UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ENILTON DE ABREU TEIXEIRA

USO DA PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

PALMAS - TO
2015

ENILTON DE ABREU TEIXEIRA

USO DA PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha.

PALMAS - TO
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

T266u Teixeira, Enilton de Abreu.
USO DA PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO. / Enilton de Abreu Teixeira. – Palmas, TO, 2015.
84 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2015.
Orientador: Rogério Azevedo Rocha

1. Inovações no Ensino e Aprendizagem Segundo os PCN's (Ensino Médio). 2. Matemática Financeira. 3. Tecnologia na Educação. 4. A Planilha Eletrônica Excel no Estudo da Matemática Financeira. I. Título

CDD 510

Elaborado pelo sistema de geração automatica de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

ENILTON DE ABREU TEIXEIRA

USO DA PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Dr. Rogério Azevedo Rocha.

Aprovada em 28 / 08 / 2015

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha
____
Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (Orientador-UFT)

Hellena Apolinário
____
Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

____
Prof. Dr. Claudio de Castro Monteiro (IFTO)

Aos meus pais Hélio e Enilde.
À minha irmã Eliliane.
À minha esposa e companheira Leiliana de Souza.
Aos meus filhos Alexandre, Hélio e Camila.

Agradecimentos

Aos familiares e amigos por todo o apoio e incentivo oferecidos nos bons e maus momentos. À minha esposa e companheira Leiliana de Souza Abreu Teixeira, pelo carinho e paciência nesta etapa de nossas vidas.

À UFT (Universidade Federal do Tocantins) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) na pessoa do professor coordenador Andrés Lázaro Barraza de La Cruz e dos professores Rogério Azevedo Rocha, Christian José Quintana Pinedo, Pedro Alexandre da Cruz, Gilmar Pires Novaes e Betty Clara Barraza de La Cruz pela significativa contribuição acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha pela confiança depositada e conhecimentos transmitidos para a conclusão deste trabalho.

Aos colegas de mestrado pelo convívio e amizade.

Aos colegas de trabalho pelo incentivo.

A todos os professores, sem os quais este momento não seria possível.

De forma especial, ao meu pai Hélio Teixeira Soares († *in memoriam*) por tudo que me ensinou, pelo que sou, serei eternamente grato.

O Professor não ensina mas arranja modos de a própria criança decobrir.
Cria situações-problema.
(Jean Piaget)

Resumo

Nesta dissertação, mostraremos, por meio de resoluções de situações-problema que são inerentes ao cotidiano das famílias como, por exemplo, o financiamento de um veículo, propostas de empréstimos consignados, conversões de taxas de juros, processos de amortização utilizados em planos imobiliários, que o Excel pode ser uma ferramenta de ensino para compreensão de fórmulas matemáticas, em particular fórmulas financeiras, construção e comparação de gráficos, resolução de situações-problema e para auxílio de tomadas de decisões que envolvam tempo e dinheiro. Nesse sentido, o tempo das aulas de Matemática Financeira poderá ser mais bem administrado e aproveitado para questionamentos adicionais sobre o conteúdo em si, uma vez que o tempo destinado para execução dos cálculos e construção de gráficos será mínimo com o auxílio dessa planilha eletrônica.

Palavras-chave: Ensino de Matemática Financeira. Planilha eletrônica Excel. Tomada de decisões.

Abstract

In this thesis show through resolutions of problem situations that are inherent in the daily lives of families, for example, financing a vehicle, consigned loan proposals, conversions of interest rates, amortization procedures used in real estate plans, which the spreadsheet can be a teaching tool for understanding of mathematical formulas, in particular financial arrangements, construction and comparison charts, problem solving situations and aid decision making involving time and money. In this regard the time of financial mathematics classes can be better managed and leveraged to further questioning about the content itself, since the time allocated for performing calculations and graphing will be minimal with the help of spreadsheets not forgetting even the rigor of mathematical formulas, because if they are wrong, the calculation is not performed.

Key-words: Financial Mathematics Teaching. Spreadsheets. Decision-making.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

O mundo passa por grandes mudanças no que tange às tecnologias. Estas transformaram as relações pessoais, os sistemas de produção e as formas de geração e circulação do conhecimento. A capacidade de criar e inovar passaram a ser o grande atrativo das organizações, também a flexibilidade, a aptidão para resolver problemas, comunicar-se, liderar, trabalhar em equipe e estar sempre aprendendo tornaram-se as competências mais valorizadas atualmente.

É evidente que para ensinar Matemática nos dias de hoje de uma forma que faça sentido para o aluno, devemos tomar como ponto de partida situações-problema do cotidiano da comunidade local, pois, trabalhando de forma contextualizada e com situações reais do seu cotidiano, sempre que possível, o aluno consegue assimilar melhor os conteúdos apresentados.

O conhecimento matemático e a utilização das tecnologias da informação tornam-se cada vez mais necessários em uma época denominada de "Sociedade da Informação", na qual prevalece o conhecer e o saber. Utilizar, então, tal tecnologia significa não somente uma questão de sobrevivência e de inserção no mercado de trabalho, mas também o início de um verdadeiro processo de transformação e inserção social, evitando, assim, o processo conhecido como analfabetismo digital.

Uma alternativa que pode ser considerada extremamente viável para que haja melhoria significativa no processo de aprendizagem e principalmente uma diversificação para os docentes é a utilização de ferramentas tecnológicas em sala de aula, em especial, o uso de computadores e mais especificamente a utilização do Excel para cálculos matemáticos que gastam tempo e exigem uma maior dedicação.

Muitos são os pesquisadores e defensores que apoiam constantemente o uso de computadores no ambiente escolar, ou seja, eles acreditam que além de ser uma ferramenta que se torna cada vez mais frequente na vida dos educandos, sua utilização agrega valores acerca da temática estudada e também sobre a utilização de softwares educacionais ou de execução de cálculos.

Com base no contexto mencionado, buscamos fazer uma espécie de relação entre a Matemática Financeira teórica e a matemática do cotidiano, por meio do uso do Excel como forma alternada de realizar atividades rápidas e práticas.

O presente trabalho tem como objetivo principal o uso do Excel para contribuir com o aprendizado da Matemática Financeira reforçando conceitos, definições que muitas vezes mal compreendidas por parte dos alunos, por não terem ou verem um exemplo prático e concreto. Por essas e outras situações, o Excel serve de suporte e apoio para estudos da Matemática Financeira envolvendo sequências, gráficos, parcelas, juros em prestações pagas por um empréstimo ou amortização etc.

O presente trabalho foi estruturado em oito capítulos, contando com o capítulo introdutório e o conclusivo. Assim, o referencial teórico e o desenvolvimento da proposta seguem da seguinte forma.

O segundo capítulo relata as inovações de ensino e aprendizagem segundo os PCN's no Ensino Médio, assim como a disciplina de Matemática deve ser abordada segundo os PCN's.

O terceiro capítulo aborda uma breve história da Matemática evidenciando a necessidade da raça humana de saber contar e negociar surgindo, assim, uma ramificação da Matemática denominada Matemática Financeira.

O quarto capítulo trata da crise econômica mundial, ou seja, aborda a realidade do país. Além disso, trata sobre a necessidade de todas as pessoas se reeducarem financeiramente. Por isso, ilustramos algumas situações decorrentes do dia-a-dia, que são: financiamento de veículo, propostas de empréstimo consignado, conversões de taxas de juros e amortização em empréstimos etc.

No quinto capítulo, sendo esse a espinha dorsal do trabalho, trata da Matemática Financeira: porcentagem, juros, regime de capitalização, juros simples e compostos, fluxo de caixa e equivalência de capitais.

O sexto capítulo trata da tecnologia na educação, o ensino e as novas tecnologias, a relação que a Matemática tem com a tecnologia e planilhas eletrônicas. Mostramos, com o auxílio do Excel, como são realizadas as fórmulas até obter um resultado final, sem a exigência de tanto tempo.

O sétimo capítulo, bem como o quinto capítulo, trata da Matemática Financeira mas, desta vez, com uma visão tecnológica. Nesse sentido, abordaremos os mesmos conteúdos, no entanto, com o auxílio do Excel.

2 INOVAÇÕES NO ENSINO E APRENDIZAGEM SEGUNDO OS PCN's (ENSINO MÉDIO)

O Ensino Médio no Brasil mudou bastante nas últimas décadas, antes composto por práticas pedagógicas tradicionais, hoje vem procurando cada vez mais atingir contextos interdisciplinares.

No que tange ao contexto da Educação Básica, a LDB (Lei de Diretrizes e Bases) – Lei nº 9.394/96 (Art. 26) – determina a construção dos currículos, no Ensino Fundamental e Médio:

> Com uma Base Nacional Comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela (BRASIL, 2000).

A Base Nacional Comum é composta por uma espécie de dimensão de preparação que promove o suporte para o prosseguimento de estudos de qualidade e, como tal, deve abrir novos caminhos no que diz respeito à construção mais consistente de competências e habilidades consideradas básicas, deixando de lado um pouco os esquemas resolutivos já pré-estabelecidos, ou seja, sendo mais objetivo no processo de aprendizagem.

Dessa forma, faz-se importante e necessário operar com algoritmos na Matemática ou na Física, porém, o estudante já precisa ter uma base ou um conhecimento prévio de que, juntamente com aquele algoritmo, há linguagem matemática, acompanhada de regras que precisam ser obedecidas e realizadas em certa ordem, para que, de fato, aconteça uma significação e que, portanto, é a leitura e escrita da realidade ou de uma situação desta. Para tanto, é de fundamental importância que o aluno compreenda a linguagem verbal do problema levantado.

> A Base Nacional Comum também traz em si a dimensão de preparação para o trabalho. Essa dimensão tem que apontar para que aquele mesmo algoritmo seja um instrumento para a solução de um problema concreto, que pode dar conta da etapa de planejamento, gestão ou produção de um bem. E, indicando e relacionando os diversos contextos e práticas sociais, além do trabalho, requer, por exemplo, que a Biologia dê os fundamentos para a análise do impacto ambiental, de uma solução tecnológica ou para a prevenção de uma doença profissional. Enfim, aponta que não há solução tecnológica sem uma

base científica e que, por outro lado, soluções tecnológicas podem propiciar a produção de um novo conhecimento científico (BRASIL, 2000).

Quando a LDB destaca e enumera todas as diretrizes curriculares específicas do Ensino Médio, ela consegue abordar os pontos mais relevantes, alcançando isso por meio de um planejamento e desenvolvimento do currículo de forma orgânica, sempre buscando o que já foi falado no início: a interdisciplinaridade e a transdiciplinaridade.

Diante disso, essa proposta de organicidade está explicitada no Art.36, segundo o qual o currículo do Ensino Médio:

> Destacará a educação tecnológica básica, a compreensão do significado da ciência, das letras e das artes; o processo histórico de transformação da sociedade e da cultura; a língua portuguesa como instrumento de comunicação, acesso ao conhecimento e exercício da cidadania (BRASIL, 2000).

A qualidade dos conhecimentos fica em bastante evidência ainda quando o Art. 36 da LDB estabelece, em seu parágrafo 1º, as competências que o aluno, ao final do Ensino Médio, deve demonstrar:

> Art. 36, § 1º. Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que, ao final do Ensino Médio, o educando demonstre:
>
> I - domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;
>
> II - conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;
>
> III - domínio dos conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania.
>
> O perfil de saída do aluno do Ensino Médio está diretamente relacionado às finalidades desse ensino, conforme determina o Art. 35 da Lei:
>
> Art. 35 O Ensino Médio, etapa final da Educação Básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidade:
>
> I - a consolidação e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
>
> II - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
>
> III - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina (BRASIL, 2000).

Portanto, é importante compreender que a Base Nacional Comum não pode ser enxergada ou caracterizada como uma "camisa de força". Em outras palavras, o sistema educacional deve promover a flexibilidade, e essa já é assegurada, tanto na organização dos conteúdos mencionados em lei, quanto na metodologia a ser implantada e desenvolvida no processo de ensino-aprendizagem e, consequentemente, na avaliação.

2.1 A disciplina de Matemática segundo os PCN's

Para os PCN's, dentre os princípios norteadores gerais estabelecidos pelas Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, destacam-se a produção de um conhecimento efetivo, somente propedêutico, que leve ao desenvolvimento de competências e habilidades específicas para cada disciplina, integradas pela interdisciplinaridade e se valendo da contextualização.

A organização do currículo em três grandes áreas (Linguagens e Códigos, Ciências da Natureza e Matemática e Ciências Humanas, cada uma delas acompanhada de suas Tecnologias) pretende conferir unidade ao ensino das diferentes disciplinas da área, orientando o trabalho integrado dos professores das respectivas áreas, sem dispensar uma articulação de tais áreas entre si.

Destaque-se que as grandes áreas incluem as suas tecnologias, dentre elas os computadores que revolucionaram a tal ponto a investigação científica que "hoje a computação científica pode ser considerada como uma terceira metodologia da ciência, paralelamente aos paradigmas mais estabelecidos da ciência teórica e experimental" (VEIT, 2002). A utilização das novas tecnologias na educação está muito defasada em relação ao seu uso científico – também em nível internacional – mas o que se espera, e se preconiza nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM's) é que as tecnologias específicas de cada área venham a ser incorporadas no seu processo ensino/aprendizagem.

Na área de *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, na qual a disciplina de Matemática está inserida, entende-se que "A aprendizagem de concepções científicas atualizadas do mundo físico e natural e o desenvolvimento de estratégias de trabalho centradas na solução de problemas são finalidades da área, de forma a aproximar o educando do trabalho de investigação científica e tecnológica, como atividades institucionalizadas de produção de bens e serviços" (VEIT, 2002).

Nos PCNEM's, os objetivos curriculares são focados em competências e habilidades a serem atingidas pelos estudantes nas diferentes disciplinas, em vez de focados nos conteúdos específicos cobertos por essas disciplinas. Essa perspectiva altera completamente a organização curricular, pois passam a ser as competências que orientam a seleção e o ordenamento de conteúdos, com seus respectivos tempos e espaços curriculares. Justamente por isso, estamos vivenciando um processo de reorganização curricular de nossos cursos de Licenciatura em Matemática, a fim de que satisfaçam as Diretrizes Curriculares para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica, em Cursos de Nível Superior, preparando o professor que deverá trabalhar no nível médio à luz dos novos parâmetros curriculares (VEIT, 2002).

Ao contrário das reformas das décadas de 60 e 70, as mais recentes deram mais importância às dificuldades de conhecimentos sobre os processos de aprendizagem. Um sucinto histórico das reformas curriculares brasileiras na área de Matemática e Ciências da Natureza consta na seção rumos e desafios dos PCNEM's.

Nas reformas recentes é marcante a importância dada a uma visão mais integrada, desde a aprendizagem da comunicação escrita e oral, até à necessidade de aprendizagem em contextos interdisciplinares e às conexões entre as abordagens das diversas ciências, como proposto nos PCNEM's. Outra característica é uma educação com "maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos" (VEIT, 2002).

Para reverter essa situação, gestores públicos, acadêmicos, educadores e empreendedores, terão que investir em desenvolvimento de inovações capazes de fazer com que a educação responda às demandas do século XXI e aos interesses do aluno contemporâneo. Neste contexto, o uso de novas tecnologias educacionais configura-se como uma estratégia que, se incorporada com propósito, planejamento e eficiência, pode trazer diversos benefícios para os alunos, os professores, as escolas e, certamente, para todo o País.

> [...] podemos ver que existe uma relação direta entre a educação e tecnologias. Usamos muitos tipos de tecnologia para aprender e saber mais e precisamos da educação para aprender e saber mais sobre as tecnologias. A maioria das tecnologias é utilizada como auxiliar no processo educativo (KENSKI, 2003).

Proporcionar ao aluno um novo instrumento de trabalho, mostrando-lhe que ele pode realizar diversas ações com os objetos disponíveis, fazendo-o refletir sobre as características e propriedades de objetos, constituindo uma análise generalizada sobre os conceitos e definições de tais objetos.

Antecipamos que a utilização de softwares para ensinar Matemática não implica, por si só, em um ambiente totalmente favorável para a aprendizagem físico e matemático, pois não gera uma aprendizagem automática. A proposta de trabalho do professor deve ser planejada, interessante e motivadora para o aluno. Isso irá implicar em uma aprendizagem desafiadora, fazendo com que o aluno possa pensar e refletir e partir para prováveis soluções, utilizando-se das diversas ferramentas disponíveis por meio do computador, para a resolução dos problemas propostos.

A forma como as ciências são ensinadas em sala de aula, dentro de um marco pedagógico, proporciona os princípios para que os professores descubram quais os métodos de ensino são mais eficazes. Segundo (ENTWISTLE, 2008), "tentar descobrir métodos por 'tentativa e erro' é um procedimento cego e, portanto, desnecessariamente difícil e antieconômico".

Nesse sentido, pode-se indagar que se uma "teoria da aprendizagem" pode oferecer uma explicação sistemática, coerente e unitária do como se aprende ou quais são os limites da aprendizagem, o porquê do esquecimento do aprendido, e complementando as teorias da aprendizagem, poderão ser encontrados os "princípios da aprendizagem", já que se ocupam de estudar os fatores que contribuem a que ocorra a aprendizagem e onde se fundamentará o trabalho educativo; nesse sentido, se o docente desempenhar seu trabalho fundamentando-se em princípios de aprendizagem bem estabelecidos, poderá racionalmente escolher novas técnicas de ensino e melhorar a efetividade de seu trabalho.

(D'AMORE, 2006) expõe que a aprendizagem do aluno depende da estrutura cognitiva prévia que se relaciona com a nova informação e, assim, deve-se entender por "estrutura cognitiva" o conjunto de conceitos e ideias que um indivíduo possui em um determinado campo do conhecimento, assim como a sua organização.

No processo de orientação da aprendizagem, é de vital importância conhecer a estrutura cognitiva do aluno; não só se trata de saber a quantidade de informação que possui, mas também quais são os conceitos e proposições que o regem, assim como seu grau de estabilidade.

Os princípios de aprendizagem devem oferecer um referencial para o desenvolvimento de ferramentas cognitivas que permitam conhecer a organização da estrutura cognitiva do educando, o qual permitirá uma melhor orientação do trabalho educativo e já não será mais vista como um trabalho que deva se desenvolver com a "mente em branco" ou que a aprendizagem dos alunos comece do "zero", mas sim que os educandos tenham uma série de experiências e conhecimentos que afetem sua aprendizagem e que possam ser aproveitados para seu benefício, convertendo-o em algo significativo para eles.

3 Breve histórico da Matemática e Matemática Financeira

A evolução da Matemática, no Brasil, ocorreu com a colaboração de diversos matemáticos, tais como: José Monteiro Rocha, José Anastácio da Cunha, Antônio Pires da Silva, Francisco José de Lacerda e Almeida, Antônio Francisco Bastos, João Antônio Coqueiro, Thomas Antônio de Oliveira, dentre outros.

Conforme (COSTA, 2007), "a Matemática é uma ciência, uma disciplina do currículo escolar, em que está presente no cotidiano e nas atividades do homem". Vale ressaltar que, durante anos, a Matemática não era reconhecida como uma ciência. Não sendo uma profissão regularizada, era informal, não havia cursos superiores, incentivos, e não era obrigatório o seu estudo nas escolas. Porém, a Matemática só foi incluída nas escolas no final do século XVIII, com o advento da Revolução Industrial na Inglaterra, o que trouxe a produção em massa, sendo necessária a utilização dela por meio de contas e cálculos.

É importante enfatizar que, para (MORALES; AMBRÓSIO, 2003),

> a Matemática é considerada um saber, que teve origem e desenvolvimento na Europa, nas civilizações indianas e islâmicas, utilizada no cotidiano do homem, em suas atividades, como pesca pintura, dentre outras, tendo como forma atual a partir dos séculos XVI e XVII, levada ao mundo desde o período colonial.

Conforme (BOYER, 1996), "a Matemática surgiu e teve sua evolução como resposta às necessidades práticas do homem em seu dia-a-dia". Também cita-se, na origem da Matemática, que a arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o aspecto quantitativo. Existe a possibilidade de que contar tenha uma origem única, espalhando-se, subsequentemente, a outras partes do mundo.

