



UESB



PROFMAT

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ROGÉRIO STARICH SILVA

**LACUNAS CONCEITUAIS SOBRE NÚMEROS E SUAS OPERAÇÕES
NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Vitória da Conquista, BA
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ROGÉRIO STARICH SILVA

**LACUNAS CONCEITUAIS SOBRE NÚMEROS E SUAS OPERAÇÕES NA
FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Maria Aparecida Roseane Ramos.

Vitória da Conquista, BA.
2015

S5831 Silva, Rogério Starich.
Lacunas conceituais sobre números e suas operações na formação de professores de matemática / Rogério Starich Silva, 2015.
137 f.: il.; algumas color.
Orientador (a): Maria Aparecida Roseane Ramos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Vitória da Conquista, 2015.
Referências: f. 127-130.
1. Matemática – Formação de Professores.
2. Deficiências Conceituais de números e operações. I. Ramos, Maria Aparecida Roseane. II. Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 510

ROGÉRIO STARICH SILVA

**LACUNAS CONCEITUAIS SOBRE NÚMEROS E SUAS OPERAÇÕES NA
FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Maria Aparecida Roseane Ramos (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof.^a Dr.^a Maria Deusa Ferreira da Silva (Co-Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof. Dr.^a Selma Rozane Vieira
Instituto Federal da Bahia - IFBA

Vitoria da conquista, BA.
2015

Para Ana Maria Starich Silva (*in memoriam*) e Rogério Vieira da Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço às professoras Cida e Deusa, que me estimularam a sempre ir um pouco mais além, orientando com toda atenção e contribuindo para que este trabalho se concretizasse.

À minha irmã Danielle, pela segurança transmitida em cada desafio que eu enfrentava.

À tia Leni, por ter um coração de mãe sempre tão aberto em todas as horas que precisei.

À Glauciléia, pelo carinho e pela paciência em cada momento, sempre trazendo força, alegria e inspiração para continuar.

Ao professores Ailton Luiz Vieira, Wederson Marcos Alves e Lais Couy, pela presteza nas contribuições das informações solicitadas.

Ao grupo PET – Novas Tecnologias Voltadas Para o Ensino pelo assessoramento nas atividades de pesquisa.

Aos amigos do Departamento de Ciências Exatas, que contribuíram sobremaneira ao desenvolvimento desse trabalho, tanto nos favores atendidos quanto nas discussões com as quais aprendi muito.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo principal diagnosticar como as deficiências conceituais sobre números e suas operações se manifestam ou se repetem na formação inicial de professores e quais obstáculos conceituais estão associadas a essas deficiências. Para tanto, tomou-se como referência Ball (1988) e Moreira (2004) e elaborou-se um teste contendo dez questões abertas que abordavam conteúdos como: indeterminação; conceito de potenciação; divisão por zero; diferentes representações numéricas; valor absoluto; dentre outros. Aplicou-se um questionário e um teste a um grupo de 55 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – Campus do Mucuri, e analisou-se as respostas obtidas sob a luz dos quadros teóricos de Contreras et al (2012), Even (1990) e dos obstáculos epistemológicos de Bachelard (2006). Classificou-se e categorizou-se as respostas para quantificá-las de modo a identificar a concentração das ocorrências de cada deficiência conceitual encontrada e, assim, comparar esses resultados com a proposta pedagógica do curso em questão. Com a realização desse processo, constatou-se problemas similares aos apontados na literatura estudada, ou seja, um distanciamento entre a matemática veiculada na formação inicial de professores e a matemática escolar e que, quando se trata de números e suas operações, os estudantes recorrem aos conhecimentos adquiridos na Educação Básica, conhecimentos estes que se apresentaram de modo falho ou inconsistente. Desse modo, identificou-se lacunas conceituais que estão associadas a saberes importantes e fundamentais que compõem o conhecimento matemático específico para a formação do professor da Educação Básica e que não estão sendo sanadas na licenciatura e, assim, espera-se ter fornecido elementos que contribuam para uma reflexão sobre os currículos da formação de professores de Matemática.

Palavras-chave: Formação de Professores de Matemática. Deficiências Conceituais. Números e suas Operações.

ABSTRACT

This study aimed to diagnose as the conceptual deficiencies of numbers and their operations are manifested or recur in initial training of teachers and conceptual obstacles which are associated with these deficiencies. Therefore, it took as a reference Ball (1988) and Moreira (2004) and elaborated a test with ten open questions that addressed contents as: indeterminacy; concept of exponentiation; division by zero; different numerical representations; absolute value; among others. We used a questionnaire and a test to a group of 55 students of the major in Mathematics from the Federal University of the Valleys of Jequitinhonha and Mucuri - Campus Mucuri, and analyzed the responses obtained in the light of the theoretical frameworks of Contreras et al (2012), Even (1990) and epistemological obstacle Bachelard (2006). Is classified and the answers are categorized to-quantify them in order to identify the concentration of occurrences of each conceptual deficiency found and thus compare the results with the pedagogical proposal of the course in question. With the completion of this process, it was found similar problems to those identified in the studied literature, ie a distance between mathematics conveyed in the initial training of teachers and school mathematics and that, when it comes to numbers and operations, students resort the knowledge acquired in Basic Education, knowledge that these had flawed or inconsistently. Thus, it identified conceptual gaps that are associated with important and fundamental knowledge that make up the specific mathematical knowledge to the formation of Basic Education teacher and not being remedied in degree and thus is expected to have provided elements that contribute to reflect on the curriculum of the training of mathematics teachers.

Keywords: Mathematics Teacher Education. Conceptual Deficiencies. Numbers and their Operations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Disciplinas concluídas da amostra por período de matrícula.....	44
Figura 2: Participantes que informaram experiência docente por período.....	56
Figura 3: Distribuição das respostas ao item 7 do questionário sobre o perfil dos participantes.....	57
Figura 4: Proporção de participantes que informaram ter dificuldades nas disciplinas de Fundamentos da Matemática Elementar I e II.....	57
Figura 5: Proporção de participantes que informaram ter dificuldades nas disciplinas de Álgebra (I e II) e Análise I.....	58
Figura 6: Desempenho da amostra em cada questão do teste.....	60
Figura 7: Categoria das respostas incorretas que consideraram o resultado da divisão igual a 7 ou 0.	65
Figura 8: Proporção de respostas à Questão 2 fundamentadas exclusivamente em regras (coerentes).	66
Figura 9: Distribuição das respostas categorizadas como respostas com significado limitado.....	73
Figura 10: Proporções (por período) de respostas ao item (c) da Questão 3 fundamentadas em regras incorretas e do tipo <i>não soube</i>	77
Figura 11: Os dois tipos de respostas mais frequentes ao item (a) da Questão 4.....	82
Figura 12: Proporção por período de respostas ao item (b) da Questão 4 da categoria incorretas.	85
Figura 13: Proporção, por período, das respostas dadas à Questão 5.....	91
Figura 14: Proporção por período de respostas contendo as raízes racionais: $x = 2$ ou $x =$ 4.....	92
Figura 15: Gráfico da resolução da Questão 5 do Estudante 6, 3º Período.....	93
Figura 16: Gráfico da resolução da Questão 5 do Estudante 16, Finalistas.	94
Figura 17: Distribuição proporcional de cada raiz obtida pelos estudantes na Questão 6.	96
Figura 18: Distribuição proporcional a cada período das duas categorias de respostas à Questão 7.....	103
Figura 19: Proporção por período de cada um dos três tipos de resposta que atribuíam a racionalização: 1º - como uma regra estabelecida; 2º - para padronizar respostas; 3º- para facilitar os cálculos.	108
Figura 20: Distribuição proporcional a cada período das duas categorias de respostas à Questão 7.....	111

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Descrições das competências numéricas	23
Quadro 2 - Sete aspectos do conhecimento de um assunto matemático	29
Quadro 3 - Disciplinas do Núcleo de Formação Específica.....	33
Quadro 4 - Carga horária Não presencial PIPE.....	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Distribuição dos estudantes por Período.....	42
Tabela 2: Distribuição da amostra por período.....	43
Tabela 3: Classificação geral das respostas por período.....	59
Tabela 4: Classificação das respostas à Questão 1	62
Tabela 5: Classificação das respostas dadas à Questão 2.....	64
Tabela 6: Classificação das respostas dadas à Questão 3.....	70
Tabela 7: Classificação das respostas dadas à Questão 4	79
Tabela 8: Classificação das respostas dadas à Questão 6	98
Tabela 9: Classificação das respostas dadas à Questão 7.....	102
Tabela 10: Classificação das respostas dadas à Questão 8.....	107
Tabela 11: Classificação das respostas dadas à Questão 9.....	110

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PET – Programa de Educação Tutorial

PIPE – Projeto Integrado de Prática Educativa

PPC – Projeto Pedagógico do Curso

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais

UFVJM – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 1 – DISCUSSÃO TEÓRICA	16
1.1 A matemática na licenciatura e a matemática escolar	16
1.2 O conceito de número e a formação do professor	19
CAPÍTULO 2 - METODOLOGIA	30
2.1 Números e operações no curso de licenciatura em matemática da UFVJM	31
2.2 Caracterização da amostra.....	41
2.3 O teste	45
2.3.1 Questão 1 – Indeterminação em potenciação.....	45
2.3.2 Questão 2 – Divisão por zero	46
2.3.3 Questão 3 – O conceito de potenciação	47
2.3.4 Questão 4 – Diferentes representações numéricas.....	49
2.3.5 Questão 5 – Raízes de uma equação.....	50
2.3.6 Questão 6 – Soluções reais e complexas e simplificação por zero	51
2.3.7 Questão 7 – Raízes estranhas.....	52
2.3.8 Questão 8 – Racionalização.....	53
2.3.9 Questão 9 – Valor absoluto.....	53
2.3.10 Questão 10 – Produto de dois negativos	54
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	56
3.1 Questão 1 – Indeterminação em potenciação.....	60
3.2 Questão 2 – Divisão por zero	64
3.3 Questão 3 – O conceito de potenciação.	70
3.4 Questão 4 – Diferentes representações numéricas.....	78
3.5 Questão 5 – Raízes de uma equação.....	90
3.6 Questão 6 – Soluções reais e complexas e simplificação por zero	96
3.7 Questão 7 – Raízes estranhas.....	102
3.8 Questão 8 – Racionalização.....	106
3.9 Questão 9 – Valor absoluto.....	110
3.10 Questão 10 – Produto de dois negativos	115
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	119
REFERÊNCIAS	125
APÊNDICE A – TESTE	129

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO	131
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO SITUACIONAL DO ESTUDANTE	133

INTRODUÇÃO

A formação de professores de matemática para a Educação Básica levanta várias questões que implicam, direta ou indiretamente, na melhoria do ensino dessa disciplina. Dentre tais questões, este trabalho buscou transitar pelas sendas das relações entre os conhecimentos veiculados no processo de formação do professor de matemática e os saberes necessários à prática escolar do professor de matemática da Educação Básica. Entre as relações encontram-se, particularmente, a relação definida por Moreira e David (2007, p. 20) sobre a Matemática Científica e a Matemática Escolar. Nesta perspectiva, um estudo foi realizado sobre as deficiências e dificuldades que os estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM) possuem sobre os conceitos de números e suas operações, partindo-se do pressuposto que tais deficiências são provenientes da Educação Básica.

Existem alguns trabalhos relacionados à formação de professores e ao conhecimento matemático necessário ao professor de matemática da Educação Básica, dentre os quais se destacam os de Ball (1988), Ball e Bass (2002); Ball et al. (2005); Ball, Thames e Phelps (2008); Silverman e Thompson (2008); Even (1990) e o relevante estudo de Moreira (2004). Ao longo do tempo, alguns dos referidos trabalhos abordaram as dificuldades conceituais presentes nos estudantes de licenciatura ou de mestrado em matemática com relação à aprendizagem de conceitos da Educação Básica, a exemplo das operações de multiplicação e de divisão de números nas formas decimal e fracionária; compreensão dos números reais e o conceito de função. Outros, se ativeram em identificar os conceitos da matemática escolar que os professores possuíam e descobriram que, em muitos casos, o professor recorria aos conhecimentos que ele obteve na própria Educação Básica para ensinar os seus alunos.

No que diz respeito ao presente trabalho, deslumbrou-se a necessidade de verificar se o mesmo acontecia entre os estudantes do curso noturno de Licenciatura em Matemática da UFVJM pois, de acordo com Moreira (2004), “Seria interessante verificar como essas mesmas questões de pesquisa podem ser respondidas quando examinadas em relação a outras Licenciaturas e em que medida nossas conclusões se mantêm essencialmente válidas”. (MOREIRA, 2004, p. 179). Diante do exposto, buscou-se investigar quais as deficiências conceituais sobre números e suas operações se apresentariam entre os estudantes pesquisados bem como tais deficiências persistiriam ao longo do curso. Procedimentos numéricos e algébricos tais como potência de um número com expoente irracional, indeterminação numérica, diferentes representações numéricas, operações aritméticas com números racionais e

irracionais, valor absoluto de um número real e números complexos, dentre outros foram analisados.

Na construção do presente trabalho foram essenciais as contribuições de Moreira (2004), sobre o conhecimento que os estudantes de matemática possuíam sobre números reais, de Contreras et al (2012), que discutiram sobre as competências exigidas para a compreensão de números, de Even (1990), que forneceu um quadro teórico sobre os aspectos do conhecimento matemático e de Bachelard (2006) no que diz respeito à dimensão epistemológica para categorização dos obstáculos conceituais detectados na população alvo. A investigação teve o objetivo de responder às seguintes perguntas:

(A) Quais deficiências ou dificuldades em relação aos conceitos numéricos são persistentes nos discentes do curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM?

(B) Quais obstáculos conceituais estão associados às deficiências apresentadas?

Importante ressaltar que houve também a intenção de estabelecer um confronto entre a matemática superior da formação dos professores do curso em questão e a matemática elementar necessária à prática profissional docente dos egressos do curso. Uma vez identificados tais pontos, o trabalho pode ser referendado pela necessidade de uma revisão da grade curricular ou na proposta pedagógica do curso em apreço. Porém, ressalta-se que a ambição do trabalho não é o de ser suficiente para embasar a reestruturação do curso mencionado e sim evidenciar o distanciamento entre o conhecimento ensinado na formação e o conhecimento necessário ao professor da Educação Básica.

No Capítulo 1 é abordado o referencial teórico de estudos que colocam em questão a matemática praticada na Licenciatura e a matemática necessária para o exercício do professor na escola e, dentro delas, pretendeu-se destacar o conceito de números e a formação do professor. Neste capítulo é também apresentado o conceito de obstáculo epistemológico de Bachelard (1996) e dois quadros teóricos, o quadro das competências numéricas de Contreras et al (2012), e o quadro dos aspectos teóricos do conhecimento de um assunto matemático da Even (1990), sobre os quais se apoiaram as análises das respostas obtidas no teste aplicado.

No Capítulo 2 é apresentada a metodologia empregada no desenvolvimento desta pesquisa bem como um breve relato sobre a fonte das amostras com a síntese da proposta pedagógica e dos Planos de Ensino das disciplinas dos últimos três anos, do curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM que foram escolhidas por terem relação direta com o tema números e operações. Além disso, neste capítulo é caracterizada a amostra pesquisada e, também, são apresentadas as questões do teste empregado na fase de diagnóstico.

No Capítulo 3 é descrito o perfil do sujeito pesquisado com base nas informações

prestadas pelos indivíduos a um questionário situacional aplicado e é feita a análise das soluções das questões do teste aplicado aos estudantes tendo-se como parâmetro os pressupostos teóricos do Capítulo 1.

As considerações finais apresentam uma síntese dos principais resultados do trabalho amparada no que diz a literatura utilizada interligando a matemática acadêmica, a matemática escolar e as lacunas conceituais de número e suas operações existentes na formação de professores nas licenciaturas em matemática.

CAPÍTULO 1 – DISCUSSÃO TEÓRICA

1.1 A matemática na licenciatura e a matemática escolar

Moreira e David (2007, p. 21) definem a *matemática acadêmica* como aquela que é reproduzida no ensino superior proveniente dos trabalhos de matemáticos, onde os tipos de objetos com os quais se trabalha, os níveis de abstração em que se colocam as questões, e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que haja ênfase nas estruturas abstratas, no processo rigorosamente lógico-dedutivo e na extrema precisão de linguagem. Enquanto que a *matemática escolar* é aquela que é essencial ao professor de matemática da escola básica, desenvolvida num contexto educativo, com definições mais descritivas, com formas alternativas de demonstrações mais acessíveis ao aluno em cada um dos estágios escolares, usando-se de argumentações ou apresentações de conceitos ou resultados variados, fazendo reflexão profunda sobre a origem dos erros dos alunos, etc.

Ao distinguir essas matemáticas e verificar que apenas a *matemática acadêmica* é utilizada na Licenciatura, Moreira (2004, p. 168) enfatiza um grave problema que os professores de matemática recém formados enfrentam no início da vida profissional: os alunos da escola ainda não estão prontos para a matemática com alto nível de abstração e formalismo que viram durante toda a graduação. Dessa forma, o novato professor busca refúgio na matemática que ele próprio aprendeu na escola configurando-se, então, numa espécie de ciclo vicioso onde o professor inicia sua prática profissional na escola básica sob a influência de uma concepção implícita de que, na impossibilidade de trabalhar com a matemática a que foi exposto na licenciatura, vê-se obrigado a reproduzir aos seus alunos sua própria formação escolar, aquela que ele trouxe para a licenciatura. Esse problema está relacionado à formação do professor de matemática.

Quando se trata da formação do professor de matemática, surgem várias discussões sobre o que é realmente necessário para promover tal formação. Algumas dessas discussões são tradicionalmente dialéticas e tem, segundo Fiorentini e Oliveira (2013, p. 918), fundamento numa tricotomia entre *formação matemática*, *formação didático-pedagógica* e *prática profissional*. Para se romper com essa tradição tricotômica são sugeridas algumas mudanças em relação à prática e à pesquisa da formação de professores, mudanças que devem ser orientadas pela problemática e por investigações no confronto entre a formação na Licenciatura e a complexidade da prática da matemática escolar.

Tanto Moreira (2004, p.180) quanto Fiorentini e Oliveira (2013, p. 919) discutem um dos

problemas centrais do conteúdo matemático necessário à formação do professor de matemática onde, até então, imperava a visão tradicional do saber docente quando muito se fala que “o professor tem que saber mais do que aquilo que ensina” (MOREIRA, 2004, p. 180, destaque do autor) ou que “o professor precisa saber bem a matemática para ensiná-la” (FIORENTINI e OLIVEIRA, 2013, p. 919). A partir daí passou-se a pensar no lugar que a matemática ocupa na formação inicial do professor dessa disciplina pois, para Fiorentini e Oliveira (2013, p. 922), “Não faz sentido falar de *uma* Matemática (com letra maiúscula), mas de matemática (com letra minúscula) ou então de *matemáticas*, pois as matemáticas são múltiplas, dependendo do contexto e de prática social”.

Na busca de identificar a matemática necessária à prática docente escolar e a matemática praticada na Licenciatura, Moreira e David (2005) apresentam um histórico da grade curricular das Licenciaturas em Matemática no Brasil no modelo “3+1” ou modelo “bacharelado + didática”, ou seja, três anos para a formação específica e mais um ano para formação pedagógica. Tal modelo foi uma tentativa de integração das disciplinas teóricas com as disciplinas pedagógicas com vistas à formação prática. Os autores evidenciam que a mudança da ordem ou da quantidade de disciplinas na estrutura curricular não forneceu bons resultados na superação da dicotomia entre teoria e prática na formação de professores de matemática. Uma vez que o grande problema continuou a persistir: o distanciamento entre a matemática acadêmica ou científica, veiculada na Licenciatura, e a matemática escolar necessária ao exercício da prática escolar na educação básica. Essa também é a opinião de Klein (2009) quando afirma que, se a Licenciatura em matemática permanecer como está, pouco contribuirá para o bom exercício da profissão de professores de matemática da educação básica, pois:

Os jovens estudantes universitários são confrontados com problemas que nada têm a ver com as coisas que estudaram na escola e, naturalmente, esquecem-nas rapidamente. Quando, depois de completarem o curso, se tornam professores confrontados com a necessidade de ensinar a matemática elementar na forma adequada ao grau de ensino, primário ou secundário, a que se dedicam, e como não conseguem estabelecer praticamente nenhuma relação entre esta tarefa e a matemática que aprenderam na universidade, facilmente aceitam o ensino tradicional, ficando os estudos universitários como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência na sua forma de ensinar. (KLEIN, 2009, p. 1)

Tal afirmação traz à tona um paradoxo onde o curso que deveria formar o professor de matemática não lhe fornece conteúdo necessário ao exercício da profissão e, com a identificação deste paradoxo surge a questão: Quais conhecimentos matemáticos são mais adequados para a formação de professores para atuarem na educação básica? Segundo Ferreira (2014, p. 13), a

questão não será tão pronto quanto possível de ser respondida, pois “A constituição do que seria esse corpo de conhecimento específico para os professores da Escola Básica encontra-se em processo de discussão entre educadores e pesquisadores em educação matemática.”.

