no 3º Ano, quando estiver explorando a geometria analítica. Cremos que a

dedicação de 10% da carga horária anual seja a ideal.

A seguir elencamos os objetivos a serem alcançados por este trabalho:

- Utilizar as propriedades operatórias: adição, diferença, multiplicação de vetores por escalar, soma de um vetor com um ponto e produto interno para resolver problemas de geometria plana;
- Aplicar o conceito de produto interno;
- Realizar rotação com vetores no plano;
- Resolver problemas de geometria plana utilizando a geometria analítica por meio dos vetores.

2 Noções Preliminares

Este capítulo dedica-se à apresentação de alguns aspectos acerca dos vetores com o intuito dar a fundamentação teórica necessária para aplicarmos à geometria plana, esta fundamentação está alicerçada em (BOULOS; CAMARGO, 1987) e em (SANTOS, 1972).

O que pretendemos neste capítulo é, partindo do conceito de segmento orientado, apresentar formalmente os vetores, nossa ferramenta de resolução dos problemas relativos à Geometria.

2.1 Equipolência de segmentos orientados

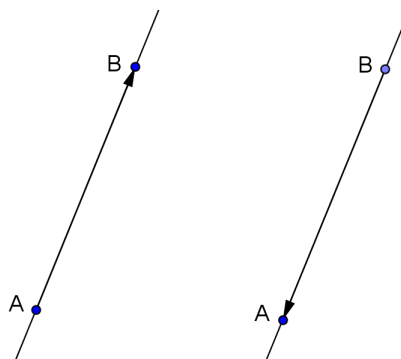
Os métodos algébricos da Geometria cartesiana de Fermat e Descartes influenciaram enormemente a matemática ao longo de quase 200 anos até que foram necessários métodos mais diretos e livres de coordenadas na geometria.

Em 1832, Guisto Bellavitis publica um trabalho onde é apresentado o conceito de equipolência entre segmentos que é, basicamente, a noção de vetor que conhecemos e que foi formalizada em 1844 por Hermann Grausmann no seu *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (Teoria de Extensão Linear, um novo ramo da Matemática).

A seguir mostramos a ideia de Bellavitis ao classificar segmentos orientados do plano a partir da relação de equipolência.

O segmento orientado com origem em A e extremidade em B é indicado por (A, B). Isto é, no segmento AB estabelecemos um sentido de percurso (orientação) de A para B. Nessa situação, dizemos que o segmento BA está orientado com sentido de percurso oposto ao do segmento AB (ver Figura 1).

Figura 1 – Segmentos orientados opostos



Definição 2.1.1. Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes, e escrevemos $(A, B) \sim (C, D)$, quando satisfazem às seguintes propriedades:

1. têm o mesmo comprimento;
2. são paralelos ou colineares;
3. têm o mesmo sentido.

Para uma melhor clareza da Definição 2.1.1, observe as Figuras 2 e 3:

Figura 2 – Segmentos orientados paralelos

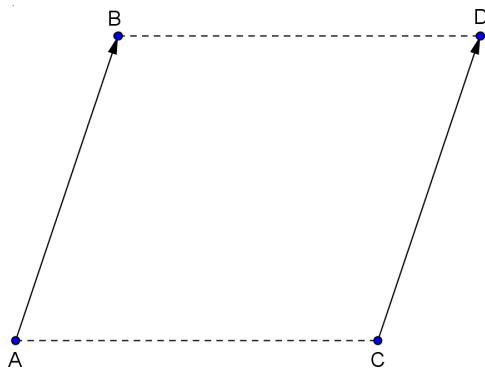
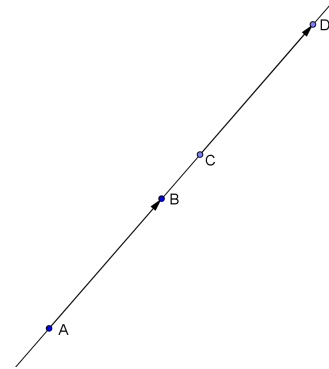


Figura 3 – Segmentos orientados colineares



A relação de equipolência goza das seguintes propriedades:

- Reflexividade: todo segmento orientado do espaço é equipolente a si mesmo.
- Simetria: se o segmento orientado (A, B) é equipolente ao segmento orientado (A', B') , então (A', B') é equipolente a (A, B) .
- Transitividade: se o segmento orientado (A, B) é equipolente ao segmento orientado (A', B') e se o segmento orientado (A', B') é equipolente ao segmento orientado (A'', B'') , então (A, B) é equipolente a (A'', B'') .

Devido às três propriedades acima, é usual dizer-se que a equipolência é uma relação de equivalência.

Definição 2.1.2. Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor que tem (A, B) como representante será indicado por \overrightarrow{AB} .

Deve estar claro que, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equipolentes, então os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} são iguais.

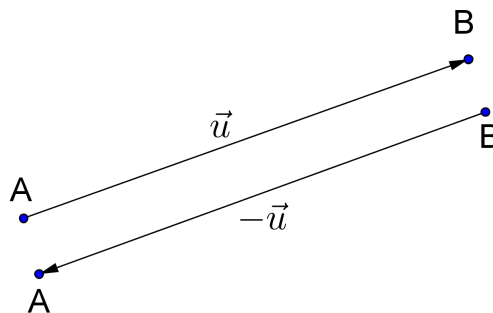
Outro aspecto importante é a ampla liberdade que você tem na escolha do representante do vetor. Você só precisa respeitar o comprimento, a direção e o sentido - a posição é arbitrária!

Os representantes do vetor nulo são todos os segmentos orientados nulos, ou seja, do tipo (A, A) , com origem e extremidade coincidentes.

Definição 2.1.3. *Vetor nulo é o vetor que tem como representante um segmento orientado nulo. É indicado por $\vec{0}$.*

Definição 2.1.4. *Se (A, B) é representante de um vetor \vec{u} , o vetor oposto de \vec{u} , indicado por $-\vec{u}$, é o vetor que tem (B, A) , ou qualquer segmento orientado equipolente a (B, A) , como representante (ver Figura 4). Portanto, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.*

Figura 4 – vetor oposto



Definição 2.1.5. *Sejam \vec{u} e \vec{v} , dois vetores distintos. Então são válidas as seguintes propriedades:*

- *Os vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} são paralelos se um representante de \vec{u} é paralelo a um representante de \vec{v} (neste caso, qualquer representante de um dos vetores é paralelo a qualquer representante do outro). Indica-se por $\vec{u} // \vec{v}$.*
- *Os vetores não nulos e paralelos \vec{u} e \vec{v} são de mesmo sentido se um representante de \vec{u} e um de \vec{v} são de mesmo sentido.*
- *Os vetores não nulos e paralelos \vec{u} e \vec{v} são de sentidos contrários se um representante de \vec{u} e um de \vec{v} são de sentidos contrários.*
- *O vetor nulo é paralelo a qualquer vetor.*

O último item, embora não tenha significado geométrico, é útil para simplificar a linguagem. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então \vec{u} e $-\vec{u}$ são de mesma direção e sentido contrário, respectivamente.

Proposição 2.1.1. *Dados vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , então:*

- Se \vec{u} e \vec{v} são de mesmo sentido e o mesmo acontece com \vec{v} e \vec{w} , então \vec{u} e \vec{w} são de mesmo sentido.
- Se \vec{u} e \vec{v} são de sentidos contrários e o mesmo acontece com \vec{v} e \vec{w} , então \vec{u} e \vec{w} são de sentidos contrários.
- Se \vec{u} e \vec{v} são de mesmo sentido e \vec{v} e \vec{w} de sentidos contrários, então \vec{u} e \vec{w} são de sentidos contrários.

Definição 2.1.6. Norma (ou módulo, ou comprimento) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes. A norma do vetor \vec{u} é indicada por $|\vec{u}|$. Um vetor é unitário se sua norma é 1.

A seguir elencamos as seguintes propriedades da norma:

1. $|\vec{u}| \geq 0$; se $|\vec{u}| = 0$ se, e somente se, $\vec{u} = \vec{0}$.
2. $|\lambda \cdot \vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

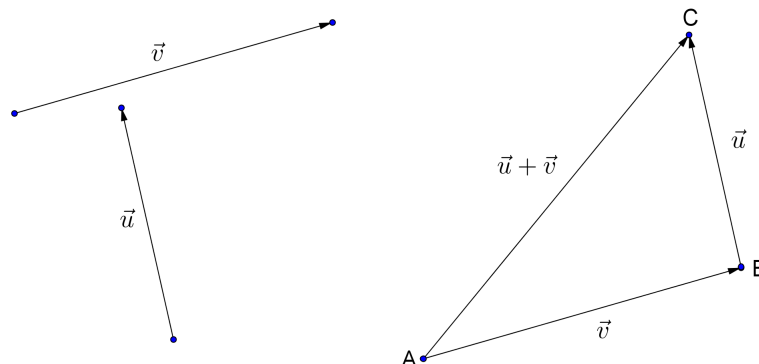
Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos. Então, $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, \vec{u} e \vec{v} têm normas iguais são de mesma direção e de mesmo sentido.

2.2 Adição de vetores

Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores. Definimos o conceito de soma de vetores e suas propriedades básicas.

Definição 2.2.1. Dados \vec{u} e \vec{v} , sejam (A, B) um representante qualquer de \vec{u} e (B, C) o representante de \vec{v} que tem origem em B (ver Figura 5). O vetor soma de \vec{u} com \vec{v} , indicado por $\vec{u} + \vec{v}$, é o vetor que tem (A, C) por representante: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

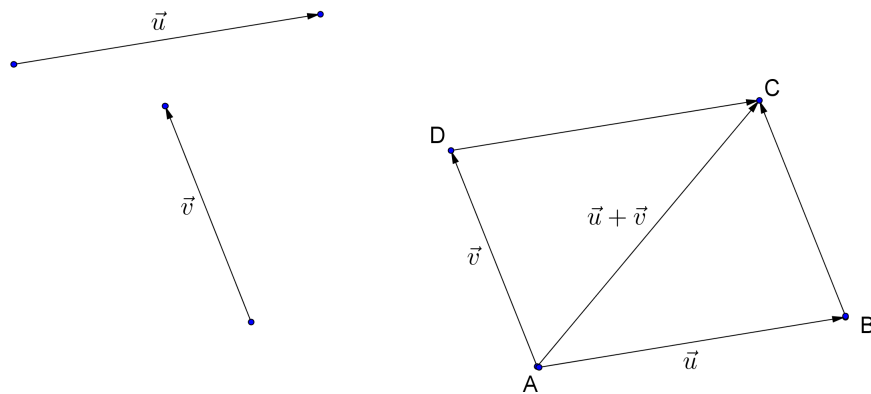
Figura 5 – Adição de dois vetores



Pela sua enorme utilidade, vamos registrar que, quaisquer que sejam os pontos A, B e C, vale a igualdade $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Pode-se também adotar a regra do paralelogramo, que consiste em escolher representantes de \vec{u} e \vec{v} com a mesma origem A (veja (A, B) e (A, D) na Figura 6) e construir o paralelogramo ABCD. O segmento orientado (A, C) é um representante de $\vec{u} + \vec{v}$, já que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ e a diagonal completa o triângulo ABC.

Figura 6 – regra do paralelogramo



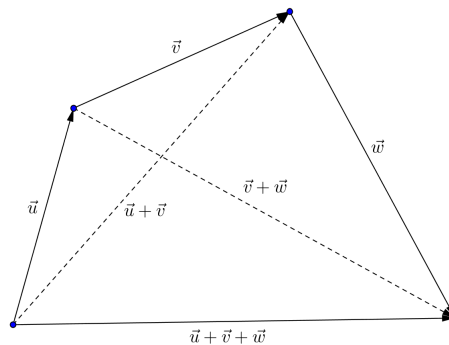
Dados os vetores \vec{u} e \vec{v} , a soma de \vec{u} com o oposto de \vec{v} é chamada diferença entre \vec{u} e \vec{v} (nessa ordem) e é indicada por $\vec{u} - \vec{v}$. Assim $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

São muito importantes as propriedades que enunciamos a seguir, elas constituem as primeiras regras do cálculo de vetores. Não fazemos as demonstrações, mas as figuras seguintes são muito elucidativas.