Assim, o conceito de número inteiro é o mais antigo na Matemática, e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica. A noção de fração racional, por sua vez, surgiu relativamente tarde, não estando relacionada com o sistema para os inteiros. Portanto, não houve um progresso ordenado de frações binárias para quinarias e decimais, uma vez que o homem primitivo não tinha essa necessidade: sua necessidade matemática era apenas de contar. A fração decimal foi um produto da idade moderna da matemática do período primitivo. Nesse contexto, a Matemática é definida como a ciência das regularidades, que teve origem nas regiões banhadas pelo mar Mediterrâneo, principalmente a Grécia:

> Em sua origem, a Matemática se constituiu a partir de uma coleção de regras isoladas de decorrentes experiências diretamente conectadas com a vida diária. Da mesma forma, a sobrevivência numa sociedade complexa que exige novos padrões de produtividades depende cada vez mais de conhecimento matemático. É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode fornecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade e estética e de sua imaginação (SANTOS; LIMA, 2010).

Conforme (BOYER, 1996), "os matemáticos do século XX desempenham uma atividade intelectual altamente sofisticada, que não é fácil de definir, mas boa parte do que atualmente se chama matemática deriva de ideias que têm origem nos conceitos de números, grandeza e forma". Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, na antiguidade, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em forma de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade. Nesse sentido, a Matemática é uma ciência que trata das quantidades e suas medidas.

3.1 Matemática Financeira: breve histórico

Ao longo da História, o homem percebeu que havia uma possível relação entre o tempo e o dinheiro: o dinheiro se desvalorizava com o passar do tempo. Dessa forma, a correção monetária deveria ser feita, aumentando o poder de compra do capital (SILVA, 2015a) .

A figura abaixo ilustra uma tábula mesopotâmica que apresenta cálculos financeiros, exposta no Museu do Louvre, na França.

De acordo com fatos históricos, a ideia do que seria juros na Babilônia (no início da civilização) funcionava da seguinte forma: os comerciantes emprestavam sementes aos agricultores que, na época exata da colheita da plantação, pagavam as sementes emprestadas, mais uma determinada parte da colheita.

> As práticas financeiras eram utilizadas no intuito da acumulação de capital; as formas econômicas de movimentação dos capitais foram adaptadas de acordo com a evolução das sociedades. O escambo era utilizado porque não existia uma moeda de troca: o surgimento do dinheiro originou a criação de mecanismos controlados inicialmente por pessoas denominadas cambistas. Eles exerciam a profissão que hoje é atribuída aos banqueiros, sentados num banco; nos mercados, eles realizavam operações de empréstimo, que eram quitados acrescidos os juros e na organização de ordens de pagamentos para

Figura 1 – **Fonte:** Souza (2010, p. 71)

particulares. Dessa forma, os cambistas tinham seus lucros e comissões pelos serviços prestados (SILVA, 2015a).

A partir de então, houve uma necessidade urgente de organizar o comércio, o que resultou no surgimento dos bancos, que proporcionaram um maior dinamismo à economia de forma geral. Não se pode negar, assim, que os bancos tiveram papel importante nas negociações entre os povos que realizavam operações comerciais no Mar Mediterrâneo. Os grandes clientes eram os fenícios, gregos, egípcios e romanos, que concentravam maior participação nos métodos bancários daquela época.

Portanto, os bancos foram essenciais para o aprimoramento das técnicas financeiras e o surgimento dos juros compostos, além de ajudarem na elaboração de novas estratégias de crédito para pequenos produtores.

> Nos dias de hoje, a Matemática Financeira possui inúmeras áreas de aplicação no cotidiano, é bastante flexível e útil e acaba englobando situações relacionadas ao ganho de capital, pagamentos antecipados e postecipados, porcentagem, financiamentos, descontos comerciais, dentre outros produtos do meio financeiro (FILHO, 2008).

No Brasil, as primeiras instituições financeiras surgem no início do século XIX, com a fundação do Banco do Brasil. Em 1838, surgem os primeiros bancos comerciais de iniciativa privada, geralmente formados pela associação de capital dos ramos comercial e industrial, buscando atender, basicamente, o setor primário exportador. O núcleo central do sistema financeiro, nesse momento, é o Banco do Brasil, juntamente com alguns bancos comerciais de pequeno porte que exerciam a função de intermediação financeira: captar no mercado dinheiro das empresas e pessoas físicas que solicitavam crédito.

Diante disso, o campo de aplicação da matemática financeira é bastante amplo, sendo que esta disciplina contribui substancialmente no processo de tomada de decisão do administrador dentro da empresa, principalmente com a globalização e a crescente complexidade dos mercados (FILHO, 2008) .

Segundo (LEAL, 2009):

> É por meio da Matemática Financeira que o indivíduo adquire o conhecimento das técnicas e recursos que lhe possibilitarão decidir como utilizar seu dinheiro. Por meio da aquisição desse conjunto de técnicas e recursos, o aluno, futuro consumidor, poderá optar ou não por tomar uma decisão. Poderá, a partir desse conhecimento adquirido, analisar, bem como administrar o risco que envolve a tomada de cada decisão em sua vida financeira.

As decisões financeiras envolvem situações nas quais alguns recebem valores num determinado período do tempo e pagam algum tempo mais tarde e vice-versa. Assim, é essencial que os gestores financeiros tenham um entendimento claro sobre o valor do dinheiro no tempo e seu impacto sobre o valor da empresa. Saber levar valores presentes para o futuro e trazer valores futuros para o presente fazem parte da rotina do administrador financeiro.

A Matemática Financeira considera a premissa do valor do dinheiro no tempo, e, por meio do cálculo financeiro, é possível movimentar valores entre diferentes datas.

Dessa forma, ressalta-se que uma das mais importantes aplicações de progressões geométricas é a Matemática Financeira. A operação básica é a operação de empréstimo (LIMA *et al.*, 2006) .

Assim, o valor futuro é obtido por meio da capitalização de um valor presente, enquanto que o valor presente é obtido por meio do desconto de um determinado valor futuro.

Essa visão também é defendida por (GIRALDO *et al.*, 2012):

> A Matemática Financeira, aplicada aos diversos ramos da atividade econômica, pode representar importante instrumento para auxiliar em análises e decisões de ordem pessoal e social. Assim, além de servir como aporte a conceitos de outros campos, o aprendizado da Matemática Financeira instrumentaliza o cidadão a melhor entender, interpretar e escolher adequadamente dívidas, crediários, descontos, reajustes salariais, aplicações financeiras.

De modo geral, é possível afirmar que o objetivo principal da Matemática Financeira é o estudo do valor do dinheiro, com ênfase no cálculo de valores presentes e de valores futuros. Para tanto, é fundamental o entendimento do processo de capitalização e de desconto (FILHO, 2008) .

4 CRISE ECONÔMICA MUNDIAL

A crise econômica que se alojou no Brasil está em bastante evidência. Os leigos ou não muito inteirados sabem opinar e também apresentam soluções para amenizar a situação. Não havendo a necessidade de conhecimentos específicos apurados com relação a esse tema, seja ela de que tipo ou dimensão for, a sociedade brasileira vive juntando "cacos" da crise econômica desde 2008.

> Faz seis anos que a economia mundial começou a ruir como um castelo de cartas de baralho, depois do estouro da crise imobiliária nos Estados Unidos. E ainda hoje, a economia mundial engatinha rumo à recuperação. Em 2012 e 2013, o Produto Interno Bruto (PIB) mundial cresceu menos de 3%. Para 2014, a Organização das Nações Unidas (ONU) estima meros 2,8% de crescimento – muito aquém dos 5% registrados nos anos anteriores à crise (ENEM, 2015).

Todavia, todo esse movimento já era esperado. Infelizmente, o que resultou como surpresa foi quem seria o responsável por assumir o controle da situação e colocar ordem, não as economias emergentes, mas principalmente os países desenvolvidos, justamente aqueles que foram mais pesadamente afetados.

Segundo o (ENEM, 2015), "Os Estados Unidos (EUA) – o País da crise – retomam lentamente a normalidade, com a redução nas taxas de emprego e o aquecimento do mercado interno de consumo".

Os países da União Europeia (UE) crescem de maneira desproporcional, com a grande maioria ainda em queda livre no PIB. Todavia, no que tange ao conjunto, é possível que a UE cresça 1,4% em 2014. É importante lembrar também que, tanto a UE quanto os EUA têm enfrentado problemas nas contas públicas. Na Europa, por exemplo, em países como Grécia, Portugal, Espanha e Islândia, a quebra de confiança acabou impedindo a entrada de novos recursos. Como consequência disso, as dívidas com credores nacional e estrangeiros, que já estavam bem altas, ficaram impossíveis de serem pagas sem a ajuda da própria UE.

A crise evoluiu, iniciando-se nos Estados Unidos, com o endividamento de grandes bancos de investimento. Os bancos adotaram uma linha de empréstimo para aquisição da casa própria chamada de *subprime*, pois se tratava de um tipo de empréstimo onde o cliente tinha poucas garantias de poder quitar a dívida.

Em se tratando do Brasil, a renúncia fiscal adotada no início da crise – isenção de do Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI) para algumas indústrias – movimentou o mercado interno.

> O governo alterou também a remuneração da caderneta de poupança. Até maio de 2012, o poupador tinha garantia a remuneração mínima anual de 6,17% sobre o valor aplicado mais a Taxa Referencial (TR, uma taxa calculada sobre o rendimento de papéis de investimento chamado de CDBs).
>
> A TR foi mantida, mas, se a SELIC for menor que ou igual a 8,5%, a remuneração não passará dos 70% dessa taxa. Isso é válido para contas abertas a partir de maio de 2012 (ENEM, 2015).

A sociedade tem reclamado e com todo o direito: guardar dinheiro, investir ou aplicar estão mais rodeados de burocracia; consequentemente o cidadão se desorganiza e acaba com planos futuros.

A figura a seguir mostra a evolução do Produto Interno Bruto na União Europeia, de 2007 a 2014.

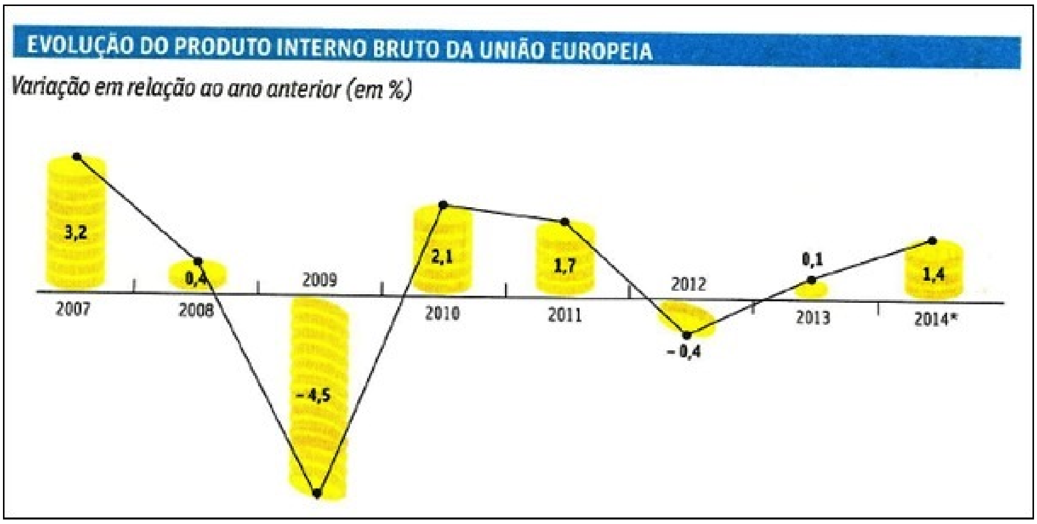


Figura 2 – **Fonte:** Comissão Europeia

O gráfico a cima ressalta a questão de como o PIB dos países da União Europeia se comportou nos últimos seis anos e a projeção da Comissão Europeia para 2014. Os valores com sinal negativo refletem a retratação do PIB, ou seja, os países não conseguiram repetir suas riquezas nos anos seguidos. No ano de 2009, por exemplo, nota-se a diferença, pois foi o ano que marcou o estouro da crise e a economia encolheu quase 5%.

A figura a seguir mostra o aperto dos mais endividados. As linhas refletem o quanto cresceu a dívida pública nesses países, entre 2007 e 2012. No caso da Irlanda, Espanha e Chipre, pode-se notar que as contas sofreram um desequilíbrio um pouco mais tarde.

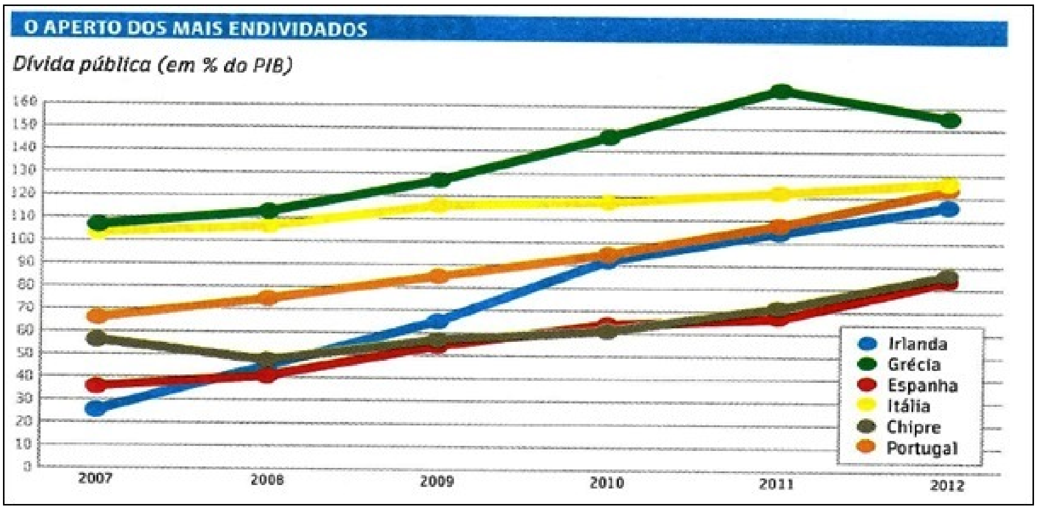


Figura 3 – **Fonte:** Comissão Europeia

O gráfico a seguir mostra primeiramente a taxa de 8,75%, sendo esta mantida no período mais conturbado da crise econômica mundial. É importante salientar que os juros baixos facilitaram as empresas a tomar empréstimos e aos consumidores a comprar a crédito.

Figura 4 – **Fonte:** Comissão Europeia

4.1 A necessidade da educação financeira: situações do dia-a-dia

O dinheiro é algo com o qual, desde cedo, se começa a lidar, e, em consequência disso, surge uma série de situações ligadas a valores. Assim, nos dias de hoje, principalmente, para tirar um proveito melhor do dinheiro, é muito importante saber como utilizá-lo de tal forma que seja sempre favorável.

Diante disso, o aprendizado e a aplicação de conhecimentos práticos de educação financeira podem ser indispensáveis para melhorar a gestão das finanças pessoais de cada indivíduo, proporcionando-lhe uma vida mais tranquila e equilibrada, sob o ponto de vista financeiro.

Normalmente, os principais gastos das pessoas tem acontecido devido à crescente sofisticação dos produtos oferecidos e de serviços financeiros, proporcionado uma variedade de opções para gastar dinheiro.

Analisando esse quadro, foi instituída a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), com o objetivo de "promover a educação financeira e contribuir para o fortalecimento da cidadania, para a eficiência e a solidez do Sistema Financeiro Nacional (SFN) e para a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores"(BRASIL, 2013b).

Portanto, a ENEF tem direcionamento da educação financeira e definido pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) em 2005, adaptado para a realidade brasileira:

> O processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram sua compreensão dos conceitos e dos produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação claras, adquiram os valores e as competências necessários para se tornarem conscientes das oportunidades e dos riscos neles envolvidos e, então, façam escolhas bem informados, saibam onde procurar ajuda, adotem outras ações que melhorem o seu bem-estar, contribuindo, assim, de modo consistente para formação de indivíduos e sociedades responsáveis, comprometidos com o futuro(BRASIL, 2013a).

Desse modo, a ENEF pretende alcançar os seguintes objetivos [Conf. (BRASIL, 2013b)]:

- Promover e fomentar uma cultura de educação financeira no país;
- Ampliar a compreensão dos cidadãos para que possam fazer escolhas bem informadas sobre a gestão de seus recursos;
- Contribuir para a eficiência e solidez dos mercados financeiros, de capitais, de seguros e de fundos de previdência.

Enfim, sabe-se que promover a educação financeira não é nada fácil. É preciso renúncia e organização de todos os membros da família, funcionários de uma empresa, ou seja, em todos os lugares onde o dinheiro circula, é preciso ser consciente. Ainda assim, há situações do dia-a-dia que precisam ser compreendidas, e o consumidor é alvo, às vezes, de muitos golpistas, por não saberem operações financeiras. Por isso, os próximos tópicos mostram algumas dessas situações, porém, ilustram cálculos que podem ser utilizados para se chegar a um valor e uma consciência do consumidor, evitando gastos desnecessários e juros absurdos.

4.1.1 Financiamento de veículos

Os financiamentos são considerados operações de compras e vendas realizadas, onde o bem (automóvel ou imóvel) pode ser pago em parcelas, porém, depende de como foi realizado o acordo firmado entre credor e devedor; até mesmo as parcelas podem ser de valores iguais ou diferentes, podendo ser acrescidas de juros ou não.

Atualmente, tornam-se bastante comum, produtos sendo vendidos a prazo com parcelas sem juros, o que depende da instituição financeira. Também a maioria dos automóveis e dos imóveis vendidos é paga utilizando a modalidade financiamentos com pagamentos que chegam há 72 meses no caso dos carros, e há 35 anos no caso de casas e apartamentos. Para (MATHIAS; GOMES, 2007), “os empréstimos são classificados de curto, de médio e de longo prazo, sendo os de curto e de médio prazo saldados em até três anos”.

Todavia, a primeira situação que pode existir, e na verdade existe, na maioria dos lares é a procura pelas instituições financeiras para financiar um veículo, mas o consumidor sabe como é feito o cálculo de financiamento? É importante verificar um calculo na prática para ver como ocorre:

Exemplo 4.1.1: (SILVA, 2015b)

Suponha que uma pessoa queira financiar um carro no valor de R\$ $10.000,00$, financiado à taxa de $1,5\%$ a.m. durante 12 meses. Qual o valor mensal da prestação? Vamos calcular o coeficiente de financiamento:

Fórmula do cálculo do coeficiente de financiamento:

$$CF = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \tag{4.1}$$

Essa fórmula permite calcular o valor da prestação do empréstimo de acordo com a taxa de juros i e o período n.

$$CF = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow CF = \frac{0,015}{1-(1+0,015)^{-12}}$$

$$CF = \frac{0,015}{1-(1,015)^{-12}} \Rightarrow CF = \frac{0,015}{1-\left(\dfrac{1}{1,015}\right)^{12}}$$

$$CF = \frac{0,015}{1-\left(\dfrac{1}{1,195618171}\right)} \Rightarrow CF = \frac{0,015}{1-0,836387422}$$

$$CF = \frac{0,015}{0,163612578}$$
$$CF \approx 0,091679993.$$

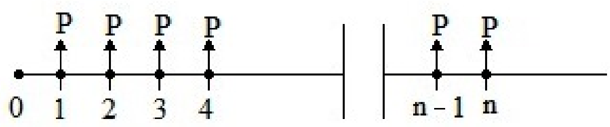
Multiplicando o valor do financiamento, R\$$10.000,00$, pelo coeficiente de financiamento, teremos o valor da prestação:

$10.000 \times 0,091679993 \approx 916,80$. Logo, o valor da prestação será de, aproximadamente, R\$$916,80$.

O cálculo apresentado acima nada mais é que a aplicação do Teorema da série uniforme cujo valor em n pagamentos iguais a P a uma taxa i é dada pela expressão do Teorema 4.1.1:

Teorema 4.1.1. *O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros e A valor atual, igual a*

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.2}$$



Demonstração (MORGADO *et al.*, 2001):

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$A = \frac{P}{(1+i)} \left[\frac{1-\left(\frac{1}{(1+i)}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{(1+i)}\right)} \right] = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Assim, calculando de forma direta, isolando P da equação dada, decorre que o valor da parcela do automóvel é: $P = \dfrac{A \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$, onde $A = 10.000$, $i = 1,5\%$ e $n = 12$. Logo, o valor de P é:

$$P = \frac{10.000 \cdot 0,015}{1-(1+0,015)^{-12}} \Rightarrow P \approx \frac{150}{1-0,8363874} \Rightarrow P \approx \frac{150}{0,1636126} \approx 916,80.$$

4.1.2 Proposta de empréstimo consignado

O empréstimo consignado é uma operação que foi regulamentada por meio da Lei n^o10.820, aprovada em dezembro de 2003 pelo Decreto n^o4.840, a qual tem como principal característica a autorização concebida para desconto de prestações em folha de pagamento para aposentados e pensionistas.