Porém, a maioria dos autores concorda que a abertura para a discussão sobre a relevância da matemática escolar tem papel na Licenciatura pois, conforme Valente (2013) “A discussão sobre o papel da matemática escolar nos cursos de Licenciatura em Matemática parece não ser nova. Como o futuro professor poderá ser formado, se não domina os conhecimentos básicos de matemática?” (VALENTE, 2013, p. 940).

Tal indagação remete novamente a uma indecisão, quais são os conhecimentos básicos de matemática que o futuro professor não domina? Obviamente esta pergunta terá sua resposta apontada para o conteúdo matemático específico da Educação Básica.

No Brasil, as referências sobre quais conteúdos de matemática são importantes no ensino fundamental e médio, são encontradas nos “PCNs”, Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997), que apontam na seção “Blocos de conteúdos”, cujo primeiro bloco é o de “Números e Operações” e, na seção “Seleção de conteúdos” ressalta que “Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações” e, posteriormente seguem-se os assuntos: estudo dos espaços e das formas e o estudo das grandezas e das medidas. (BRASIL, 1997, p. 38-39)

Da mesma maneira, Lima et al (2006, p. 25) dão ênfase ao estudo dos números dizendo que “os números são um dos dois objetos principais de que se ocupa a Matemática. (O outro é o espaço, junto com as figuras geométricas)”.

Torna-se então conveniente e necessário que se volte os olhares para o conteúdo números e operações quando se pretende investigar o quanto o futuro professor de matemática domina (ou não) tal conteúdo e, a partir daí, fazer inferências sobre os conhecimentos básicos de matemática que a formação de professores deve levar em consideração para resolver um dos problemas apontados na literatura mencionada anteriormente a saber, a ineficiência da Licenciatura em Matemática no preparo de professores para atuação na educação básica.

Moreira (2004) destaca que:

A nosso ver, uma questão importante no contexto de análise das conexões entre a prática docente, a formação na Licenciatura e a matemática escolar é a seguinte: a prática produz saberes; ela produz, além disso, uma referência a partir da qual se processa uma seleção, uma filtragem ou uma adaptação dos saberes adquiridos fora dela, de modo a torná-los úteis ou utilizáveis. Mas será que a prática ensina tudo? (MOREIRA, 2004, p. 46)

Na tentativa de responder essa questão sobre a prática como fonte exclusiva do saber docente, este autor ainda pondera que

[...] o processo de formação na Licenciatura em matemática veicula saberes que, eventualmente, podem ser considerados “inúteis” para a prática docente. Do mesmo modo, trabalha certos saberes “de forma inadequada”, com referência a essa prática. E, além disso, muitas vezes se recusa — justificando-se de variadas formas, entre as quais a utilização tácita do argumento de que isso não é objeto da matemática universitária — a desenvolver uma discussão sistemática com os licenciandos a respeito de conceitos e processos que são fundamentais na educação escolar básica em matemática. Por exemplo, no curso de Licenciatura da UFMG, em nenhum momento do processo de formação matemática desenvolve-se uma discussão aprofundada a respeito das necessidades — relevantes para o trabalho do professor da escola — que levam às sucessivas expansões dos conjuntos numéricos desde os naturais até os racionais, depois aos reais e finalmente aos complexos. Mas discutem-se coisas como restos quadráticos, o axioma do supremo etc. No entanto, essa questão da expansão do sistema numérico é um ponto fundamental para a formação do professor da escola. (MOREIRA, 2004, p. 46-47)

Importante ressaltar que não há aqui, a intenção de declarar que o conteúdo *números e operações* é o único problema que os professores recém formados enfrentam ao iniciarem na profissão. O que se pretende dizer é que este é um dos principais conteúdos da matemática, tanto básica como acadêmica, e por isso torna-se crucial que os professores saibam lidar com esse assunto na educação básica de modo hábil e eficiente para promoverem uma aprendizagem significativa na escola. Para tanto, é necessário que a formação proporcione ao estudante uma gama de conhecimentos sólida e diversificada, neste e em outros conteúdos, para o exercício profissional com qualidade.

1.2 O conceito de número e a formação do professor

Todo o professor de matemática deveria possuir sólidos e diversificados conhecimentos sobre conjuntos numéricos e operações, pelo menos é o que se espera de um egresso do curso de Licenciatura em Matemática, já que esses assuntos são estudados nas disciplinas de álgebra e da análise na reta. Essencialmente, isso significa que o professor deve ter um conceito de número cristalizado de tal modo que possa utilizá-lo numa prática escolar adequada frente às diversas situações de ensino.

A História da Matemática nos ensina que a noção de número está ligada ao período primitivo em que foram descobertos os números cardinais. Documentos escritos relacionam os

primórdios da ideia de número aos povos antigos da China, Índia, Mesopotâmia e Egito. (GUNDLACH, 1992). O autor ainda reforça que

Ao tentar reconstruir o tipo de situação a partir do qual o conceito de número cardinal pode ter surgido, seremos levados a perceber logo de início que o conceito fundamental expresso por meio de conjuntos deve ter sido uma das primeiras abstrações feitas pelo homem (GUNDLACH, 1992, p. 4)

Mas atualmente em seu cotidiano, qual é concepção que as pessoas possuem em relação ao conceito de número? Ou em geral, como as pessoas entendem esse conceito? Uma possível resposta é delineada por Toledo & Toledo (1997):

Quando perguntamos a um grupo de pessoas o que é número, notamos a princípio certo constrangimento. Realmente, é estranho não termos, na ponta da língua, uma definição para algo tão familiar. Usamos números o tempo todo em nossa vida: para tomar um ônibus, fazer um pagamento, encontrar um endereço, saber a idade da vizinha... (TOLEDO & TOLEDO, 1997, p. 17)

Nas respostas obtidas pelos autores, as pessoas se referiam à noção de números cardinais e, mesmo que este conceito tenha sido explorado na escola desde a infância, é detectado que o conceito de número (natural) não é algo tão fácil de ser adquirido, ainda que sejam utilizados os números em diversas situações, inclusive na manipulação aritmética que envolve diretamente várias operações com os números.

Outras possíveis respostas encontradas por esses autores são afirmações em que número “É quantidade” ou “É um símbolo” ou ainda “É um símbolo que representa uma quantidade”, e que há alguém que possa discordar desta última resposta dizendo que “O símbolo não é número; é numeral”, o que reafirma que as ideias do que seja o número ainda não é algo muito claro para essas pessoas. (TOLEDO & TOLEDO, 1997). De fato, como exemplo, aprende-se que $\sqrt{2}$ é um número e, no entanto, o mesmo não se enquadra em nenhuma das respostas e nas situações anteriormente elencadas.

Apesar disso, Magnusson & Mameri (1992) apontam que, dentre alguns pensadores do século XVIII, não há uma unanimidade sobre o que é o número:

É a expressão que determina uma quantidade de coisas da mesma espécie (Baltzer) [1814-1887]
 É a adição sucessiva de uma unidade. (Kant) [1724-1804]
 É uma coleção de objetos de cuja a natureza fazemos abstração. (Broutoux)

[1845-1921]

É a classe de todas as classes equivalentes a uma classe. (Russel) [1872-1970].
(MAGNUSSOM JR & MAMERI, 1992, p. 23)

A afirmação de Baltzer define número como uma expressão associando-o a uma quantidade, isto torna restrito o conceito de número à representação de quantidades concretas. Percebe-se nitidamente que a afirmação de Kant se torna aplicável aos números naturais ou aos inteiros, mas torna-se impraticável para os números reais. A afirmação de Broutoux vai um pouco além da afirmação de Baltzer quando busca inserir no conceito a abstração a partir de quantidades concretas. Já a afirmação de Russel, aparentemente é confusa, pois se fundamenta em princípios da lógica matemática do matemático alemão Frege (1848-1925). Neste sistema, a noção aritmética de número foi substituída pela noção de classes. Nessa teoria, os números cardinais podem ser definidos como classes de classes com a mesma quantidade de membros. Assim o número 2 é a classe dos pares, o 3 como a classe de trios, etc. Um número será então a classe das classes de equivalência.

O epistemológico suíço Jean Piaget (1896-1980) em muito contribuiu para a compreensão de como a criança adquire a noção de número. A esse respeito, Constance Kamii (KAMII, 1990, p. 19) se posiciona assim: “O número, de acordo com Piaget, é uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva). Uma é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica.” A autora também explica que a ordem é uma ordenação mental necessária para que, durante um processo de contagem de objetos, cada objeto seja contado uma única vez e, depois de contado, a ordem específica de um objeto se torna irrelevante pois o objeto tornou-se incluído na categoria dos já contados. A inclusão hierárquica é diferente da inclusão de classes pois as classes levam em conta as características do objeto contado (tais como as que distinguem cachorros, gatos e a classe geral dos animais) já, no número, todas as características dos objetos contados são irrelevantes, importando apenas a inclusão do objeto no nível hierárquico da quantidade contada. Outra diferença é que numa classe pode existir mais de um elemento mas, no número, cada nível hierárquico só possui um único elemento. (KAMII, 1990)

Ainda com fundamentos na teoria epistemológica de Piaget, a autora define número assim: “O número é uma relação criada mentalmente por cada indivíduo” (KAMII, 1990, p. 15). No entanto, ressalta-se que a teoria de formação do conceito de número pela criança não se aplica ao conjunto dos números reais, pois se encontra no âmbito do conjunto dos números cardinais ou naturais que associa o número ao processo de contagem.

O conceito de número está fortemente ligado ao sistema numérico que classifica os

números em conjuntos bem definidos. Porém, saber classificar os números como naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais ou complexos não é suficiente para afirmar que o conceito de número foi adequadamente formado. É desejável que o professor de matemática se aproprie da noção de número de maneira que tenha a capacidade de aplicá-la em situações associadas a eventos ou a contextos quantificáveis.

Em outras palavras, pode-se afirmar que o conceito de número estará satisfatoriamente desenvolvido quando é possível, não somente classificar os números, mas também saber utilizá-los com desenvoltura em situações onde eles se manifestam, como no caso das operações numéricas. Este último aspecto remete a um termo designado por Guirles (2008, p. 33) como *competência numérica*, no sentido da real compreensão dos números, das operações e dos seus processos e da linguagem matemática envolvidos na manipulação desses objetos extremamente abstratos. Por exemplo, o número 2 é desprovido de significados se não se referir à coleção de dois objetos, tais como dois biscoitos, duas laranjas ou 1 biscoito e uma laranja, ... Assim, usando a categoria de classe da lógica matemática, quer dizer que $1 + 1$ é equivalente, (não é igual,) à quantidade de dois objetos quaisquer, o que significa que o 1 faz parte do 2. Tal fato será melhor especificado mais adiante (Item I.4, Quadro 1), na apresentação das categorias de habilidades numéricas de Contreras et al. (2012).

Entretanto, isso provém dos dois tipos de alfabetização: a alfabetização numérica, onde o indivíduo compreende e interpreta o valor dos números, o que eles significam, para que servem e como são utilizados na vida cotidiana e domina funcionalmente o sistema de numeração decimal; e a alfabetização operacional, onde o sujeito sabe o que é somar, subtrair, multiplicar ou dividir, e além disso, é capaz de identificar quando é necessário aplicar cada operação.

Walle (2009) confirma a ideia de que o conceito de números é desenvolvido por meio da utilização dos números em operações matemáticas que exigem a compreensão do tamanho dos números envolvidos, as várias representações numéricas e os efeitos das operações sobre os números, quando diz que “As crianças continuam a desenvolver o senso numérico enquanto começam a: usar números em operações, construir uma compreensão do valor posicional e elaborar métodos flexíveis para calcular e fazer estimativas envolvendo grandes números.” (WALLE, 2009, p. 148)

Havendo uma forte relação do conceito de número com operações, pode-se então pensar em competências ou habilidades numéricas que, para Contreras et al (2012, p. 438) são tipificadas em quatro competências numérica desejáveis a um professor da educação básica que são:

- I. Compreender os números, suas diferentes representações, as relações entre eles e os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e os reais)
- II. Compreender os significados das operações e como se relacionam umas com as outras.
- III. Calcular com fluidez e fazer estimativas razoáveis para o cálculo mental e escrito, tanto com números naturais, como com inteiros ou racionais.
- IV. Elaborar e resolver problemas aritméticos.

No quadro das descrições das quatro competências de Contreras et al. (2012) cabe destacar algumas descrições organizadas no Quadro 1.

Quadro 1: Descrições das competências numéricas

(continua)

Competência	Descrição
I.	I.1 Compreender o significado dos números em contextos distintos (cardinal e ordinal – para os naturais, medida, razão, ponto de uma reta, resultado de uma operação). I.2 Saber interpretar o valor dos números em textos numéricos da vida cotidiana. E, para uma situação que seja possível, ser capaz de traduzi-la em termos numéricos. I.3 Compreender a estrutura do sistema de numeração decimal e sua relação com os algoritmos de operações básicas. I.4 Compreender que um número pode ser decomposto e pensado de distintas formas e realizar com fluidez distintas composições e decomposições. I.5 Saber escolher as decomposições numéricas mais apropriadas para resolver situações e problemas. I.6 Saber representar um número de maneiras distintas (com material manipulável, símbolos, expressões numéricas distintas mas equivalentes, representações pictóricas, reta numérica, notação exponencial ou científica, etc.) I.7 Saber passar, o mesmo número, de uma representação a outra, como por exemplo, convertendo decimais racionais em frações e vice-versa. I.8 Compreender as relações entre os números, comparando-os e ordenando-os. I.9 Comparar e contrastar as propriedades dos números e dos conjuntos numéricos. I.10 Argumentar e estabelecer raciocínio numérico dedutivo ou indutivo, ou simplesmente afirmações ou falsificações.
II.	II.1 Compreender os diferentes significados associados aos conceitos das operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) com diferentes tipos de números. II.2 Compreender os efeitos de diferentes operações básica realizadas considerando os números envolvidos. Usar essa compreensão para simplificar os cálculos e resolver problemas. (Incluindo a compreensão dos efeitos de operar sobre as operações como, por exemplo, se numa divisão eu duplico o divisor, o que acontece com o quociente?) II.3 Compreender e utilizar propriedades das operações (por exemplo, a distributividade da multiplicação em relação a adição). II.4 Enunciar quais os efeitos das operações como a multiplicação, a divisão, potenciação e radiciação sobre os valores absolutos dos números envolvidos.
III.	III.1 Realizar, corretamente e fluentemente, cálculos relativos as operações básicas e suas combinações. III.2 Dispor de estratégias de cálculo que permitam abordar uma resolução de modo flexível e claro, tanto mentalmente como de forma escrita. III.3 Saber resolver situações de cálculo não algorítmicas.

Quadro 1: Descrições das competências numéricas

(continuação/conclusão)

Competência	Descrição
III	III.4 Selecionar e utilizar métodos e ferramentas apropriadas (incluindo objetos, cálculos mentais, estimativas, calculadoras, programas de computador, lápis e papel) para calcular, segundo o contexto e a natureza do cálculo em questão. Utilizar a calculadora para explorar as propriedades dos números.
IV	IV.1 Resolver problemas abertos, analisando e valorizando as possíveis soluções. IV.2 Abordar a resolução de um problema utilizando diferentes estratégias e procedimentos de resolução. IV.3 Decidir e justificar, por escrito e oralmente, a melhor maneira de resolver um problema em termos de eficácia e de formalidade matemática e discutir a invalidade de caminhos alternativos. IV.4 Elaborar e resolver problemas vinculados à vida cotidiana. IV.5 Inventar problemas a partir de operações concretas previamente definidas.

Fonte: CONTRERAS et al. (2012, tradução e adaptação nossa)

Pode-se perceber que as descrições das competências numéricas estão ligadas a conteúdos básicos da matemática escolar e que, um indivíduo que possuir tais competências terá uma formação conceitual sólida de números e suas operações.

Porém as pesquisas da literatura aqui estudadas indicam que os professores recém-formados demonstram dificuldades com algumas dessas competências.

Ball (1988) ao concluir sua pesquisa com professores e estudantes do curso de matemática em Michigan (Estados Unidos da América), detectou que os sujeitos pesquisados apresentaram várias dificuldades com a chamada matemática “simples”, especificamente com decimais, com as operações de divisão, subtração e fatoração, e que os formadores de professores não tratam destas questões nos cursos universitários supondo que os conteúdos de matemática da grade escolar são elementos que qualquer adulto entende. Mas, embora alguns dos estudantes universitários pudessem realizar os procedimentos operacionais propostos, eles manifestaram falta de compreensão conceitual explícita do conteúdo. A obra ainda identifica três suposições que imperam nos cursos de formação inicial de professores de Matemática pesquisados nos Estados Unidos, a saber,

- I. Os conteúdos da matemática escolar são simples e os estudantes que entram num curso superior demonstram dominá-los;
- II. Pelo suposição anterior não é necessário dar ênfase aos conteúdos da matemática escolar;
- III. A matemática universitária oferece uma visão profunda da matemática de modo que os professores tornam-se capacitados para o exercício no ensino escolar. Essa três suposições formam um ciclo que interfere profundamente no exercício profissional do futuro professor de matemática da escola. (BALL, 1988, p. 90)

A partir de estudos realizados no Brasil, Moreira e David (2005) concordam com a situação apontada por Ball (1988) quando afirmam que

Observamos que o estudo do conjunto dos números naturais, dos racionais e dos reais normalmente desenvolvidos nos cursos de Licenciatura em Matemática não contempla uma série de questões que se associam ao tratamento escolar do tema. Para cada um dos conjuntos numéricos estudados, pudemos apresentar exemplos concretos de questões que se colocam para o professor na sua prática pedagógica na escola, mas que, no processo de formação, ou são ignoradas ou abordadas através de uma ótica por demais distanciada do trabalho docente escolar. A lista de questões levantadas e analisadas é numerosa, mas o traço comum e persistente é o abandono sistemático, no processo de formação, das questões que se referem à prática docente escolar, em favor de uma centralização do foco sobre questões que, muitas vezes, são relevantes apenas do ponto de vista da Matemática Acadêmica. (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 99-100)

Da mesma forma Even (2011), ao comentar os resultados de outros trabalhos de investigação sobre os conhecimentos de matemática escolar que os professores de matemática da escola possuem, afirma que:

Os resultados encontrados sugerem que os cursos de universidade ou faculdade de matemática comuns não dão o suporte adequado ao desenvolvimento de conhecimentos matemáticos necessários para o ensino de Matemática na escola secundária. Além disso, tais resultados sugerem que o desenvolvimento de competências no ensino de matemática da escola secundária requer atenção especial com o propósito de desenvolvimento de conhecimentos matemáticos da escola secundária nos professores, mesmo que os professores já tenham aprendido sobre este assunto quando foram alunos da escola secundária. (EVEN, 2011, p. 942, tradução nossa)

Isto mostra que, mesmo após mais de duas décadas da identificação de um ciclo prejudicial à formação do professor de matemática, o problema ainda persiste e que as dificuldades conceituais do professor com a matemática escolar básica (e, conseqüentemente com o conceito de números e suas operações) é anterior a sua própria graduação e não são sanadas com o aprofundamento da matemática acadêmica estudada na Licenciatura. Para Costa (2008, p. 10), “Algumas destas dificuldades advêm dos obstáculos de natureza epistemológica que são inerentes ao conceito e devem ser transpostos na medida em que são aceitos e compreendidos”, o que reforça a necessidade de se detectar quais obstáculos epistemológicos impedem o professor de compreender os conceitos de números e operações para estar preparado ao exercício profissional.