Proposição 2.2.1. *Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} vetores quaisquer. Valem as propriedades:*

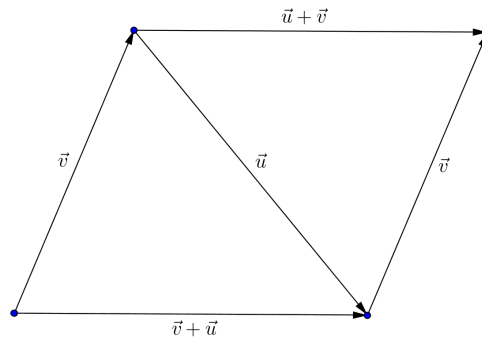
- **Propriedade Associativa**, isto é, se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores quaisquer, então $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Figura 7 – Propriedade Associativa



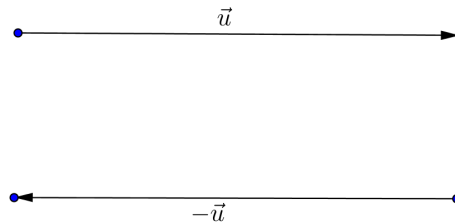
- **Propriedade Comutativa**, isto é, se \vec{u} e \vec{v} são vetores quaisquer, então $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Figura 8 – Propriedade Comutativa



- **Elemento Neutro**, isto é, se \vec{u} é um vetor qualquer, então $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$. Considerando que todos os pontos do espaço são equipolentes entre si, portanto o conjunto de todos os pontos do espaço é um vetor, que será chamado de vetor zero e indicamos por $\vec{0}$.
- **Elemento Oposto**, isto é, dado um vetor \vec{u} qualquer, existe um vetor que somado a \vec{u} dá como resultado o vetor nulo: trata-se do oposto de \vec{u} , que se indica por $-\vec{u}$. Assim, $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Figura 9 – Elemento Oposto



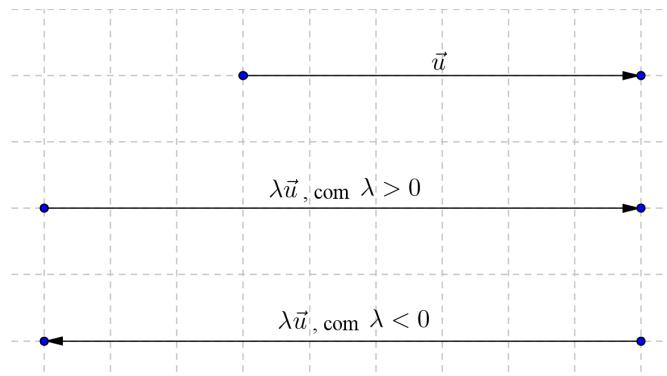
2.3 Multiplicação de um número real por vetor

Outra operação que definimos no conjunto de vetores é a operação de multiplicação de um número real por vetor, que a cada número real $\lambda \in \mathbb{R}$ (também chamado escalar) e a cada vetor \vec{u} associa o vetor $\lambda\vec{u}$, chamado produto do escalar λ pelo vetor \vec{u} .

Esta operação nos traz algumas consequências, que são:

1. Se $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = 0$, então $\lambda\vec{u} = 0$ (por definição);
2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq 0$, $\lambda\vec{u}$ é caracterizado por:
 - a) $\lambda\vec{u}$ é paralelo a \vec{u} ;
 - b) $\lambda\vec{u}$ e \vec{u} tem mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentidos contrários se $\lambda < 0$.

Figura 10 – Multiplicação de um número real por vetor



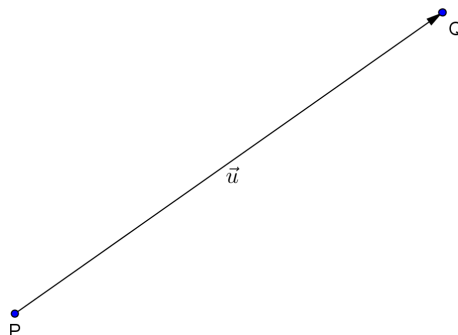
Vejam os quais são algumas das propriedades da multiplicação de um número real por vetor:

- **Propriedades Distributivas:** $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$ e $(\lambda + \theta)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \theta\vec{u}$;
- **Existência de elemento neutro multiplicativo:** $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;
- **Propriedade Associativa:** $\lambda(\theta\vec{u}) = (\lambda\theta)\vec{u} = \theta(\lambda\vec{u})$.

2.4 Soma de um ponto com um vetor

Dados um ponto P e um vetor \vec{u} , existe um único segmento orientado (P, Q) representante de \vec{u} . Isso nos permite definir uma operação que a cada ponto P e a cada vetor \vec{u} associa um único ponto Q , indicado por $P + \vec{u}$, chamado soma de P com \vec{u} . Assim, para todo P e para todo \vec{u} , então $P + \vec{u} = Q$ se, e somente se, $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, donde $P + \overrightarrow{PQ} = Q$ (ver figura 11).

Figura 11 – Soma de um ponto com um vetor



Usamos a notação $P - \vec{u}$ para indicar a soma do ponto P com o vetor oposto de \vec{u} : $P - \vec{u} = P + (-\vec{u})$.

Intuitivamente, podemos encarar $P + \vec{u}$ como resultado de uma translação do ponto P , translação essa determinada pelo vetor \vec{u} .

Vejam algumas propriedades dessa operação:

1. $P + \vec{0} = P$.
2. $P + \vec{u} = P + \vec{v}$ isto equivale a $\vec{u} = \vec{v}$.
3. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$.
4. $A + \vec{u} = B + \vec{u}$, isto implica em $A = B$.
5. $(P - \vec{u}) + \vec{u} = P$.

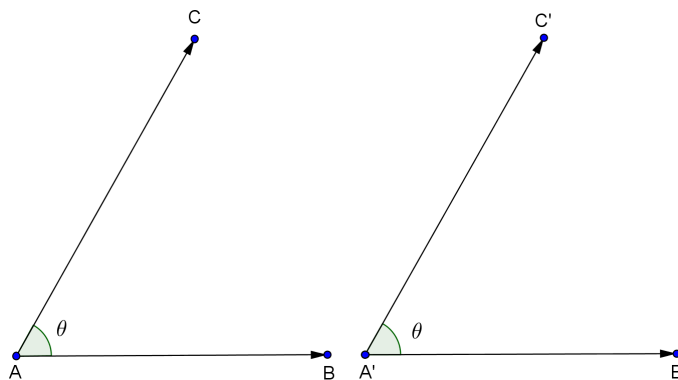
2.5 Produto Interno

Motivados pela expressão que determina o trabalho em mecânica vamos definir o produto interno de dois vetores. Essa operação associa a cada par \vec{u}, \vec{v} de vetores um número real que é indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

A fim de definirmos o produto interno necessitamos do conceito de ângulo entre dois vetores.

Definição 2.5.1. O ângulo entre os vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} indicado por θ , é definido como sendo o ângulo entre seus representantes. Mais precisamente, se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é, por definição, o ângulo entre os segmentos orientados (A, B) e (A, C) . Para que essa definição faça sentido, devemos perceber que θ não depende da escolha dos representantes (A, B) e (A, C) . Mais precisamente, percebemos que se (A', B') e (A', C') são também vetores \vec{u} e \vec{v} , respectivamente, então (veja a figura 12) o ângulo entre os segmentos orientados (A, B) e (A, C) é igual ao ângulo entre os segmentos orientados (A', B') e (A', C') .

Figura 12 – Ângulo entre dois vetores



Observamos que o ângulo \widehat{BAC} é o menor ângulo segundo o qual AB deve girar para se tornar colinear a AC. Esse ângulo é positivo se a rotação for no sentido anti-horário

e negativo caso contrário. Isso nos permite associar a cada ângulo θ seu ângulo negativo ou oposto $-\theta$.

Passemos agora à definição do produto interno.

Definição 2.5.2. *Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores não nulos. O produto interno do vetor \vec{u} pelo vetor \vec{v} , indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é definido por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$. Se um dos vetores \vec{u} ou \vec{v} for nulo definimos: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.*

O produto interno satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (Simetria).
2. $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle$ (Homogeneidade).
3. $\langle \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (Distributividade).

Observação: Se $\theta = 0$, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}|^2$, pois, $\cos\theta = 1$. Observe ainda que, se \vec{u} e \vec{v} são vetores não nulos, então $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ se, e somente se, $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um número inteiro. Por essa razão, dizemos que o vetor \vec{u} é perpendicular (ou ortogonal) ao vetor \vec{v} quando $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. De acordo com essa definição, o vetor nulo é perpendicular a todos os vetores do espaço. Na verdade, o vetor nulo é o único vetor que possui essa propriedade, isto é, se \vec{u} é um vetor tal que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ qualquer que seja o vetor \vec{v} , então $\vec{u} = \vec{0}$. Para provar isso, basta tomar, em particular, $\vec{v} = \vec{u}$, donde $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}|^2 = 0$ o que implica $\vec{u} = \vec{0}$.

3 Proposta de Atividades I

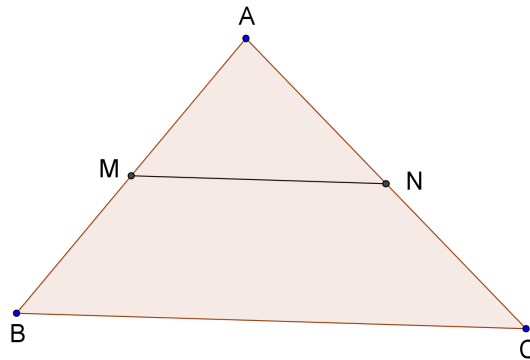
De posse dos resultados encontrados no Capítulo 2 iremos nesse capítulo mostrarmos as aplicações na Geometria Plana, nele iremos mostrar propriedades conhecidas de algumas figuras planas como também resolvemos alguns problemas interessantes por meio dos vetores.

PROBLEMA 1

(Base média de um triângulo) Seja ABC um triângulo qualquer, se M e N são pontos médios de AB e AC , respectivamente. Prove que $MN = \frac{BC}{2}$.

Considere o triângulo ABC da Figura 13 em que M e N são os pontos médios dos lados AB e AC , respectivamente.

Figura 13 – Base média de um triângulo



Demonstração. Seja $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Sabendo que M é o ponto médio de AB , logo $\overrightarrow{MA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2}$.

De modo análogo, N é o ponto médio de AC , logo $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$.

Daí segue que:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

$$\text{Como } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \text{ então: } \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC}}{2}.$$

$$\text{Portanto, } MN = \frac{BC}{2}. \quad \square$$

A base média de um triângulo é uma importante propriedade que nos dar embasamento para resolver alguns problemas de geometria e ela traz duas importantes consequências, que são:

1. A base média é paralela ao terceiro lado;
2. Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD , lados não paralelos AC e BD e supondo $AB \parallel CD$. Sejam, ainda M e N os pontos médios dos lados não paralelos AC e BD , respectivamente, e P e Q os pontos médios das diagonais AD e BC , também respectivamente. Prove que:

$$a) MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

$$b) PQ = \frac{AB - CD}{2}.$$

Demonstração. Para iniciarmos a demonstração, considere o trapézio $ABCD$ da Figura 14 em que M e N são os pontos médios dos lados AC e BD , respectivamente, e P e Q os pontos médios das diagonais AD e BC , respectivamente.

Agora vejamos o item (a).

$$\text{Seja } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \text{ (i) e } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} \text{ (ii).}$$

Somando (i) e (ii), temos

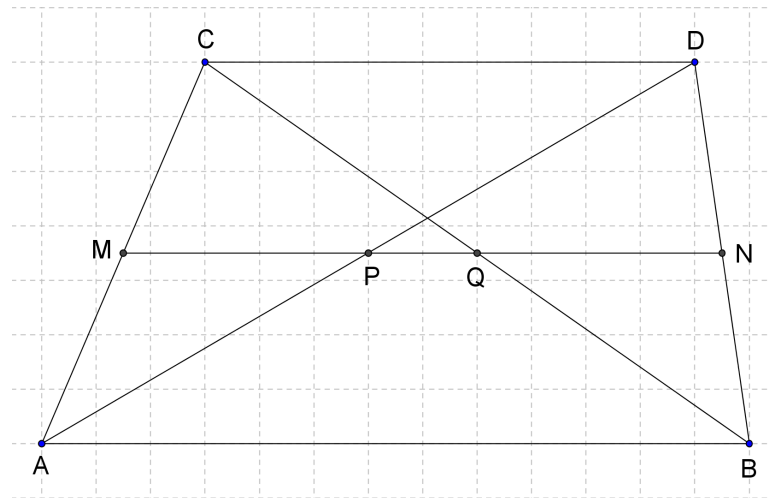
$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}.$$

Daí segue que M o ponto médio de AC , então

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MC}.$$

Figura 14 – Trapézio de bases AB e CD



$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CC}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

De modo análogo, segue que N o ponto médio de BD, então

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ND}$$

$$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DN}.$$

$$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{NN}$$

$$\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}.$$

Logo,

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2}.$$

$$\text{Portanto, } MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

Por fim, a demonstração do item (b).

$$\text{Seja } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \text{ (i) e } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ} \text{ (ii).}$$

Somando (i) e (ii), temos

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}.$$

Como P é o ponto médio da diagonal AD, então

$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA}.$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{AA}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}.$$

De modo análogo, Q é o ponto médio da diagonal BC, então

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$$

$$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CQ}.$$

$$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QQ}$$

$$\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CQ} = \vec{0}.$$

Logo,

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.$$

Como

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CC} \Rightarrow \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}.$$

Segue que

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}}{2}.$$

$$\text{Portanto, } PQ = \frac{AB - CD}{2}. \quad \square$$

O segmento MN é chamado de base média do trapézio, a base média do trapézio traz consigo duas conseqüências, que são:

1. A base média é paralela às bases;
2. Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então esta extremidade é ponto médio deste lado.