Com o objetivo de fazer com que os aposentados e pensionistas utilizem o crédito consignado, os bancos tem boas perspectivas com relação a esse público, pois, semelhante a outros países, a população do Brasil vem envelhecendo rapidamente. A população idosa é considerada aquela cujos indivíduos têm mais de 60 anos e forma o segmento que mais cresce em termos proporcionais(ROTONDI, 2015).

Todavia, há outro lado da moeda a ser mostrado, pois, com tantas facilidades provenientes do empréstimo consignado e, consequentemente, vantagens, prazos, descontos concedidos pelas instituições financeiras, é preciso ficar atento para o endividamento.

O empréstimo consignado talvez seja um dos mais fáceis de calcular. Agora é importante observar o seguinte exemplo de (ROTONDI, 2015):

O aposentado, pensionista ou funcionário público com um salário bruto de R\$$1.000,00$, deve multiplicá-lo por $0,3$ para obter o valor máximo da parcela.

Salário Líquido: R\$$1.000,00$.

Limite de Parcela: $\times 0,3$, que equivale a 30% da renda.

Total: R\$$300,00$ (Valor da parcela).

Identificar qual o valor máximo do consignado que pode ser feito, tendo como base o prazo de 60 meses para aposentados e pensionistas.

Valor máximo da parcela: R\$$300,00$.

Prazo de pagamento:$\times 60$.

Total: R\$$18.000,00$.

Todavia, esse valor ainda não é o empréstimo, mas sim uma noção de quanto pode ser pago por meio de uma parcela de R\$ $300,00$, no prazo de 60 meses. Agora, o montante será dividido por $1,7$, como no exemplo a seguir:

Valor a ser pago: R\$$\dfrac{18.000,00}{1,7} \approx$ R\$ $10.500,00$.

Taxas: $1,7$.

Concluímos que o consumidor pode adquirir um empréstimo aproximado de R\$$10.500,00$, porém precisa ganhar uma média de R\$$1.000,00$ líquido.

4.1.3 Conversões de taxas de juros

A maioria das pessoas que não tem a informação financeira encontram problemas ao converter taxas de juros para períodos diferentes. Primeiramente, é preciso entender que as taxas proporcionais são calculadas em juro simples, podendo ser obtidas por meio de regra de três simples. Porém, para a conversão de taxas equivalentes, utiliza-se o conceito de juros compostos.

Exemplo 4.1.3: (OLIVEIRA, 2014):

Um capital de R$300,00 foi aplicado por um período de 5 meses, a uma taxa de juros compostos efetivos de 24% ao ano, com capitalização mensal. Qual é o montante produzido nessa aplicação?

Como o período de capitalização é mensal e a taxa é cotada ao ano, devemos, primeiramente, transformar as unidades de tempo e de taxa para uma mesma unidade. A fórmula que permite a conversão de taxas é dada por:

$$1+I=(1+i)^n, \tag{4.3}$$

em que a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I e a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i.

Considerando, então, $I = 24\%$ a.a, $i = i_{\text{mês}}$ e $n = 12$, pois um ano corresponde a 12 meses, temos

$$\begin{aligned}
1+0,24 &= \left(1+i_{\text{mês}}\right)^{12}\\
(1,24)^{\frac{1}{12}} &= 1+i_{\text{mês}}\\
i_{\text{mês}} &= \sqrt[12]{1,24}-1\\
i_{\text{mês}} &= 1,018087582483-1\\
i_{\text{mês}} &\approx 0,0181 \text{ ou } 1,81\% \text{ ao mês, aproximadamente.}
\end{aligned}$$

Assim, a taxa de juros ao mês é de, aproximadamente, $1,81\%$.

São comuns as situações em que o valor de um produto se altera mediante acréscimos ou descontos seguidos. Vejamos uma de tais situações para entender melhor esse contexto:

Um produto cujo valor inicial $V_0 =$ R$100,00 passa por dois aumentos seguidos, um de 5% e outro de 12%, e logo em seguida sofre um desconto de 10%, o valor final, V_f, do produto, calculado como segue:

Primeiro, calculamos o valor do 1^o aumento:

$V_1 = 100\cdot(1+0,05) = 100\cdot 1,05 \Rightarrow V_1 =$ R$105,00.

O segundo aumento incide sobre o primeiro. Logo:

$V_2 = 105 \cdot (1 + 0,12) = 105 \cdot 1,12 \Rightarrow V_2 = \text{R\$}117,60.$

Finalmente, o desconto é calculado sobre R$117,60.

$V_f = 117,60 \cdot (1 - 0,10) = 117,60 \cdot 0,90 \Rightarrow V_f = \text{R\$}105,84.$

O valor final, após todas as variações, é, portanto, de R$105,84.

Podemos calcular V_f de forma direta:

$V_f = 100 \cdot (1 + 0,05) \cdot (1 + 0,12) \cdot (1 - 0,10) = 100 \cdot 1,05 \cdot 1,12 \cdot 0,90 \Rightarrow V_f = \text{R\$}105,84.$

Observe que o preço final do produto se elevou 5,84 reais, o que equivale a um aumento de 5,84% sobre o valor inicial. A taxa de 5,84% é o que denominamos de **taxa equivalente** ou **taxa acumulada**.

Generalizando o exemplo acima, podemos escrever:

$$\begin{aligned} V_f &= V_0 \cdot (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n) \\ V_0 \cdot (1 + I) &= V_0 \cdot (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n) \\ 1 + I &= (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n) \\ I &= (1 \pm i_1) \cdot (1 \pm i_2) \cdot (1 \pm i_3) \cdot \ldots \cdot (1 \pm i_n) - 1, \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que a taxa I é a taxa acumulada de todas variações i_s do produto.

Muitos dos cidadãos confundem e não compreendem é que se um determinado produto tiver um aumento de 20% e logo em seguida outro aumento de 30%, isso não quer dizer que houve um aumento de 50%, e sim um aumento de 56%, conforme mostrado abaixo.

$I = (1 + 0,2) \cdot (1 + 0,3) - 1.$

$I = 1,56 - 1 = 0,56 = 56\%$

Muitos produtos ou serviços “vivem” em constante mudança de valores com acréscimos ou decréscimos, como por exemplo, o caso da **energia elétrica** que, atualmente, é o serviço de consumo que mais sofreu variação neste ano.

4.1.4 Amortização em empréstimos

Em algumas situações, a indisponibilidade de capital para adquirir um bem pode levar um indivíduo a realizar um empréstimo; para sanar o compromisso, ele pode optar por diversas formas de pagamento. Ao efetuar os pagamentos parciais para saldar a dívida, ocorre sua amortização.

A amortização de empréstimos em parcelas ao longo do tempo é uma das aplicações mais importantes dos juros compostos.

Quando um agente econômico toma um empréstimo, o credor exige a devolução do principal emprestado e a remuneração do capital por meio do pagamento de juros.

Assim, as prestações resultantes dos empréstimos são compostas por dois valores: um que reduz parte do empréstimo realizado (amortização) e outro que remunera o saldo do capital ainda não reembolsado (juros).

Segundo (SOUZA, 2010), "a amortização é o processo de redução de uma dívida por meio de pagamentos parciais, que podem ser mensais, bimestrais, anuais, dentre outros". Nesta seção, apresenta-se o sistema Price, em que o devedor paga o empréstimo em prestações fixas, sendo o número de prestações variável, de acordo com o contrato entre as partes (devedor e credor).

Para calcular o valor de cada prestação de um empréstimo no sistema Price, utilizamos a seguinte fórmula, segundo (SOUZA, 2010):

$$P = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}},$$

na qual:

- P - valor da prestação;
- C - valor do bem ou do empréstimo;
- i - taxa de juros;
- n - número de prestações.

Exemplo 4.1.4:

Paula fez um empréstimo de R\$ $3.000,00$, que deve ser pago em 5 prestações mensais, à taxa de juros de $2,5\%$ a.m., no sistema Price. Utilizando a fórmula apresentada acima, podemos calcular o valor de cada prestação:

$C = 3.000,00$; $i = 2,5\% = 0,025$; $n = 5$.

$$P = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$P = \frac{3000 \cdot 0,025}{1 - (1+0,025)^{-5}}$$

$$P \approx \frac{75}{1 - 0,88385}$$

$$P \approx \frac{75}{0,11615}$$

$P \approx 645,74.$

Portanto, o valor de cada prestação é de, aproximadamente, R$645,74.

Especificando por meio da tabela Price, na qual é possível visualizar bem a amortização da dívida, especificando as parcelas, os juros cobrados, a amortização e o saldo devedor, teremos:

TABELA PRICE				
n	Pagamento (P_k)	Juro (J_k)	Amortização (A_k)	Saldo devedor (D_k)
0	–	–	–	3.000
1	645,74	75,00	570,74	2.429,26
2	645,74	60,73	585,01	1.844,25
3	645,74	46,11	599,63	1.244,62
4	645,74	31,12	614,62	629,99
5	645,74	15,75	629,99	0

Tabela 1 – Tabela PRICE

Nesse tipo de sistema de amortização, as parcelas são sempre fixas e são obtidas por meio do cálculo da Série Uniforme na expressão matemática (4.2), na qual isolamos a incógnita (P). Podemos observar, ainda, na tabela que, com o passar dos períodos, o valor do juros vão diminuindo, enquanto o da amortização aumenta. Esse processo ocorre devido à tabela obedecer ao Teorema a seguir:

Teorema 4.1.2. *No sistema francês de amortização, sendo i a taxa de juros e n o número de pagamentos, temos: (MORGADO et al., 2001)*

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}; \quad D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}; \quad J_k = i \cdot D_{k-1} \quad e \quad A_k = P_k - J_k,$$

em que:

- P_k é calculado por meio da fórmula das Séries Uniformes;
- J_k é o valor do saldo devedor anterior ao período, vezes a taxa i;
- A_k é o resultado do valor da parcela, menos o juro calculado no período;
- D_k é o resultado do saldo devedor anterior ao período, menos a amortização calculada no período.

Construída em sala de aula, a tabela requer bastante tempo e atenção, como mostra o modelo a seguir:

$A = 3000$; $i = 2{,}5\% \Rightarrow 0{,}025$; $n = 5$; $A = P \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$$P = \frac{A \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \Rightarrow P = \frac{3000 \cdot 0{,}025}{1-(1+0{,}025)^{-5}} \Rightarrow P = \frac{75}{1-0{,}883854287} \cong 645{,}74$$

mês	Pag	juro	Amort.	Saldo Devedor
0	—	—	—	3000
1	645,74	75,00	570,74	2.429,26
2	645,74	60,73	585,01	1.844,25
3	645,74	46,11	599,63	1.244,62
4	645,74	31,12	614,63	629,99
5	645,74	15,75	629,99	0

$J_1 = 0{,}025 \times 3000 = 75{,}00$ $A_1 = 645{,}74 - 75 = 570{,}74$ $S_1 = 3000 - 570{,}74 = 2.429{,}26$

$J_2 = 0{,}025 \times 2.429{,}26 = 60{,}73$ $A_2 = 645{,}74 - 60{,}73 = 585{,}01$ $S_2 = 2.429{,}26 - 585{,}01 = 1.844{,}25$

$J_3 = 0{,}025 \times 1.844{,}25 = 46{,}11$ $A_3 = 645{,}74 - 46{,}11 = 599{,}63$ $S_3 = 1.844{,}25 - 599{,}63 = 1.244{,}62$

$J_4 = 0{,}025 \times 1.244{,}62 = 31{,}12$ $A_4 = 645{,}74 - 31{,}12 = 614{,}63$ $S_4 = 1.244{,}62 - 614{,}63 = 629{,}99$

$J_5 = 0{,}025 \times 629{,}99 = 15{,}75$ $A_5 = 645{,}74 - 15{,}75 = 629{,}99$ $S_5 = 629{,}99 - 629{,}99 = 0$

Construir uma tabela dessas manualmente não é difícil, porém é muito trabalhoso. Basta um cálculo errado e tudo vai por “água abaixo”. Com o auxílio do Excel, o professor disponibilizará de mais tempo para explorar os dados fornecidos pela tabela, em vez de perder tempo com sua construção.

5 MATEMÁTICA FINANCEIRA

A Matemática Financeira sempre esteve presente no cotidiano das pessoas: é com ela que calculamos o aumento ou diminuição dos preços dos alimentos, combustíveis, passagem de ônibus, reajuste das prestações, saldo devedor da casa própria etc.

A teoria e aplicações da Matemática Financeira podem ser encontradas em diversos livros, tais como: (SILVA, 2015a), (PARENTE; CARIBE, 1996), (MORGADO *et al.*, 2001), (IEZZI *et al.*, 2004) e etc.

Dentre os diversos pontos, destacamos:

- uma das importantes aplicações de progressões geométricas é a Matemática Financeira;
- a operação básica da Matemática Financeira é a operação de empréstimo.

Além disso:

> Alguém que dispõe de um capital C (chamado de *principal*) empresta-o a outrem por certo período de tempo, e, após esse período, recebe o seu Capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de *juro*. A soma $C + J$ é chamada de *montante* e será representada por M. A razão $i = \dfrac{J}{C}$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*. (LIMA *et al.*, 2006)

Para uma melhor compreensão do conteúdo de Matemática Financeira, faremos um "passeio" pelos seus temas de maior relevância. Iniciaremos pelo estudo da porcentagem, passando pelos regimes de capitalização, finalizando com equivalência de taxas, assuntos poucos abordados no Ensino Médio no estudo da Matemática Financeira.

5.1 Porcentagem

A porcentagem é um item básico, e, com certeza, muitos, mesmo que não se lembrem, já estudaram algo a respeito. Além disso, a porcentagem exerce grande importância no ensino da Matemática. Por isso, tem uma gama muito variada de aplicações em situações que ocorrem no dia-a-dia, como por exemplo, bancos, farmácias, supermercados etc.

Segundo orientação dos PCN's, a porcentagem deve ser abordada de maneira mais simples nas primeiras séries, e, posteriormente, nas séries finais do Ensino Fundamental, o aluno já deve se deparar com uma resolução de problemas envolvendo proporcionalidade e cálculos com porcentagens um pouco mais complexa (MEC, 1998).

Segundo (PARENTE; CARIBE, 1996), “Porcentagem é o resultado que se obtém quando se aplica a taxa de porcentagem a um dado valor”. Vejamos a fórmula da porcentagem, verificando a quantia sobre a qual se calcula a porcentagem:

$P = i \cdot p \rightarrow,$

na qual:

- P: porcentagem;
- p: principal;
- i: taxa de porcentagem.

É importante sempre observarmos exemplos para que a análise sob uma olhar da Matemática Financeira seja mais realista e prático.

Exemplo 5.1.1:

(Exemplo de Souza (SOUZA, 2010) – Notícia de um determinado jornal) A cada 100 habitantes, 80 têm celulares. Em 23 de abril de 2009, o Brasil possuía cerca de 154 milhões de assinantes do serviço de telefonia móvel pessoal. A maioria desses acessos era por meio de telefones pré-pagos.

A relação “80 em cada 100” pode ser representada por uma fração cujo denominador é igual a 100, isto é, $\frac{80}{100}$, que também pode ser representada na forma decimal ou em porcentagem.

$\dfrac{80}{100} = 0,80 = 80\%$ (lê-se: oitenta por cento.)

A porcentagem corresponde à parte considerada de um total de 100 partes. Para indicá-la, utilizamos o símbolo %. Toda razão $\frac{x}{y}$, em que $y = 100$, é denominada taxa percentual. Assim, toda fração decimal ou equivalente a ela pode ser escrita na forma de porcentagem.

Exemplo 5.1.2:

Em uma sala de aula, há 25 alunos, sendo que, desses, 12 são meninas. Podemos determinar da seguinte maneira a taxa percentual de meninas da sala:

Como 12 em cada 25 alunos são meninas, obtemos a fração $\frac{12}{25}$. Escrevendo uma fração equivalente a $\frac{12}{25}$ com denominador igual a 100, temos:

$\dfrac{12}{25} = \dfrac{12 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \dfrac{48}{100} = 48\%$

Utilizando número decimal:
$\frac{12}{25} = 0,48 = \frac{48}{100} = 48\%$
Utilizando regra de três:
$\frac{12}{25} = \frac{x}{100} \Rightarrow 25x = 1200 \Rightarrow x = \frac{1200}{25} \Rightarrow x = 48 \Rightarrow x = 48\%$
Portanto, a taxa percentual de meninas dessa sala é de 48%.

5.2 Regime de capitalização

A capitalização simples tem por base os juros simples, ou seja, os juros são sempre calculados sobre o valor inicial. Essa forma de capitalização é normalmente utilizada em operações financeiras de curto prazo (FILHO, 2008).

Se um capital for aplicado a certa taxa por período, por vários intervalos ou períodos de tempo, o valor do montante pode ser calculado segundo duas convenções de cálculo, chamadas de regime de capitalização: capitalização simples (ou juros simples) e capitalização composta (ou juros compostos)(IEZZI *et al.*, 2004).

5.2.1 Juros

"O juro é a remuneração que o tomador de um empréstimo deve pagar ao dono do capital como compensação pelo uso do dinheiro" (PARENTE; CARIBE, 1996).

Quando uma pessoa toma um empréstimo no banco, ela deve pagar, além da quantia emprestada, um valor a mais, correspondente ao juro, isto é, um tipo de aluguel pelo período em que o dinheiro ficou emprestado (SOUZA, 2010).

Pode-se relatar outra situação envolvendo juro: quando uma pessoa aplica determinada quantia, seja em caderneta de poupança ou em outro investimento, essa pessoa acaba recebendo o juro de acordo com o período em que essa quantia ficou aplicada ou investida.

De acordo com Souza (SOUZA, 2010), há alguns termos que precisam ser conhecidos e que são utilizadas em situação de juro:

- Capital (C): quantia em dinheiro investida ou emprestada;
- Juro (J): rendimento, acréscimo ou aluguel pago pelo investimento ou empréstimo de certa quantia;
- Taxa de juros (i): porcentagem que se recebe de rendimento em um investimento ou que se paga pelo empréstimo de certa quantia;
- Tempo (t): período em que se investe ou empresta certa quantia, podendo ser

dado em dias, meses, anos etc;

- Montante (M): soma do capital com o juro, ou seja, $M = C + J$.

De acordo com (ENEM, 2015), "Juro é o custo do dinheiro, o valor que o tomador de recursos deve pagar a mais sobre o valor emprestado, depois de determinado período".

5.2.2 Montante

O montante é o capital aplicado, acrescido dos respectivos juros.

Assim:

$FV = PV + INT$ (ou $M = C + J$),

em que:

FV: future value (valor futuro, ou seja, o montante);

PV: principal value (valor principal, ou seja, o capital);

INT: interest (taxa de juros).

Substituindo J por sua fórmula, temos:

$M = C + Cit$.

Colocando C em evidência, obtemos a fórmula do montante:

$M = C(1 + it)$

5.2.3 Juros simples

O juro envolvido em certa operação financeira é chamado de **juro simples** quando sua geração, em cada período a que se refere a taxa, durante todo o seu prazo de aplicação, é feita exclusivamente com base no capital inicial (PARENTE; CARIBE, 1996).

No caso dos bancos, são os juros lançados sobre a quantia original, numa taxa fixa a cada período. Não importa em quantos dias, meses ou anos o empréstimo será pago, a taxa de juros será sempre a mesma e sempre sobre o valor inicial, aplicada período a período (ENEM, 2015).

Segundo (IEZZI *et al.*, 2004) Os juros simples são resultados do produto do capital pela taxa e pelo prazo da aplicação. Observemos que nessa fórmula o prazo n deve estar expresso na mesma unidade de i, isto é, se a taxa i for definida em meses, o prazo n virá também em meses.

$$J = C \cdot i \cdot n \tag{5.1}$$

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo 5.2.3.1:

Simone fez uma aplicação no valor de R$ $1.000,00$ durante 7 meses, à taxa de juros simples de $0,65\%$ a.m. Pode-se calcular o montante obtido por Simone ao final da aplicação da seguinte forma (SOUZA, 2010)

- Capital (valor da aplicação): $C = \text{R}1.000,00$.
- Tempo (período da aplicação): $n = 7$ meses.
- Taxa de juros: $i = 0,65\%$ a.m., ou seja, $i = 0,0065$ a.m.

Calculando o juro simples ao final de cada mês, temos:

$0,65\%$ de $1.000 \rightarrow \dfrac{0,65}{100} \cdot 1.000 = 0,0065 \cdot 1.000 = 6,5$, ou seja, R$$6,50$.

Como o capital ficou aplicado por 7 meses, multiplicamos o juro de um mês por 7. Assim, $6,5 \times 7 = 45,5$, ou seja, R$$45,50$.