O que são obstáculos epistemológicos? Segundo Bachelard (2006), os obstáculos epistemológicos são as causas de inércia que emperram o conhecimento científico promovendo

estagnação e até regressão do progresso da ciência. Essas causas não são ligadas a fatores externos e sim às condições psicológicas do próprio ato de conhecer, que manifestam-se sejam por imperativo funcional, por lentidões ou conflitos. É como se um conhecimento adquirido impedisse a aquisição de um novo conhecimento ou de estabelecer conexões com o próprio conhecimento já acomodado. Como exemplo, pode-se citar o caso em que nas cinco primeiras séries do ensino fundamental é ensinado aos alunos que a operação subtração (no conjunto dos naturais) só pode ser efetuada entre “números maiores ou iguais a outro número”. Ou seja, que a diferença entre dois números (naturais) é maior ou igual a zero e isto é internacionalizado como verdade absoluta e inquestionável. Assim, certos alunos, ao cursarem o 7º ano, não forem devidamente preparados com situações convenientes e cuidadosamente preparadas pelo professor para quebrar este paradigma, ou reforçar que isto ocorre no campo dos números naturais, os conhecimentos cristalizados nos anos anteriores podem provocar obstáculos epistemológicos conceituais desta operação no conjunto dos números inteiros, pois o aluno internalizou que é impossível efetuar, por exemplo, $5 - 7$. A tendência de tais alunos ao resolverem tal exercício é trocar o minuendo com o subtraendo, pois o resultado sempre será um número positivo, para eles o correto é efetuar $7 - 5$ na crença que “do maior é que se pode tirar o menor”, o que dificultará a aprendizagem do conceito de números negativos.

Um outro exemplo, é a generalização precipitada como, por exemplo, dizer que “zero dividido por qualquer número é igual a zero”. Essa generalização pode criar uma forte concepção que a operação “zero dividido por zero é igual a zero”, criando um obstáculo ao indivíduo de reconhecer ou aceitar a indeterminação, entrando em contradição com a existência e a unicidade do quociente do algoritmo euclidiano da divisão, ou o algoritmo de Euclides, que é estudado nas disciplinas iniciais de estruturas algébricas na graduação em matemática.

Pode-se dizer que as três suposições de Ball (1988) citadas anteriormente são fundamentadas na opinião dos formadores de professores e que a superação do problema deve começar, segundo Bachelard (2006), pela superação do primeiro obstáculo epistemológico que é a opinião pois:

[..] a opinião, legitimamente, nunca tem razão. A opinião pensa mal; ela não pensa: *traduz* necessidades em conhecimento. Ao designar objetos pela sua utilidade, coíbe-se de os conhecer. Nada se pode fundar a partir da opinião; é necessário, antes de mais, destruí-la.[...] O espírito científico proíbe-nos de ter uma opinião sobre questões que não compreendemos, sobre questões que não sabemos formular claramente. [...] Um conhecimento adquirido por esforço científico também pode declinar. [...] Um obstáculo epistemológico encrusta-se no conhecimento não questionado. Hábitos intelectuais que foram úteis e são podem, com o tempo, estorvar a pesquisa. «O nosso espírito (diz

justamente M. Bergson) tem uma tendência irresistível para considerar como mais clara a ideia que lhe serve mais frequentemente.» A ideia ganha assim uma claridade intrínseca abusiva. Com o uso, as ideias valorizam-se indevidamente. [...] Por vezes, uma ideia dominante polariza um espírito na sua totalidade. Chega uma altura em que o espírito gosta mais daquilo que confirma o seu saber e despreza aquilo que o contradiz [ou que questiona o conhecimento já adquirido]. (BACHELARD, 2006, p. 166-167)

Nesse sentido, é necessário primeiro assumir que o estudante que ingressa na Licenciatura em matemática não possui o conceito de número bem formado, apesar de saber realizar as quatro operações ou classificar os números em conjuntos numéricos definidos, e que a abordagem axiomática dada ao assunto num curso universitário, pela sua lógica, acabam por induzi-lo a um universo conceitual novo, que o impede de perceber as falhas que possui em conceitos anteriores erroneamente cristalizados. Sendo assim, para não entrar em conflitos internos, o estudante da Licenciatura não questiona o que não sabe e valoriza o que ele pensa que sabe, chegando ao final do curso sem estabelecer a ponte entre os novos conhecimentos adquiridos dentro da lógica matemática acadêmica e as noções que lhes foram ensinadas na matemática escolar, num ciclo vicioso de práticas errôneas de seus antigos professores.

Os obstáculos epistemológicos não são algo que ocorre em uma ou duas pessoas, eles são comuns no quadro de alguma cultura, presente ou passada e eles parecem ser os obstáculos mais incisivos a um conhecimento novo. (SIERPINSKA, 1992, p. 27)

Portanto, não se deve tomar o conhecimento prévio sobre números e operações do estudante da Licenciatura como algo suficiente para sua vida profissional e, a partir daí, desenvolver aulas, nas disciplinas do curso de Licenciatura, com demonstrações lógico-dedutivas sobre os conjuntos numéricos e suas propriedades. É necessário primeiro confrontar o saber já adquirido juntamente com suas conexões e convicções no intuito de romper com os obstáculos conceituais. Pois muitas vezes o estudante pode apenas aceitar as demonstrações apresentadas mesmo sem compreendê-las.

Bachelard (2006, p. 168-169) critica que, numa aula, nem sempre é possível fazer compreender uma demonstração repetindo-a passo a passo. Que é necessário observar que o sujeito chega a uma aula com conhecimentos empíricos já constituídos e que, para fazer compreender, é necessário eliminar os obstáculos já acumulados pela vida cotidiana; tem-se que previamente criticar e desorganizar o complexo impuro das instituições primárias, ato que ele chama de catarse intelectual e afetiva. E, depois disso, vem a tarefa mais difícil: substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico.

Um exemplo disso é dado por Moreira e David (2007), que ao compararem a abordagem

de números naturais no curso de Licenciatura com o que é feito na escola básica, verificaram que o mais relevante para os professores da educação básica é o conhecimento que os ajude na tarefa de envolver os alunos numa variedade de situações didáticas adequadas que possam desafiar seus conhecimentos prévios sobre os números naturais. Desse modo os possibilitaria a dar novos significados para os conceitos e mais segurança para utilizá-los. Nesse processo, dois aspectos da aprendizagem escolar combinam dialeticamente: a diversificação de significados concretos para os objetos matemáticos em questão deve ocorrer paralelamente com uma integração progressiva desses significados em formas mais abstratas, de modo a aumentar a possibilidade de uso numa situação nova ou em situações gerais. No caso do sistema de número natural, uma abordagem formal dedutiva rigorosa é suscetível de eliminar essa dialética.

Para o caso dos estudantes da Licenciatura em Matemática, torna-se necessário identificar o conhecimento que eles possuem sobre um determinado tópico de matemática, no caso específico de números e suas operações, para o confronto entre o conhecimento acadêmico e a prática escolar e, por outro lado, fazê-los avançar no domínio desses conteúdos.

Esse é um dos objetivos do presente trabalho: identificar, na medida do possível, quais os obstáculos epistemológicos dificultam os futuros professores a formarem satisfatoriamente o conceito de número e suas operações. Nesse sentido, surgiram as seguintes questões: Como identificar o conhecimento que os futuros professores de matemática possuem sobre números e operações? Que conhecimentos eles possuem sobre como ensinar tais assuntos?

Responder tais questões não é fácil pois envolve, dentre outros fatores, a subjetividade intrínseca a cada indivíduo. Então, a estratégia adotada no trabalho foi a mesma utilizada por Even (1990), fundamentada na identificação e classificação das informações obtidas em sete aspectos concernentes ao conhecimento de um determinado conteúdo matemático, os quais são justificados pela autora da seguinte maneira:

O tema *conhecimento do professor sobre um assunto específico da matemática* é influenciado pelo que eles sabem em diferentes domínios do conhecimento. Portanto, a análise do tema *conhecimento do professor sobre um assunto específico da matemática* deveria integrar vários corpos de conhecimento; o papel e importância do tema na matemática e no currículo de matemática; pesquisa e trabalho teórico sobre a aprendizagem, conhecimento e compreensão de conceitos matemáticos do tema em geral e um tópico específico em particular; e pesquisa e trabalho teórico sobre o conhecimento assunto dos professores e seu papel no ensino. A análise deve também ter em conta a população específica em consideração. Como resultado desta análise, os sete aspectos seguintes pareciam formar as principais facetas do tema *conhecimento do professor sobre um assunto específico da matemática*. (EVEN, 1990, p. 523, tradução e itálico nosso.)

De fato, o conhecimento sobre os números e suas operações, analisados no contexto da formação de professores e sob a ótica dos sete aspectos dessa autora, vai além dos conceitos e definições e permeia também a prática de ensino e a visão profissional de tal prática. Os referidos sete aspectos foram assimilados, em linhas gerais, no Quadro 2:

Quadro 2 - Sete aspectos do conhecimento de um assunto matemático

Aspecto	Descrição
1. Características essenciais	Ligado à imagem ou conjunto de imagens mentais que já foram associadas ao conceito na mente da pessoa, juntamente com o conjunto de propriedades que foram associados mentalmente ao conceito.
2. Diferentes representações	Refere-se às diferentes formas e notações que um conceito complexo pode manifestar ao longo das numerosas divisões da matemática. Diferentes representações dão diferentes percepções que permitem uma compreensão melhor, mais profunda, mais poderosa e mais completa de um conceito.
3. Formas alternativas de abordagem	As diferentes maneiras de abordar um conteúdo, diversificando as representações, os significados e as notações permitem a escolha da maneira mais adequada de abordagem para cada situação de ensino.
4. Relevância do conceito	Se um conceito abre novas possibilidades ele ganha uma importância dentre os outros, mas se um conteúdo for visto de modo simplista, não tornará possível que outros subtópicos sejam compreendidos.
5. Repertório básico	Para cada tópico matemático é necessário que se conheça e tenha de fácil acesso exemplos específicos que ilustrem princípios importantes, propriedades, teoremas, etc. Mas não quer dizer que seja algo simplesmente memorizado e utilizado sem entendimento, é necessário que ele dispare insights e uma compreensão mais profunda do conteúdo.
6. Entendimento e compreensão do conceito	A compreensão de um novo conceito é caracterizada pela ligações cognitivas estabelecidas entre ele e os demais conceitos já existentes na estrutura cognitiva do sujeito.
7. Conhecimento da Natureza da Matemática	É um conhecimento mais geral que orienta a construção e utilização dos conhecimentos e dos processos pelos quais as verdades matemáticas são estabelecidas.

Fonte: adaptado de EVEN (1990, p. 523-527)

O quadro teórico apresentado enfatiza que, na investigação das concepções de um determinado assunto matemático entre os futuros professores, é necessário investigar não somente o conhecimento de conteúdo específico que os sujeitos apresentam, mas também a forma como eles lidam com esse conhecimento em situações de ensino.

CAPÍTULO 2 - METODOLOGIA

Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada na pesquisa realizada com 55 estudantes da Licenciatura em Matemática do curso noturno da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), Campus do Mucuri, cuja duração regular é de nove semestres letivos. Os objetivos foram identificar e avaliar as dificuldades e deficiências que os futuros professores em processo de formação apresentavam sobre os conteúdos da matemática escolar, números e suas operações.

Na ocasião, foi aventado que cada período letivo cursado pelo discente, poderia influenciar nos resultados, uma vez que isso estaria diretamente relacionado com a quantidade de disciplinas cursadas pelos discentes sujeitos da pesquisa. Tal fato se explica na conjectura de que quanto mais disciplinas cursadas, maior seria a bagagem de conhecimentos dos estudantes sobre o assunto. Essa variável foi o indicador essencial para verificar se determinada deficiência conceitual se repetia ao longo dos períodos do curso e, para isso, foram convidados a participar da pesquisa os estudantes de todos os períodos, de modo que houvesse amostras de discentes referentes a um rol que vai desde os ingressantes até os concluintes.

Também foi verificado em quais disciplinas, da grade curricular do curso em questão, constam em suas ementas assuntos sobre o tema em apreço e, a partir daí, uma análise da ementa e da bibliografia das disciplinas correlatas foram essenciais para a elaboração do teste com questões sobre o objeto de estudo.

O método de diagnóstico se deu com a aplicação de um questionário (vide Apêndice C) e um teste constituído por 10 (dez) questões abertas (vide Apêndice A) sobre assuntos da matemática básica relacionadas a números e operações cujos enunciados e resultados serão apresentados oportunamente.

O teste foi aplicado simultaneamente a todos os estudantes pesquisados e teve duração de aproximadamente, duas horas, onde os professores das turmas encaminharam os estudantes para o ambiente de aplicação do teste. Por questões de ética e de sigilo, tomou-se o cuidado para que cada estudante que aceitasse o convite para participar da pesquisa, de livre e espontânea vontade, assinasse um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) (vide Apêndice B) tanto para o teste com questões quanto para o questionário, sendo que lhes foi assegurado que a identidade dos mesmos seriam preservadas, tanto que na discussão dos resultados obtidos os estudantes estão identificados como Estudante 1, Estudante 2 e assim por diante, sendo um total de 55 estudantes.

Na elaboração do teste pretendeu-se orientar pelos seguintes parâmetros: conhecimentos

de conteúdo; conhecimentos procedimentais e aplicabilidade das respostas e dos argumentos na prática docente escolar. Estes parâmetros foram assim escolhidos para que as respostas às questões fossem analisadas sob as dimensões das competências numéricas de Contreras et al (2012) e sob os aspectos do conhecimento matemático (EVEN, 1990).

Juntamente com o teste, foi aplicado um Questionário Situacional do indivíduo (vide Apêndice C) com o objetivo de traçar o perfil do sujeito pesquisado a partir de informações como tempo de curso, quais disciplinas concluídas, em quais disciplinas tiveram maior dificuldade, existência de alguma experiência docente e onde cursou a Educação Básica. A intenção deste questionário foi fornecer uma visão mais ampliada das respostas apresentadas no teste através do comparativo da experiência acadêmica, escolar e profissional com os argumentos utilizados nas respostas ao teste.

Os dados obtidos foram tratados qualitativa e quantitativamente por meio de informações tais como: o percentual de erros/acertos em cada questão do teste, tipos de justificativas apresentados por questão, imagem conceitual predominante, contribuição das disciplinas cursadas no curso para a resolução do teste e outras.

Para melhor apresentação dos resultados, tentou-se classificar as respostas em três classes: *satisfatória*, *não satisfatória* e *não soube*. As resposta do tipo *não satisfatória* foram, quando possível, organizadas em duas categorias: *incorretas* ou *com significado limitado*. Desta maneira foi possível analisá-las e apresentá-las quantitativamente.

2.1 Números e operações no curso de licenciatura em matemática da UFVJM

Nesta seção será apresentada uma breve análise do Projeto Pedagógico do Curso - PPC (UFVJM, 2007) e dos Planos de Ensino que contém os assuntos de números e operações seja nas disciplinas de prática de ensino, seja nas disciplinas teóricas relacionadas.

A intenção foi identificar em qual parte do curso estão abordados os assuntos de números, operações e conjuntos numéricos. Devido às dificuldades de proceder a análise de como tais conhecimentos matemáticos são abordados em todo o curso de matemática, não foram consideradas as disciplinas do curso cujos os assuntos estavam implícitos, isto é, nos diversos problemas e exercícios em que a sua solução dependia das operações com números como, por exemplo, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Por isso, buscou-se somente avaliar as disciplinas onde tais conteúdos estavam evidentes nos registros institucionais, ou seja, no Projeto Pedagógico do Curso ou nos Planos de Ensino. Devido a isso, primeiramente será apresentada a síntese da proposta pedagógica do curso com as respectivas ementas das

disciplinas e, posteriormente, dos Planos de Ensino.

O Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática – PPC (UFVJM, 2007, p. 5) apresenta em sua justificativa que “as instituições de ensino superior que oferecem cursos de Licenciatura têm sério compromisso com a qualidade do Ensino Fundamental e Médio, pois formam profissionais qualificados para estes níveis de ensino”. Percebe-se que, no projeto, a intenção é proporcionar aos egressos do curso uma formação acadêmica sólida que os tornem bem qualificados e aptos para atuar na Educação Básica.

Tal visão é ratificada nos objetivos do curso em destaque:

São objetivos do Curso de Licenciatura em Matemática:

- formar professores da Educação Básica preparados para responder positivamente às demandas educacionais da sociedade;
- garantir ao egresso o desenvolvimento das competências e habilidades necessárias ao exercício da profissão; (UFVJM, 2007, p. 10)

As competências e habilidades citadas anteriormente também são exemplificadas no PPC e, dentre elas, encontra-se “demonstrar domínio de conteúdos disciplinares específicos; [...] expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; [...] desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático” (UFVJM, 2007, p. 11-12).

Como o documento em tela se diz fundamentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s, para o ensino fundamental e médio (BRASIL, 1997), fica então subentendido que o bloco de conteúdos *números e operações* dos PCN’s esteja concatenado com o “domínio de conteúdos disciplinares e específicos” dito na citação anterior.

Ao esclarecer a organização curricular proposta, o PPC afirma que:

Os cinco primeiros períodos (semestres) oferecem disciplinas de formação básica em Matemática, preparando o futuro professor à prática docente de tal conteúdo, com rigor matemático e suporte de recursos metodológicos adequados. Os conteúdos de Matemática, vistos nestes semestres contemplam os desenvolvidos no Ensino Fundamental e Médio, além de outros específicos do ensino superior, como, por exemplo, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, II, III e IV, Álgebra Linear, Álgebra I e II e outras. (UFVJM, 2007, p. 13, grifo nosso)

Segundo a citação, fica tácito que, em algum momento dos cinco primeiros períodos do curso, serão ministrados aos estudantes os conteúdos sobre números e as operações que são assuntos matemáticos essenciais para a Educação Básica.

Encontra-se, no PPC, a organização do curso em dois núcleos: O Núcleo de Formação

Específica e o Núcleo de Formação Pedagógica. Sobre o Núcleo de Formação Específica, o documento o descreve como constituído

[...] de conhecimentos científicos de Matemática em nível de ensino superior, permitindo-se ao profissional em formação, o domínio teórico-prático do que será objeto de sua atuação na educação básica e, também, a sua preparação para estudos mais avançados. (UFVJM, 2007, p. 14)

Essas ideias são dissonantes com os resultados obtidos por Moreira e David (2005) e Klein (2009), apresentados no Capítulo 1 do presente trabalho, quando afirmam que a matemática superior dos cursos de Licenciatura em Matemática não preparam muito bem seus egressos para atuarem na Educação Básica.

Para um melhor entendimento, as disciplinas com as respectivas cargas horárias referentes ao Núcleo de Formação Específica estão descritas no Quadro 3.

Quadro 3 - Disciplinas do Núcleo de Formação Específica

Disciplinas	Carga Horária			
	Teóricas	Práticas	PIPE	Total
Fundamentos da Matemática Elementar I	75	15	0	90
Fundamentos da Matemática Elementar II	75	15	0	90
Geometria Analítica	60	0	0	60
Introdução à C. da Computação	60	0	0	60
Cálculo Diferencial e Integral I	90	0	0	90
Geometria Euclidiana Plana	75	15	0	90
Álgebra Linear	60	0	0	60
Cálculo Diferencial e Integral II	90	0	0	90
Geometria Euclidiana Espacial	60	0	15	75
Álgebra I	60	0	0	60
Cálculo Numérico	90	0	0	90
Cálculo Diferencial e Integral III	90	0	0	90
Física Básica I	90	0	0	90
Álgebra II	60	0	0	60
Cálculo Diferencial e Integral IV	90	0	0	90
Física Básica II	90	0	0	90
Estatística e Probabilidade	60	0	15	75
Análise I	90	0	0	90
Matemática Financeira	75	0	15	90
História da Matemática	60	0	0	60
Total	1500	45	45	1590

Fonte: UFVJM (2007, p. 14)

Importante esclarecer que a coluna Práticas se refere às disciplinas Práticas de Ensino, e, embora não esteja explícito como os objetivos dessas disciplinas serão atingidos, o documento aponta que, de forma generalizada, tais disciplinas são definidas com base em documentos que versam sobre componentes curriculares em que “deve ser tomada como um conjunto de atividades ligadas à formação profissional e voltadas para a compreensão de práticas educacionais distintas e de diferentes aspectos da cultura das instituições de educação básica.” (UFVJM, 2007, p. 15).

A coluna PIPE é referente ao Projeto Integrado de Prática Educativa (PIPE) que, segundo o próprio documento “buscará desenvolver ao longo do curso de formação de professores, atividades teórico-práticas que articulem as disciplinas de formação específica e pedagógica, assumindo, portanto, um caráter coletivo e interdisciplinar.” (UFVJM, 2007, p. 17). Estes PIPEs possuem uma carga horária total de 45 horas presenciais (distribuídas no Quadro 3) e 195 horas não presenciais (distribuídas no Quadro 4).

De todas as 195 horas do Quadro 4 e das 45 horas dos PIPEs do Quadro 3 não se veem evidentes os conteúdos de matemática da educação básica, muito menos os conhecimentos acerca do conceito de número, associados à prática educativa, tornando portanto, questionável a contribuição do PIPE para a formação do professor em relação à sua preparação para assuntos de matemática da Educação Básica.