O segmento PQ também é conhecido como mediana de Euler, pois a demonstração deste fato foi dada por Leonhard Euler (1707-1783) o qual foi um dos maiores matemáticos (ou o maior) do século XVIII, pois sua obra é impressionante, pela quantidade e pela diversidade. Dentre algumas áreas em que Euler contribuiu, podemos citar a Álgebra, Teoria dos Números, Trigonometria, Cálculo Infinitesimal, Óptica e Geometria.

PROBLEMA 3

Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

A demonstração desse fato tem dois casos a considerar, primeiramente mostramos para um quadrilátero convexo e logo após generalizamos para um quadrilátero não-convexo.

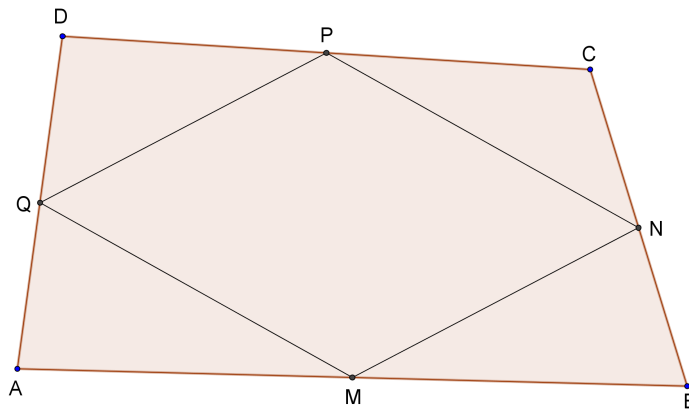
Para realizarmos a demonstração que MNPQ é um paralelogramo, sendo MNPQ o quadrilátero formado pelos pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, iremos usar o seguinte propriedade: “Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes então, ele é um paralelogramo”.

Logo, basta mostrar que $MN = QP$ e $NP = MQ$.

1º Caso: (quadrilátero convexo).

Demonstração. Considere o quadrilátero convexo ABCD da Figura 15 em que M, N, P e Q são os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente.

Figura 15 – Quadrilátero convexo



Seja $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ (i) e $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}$ (ii).

Somando (i) e (ii), daí segue

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}.$$

Multiplicando ambos os membros por 2, segue

$$2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}).$$

$$2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{PD} + 2\overrightarrow{DQ}.$$

Como M, N, P e Q são pontos médios de AB, BC, CD e DA, respectivamente,

Segue que: $2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CD}$ e $2\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DA}$.

Então,

$$2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$$

$$2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{AA}$$

$$2(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \vec{0}$$

Dividindo ambos os membros por 2, obtemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0} &\implies \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} + \overrightarrow{QP} \implies \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{QP} \\ \implies \overrightarrow{MN} + \vec{0} = \overrightarrow{QP} &\implies \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}. \end{aligned}$$

Logo, $MN = QP$.

De modo análogo, obtemos $NP = MQ$.

Seja $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}$ (i) e $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM}$ (ii).

Adicionando (i) e (ii), daí segue:

$$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM}.$$

Multiplicando ambos os membros por 2, segue

$$2(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM}) = 2(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{CP} + 2\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{AM}$$

Como N, P, Q e M são pontos médios de BC, CD, DA e AB, respectivamente.

Daí, $2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD}$, $2\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{DA}$ e $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$.

Então

$$2(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$$

$$2(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM}) = \overrightarrow{BB}$$

$$2(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM}) = \vec{0}$$

Dividindo ambos os membros por 2, obtemos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM} = \vec{0} &\implies \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0} + \overrightarrow{MQ} \implies \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QQ} = \overrightarrow{MQ} \\ \implies \overrightarrow{NP} + \vec{0} = \overrightarrow{MQ} &\implies \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} \end{aligned}$$

Logo, $NP = MQ$.

Portanto, como $MN = QP$ e $NP = MQ$, segue que MNPQ é um paralelogramo.

2º Caso: (quadrilátero não-convexo).

Considere o quadrilátero não-convexo ABCD da Figura 16 em que M, N, P e Q são os pontos médios dos lados BC, CD, DA e AB, respectivamente.

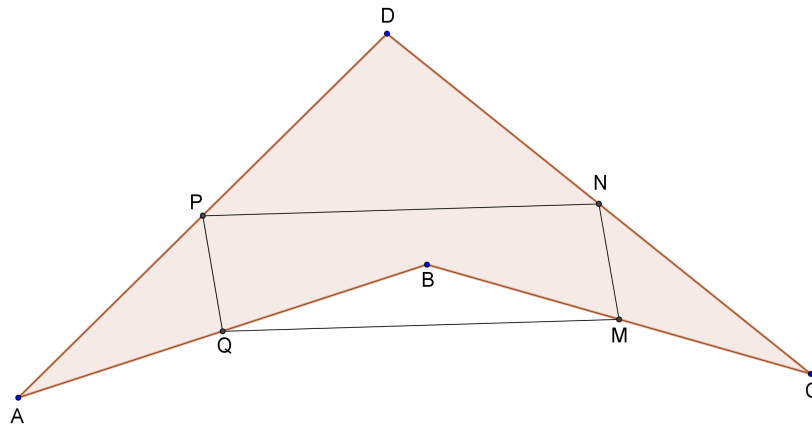
Observando a Figura 16, vemos que

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

Como P e N são pontos médios de DA e CD, respectivamente, segue que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{\overrightarrow{DA}}{2} \text{ e } \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CD}}{2}. \text{ Logo,}$$

Figura 16 – Quadrilátero não-convexo



$$\overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{DA}}{2} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2}.$$

Observe que: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, então

$$\overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{DA}}{2} + \overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2}.$$

Multiplicando ambos os membros por 2, obtemos

$$2\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.$$

Observe que $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DD}$, daí

$$2\overrightarrow{PN} = \vec{0} + \overrightarrow{AC}$$

$$2\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AC}$$

Como Q e M são pontos médios de AB e BC, utilizando o resultado do PROBLEMA 1 temos que QM é base média do triângulo ABC e logo $AC = 2QM$, então

$$2\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{QM}.$$

Dividindo ambos os membros por 2, obtemos:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$$

Logo, $PN = QM$.

Além disso

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ}.$$

Como $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM} \Rightarrow \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MQ} \Rightarrow \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{QQ} \Rightarrow \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$.

Então

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{0} + \overrightarrow{NM}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$$

Logo, $PQ = NM$.

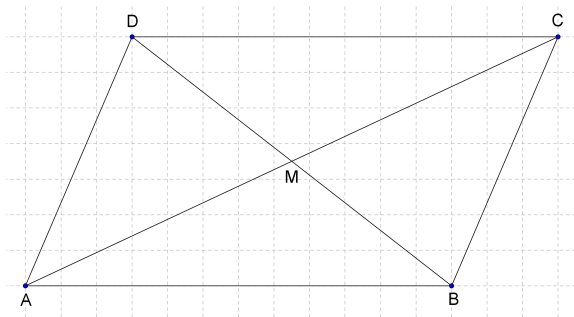
Portanto, como $PN = QM$ e $PQ = NM$ segue que $MNPQ$ um paralelogramo. \square

PROBLEMA 4

Prove que as diagonais de um paralelogramo possuem o mesmo ponto médio.

Demonstração. Considere o paralelogramo $ABCD$ da Figura 17, de diagonais AC e BD .

Figura 17 – Encontro das diagonais de um paralelogramo



Seja M é o ponto médio de AC , vamos mostrar que M também ponto médio de BD .

Observe que $AM = MC$, pois M é o ponto médio de AC . Daí segue que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

Além disso, como $ABCD$ é um paralelogramo, então

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}.$$

Daí, temos

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DM} \text{ (i) e } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} \text{ (ii).}$$

Adicionando (i) e (ii), obtemos:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BM}.$$

Como $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ e $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, segue que $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

Adicionando \overrightarrow{MD} em ambos os termos, temos

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} + \overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{BM} + \vec{0} = \overrightarrow{MD} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}.$$

Logo $BM = MD$.

Então, conclui-se que M também é o ponto médio de BD.

Portanto, as diagonais de um paralelogramo possuem o mesmo ponto médio. \square

PROBLEMA 5

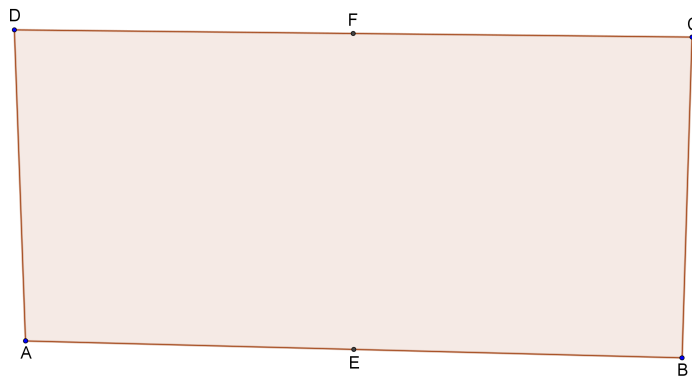
Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo de lados AB , BC , CD e DA . Sejam E e F os pontos médios dos lados AB e CD , respectivamente:

a) Mostre que $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$.

b) Mostre que $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

Demonstração. Para darmos início a demonstração, observe o quadrilátero $ABCD$ da Figura 18 em que E e F são os pontos médios de AB e CD , respectivamente.

Figura 18 – Quadrilátero $ABCD$



Demonstramos a seguir o item (a).

Vemos que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$ (i) e $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$ (ii), e ao adicionarmos (i) e (ii), temos

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}.$$

Note que E o ponto médio de AB , então: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$. Somando \overrightarrow{EA} aos dois membros, segue que

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA}.$$

Observe que

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} \Rightarrow \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}.$$

Daí,

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}.$$

De modo análogo, temos que

$$F \text{ é ponto médio de } CD, \text{ então: } \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD}.$$

$$\text{Daí: } \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}.$$

$$\text{Logo, } 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Dividindo os membros por 2, temos:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}.$$

$$\text{Portanto, } \overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}.$$

Por fim o item (b). Como $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ (i) e $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$ (ii), temos que

Somando (i) e (ii), chegamos a

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}.$$

Do item (a), estabelecemos as seguintes igualdades

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \text{ e } \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}.$$

Daí, segue que

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

Dividindo os membros por 2, temos

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}.$$

$$\text{Portanto, } \overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}}{2}.$$

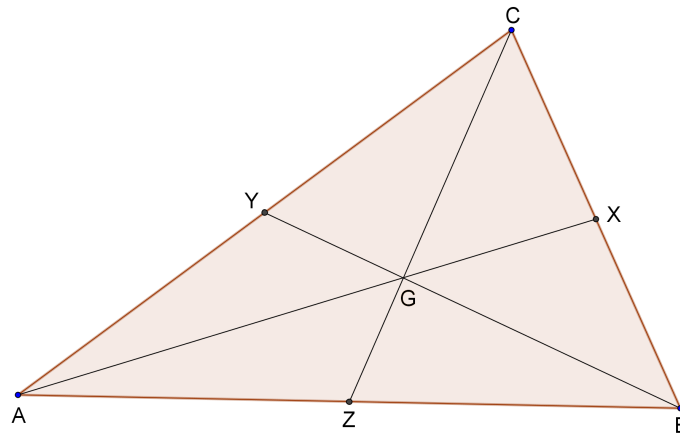
□

PROBLEMA 6

Seja ABC um triângulo qualquer, G seu baricentro, onde o baricentro é o ponto de encontro das três medianas, e AX , BY e CZ suas medianas, em que mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto. Mostre que: $AG = \frac{2}{3}AX$, $BG = \frac{2}{3}BY$ e $CG = \frac{2}{3}CZ$.

Demonstração. Considere o triângulo ABC da Figura 19 em que AX , BY e CZ são as medianas e G seu baricentro.

Figura 19 – Baricentro de um triângulo



Seja M e N os pontos médios de AG e BG, respectivamente. Daí,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MG} \text{ e } \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NG}.$$

Por outro lado, observe que o quadrilátero MNXY e note que de acordo com o PROBLEMA 1, temos:

- $\overrightarrow{YX} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, pois YX a base média do triângulo ABC.
- $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, pois MN a base média do triângulo ABG.

$$\text{Logo, } \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{MN}.$$

Ainda, usando o resultado do PROBLEMA 1 na consequência 1 temos que: $\overrightarrow{YX} // \overrightarrow{AB}$ e que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{YX}$.

$$\text{Logo, } \overrightarrow{YX} // \overrightarrow{MN}.$$

Daí, como $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{MN}$ e que $\overrightarrow{YX} // \overrightarrow{MN}$, então o quadrilátero MNXY é um paralelogramo.