Exemplo 5.2.3.2:

(Exemplo de Lima; Carvalho; Wagner; Morgado (LIMA *et al.*, 2006)) Lúcia tomou um empréstimo de R$$100,00$. Dois meses após, pagou R$$140,00$. Os juros pagos por Lúcia são de R$$40,00$, e a taxa de juros é de $\dfrac{40}{100} = 0,40 = 40\%$ ao bimestre. O principal, que é a dívida inicial de Lúcia, é igual a R$$100,00$; o montante, que é a divida na época do pagamento, é de R$$140,00$.

Exemplo 5.2.3.3:

(Exemplo de Iezzi; Hazzan, Degenszajn (IEZZI *et al.*, 2004)) Um capital de R$$8.000,00$ é aplicado a juros simples, à taxa de 2% a.m, durante 5 meses. Vamos calcular os juros e o montante da aplicação.

Os juros da aplicação, em reais, são:

$J = 8.000 \times (0,02) \times 5 = 800$.

O montante da aplicação, em reais, é:

$M = 8.000 + 800 = 8.800,00$.

Exemplo 5.2.3.4:

(Exemplo de Garcia (GARCIA, 1992)) É comum o comércio fazer promoções do tipo "compre à vista com 20% de desconto ou em três vezes sem juros".

Supondo que tenhamos dinheiro suficiente para comprar em qualquer das duas formas, qual será a melhor alternativa?

Para resolver esse problema, representaremos por i a taxa à qual conseguimos investir nosso capital, taxa esta que é tecnicamente chamada de taxa mínima de atratividade. Isso significa que conseguimos transformar uma quantia P em $P+Pi = P\cdot(1+i)$ após um mês, em $P\cdot(1+i)+P\cdot(1+i)\cdot i$, ou seja:

$P\cdot(1+i)\cdot[1+i] = P\cdot(1+i)^2$, após dois meses.

Portanto, uma quantia igual a P hoje tem o mesmo valor de uma quantia $P\cdot(1+i)$ após um mês.

Ora comprando em três vezes sem juros, teremos o esquema de desembolso. Ou seja, pagamos P agora, P daqui a um mês, P daqui a dois meses, o que equivale a desembolsar, agora:

$P+\dfrac{P}{1+i}+\dfrac{P}{(1+i)^2} \approx 2,626P$, no caso de $i = 0,15$.

Como o preço à vista (sem desconto) seria $3P$ e com desconto à taxa d seria $3P-d\cdot 3P = 3P\cdot(1-d)$, a compra à vista com desconto seria vantajosa se e somente se

$3P\cdot(1-d) < 2,626P$

$3\cdot(1-d) < 2,626$

$3-3d < 2,626$

$3d > 0,374 \Rightarrow d = \dfrac{0,374}{3}$

$d > 0,124666...,$

ou seja,

$d > 0,13 = 13\%$ (aproximadamente).

Portanto, no caso em questão, a compra à vista com desconto é mais vantajosa.

5.2.4 Juros compostos

De acordo com o Guia do Estudante (ENEM, 2015), “os juros compostos são juros que variam. A taxa é aplicada sobre um montante que aumenta ou diminui no decorrer do tempo”.

Para Parente e Caribé (PARENTE; CARIBE, 1996), “no sistema de capitalização de juros compostos, o juro de cada período é calculado sempre com base no saldo do início de cada período”.

Exemplo 5.2.4.1:

(Exemplo de Parente e Caribé (PARENTE; CARIBE, 1996)) Movimentação de R$10.000,00, a juro composto de 10% a.m.

Generalizando esse conceito, podemos representar os **juros compostos** da seguinte forma:

Período	Saldo no início do mês	Juro de cada mês	Montante
1^o mês	10.000	10% de $10.000 = 1.000$	11.000
2^o mês	11.000	10% de $11.000 = 1.100$	12.100
3^o mês	12.100	10% de $12.100 = 1.210$	13.310
4^o mês	13.3100	10% de $13.310 = 1.331$	14.641

Tabela 2 – Parente e Caribé (1996, p. 138)

Data	Saldo Devedor	Juro	Montante
1	C	$C \cdot i$	$C + C \cdot i = C \cdot (1+i)$
2	$C \cdot (1+i)$	$C \cdot (1+i) \cdot i$	$C \cdot (1+i) + C \cdot (1+i) \cdot i = C \cdot (1+i)^2$
3	$C \cdot (1+i)^2$	$C \cdot (1+i)^2 \cdot i$	$C \cdot (1+i)^2 + C \cdot (1+i)^2 \cdot i = C \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$C \cdot (1+i)^{n-1}$	$C \cdot (1+i)^{n-1} \cdot i$	$C \cdot (1+i)^{n-1} + C \cdot (1+i)^{n-1} \cdot i = C \cdot (1+i)^n$

Tabela 3 – Juros Compostos

Outra forma de representar os juros compostos, que é o montante anterior somado com a taxa de juros que incide sobre ele, pode ser obtida do seguinte modo:

$M_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0(1+i)$.

$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = C_0(1+i) + C_0(1+i) \cdot i$.

Colocandoe $C_0(1+i)$ em evidência, temos:

$M_2 = C_0(1+i) \cdot [1+i] \Longrightarrow C_0(1+i) \cdot (1+i) = C_0(1+i)^2$.

$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = C_0(1+i) \cdot (1+i) + [C_0(1+i) \cdot (1+i)] \cdot i$.

Colocando $C_0(1+i) \cdot (1+i)$ em evidência, temos:

$M_3 = C_0(1+i) \cdot (1+i) \cdot [1+i] = C_0(1+i)^3$.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots$

$M_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = C_0(1+i)^{n-1} + C_0(1+i)^{n-1} \cdot i$.

Colocando $C_0(1+i)^{n-1}$ em evidência, temos:

$M_n = C_0(1+i)^{n-1} \cdot [1+i] = C_0(1+i)^n$.

Logo, para calcular o montante a juros compostos, basta aplicar a fórmula: $M_n = C_0 \cdot (1+i)^n$, em que C_0 é o capital (principal), i é a taxa aplicada e n é a quantidade de períodos.

Resumidamente, podemos dizer que quando calculamos os juros compostos de algum valor, na verdade queremos **postergar ou adiar** esse valor: seja ele qual for, será acrescido de um percentual correspondente ao período adiado, calculado por meio da fórmula:

$$M_n = C_0 \cdot (1+i)^n. \tag{5.2}$$

Quando o objetivo for obter o valor atual de uma parcela no futuro (**antecipar** um valor negociado), aplicaremos a fórmula:

$$V_a = \frac{V_f}{(1+i)^n}, \tag{5.3}$$

em que:

- V_a: o valor atual;
- V_f: o valor futuro;
- i: a taxa empregada na negociação;
- n: o período estipulado.

Observe que a expressão (5.2) é parecida com a fórmula do termo geral a_n de uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo a_1 e razão q ($a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$). Veja:

- o n-ésimo termo (a_n) da PGcorresponde ao montante (M), ou seja, o valor da dívida, depois de n períodos;
- o primeiro termo (a_1) da PG corresponde ao capital (C_0) tomado no empréstimo;
- a razão (q) da PG corresponde à soma $(1+i)$ na fórmula do montante.

Exemplo 5.2.4.2:

(Exemplo de GE Matemática (ENEM, 2015)) Você toma um empréstimo no valor total de R\$100,00, que deve ser quitado em três meses, a juros de 12% ao mês. Quanto você pagará ao final? Os dados são: Capital $C =$ R\$100,00; prazo $n = 3$ meses; taxa $i = 12\%$ ao mês, que significa que, a cada mês, os R\$100,00 serão acrescidos de 0,12.

Aplicando a fórmula para o cálculo do montante a juros compostos, temos:

$M_3 = 100 \times (1+0,12)^3 = 100 \times (1,12)^3$.

$M_3 = 100 \times 1,4049 \approx 140,49$.

Financiando a compra, a dívida teve um aumento de, aproximadamente, R\$40,49, o que representa mais de 40% sobre o valor original da compra de R\$100,00.

Se o comprador resolver pagar a dívida em 6 meses, o cálculo será:

$M_6 = 100 \times (1,12)^6 \approx 100 \times 1,9738 \approx 197,38$.

Dobrando o tempo de pagamento, a dívida subiu mais de 97%, ou seja, quade dobrou.

Exemplo 5.2.4.3:

(Exemplo de GE Matemática (ENEM, 2015)) Você dispõe de R$100,00 para depositar todo mês numa aplicação que lhe dá 1% ao mês de juros. A tabela mostra como a aplicação renderá, mês a mês:

Janeiro	**Fevereiro**	**Março**	**Abril**	**Maio**	**Junho**
100	$100 \cdot 1{,}01$	$100 \cdot (1{,}01)^2$	$100 \cdot (1{,}01)^3$	$100 \cdot (1{,}01)^4$	$100 \cdot (1{,}01)^5$
	100	$100 \cdot 1{,}01$	$100 \cdot (1{,}01)^2$	$100 \cdot (1{,}01)^3$	$100 \cdot (1{,}01)^4$
		100	$100 \cdot 1{,}01$	$100 \cdot (1{,}01)^2$	$100 \cdot (1{,}01)^3$
			100	$100 \cdot 1{,}01$	$100 \cdot (1{,}01)^2$
				100	$100 \cdot 1{,}01$
					100

Tabela 4 – GE Matemática (2015, p. 98)

Observe que, a cada mês, o saldo da aplicação será a soma de todos os depósitos feitos até então com o que cada parcela rendeu de juro:

A parcela de R$100,00 de janeiro rende, durante cinco meses, à taxa dada, e chega em junho valendo $100 \cdot (1{,}01)^5$;

A parcela depositada em fevereiro rendeu quatro meses e chega em junho valendo $100 \cdot (1{,}01)^4$;

O saldo final, em junho, será a soma das seis parcelas mais o que cada uma delas rendeu. Essa é a soma de uma PG de seis termos, com o 1^o termo igual a 100 e razão igual a 1,01:

$$S_6 = \frac{100 \cdot (1{,}01^6 - 1)}{1{,}01 - 1} \approx \frac{100 \cdot (1{,}0615 - 1)}{0{,}01}.$$

$$S_6 \approx \frac{100 \cdot 0{,}0615}{0{,}01} \approx \frac{6{,}15}{0{,}01} \approx 615.$$

Rortanto, R$615,00 é, aproximadamente, o resultado da aplicação de R$100,00 por mês, por seis meses, a 1% de juros ao mês.

E se a aplicação for feita por 40 anos? Como os juros são contabilizados mês a mês, temos de considerar o número de meses em 40 anos: $40 \cdot 12 = 480$ meses.

Aplicando o capital inicial, os juros e o período de 480 meses na fórmula da soma de PG, temos:

$$S_{480} = \frac{100 \cdot (1{,}01^{480} - 1)}{1{,}01 - 1} \approx \frac{100 \cdot (118{,}6477 - 1)}{0{,}01}.$$

$$S_{480} \approx \frac{100 \cdot 117{,}6477}{0{,}01} \approx \frac{11.764{,}77}{0{,}01} \approx 1.176.477{,}25.$$

Isso significa que, se você começar hoje a poupar a cada mês R$100,00 em uma aplicação que renda 1% ao mês, daqui a 40 anos você terá uma belíssima poupança: mais de 1 milhão de reais! (ENEM, 2015).

Exemplo 5.2.4.4:

(Exemplo da Revista do Professor de Matemática n^o 66 (TORRES, 2008)) Um amigo, convicto da necessidade de adquirir um computador para desenvolver suas atividades profissionais, e não contando com recursos financeiros para comprar à vista, pesquisou como poderia obter o dinheiro emprestado. Trouxe-me três alternativas, pedindo-me esclarecimentos que as justificassem, já que eram bastante díspares.

Ele precisava de um empréstimo de R$$1500,00$ e estava disposto a pagá-lo em dez prestações mensais, sem entrada, isto é, pagando a primeira um mês depois do empréstimo.

• A primeira alternativa foi produzida por um agiota, que lhe informou que seu dinheiro "valia 5% ao mês" a juros compostos, resultando em dez prestações R$$244,33$.

• A segunda alternativa foi produzida pela loja que vendia o computador, que informou estar cobrando uma taxa de 5% ao mês, resultando em dez prestações de R$$225,00$.

• A terceira alternativa provinha de um banco que, para emprestar a quantia solicitada a juros compostos de 5%, cobrava dez prestações de R$$198,10$.

Se a questão fosse qual alternativa escolher, não haveria dúvida que a terceira seria a melhor. Agora, é importante justificar cada uma delas.

Na primeira alternativa fornecida pelo agiota, que visa sempre o maior lucro possível, ele fez da seguinte forma: Projetou o valor de R$$1.500$ para o último mês, obtendo aproximadamente R$$2.443,33$ e, ao dividir por 10, obteve o valor da parcela de R$$244,33$.

$$P = \frac{1.500 \cdot (1+0,05)^{10}}{10} \approx \frac{2.433,33}{10} \Rightarrow P \approx \text{R\$}244,33.$$

Na segunda alternativa, o vendedor multiplicou a taxa de 5% por dez e fez o cálculo de juros simples $1500 \cdot (1+0,05 \times 10) = 2.250,00$; em seguida, dividiu esse valor por dez, obtendo o valor de cada parcela: R$$225,00$.

$$P = \frac{1500 \cdot (1+0,05 \times 10)}{10} = \frac{2.250}{10} = 225,00 \text{ reais}$$

Na terceira e última alternativa (adotada erroneamente por alguns autores), dividiu-se o capital em dez partes iguais e cada parte foi multiplicada pela taxa elevada ao tempo, de acordo com o seu mês. Sendo assim, a primeira parcela de R$$150$ seria multiplicada por $1,05$; a segunda, por $(1,05)^2$; a terceira parcela, por $(1,05)^3$, até a décima parcela, por $(1,05)^{10}$. Somaram-se todos os resultados, obtendo um total de R$$1.981,00$; depois, dividiu-se esse resultado por dez, obtendo o valor de cada parcela: R$$198,10$.

$$P = \frac{150 \cdot (1,05) + 150 \cdot (1,05)^2 + 150 \cdot (1,05)^3 + \ldots + 150 \cdot (1,05)^{10}}{10}$$

$$P \approx \frac{157,50 + 165,37 + 173,64 + \ldots + 244,33}{10}$$
$$P \approx \text{R\$}198,10.$$

Na Matemática Financeira, quando comparamos valores, é necessário que estes estejam numa mesma data. Logo, os modelos de cálculos apresentados acima estão errados, pois todos eles fazem projeções futuras para um determinado capital. O correto seria comparar o valor financiado de R\$1.500,00 com os valores futuros da parcela, que não sabemos qual. Portanto, o esquema correto é o seguinte:

$$1.500 = \frac{P}{1+0,05} + \frac{P}{(1+0,05)^2} + \frac{P}{(1+0,05)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+0,05)^{10}}$$

Note que, como estamos antecipando as parcelas para a data atual, que é a data de aplicação dos R\$1.500,00 hoje, dividimos cada parcela por um mais a taxa elevado ao seu respectivo tempo e somamos. Observe que no 2^o membro da equação acima, temos uma expressão que representa a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG) de primeiro termo$\frac{P}{1,05}$ e razão $\frac{1}{1,05}$.

Usando, pois, a fórmula da soma dos termos de uma PG, temos:

$1500 = \dfrac{\frac{P}{1,05}\left[\left(\frac{1}{1,05}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{1,05} - 1}$ ou $P = \dfrac{1500 \times 0,05}{1 - \frac{1}{1,05^{10}}}$. Uma calculadora fornece o valor aproximado $x = \text{R\$}194,26$, que é o valor de cada prestação.

Não haveria dificuldade maior em usar o mesmo raciocínio literalmente, obtendo o valor da prestação igual a $x = \dfrac{C_0 \cdot i}{\left[1 - \frac{1}{(1+i)^t}\right]}$, sendo C_0 o valor da dívida no momento da contratação, i a taxa de juros e t o número de prestações.

Exemplo 5.2.4.5:

(Exemplo da Revista do Professor de Matemática n^o 68 (JR, 2009)) O autor do texto está interessado em obter o valor das prestações referentes a um financiamento no valor de R\$1.500,00, em 10 prestações sujeitas a uma taxa de 5% ao mês. Para tanto, ele estabelece a relação entre o valor a ser financiado, A (sem entrada) e as n prestações iguais a P, com taxa de juros i:

$$A = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}.$$

Exemplo 5.2.4.6:

(Exemplo de Lima; Carvalho; Wagner; Morgado (LIMA *et al.*, 2006)) Manuel tomou um empréstimo de R$100,00 reais, a juros de taxa de 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Manuel será acrescida de $0,10 \times 100$ reais $= 10$ reais de juros (pois $J = C \cdot i$), passando a 110 reais. Se Manuel e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por 121 reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão de $0,10 \times 110$ reais $= 11$ reais. Esses juros, assim calculados, são chamados de juros compostos. Mais precisamente, no regime de juros compostos, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

As pessoas menos educadas matematicamente têm tendência a achar que juros de 10% ao mês dão, em dois meses, juros de 20%. Note que juros de 10% ao mês dão, em dois meses, juros de 21%.

Teorema 5.2.1. *No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$.*

Prova. Basta observar que os valores do capital crescem a uma taxa constante i e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão $(1+i)$.

5.3 Fluxo de caixa

"Fluxo de caixa é um instrumento de gestão financeira que projeta para períodos futuros todas as entradas e as saídas de recursos financeiros da empresa, indicando como será o saldo de caixa para o período projetado" (SEBRAE, 2011).

Esse é um conceito elaborado pelo Sebrae. Porém, quantas pessoas em suas residências, com suas contas pessoais, também não fazem um fluxo de caixa? Principalmente nesse período de recessão econômica que o país enfrenta, as pessoas pensam duas vezes antes de gastar, tornando-se um pouco mais organizadas.

De acordo com (PARENTE; CARIBE, 1996), "o fluxo de caixa é a sucessão de pagamentos e/ou recebimentos previstos ao longo do tempo". Para facilitar a visualização do fluxo, utilizamos uma apresentação gráfica chamada diagrama de fluxo de caixa.

Diante disso, observemos a descrição abaixo:

Nele, temos:

- um eixo horizontal, orientado para a direita, indica os períodos de tempo;

- as setas orientadas para cima representam as saídas de caixa;

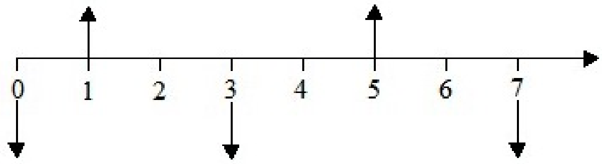


Figura 5 – **Fonte:** Parente e Caribé (1996, p. 123)

- as setas orientadas para baixo representam as entradas de caixa.

Vamos observar um exemplo de diagrama de fluxo de caixa, segundo Parente e Caribé (PARENTE; CARIBE, 1996)

O diagrama a seguir representa a situação em que uma pessoa investiu R$8.000, 00 e recebeu R$14.000, 00, após 5 meses.

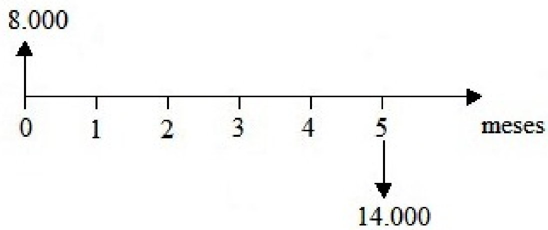


Figura 6 – Diagrama de Fluxo de Caixa

5.3.1 Equivalência de capitais

Segundo (PARENTE; CARIBE, 1996), "dois ou mais capitais, com datas de vencimentos diferentes, são ditos capitais equivalentes quando, transportados para a mesma data, à mesma taxa, produzirem, nessa data, valores iguais".

É importante analisar alguns exemplos. (LIMA *et al.*, 2006) ilustram isso muito bem.

Exemplo 5.3.1.1:

Pedro tomou um empréstimo de R$300, 00, a juros de 15% ao mês. Dois meses após, Pedro pagou R$150, 00 e, um mês após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, R$300, 00, na data 0, têm o mesmo valor de R$150, 00 dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

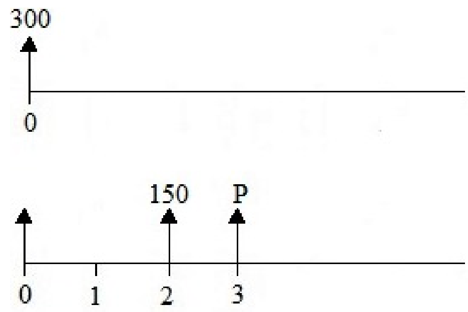


Figura 7 – Equivalência de Capitais

Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos

$$300 = \frac{150}{(1+0,15)^2} + \frac{P}{(1+0,15)^3}$$

$$300 = \frac{150}{1,3225} + \frac{P}{1,520875}$$

$$300 - 113,42 \approx \frac{P}{1,520875}$$

$$186,58 \approx \frac{P}{1,520875} \Rightarrow P \approx 283,76.$$

Daí, $P \approx 283,76$. O último pagamento foi de, aproximadamente, R\$283,76.