Quadro 4 - Carga horária Não presencial PIPE

PIPE	Disciplinas agregadas ao PIPE	Presencial	Não Presencial	Total
PIPE 1	Metodologia Científica (1º per. 30h)	--	30	30
PIPE 2	Informática (6º per. 15h)	--	60	60
	Metodologia do Ensino (4º per. 30h) Estatística e Probabilidade (6º per. 15h)			
PIPE 3	Geometria Euclidiana Espacial (3º per. 15h)	--	60	60
	Matemática através Projetos (8º per. 30h) Matemática Financeira (9º per. 15h)			
PIPE 4	Psicologia da Educação (4º per. 30h)	--	45	45
	Política e Gestão da Educação (7º per. 15h)			
Totais		--	195	195

Fonte: UFVJM (2007, p. 18)

Já o Núcleo de Formação Pedagógica é descrito pelo PPC como “constituído pelos

conhecimentos teórico-práticos da área de educação e de ensino da Matemática, cujas disciplinas visam trabalhar a análise sistemática de conceitos, temas e questões educacionais.” (UFVJM, 2007, p. 15) e, portanto, não está diretamente ligado aos objetivos do presente trabalho.

Para uma melhor triagem dos planos de ensino, foi analisado no PPC o ementário das disciplinas do Quadro 3 e oito disciplinas foram selecionadas como relevantes para este estudo, pois visam a preparação dos estudantes com os conteúdos da matemática elementar ou com conjuntos numéricos e operações. Quais sejam: Fundamentos de Matemática Elementar I e II com as suas respectivas Práticas de Ensino; Álgebra I e II; Cálculo Numérico e Análise I. É importante salientar que, no curso, as disciplinas Prática de Ensino em Fundamentos de Matemática Elementar I e II são consideradas como disciplinas distintas das disciplinas de Fundamentos da Matemática Elementar I e II, respectivamente. As outras disciplinas não serão analisadas e nem comentadas neste trabalho pois não foram consideradas relevantes para o assunto aqui tratado pois não apresentaram, em seus registros institucionais, abordagem de forma explícita dos assuntos *números e operações* ou *conjuntos numéricos*.

Das disciplinas citadas, foram verificados os Planos de Ensino dos semestres 2012/1; 2012/2; 2013/1; 2013/2; 2014/1 e 2014/2 no que tange o objetivo da disciplina, o conteúdo programático e as bibliografias, básica e complementar, que não foram alteradas de forma significativa quando comparadas aos planos das mesmas disciplinas em diferentes semestres.

Nesse momento será apresentada a *essência inalterada* das ementas, do conteúdo programático e da bibliografia das disciplinas escolhidas para análise. Cabe explicar que a expressão *essência inalterada* se refere aos itens que predominam na maioria dos planos semestrais da mesma disciplina.

Percebeu-se que, no primeiro semestre do curso, o estudante cursa as disciplinas Fundamentos da Matemática Elementar I e II, cujos conteúdos são relativos à matemática da Educação Básica. Cada uma dessas disciplinas está vinculada a uma outra, Prática de Ensino, cujo o objetivo registrado nos respectivos Planos de Ensino é “Discutir metodologias de ensino para o conteúdo da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar [I ou II], visando preparar o aluno para o efetivo exercício do magistério”.

De acordo com o PPC, a ementa, o conteúdo programático e a bibliografia básica da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar I estão assim apresentados:

Ementa: Teoria de conjuntos; Função: Domínio e imagem e gráficos; zeros e sinais de funções; Função do 1º Grau; Função do 2º Grau; Função do tipo $k/(x+a)$; Função Composta; Função Modular;

Função Exponencial; Função Inversa; Função Logarítmica.

Conteúdo Programático:

- 1) Conjuntos
- 2) Conjuntos numéricos
- 3) Relações
- 4) Introdução a funções
- 5) Função constante; função afim
- 6) Funções quadráticas
- 7) Função modular
- 8) Outras funções elementares
- 9) Função composta e inversa
- 10) Função exponencial
- 11) Função logarítmica

Bibliografia Básica:

[1] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; Fundamentos de Matemática Elementar - Vol 1. 8ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[2] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C.; Fundamentos de Matemática Elementar - Vol 2. 9ed. São Paulo: Atual Editora, 2004.

[3] MEDEIROS, S. Cálculo Básico para Cursos Superiores. São Paulo: Atlas, 2004.

[4] MEDEIROS, V.Z; CALDEIRA, A.M; SILVA, L.M.O; MACHADO, M.A.S; Pré-Cálculo. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[5] MORETTIN, P. ; BUSSAB, W.; HAZZAR, S. Cálculo Função de uma e várias variáveis. 1ed. Atual Editora

Dentro do Conteúdo Programático é possível perceber que os primeiros assuntos a serem ministrados são *1) Conjuntos* e *2) Conjuntos numéricos*, mostrando então a relevância dessa disciplina para todo o curso na preparação do futuro professor com tais conteúdos relativos à Educação Básica.

A disciplina Prática de Ensino de Fundamentos da Matemática Elementar I se faz presente para complementar a capacitação do profissional para o ensino com:

Ementa: Discussão de artigos, uso de softwares e alternativas de metodologias, envolvendo os conteúdos: Teoria de conjuntos; Função: Domínio e imagem e Gráficos; Zeros e sinais de funções; Função do 1º Grau; Função do 2º Grau; função do tipo $k/(x+a)$; Função composta; Função Modular; Função Exponencial; Função Inversa; Função Logarítmica.

Conteúdo Programático:

- 1) Estudo de artigos sobre conjuntos e funções
- 2) Elaboração de aulas sobre conjuntos e funções
- 3) Apresentação de aulas elaboradas e seminário

Bibliografia Básica:

[1] IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; Fundamentos De Matemática Elementar - Vol 1. 8ed. São Paulo: Atual Editora 2004.

[2] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C.; Fundamentos De Matemática Elementar - Vol 2. 9ed. São Paulo: Atual Editora 2004.

[3] MEDEIROS, S. Cálculo Básico para Cursos Superiores. São Paulo: Atlas, 2004.

[4] MEDEIROS, V.; CALDEIRA, A.; SILVA, L.; MACHADO, M.; Pré-Cálculo. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

Observa-se que no Conteúdo Programático da Prática de Ensino estão previstas atividades diversificadas, dentre as elas está a discussão de artigos os quais não estão especificados nas referências da bibliografia dessa disciplina que, por sinal, pouco se difere da disciplina teórica Fundamentos da Matemática Elementar I.

Situação semelhante ocorre na disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar II que contempla em seu Plano de Ensino os itens:

Ementa: Sequências e Progressões; Análise Combinatória, Binômio de Newton; Trigonometria; Números Complexos; Polinômios, Equações Polinomiais.

Conteúdo Programático:

- 1- Trigonometria:
 - 1.1. Trigonometria no triângulo Retângulo.
 - 1.2. Ciclo trigonométrico.
 - 1.3. Relações trigonométricas.
 - 1.4. Funções trigonométricas.
 - 1.4. Equações trigonométricas
 - 1.6. Inequações trigonométricas
 - 1.7. Funções trigonométricas inversas.
- 2 - Números Complexos:
 - 2.1. Introdução
 - 2.2. A forma algébrica
 - 2.3. A forma trigonométrica
 - 2.4. Raízes da Unidade
- 3 - Polinômios, Equações Polinomiais:

- 3.1. Introdução
- 3.2. Polinômios complexos
- 3.3. Divisão de polinômios
- 3.4. Teorema Fundamental da Álgebra
- 3.5. Relações entre coeficientes e raízes
- 3.6. Equações algébricas com coeficientes reais.
- 4 - Sequências e Progressões:
 - 4.1 Progressões Aritméticas
 - 4.2. Progressões Geométricas
- 5 - Análise Combinatória:
 - 5.1. Princípios Básicos
 - 5.2. Permutações e combinações
 - 5.3. Binômio de Newton
 - 5.4. Sobre o ensino de combinatória

Bibliografia Básica:

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar 3: trigonometria. 8.ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, 1996.

IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar 5: Combinatória e Probabilidade. São Paulo: Atual, 1977.

IEZZI, G. Fundamentos de Matemática Elementar 6: complexos, polinômios, equações. 7.ed. São Paulo: Atual, 2005.

CARMO, Manfredo Perdigão do, MORGADO, Augusto César & WAGNER, Eduardo. Trigonometria e Números Complexos. SBM, Rio de Janeiro, 2005. Coleção do Professor de Matemática.

De tal Conteúdo Programático é possível observar que a disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar II estende o assunto de conjuntos numérico para um outro conjunto, os Números Complexos, que faz parte do currículo do ensino médio.

Em relação à Prática de Ensino de Fundamentos da Matemática Elementar II, a estrutura do Conteúdo Programático se assemelha à situação anteriormente descrita diferindo-se no modo do tratamento da prática de ensino sob a forma de discussão de metodologias de ensino ao invés de elaboração e apresentação de aulas. A bibliografia básica da Prática de Ensino de Fundamentos da Matemática Elementar II modifica-se substancialmente em relação a bibliografia básica da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar II como pode-se ver a seguir:

Ementa: Discussão de artigos, alguns softwares e alternativas de metodologias, envolvendo os conteúdos: Sequências e progressões; Análise Combinatória, Binômio de Newton; Trigonometria; Números Complexos; Polinômios e Equações Polinomiais.

Conteúdo Programático:

Discussão de metodologias de ensino para sequências e progressões

Discussão de metodologias de ensino para análise combinatória e binômio de Newton

Discussão de metodologias de ensino para trigonometria e números complexos

Discussão de metodologias de ensino para polinômios e equações polinomiais

Bibliografia Básica:

[1] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. (mais de 60 números publicados).

[2] COSTA, N.; Funções Seno e Cosseno: Uma Sequência de Ensino a Partir dos contextos do Mundo Experimental e do Computador. Dissertação de Mestrado, PUC SP, São Paulo, 1997.

[3] Revistas EUREKA disponível em: <http://www.obm.org.br/eureka.htm>

[4] LIMA, Elon Lages. Meu Professor de Matemática e outras histórias. 5ª Ed. SBM. Rio de Janeiro, 2007.

[5] LIMA, Elon Lages. Temas e Problemas. 3ª Ed. SBM. Rio de Janeiro, 2007.

[6] LIMA, E. L., CARVALHO, Paulo Cezar Pinto WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. Temas e Problemas Elementares. 2ª Ed. SBM. Rio de Janeiro, 2006.

No quarto período, o estudante cursa a disciplina Álgebra I cujo o objetivo contempla o estudo das propriedades dos números inteiros positivos. Segundo os Planos de Ensino analisados, a abordagem dada à disciplina é a introdução dos conceitos por meio de um significativo número de exemplos para motivar o estudante antes do contato com as demonstrações formais. A ementa e a bibliografia básica de Álgebra I são:

Ementa: O anel dos inteiros, axiomas; O Princípio da Indução; Algoritmo da Divisão; Ideais; Divisibilidade; Máximo Divisor Comum; Equações Diofantinas lineares; Números Primos; Teorema Fundamental da Aritmética; Sistemas de Numeração com ênfase para as bases 2 e 10; Representação dos Números Racionais; Dízimas Periódicas; Congruências: propriedades da congruência (aplicações aos critérios da divisibilidade e prova dos nove); Aritmética das Classes Residuais; Congruências Lineares.

Bibliografia Básica:

[1] HEFEZ, A. Curso de Álgebra volume 1. Coleção Matemática Universitária. 3ªed. IMPA, Rio de Janeiro:2002.

[2] GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. Coleção Projeto Euclides. 2ªed. IMPA, Rio de

Janeiro:2003.

[3] DOMINGUES, H.; IEZZI G. Álgebra Moderna. Atual, São paulo: 1982.

[4] BUENO, H; A VRITZER, D.: FERREIRA, M.: SOARES, E.: FARIA, M.: VIDIGAL, A. Fundamentos de Álgebra. 1ºed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005.

[5] HEFEZ, A. Elementos de Aritmética. Coleção Textos Universitários. 2ºed. SBM, Rio de Janeiro:2006.

O conhecimento sobre os assuntos Representação dos Números Racionais e Dízimas Periódicas, por serem assuntos também da Educação Básica, serão objeto de investigação deste trabalho na Questão 4 do teste que será descrita na seção 2.3.4.

Quando o estudante alcança o quinto período, se ele estiver aprovado em Álgebra I, poderá cursar a disciplina Álgebra II cujo o objetivo é “Conceituar conhecimentos mais amplos a respeito de estruturas algébricas tais como grupos, anéis e corpos. Compreender os principais resultados a respeito de polinômios”. A ementa e bibliografia básica da disciplina Álgebra II são:

Ementa: Domínios euclidianos, domínios principais, domínios fatoriais, O anel dos polinômios em uma indeterminada. Polinômios com coeficientes num corpo, algoritmo da divisão, divisibilidade, ideais, fatoração. Raízes, multiplicidades. O corpo das frações racionais, frações parciais. Polinômios com coeficientes numéricos (complexos, reais e racionais), pesquisa de raízes em \mathbb{Q} , teorema de Gauss, critérios de irredutibilidade. Equações algébricas, relações entre coeficientes e raízes, equações de graus 2,3 e 4.

Bibliografia Básica:

GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. Coleção Projeto Euclides. 2ed. IMPA, Rio de Janeiro:2003.

GARCIA, A.; LEQUAIN Y.: Elementos de Álgebra. 2 ed., IMPA, Rio de Janeiro: 2003

HERSTEIN, I. Topics in Algebra. 2 ed. Wiley, New York: 1975

HEFEZ, A. Curso de Álgebra volume 1. Coleção Matemática Universitária. 3ed. IMPA, Rio de Janeiro:2002.

Da ementa de Álgebra II destacam-se os assuntos: algoritmo da divisão; Raízes, multiplicidades; O corpo das frações racionais; Equações algébricas e relações entre coeficientes e raízes que serão objetos essenciais na investigação das respostas dadas nas questões 2, 5, 6 e 7 do teste, descritas na seção 2.3, onde a intenção é saber se os conhecimentos mais amplos propostos pela disciplina permitem ao estudante utilizá-los ou adaptá-los em

questões mais elementares.

Ao concluir o bloco dos cinco períodos de preparação com os conteúdos matemáticos do ensino fundamental e médio, o estudante avança no curso com disciplinas de matemática superior e outras disciplinas do Núcleo de Formação Pedagógica. Quando o estudante alcança o oitavo período e está aprovado na disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, ele pode cursar a disciplina Análise I cujo objetivo, segundo os Planos de Ensino, em síntese é “Possibilitar ao aluno o aprofundamento de conceitos matemáticos desenvolvidos inicialmente no curso de Cálculo. Permitir ao aluno entrar em contato com técnicas rigorosas de demonstração matemática.” Esta disciplina foi escolhida como relevante para este trabalho pois apresenta em seu Conteúdo Programático a construção dos números reais abordando os números naturais e os números racionais. A ementa e a bibliografia básica da disciplina Análise I são:

Ementa: Conjuntos. Construções dos números racionais e reais. Sequências e séries reais, Sequências de Cauchy. Critérios de convergência. Funções reais, limite, continuidade e continuidade uniforme. A derivada, o teorema do valor médio, teoremas de máximos e mínimos locais, a fórmula de Taylor, Série de Taylor.

Bibliografia Básica:

LIMA, E. L. Análise Real volume I. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1989 Coleção Matemática Universitária;

FIGUEIREDO, D. G. Análise I. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008;

LIMA, E. L. Curso de Análise volume I. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001 Projeto Euclides;

ÁVILA, G. Introdução à Análise Matemática. 3 ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1992;

BARTLE, R. G. The elements of Real Analysis. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, 1967;

NERI, C. Curso de Análise Real. 1. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2006;

A disciplina Cálculo Numérico do sexto período foi escolhida como relevante para esta pesquisa pelo fato de possibilitar a aplicação de métodos numéricos para a estimativa do zero de funções e para solução de equações podendo ser utilizado por algum estudante na resolução da Questão 5 descrita na seção 2.3.5.

2.2 Caracterização da amostra

Aqui serão apresentadas algumas informações obtidas através do Questionário Situacional do Estudante (vide Apêndice C) de modo a caracterizar a amostra pesquisada.

O curso presencial de Licenciatura em Matemática da UFVJM era frequentado, durante

a pesquisa, por 129 estudantes cujas matrículas estão distribuídas por períodos conforme a Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição dos estudantes por Período

Período	Quantidade de estudantes matriculados	Proporção
1º	23	17,83%
2º	14	10,85%
3º	17	13,18%
4º	12	9,30%
5º	14	10,85%
6º	11	8,53%
7º	7	5,43%
8º	9	6,98%
9º	3	2,33%
10º	3	2,33%
11º	5	3,88%
12º	3	2,33%
13º	4	3,10%
14º	4	3,10%
Total	129	100,00%

Fonte: Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM

Percebe-se que das 30 vagas para ingressantes no curso, onde supõe-se que sete vagas não foram preenchidas, a concentração maior de discentes está no primeiro período. Observa-se também, que nos demais períodos houve uma quantidade significativa de evasões ao longo do tempo, que talvez seja influenciado por índices de retenção em algumas disciplinas obrigatórias, havendo uma concentração maior de matriculados nos seis primeiros períodos. Pelos dados da Tabela 1, verifica-se que houve um declive acentuado na quantidade de estudantes matriculados por período no curso até o 9º período e, ao mesmo tempo, houve uma ligeira estabilização do 9º período em diante. Porém, não foi objetivo deste trabalho investigar a queda do quantitativo de estudantes matriculados nos períodos mais avançados do curso e sim caracterizar a fonte da amostra empregada no estudo.

Devido à queda do quantitativo de estudantes matriculados a partir do 9º período e também em razão de estar previsto no projeto pedagógico a conclusão do curso em nove semestres letivos, este trabalho considerou-se os estudantes matriculados a partir do 9º período (inclusive) como sendo um único grupo doravante aqui identificado como *Finalistas*. Isto facilitou a análise das soluções às questões do teste aplicado ao grupo, tais análises encontram-

se no Capítulo 3.

Para participar do teste, foram convidados os estudantes matriculados em todos os períodos do curso e a expectativa era contar com uma taxa de participação entre 30% e 50% dos estudantes. O que evitaria que a qualidade da amostra não fosse débil (caso a amostra fosse inferior a 30%) e nem que o volume da amostra tornasse excruciante o trabalho das análises das resposta (caso a amostra fosse superior a 50%). Desta forma, obteve-se a participação de 55 dos 129 estudantes matriculados, que é uma taxa significativa, e a distribuição da amostra pode ser vista na Tabela 2, a qual já considera o grupo de finalistas do curso de acordo com o parágrafo anterior.

Como pode-se observar nos dados da Tabela 2, a distribuição proporcional da amostra se enquadrou na faixa proporcional pretendida. Por tal distribuição é fácil notar que não há grandes variações proporcionais entre os grupos amostrais, garantindo assim uma representatividade proporcional regular da amostra para cada período do curso, dando confiabilidade aos dados das análises do Capítulo 3.