Como MNXY é um paralelogramo pelo PROBLEMA 4 temos que as diagonais se cruzam no ponto médio. Logo,

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GX} \text{ e } \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{GY}.$$

Como $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MG}$ e $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GX}$, temos que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GX}.$$

$$\text{Logo, } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AX}.$$

$$\text{Portanto, } AG = \frac{2}{3}AX.$$

Por outro lado, temos

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NG} \text{ e } \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{GY}.$$

$$\text{Daí, segue que: } \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BY}.$$

$$\text{Portanto, } BG = \frac{2}{3}BY.$$

$$\text{Se procedermos de modo análogo encontramos: } CG = \frac{2}{3}CZ.$$

$$\text{Portanto, } AG = \frac{2}{3}AX, \text{ } BG = \frac{2}{3}BY \text{ e } CG = \frac{2}{3}CZ. \quad \square$$

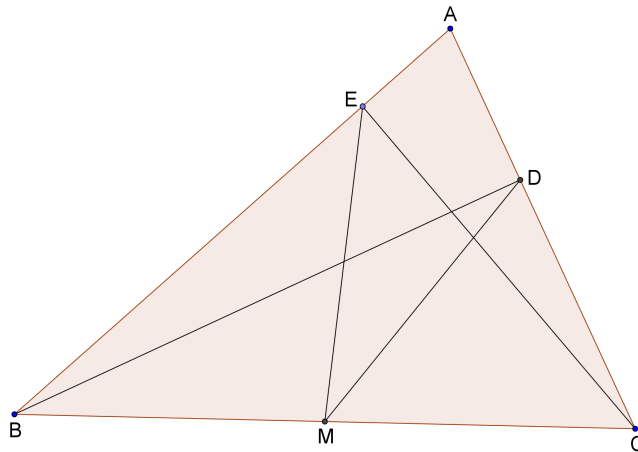
Percebemos nesse problema que as medianas estão divididas na proporção de 1:2 em relação ao baricentro.

PROBLEMA 7

Sejam ABC um triângulo e M o ponto médio do lado BC . Se D e E são os pés das alturas relativas aos lados AC e AB , respectivamente. Prove que $ME = MD$.

Demonstração. Observe o triângulo ABC da Figura 20, sendo M o ponto médio de BC e com D e E os pés das alturas relativas aos lados AC e AB , respectivamente.

Figura 20 – Triângulo ABC



Note que ME é a mediana relativa hipotenusa do triângulo BEC . Da geometria plana temos que $ME = \frac{BC}{2}$ (Resultado mostrado no PROBLEMA 2 do Capítulo 6). Assim,

$$|\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MC}|.$$

De modo análogo, MD é a mediana relativa hipotenusa do triângulo BCD , daí

$$|\overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MC}|.$$

Logo, concluímos por transitividade que $|\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MD}|$.

Portanto, $ME = MD$. □

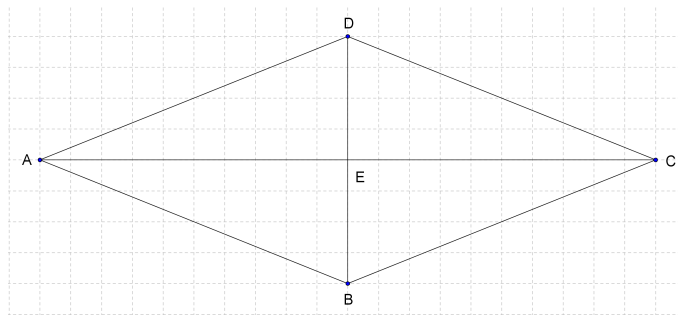
- Comentário: M é o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero inscrito a BCDE.

PROBLEMA 8

Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Demonstração. Observe o losango da Figura 21 e considerando E o encontro de suas diagonais.

Figura 21 – Diagonais de um losango



Para demonstrarmos que as diagonais são perpendiculares basta mostrar que:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Observe que

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}).$$

Assim,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, segue que

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + (-\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Observe que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \text{ daí}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -|\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2.$$

Como ABCD é um losango, então $|\vec{AB}|^2 = |\vec{AD}|^2$. Logo,

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -|\vec{AD}|^2 + |\vec{AD}|^2.$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0.$$

Portanto, as diagonais de um losango são perpendiculares.

□

4 Plano Cartesiano

A teoria deste capítulo está embasada em (IEZZI; HAZZAN, 2005) e em (GOMEZ; FRENSEL; CRISSAFF, 2014).

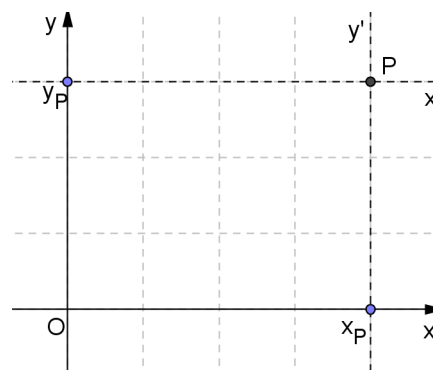
Neste capítulo dedicamos ao Plano Cartesiano, nele fazemos uma breve apresentação do mesmo e encontramos dois resultados importantes que são bastante úteis para o desenvolvimento do trabalho.

Considere dois eixos x e y perpendiculares em O , os quais determinam o plano α .

Dado um ponto P qualquer, $P \in \alpha$, conduzamos por ele duas retas: $x' \parallel x$ e $y' \parallel y$.

Denominamos x_P a interseção de x com y' e y_P a interseção de y com x' , conforme a Figura 22.

Figura 22 – Ponto no plano Cartesiano



Nessas condições, definimos:

1. abscissa de P é o número real x_P ;
2. ordenada de P é o número real y_P ;
3. coordenadas de P são os números reais x_P e y_P , geralmente indicados na forma de par ordenado $P = (x_P, y_P)$, em que x_P é o primeiro termo;
4. eixo das abscissas é o eixo x (Ox);
5. eixo das ordenadas é o eixo y (Oy);
6. sistema de eixos cartesiano ortogonal (ou ortonormal ou retangular) é o sistema xOy ;
7. origem do sistema é o ponto $O = (0, 0)$;

8. plano cartesiano é o plano α ;
9. consideramos a orientação a direita da origem como a parte positiva no eixo x e no eixo y a orientação positiva é a parte acima da origem;
10. consideramos os eixos graduados na mesma unidade de medida.

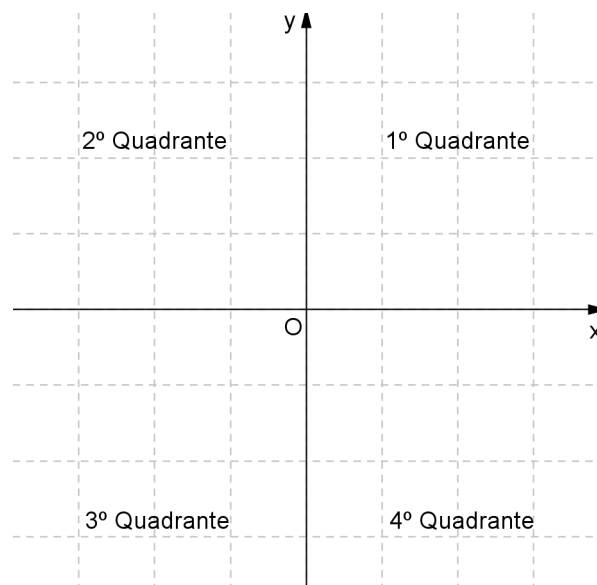
Teorema 4.0.1. *Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_P, y_P) de números reais existe uma correspondência biunívoca.*

De maneira geral, se a e b são números reais distintos, então $(a, b) \neq (b, a)$.

4.1 Posições de um ponto em relação ao sistema

Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões angulares chamadas de quadrantes, que recebem os nomes indicados na Figura 23.

Figura 23 – Quadrantes no plano cartesiano



É evidente que:

- $P \in 1^\circ$ quadrante $\iff x_P \geq 0$ e $y_P \geq 0$.
- $P \in 2^\circ$ quadrante $\iff x_P \leq 0$ e $y_P \geq 0$.
- $P \in 3^\circ$ quadrante $\iff x_P \leq 0$ e $y_P \leq 0$.
- $P \in 4^\circ$ quadrante $\iff x_P \geq 0$ e $y_P \leq 0$.

Um ponto pertence ao eixo das abscissas se, e somente se, sua ordenada é nula $P \in Ox \iff y_P = 0$.

Isso significa que o eixo das abscissas é o conjunto dos pontos de ordenada nula, isto é, $Ox = \{(a, 0)/a \in \mathbb{R}\}$.

Note que, para todo número real a , o ponto $(a, 0)$ pertence ao eixo das abscissas.

De modo análogo, um ponto pertence ao eixo das ordenadas se, e somente se, sua abscissa for nula. $P \in Oy \iff x_P = 0$.

Isso significa que o eixo das ordenadas é o conjunto dos pontos de abscissa nula, isto é, $Oy = \{(0, b)/b \in \mathbb{R}\}$.

Note que, para todo número real b , o ponto $(0, b)$ pertence ao eixo das ordenadas.

Indicamos a bissetriz dos quadrantes ímpares por b_{13} e a bissetriz dos quadrantes pares por b_{24} , então observe que:

Um ponto pertence a bissetriz dos quadrantes ímpares se, e somente se, tiver coordenadas iguais, isto é, $P \in b_{13} \iff x_P = y_P$.

Isto significa que a bissetriz b_{13} é o conjunto dos pontos de coordenadas iguais: $b_{13} = \{(a, a)/a \in \mathbb{R}\}$.

Note que, para todo a real, o ponto (a, a) pertence a bissetriz b_{13} .

Um ponto pertence a bissetriz dos quadrantes pares se, e somente se, tiver coordenadas simétricas: $P \in b_{24} \iff x_P = -y_P$.

Isto significa que a bissetriz b_{24} é o conjunto dos pontos de coordenadas simétricas: $b_{24} = \{(a, -a)/a \in \mathbb{R}\}$.

Note que, para todo a real, o ponto $(a, -a)$ pertence a bissetriz b_{24} .

Temos as seguintes propriedades:

- Se uma reta é paralela ao eixo das abscissas, então todos os seus pontos têm a mesma ordenada.
- Se uma reta é paralela ao eixo das ordenadas, então todos os seus pontos têm a mesma abscissa.

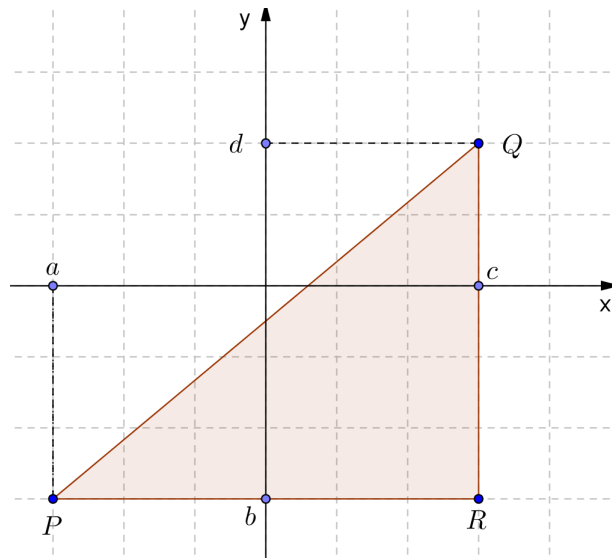
Também valem as recíprocas dessas duas propriedades.

4.2 Distância entre dois pontos do plano

Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos no plano α dados pelas coordenadas em relação ao sistema de eixos ortogonais xOy dado.

Seja $R = (c, b)$ (conforme a Figura 24). A distância de P a Q , que designamos por $d(P, Q)$, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo $\triangle PQR$ de catetos PR e QR . Sendo a distância entre dois pontos de um eixo medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente, $|PR| = |a - c|$ e $QR = |b - d|$.

Figura 24 – Distância entre dois pontos



Do teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{|a - c|^2 + |b - d|^2}$$

Assim, a distância de $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

4.3 Coordenadas do ponto médio de um segmento

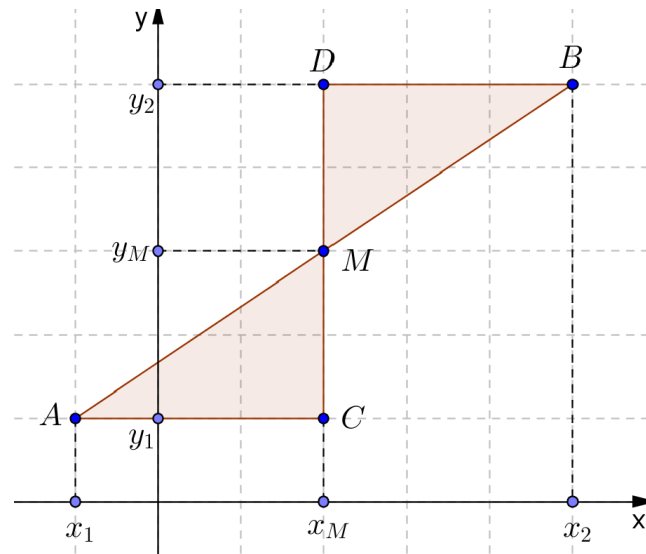
Vemos a seguir que as coordenadas do ponto médio M de segmento AB no plano α são os valores médios das respectivas coordenadas dos pontos A e B .