Exemplo 5.3.1.2:

Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um televisor:

i) três prestações mensais de R\$160,00 cada;

ii) sete prestações mensais de R\$70,00 cada.

Em ambos os casos, a primeira prestação é paga no ato da compra.

Se o dinheiro vale 2% ao mês para Pedro, qual a melhor opção que Pedro possui?

Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo, na época 2. Os esquemas de pagamentos são:

Temos

I) $a = 160 \cdot (1+0,02)^2 + 160 \cdot (1+0,02) + 160$

$$a = 160 \cdot 1,0404 + 160 \cdot 1,02 + 160$$

$$a = 166,46 + 163,20 + 160 \Rightarrow a = 489,66.$$

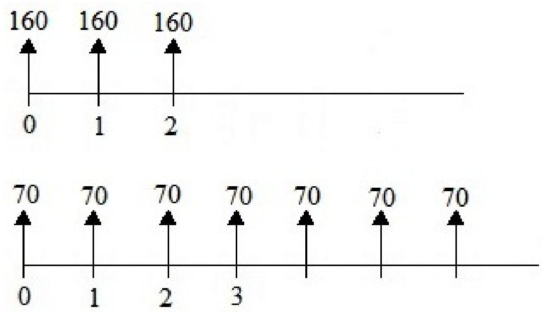


Figura 8 – Equivalência de Capitais

II) $b = 70 \cdot (1+0,02)^2 + 70 \cdot (1+0,02) + 70 + \dfrac{70}{1+0,02} + \dfrac{70}{(1+0,02)^2} + \dfrac{70}{(1+0,02)^3} + \dfrac{70}{(1+0,02)^4}$

$$b = 70 \times 1,0404 + 70 \times 1,02 + 70 + \frac{70}{1,02} + \frac{70}{1,0404} + \frac{70}{1,061208} + \frac{70}{1,08243216}$$

$$b \approx 72,83 + 71,40 + 70 + 68,63 + 67,28 + 65,96 + 64,67 \Rightarrow b \approx 480,77.$$

Portanto, Pedro deve preferir o pagamento em seis prestações.

5.3.2 Exemplos de taxas equivalentes

De acordo com (LIMA *et al.*, 2006), “se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que $1+I = (1+i)^n$”.

Exemplo 5.3.2.1:

A taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês é I tal que $1+I = (1+0,12)^{12}$. Daí, $I \approx 2,90 = 290\%$ ao ano.

Um erro que a maioria das pessoas sempre comete é achar que juros de 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$ ao ano. Taxas como 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem.

O que continua faltando nas pessoas é conscientização e a busca exata pelos valores que lhes são cobrados diariamente.

Exemplo 5.3.2.2:

Verônica investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa de juros à qual está investido o capital de Verônica?

Solução O dinheiro de Verônica está investido a juros de taxa de $i = 0,5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que $1+I = (1+i)^{12}$. Daí, $I \approx 0,0617 = 6,17\%$ ao ano. A taxa de 6% ao ano é nominal, e a taxa de $6,17\%$ ao ano é efetiva.

6 TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO

A Informática na educação do Brasil iniciou-se em 1971 com o Projeto Educom, com o qual se pensou no computador para o ensino de Física em uma universidade dentro de um seminário promovido em parceria com a Universidade de Dartmouth/EUA (Universidade americana fundada em 1769, localizada na região nordeste dos Estados Unidos, na cidade de Hanover, no estado de New Hampshire). A Universidade Federal do Rio de Janeiro vem a ser a pioneira na utilização do computador em suas atividades acadêmicas, em 1966, que deu origem ao Núcleo de Computação Eletrônica (NCE).

Pode-se dizer que, na década de 70, esse instrumento se espalhou por alguns centros universitários, destacando-se cinco: Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), apoiadas nas teorias de Piaget e Papert, com público-alvo de crianças com dificuldades de aprendizagem de leitura, escrita e cálculo, e a Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) que, em parceria com um instituto norte-americano Gleb Wataghin (IFGW), criou um grupo interdisciplinar para pesquisar o uso de computadores com linguagem LOGO na educação de crianças.

Somente após os resultados de dois seminários internacionais, em 1981 e 1982, que trataram da computação como ferramenta no auxílio do ensino-aprendizagem.

Com isso teve como marco a iniciativa do governo federal na criação do Projeto EDUCOM, com o apoio de universidades como UFPE, UFMG, UFRJ, UFRGS, UNICAMP. Apesar de ter enfrentado inúmeras dificuldades, é ponto inicial para se ter como base do processo científico e formulação para a política nacional da informática educativa.

Em 1996, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) – Lei nº 9394/96 –, a Tecnologia é mencionada, ainda que não apresente uma grande especificidade. Ela, que está presente na legislação, no artigo 32, que ainda vigora, salienta que: “o aluno de ensino fundamental deve possuir compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores que fundamentam a sociedade” (RIBEIRO, 1996).

Nesse sentido de compreensão e domínio a respeito da tecnologia, mesmo que não aconteça vemos que ela abrange todas as disciplinas e fases da educação, no Ensino Médio que diz: “a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina” (MEC, 1998). Com isso o compromisso que o governo tem com a educação se expande, embora não seja o suficiente, e o que se percebe com a inclusão das tecnologias é um tipo de exclusão digital.

A tecnologia hoje mesmo que seja ela direta ou indiretamente faz parte da educação dos alunos, muitas instituições de ensino apresentam estruturas tecnológicas para os alunos, porém falta professores aptos e capacitados para usufruir destes recursos tecnológicos e preparar uma aula diferente para atrair a atenção e a percepção do aluno.

6.1 O ensino e as novas tecnologias

Ainda que as tecnologias, tais como a Informática, não sejam capazes de tornar, por si só, mais fácil o ensino das ciências ou o conhecimento, não se deve confundir o fato de modernizar ou de fazer mais eficiente o processo de ensino e aprendizagem com o de solucionar os problemas do processo em si mesmo, por meio de tecnologias que permitem um processo de ensino mais enriquecedor e um ambiente de aprendizagem mais favorável para o aluno (LEAL, 2009).

Portanto, o uso de tecnologias no ensino pode ajudar a melhorar o desenvolvimento do processo ensino e aprendizagem, tornando-o mais dinâmico, mais inteligente e tendo como resultado uma aprendizagem mais sólida para os alunos.

Diante das dificuldades que se apresentam no processo de ensino das ciências, é óbvio que a utilização de tecnologias, tais como a Informática, podem propiciar aos docentes uma ferramenta capaz de transformar os métodos tradicionais de ensino das ciências, ainda que não seja capaz de resolver todos os problemas do processo, dependendo, em grande medida, dos métodos e meios que o docente usa para obter seus objetivos (GOLBERT, 2002).

Diante disso, deve-se destacar a importância do manejo de tais instrumentos, sendo que um uso irracional das tecnologias pode trazer consigo outros problemas cognitivos que, de algum modo, agravariam até mais a situação no processo de ensino e aprendizagem das ciências.

De acordo com (FISCHER, 2001), o uso das tecnologias de ensino também permite criar estímulos que ativam e aceleram a aprendizagem.

> O problema radical do ensino é vincular a mente do aluno à matéria objeto de aprendizagem. Isso implica em um ensino individualizado, de forma que, dada uma matéria a ensinar, o ideal é encontrar, para cada indivíduo, o molde adequado a seu nível de entendimento e formação, o qual seja capaz de tornar a assimilação do conhecimento algo mais adequado. É óbvio que tais estímulos precisam ser ativados para que se acelere a aprendizagem dos alunos e, por essa razão, as chamadas “Tecnologias Educativas”, desde o final do século pas-

sado, passaram a ser fator fundamental no processo de ensino e aprendizagem (FISCHER, 2001).

Por essa razão, (ALVAREZ, 2006) comenta que as tecnologias informáticas, convertem-se em uma indispensável ferramenta para acelerar os processos de ensino e aprendizagem, elevando a sua qualidade e convertendo-o em um processo permanente da sociedade, não só durante a etapa de estudos acadêmicos, mas também para toda a vida.

Também as tecnologias informáticas devem contribuir para fomentar os processos de investigação e inovação nos âmbitos curricular, metodológico, tecnológico e organizativo do processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com (OLIVEIRA, 1997), para que se possa entender o que está sendo enfatizado em termos de tecnologias informáticas, é necessário destacar que:

> A educação virtual computacional é uma das formas de estudos que busca ensinar "aprender a aprender", na qual o professor se converta em mediador entre o que o aluno conhece e o que deseja que o aluno chegue a conhecer, sem perder as funções que deve desempenhar nesse processo, [...] também o acesso aos sites de conteúdo educativo com opções de correio eletrônico, participação em debates, acesso à documentação, etc. É uma das novas tendências no uso das tecnologias informáticas na educação, a qual converte esse processo cada vez mais em orientação da busca e processamento da informação.

O uso de materiais de multimídia para o ensino converte as tecnologias informáticas em um meio de ensino muito eficaz e com um crescimento e níveis de aceitação cada vez mais em ascensão dentro da "massa" estudantil. Nesse sentido, o uso do computador oferece numerosas vantagens que o fazem superior a outros meios de ensino.

Segundo (FISCHER, 2001), as principais vantagens que demonstram a importância da informatização do ensino são:

> Participação ativa do aluno como um dos protagonistas do processo de construção de sua própria aprendizagem; a possibilidade de dar uma atenção individual e diferenciada aos alunos; a possibilidade de criar micro-mundos que permitam ao aluno explorar, analisar e conjeturar; permita procurar e administrar informação, potencializando o desenvolvimento cognitivo do aluno; por meio do feedback imediato e efetivo, o aluno pode aprender com seus erros.

Segundo (ALVAREZ, 2006), ainda existem diversos outros aspectos que caracterizam a tecnologia da Informática, tornando-a um componente especial na educação, tais como:

> Aprendizagem contínua, por parte do aluno e do professor, pois este teria que estar inteiramente atualizado para planejar com êxito as tarefas que os alunos deverão realizar; as tecnologias informáticas não só podem ser objeto de estudo, mas também devem passar a ser ferramenta indispensável para o aluno, podendo ser integrada a todo o meio educativo; Garante o desenvolvimento de um ensino virtual, facilitando o processo de educação à distância; gestão e obtenção de conhecimentos por meio da Internet, o qual, por outros meios, resultaria ser muito mais complexo e demorado; dinamiza o papel do professor e do aluno, o qual, de sujeito passivo dentro do processo, passa a ser protagonista junto ao professor, o qual, por sua vez, terá como função a capacitação no uso dos softwares educativos que sejam utilizados no processo; humaniza o trabalho dos docentes, pois estes passariam a desenvolver suas atividades com o apoio das tecnologias, economizando, assim, tempo e energia.

Além de todas essas vantagens que nos proporcionam as tecnologias educativas no processo de ensino e aprendizagem, é bom destacar que também permite obter uma melhor interdisciplinaridade, ou seja, podemos relacionar o conteúdo matemático com o de outras disciplinas, proporcionando, assim, um caráter integral em termos de conhecimentos dos alunos.

Gestores públicos, acadêmicos, educadores e empreendedores, terão que investir em desenvolvimento de inovações capazes de fazer com que a educação responda às demandas do século XXI e aos interesses do aluno contemporâneo. Nesse contexto, o uso de novas tecnologias educacionais configura-se como uma estratégia que, se incorporada com propósito, planejamento e eficiência, pode trazer diversos benefícios para os alunos, os professores, as escolas e, certamente, para todo o País.

> [...] podemos ver que existe uma relação direta entre a educação e tecnologias. Usamos muitos tipos de tecnologia para aprender e saber mais e precisamos da educação para aprender e saber mais sore as tecnologias. A maioria das tecnologias é utilizada como auxiliar no processo educativo. Não são nem objetos, nem a sua substância, nem a finalidade (KENSKI, 2003).

Proporcionar ao aluno um novo instrumento de trabalho, mostrando-lhe que ele pode realizar diversas ações com os objetos disponíveis, fazendo-os refletir sobre as características e propriedades de objetos, constituindo uma análise generalizada sobre os conceitos e definições de tais objetos, é fundamental para o desenvolvimento de suas habilidades.

Porém, é necessário que o professor apresente ao aluno atividades, nas quais ele seja sujeito ativo do seu aprendizado, construindo, desenhando, colorindo, medindo, comparando e confrontando propriedades de objetos e figuras construídas.

Antecipamos que a utilização de softwares para ensinar Matemática não implica, por si só, em um ambiente totalmente favorável para a aprendizagem matemática, pois não gera uma aprendizagem automática. A proposta de trabalho do professor deve ser planejada, interessante e motivadora para o aluno. Isso irá implicar em uma aprendizagem desafiadora, fazendo com que o aluno possa pensar, refletir e partir para prováveis soluções, utilizando-se das diversas ferramentas disponíveis por meio do computador, para a resolução do problema proposto.

6.2 Matemática e Tecnologia

Infelizmente, ainda há inúmeras dificuldades em fazer uma conexão consistente entre a tecnologia na escola, o professor e o aluno, e isso tem afetado e prejudicado especialmente a disciplina de Matemática, pois se consegue afastá-la para mais longe da realidade tangível, ou seja, dentre outros aspectos, a capacidade de estimativa e os métodos numéricos aproximados estão muito adiante das necessidades reais de qualquer cidadão ou mesmo de qualquer profissional.

Diante disso, ainda não se pode contestar a seguinte afirmação de Jaime Carvalho e Silva:

> Se alguém lhes perguntar como se calculam todas as raízes de uma dada equação algébrica, de grau arbitrário, com a aproximação que se queira, terão de reconhecer que não sabem. Isso dá bem nota de como o ensino tradicional tem sido afastado da realidade (SILVA, 2003).

A integração da tecnologia na escola com a disciplina de Matemática especialmente é um dos maiores desafios dessa nova educação: mesmo com a tecnologia a nosso favor, em muitos lugares faltam recursos e pessoas competentes. De certa forma, a capacidade da escola e da matemática responderem e conseguirem alcançar os objetivos propostos funciona na medida com que a tecnologia é integrada nos currículos escolares.

6.3 Excel, uma ferramenta auxiliadora

A tecnologia tem avançado numa velocidade muito grande, e no meio educacional não é diferente: as planilhas eletrônicas têm sido cada vez mais utilizada para facilitar e agilizar cálculos que antes demoravam bastante. Assim, as planilhas eletrônicas, em particular, o software Microsoft Excel, é indispensável para o desenvolvimento deste tópico. O programa é de fácil acesso e manipulação, tanto pelos alunos quanto pelo professor, e, em muitas residências, as contas da família são computadas ou listadas em planilhas como as usadas no Microsoft Excel.

(ASSOCIADOS, 2003) define a planilha eletrônica como “uma tabela composta por linhas e colunas. Nela, as linhas são identificadas por números e as colunas, por letras. A interseção entre uma linha e uma coluna é chamada célula”.

Portanto, nota-se que a definição é bastante clara, pois permite compreender que a localização de uma célula na planilha é igual à localização de um ponto no plano cartesiano: ou seja, é só analisar as localizações horizontal e vertical. Assim, a célula B4, por exemplo, é a célula localizada na coluna B, na quarta linha.

Durante os capítulos anteriores, pudemos perceber o quanto várias fórmulas precisam ser aprendidas e, consequentemente, aplicadas para resolver um problema matemático. Todavia, observaremos, no próximo capítulo, como algumas questões podem ser facilmente resolvidas por meio das planilhas do Microsoft Excel.

Um dos motivos para utilizar as planilhas eletrônicas para o ensino de Matemática não é apenas o cálculo rápido e preciso, mas também contribuir para a redução do tempo gasto com cálculos repetitivos e já conhecidos, reduzir o gasto de papel, ser um “gabarito” para a verificação dos exercícios realizadas e, assim, estudar possíveis erros permitindo-se às correções.

7 A PLANILHA ELETRÔNICA EXCEL NO ESTUDO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

O Excel, além do excelente poder que possui de calcular, faz parte da rotina de pessoas que atuam em diversos ramos, como escritórios de advocacia, departamentos de compras e vendas, empresas de engenharia, de alimentação, mercado financeiro, no controle do precioso orçamento doméstico, no investimento das economias pessoais, dentre muitos outros.

Muitas vezes, a planilha eletrônica é utilizada apenas para fazer cálculos ou criar uma tabela simples, mas ela possui recursos muito mais poderosos e versáteis: a planilha eletrônica nos permite solucionar problemas complexos, apresentando resultados de forma imediata para análise e tomadas de decisão.

Dessa forma, apresentaremos o estudo dos tópicos abordados na Matemática Financeira utilizando o Excel para melhor compreensão.

7.1 Porcentagem

No dia 04/10/2014, o site UOL <http://eleicoes.uol.com.br/2014/pesquisas-eleitorais/brasil/1-turno/> publicou o gráfico abaixo, relativo à pesquisa de intenções de votos do 1^o turno para presidente do Brasil, pesquisa esta realizada pelo Datafolha/Folha de São Paulo e TV Globo (barras hachuradas) e Ibope/TV Globo e O Estado de São Paulo (barras preenchidas)

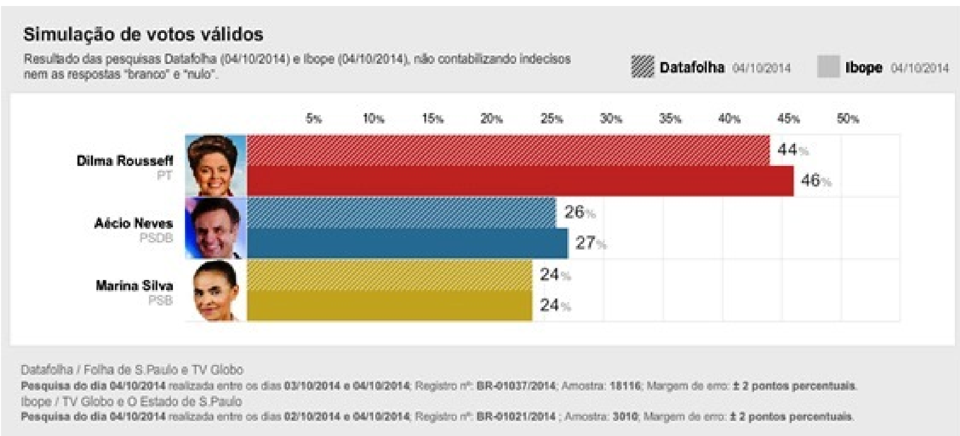


Figura 9 – Pesquisa Datafolha e Ibope

Observe, nesse gráfico, que o número de pontos obtidos por cada candidato refere-se a "cada grupo de 100 eleitores" e não ao total de entrevistados: para o Datafolha (barras hachuradas) foram 18116 eleitores e, para o Ibope (barras preenchidas) foram 3010. Vamos analisar as barras hachuradas do Datafolha por ter entrevistado uma quantidade maior de eleitores.

- $\frac{44}{100}$: 44, em cada 100 entrevistados, apontaram Dilma como preferência à presidência da República.
- $\frac{26}{100}$: 26 em cada 100 entrevistados, apontaram Aécio como preferência à presidência da República.

Na verdade, essas razões são razões equivalentes às originais, mas escritas com denominador 100.

As comparações entre grandezas feitas por meio de razões com denominador 100 (razões centesimais) são muito utilizadas em livros técnicos e no mundo dos negócios. Isso, talvez, pelo fato de estarmos habituados a lidar com o sistema numérico de base 10.

As porcentagens são razões cujo denominador tem valor igual a cem (100), ou seja, são razões centesimais. As porcentagens costumam ser indicadas pelo numerador seguido do símbolo % (lê-se: “por cento”). Essas razões estão constantemente presentes no cotidiano do cidadão brasileiro, seja no anúncio de uma promoção, seja para indicar a tendência de votos nas eleições, em estatísticas, nas margens de erro etc. Essas razões servem para expressar várias grandezas como o juros ou o desconto de um produto, aumento ou diminuição populacional, fazer comparativos de objetos, pessoas etc., como por exemplo: “Em uma sala de aula, há 40 alunos, dos quais 16 são homens, ou seja, $\frac{16}{40} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 40$. Portanto, a razão $\frac{16}{40}$ *equivale* à $\frac{40}{100}$, que pode ser expressa da forma 40%. Logo, 40% dos alunos dessa sala são homens”. De modo geral, calcular x% de y, corresponde a multiplicar $\frac{x}{100}$ por y.