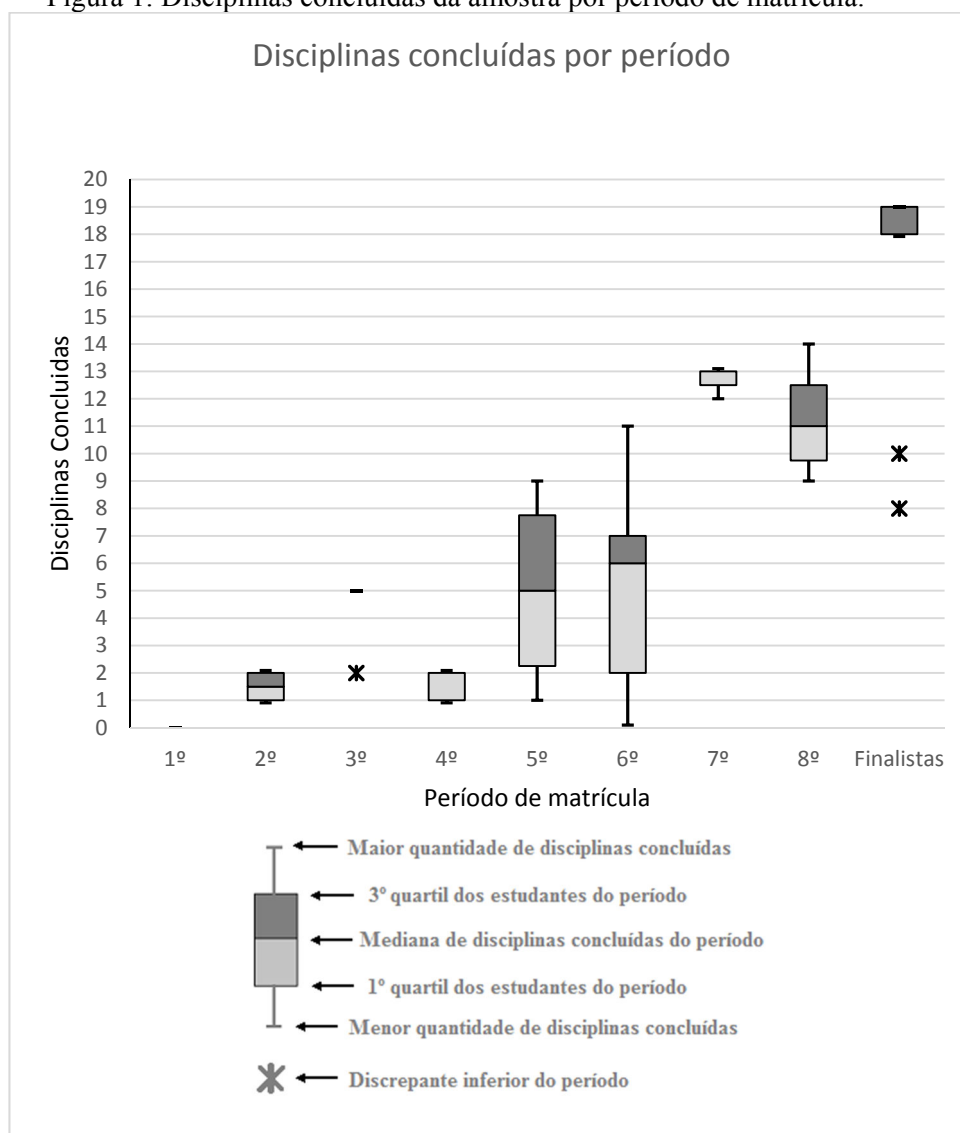
Tabela 2: Distribuição da amostra por período

Período	Estudantes matriculados	Participantes	Proporção
1º	23	10	43,48%
2º	14	6	42,86%
3º	17	7	41,18%
4º	12	5	41,67%
5º	14	6	42,86%
6º	11	5	45,45%
7º	7	3	42,86%
8º	9	4	44,44%
Finalistas	22	9	40,91%
Total	129	55	42,64%

Fonte: Dados obtidos com o Questionário Situacional do Estudante

O período de matrícula do estudante não foi a única variável considerada no estudo. Foi também verificado, para cada período dentro da amostra, a quantidade média de disciplinas cursadas pelos estudantes, isto foi feito pelo fato de haver estudantes em determinados períodos que cursaram mais disciplinas do que outros estudantes matriculados no mesmo período, esta verificação não considerou a carga horária de cada disciplina mas apenas o fato do sujeito ter ou não concluído as disciplinas do Núcleo de Formação Específica. Os dados obtidos podem ser vistos na Figura 1.

Figura 1: Disciplinas concluídas da amostra por período de matrícula.



Fonte: Dados obtidos com Questionário Situacional do Estudante

Na Figura 1, os participantes do 1º período ainda não tinham concluído nenhuma disciplina do curso e, desta forma, a influência do curso nos conceitos numéricos que estes estudantes possuem é mínima, assim eles podem ser considerados como amostra de referência o que concorda com Moreira (2004):

[...] pode-se considerar que as respostas dos iniciantes expressam parte das visões e dos saberes que os alunos trazem da escola básica, a respeito das questões apresentadas no questionário. Do mesmo modo, as respostas dos formandos expressam as visões e os saberes com que eles voltarão à escola, como docentes, depois de vivenciar o processo de formação profissional na Licenciatura. (MOREIRA, 2004, p. 140)

Já os participantes do 2º período estão distribuídos em quantidades iguais dentro da média

de 1,5 disciplinas concluídas. Destacam-se: o 3º período, onde um estudante concluiu apenas duas disciplinas e os outros seis estudantes concluíram cinco disciplinas; o 6º período onde um participante concluiu 11 disciplinas, um concluiu sete disciplinas e três participantes estão abaixo da mediana de seis disciplinas concluídas, sendo que um deles não concluiu qualquer disciplina cursada; e o grupo dos Finalistas onde, dentre os nove estudantes, sete concluíram 18 ou 19 disciplinas e dois concluíram oito ou dez das 20 disciplinas do Núcleo de Formação Específica.

2.3 O teste

Nesse momento serão apresentadas as questões do teste aplicado, bem como a solução esperada, os objetivos de evidenciação de respostas em consonância com referenciais teóricos das competências numéricas, de Contreras et al (2012), com os aspectos sobre o conhecimento matemático, de Even (1990), constantes, respectivamente, nos Quadros 1 e 2 do Capítulo 1 do presente trabalho e, também, com os estudos de Ball (1988).

2.3.1 Questão 1 – Indeterminação em potenciação.

Questão 1

Durante uma aula sobre potenciação, um professor do ensino fundamental fez as seguintes afirmações:

I- Todo número elevado a zero é igual a um, por exemplo: $3^0 = 1$, $8^0 = 1$ ou $1000^0 = 1$

II- Todo número elevado a um é igual a ele próprio, por exemplo: $2^1 = 2$, $5^1 = 5$ ou $1000^1 = 1000$.

III- Zero elevado a qualquer número é igual a zero, por exemplo: $0^2 = 0$, $0^5 = 0$ ou $0^{100} = 0$.

(a) Você já ouviu ou utilizou alguma dessas regras? Caso afirmativo, qual?

(b) Você explicaria de outra maneira as afirmações efetuadas pelo professor? Caso afirmativo, justifique.

Nesta questão pretende-se verificar, principalmente, o aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* na verificação da validade das afirmações revelando assim que as afirmações *I* e *III* são falsas e que apenas a afirmação *II* é verdadeira. Almeja-se observar também, sob o aspecto do *repertório básico*, se as justificativas utilizadas estão fundamentadas em princípios importantes, propriedades ou teoremas. Além disso, verificar se foram adotadas *formas alternativas de abordagem* do assunto de potenciação. Espera-se ainda que o caso da

indeterminação, “zero elevado a zero”, seja manifestado nas respostas ao item (b) e que, uma vez confrontadas, as afirmações *I* e *III* produzem resultados diferentes. O objetivo dessa questão é detectar a presença de algum obstáculo epistemológico na resposta dada, na concepção em que muitos dos estudantes confiam nas regras pela força do hábito, por utilizá-las mecânica e repetidamente sem refletirem sobre as mesmas.

2.3.2 Questão 2 – Divisão por zero

Questão 2

Suponha que um estudante lhe pergunte “O que significa a operação 7 dividido por 0?”. Como você o responderia?

No presente trabalho, tal questão foi ligeiramente adaptada da dissertação de doutorado de Deborah Ball, *Knowledge and Reasoning in Mathematical Pedagogy: Examining What Prospective Teachers Bring to Teacher Education* (BALL, 1988), que tinha por objetivo verificar a aprendizagem de quatro objetos matemáticos importantes, quais sejam, o conceito do número zero; o algoritmo da divisão euclidiana; o conceito de infinito e o que se entende por “indefinido”.

A resposta correta esperada é que o estudante afirme que a divisão proposta não é possível de ser realizada e justifique, matematicamente, com o algoritmo euclidiano da divisão e, além disso, forneça elementos, do seu *repertório básico*, que ilustrem a impossibilidade da divisão, seja com exemplos concretos ou com contraexemplos numéricos.

Dentro das respostas incorretas esperadas estão as respostas que assumem que o resultado da divisão é zero, ou as que dizem que o resultado é sete. Respostas que sejam confusas ou incompletas também podem ser consideradas com respostas incorretas.

O depoimento a seguir, de dois professores pesquisados pela autora, põe em evidência que o que eles “pensam” que sabem sobre a divisão por zero (portanto, o que eles ensinam aos seus alunos) está totalmente em desacordo com o que preza o algoritmo da divisão de Euclides estudado na disciplinas iniciais de Álgebra no que diz respeito à existência e à unicidade do quociente e do resto de uma divisão:

Tim, um professor de matemática, escolheu a primeira abordagem. Ele disse que iria escrever $7 \div 0$ "em forma matemática" na lousa - ou seja, com o traço de divisão: $7 \underline{)0}$. Então ele iria explicar que:
 “você não pode dividir 7 por 0 porque não há nada que multiplicado por 0

obtem-se 7. Em outras palavras, tudo multiplicado por um 0 é 0, mas nós temos 7 por 0. Tudo bem se tivéssemos 0 dividido por 7. Mas aqui não há nenhum número que pode colocar-se no quociente para obter 7. E eu gostaria de mostrar-lhes que: Considerando 6 dividido por 2 há um número que você pode colocar no quociente. E sempre que você se deparar com esse caso [divisão por zero], você não pode encontrar um número para colocar no quociente, essa divisão não existe, você não pode fazê-la.”

Allen, professora primária, explicou a divisão por 0 usando uma segunda abordagem:

“Dividiria 7 por 3 e, em seguida, dividiria 7 por 2 e, em seguida, dividir 7 por 1 e, quando chegar até 7 dividido por 1 igual a 7 você teria que ir um pouco mais longe, você teria números que ficam cada vez maior e maior... Um passo adiante você teria que, você sabe, dizer dividir por 0, porque estará dividindo por casas decimais ou frações desse tipo... Então você começa, eu acho que seria melhor para começar a ficar mais próximo de zero usando os decimais e ver que dividindo 7 por frações produz números, você sabe, eles continuam ficando maiores e maiores e, se você continuar fazendo isso, o divisor cada vez mais perto de 0, o número só vai ficar maior e maior e maior e, eu perguntaria qual o maior número que eles podem pensar e então, que não existe esse maior número e que, não há realmente nenhuma solução para 7 dividido por 0.” (BALL, 1988, p. 73)

A autora comenta que das abordagens encontradas, duas são representadas nessas respostas onde, a primeira resposta é um tipo de explicação que tende a caracterizar a divisão por zero como algo indefinido e que, a segunda resposta tende a mostrar que, quando o divisor diminui até o zero, o quociente “explode”.

2.3.3 Questão 3 – O conceito de potenciação

Questão 3

Em muitos livros didáticos o significado de expoente de um número é a quantidade de vezes em que a base aparece se repetindo na multiplicação por si própria. Por exemplo:

A potência a^n é igual ao produto de n fatores iguais a a . (IEZZI, 1984. p.68)¹

Por exemplo: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Considerando a definição dada, de que maneira você explicaria aos alunos do **ensino médio**:

- O que significa a potenciação $2^{3,1}$?
- O que significa 2^π ?
- Ao apresentar que $2^0 = 1$ o aluno questiona o professor: “Como que o 2 não se repete nenhuma vez e o resultado é igual a 1?” Como você explicaria?

O objetivo dessa questão é verificar como os futuros professores lidam com a operação de potenciação no âmbito do conjunto dos números inteiros e no conjunto dos números reais. No item a), procura-se verificar se o estudante irá aplicar a definição de potência, apresentada

em livros de matemática do 6º ano do ensino fundamental, no caso de uma potência cuja base é um número natural e o expoente é um número decimal exato 3,1. A resposta esperada é que eles transformem 3,1 em fração decimal e usem as propriedades de radicais estudadas no oitavo ano do ensino fundamental a saber: $2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}} = \sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{2} \cdot \sqrt[10]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[10]{2}$, onde a multiplicação da base $\sqrt[10]{2}$ possui 31 fatores iguais. Nesse tipo de questão, o intuito era de identificar o aspecto das *diferentes representações* de expoentes de números inteiros positivos, na conversão do decimal exato em fração, de fração em radical. Porém, além deste aspecto, há intenção de verificar também o aspecto das *características essenciais*, onde se espera que o estudante, ao visualizar o expoente decimal exato mencione que é um número racional ou uma fração decimal e, dessa forma, fique evidente a sua ligação mental entre a forma decimal e o conceito de número racional. Esse aspecto, também está evocado no item b), cujo expoente agora é o número π que, por ser um número irracional, não pode ser escrito sob a forma de fração com numerador e denominador inteiros e que, por isso, não é possível aplicar diretamente o mesmo processo do item anterior.

Outro aspecto é sobre as *formas alternativas de abordagem* onde se espera que o estudante afirme que, mesmo não sendo possível escrever o número π sob a forma decimal exata ou sob a forma de fração ordinária, é possível estimar uma aproximação para ele e, consequentemente, uma aproximação para a potência irracional em questão.

No item c), além das *formas diferentes de abordagem* para explicar a potência de expoente nulo, é investigado também o aspecto do *entendimento e compreensão do conceito* de potenciação por meio das ligações que o estudante fará do conceito em apreço, usando-se da propriedade da divisão de potências com bases (reais não nulas) iguais, estudada nos anos iniciais do ensino fundamental II, ou seja $2^0 = 1$, pois $\frac{2^n}{2^n} = 1$ (repete-se a base e subtraem-se os expoentes). No entanto, se faz importante ressaltar que essa última concepção também é errônea, uma vez que, algebricamente falando, a definição correta da potenciação de um número real (não nulo) a constitui-se nos seguintes termos: $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ com n fatores de a para n inteiro, $n > 1$; $a^0 = 1$ para $n = 0$ e $a^1 = a$ para $n = 1$. Assim, as duas últimas expressões não são propriedades, e sim componentes da definição da operação potenciação. A questão instiga a investigação das soluções apresentadas, se há a manifestação de obstáculos epistemológicos nas generalizações inadequadas ou na imprecisão conceitual das tentativas de demonstrações de propriedades.

2.3.4 Questão 4 – Diferentes representações numéricas

Questão 4

Para responder as questões abaixo, considere suas respostas destinadas a alunos da educação básica:

- (a) O que é fração para você?
- (b) O que é dízima periódica?
- (c) Obtenha a fração geratriz da dízima periódica $32,7999\dots$
- (d) Se você encontrou a fração, tente agora realizar a divisão do numerador pelo denominador e encontrar o número dado. Você conseguiu? Explique como você fez.

De maneira geral, as respostas à esta questão serão analisadas sob os aspectos das *diferentes representações* dos números racionais, do *repertório básico* e das *características essenciais* referentes a imagem do conceito de número. Será verificado também o *entendimento e a compreensão do conceito* de números racionais e sua ligação com a operação de divisão.

A resposta esperada no item (a) é que seja afirmada explicitamente que fração (ordinária) é um número, que pode ser obtido pelo quociente de dois números inteiros representados sob a forma de numerador e denominador, onde o denominador nunca é o zero, e este número pertencente ao conjunto dos números racionais. Espera-se também que a resposta revele algumas das quatro interpretações indicadas por Fonseca (2008):

A fração como razão expressa uma relação entre duas quantidades. Como quociente, o número racional indica uma divisão em que o numerador representa o dividendo e o denominador representa o divisor. Como operador, é dada uma interpretação de multiplicador-divisor ao número racional. Finalmente, a fração como medida, seria considerar os pedaços (metade, um quarto, etc.) na reta numérica, melhor dizendo, a localização das diferentes frações na reta numérica. (FONSECA, 2008, p. 36)

Porém, a interpretação de fração como pedaços pode produzir também respostas incorretas como a indicada por Ripoll (2011, p. 20): “o conceito de fração (tomar a unidade, dividi-la em partes iguais e tomar algumas destas partes)”, tal resposta é classificada pela própria autora como um “pecado matemático” pois este tipo de conceito desconsidera as frações impróprias.

No item (b), espera-se que a dízima periódica seja definida como um número com infinitas casas decimais nem todas nulas, tais que num certo momento uma (ou mais) delas se repetem infinitamente ou, generalizando, é um número sob a forma de uma soma de frações decimais ilimitadas, ou ainda, que é o resultado da divisão do numerador pelo denominador de uma fração geratriz. Outras respostas podem aparecer, segundo concepções imprecisas ou

errôneas, do tipo, “são números decimais infinitos”, “são números de valor incontável”, “são números com intermináveis algarismos”.

Os itens (c) e (d) pretendem observar se o aspecto de *relevância do conceito* é utilizado, onde a representação periódica apresentada (32,7999...) não é mais importante do que a sua representação equivalente (32,8) porém espera-se que seja ressaltada a validade do formato numérico apresentado, ou seja, que os procedimentos algébricos ou algorítmicos empregados para encontrar a fração geratriz os leve a concluir a igualdade $32,8 = 32,7999 \dots$, e ao mesmo tempo aceitar que a notação sob a forma periódica apresentada (32,7999...) também é válida.

2.3.5 Questão 5 – Raízes de uma equação

Questão 5

Quantas raízes possui a equação $2^x = x^2$? Quais são? Essas raízes são racionais ou irracionais?

As equações têm relação direta com o conceito de número pois a questão fundamental torna-se encontrar um número que satisfaça a equação, por exemplo “uma equação como $x^2 - x - 2 = 0$ é mais apropriadamente vista como uma condição a que deve satisfazer o número x ” (LIMA et al, 2006, p. 8).

De acordo com Gimenez e Burin (2011, p. 40), resolver uma equação é determinar todos os valores de x (incógnita) que satisfazem a igualdade, e estes valores, ou números, são chamados de raízes da equação.

Dentro das respostas corretas esperadas a essa questão, há duas raízes evidentes que são os números $x = 2$ e $x = 4$. Para encontrar a terceira raiz é possível utilizar o conhecimento de funções para fazer o esboço de um gráfico de duas funções reais, uma definida por $f(x) = 2^x$ e a outra por $g(x) = x^2$, e verificar na interseção das duas curvas gráficas que existe um outro número negativo para o qual as imagens das duas funções são iguais. Segundo Lima (1991, p. 177), o referido número, além de ser irracional, é considerado como um número transcendente, ou seja, não pode ser obtido por métodos puramente algébricos e sua aproximação com dez algarismos decimais exatos é $x = -0,7666646959$. Apesar de não ser tão fácil encontrar o valor com tal precisão, é possível inferir, por métodos numéricos, que ele encontra-se no intervalo real entre -1 e 0 .

Desta forma, nas respostas a esta questão será analisado se o *repertório básico* evidenciado privilegia os procedimentos algébricos em detrimento dos princípios ou das

propriedades das duas funções envolvidas.

A classificação das raízes em racionais ou irracionais é um fator preponderante nesta questão pois trará pistas do aspecto do *entendimento e compreensão do conceito* de números reais que o estudante possui. Deste modo, um tipo de resposta incorreta a essa questão é afirmar, a partir dos valores $x = 2$ e $x = 4$, que as raízes da equação são racionais pois, como dito anteriormente, há uma raiz irracional.

Espera-se que o recurso gráfico de interseção das curvas seja utilizado além da simples manipulação algébrica. É possível também que o aspecto das *formas alternativas de abordagem* seja detectado onde o estudante pode utilizar-se, além do método gráfico, os métodos de estimativa numérica para definir o intervalo real que contém a raiz irracional.

2.3.6 Questão 6 – Soluções reais e complexas e simplificação por zero

Questão 6

Ao elaborar um problema, o professor pensou num número que multiplicado por ele mesmo cinco vezes é igual a ele próprio e criou a seguinte equação:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$$

Qual a resposta da equação dada? Se você resolveu algebricamente, explique os passos utilizados na resolução. Se possível, utilize mais de uma resolução para facilitar o entendimento caso seja necessário explicar a um aluno do ensino médio.

Esta questão foi inserida no teste almejando evidenciar o aspecto das *formas alternativas de abordagem*, na escolha da abordagem mais apropriada para a situação apresentada, de modo que seja obtida como resposta correta o conjunto solução da equação, que é $S = \{0, \pm 1, \pm i\}$.

Um tipo de resposta incorreta é aquela que fornece apenas um ou dois dos cinco números que compõem o conjunto solução da equação como, por exemplo, dizer que apenas $a = 0$ ou $a = 1$ são raízes da equação. Este tipo de resposta incorreta está associada a competência III (Calcular com fluidez e fazer estimativas razoáveis para o cálculo mental e escrito, tanto com números naturais, como com inteiros ou racionais) de Contreras et al (2012), pois é possível que o estudante forneça este tipo de resposta incompleta tendo como base duas regras ensinadas na Educação Básica (*zero vezes zero é igual a zero ou um vezes um é igual a um*).

Um outro objetivo foi averiguar se manifestaria um tipo de resposta incorreta ligada às manipulações algébricas imprecisas que provocam a simplificação por zero eliminando assim

uma das raízes da questão, por exemplo, se o estudante fizer a simplificação, dividindo ambos os membros da igualdade por a , fazendo $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a \Rightarrow a \cdot a \cdot a \cdot a = 1$, nesse procedimento ele não irá encontrar a raiz $a = 0$.