Teorema 4.3.1. *Se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ são pontos no plano α representados pelas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais xOy , então, $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Onde M é o ponto médio do segmento AB .*

Demonstração. Sejam $M = (x_M, y_M)$ o ponto médio do segmento AB , $C = (x_M, y_1)$ e $D = (x_M, y_2)$. Conforme a Figura 25.

Como $\triangle AMC$ e $\triangle BMD$ são triângulos congruentes pelo caso de congruência entre triângulos (Ângulo, Lado, Ângulo), então:

Figura 25 – Ponto médio de um segmento AB



- $d(A, C) = d(B, D) \Rightarrow |x_M - x_1| = |x_M - x_2| \Rightarrow x_M = \text{valor médio entre } x_1 \text{ e } x_2 \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- $d(C, M) = d(D, M) \Rightarrow |y_M - y_1| = |y_2 - y_M| \Rightarrow y_M = \text{valor médio entre } y_1 \text{ e } y_2 \Rightarrow y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

□

5 Vetores no Plano

A teoria desenvolvida nesse capítulo está embasada em (GOMEZ; FRENSEL; CRISSAFF, 2014), (LIMA *et al.*, 2006) e (NETO, 2013).

Após fazermos uma breve apresentação do plano cartesiano, agora temos ferramentas suficientes para a introdução da teoria de vetores no plano.

Lembramos que definições, propriedades e operações apresentadas no capítulo 2 continuam válidas, a única diferença é que neste capítulo estudamos os vetores por meio de coordenadas no plano.

5.1 Vetores no plano

Os vetores podem ser manipulados através de suas representações em relação a um sistema de coordenadas ortogonais. A introdução de um sistema de coordenadas simplifica bastante os problemas envolvendo vetores.

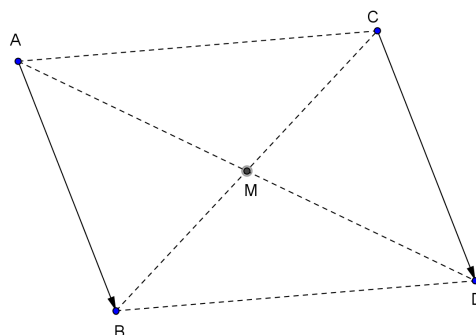
Lema 5.1.1. *Se $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ e $D = (x_D, y_D)$ em um dado Sistema Cartesiano, então*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C. \end{cases}$$

Demonstração. Sabemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, o quadrilátero ABCD, com vértices percorridos nessa ordem, for um paralelogramo. Mas sabemos que isso ocorre se, e só se, as diagonais AD e BC tiverem o mesmo ponto médio M (ver Figura 26). Por outro lado, segue do PROBLEMA 5 do Capítulo 3 que isso ocorre, então:

$$\frac{A + D}{2} = \frac{B + C}{2} \Rightarrow x_A + x_D = x_B + x_C \text{ e } y_A + y_D = y_B + y_C. \quad \square$$

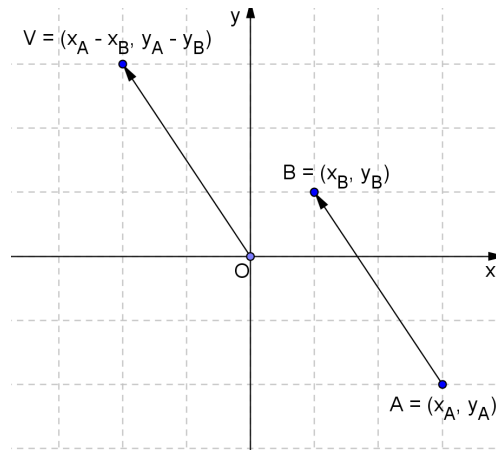
Figura 26 – Igualdade de vetores em coordenadas



O lema acima assegura em particular que, fixado um sistema Cartesiano xOy no plano, todo vetor \vec{v} do mesmo admite um único representante da forma \overrightarrow{OV} (ver Figura 27). De fato, se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, então o lema garante que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OV}$, com $\overrightarrow{OV} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$; de outro modo, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$. Por outro lado, se $\overrightarrow{OV_1} = \overrightarrow{OV_2}$, para certos $V_1 = (x_1, y_1)$ e $V_2 = (x_2, y_2)$, então novamente o lema garante que:

$$(x_1 - 0, y_1 - 0) = (x_2 - 0, y_2 - 0) \Rightarrow \overrightarrow{OV_1} = \overrightarrow{OV_2}.$$

Figura 27 – Representando vetores no plano Cartesiano



Portanto, ao utilizarmos vetores há uma enorme vantagem na escolha de um sistema Cartesiano no plano: uma vez fixado um tal sistema, todo vetor passa a admitir um representante canônico, cuja a extremidade inicial coincide com a origem do sistema Cartesiano em questão. Nesse sentido, se $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$, com $V = (x, y)$, convencionamos $\vec{v} = (x, y)$.

As vantagens de tal notação se tornam claras no que segue.

5.2 Operações com vetores no plano

Vamos definir duas operações no conjunto de vetores do plano, uma operação de adição e outra de multiplicação de vetores por escalares.

5.2.1 Adição de vetores em coordenadas

Definição 5.2.1. *Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetores do plano expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais fixo xOy , então define-se $\vec{u} + \vec{v}$ como $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.*

5.2.2 Multiplicação de vetores por escalares em coordenadas

Definição 5.2.2. *Dado um vetor $\vec{v} = (x, y)$ e um número real λ , chama-se produto do vetor \vec{v} por escalar λ o vetor \vec{u} dado por: $\vec{u} = \lambda\vec{v} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.*

Façamos algumas observações:

- $\lambda \vec{0} = \lambda \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- $0\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
- Não confunda: o número 0 (zero) com o vetor $\vec{0}$ (vetor nulo).
- Escrevemos $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ para designar o vetor simétrico de \vec{u} . Se $\vec{u} = (\alpha, \beta)$, então $-\vec{u} = (-\alpha, -\beta)$.
- O vetor diferença de \vec{u} e \vec{v} é o vetor $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

5.2.3 Propriedades das operações com vetores

A adição de vetores e a multiplicação de vetores por escalares satisfazem propriedades similares às propriedades aritméticas das operações numéricas conforme vimos no Capítulo 2, façamos uma breve revisão destas operações.

1. Propriedades da adição de vetores

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} no plano. Valem as seguintes propriedades.

- a) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- b) Associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
- c) Existência de um elemento neutro aditivo: o vetor zero $\vec{0}$ (ou vetor nulo) é tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- d) Existência de inverso aditivo: para cada vetor \vec{u} existe um único vetor, que designamos por $-\vec{u}$, o simétrico aditivo de \vec{u} , tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

2. Propriedades da multiplicação de escalares por vetores

Sejam \vec{u} e \vec{v} vetores no plano e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

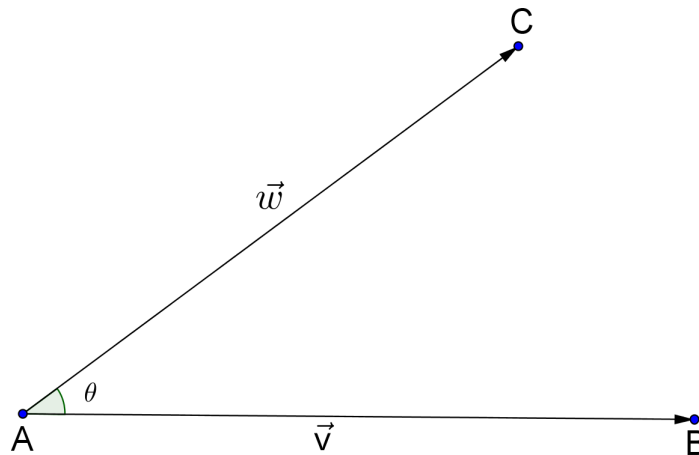
- a) Associativa: $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.
- b) Existência de um elemento neutro multiplicativo: o número $1 \in \mathbb{R}$ é tal que $1\vec{u} = \vec{u}$.
- c) Propriedades distributivas: $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ e $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$.

Além disso, $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ se, e somente se, $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$. Também, $\lambda = 1$ é o único escalar tal que $\lambda\vec{u} = \vec{u}$.

5.3 Produto interno

Uma operação muito importante entre vetores no plano é o produto interno. Antes de introduzi-lo, observamos que se \vec{v} e \vec{w} são vetores não nulos, o ângulo entre \vec{v} e \vec{w} é, por definição, o \widehat{BAC} , onde $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ são representações dos vetores dados mediante segmentos orientados com mesmo início em A (ver Figura 28). É claro que diferentes escolhas do ponto inicial A produzem ângulos congruentes.

Figura 28 – Ângulo entre dois vetores



Usamos $|\vec{v}|$ para indicar o comprimento do vetor \vec{v} . Se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, então $|\vec{v}| = d(A, B)$ = comprimento do segmento de reta AB.

Daí, temos duas situações que são:

1. Se $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.
2. Se $\vec{v} = (x, y)$, então $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Se $|\vec{v}| = 1$, o vetor \vec{v} chama-se *unitário*.

O *produto interno* dos vetores não nulos \vec{v} e \vec{w} é, por definição, o número $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre \vec{v} e \vec{w} . Se $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$, então não faz sentido falar no ângulo entre \vec{v} e \vec{w} . Neste caso, põe-se $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, por definição.

Vê-se que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle > 0$ quando o ângulo entre \vec{v} e \vec{w} é agudo, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ quando \vec{v} e \vec{w} são ortogonais (perpendiculares) e $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle < 0$ quando o ângulo entre \vec{v} e \vec{w} é obtuso.

Tem-se ainda $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}|^2$ = quadrado do comprimento do vetor \vec{v} . Logo o comprimento de \vec{v} é $|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

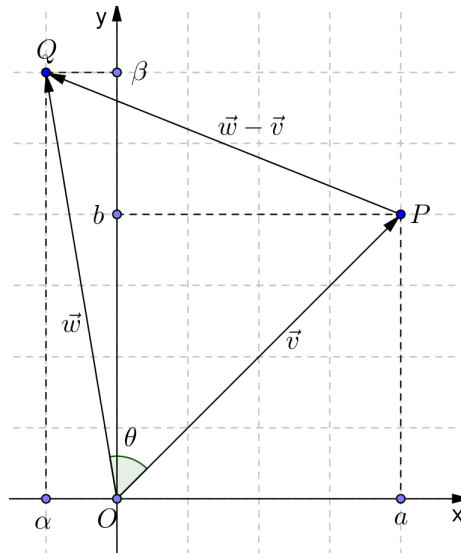
Proposição 5.3.1. *Sejam $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = (\alpha, \beta)$ dois vetores no plano. Então, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = a\alpha + b\beta$.*

Demonstração. Se algum dos vetores \vec{v} ou \vec{w} é nulo, temos $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ e, também, $a\alpha + b\beta = 0$. Logo a igualdade é satisfeita.

Sejam $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com $P = (a, b)$ e $Q = (\alpha, \beta)$.

Então (ver Figura 29), $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{w} - \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (\alpha - a, \beta - b)$.

Figura 29 – Diferença entre os vetores v e w



Seja $\theta = \angle(\vec{v}, \vec{w})$. Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OPQ, obtemos:

$$|\vec{w} - \vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta.$$

$$2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - |\vec{w} - \vec{v}|^2.$$

$$2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - [(\alpha - a)^2 + (\beta - b)^2].$$

$$2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = (a^2 + b^2) + (\alpha^2 + \beta^2) - (a^2 - 2a\alpha + \alpha^2 + \beta^2 - 2b\beta + b^2).$$

$$2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - a^2 + 2a\alpha - \alpha^2 - \beta^2 + 2b\beta - b^2.$$

$$2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = 2a\alpha + 2b\beta.$$

$$2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = 2(a\alpha + b\beta).$$

$$|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = a\alpha + b\beta.$$

Portanto, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = a\alpha + b\beta$. □

Assim, em qualquer caso, obtemos uma expressão do produto interno $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ em função das coordenadas dos vetores \vec{v} e \vec{w} . Observe que, variando o sistema, as coordenadas de \vec{v} e \vec{w} mudam, mas a expressão $a\alpha + b\beta$ se mantém invariante, pois é igual a $|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta$ e este valor nada tem a ver com coordenadas.