Como podemos ver, porcentagem é o resultado que se obtém quando se aplica a taxa de porcentagem a um dado valor.

Exemplo 7.1.1:

Calcule a porcentagem de 5% de 240.

Vamos resolver esse problema de duas formas:

- 1^a forma:Usando a regra de três simples.

$$\begin{array}{cc}
Taxa\ de Porcentagem & Porcentagem \\
100\% & 240 \\
5\% & x
\end{array}$$

$$\frac{100}{5} = \frac{240}{x} \Rightarrow 100x = 1200 \Rightarrow x = 12.$$

- 2^a forma: forma direta.
  5% de $240 = \dfrac{5}{100}$ de $240 \Rightarrow \dfrac{5}{100} \times \dfrac{240}{1} = \dfrac{1200}{100} = 12.$

No exemplo dado, podemos observar que o cálculo de porcentagem é feito de forma mais rápida e mais prática pelo método direto. Por isso, vamos generalizá-lo para podermos usá-lo com mais facilidade com o Excel.

Chamando o principal de p (a quantia sobre a qual se calcula a porcentagem), podemos escrever:

$P = i \cdot p$ (relação para o cálculo de porcentagem),

na qual:

- P: porcentagem;
- i: taxa de porcentagem;
- p: principal.

Para aprofundarmos o assunto de porcentagem utilizando o Excel, primeiro será preciso conhecer alguns comandos que, em geral, são comuns a todas as planilhas, e ter a noção básica do que foi descrito acima a respeito de porcentagem.

Uma planilha eletrônica é composta por linhas e colunas. A interseção de uma linha e uma coluna é chamado de célula. As linhas são representadas por números $1, 2, 3, \ldots$, e as colunas são representadas por letras A, B, C, ... No caso descrito na figura 10, o valor de R\$$500,00$ situa-se na célula D5, sempre indicando-se primeiro a letra da coluna e, em seguida, o número da linha.

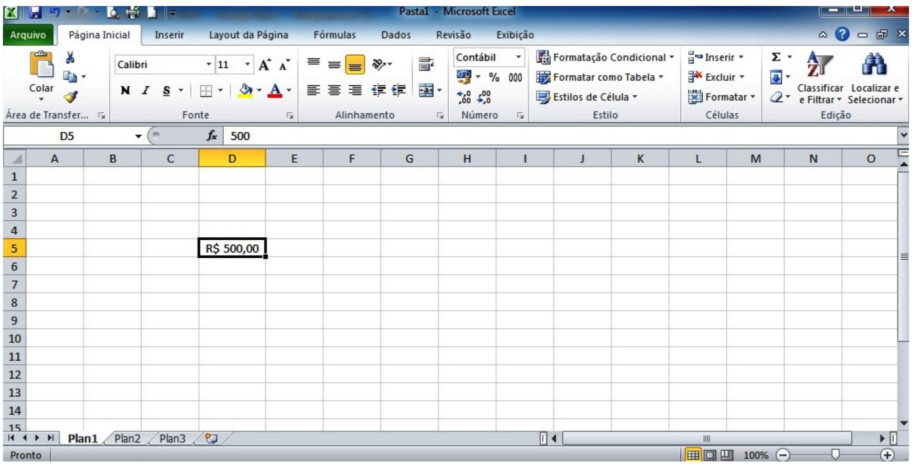


Figura 10 – Localização de Célula

É importante salientar os princípios da elaboração de uma fórmula. Toda fórmula começa com o sinal de igual (=). Para fixar um endereço de célula, é preciso usar o cifrão ($), e o endereço que estiver após o $ estará fixo.

Conceitualmente, um endereço de célula em que não há referência fixa é chamado de relativo; estando a linha ou a coluna fixa, é chamado de misto; e estando fixas a coluna e a linha, o endereço é chamado de absoluto. Veja estes exemplos:

- D5: nada está fixo. Endereço relativo;
- D$5: está fixa somente a linha 5. Endereço misto;
- $D5: está fixa somente a coluna D. Endereço misto;
- $D$5: estão fixas a coluna D e a linha 5. Endereço absoluto.

Os operadores aritméticos, também chamados de operadores matemáticos, são:

Operadores Aritméticos	
Operador	**Significado**
+ (Sinal de mais)	Adição
− (Sinal de menos)	Subtração
∗ (Asterisco)	Multiplicação
/ (Barra de fração)	Divisão
ˆ (Acento circunflexo)	Potenciação
% (Sinal de porcentagem)	Porcentagem

Tabela 5 – Operadores Aritméticos

Os operadores de comparação são:

Operadores Aritméticos	
Operador	**Significado**
=	Igual a
<>	Diferente de
>	Maior que
>=	Maior que ou igual a
<	Menor que
<=	Menor que ou igual a

Tabela 6 – Operadores de Comparação

Na figura a seguir, calcularemos, na coluna B, a partir da 2ª linha, a porcentagem dos valores que se situam na coluna A, também a partir da 2ª linha, e o percentual calculado situa-se na célula D1, e como esse percentual será fixo, ou seja, será o mesmo para todos os valores que se situam na coluna A, no surgimento da fórmula utilizaremos o comando $D$1.

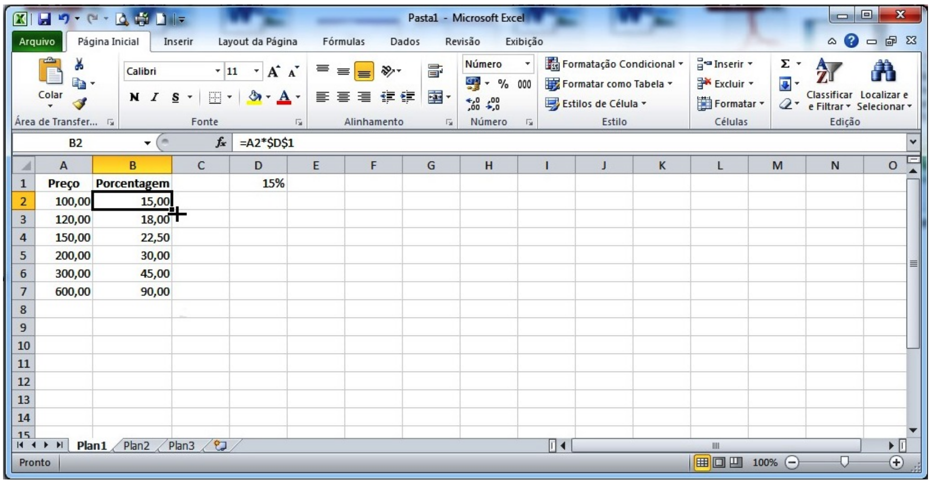


Figura 11 – Excel: Porcentagem

Para criar a fórmula, procederemos como segue:

- Selecione a célula B2;
- Digite o sinal de igualdade (=);
- Clique na célula A2, ou digite A2, e asterisco(*);
- Clique na célula D1. Como essa refência deve ser fixa, pressione a tecla F4 e, depois, ENTER. Com isso esse endereço estará fixo, e a fórmula será: =A2*$D$1.

Depois, arraste a alça de preenchimento, localizada no canto inferior direito da célula, para baixo, até a linha 7, e o cálculo é feito automaticamente.

Neste caso, o aluno precisa apenas compreender a fórmula direta da porcentagem e utilizá-la na planilha eletrônica com o comando a ser dado para efetuar vários cálculos de uma só vez, podendo, sempre que quiser, alterar os valores do principal e as taxas percentuais que se tendo o comando a planilha eletrônica logo apresentará o resultado.

Nesses parâmetros, os valores que se situam na coluna "B" são os valores da porcentagem "P"; os valores que se situam na coluna "A" são referentes ao principal "p", e o valor de "i", que representa a taxa percentual, situa-se em D1, evidenciando-se, assim, a fórmula direta de porcentagem na coluna "B" com =A2*$D$1 para a linha 2, =A3*$D$1 para a linha 3, e assim sucessivamente, até a linha 7.

Também, quando calculamos diferentes porcentagens de valores diferentes, todos ao mesmo tempo, o processo é o mesmo. Observe a figura abaixo:

Observe que o principal está na coluna "A", a taxa de porcentagem na coluna "B"

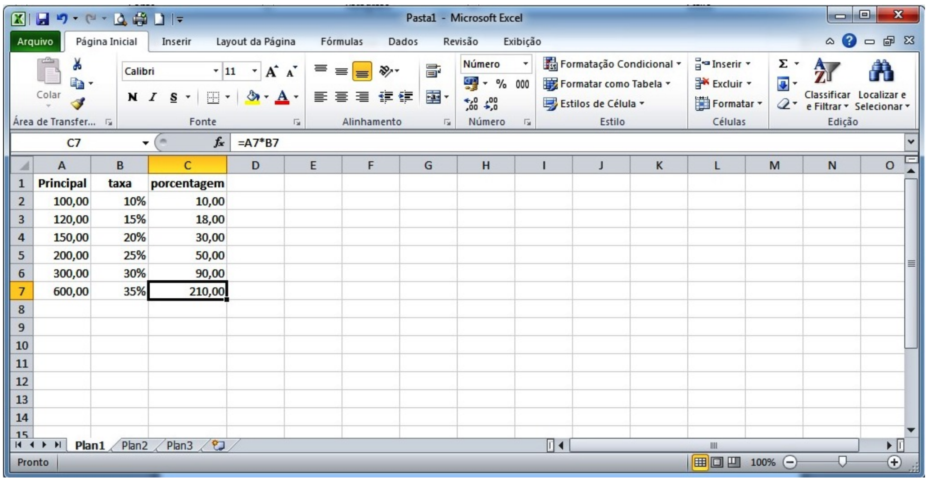


Figura 12 – Excel: Porcentagem Diversas

e o cálculo de porcentagem representado pela fórmula $P = i \cdot p$, está na coluna "C", o qual, para o Excel, é expresso da seguinte forma:

Com o cursor na célula C2 digita-se o sinal de igual, depois o endereço da célula A2; em seguida, o sinal de asterisco que, como foi mostrado na Tabela1, representa multiplicação, e, por fim, o endereço da célula B2; então, aperte a tecla ENTER, ficando a célula C2 com a seguinte fórmula =A2*B2. Fazendo a comparação, os valores que se situam na coluna C são os valores de "P"; os da coluna B são os valores de "i", e os que se situam na coluna A são os valores do principal "p". Para não ter que digitar a mesma fórmula em cada uma das linhas, basta colocar o cursor no canto inferior direito da célula C2, até que mude de formato. Então clique no botão direito do mouse e arraste o cursor até a linha 7. O autopreenchimento repetirá a fórmula para cada linha.

Por meio da fórmula direta da porcentagem, se o problema fornecer duas das três incógnitas da fórmula, será possível descobrir o valor da terceira. Isso quer dizer que, derivando da fórmula original, o valor de "i" é a porcentagem dividida pelo capital, $i = \frac{P}{p}$, e o capital será a razão entre a porcentagem e a taxa de porcentagem, $p = \frac{P}{i}$.

Exemplos de aplicação:

1. Qual a porcentagem que 280 representa de 800?

Resolução:

$P = 280$, $p = 800$, $i = ?$

$$i = \frac{280}{800} \Rightarrow i = 0,35 = \frac{35}{100} = 35\%$$

2. 15% do preço de um objeto é R\$ 2.100,00. Qual é o preço desse objeto?

Resolução: $p = ?$, $P = 2100$, $i = 15\% \Rightarrow i = \dfrac{15}{100}$.

$$p = \frac{2100}{\frac{15}{100}} \Rightarrow \frac{2100}{1} \times \frac{100}{15} \Rightarrow \frac{210.000}{15} \Rightarrow p = \text{R\$}14.000.$$

Resolvendo esses exemplos no Excel, temos:

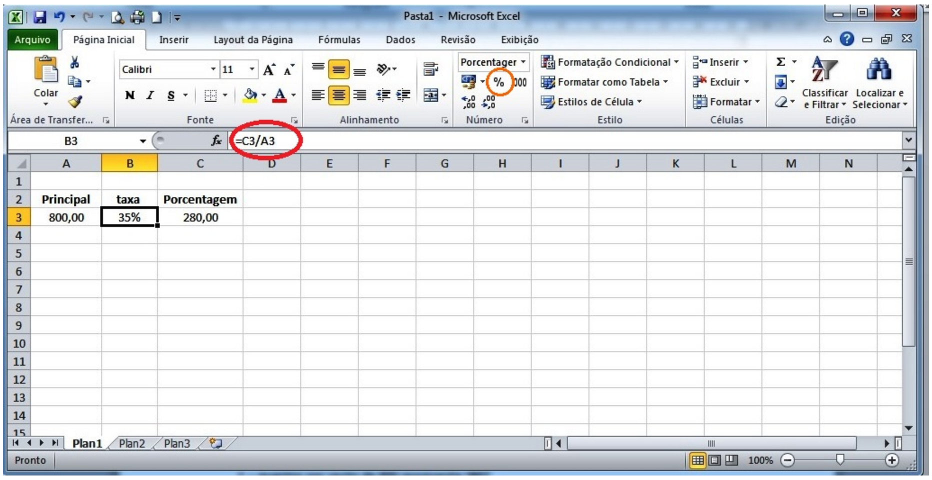


Figura 13 – Excel: Taxa

Observe que, na célula B3, já aparece o resultado da operação e, na linha de comando f_x, onde está circulado de vermelho, aparece a fórmula da equação =C3/A3. Interpretando matematicamente, B3 representa a taxa "i", A3 representa o principal "p" e C3 representa a porcentagem "P". Observe que o resultado já apareceu com o símbolo %, devido a ter configurado a célula na barra de comando acima onde está circulado de alaranjado.

De modo análogo, é feito para o Exemplo 2:

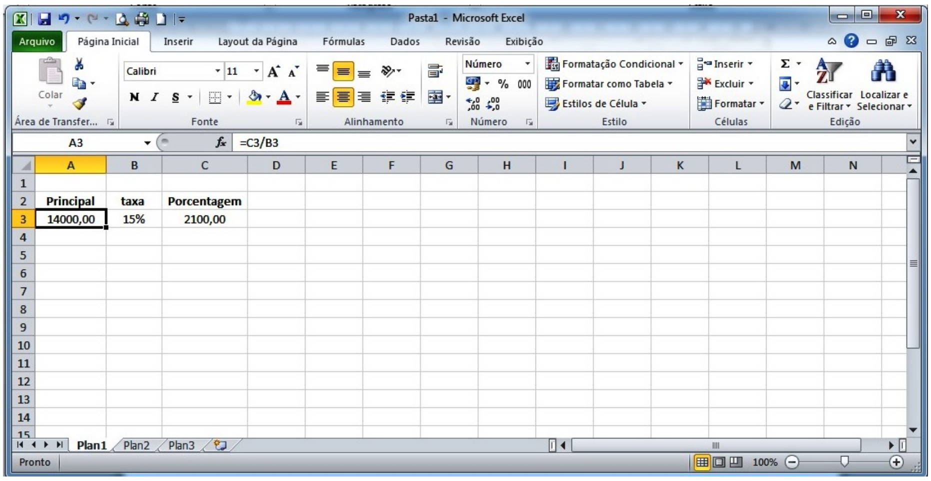


Figura 14 – Excel: Principal

7.2 Juros simples

A fim de obtermos a relação para o cálculo do juro simples, vamos considerar uma situação modelo: "Apliquei um capital C a uma taxa de juro i, pelo prazo t. Quanto ganharei de juro simples?"

Como o juro simples é gerado em cada período a que se refere a taxa, durante todo o seu prazo de aplicação e é feito exclusivamente com base no capital inicial, temos, então:

Em cada um dos períodos, ganharei $C \cdot i$.

Após o 1^o período, ganharei $C \cdot i$,

Após o 2^o período, ganharei $C \cdot i + C \cdot i$,

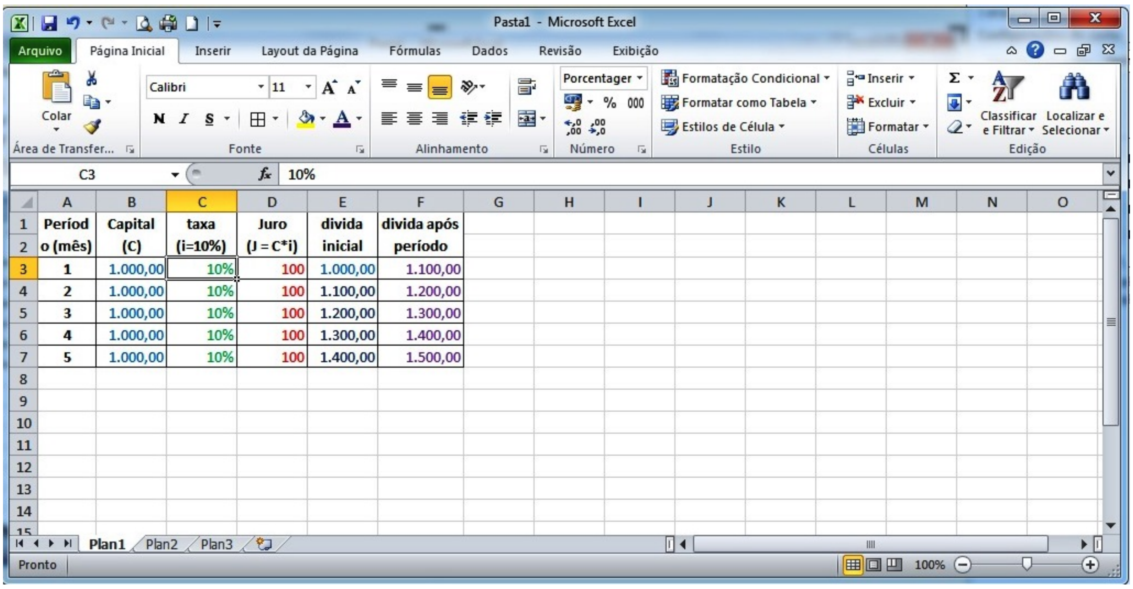
Após o 3^o período, ganharei $C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i$,

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

Após n períodos, ganharei $C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \cdots + C \cdot i$ (soma de n parcelas iguais a $C\dot{i}$).

Assim, a fórmula de juros simples é: $J = C \cdot i \cdot n$.

Outra forma de exemplificar o cálculo do juro simples pode ser feita na tabela abaixo:



Período (mês)	Capital (C)	taxa (i=10%)	Juro (J=C*i)	divida inicial	divida após período
1	1.000,00	10%	100	1.000,00	1.100,00
2	1.000,00	10%	100	1.100,00	1.200,00
3	1.000,00	10%	100	1.200,00	1.300,00
4	1.000,00	10%	100	1.300,00	1.400,00
5	1.000,00	10%	100	1.400,00	1.500,00

Figura 15 – Planilha de Juros Simples

Nessa tabela, podemos ver que o juro é calculado sempre referente ao capital inicial de R$1.000,00, à taxa de 10% a.m (dez por cento ao mês), representado na coluna "D", e a dívida será do mês anterior acrescido do juro do mês vigente já calculado. Observe que, para o primeiro mês, a dívida após o período é o resultado da soma do capital inicial com o juro do período de 1 mês.

Analisando essa tabela, o aluno perceberá, intuitivamente, que a dívida após o período, por exemplo, o 5^o mês, também pode ser calculada como o valor do capital inicial acrescido de cinco vezes o valor do juro calculado no primeiro período, pelo fato do juro sempre ser o mesmo, pois incide sempre sobre o mesmo capital. Mais adiante, mostraremos que essa dívida após o período tem um nome específico denominado montante, e que, para calcular o montante a qualquer tempo, não é obrigatoriamente necessário construir uma tabela, mas apenas compreender a fórmula e seus componentes.

O uso do Excel é simples, pois trata-se de uma operação multiplicativa para se calcular o juro simples. O aluno consegue visualizar a construção do raciocínio de forma concreta, de modo que o ensino de Matemática Financeira se materializa diante de seus olhos na forma de uma planilha.