2.3.7 Questão 7 – Raízes estranhas

Questão 7

Resolva a equação $\sqrt{x} + 2 = x$

Como você explica as raízes obtidas nesta equação?

A resposta correta a essa equação é o conjunto solução $S = \{4\}$ porém, a questão solicita que o estudante explique as raízes no intuito de evidenciar os procedimentos que ele utilizou para obter a resposta e, assim, manifestar a competência II (Compreender os significados das operações e como se relacionam umas com as outras) de Contreras et al (2012).

Isso foi feito pois, segundo Lima et al (2006, p. 10), algumas etapas do processo adotado na resolução de equações irracionais, como a apresentada, podem produzir números que não são válidos para a equação. Isso geralmente é consequência do uso de técnicas algébricas irrestritas, onde nem sempre é observada a validade da operação sobre o tipo de número envolvido. Um exemplo disso é o seguinte método de resolução:

$$\sqrt{x} + 2 = x \Rightarrow \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Neste caso, número $x = 1$ é um tipo de resposta incorreta pois não satisfaz a equação. Isso ocorre pois a igualdade $\sqrt{x} = x - 2$ não tem validade para $x \leq 2$, mas a passagem da terceira para a quarta igualdade não considerou essa restrição e acabou inserindo uma raiz estranha na solução da equação. Cabe ressaltar que as implicações acima estão corretas pois, se um número é raiz da equação dada esse número é 1 ou 4, porém isso não garante que os ambos sejam raízes da equação.

A partir dessas considerações, deseja-se verificar se o aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* estará presente quando o estudante verificar a validade das soluções encontradas. Além disso, pretende-se verificar também o *entendimento e a compreensão* da definição de valor absoluto que é, segundo Lima et al (2006, p. 73), $(\sqrt{x})^2 = |x|$, que é algo a ser observado quando se eleva ao quadrado os membros da terceira igualdade na resolução anteriormente apresentada.

2.3.8 Questão 8 – Racionalização

Questão 8

Na escola, ao terminar um problema envolvendo radicais, geralmente somos instados a racionalizar o denominador do resultado obtido. Por que isso?

Adaptada da obra *A Matemática do Ensino Médio* (LIMA et al, 2007, p. 18) uma resposta correta esperada é a que mencione as implicações de operar a divisão manualmente nas duas formas, a racionalizada e a não racionalizada pois, segundo os próprios autores

quando se deve efetuar uma divisão cujo dividendo é irracional, usa-se um valor aproximado do denominador. Se quisermos obter um grau de aproximação maior para o quociente, toma-se uma aproximação melhor para esse denominador e é-se obrigado a refazer a operação desde o início. Se, entretanto, a irracionalidade estiver no numerador apenas, basta prolongar a divisão acrescentando mais algarismos decimais no dividendo, sem precisar recomeçar tudo de novo. Compare, por exemplo, as operações $1/\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/2$. Evidentemente, estamos falando de operações efetuadas manualmente. No caso de cálculo eletrônico, não há quase diferença alguma. (LIMA et al, 2007, p. 20)

Uma das possibilidades de resposta incorreta é a que afirme que a racionalização é uma regra que deve ser sempre utilizada quando o denominador é um número irracional pois “não se pode deixar um radical no denominador”. Esse tipo de resposta não considera que as duas formas representam o mesmo número e, nesse caso, está associada a uma má formação da competência I (compreensão dos números em suas diferentes representações) de Contreras et al (2012), que também está associada ao aspecto das *diferentes representações* de Even (1990).

Porém, espera-se também que o estudante deixe a resposta em branco por não se lembrar dos conhecimentos estudados no ensino fundamental.

2.3.9 Questão 9 – Valor absoluto

Questão 9

Resolva e interprete geometricamente a seguinte inequação:

$$|x + 1| < 2$$

A resposta correta esperada nessa questão é $-3 < x < 1$ e, uma possível interpretação geométrica é que, a distância entre um número x e o número -1 na reta real deve ser menor do

que duas unidades e, portanto, esse número está compreendido no segmento que representa o intervalo real aberto $(-3, 1)$.

Um tipo de resposta incorreta é a que desconsidera o módulo envolvido na equação e, desta maneira, é resolvida apenas uma equação do tipo $x + 1 < 2$ obtendo como resposta apenas $x < 1$. Este tipo de erro, segundo o aspecto das *características essenciais* de Even (1990), evidencia que a imagem conceitual de valor absoluto de um número pode não estar presente ou bem consolidada pois não se considera a definição de módulo que, conforme Lima et al (2006, p. 72) é $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e que, “nas questões que envolvem valor absoluto é-se, em princípio, obrigado a fazer as inevitáveis ‘considerações de caso’, analisando separadamente as situações conforme o sinal da expressão que ocorre no interior da barras verticais | |.” (LIMA et al, 2006, p. 72-73)

2.3.10 Questão 10 – Produto de dois negativos

Questão 10

Por que $(-1)(-1) = 1$?

Esta questão gera certa polêmica, pois envolve o conceito de simétrico ou inverso aditivo de um número uma vez que, no curso inicial de Álgebra e de Álgebra Linear da graduação em matemática, são estudadas, respectivamente nessas disciplinas, as propriedades de anéis e de espaços vetoriais, em que, se numa multiplicação de dois fatores não nulos um dos fatores for (-1) o produto será igual ao simétrico do outro fator; nesse caso específico, $(-1)(-1) = -(-1) = 1$, o que significa que o simétrico do simétrico de -1 é igual a 1 que é uma resposta correta esperada. No entanto, alguém dessa propriedade, as respostas incorretas podem ter como base os “artifícios didáticos” ou “regras básicas da troca de sinais”, no uso de mnemônicas¹ para recordar regras tais como a apresentada por LIMA (1991, p. 151) “O inimigo do meu inimigo é meu amigo, quer dizer, $(-)(-) = +$ ”.

Porém, há outras teorias matemáticas que explicam a questão do produto de dois sinais negativos levando-se em consideração a preservação da distributividade da multiplicação em relação à adição, conforme Lima (1991, p. 151) “De modo sucinto, podemos dizer que $(-1)(-1) = 1$ é uma consequência da lei distributiva da multiplicação em relação à adição”.

¹ Uma mnemônica bastante conhecida é utilizada para decorar a famosa identidade trigonométrica, $\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a)\text{cos}(b) + \text{sen}(b)\text{cos}(a)$, é: “minha terra tem palmeira onde canta o sabiá, sen a cos b mais sen b cos a.”

Da mesma maneira, Moretti afirma que:

A regra usual dos sinais para a multiplicação, só muito mais tarde, em 1867, foi demonstrada por Hankel como sendo a única das regras possíveis, aquela que preserva as distributividades à esquerda e à direita. Hoje, do ponto de vista estritamente matemático, este resultado não causa nenhuma dificuldade ou estranheza. No entanto, resta ainda a questão didático-pedagógica do seu uso e explicação. (MORETTI, 2012, p. 693)

A regra dos sinais abordada na questão em apreço não tem só a dimensão da verificação do aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* quando se trata do papel desta regra em manter válida a lei da distributividade da multiplicação em relação à adição, mas também do aspecto das *diferentes formas de abordagem* do assunto onde o rigor formal da matemática talvez não seja suficiente para apreender a propriedade, mesmo que de forma abstrata, o assunto tenha sido ministrado nas disciplinas Álgebra e Álgebra Linear, neste caso, o estudante tende a recorrer aos artifícios didáticos como, por exemplo, as analogias presentes nas mnemônicas.

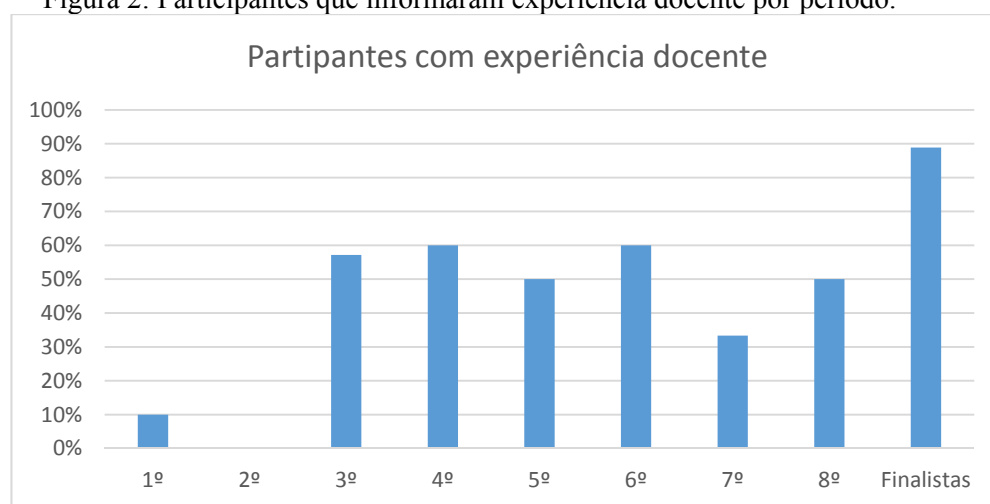
CAPÍTULO 3 - ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesse momento serão apresentadas, nessa ordem: os resultados obtidos com o Questionário Situacional do Estudante; uma análise das questões do Teste aplicado aos estudantes pesquisados no que concerne às respostas esperadas corretas e incorretas, consoante os pressupostos teóricos do Capítulo 1 bem como uma análise das soluções desenvolvidas em cada uma das dez questões do teste aplicado.

Através do Questionário Situacional do Estudante constatou-se que a maioria (94,55%) dos 55 participantes cursou a Educação Básica em escolas públicas, sendo que apenas um estudante afirmou ter cursado totalmente em escola particular e três estudantes cursaram parte em escolas particulares e parte em escolas públicas.

Além da experiência como estudantes, 45,45% dos 55 participantes informaram possuir alguma experiência docente, seja ministrando aulas particulares para alunos desde o ensino fundamental até o ensino superior, seja como regentes de escolas do ensino fundamental e médio. As informações dos participantes que possuem alguma experiência docente estão apresentadas na Figura 2.

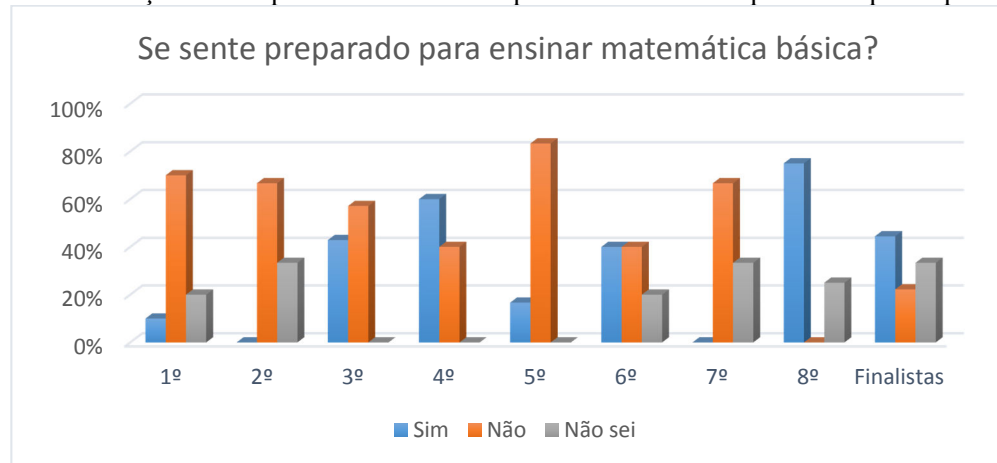
Figura 2: Participantes que informaram experiência docente por período.



Fonte: Dados obtidos com Questionário Situacional do Estudante

Quando questionados se estavam preparados para ensinar matemática básica para alunos da educação básica, 28 participantes (51%) disseram que não se sentiam preparados, 10 (18%) afirmaram não saber se estão ou não preparados e apenas 17 (31%) presumiam estar preparados. Uma distribuição das respostas por período se encontra na Figura 3:

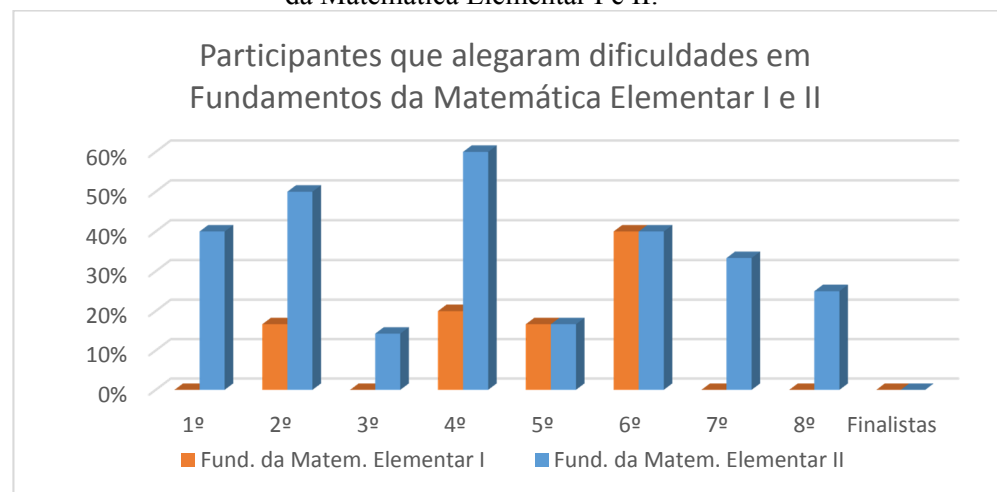
Figura 3: Distribuição das respostas ao item 7 do questionário sobre o perfil dos participantes



Fonte: Dados obtidos com Questionário Situacional do Estudante

Houve também informações, por parte dos participantes, sobre as disciplinas nas quais eles alegaram ter maiores dificuldades no curso e, dentre outras disciplinas informadas, estavam as disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar I ou II, sendo que esta segunda disciplina foi a responsável pelo maior índice registrado (aproximadamente 29% dos participantes). Todos os estudantes deste último índice eram dos oito primeiros períodos do curso, sendo que a maior concentração proporcional dos índices desta disciplina ocorreu no 4º período (60% dos participantes matriculados no 4º período). No entanto, nenhum dos Finalistas registrou dificuldades com essas disciplinas, talvez pelo fato de que os conteúdos de Álgebra I, Álgebra II e Análise I, por serem mais complexos, se destacam em relação aos conteúdos das demais disciplinas, conforme a Figura 4.

Figura 4: Proporção de participantes que informaram ter dificuldades nas disciplinas de Fundamentos da Matemática Elementar I e II.

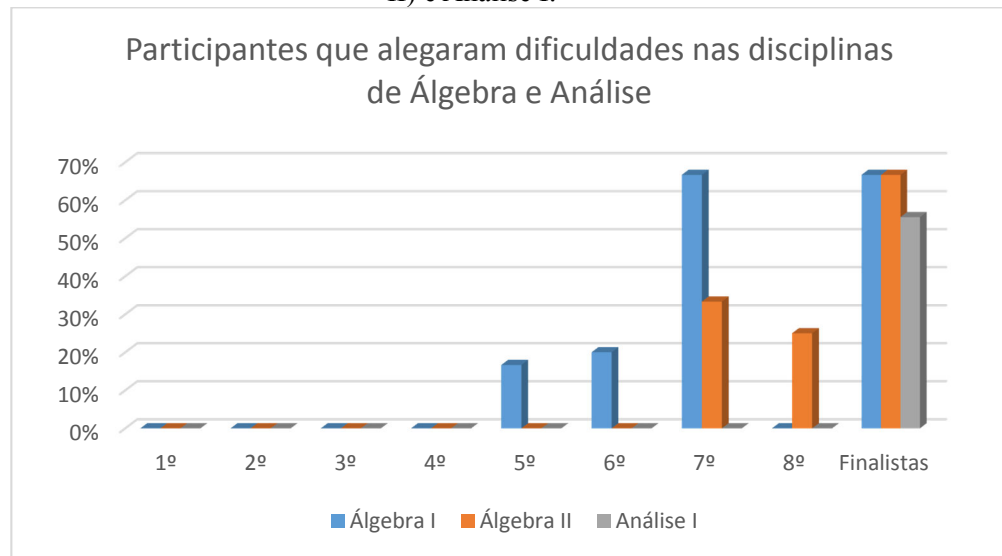


Fonte: Dados obtidos com Questionário Situacional do Estudante

Já as disciplinas de Álgebra (I e II) apareceram entre as respostas de maior dificuldade

para os participantes do 5º período em diante, e de Análise I somente entre os participantes do grupo Finalistas, devido ao fato que esta disciplina é ofertada somente no 8º período. Ressalta-se que, embora 50% dos participantes 8º período tenham concluído Álgebra I, nenhum deles registrou que tinha dificuldades com essa disciplina, porém, mais da metade dos participantes do 7º período e dos Finalistas manifestaram ter dificuldades nela. As dificuldades apresentadas em relação às disciplinas Álgebras (I e II) e Análise I estão expressas na Figura 5:

Figura 5: Proporção de participantes que informaram ter dificuldades nas disciplinas de Álgebra (I e II) e Análise I.



Fonte: Dados obtidos com Questionário Situacional do Estudante

Uma vez realizado o delineamento do perfil dos participantes da pesquisa dentro do contexto do curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM, pode-se analisar os resultados obtidos com o Teste aplicado aos estudantes.

Antes de apresentar as análises dos dados obtidos com o Teste, é necessário descrever as estratégias empregadas na classificação das soluções apresentadas pelos estudantes. Inicialmente, as respostas foram classificadas em três classes denominadas: *satisfatórias*; *não satisfatórias* e *não soube*. O resultado dessa classificação está apresentado na Tabela 3. Tal estratégia tem o intuito de fornecer uma visão geral sobre o desempenho dos estudantes de diferentes semestres pois pressupõe-se que o desempenho dos estudantes dos últimos semestres seria melhor dos que estão nos semestres iniciais. No entanto, Moreira (2004, p. 142) afirma que “É claro que uma classificação desse tipo está inevitavelmente impregnada das concepções do investigador” e, portanto, esse tipo de classificação não pode ser feita sem os devidos cuidados.

Então, para que fiquem claros os parâmetros utilizados na classificação, é oportuno

informar que, no presente trabalho, a classificação das respostas *não satisfatórias* se deu por razões de ordem técnica ou imprecisão matemática (como, por exemplo, considerar indiscriminadamente $\pi = 3,14$) e, também, pela ausência da resolução da questão ou da explicação pedagógica insuficiente.

Ao apresentar a classificação, a análise das respostas dos estudantes serão comentadas com maiores detalhes no diz respeito às respostas *não satisfatórias* que estarão distribuídas em categorias, bem como os argumentos das respostas consideradas *satisfatórias* que também serão explicitados.

Como a intenção foi evidenciar as deficiências conceituais sobre números e operações encontradas na formação dos estudantes pesquisados, para a eficiência da análise, buscou-se verificar a persistência dessas lacunas juntos aos estudantes de variados semestres do curso.

De um modo geral, o desempenho dos participantes em todo o teste pode ser visto na Tabela 3 a seguir, onde a proporção das respostas *satisfatórias*, *não satisfatórias* e dos que não souberam responder estão relacionadas por período de matrícula. Deixa-se claro que as respostas consideradas previamente como *não soube* se referem às questões deixadas em branco ou às respostas evasivas do tipo *não sei*, *não me lembro*, *Boa pergunta!* ou simplesmente a transcrição de parte do enunciado sem qualquer resolução plausível.