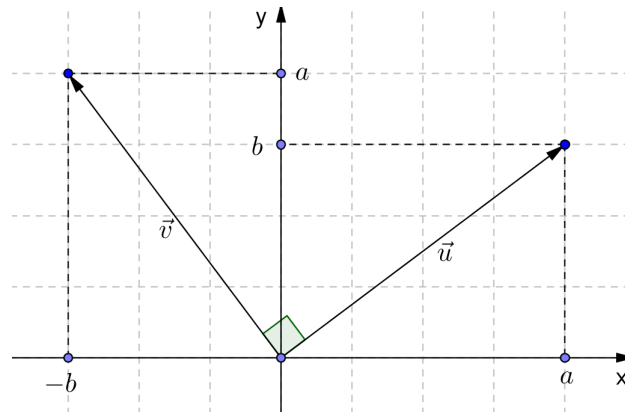
Sabendo que, $|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta = a\alpha + b\beta$ quando $\vec{v} = (a, b)$ e $\vec{w} = (\alpha, \beta)$, prova-se sem dificuldade cada uma das igualdades abaixo, válidas para vetores arbitrários \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} e

qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$;
2. $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$;
3. $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$;
4. $\langle \alpha \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \alpha \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

É interessante notar a relação entre os vetores $\vec{u} = (a, b)$ e $\vec{v} = (-b, a)$. Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, então eles são perpendiculares. Além disso, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e, portanto eles possuem mesmo comprimento (ver Figura 30).

Figura 30 – Rotação entre dois vetores



Logo resulta diretamente da figura que \vec{v} é o resultado da rotação de \vec{u} , de um ângulo de 90° (no sentido anti-horário).

Analogamente, o vetor $\vec{v}' = (b, -a)$ é o resultado da rotação de \vec{u} , de um ângulo de 90° (no sentido horário).

Acima vimos a regra prática para efetuar uma rotação de 90° , cumpre observar que, quem faz uma rotação de 90° , faz qualquer rotação. A seguir obtemos uma fórmula geral de rotação.

O único parâmetro de transformação para a rotação é o ângulo θ (convenção positiva: sentido anti-horário).

Rotação de um vetor $\vec{v} = (a, b)$, para $\vec{w} = (a', b')$ de um ângulo θ em torno da origem, temos as seguintes relações entre as componentes do vetor rotacionado e as do vetor original: $a' = a \cdot \cos \theta - b \cdot \sin \theta$ e $b' = b \cdot \cos \theta + a \cdot \sin \theta$.

6 Proposta de Atividades II

Neste capítulo resolvemos alguns problemas de Geometria Analítica por meio dos vetores utilizando a teoria apresentada no capítulo anterior, bem como problemas de Geometria Euclidiana em que por vezes temos que adotar um sistema adequado de coordenadas para que possamos simplificar demonstrações e possibilitando soluções mais elementares para os problemas.

Nosso intuito também é de apresentar a Geometria de forma mais rica e não como uma disciplina isolada com um fim nela mesma.

Consideramos que os problemas propostos no Capítulo 3, bem como, neste capítulo, são problemas ricos e interessantes para serem aplicados em sala de aula, embora alguns destes não sejam triviais, mas os discentes logo percebem a elegância e a trivialidade das soluções quando utilizamos os vetores, sem esta ferramenta alguns desses problemas demandariam bem mais esforços para serem solucionados.

Vale ressaltar que alguns desses problemas requerem que os discentes por vezes, enxergem um prolongamento ou tracem segmentos que não estão explícitos na figura (ver PROBLEMA 10), mas que utilizando os vetores, eles são solucionados de forma direta por meio de cálculos algébricos simples, sem a necessidade de manipulações. Além disso, em outras situações, os vetores servem para simplificar cálculos, que sem a sua utilização, a solução é feita por longos cálculos e, com a sua utilização, fazemos de forma elementar e com cálculos simplificados (ver PROBLEMA 3).

PROBLEMA 1

Determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em três partes iguais, sabendo que $A = (-1, 7)$ e $B = (11, -8)$.

Solução:

Esboçando a situação por meio da Figura 31, temos:

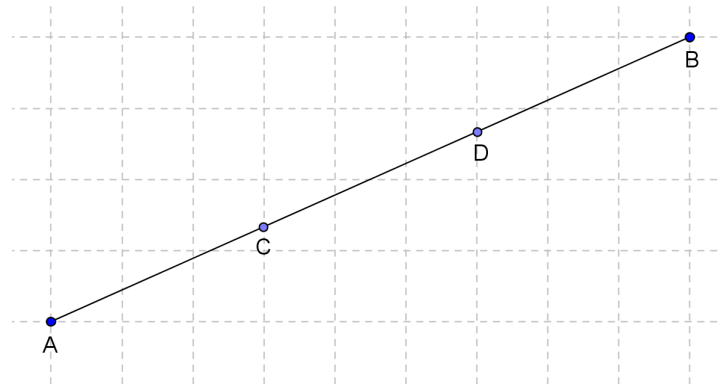
Iremos resolver o problema em duas partes:

1ª Parte

Determinando as coordenadas de C . Sabemos que:

$$\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

Figura 31 – Divisão de segmentos



$$C - A = \frac{1}{3}(B - A)$$

$$3(C - A) = B - A$$

$$3C - 3A = B - A$$

$$3C = 2A + B$$

$$C = \frac{2A}{3} + \frac{B}{3}$$

$$C = \frac{2(-1, 7)}{3} + \frac{(11, -8)}{3}$$

$$C = \left(\frac{-2}{3}, \frac{14}{3}\right) + \left(\frac{11}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$

$$C = \left(\frac{-2+11}{3}, \frac{14-8}{3}\right)$$

$$C = \left(\frac{9}{3}, \frac{6}{3}\right)$$

$$C = (3, 2)$$

2ª Parte

Determinando as coordenadas de D. Sabemos que:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$D - A = \frac{2}{3}(B - A)$$

$$3(D - A) = 2(B - A)$$

$$3D - 3A = 2B - 2A$$

$$3D = A + 2B$$

$$D = \frac{A}{3} + \frac{2B}{3}$$

$$D = \frac{(-1, 7)}{3} + \frac{2(11, -8)}{3}$$

$$D = \left(\frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right) + \left(\frac{22}{3}, \frac{-16}{3}\right)$$

$$D = \left(\frac{-1+22}{3}, \frac{7-16}{3}\right)$$

$$D = \left(\frac{21}{3}, \frac{-9}{3}\right)$$

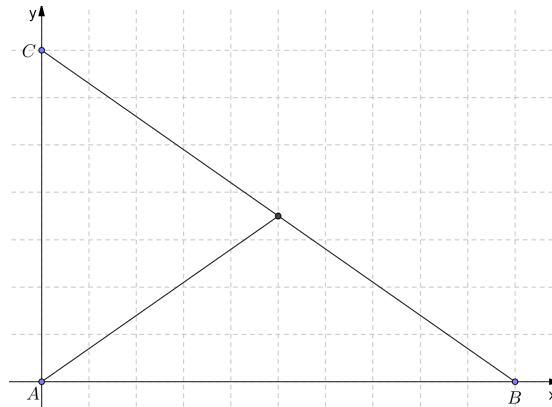
$$D = (7, -3).$$

PROBLEMA 2

Seja ABC um triângulo retângulo cuja hipotenusa é BC . Seja M o ponto médio de BC . Mostre que o comprimento da mediana AM é igual à metade do comprimento da hipotenusa.

Demonstração. Neste caso um sistema de coordenadas mais conveniente para este problema é aquele em que as retas AB e AC são os eixos, portanto $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $C = (0, c)$ são as coordenadas dos vértices (conforme a Figura 32).

Figura 32 – Mediana da hipotenusa



Conforme vimos no Capítulo 4 as coordenadas de M são:

$$M = \left(\frac{b+0}{2}, \frac{0+c}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

Logo, resolve-se o problema caso: $|\overrightarrow{AM}| = \left|\frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right|$.

Mas,

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}.$$

$$|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}.$$

$$\text{Como, } |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Portanto, $|\overrightarrow{AM}| = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{2}$ que prova a afirmação feita.

□

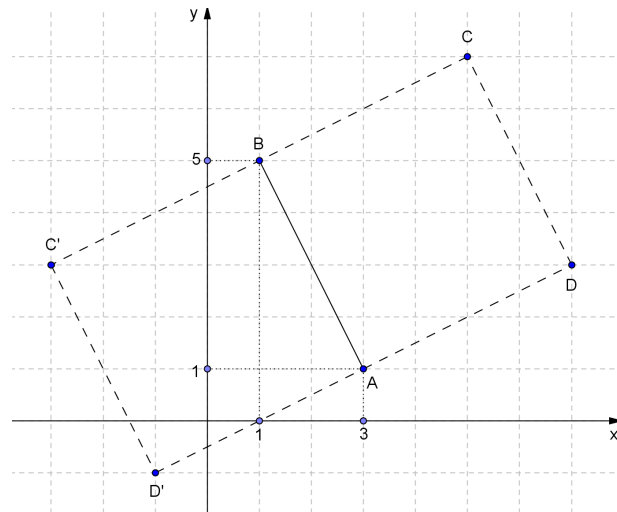
PROBLEMA 3

Se $A = (3, 1)$ e $B = (1, 5)$ são vértices consecutivos de um quadrado $ABCD$.
Determine os outros vértices.

Solução:

Existem dois quadrados com vértices consecutivos em A e B que chamaremos de $ABCD$ e $ABC'D'$ (Conforme Figura 33).

Figura 33 – Quadrados no plano



1º caso: Calculando as coordenadas de C e D.

Seja $\overrightarrow{AB} = B - A$, então

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 5 - 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 4).$$

O vetor \overrightarrow{AD} é o resultado da rotação de 90° de \overrightarrow{AB} no sentido horário.

$$\text{Daí, } \overrightarrow{AD} = (4, 2).$$

$$\text{Logo, } D = A + \overrightarrow{AD} \Rightarrow D = (3, 1) + (4, 2) \Rightarrow D = (3 + 4, 1 + 2) \Rightarrow D = (7, 3).$$

Por outro lado, como $ABCD$ é um quadrado, então $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Daí, $C - B = \overrightarrow{AD}$, isto é, $(x, y) - (1, 5) = (4, 2)$. Então

$$(x - 1, y - 5) = (4, 2) \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5, \\ y - 5 = 2 \Rightarrow y = 7. \end{cases}$$

Portanto, $C = (5, 7)$ e $D = (7, 3)$.

2º Caso: Calculando as coordenadas de C' e D' .

Sabemos do 1º Caso que $\overrightarrow{AB} = (-2, 4)$.

O vetor $\overrightarrow{AD'}$ é o resultado da rotação de 90° de \overrightarrow{AB} no sentido anti-horário.

Daí, $\overrightarrow{AD} = (-4, -2)$.

Logo, $D' = A + \overrightarrow{AD'} \Rightarrow D' = (3, 1) + (-4, -2) \Rightarrow D' = (3 - 4, 1 - 2) \Rightarrow D' = (-1, -1)$.

Por outro lado, como $ABC'D'$ é um quadrado, então $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD'}$.

Daí, $C' - B = \overrightarrow{AD'}$, isto é, $(x', y') - (1, 5) = (-4, -2)$. Então:

$$(x' - 1, y' - 5) = (-4, -2) \Rightarrow \begin{cases} x' - 1 = -4 \Rightarrow x' = -3, \\ y' - 5 = -2 \Rightarrow y' = 3. \end{cases}$$

Portanto, $C' = (-3, 3)$ e $D' = (-1, -1)$.

Comentário: Esta questão foi retirada do livro de (SMOLE; DINIZ, 2010) e a fim de demonstrarmos a praticidade e elegância da resolução de problemas por meio da utilização de vetores, resolvemos transcrever a solução dada pelas autoras.

Existem dois quadrados com vértices consecutivos em A e B: ABCD e ABC'D'.

Para determinarmos C, D, C' e D', vamos obter, inicialmente, o ponto de intersecção das diagonais.

- Medida do lado do quadrado: $d_{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2} \Rightarrow d_{AB} = 2\sqrt{5}$.
- Medida da diagonal do quadrado: $d_{AC} = d_{AB}\sqrt{2} \Rightarrow d_{AC} = 2\sqrt{10}$.
- Ponto médio de AC e BD: $d_{AE} = d_{BE} = \frac{d_{AC}}{2} \Rightarrow d_{AE} = d_{BE} = \sqrt{10}$.

Sendo $E = (x_E, y_E)$, temos

$$d_{AE} = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(x_E - 3)^2 + (y_E - 1)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow x_E^2 - 6x_E + 9 + y_E^2 - 2y_E + 1 = 10 \Rightarrow x_E^2 - 6x_E + y_E^2 - 2y_E = 0. \text{ (i)}$$

$$d_{BE} = \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(x_E - 1)^2 + (y_E - 5)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow x_E^2 - 2x_E + 1 + y_E^2 - 10y_E + 25 = 10 \Rightarrow x_E^2 - 2x_E + y_E^2 - 10y_E = -16. \text{ (ii)}$$

Subtraindo (ii) de (i), resta-nos

$$-4x_E + 8y_E = 16 \Rightarrow x_E - 2y_E = -4 \Rightarrow x_E = 2y_E - 4. \text{ (iii)}$$

Substituindo (iii) em (i), resulta

$$(2y_E - 4)^2 - 6(2y_E - 4) + (y_E)^2 - 2y_E = 0$$

$$4y_E^2 - 16y_E + 16 - 12y_E + 24 + y_E^2 - 2y_E = 0$$

$$5y_E^2 - 30y_E + 40 = 0$$

$$y_E^2 - 6y_E + 8 = 0$$

$$y_E = 2 \text{ ou } y_E = 4.$$

Em (iii), temos:

$$y_E = 2 \Rightarrow x_E = 0 \text{ e } y_E = 4 \Rightarrow x_E = 4.$$

Logo, $E = (4, 4)$ e $E' = (0, 2)$.