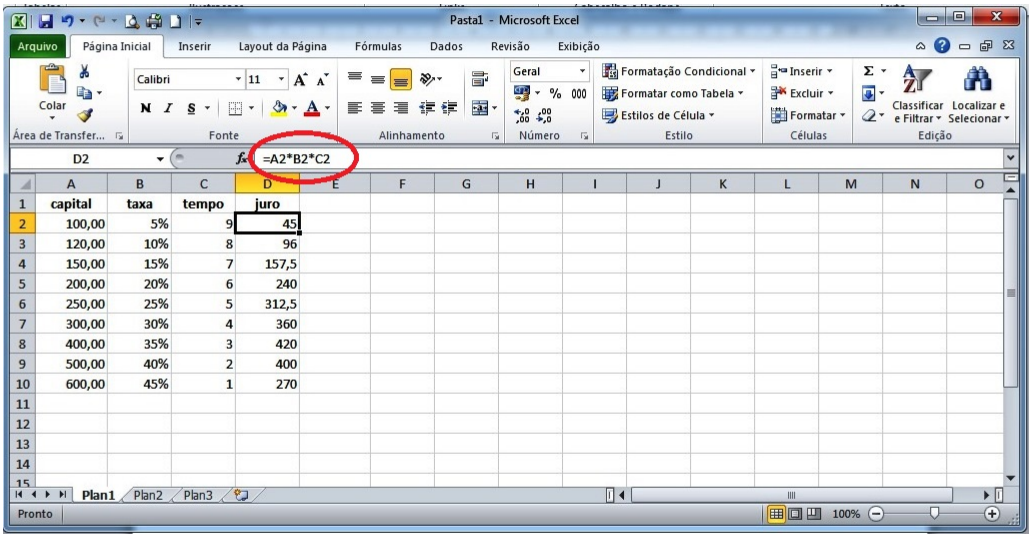


Figura 16 – Excel: Exercícios de Juros simples

Observe a coluna juro na célula D2: encontramos o resultado da multiplicação das três grandezas (capital, taxa e tempo) e podemos observar ainda na linha de comando acima, onde está contornado de vermelho, a fórmula de aplicação para o cálculo **=A**2***B**2***C**2, que se refere justamente à fórmula de juro simples $J = C \cdot i \cdot n$.

Como o cálculo de juro simples ocorre muito raramente no dia-a-dia e não é muito aplicado no cotidiano das pessoas, não iremos explorar muito este tópico. Faremos apenas uma explanação breve com poucos exercícios como exemplo.

Exercício 1. Calcular o juro simples produzido por um capital de R$36.000,00 quando aplicado a:

a) 8%a.m em 5 meses.

b) $6,5\%$a.m em 2 meses.

c) 8%a.m na terça parte do ano.

d) $5,5\%$a.m em meio ano.

e) 20%ao ano em 1 ano.

f) $0,5\%$ao dia em 18 dias.

Resolução:

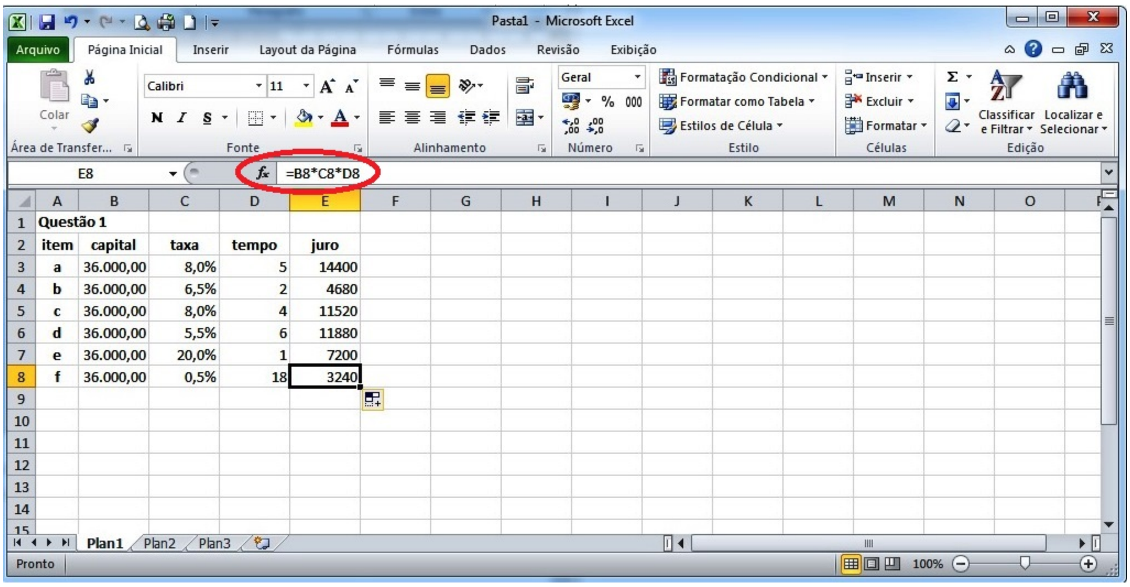


Figura 17 – Excel: Exercícios de Juros Simples

Na figura acima, podemos observar a resolução do Exercício 1 todo de uma só vez. Na célula E8, encontramos o resultado do juro do capital de 36.000,00 à taxa de $0,5\%$ ao dia, e a fórmula do cálculo do juros simples está na linha de função f_x circulada de vermelho acima. Note que, para resolver o exercício, conhecer a fórmula de juro simples foi necessário, mas não suficiente para a resolução. Foi preciso conhecer também os valores a ser empregados na coluna tempo, pois as taxas estão diretamente relacionadas a ele.

7.3 Montante

Montante é a soma do capital inicial (ou principal) com o juro simples (ou composto).

Como $J = C \cdot i \cdot n$, denotando o montante por M, temos:

$M = C + C \cdot i \cdot n.$

Colocando C em evidência, obtemos:

$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$.

Exercício 2. Calcule o montante de um capital de R\$6.400,00, aplicado a juro simples, nos casos seguintes:

a) depois de 6 meses a 7,5% a.m.

b) depois de um quarto de anos a 5,2% a.m.

c) depois de 8 dias a 0,5% a.d.

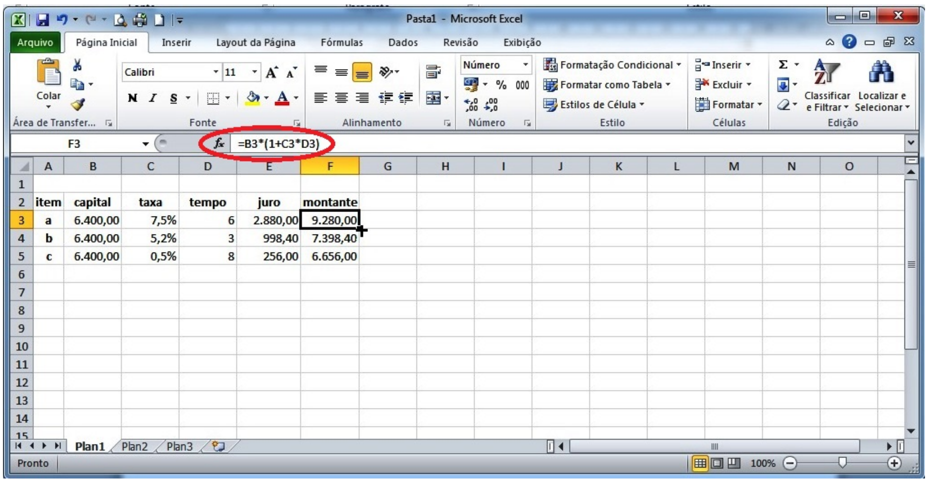


Figura 18 – Excel: Montante

Na figura acima, a coluna F (coluna do montante), podemos ver claramente que, se expressarmos a fórmula do montante corretamente $M = C \cdot (1 + i \cdot n)$, a qual, na linha 3, coluna F, está assim expressa **=B3*(1 + C3*D3)**, teremos o resultado de imediato. Observe que o próprio programa obedece às regras da operações algébricas básicas (primeiro, multiplicações e divisões; em seguida, adições e subtrações), respeitando as regras das expressões algébricas (resolvendo de dentro para fora: 1^o parênteses, 2^o colchetes e 3^o chaves), evitando o risco de erros que muitas vezes é cometido na hora de resolver a equação depois de armada.

Retomando o assunto da Revista do Professor de Matemática n^o68 (JR, 2009), o autor diz que: “Uma questão igualmente importante que surge é: dado um financiamento, como obter a taxa de juros, i?”. Ele resolve esse problema de duas maneiras: uma, de forma algébrica, e outra, utilizando uma planilha eletrônica.

Usando o exemplo citado nessa revista, temos:

> “Um refrigerador, cujo valor à vista é R\$720,00, pode ser pago em 12 prestações de R\$62,50, sem entrada. Nessa situação, qual a taxa mensal de juros que está embutida na venda a prazo?”

Sendo $A = 720$ (valor à vista), $P = 62,50$ (prestação) e $n = 12$ (número de prestações), desejamos obter a taxa mensal i de tal modo que:
$720 = 62,50\frac{(1+i)^{12}-1}{(1+i)^{12}\times i}$.

Como não há um método algébrico simples para resolver a equação, vamos considerar por tentativas e erros fazendo **interpolação linear**. Tenta-se uma taxa arbitrária por exemplo $i = 0,5\%$, substituindo na equação teremos:

$62,50\cdot\frac{(1,005)^{12}-1}{(1,005)^{12}\times 0,005}-720 = 6,183 > 0$. Significa que a taxa é maior que $0,5\%$.

Tentamos com $i = 0,6\%$, obtemos:

$62,50\cdot\frac{(1,006)^{12}-1}{(1,006)^{12}\times 0,006}-720 = 1,551 > 0$. Significa que a taxa é maior que $0,6\%$.

Tentamos com $i = 0,7\%$, obtemos:

$62,50\cdot\frac{(1,007)^{12}-1}{(1,007)^{12}\times 0,007}-720 = -3,039 < 0$. Com $i = 0,7\%$, passa da taxa desejada.

Então observamos que:

$$\begin{array}{ccc} 0,6\% & \cdots\cdots & 1,551 \\ 0,7\% & \cdots\cdots & -3,039 \end{array}$$

Supondo que a variação linear encontra-se no intervalo de $0,6\%$ a $0,7\%$, teremos a taxa de juros $0,6\%+x$, sendo x obtido utilizando a regra de três:

$$\begin{array}{ccc} x & \cdots\cdots & 1,551 \\ -0,1 & \cdots\cdots & 4,590 \end{array}$$

$$x = \frac{0,1\times 1,551}{4,590} = 0,0338$$

Logo a aproximação razoável para i é $i = 0,6\% + 0,0338\% = 0,6338\%$ ao mês.

Utilizando o método das aproximações sucessivas no excel, que consiste na aproximação de i_k, $k = 0,1,2,3,\ldots$, de modo que $i_{k+1} = \frac{62,50}{720}\left(1-(1+i_k)^{-12}\right)$, obtemos a seguinte tabela:

	A	B	C	D
1	Valor àvista	número de prestações	Valor da prestação	taxa de juros i_k
2	720	12	62, 5	0, 5% (i_0)
3				0, 504294% (i_1)
4				0, 508485% (i_2)
$\vdots$				$\vdots$
341				0, 633688% (i_{339})
342				0, 633688% (i_{340})

Tabela 7 – Aproximações

A célula D2 corresponde à aproximação inicial escolhida da taxa i_0 (=0, 5%), e a fórmula inserida na célula D3, que fornece i_1, é "=C$2/A$2*(1-(1+D2)ˆ (-B$2))", correspondendo à expressão obtida anteriormente. A partir daí, basta "arrastar" D3 para obter, sucessivamente, i_2, i_3 etc.

A partir do momento em que os valores da coluna D ficarem constantes, este será o valor da taxa de juros aplicada na operação.

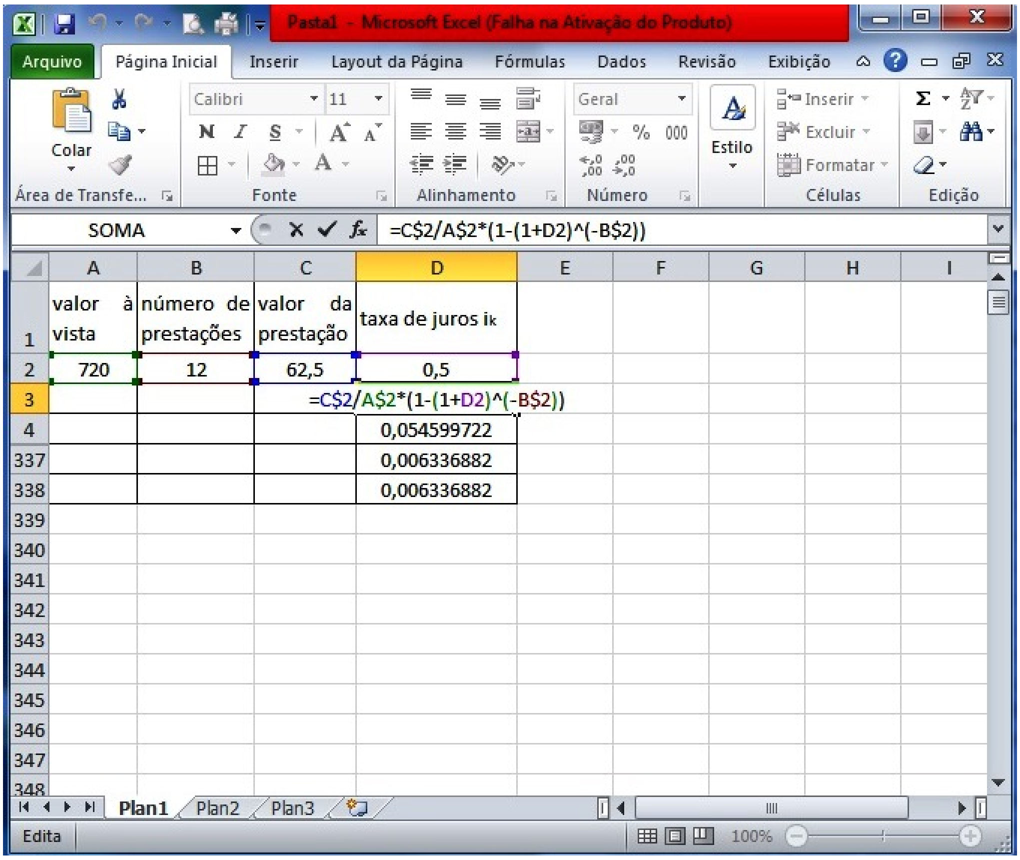
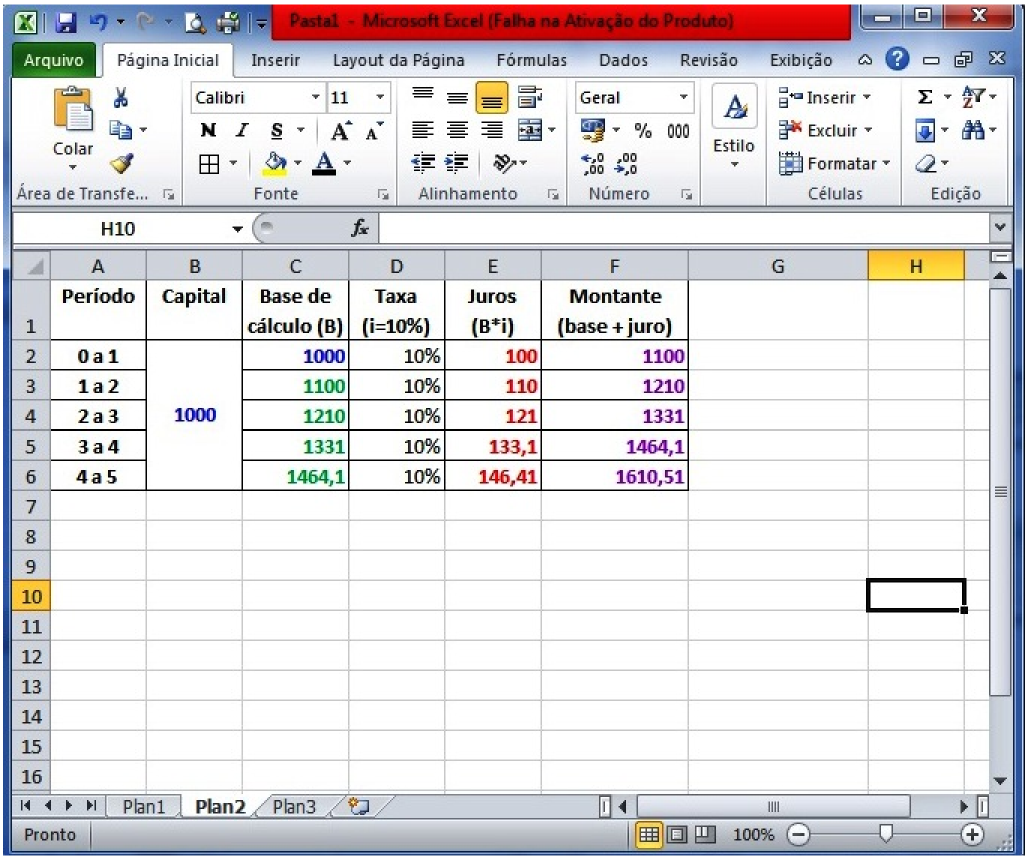


Figura 19 – Aproximação de Taxa no Excel

Como podemos ver, após 340 iterações, obtivemos uma aproximação para a taxa com 6 casas decimais. O processo iterativo é bastante lento, mas o poder de processamento do Excel torna viável sua utilização.

7.4 Juros compostos ou capitalização composta

O conteúdo de capitalização composta, assim como o de juros simples, pode (e deve) ser explorado com o Excel, da da seguinte forma:



Período	Capital	Base de cálculo (B)	Taxa (i=10%)	Juros (B*i)	Montante (base + juro)
0 a 1	1000	1000	10%	100	1100
1 a 2		1100	10%	110	1210
2 a 3		1210	10%	121	1331
3 a 4		1331	10%	133,1	1464,1
4 a 5		1464,1	10%	146,41	1610,51

Figura 20 – Excel: Juros Compostos

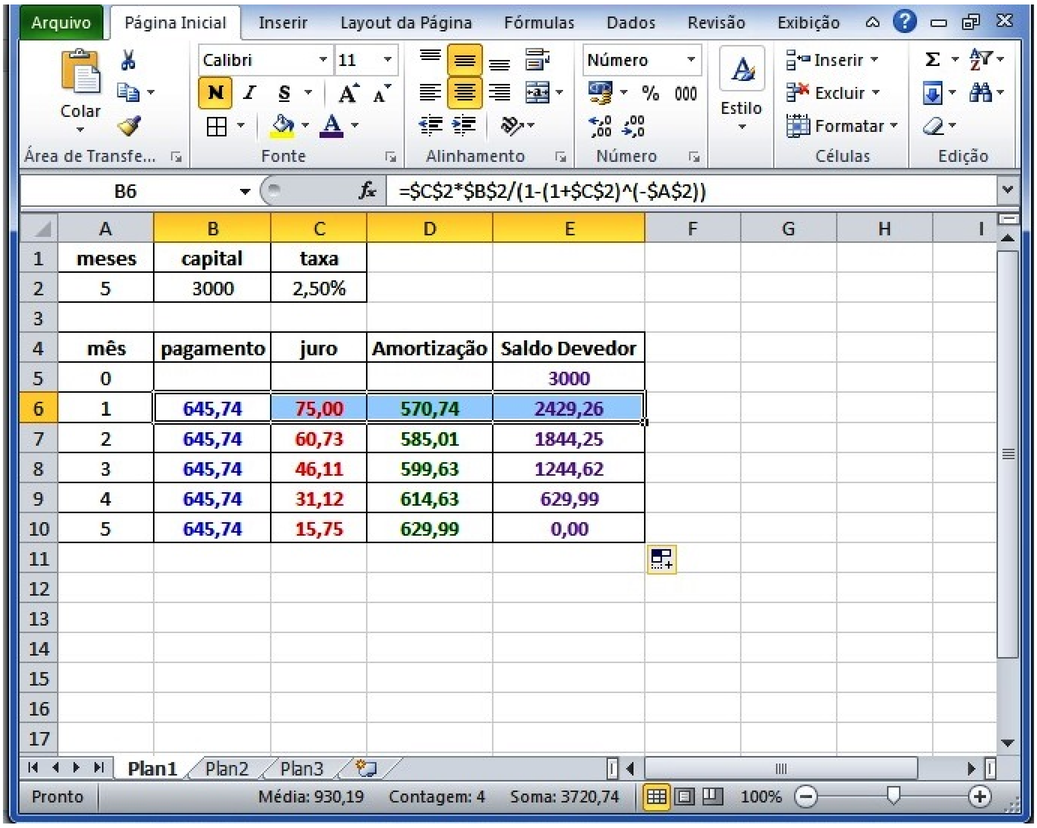
Observando a planilha abaixo, preenchemos apenas a linha 2 com os valores numéricos. Em C2, colocamos o valor do capital inicial; em D2, o valor da taxa 10%; em E2, colocamos a fórmula =D2*C2 e, por fim, em F2, outra fórmula =C2+E2. No canto inferior direito de cada célula das colunas D, E e F, clicando e arrastando, obteremos a tabela abaixo. Depois, basta explorar o conteúdo até obter a fórmula geral de juros compostos: $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$.