Tabela 3: Classificação geral das respostas por período

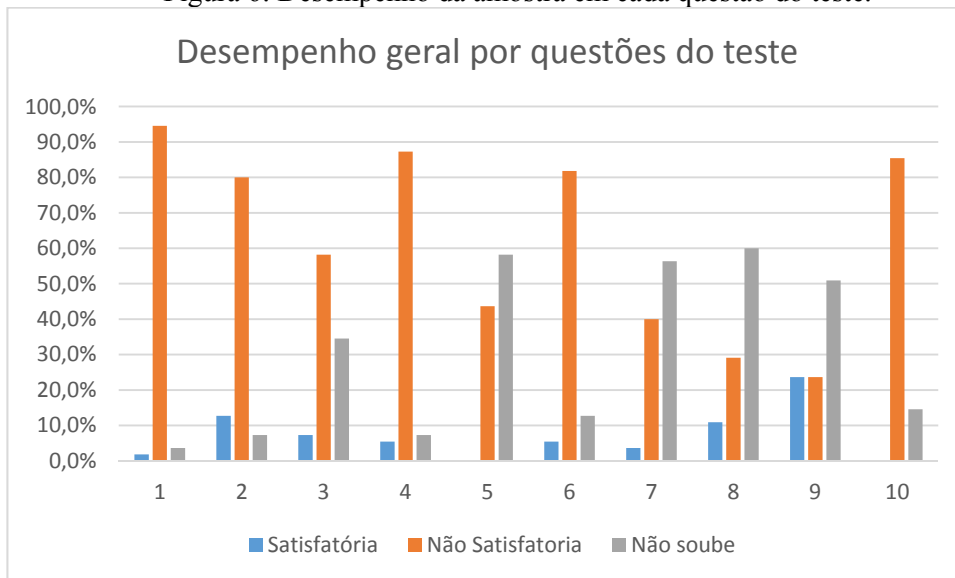
Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatórias	3,0%	3,3%	12,9%	0,0%	10,0%	0,0%	3,3%	12,5%	14,4%
Não Satisfatórias	62,0%	65,0%	68,6%	54,0%	66,7%	60,0%	56,7%	52,5%	65,6%
Não soube	35,0%	31,7%	18,6%	46,0%	23,3%	40,0%	40,0%	35,0%	20,0%

Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se perceber, a partir da Tabela 3, que o desempenho geral dos estudantes foi muito baixo nos conceitos de matemática básica abordados no teste, e isto indica que as deficiências conceituais manifestaram-se nos estudantes em todos os períodos. Tais fatos ratificam os resultados dos estudos de Ball (1998), Moreira (2004) e Even (2011) referenciados no Capítulo 1: os sujeitos pesquisados ainda apresentam várias dificuldades com a chamada matemática “simples” e a matemática escolar dos cursos das universidades ou faculdades de matemática não está bem estruturada para dar o suporte adequado à aquisição de conhecimentos matemáticos aos estudantes com visas à boa prática escolar na Educação Básica.

O desempenho geral por questões do teste também confirma a grande dificuldade que os estudantes tiveram com os assuntos abordados em cada questão, vide a Figura 6.

Figura 6: Desempenho da amostra em cada questão do teste.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 6 revela que as questões 5 e 10 são críticas, onde a quantidade de respostas satisfatórias foi nula, sendo que na Questão 5 o índice dos que não souberam responder foi um dos maiores. A Questão 5 tratava da classificação das raízes de uma equação transcendente e a Questão 10 indagava sobre a regra da multiplicação de sinais. Uma análise mais detalhada das respostas à estas questões será feita mais adiante.

Partindo destas primeiras observações, torna-se necessário aprofundar o diagnóstico da situação analisando questão por questão, o que é feito a seguir.

3.1 Questão 1 – Indeterminação em potenciação.

Questão 1

Durante uma aula sobre potenciação, um professor do ensino fundamental fez as seguintes afirmações:

I- Todo número elevado a zero é igual a um, por exemplo: $3^0 = 1$, $8^0 = 1$ ou $1000^0 = 1$

II- Todo número elevado a um é igual a ele próprio, por exemplo: $2^1 = 2$, $5^1 = 5$ ou $1000^1 = 1000$.

III- Zero elevado a qualquer número é igual a zero, por exemplo: $0^2 = 0$, $0^5 = 0$ ou $0^{100} = 0$.

(a) Você já ouviu ou utilizou alguma dessas regras? Caso afirmativo, qual?

(b) Você explicaria de outra maneira as afirmações efetuadas pelo professor? Caso afirmativo, justifique.

Das respostas obtidas no item (a), apenas 2 dos 55 participantes se pronunciaram que

não se lembravam de terem ouvido as afirmações desse tipo e os demais disseram ter ouvido ou utilizado as regras tais como lhes foram apresentadas. Isto evidencia que há um uso indiscriminado destas regras e que, mesmo estando as afirmações *I* e *III* matematicamente incorretas, elas são propagadas ou memorizadas pela maioria dos estudantes em algum momento da vida escolar. No que diz respeito à formação de professores, serão exibidos, respectivamente os pronunciamentos de dois estudantes do 4º e 7º períodos:

Exemplo 1

Sim, já ouvi de muitos professores, tanto de escolas públicas quanto do ensino superior a falar dessa maneira. (Estudante 7, 4º Período)

Exemplo 2

Sim, nas aulas de fundamentos 1, quando cursei o primeiro período. (Estudante 8, 7º Período)

Tais respostas constituem um fator relevante para se repensar determinadas posturas ou “vícios” metodológicos que, ao modo do ensino tradicional, privilegiam somente o uso da memória em detrimento da aprendizagem significativa de conceitos matemáticos. Segundo Cruz (2014, p. 27), tudo que ensinamos e experimentamos ao longo da nossa história é fruto do que fomos e nos tornamos.

Quanto à postura do professor, os PCN’s de Matemática apontam que o ensino e a aprendizagem da disciplina sejam consolidados no intuito de proporcionar uma instrução intelectual sólida àquele que aprende.

Na ótica de Chacón (2003), as atitudes ou a postura em relação à Matemática não são diretamente observadas, mas sim inferidas, a partir de uma conduta. Por exemplo, o professor que não gosta de Geometria, irá evitá-la, alegando *despreparo* para ministrar tal conteúdo. É provável que em sua prática ele tenha uma tendência a centralizar seu ensino aos conteúdos de Álgebra ou da Aritmética. Se, além disso, ele tiver um grande apreço pela Aritmética, suas atitudes matemáticas serão centradas no que se chama de *treinamento* que é a exploração de exercícios repetitivos que privilegiam a memorização em detrimento da dedução ou na resolução de problemas padrão. Neste caso, os problemas geométricos, os problemas de raciocínio lógico-dedutivo e/ou heurísticos serão evitados e assim se predispõe no estabelecimento da crença que *Só é bom em Matemática quem sabe fazer cálculos!*

Nesse sentido, a literatura aponta que essa metodologia é voltada para a criação “de calculistas” e que, pelos resultados obtidos no teste aqui aplicado, tais comportamentos estão arraigados nos estudantes pesquisados, mesmo entre aqueles que cursaram as disciplinas mais complexas como Álgebra I e II ou Análise I. As consequências disso são evidentes no exíguo

desempenho dos participantes nas respostas ao item (b) desta questão, conforme a Tabela 4.

Tabela 4: Classificação das respostas à Questão 1

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	11,1%
Não Satisfatória	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	83,3%	80,0%	100,0%	100,0%	88,9%
Não soube	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	20,0%	0,0%	0,0%	0,0%

Fonte: Dados da pesquisa.

Das respostas ao item (b), nenhum dos participantes confrontaram as afirmações I e III da questão de modo a manifestar o aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* de Even (1990), apesar de alguns revelarem parcialmente a competência numérica II (Compreender os significados das operações e como se relacionam umas com as outras) de Contreras et al. (2012). Isso pode ser visto nos três exemplos de resposta ao item (b), que questionava se o estudante explicaria de outra maneira as afirmações dadas, a seguir:

Exemplo 1

Sim. A I se caso a pessoa leve ao pé da letra ele poderá afirmar que $0^0 = 1$ o que é um absurdo, então eu diria que um número elevado a 0 que seja diferente de 0 é igual a 1. (Estudante 2, 1º Período)

Exemplo 2

Sim, a afirmativa I diz que todo número elevado a 0 é 1. Na verdade é: Todo número elevado a zero exeto [SIC] o próprio zero, é igual a um, pois 0^0 não existe. (Estudante 5, 3º Período)

Exemplo 3

Sim, na primeira eu diria que nem todo número elevado a zero é um. Pois zero elevado a zero não é um. (Estudante 6, 3º Período)

Estes exemplos revelam que, mesmo intuitivamente, os referidos estudantes conseguiram detectar alguma discrepância ao seguirem o mesmo procedimento em todos os itens da questão, porém foram consideradas como *não satisfatórios* pois eles não conseguiram concluir que essa é uma indeterminação (e até negam a sua existência) e não manifestaram nada em relação à afirmação III, talvez por julgá-la correta ou simplesmente por falta de atenção. Apenas um único estudante, dos Finalistas, utilizou-se do termo indeterminação para responder ao item (b), o qual foi considerado como *satisfatório* mesmo ele não tendo confrontado as duas afirmações conflitantes ou não dado maiores detalhes, conforme pode-se ler na transcrição: “Apenas uma observação: na III pois da forma que está escrita pode também ser usado 0^0 que é uma indeterminação.” (Estudante 13, Finalistas)

Em relação ao aspecto do *repertório básico* (EVEN, 1990) nenhum dos candidatos

demonstrou apresentar exemplos que ilustrem as regras em questão. Porém em relação ao aspecto das *formas alternativas de abordagem* (EVEN, 1990) pode-se dizer que apareceram duas tentativas incoerentes de demonstração entre os estudantes do grupo Finalistas.

Exemplo 1

A I explicaria utilizando regras de potência, ou seja, “divisão de dois números de mesma base conserva-se a base e subtrai-se os expoentes”

Ex: Seja $a, b \in R$, tal que $\frac{a^b}{a^b} = 1$, pois $a^{b-b} = a^0 = 1$ e um número dividido por ele mesmo é 1. Essa seria uma forma de justificar. (Estudante 12, Finalistas)

Exemplo 2

A I explicaria de forma diferente como já fiz uma vez para turma do 1º ano do E.M. Demonstraria através das regras de potenciação o porque de todo número elevado a zero é igual a um.

Ex: $a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n} = \frac{a^n}{a^n} = \left(\frac{a}{a}\right)^n = 1^n = 1$. (Estudante 14, Finalistas)

Em ambos os exemplos, os estudantes não restringiram a base $a \neq 0$ utilizada, tornando a alternativa de explicação dada pelo estudante tão incerta quanto a própria regra em questão, e isto foi o motivo de considerar estas respostas como *não satisfatórias*. Além disso, pode-se afirmar que a demonstração, como *forma alternativa de abordagem*, foi utilizada por estes estudantes do grupo Finalistas pelo fato deles pertencerem ao grupo com a maior concentração de concluintes das disciplinas Álgebra (I e II) e Análise I e, como discutido no Capítulo 2, estas disciplinas possuem o objetivo de aproximar o estudante das técnicas rigorosas de demonstração matemática, o que pode tê-los influenciado na elaboração das respostas.

Diante das descrições feitas até agora, é razoável admitir que o uso indistinto das regras apresentadas na questão ocasionam um entrave na percepção do caso de indeterminação em potenciação na maioria dos sujeitos pesquisados. Isto caracteriza um obstáculo epistemológico conforme a definição de Sierpinska (1992) e Bachelard (2006) citados no Capítulo 1. As respostas mais frequentes ao item (b) se assemelham, essencialmente, à resposta dada pelo Estudante 11 ao ser questionado se ele explicaria de outra maneira as afirmações da questão: “Não. Porque eu não saberia explicar [de outra maneira] pois a forma que eu aprendi foi exatamente igual de como o professor explica na situação acima.” (Estudante 11, Finalistas)

Além disso, fica caracterizada a situação descrita por Moreira (2004) onde o estudante, ao concluir o curso e se tornar professor de matemática, irá recorrer aos conhecimentos que ele obteve na sua própria Educação Básica como o principal repertório de ensino.

Tendo detectado algumas dificuldades dos estudantes com o caso da indeterminação 0^0 ,

que também pode ser associada com a divisão $\frac{0}{0}$, resta averiguar como os estudantes lidam com a divisão por zero. As respostas Questão 2 dão uma visão melhor acerca disso.

3.2 Questão 2 – Divisão por zero

Questão 2

Suponha que um estudante lhe pergunte “O que significa a operação 7 dividido por 0?”. Como você o responderia?

Nesta questão, pouco mais de 30% dos Finalistas conseguiram desenvolver uma argumentação satisfatória acerca da impossibilidade da divisão e um destaque dentro dos índices é a proporção de respostas *satisfatórias* dos estudantes do 3º período (28,6%) que superou até mesmo o índice de respostas *satisfatórias* dos estudantes do 8º período. Isto sugere que estes estudantes podem ter experimentado uma abordagem, em aula, diferente da maioria dos estudantes do curso, em relação ao conceito de divisão de dois números reais, mais especificamente sobre a divisão por zero. Para uma melhor compreensão desse cenário, vide a Tabela 5.

Tabela 5: Classificação das respostas dadas à Questão 2.

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	10,0%	0,0%	28,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	33,3%
Não Satisfatória	70,0%	83,3%	71,4%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	50,0%	66,7%
Não soube	20,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	0,0%

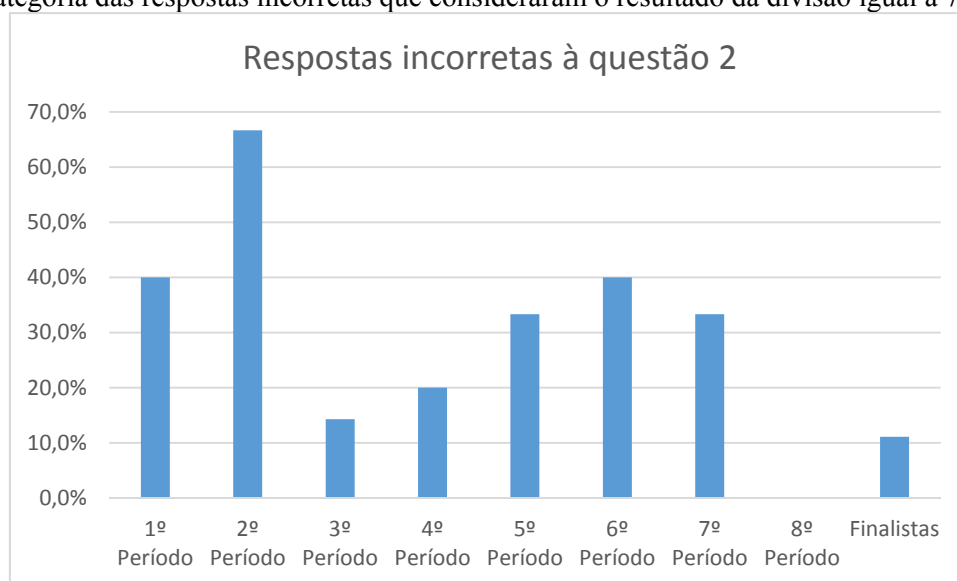
Fonte: Dados da pesquisa.

Vê-se na Tabela 5 que os estudantes do 2º e os do 4º ao 7º períodos não conseguiram elaborar sequer alguma resposta *satisfatória*. Porém, mais do que classificar as respostas como *satisfatórias* ou não, interessa analisar as justificativas, pois é por meio delas que pode-se inferir qual a imagem conceitual predominante em cada período.

Uma categoria muito comum foi a das respostas *incorretas*, onde os estudantes encontraram resultado numa divisão impossível afirmando que o resultado da divisão é igual a sete ou igual a zero. Estas respostas foram classificadas com *não satisfatórias* pelo critério da incoerência matemática. Em ordem decrescente, esta categoria predominou em mais de 66% dos estudantes do 2º período, seguido pelo 1º e 6º períodos com 40% cada um e, depois, pelo 5º e 7º períodos com 33% cada, tendo também o erro revelado-se entre os estudantes do grupo

Finalistas. Estes dados podem ser conferido na Figura 7.

Figura 7: Categoria das respostas incorretas que consideraram o resultado da divisão igual a 7 ou 0.



Fonte: Dados da pesquisa.

Descrevendo melhor os dados da Figura 7, aponta-se que há dois fatos que levaram estes estudantes a concluírem o resultado incorreto, um deles é a imagem conceitual que eles tem de divisão e também do zero como número, conforme os exemplos de respostas a seguir:

Exemplo 1

A operação funciona da seguinte maneira. Iremos pegar o número 7 e dividi-lo pelo número 0. O que resulta no próprio número 7, pois como o zero é nulo, ou seja, não representa um “valor”. Seria o mesmo que não dividir o sete. Ex: Se você tem 7 lápis e tem que dividir com 0 pessoas, ou seja, com ninguém, você ficará com os 7 lápis. (Estudante 34, 2º período, aspas no original)

Exemplo 2

Tentaria trazer essa pergunta para algum exemplo do cotidiano dele. Por exemplo, se pegássemos 7 como o número de laranjas e 0 como o número de pessoas. Então como dividir significa também repartir, diria a eles: se repartíssemos sete laranjas entre essas 0 pessoas (no caso não tem pessoas), quantas laranjas cada um ganharia? Como não há nenhuma pessoa então ninguém ganharia nada, ou seja, $\frac{7}{0} = 0$. (Estudante 11, Finalistas)

Considerando o primeiro fato, ou seja, a imagem conceitual do zero como número, observa-se, no Exemplo 1, que o Estudante 34 revelou não considerar o zero como um “valor” e isto ele fez tentando distingui-lo conceitualmente do número sete, outra situação é que ele incluiu o interlocutor na própria divisão dos sete lápis quando diz que “você ficará com os 7 lápis” e acabou realizando a operação sete dividido por um, ao invés da operação sete dividido

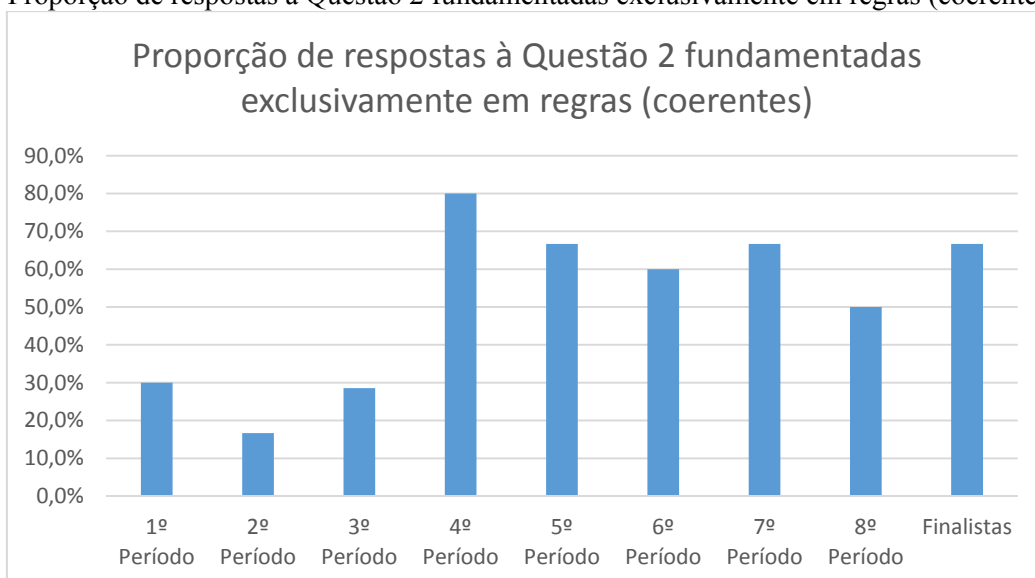
por zero solicitada na questão. Já no Exemplo 2, o Estudante 11 demonstrou considerar o zero como uma quantidade nula de pessoas e, ao mesmo tempo, utilizou-o para representar a impossibilidade da divisão quando argumenta “ninguém ganharia nada” e traduziu isso na igualdade (incorreta) da fração apresentada.

O outro fato é o apresentado por Ball (1988, p. 74) afirmando, em sua tese, que alguns candidatos a professores responderam a esta questão fundamentando-se em regras, de modo que as noções de explicações em matemática que eles tinham pareciam ser a de reafirmar regras, porém uma das regras invocadas por eles não é válida matematicamente (qualquer coisa dividida por zero é zero), e isto também foi constatado nalgumas respostas do presente trabalho como, por exemplo: “O porque todo número dividido por zero é zero.” (Estudante 25, 2º período)

Ball (1988, p. 76) afirma que estes participantes que utilizam regras como explicações matemáticas tendem a utilizar regras erradas porque não pensam no significado da operação pois, se o fizessem, eles controlariam a razoabilidade das suas respostas.

Pelo motivo exposto no parágrafo anterior, optou-se por considerar também como *não satisfatória* as respostas que se fundamentaram apenas em regras (mesmo que coerentes) sem explicá-las de outra maneira, enquadrando assim essas respostas no critério estabelecido como explicações pedagógicas insuficientes.

Figura 8: Proporção de respostas à Questão 2 fundamentadas exclusivamente em regras (coerentes).