Determinação de C e D:

E é o ponto médio de AC e BD. Logo,

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = x_E \Rightarrow \frac{3 + x_C}{2} = 4 \Rightarrow x_C = 5. \\ \frac{y_A + y_C}{2} = y_E \Rightarrow \frac{1 + y_C}{2} = 4 \Rightarrow y_C = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = x_E \Rightarrow \frac{1 + x_D}{2} = 4 \Rightarrow x_D = 7 \\ \frac{y_B + y_D}{2} = y_E \Rightarrow \frac{5 + y_D}{2} = 4 \Rightarrow y_D = 3 \end{cases}$$

Portanto, $C = (5, 7)$ e $D = (7, 3)$.

Determinação de C' e D':

E' é o ponto médio de AC' e BD'. Logo,

$$\begin{cases} \frac{x_A + x'_C}{2} = x'_E \Rightarrow \frac{3 + x'_C}{2} = 0 \Rightarrow x'_C = -3 \\ \frac{y_A + y'_C}{2} = y'_E \Rightarrow \frac{1 + y'_C}{2} = 2 \Rightarrow y'_C = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x_B + x'_D}{2} = x'_E \Rightarrow \frac{1 + x'_D}{2} = 0 \Rightarrow x'_D = -1 \\ \frac{y_B + y'_D}{2} = y'_E \Rightarrow \frac{5 + y'_D}{2} = 2 \Rightarrow y'_D = -1 \end{cases}$$

Portanto, $C' = (-3, 3)$ e $D' = (-1, -1)$.

PROBLEMA 4

Um topógrafo demarcou um terreno em formato de quadrado, porém com o passar do tempo duas demarcações se perderam. Sabe-se que as marcações que ficaram são vértices opostos do quadrado, então determine as outras duas marcações, sabendo que as marcações que permaneceram estão localizadas em $A = (1, 2)$ e $C = (6, 3)$.

Solução:

Da geometria euclidiana sabemos que as diagonais do quadrado se cruzam no ponto médio e também são perpendiculares.

Sabendo que $M = (\frac{1+6}{2}, \frac{2+3}{2})$, isto é, $M = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$, onde M é o ponto médio de \overrightarrow{AC} .

Enumerando os vértices do quadrado ABCD na sequência horária, então

$$\overrightarrow{MC} = C - M \Rightarrow \overrightarrow{MC} = (6 - \frac{7}{2}, 3 - \frac{5}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{MC} = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}).$$

O vetor \overrightarrow{MD} é o resultado da rotação de 90° de \overrightarrow{MC} no sentido horário.

$$\text{Então, } \overrightarrow{MD} = (\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}).$$

Logo,

$$D = M + \overrightarrow{MD} \Rightarrow D = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}) + (\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}) \Rightarrow D = (\frac{7}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{5}{2} + (-\frac{5}{2})) \Rightarrow D = (4, 0).$$

Por outro lado, o vetor \overrightarrow{MB} é o resultado da rotação de 90° de \overrightarrow{MC} no sentido anti-horário.

$$\text{Então, } \overrightarrow{MB} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}).$$

Daí,

$$B = M + \overrightarrow{MB} \Rightarrow B = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}) + (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \Rightarrow B = (\frac{7}{2} + (-\frac{1}{2})) + (\frac{5}{2} + \frac{5}{2}) \Rightarrow B = (3, 5).$$

PROBLEMA 5

Determine a medida do ângulo entre a diagonal de um quadrado e um de seus lados.

Solução:

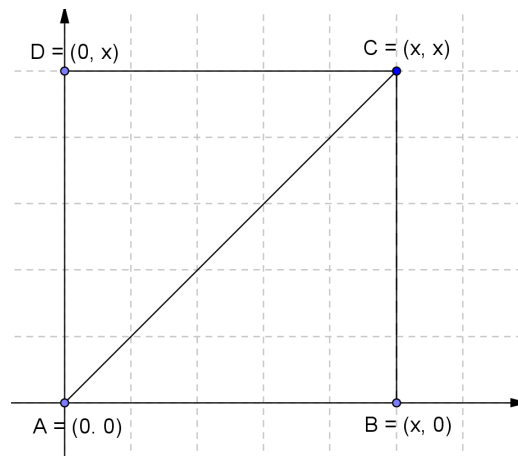
Neste problema vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente, e no problema colocamos o vértice A na origem do sistema, o vértice B sobre o eixo das abscissas e o vértice D sobre o eixo das ordenadas (conforme a Figura 34).

Assim, as coordenadas dos pontos são: $A = (0, 0)$, $B = (x, 0)$, $C = (x, x)$ e $D = (0, x)$.

Para determinarmos o ângulo basta calcularmos o ângulo entre os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} .

$$\text{Seja } \overrightarrow{AB} = B - A = (x, 0) - (0, 0) = (x, 0) \text{ e } \overrightarrow{AC} = C - A = (x, x) - (0, 0) = (x, x).$$

Figura 34 – Diagonal do quadrado



Usando a definição de produto interno, temos

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \\ \cos\theta &= \frac{x \cdot x + x \cdot 0}{\sqrt{(x)^2 + (0)^2} \cdot \sqrt{(x)^2 + (x)^2}} \\ \cos\theta &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2(x)^2}} \\ \cos\theta &= \frac{x^2}{x \cdot x \cdot \sqrt{2}} \\ \cos\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Logo, como $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, segue que $\theta = 45^\circ$.

Portanto, o ângulo formado entre a diagonal de um quadrado e um de seus lados é de 45° .

PROBLEMA 6

Se $A = (-2, 3)$, $B = (4, -5)$, $C = (-3, 1)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD. Determine o vértice D.

Solução:

Como ABCD é um paralelogramo, então os lados opostos são congruentes.

Logo,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$D - A = C - B$$

$$D = A + C - B$$

$$D = (-2, 3) + (-3, 1) - (4, -5)$$

$$D = (-2 - 3 - 4, 3 + 1 + 5)$$

$$D = (-9, 9).$$

Portanto as coordenadas do vértice D é $(-9, 9)$.

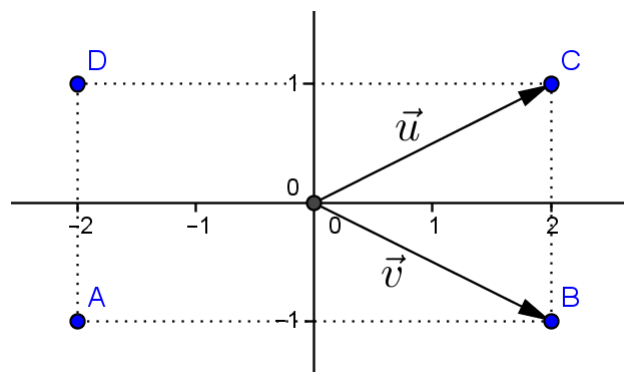
PROBLEMA 7

Calcule o ângulo entre as diagonais de um retângulo, sabendo que a base é o dobro de sua altura.

Solução:

Neste caso um sistema de coordenadas mais conveniente para este problema é aquele em que o encontro das diagonais está na origem do sistema que chamamos de O. Além disso, vamos escolher um valor para os lados do retângulo conforme o enunciado, vamos considerar a base igual a 4 u.c. e a altura igual a 2 u.c., portanto $A = (-2, -1)$, $B = (2, -1)$ e $C = (2, 1)$ e $D = (-2, 1)$ são as coordenadas dos vértices (conforme a Figura 35).

Figura 35 – Ângulo entre as diagonais de um retângulo



Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{OC} = C - O = (2 - 0, 1 - 0) = (2, 1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = B - O = (2 - 0, -1 - 0) = (2, -1)$.

Assim, para determinarmos o ângulo entre as diagonais basta calcularmos o ângulo entre os vetores \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OB} .

$$\text{Daí, } |\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{5}.$$

Usando a definição de produto interno, temos

$$\cos \theta = \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\cos \theta = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{4 - 1}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = 0,6.$$

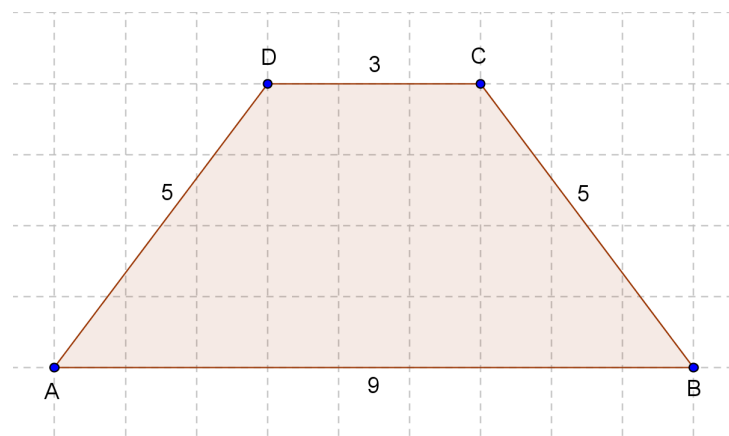
Logo, como $\cos \theta = 0,6$, segue que $\theta = 53^\circ$.

Portanto, o ângulo formado entre as diagonais é de 53° .

PROBLEMA 8

Dado um trapézio isósceles ABCD, de bases AB e CD conforme a Figura 36, determine o ângulo entre as diagonais.

Figura 36 – Trapézio isósceles ABCD



Demonstração. De acordo com a Figura 36 vamos determinar a altura do trapézio usando o teorema de Pitágoras, então

$$h^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow h^2 = 25 - 9 \Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4.$$

De posse do valor da altura, agora vamos escolher um sistema de coordenadas conveniente, e no problema colocamos o vértice A na origem do sistema e o vértice B sobre o eixo das abscissas, daí: $A = (0, 0)$, $B = (9, 0)$, $C = (6, 4)$ e $D = (3, 4)$.

Determinar o ângulo entre as diagonais é calcular o ângulo entre os vetores \vec{AC} e \vec{DB} , então:

- $\vec{AC} = C - A \Rightarrow \vec{AC} = (6, 4) - (0, 0) \Rightarrow \vec{AC} = (6, 4)$.
- $\vec{DB} = B - D \Rightarrow \vec{DB} = (9, 0) - (3, 4) \Rightarrow \vec{DB} = (6, -4)$.
- $|\vec{AC}| = |\vec{DB}| = \sqrt{52}$.

Usando a definição de produto interno, temos

$$\cos \theta = \frac{x_{AC} \cdot x_{DB} + y_{AC} \cdot y_{DB}}{|\vec{AC}| |\vec{DB}|}$$

$$\cos \theta = \frac{6 \cdot 6 + 4 \cdot (-4)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{52}}$$

$$\cos \theta = \frac{36 - 16}{52}$$

$$\cos \theta = \frac{20}{52}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{13}$$

Logo, como $\cos \theta = \frac{5}{13}$, então $\theta = 67,38^\circ$.

Portanto, o ângulo formado entre as diagonais é de $67,38^\circ$.

□

PROBLEMA 9

Mostre que as alturas de um triângulo interceptam-se em um ponto.

Demonstração. Fazemos a prova por absurdo, para isso devemos escolher um sistema de coordenadas conveniente, e no problema colocamos os vértices A e B sobre o eixo das abscissas e o vértice C sobre o eixo das ordenadas (conforme a Figura 37). Traçamos também as alturas AD e BE que interceptam o eixo das ordenadas nos pontos H e H', respectivamente. As coordenadas são A = (a, 0), B = (b, 0), C = (0, c), H = (0, h) e H' = (0, h').

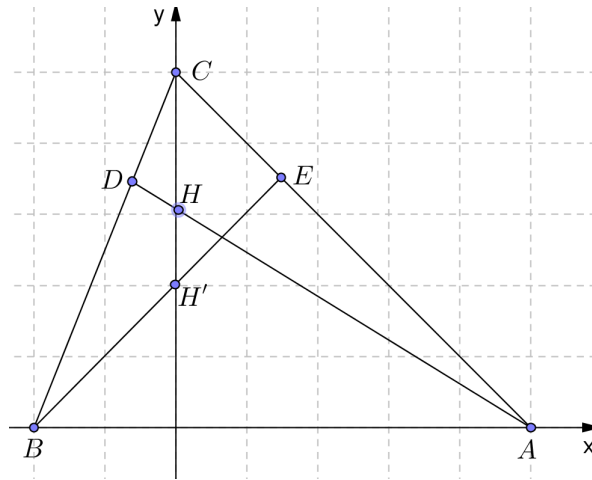
Nosso intuito é mostrar que H e H' é o mesmo ponto. Mas,

- $\vec{BC} = C - B \Rightarrow \vec{BC} = (0, c) - (b, 0) \Rightarrow \vec{BC} = (-b, c)$.
- $\vec{AH} = H - A \Rightarrow \vec{AH} = (0, h) - (a, 0) \Rightarrow \vec{AH} = (-a, h)$.