Portanto, esses são somente algumas das demonstrações que o Excel pode fazer para facilitar a vida das pessoas, dos alunos, dos empresários etc.

Nesta planilha o aluno pode observar claramente o valor do juro cobrado em cada período que está representado na coluna E, o montante de cada mês na coluna F e a base de cálculo de cada juro na coluna D. Desta forma nota-se que que o juro é diferente em cada período, mesmo sendo a taxa sempre a mesma, devido à base de cálculo variar contantemente, diferentemente do cálculo do juro simples em que o juro é sempre o mesmo, pois não só a taxa é fixa bem como a base de cálculo também é sempre a mesma.

Através da utilização da planilha eletrônica, o professor pode explorar separadamente cada variável como, juro, taxa, período, capital e chegar à fórmula de Juros Compostos $M = C_0 \cdot (1+i)^n$

No **Exemplo 4.1.4** onde exploramos a situação problema em que Paula faz um empréstimo, mostramos como se calcula o valor da parcela e como explorar mais ainda o exemplo com a utilização da tabela price, no entanto requereria mais tempo nas aulas para confecção da tabela juntamente com os alunos. Utilizando a Planilha Excel, ficaria como mostra a figura abaixo:



	A	B	C	D	E
1	meses	capital	taxa		
2	5	3000	2,50%		
3					
4	mês	pagamento	juro	Amortização	Saldo Devedor
5	0				3000
6	1	645,74	75,00	570,74	2429,26
7	2	645,74	60,73	585,01	1844,25
8	3	645,74	46,11	599,63	1244,62
9	4	645,74	31,12	614,63	629,99
10	5	645,74	15,75	629,99	0,00

Figura 21 – Excel: Tabela Price

Onde preenchemos somente a segunda linha da tabela com os comandos:

- na coluna B linha 6 escrevemos a fórmula para se calcular o valor da parcela "=$C$2*$B$2/(1-(1+$C$2)^ (-$A$2)"
- na coluna C linha 6 "=$D5*$C$2"
- na coluna D linha 6 "=$B6-$C6"
- na coluna E linha 6 "=$E5-$D6"

Selecione as células B6, C6, D6, E6, e no canto inferior direito de E6 quando o cursos mudar de formato click no botão direito do mouse, segure e arraste para baixo até a célula E10 e depois solte, correspondente à última linha da tabela, desta forma a planilha será preenchida automaticamente e assim o professor poderá junto com a turma analisar financeiramente o problema proposto.

Da mesma forma no **exemplo 5.2.4.4** utilizando o camando "**=$C$2*$B$2/(1-(1+$C$2)^ (-$A$2)**" o aluno pode calcular de forma direta o valor real da parcela do empréstimo de R$1.500,00 sem correr o risco de ser enganado e sem muito esforço pois a planilha se encarrega de fazer os cálculos, desde que compreenda os camandos e saiba utilizar a planilha eletrônica excel.

Características da Operação

Valor da Venda (R$)	Valor do Seguro (R$)	Prazo Cobertura	Valor dos Acessórios (R$)	Valor Documentação (R$)	(-) Entrada (R$)
7.665,00					1.000,00

(+) Tarifa Cadastro (R$)	(+) Total Serviços Terceiros (R$)	(=) Valor Financiado (R$)	Coeficiente	Valor da Prestação (R$)	Qtde. Prestações	IOF	VRG Final (R$)
450,00	200,00	7.315,00	0,04428	323,91	36	27,90	0,00

Parcelas Intermediárias	
	NÃO HÁ PARCELAS INTERMEDIÁRIAS

Modalidade Pag.	Isento IOF?	Tipo de Moeda	1º Venc.	Último Venc.	Taxa Mensal	Taxa Anual	CET Anual	Seguro	Valor (R$)
PREFIXADO	Não	REAL	26/09/2014	26/08/2017	2,75	38,47	49,41		

Descrição Serviços Terceiros

SERVICOS DE TERCEIROS	0,00	CUSTO DE REGISTRO DE CONTRATO	200,00

Datas e Assinaturas

Figura 22 – Formulário: Financiamento

Na Figura 22 temos parte de um formulário do financiamento de uma moto de uma concessionária bem conhecida no Brasil, onde nos disponibiliza todas as informações necessárias para o cálculo do financiamento, o qual utiliza o método do cálculo do coeficiente de financiamento apresentado no Exemplo 4.1.1 que prova que o método realmente é aplicado no dia-a-dia, ou seja, se multiplicarmos o valor financiado R$ 7.315,00 pelo coeficiente $0,04428$ obtemos o valor de R$ $323,9082 \approx 323,91$. Porém se ao aplicar a fórmula da Série Uniforme, temos um valor diferente de R$ $322,6743 \approx 322,67$, que é facilmente verificável utilizando a planilha eletrônica. Ao utilizar a fórmula da Séries Uniformes o valor da prestação será de R$ $323,91$ se o valor financiado for R$ $7342,90$ que é a soma do valor financiado decriminado no formulário com o IOF, desta forma o cliente está sendo enganado por não conhecer as fórmulas de financiamento.

7.5 O professor e a Tecnologia

A tecnologia veio ao encontro da educação, quando os computadores tiveram suas inserções nas escolas da rede pública com a entrada do Projeto EDUCOM, elaborado pela Secretária de Educação para introdução da Informática nas escolas básicas. O que se desejava com a implantação desse projeto era formar cidadãos de consciência crítica, sujeitos com criatividade com base suficiente para mudar, transformar a escola e consequentemente a sociedade.

De acordo com (SAMPAIO; LEITE, 210), a ideia de alfabetização tecnológica do professor não acontece sem que antes ocorra uma contextualização da evolução que aconteceu no mundo, das transformações desenvolvidas em meio à produção material e cultural numa velocidade tremenda, se forem comparar com os últimos anos, e essa mudança é percebida ainda mais com a revolução tecnológica.

É visível que grandes evoluções surgiram a partir de então: mesmo sendo o Brasil um país em desenvolvimento em vários aspectos, a tecnologia está presente no cotidiano da sociedade.

Segundo (SAMPAIO; LEITE, 210):

> Para melhor compreender a alfabetização do professor, é necessário perceber que, ao transformar, ao longo do tempo, as formas de produzir e reproduzir os meios de sua produção sobrevivência, o ser humano modificou também suas relações humanas e com a natureza.

Estão introduzindo cada vez mais tecnologias nas escolas, e essas tecnologias precisam e devem ser usadas para a formação continuada dos professores possibilitando aos mesmos dominarem os mais diversos recursos tecnológicos e educação dos alunos, pois a tecnologia hoje é indispensável para a globalização.

Uma coisa de grande relevância também era preciso acontecer, mas não aconteceu: a participação de todos os segmentos da sociedade civil, tanto na elaboração como nas intervenções dos planejamentos.

Segundo (OLIVEIRA, 1997):

> “O que se percebe em todos os documentos referentes à informática educativa é a ausência da participação de professores, alunos, funcionários e pais de alunos na definição das contribuições que aquele recurso pedagógico poderia ter na redefinição do papel político-pedagógico a ser alcançado pela escola”.

Muitas vezes, as tecnologias que são disponibilizadas e entram nas escolas não são de escolha dos professores mais sim, por imposição própria, o que acaba conduzindo esses professores a deixar esquecidas, adormecidas outras tecnologias mais tradicionais. Também se tem uma visão holística de que é possível fazer uso de tecnologias avançadas que contribuam no processo de ensino e aprendizagem.

É preciso que as escolas atuais cobrem dos seus professores um preparo para atuar com as novas tecnologias voltadas para a educação, pois os alunos da atualidade estão em um contexto político, econômico, cultural e social em que a grande parte das coisas que os envolvem são tecnologias avançadas, de modo que os docentes não podem se fechar a esse mundo tecnológico, pois isso seria o mesmo que negar aos alunos essa nova forma de aprender.

8 Considerações Finais

O presente trabalho teve como principal objetivo o uso do Excel para contribuir com o aprendizado da Matemática Financeira reforçando conceitos, definições muitas vezes mal compreendidas por parte dos alunos por não terem ou verem um exemplo prático e concreto. Por essas situações e outras, o Excel serve de suporte e apoio para estudos da Matemática Financeira envolvendo sequências, gráficos, parcelas, juros em prestações pagas por um empréstimo ou amortização etc.

Concordando plenamente com a LDB, bem como com os autores que referenciamos ao longo deste trabalho, acreditamos que a Educação Básica tem que promover constantemente o desenvolvimento do aluno, colocando-o frente a frente com situações reais do dia-a-dia e que forneçam significado ao seu ensino.

Proporcionar ao aluno um novo instrumento de trabalho, mostrando-lhe que ele pode realizar diversas ações com os objetos disponíveis, fazendo-os refletir sobre as características e propriedades de objetos, constituindo uma análise generalizada sobre os conceitos e definições de tais objetos, é fundamental.

Antecipamos que a utilização de softwares para ensinar Matemática não implica, por si só, em um ambiente totalmente favorável para a aprendizagem física e matemática, pois não gera uma aprendizagem automática. A proposta de trabalho do professor deve ser planejada, interessante e motivadora para o aluno, o que implicará em uma aprendizagem desafiadora, fazendo com que o aluno possa pensar, refletir e partir para prováveis soluções, utilizando-se das diversas ferramentas disponíveis por meio do computador, para a resolução do problema proposto.

Entendemos que a Matemática Financeira, aplicada aos diversos ramos da atividade econômica, pode representar importante instrumento para auxiliar em análises e decisões de ordem pessoal e social. Assim, além de servir como aporte a conceitos de outros campos, o aprendizado de Matemática Financeira instrumentaliza o cidadão a melhor entender, interpretar e escolher adequadamente dívidas, crediários, descontos, reajustes salariais, aplicações financeiras etc.

O Excel, como mencionamos durante o desenvolvimento deste trabalho, apresenta-se de maneira eficiente como uma ferramenta útil para as aulas de Matemática, ou seja, a sua inserção no ambiente escolar deve ser planejada cautelosamente, de tal forma que não interfira e não distancie o aluno dos objetivos principais dessa ciência.

Portanto, a tecnologia, sendo uma realidade, apenas precisa ser melhor trabalhada e aceita nas escolas, pois os alunos se interessam pelo novo e esse novo prepara e condiciona o aluno para o mercado de trabalho.

Referências

ALVAREZ, Z. C. de. **Epistemologia da educação com suporte eletrônico**. São Paulo: Ubiratam, 2006.

ASSOCIADOS, A. **Coleção Polêmica do Nosso tempo**: Informática na educação escolar. 2003.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL, B. C. D. **Caderno de Educação Financeira - Gestão de Finanças Pessoais**. 2013.

_____. **O Programa de Educação Financeira do Banco Central**. 2013. Disponível em: <www.bcb.gov.br/?BCEDFIN>.

COSTA, M. das D. **A História da matemática no Brasil**. 2007. Disponível em: <www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/MariadasDoresCostaBrito.pdf>.

D'AMORE, B. **Problemas: pedagogia e psicologia da matemática na atividade da resolução de problemas**. São Paulo: Síntesis, 2006.

DRUCK, S. **Matemática: Ensino Médio**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2004.

ENEM (Ed.). **Guia do Estudante**: Matemática - vestibular + enem. 2015.

ENTWISTLE, N. **A compreensão da aprendizagem na sala de aula**. 2008. Paidós.

FILHO, K. P. de A. **Matemática Financeira**. 2008. NEDA-UFMA.

FISCHER, R. **Introdução à informática educativa**. São Paulo: Universitária, 2001.

GARCIA, J. C. À vista com desconto ou a prazo sem juros? **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**, SBM, São Paulo, n. 20, p. 23–24, jan 1992.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GOLBERT, C. S. **Novos rumos na aprendizagem da matemática: conflitos, reflexão e situações-problemas**. Porto Alegre: Editora Meditação, 2002.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. M. **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2004. v. 11.

JR, J. C. de S. Como encontrar a taxa de um financiamento? **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**, SBM, São Paulo, n. 68, p. 33–35, jan 2009.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Campinas: Papirus, 2003.

LEAL, M. C. **Didática das Ciências: fundamentos e práticas para o Ensino Médio**. 2009. Periódico.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática Financeira**. 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MEC. **Secretaria de Educação Fundamental**: Parâmetros curriculares nacionais. 1998.

MORALES, C.; AMBRÓSIO, M. B. **Uma história da educação matemática no Brasil através dos livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental**. 2003. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Morales.pdf>.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

OLIVEIRA, R. de. **Informática Educativa: Dos planos e discursos à sala de aula**. Campinas: Papirus, 1997.

OLIVEIRA, R. de. **Séries de Pagamentos: Uma Aplicação da Matemática Financeira ao Ensino Médio**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - do Departamento de Matemática da UEM/Maringá-PR) — Universidade Estadual de Maringá, Paraná, 2014.

PARENTE, E.; CARIBE, R. **Matemática Comercial & Financeira**. São Paulo: FTD, 1996.

RIBEIRO, D. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: MEC, 1996.

ROTONDI, B. **Saiba calcular o empréstimo consignado**. 2015. Disponível em: <https://www.konkero.com.br/emprestimo/consignado/saiba-calcular-o-emprestimo-consignado>.

SAMPAIO, M. N.; LEITE, L. S. **Alfabetização tecnológica do professor**. 7ª. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 210.

SANTOS, O. O.; LIMA, M. G. e S. **O processo de ensino e aprendizagem da disciplina matemática: possibilidades e limitações no contexto escolar.** 2010. Disponível em: <http://www.uespi.br/prop/xsimposio/trabalhos/producao/ciencias%20da%20educacao/o%20processo%20de%20ensinoaprendizagem%20da%.pdf>.

SEBRAE (Ed.). **Análise e Planejamento Financeiro – Manual do Participante**. 2011.

SILVA, A. C. R. da. **Metodologia da pesquisa aplicada à contabilidade: Orientações de estudos, projetos, relatórios, monografias, dissertações, teses**. São Paulo: Atlas, 2003.

SILVA, M. N. da. **Matemática Financeira**. 2015. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/matematica-financeira.htm>.

SILVA, M. N. P. da. **Cálculo de Financiamento**. 2015. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/calculo-financiamento.htm>.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**. 1ª edição. ed. São Paulo: FTD, 2010.

TORRES, G. Z. Calcular prestações de uma dívida, como? **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**, SBM, São Paulo, n. 66, p. 09–12, mai 2008.

VEIT, T. V. D. **Modelagem no Ensino: Aprendizagem de Física e os Novos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172002000200003&lng=en&nrm=iso>.

APÊNDICE A – A regra dos 70

O livro "Matemática: ensino médio" (DRUCK, 2004) relata a história de um cliente que perguntou ao gerente de um banco quanto tempo levaria para duplicar uma quantia a ser aplicada a uma taxa de $i\%$ ao mês. O gerente respondeu-lhe que esse tempo t é obtido, de forma aproximada, por:

$$t = \frac{70}{i} \text{ anos.}$$

Por exemplo, se a taxa de juros é de 14% ao ano, o tempo de duplicação é de aproximadamente $\frac{70}{14} = 5$ anos. Já a uma taxa de 6% ao ano, o tempo de duplicação é de aproximadamente $\frac{70}{6} \approx 11,7$ anos.

O gerente, ainda, explicou-lhe que, para a construção daquele cálculo, foi necessário utilizar uma regra usada em finanças, conhecida como **regra dos** 70.

O exemplo mais completo da utilização da regra dos 70 dado por (DRUCK, 2004) é o seguinte:

"Para calcular o tempo aproximado de duplicação de um investimento, divida 70 pela taxa percentual anual de juros."

Vamos justificar o cálculo do gerente. Para isso, usaremos a função logaritmo natural de x, $x > 0$, denotada por $ln(x)$, que é definida como sendo a função inversa da função exponencial, $exp(x)$. Logo, "o logaritmo natural de x é o expoente y ao qual devemos elevar e (base dos logaritmos naturais) para obter x":

$$y = ln(x) \Leftrightarrow x = e^y.$$

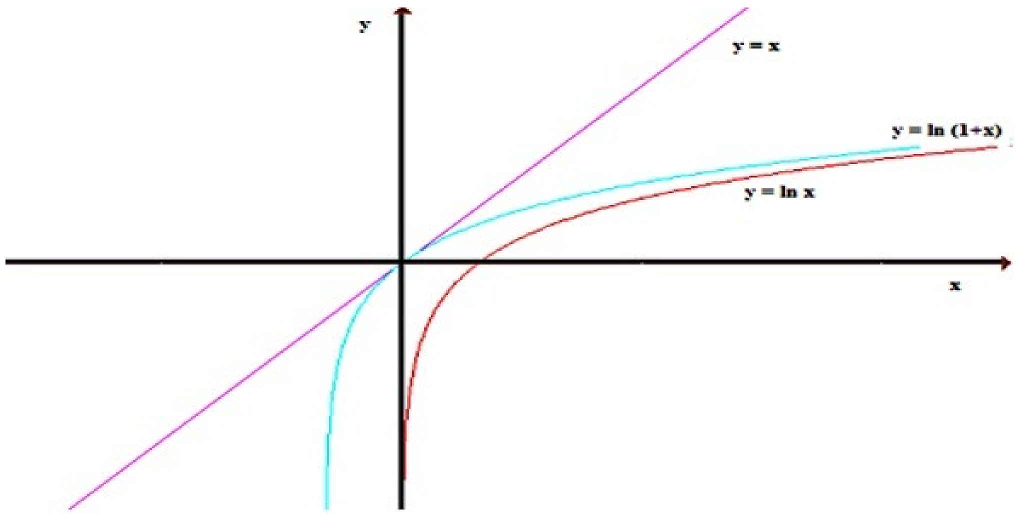
Precisamos de uma forma prática para calcular o valor numérico do logaritmo, mesmo que aproximado. Usaremos a expressão apresentada, com notas históricas:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \text{ para } -1 < x < 1.$$

Tal expressão, conhecida como a série de Taylor da função $ln(1+x)$ em torno de 0, permite a aproximação $ln(1+x) \approx x$, para valores de x tais que $-1 < x < 1$.

Podemos também perceber essa aproximação graficamente:

A seguir, temos os gráficos das funções $y = ln(x)$, $y = ln(1+x)$ e $y = x$, que fornecem uma justificativa gráfica para a aproximação $ln(1+x) \approx x$.



Sabemos que um capital C, aplicado à taxa anual de $i\%$ transforma-se, após 1 ano, em

$$C(1) = C + \frac{i}{100} \cdot C$$
$$C(1) = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)$$

Após 2 anos, teremos:

$C(2) = C(1) + \frac{i}{100} C(1)$

$C(2) = C(1) \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)$

$C(2) = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)$

$C(2) = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$

De modo geral, após t anos, teremos:

$$C(t) = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t.$$

Logo, o tempo t, necessário para a duplicação do capital, é obtido da equação:

$2C = C \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$ ou $2 = \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t$.

Aplicando logaritmo natural a ambos os membros desta última equação, obtemos:

$ln2 = t \cdot ln\left(1 + \frac{i}{100}\right)$

$$t = \frac{ln2}{ln\left(1 + \frac{i}{100}\right)}$$
$$t = \frac{0,70}{\frac{i}{100}} = \frac{70}{i},$$
o que justifica a regra dos 70.

Na verdade, a regra dos 70 vale sempre que houver um crescimento exponencial com taxa de crescimento relativamente pequena. Por exemplo, se a taxa de crescimento da população de um país é de $3,5\%$ a.a, então a população dobrará em, aproximadamente, $t = \frac{70}{3,5} = 20$ anos.

A regra dos 70 também vale para estimar a meia-vida de uma quantidade Q que decai exponencialmente com taxa de decrescimento de $i\%$ a.a. Após t anos, o valor da quantidade será:

$$Q(t) = Q \cdot \left(1 - \frac{i}{100}\right)^t.$$

A meia-vida é, por definição, o valor de t tal que

$$Q(t) = \frac{1}{2}Q.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}Q = Q \cdot \left(1 - \frac{i}{100}\right)^t \Rightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right)(= -ln2) = t \cdot ln\left(1 - \frac{i}{100}\right) \Rightarrow t = -\frac{ln2}{ln\left(1 - \frac{i}{100}\right)} \approx \frac{70}{i},$$

pois, para $- < x < -1$, vale a aproximação $ln(1 - x) \approx -x$.