Como AD é a altura do triângulo ABC em relação ao lado BC então: $\vec{BC} \perp \vec{AH}$.

Pela definição de perpendicularidade no Capítulo 5, temos

Figura 37 – Ortocentro de um triângulo



$$x_{AH} \cdot x_{BC} + y_{AH} \cdot y_{BC} = 0 \Rightarrow (-a) \cdot (-b) + c \cdot h = 0 \Rightarrow ab + ch = 0 \Rightarrow ch = -ab \Rightarrow h = -\frac{ab}{c}.$$

Por outro lado, temos

- $\vec{AC} = C - A \Rightarrow \vec{AC} = (0, c) - (a, 0) \Rightarrow \vec{AC} = (-a, c).$
- $\vec{BH'} = H' - B \Rightarrow \vec{BH'} = (0, h') - (b, 0) \Rightarrow \vec{BH'} = (-b, h').$

Como BE é a altura do triângulo ABC em relação ao lado AC então: $\vec{AC} \perp \vec{BH'}$.

Pela definição de perpendicularidade no Capítulo 5, temos

$$x_{AC} \cdot x_{BH'} + y_{AC} \cdot y_{BH'} = 0 \Rightarrow (-a) \cdot (-b) + c \cdot h' = 0 \Rightarrow ab + ch' = 0 \Rightarrow ch' = -ab \Rightarrow h' = -\frac{ab}{c}. \text{ (Absurdo!)}$$

Portanto, $H = H'$ o que mostra que as alturas de um triângulo concorrem para um mesmo ponto.

□

PROBLEMA 10

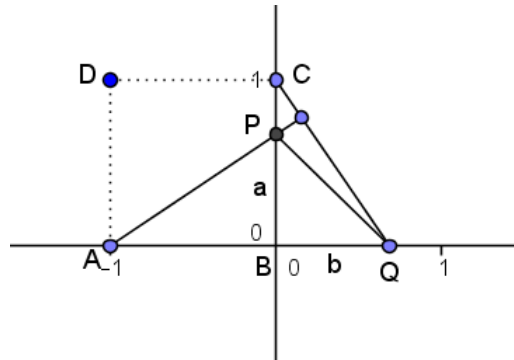
Desenhe um quadrado ABCD, logo após tome um ponto P pertencente a BC, a reta que contém C e é perpendicular ao prolongamento AP corta o prolongamento de AB em Q. Prove que $B\hat{Q}P$ é constante.

Demonstração. Considerando o lado do quadrado 1 u.c., a medida de BP = a e BQ = b, escolhamos um sistema de coordenadas conveniente mais adequado para o problema e o

sistema mais adequado é aquele em que o ponto B está na origem do sistema, os pontos A e Q estão sobre o eixo das abscissas e os pontos C e P estão sobre o eixo das ordenadas.

Então suas coordenadas são: $A = (-1, 0)$, $B = (0, 0)$, $C = (0, 1)$, $D = (-1, 1)$, $P = (0, a)$ e $Q = (b, 0)$ (conforme a Figura 38).

Figura 38 – Ângulo constante



Para solucionarmos o problema basta mostrar que $a = b$ para qualquer a e b escolhidos. Segue que:

- $\vec{AP} = P - A \Rightarrow \vec{AP} = (0, a) - (-1, 0) \Rightarrow \vec{AP} = (1, a)$.
- $\vec{CQ} = Q - C \Rightarrow \vec{CQ} = (b, 0) - (0, 1) \Rightarrow \vec{CQ} = (b, -1)$.

Pelo enunciado temos que $\vec{AP} \perp \vec{CQ}$.

Pela definição de perpendicularidade no Capítulo 5, temos

$$x_{AP} \cdot x_{CQ} + y_{AP} \cdot y_{CQ} = 0 \Rightarrow 1 \cdot b + a \cdot (-1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b.$$

Daí,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 45^\circ.$$

Portanto, o \hat{BQP} é constante para quaisquer que sejam a e b escolhidos. \square

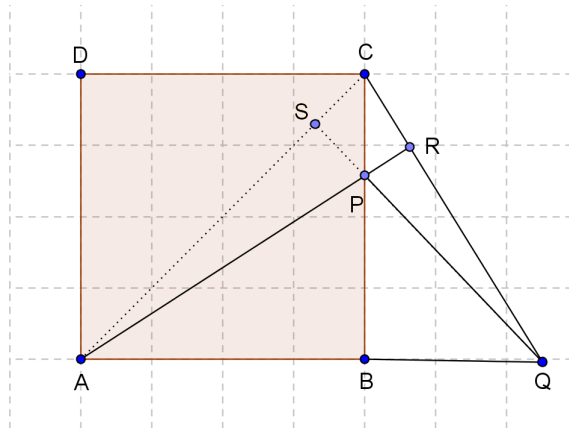
A seguir, solucionamos o mesmo problema por meio da geometria euclidiana.

Demonstração. Trace a diagonal AC, prolongue o segmento AP até intersectar o segmento CQ no ponto R e logo após prolongue também o segmento QP até intersectar o segmento AC no ponto S, então, observe que CB é perpendicular a AQ e AR é perpendicular a CQ que implica QS também perpendicular ao segmento AC. Logo P é o ortocentro do triângulo ACQ (conforme a Figura 39).

Pelo PROBLEMA 5 sabemos que o ângulo entre a diagonal e o lado de um quadrado é de 45° . Logo $\hat{QAS} = 45^\circ$.

Como QS é altura do triângulo ACQ, então: $\hat{ASQ} = 90^\circ$.

Figura 39 – Ângulo constante 2



Agora observe o triângulo AQS, segue que

$$\theta = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ.$$

Portanto, o \widehat{BQP} é constante. □

Comentário: Note que, para resolvermos o problema usando os vetores, recorreremos somente a cálculos algébricos triviais, enquanto que na resolução por meio da geometria euclidiana recorreremos a prolongamentos e observações que nem sempre são fáceis de enxergar.

PROBLEMA 11

Recentemente foi descoberto um manuscrito do pirata Barba Negra descrevendo a localização de um rico tesouro enterrado por ele em certa ilha do Caribe. O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções:

"... qualquer um que desembarque na ilha verá imediatamente dois grandes carvalhos, que chamarei de A e B e também uma palmeira, que chamarei de C. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado da seguinte forma.

Caminhe de C para A contando seus passos. Chegando em A vire à esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto M.

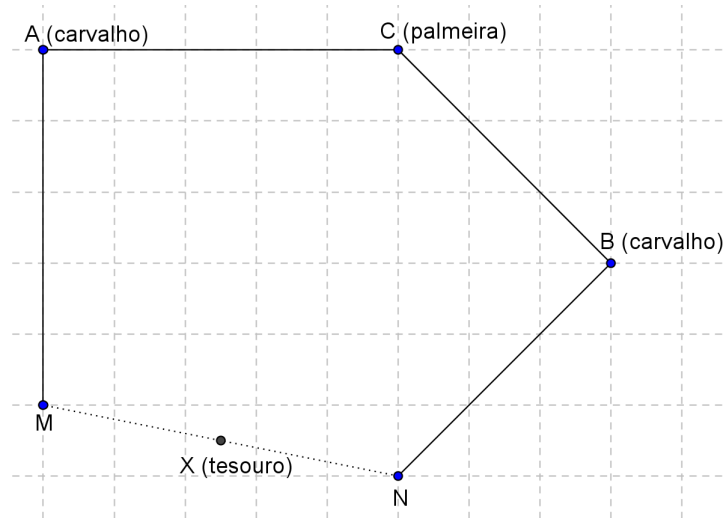
Volte ao ponto C.

Caminhe de C para B contando seus passos. Chegando em B, vire para à direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto N.

O ponto X está na reta que liga M a N, e a mesma distância desses dois pontos."

Com essas precisas informações, os exploradores chegaram a referida ilha, mas tiveram uma desagradável surpresa. Os carvalhos (A e B) lá estavam, mas a palmeira (C)

Figura 40 – Mapa do tesouro



tinha desaparecido completamente.

O tesouro está perdido!!

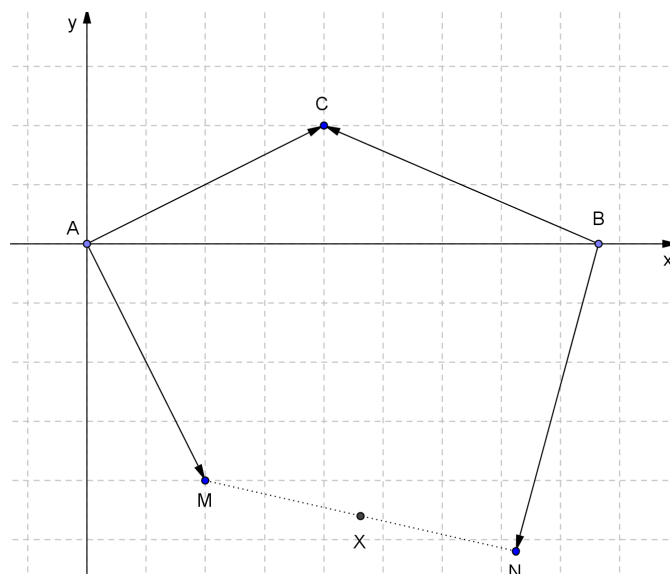
Como fazer para encontrar o tesouro perdido?

Solução:

Felizmente a ilha era plana, então estabelecemos um sistema de coordenadas com origem em A e com o ponto B no eixo x.

Seja p a distância do ponto A ao ponto B. Assim, fica estabelecido que: $A = (0, 0)$, $B = (p, 0)$ e $C = (x, y)$ (conforme a Figura 5.41).

Figura 41 – Mapa do tesouro com coordenadas



Assim, as coordenadas de vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} , são:

- $\overrightarrow{AC} = C - A \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (x, y) - (0, 0) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (x, y)$.
- $\overrightarrow{BC} = C - B \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (x, y) - (p, 0) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (x - p, y)$.

O vetor \overrightarrow{AM} é obtido através de uma rotação de 90° de \overrightarrow{AC} no sentido horário, então $\overrightarrow{AM} = (y, -x)$.

O vetor \overrightarrow{BN} é obtido através de uma rotação de 90° de \overrightarrow{BC} no sentido anti-horário, então $\overrightarrow{BN} = (-y, x - p)$.

Como A é a origem do sistema, temos que as coordenadas do ponto M são: $M = (y, -x)$. Por outro lado,

$$N = B + \overrightarrow{BN} \Rightarrow N = (p, 0) + (-y, x - p) \Rightarrow N = (p - y, x - p).$$

Sendo X o ponto médio de MN, suas coordenadas são dadas por:

$$X = \left(\frac{y + p - y}{2}, \frac{-x + x - p}{2} \right).$$

$$X = \left(\frac{p}{2}, -\frac{p}{2} \right).$$

Portanto para encontrar o tesouro, bastava percorrer a metade da distância na direção de A para B e em seguida virar a direita e percorrer a mesma distância.

A localização do tesouro ficou independente da posição da palmeira.

7 Considerações Finais

No presente trabalho foi possível mostrar um texto didático enfatizando a importância dos conteúdos de geometria Plana e Analítica serem abordados sob uma ótica vetorial. A teoria vetorial é um assunto fácil de introdução, já que é tratado no estudo de Física e é empregado em diversos campos.

Os motivos pelos quais apresentamos os conteúdos de geometria Plana e Analítica via vetores foram, entre outros: chamar a atenção para que esse tema seja ministrado nas aulas de matemática, pois como já foi mencionado o assunto é normalmente introduzido no ensino médio pelos professores de Física; evidenciar resultados e demonstrar propriedades de figuras geométricas planas e dar solução a problemas de Geometria Plana e Analítica por meio dos vetores.

Creemos ter alcançado os objetivos propostos para o trabalho, lembrando que esta proposta pode ser expandida como, por exemplo, no estudo da circunferência e das cônicas. Além disso, o estudo dos vetores podem ser expandidos para o espaço e, desta forma, fazendo o estudo de distâncias no espaço, distância entre planos, estudar propriedades de figuras espaciais, etc. Enfim, motivos não faltam para que o discente no ensino médio venha a ter conhecimento sobre essa ferramenta tão relevante que são os vetores.

Referências

- BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria Analítica: um tratamento vetorial**. São Paulo: Mc Graw, 1987.
- GOMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. dos S. **Geometria Analítica**. 1ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar: Geometria Analítica**. 5ª. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 07.
- JÚNIOR, F. R.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T. **Os Fundamentos da Física**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2007.
- LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3.
- NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 2.
- SANTOS, N. M. dos. **Matrizes e vetores**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1972.
- SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio**. 6ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 3.