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 8 mostra a grande quantidade de respostas, do 4º período em diante, que utilizaram-se apenas de regras (matematicamente coerentes com a Questão 2) para explicar a

divisão por zero. Algumas destas respostas são transcritas nos exemplos a seguir:

Exemplo 1

A operação não pode ser executada porque não podemos ter “0” (zero) no denominador. (Estudante 52, 4º período, aspas no original)

Exemplo 2

Não saberia responder com clareza, no mínimo diria que seria impossível dividir por zero. (Estudante 44, 5º período)

Exemplo 3

Que essa operação não existe, pois é impossível realizar uma divisão por zero. (Estudante 9, 8º período)

Exemplo 4

Sabemos que não existe divisão por “0” dentro do conjunto dos números reais. (Estudante 12, Finalista, aspas no original)

Tais respostas confirmam que, apesar de saberem que a divisão proposta não é possível, estes estudantes não conseguem ir além da simples regra que impossibilita tal divisão, nem estabelecer um critério matemático que justifique tal regra. Isto também é explicado por Ball (1988):

[..] a maioria dos candidatos a professores, sejam certos ou errados, focados no significado ou em regras, não parecem se referir ao conceito mais geral da divisão para fornecerem suas explicações. Em vez disso, reconheceram a divisão por zero como um caso particular para o qual existia uma regra. (BALL, 1988, p. 76)

Desta perspectiva, pode-se afirmar que estes estudantes dominam parcialmente a competência II do quadro teórico de Contreras et al. (2012), mais especificamente a descrição II.3 (Compreender e utilizar propriedades das operações). Quando se diz parcialmente, está se referindo ao fato deles utilizarem a condição de existência do quociente e resto da divisão euclidiana como uma propriedade da divisão, mas isso garante que ele compreende tal operação. Um exemplo disso é a resposta do Estudante 16: “Que não existe divisão por zero. É algo indeterminado.” (Estudante 16, Finalistas)

Nota-se que o Estudante 16 sabe da impossibilidade da divisão proposta, porém confundiu-se com outro tipo de divisão por zero que é a indeterminação. Porém houve também um estudante que soube distinguir o caso de impossibilidade da divisão do caso de indeterminação, mas como ele não explicou com maiores detalhes a distinção dos dois casos, a resposta também foi classificada como *não satisfatória* por insuficiência pedagógica da explicação, conforme pode ser lido: “Que é como se dividíssemos 7 balas para nenhuma pessoa, o que não teria como, e que não existem divisões em que o denominador fosse zero, a menos

que o numerador também fosse.” (Estudante 20, 5º período)

Apesar disso, foi verificado também que alguns estudantes do 1º, 3º, 8º períodos e do grupo Finalistas manifestaram o aspecto das *formas alternativas de abordagem* da questão e do *entendimento e compreensão do conceito* da Even (1990), como os exemplos a seguir:

Exemplo 1

A operação 7 dividido por 0 é impossível, pois você não pode dividir uma unidade por 0, uma divisão pertence aos números racionais e a fórmula deles é: Qualquer número racional dividido por qualquer número racional menos o zero. Outra forma de se dizer é que se você fizer a operação inversa você não obterá um resultado coerente, por exemplo, 10 dividido por 2 é 5 e cinco vezes 2 é 10, numa divisão por zero isso não é possível. (Estudante 23, 1º período)

Exemplo 2

Zero é o numeral que representa o nada. Não temos como dividir um número pelo nada. Exemplo: Sabemos que 7 dividido por 2 é 3,5, pois 3,5 vezes 2 é igual a sete. Porém esse processo não poderia se repetir com o 0, pois qualquer número vezes 0 é o próprio 0. Portanto, não dividimos nenhum número por 0. (Estudante 21, 3º período)

Exemplo 3

Suponhamos que $\frac{7}{0} = x$. Assim teremos que $7 = 0 \cdot x \Rightarrow 7 = 0$. Esta sentença não é verdadeira já que $7 \neq 0$. Assim ocorrerá quando tivermos 0 no denominador de uma divisão. (Estudante 22, 3º período)

Exemplo 4

1º Observaria qual o nível de escolaridade do aluno para, a partir daí, poder usar um método mais conveniente de como explicar tal questionamento.

- Se os alunos ainda estiverem na educação básica pode ser destacado o fato de que se temos um número a e queremos dividi-lo por b , então isso nos dará um certo c , podendo ter resto $d = 0$ ou diferente de zero. Assim, se caso $b = 0$ teríamos $a = b \cdot c + d \Rightarrow a = d$, porém se a for um valor diferente de zero teríamos algo contrariando, ou seja, $bc + d \neq a$ o que não é satisfatório. Assim, organizando as ideias aqui descritas, com mais clareza, mostraríamos para os alunos que não existe assim tal divisão por zero.

- Caso os alunos tenham noção de álgebra e o conceito de divisibilidade sabendo sobre a divisão euclidiana podemos demonstrar este resultado com mais clareza. (Estudante 17, 8º período)

Exemplo 5

Não existe divisão de um número por zero, pois considerando 7 como sendo o dividendo e 0 o divisor, é impossível encontrar um quociente tal que o produto do quociente pelo divisor seja igual ao dividendo que é 7. O aluno neste caso deve perceber que 12 é divisível por 3, pelo fato de que 3×4 é 12, 7 é divisível por 1 pelo fator de que 1×7 é igual a 7. Mas qualquer número multiplicado por zero sempre terá como resultado o zero. Logo na questão dada não é possível encontrar um número que ao ser multiplicado por zero terá como resultado 7. (Estudante 15, Finalistas)

Esses exemplos tornam nítido que os estudantes que elaboraram estas respostas consolidaram a competência numérica II de Contreras et al. (2012) e que possuem compreensão do algoritmo da divisão. Por este motivo, estas respostas foram consideradas *satisfatórias*.

Contudo, pela distribuição irregular destas respostas no rol de períodos pesquisados, não foi possível estabelecer uma associação dos conceitos abordados nas respostas com as disciplinas correlatas escolhidas por esta pesquisa, pois não houve concentração destas respostas em períodos comuns a uma mesma disciplina, apesar de que o Estudante 17 do Exemplo 4 já concluiu as disciplinas de Fundamentos de Matemática Elementar (I e II), Álgebra (I e II), estava cursando Análise I e, portanto, pode ter sido influenciado por isso. Porém houve estudantes que tinham concluído essas mesmas disciplinas e não fizeram abordagem semelhante nas respostas.

De uma maneira sucinta, o que foi depreendido das respostas desta questão é que os estudantes aceitaram ser suficiente o saber inicial de que uma divisão similar à trazida pela Questão 2 é impossível de se realizar e que este conhecimento era satisfatório para se conseguir resolver os problemas matemáticos que foram propostos até aquele momento da vida escolar deles. Porém, isto se torna um obstáculo conceitual conforme diz (BACHELARD, 2006, p. 166) “Face ao real, aquilo que já se julga saber claramente ofusca aquilo que se deveria saber”, revelando que essa aceitação de um preceito obstrui o sujeito a indagar o real motivo da existência deste preceito. Um exemplo disso é a resposta de um estudante que está concluindo o curso, transcrita a seguir:

Buscaria a definição para que possa verificar que o denominador de uma fração $\frac{a}{b}$ deverá ter $b \neq 0$.

Também podendo explica-lo numa linguagem mais simples, por exemplo: Tenho 7 laranjas e não há ninguém para dividir estas laranjas, então neste caso não haverá divisão. (Estudante 13, Finalistas)

Observa-se que tal estudante passou todo o curso sem refletir sobre a situação pois, quando necessitou de um recurso matemático para responder a questão, afirmou que “Buscaria a definição”. Para que não ficasse sem resposta, tal estudante recorreu à aplicabilidade cotidiana da divisão de laranjas como forma alternativa de abordagem.

Essa situação foi a que prevaleceu nas respostas coerentes obtidas, porém não se viu nas respostas o argumento matemático formal de que a impossibilidade da divisão proposta, para números inteiros, se deve a manter válido o algoritmo da divisão euclidiana, sendo o que mais se aproximou disso foi o Exemplo 4 citado anteriormente.

Agora que as noções acerca de divisão por zero foram relatadas, a Questão 3 complementar a investigação iniciada na Questão 1, pois suas respostas forneceram uma dimensão mais profunda do conceito de potenciação que os estudantes possuem.

3.3 Questão 3 – O conceito de potenciação.

Questão 3

Em muitos livros didáticos o significado de expoente de um número é a quantidade de vezes em que a base aparece se repetindo na multiplicação por si própria. Por exemplo:

A potência a^n é igual ao produto de n fatores iguais a a . (IEZZI, 1984. p.68)¹

Por exemplo: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Considerando a definição dada, de que maneira você explicaria aos alunos do **ensino médio**:

- O que significa a potenciação $2^{3,1}$?
- O que significa 2^π ?
- Ao apresentar que $2^0 = 1$ o aluno questiona o professor: “Como que o 2 não se repete nenhuma vez e o resultado é igual a 1?” Como você explicaria?

Para classificar como *satisfatórias* as respostas a esta questão, levou-se em conta que o conceito mais amplo de potenciação que poderia ser apresentado nas respostas seria a capacidade de argumentar satisfatoriamente ao menos dois dos três itens. Desse modo, se o estudante conseguiu elaborar uma argumentação correta somente para o item (a) mas não conseguiu sustentá-la, adaptá-la ou compor uma nova argumentação adequada para um outro item, então a resposta foi considerada como *não satisfatória*. Esse esclarecimento visa dar compreensão da elevada quantidade de índices nulos das respostas *satisfatórias* na Tabela 6. Um maior aprofundamento da classificação utilizada será feito mais adiante.

Tabela 6: Classificação das respostas dadas à Questão 3.

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	16,7%	0,0%	0,0%	25,0%	22,2%
Não Satisfatória	50,0%	66,7%	85,7%	40,0%	66,7%	20,0%	66,7%	50,0%	66,7%
Não soube	50,0%	33,3%	14,3%	60,0%	16,7%	80,0%	33,3%	25,0%	11,1%

Fonte: Dados da pesquisa.

Da Tabela 6, destacam-se o 6º e o 4º períodos com os maiores índices de respostas consideradas como *não soube*. Estes índices contrastam muito com os dados dos participantes que declararam possuir alguma experiência docente pois, conforme a Figura 2 do início deste capítulo, o 4º e 6º períodos tem a segunda maior proporção (60% cada) de estudantes com alguma experiência docente, sendo o 4º período é o grupo que tem o segundo maior índice de estudantes que se sentem preparados para ensinar matemática básica. Apesar disso, frisa-se que o 6º período, com a maior proporção (80%) de respostas da classe *não soube*, é também o grupo

que apresentou a maior variabilidade na quantidade de disciplinas concluídas (de 0 a 11 disciplinas) conforme a Figura 1 do Capítulo 2.

Dentro das respostas *não satisfatórias*, o que mais ocorreu foi que, se o estudante não conseguia responder com argumentos contundentes o item (a), então ele também não conseguia responder corretamente os outros dois itens restantes. Alguns exemplos são transcritos a seguir:

Exemplo 1

- (a) Sinceramente não tenho ideia de como resolver isso, sei lá, colocaria $2^{3,1} = 2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1$.
- (b) Dois Pi, ou $2 \cdot 3,14$
- (c) Ficaria envergonhado em não saber o porque, pois aprendi simplesmente que “qualquer número elevado a expoente zero é igual a um” (Estudante 24, 1º período)

Exemplo 2

- (a) Que o 2 “aparece” 3,1 vezes multiplicando a si mesmo.
- (b) $2^{3,1415\dots} = 2$ elevado ao número complexo Pi.
- (c) [em branco] (Estudante 3, 1º período, aspas no original)

Exemplo 3

- (a) A potência de um número só podemos escrever com números inteiros.
- (b) $2^{3,14}$, dois com a potência de Pi que equivale 3,14.
- (c) Porque todo número elevado a zero é 1. Assim que eu aprendi. (Estudante 25, 2º período)

Exemplo 4

- (a) $2^{3,1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 4$.
- (b) [em branco]
- (c) [em branco] (Estudante 26, 3º período)

Exemplo 5

- (a) Que é a mesma coisa de 2^4 .
- (b) [em branco]
- (c) [em branco] (Estudante 27, 4º período)

Exemplo 6

- (a) $2^3 \cdot 2^{0,1}$.
- (b) Sendo $\pi = 3,15$; 2^π é o mesmo que $2^{3,1}$.
- (c) Eu diria: -Boa pergunta, Joãozinho! Amanhã sem falta eu te respondo. (Estudante 28, 4º período)

Em todos os exemplos anteriormente apresentados percebe-se que há uma falha no desenvolvimento da competência I (Compreender os números, suas diferentes representações, as relações entre eles e os conjuntos numéricos) de Contreras et al. (2012), pois no Exemplo 1 o estudante confundiu a representação decimal do expoente com o processo de potenciação da base, no Exemplo 2 há um problema de classificação numérica quando o estudante classifica o número irracional π como um número complexo, nos Exemplos 3 e 6 há o erro de atribuir a π

os números racionais 3,14 ou 3,15 indistintamente, no Exemplo 4 o estudante utiliza a representação decimal do expoente como processo de divisão da base, no exemplo 5 o estudante considera o valor fracionário 3,1 como o valor inteiro 4 sem fazer qualquer menção de como chegou a essa conclusão. Cada um desses erros levaram essas repostas a serem incluídas, dentro das respostas *não satisfatórias*, na categoria de respostas *incorretas*.

Pelo exposto, é nítido perceber que, do 1º ao 4º período, as imprecisões conceituais se manifestaram de diferentes formas dentro de uma mesma categoria de competência numérica. Dentre as diversas imprecisões conceituais encontradas nas respostas, uma se destacou: nove estudantes (aproximadamente 16% da amostra), sendo sete deles do 1º ao 5º período, um do 8º período e um dos Finalistas afirmaram que, no caso de $2^{3,1}$, a base aparece se repetindo 3,1 vezes e, no caso de 2^π , a base aparece se repetindo π vezes, conforme os exemplos abaixo:

Exemplo 1

- (a) Isso significa que 2 multiplica por si mesmo 3,1 vezes
- (b) Isso significa que o 2 multiplica por si mesmo π vezes. (Estudante 33, 1º período)

Exemplo 2

- (a) Significa que o dois está sendo multiplicado três vezes por ele mesmo e mais uma vez por fração dele mesmo.
- (b) Significa que o dois está sendo multiplicado um número de vezes e por frações dele mesmo, de acordo com o número proposto, no caso o π . (Estudante 6, 3º período)

Exemplo 3

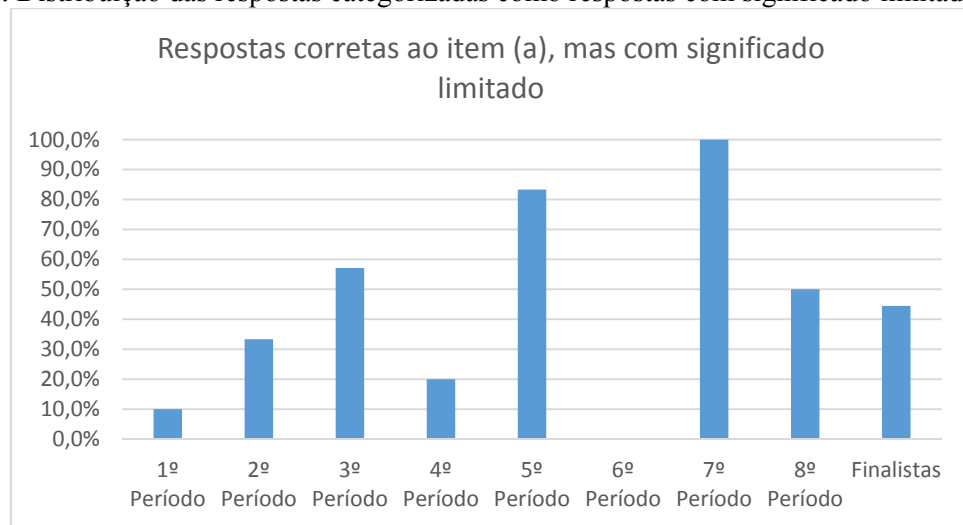
- (a) $2^{3,1} = 2^{3+\frac{1}{10}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{10}} = 2^3 \cdot \sqrt[10]{2} = 8\sqrt[10]{2}$, ou seja, significa que você deve elevar o 2 à 3ª potência vezes 2 à $\frac{1}{10}$ ª potência. Meio difícil explica isso, ou também que estamos multiplicando o dois, 3,1 vezes.
- (b) Poderíamos usar uma aproximação para o valor de π como sendo 3,14 e recaímos no caso anterior pois estamos multiplicando o 2, 3,14 vezes. (Estudante 14, Finalistas)

Isto mostra, sob o aspecto das *características essenciais* de Even (1990), que estes estudantes usam, inadequadamente, os números racionais e irracionais da mesma maneira como usam os números naturais, aplicando a eles as mesmas propriedades e empregabilidade. Tal confusão também tem relação com a descrição I.1 (Compreender o significado dos números em contextos distintos) da competência numérica I de Contreras et al. (2012), quando os estudantes utilizam, de forma incoerente, o aspecto cardinal para dizer que a base se repete “3,1 vezes”, ou o aspecto ordinal na expressão “ $\frac{1}{10}$ ª potência”.

Em relação ao item (a), houve 22 respostas (40%) categorizadas como *com significado*

limitado, pois referiam-se apenas a algum procedimento aritmético sem classificar os números envolvidos como racionais (no caso do expoente) ou irracionais (os resultados) ou sem fazer a alusão de que a propriedade de repetição da base fornecida no enunciado é válida quando considera-se números naturais no expoente, por isso elas foram classificadas como *não satisfatórias*. Esta categoria de respostas ao item (a) está distribuída dentro da amostra conforme apresenta a Figura 9 mais adiante.

Figura 9: Distribuição das respostas categorizadas como respostas com significado limitado.



Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se, na Figura 9, que a totalidade das respostas fornecidas pelos estudantes do 7º período se enquadram nessa categoria de respostas e esses estudantes são justamente o grupo que possui o segundo menor índice de experiência docente dentro da amostra e também um dos grupos, conforme a Figura 4 anteriormente citada, que não assinalou dificuldade com a disciplina Fundamento da Matemática Elementar I cuja sua ementa contem os assuntos Conjuntos Numéricos e Função Exponencial.

Os exemplos de respostas da categoria *com significado limitado* são transcritos a seguir:

Exemplo 1

(a) $2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}}$ (Estudante 4, 3º período)

Exemplo 2

(a) $2^{3,1} = 2^3 \cdot 2^{0,1} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{10}}$ (Estudante 28, 4º período)

Exemplo 3

(a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{10}}$ (Estudante 20, 5º período)

Exemplo 4

- (a) É apenas uma potência, mas nesse caso o expoente (3,1) não é um número natural como de costume. (Estudante 35, 5º período)

Exemplo 5

- (a) Não sei, pois nunca vi isso no ensino regular e nem durante o meu tempo de graduação. Não explícito assim, mas talvez: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[10]{2}$ (Estudante 18, 7º período)

Exemplo 6

- (a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^{0,1}$ (Estudante 10, 8º período)

Exemplo 7

- (b) $2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}}$. Sinceramente não me lembro de ter visto isso enquanto estudava e nem aqui na graduação. Mas talvez que isso é a raiz décima de 2^{31} (Estudante 16, Finalistas)

Apesar de não fornecerem explicações mais substanciais, as manipulações aritméticas destes últimos exemplos exprimem evidências do aspecto das *diferentes representações* quando os estudantes estabelecem equivalências do número proposto na questão com as outras formas de notação obtidas aplicando-se as propriedades da potenciação. Porém, apenas desenvolver cálculos aplicando propriedades não garante que o conceito de potenciação esteja satisfatoriamente construído pois, de acordo com Carvalho e Sztajn (1997, p. 20), construir um conceito “é muito mais do que uma sequência de passos mecânicos para a execução de uma operação e um aluno não forma um conceito em um dia ou ao decorar uma definição. Conceitos são redes de significados, são modelos.” Além disso, não se pode fundamentar uma explicação somente no fato de encontrar um resultado para a operação em questão, é necessário também discutir as particularidades dos números envolvidos e da própria operação em si, conforme diz Bachelard (1996):

Sem dúvida, seria mais simples ensinar só o resultado. Mas o ensino dos resultados da ciência nunca é um ensino científico. Se não for explicada a linha de produção espiritual que levou ao resultado, pode-se ter a certeza de que o aluno vai associar o resultado a suas imagens mais conhecidas. É preciso "que ele compreenda". Só se consegue guardar o que se compreende. (BACHELARD G. , 1996, p. 289, aspas no original)

Estas premissas foram preponderantes para categorizar estas respostas como corretas, porém com o significado limitado, pois ela se restringiram apenas aos processos utilizados para escrever a potência proposta sob outra notação sem ir além disso.

Dentro das respostas classificadas como *satisfatórias* estão as que consideraram aproximações inteiras ou classificaram adequadamente alguns dos números envolvidos na potenciação tentando dar algum significado às potenciações da questão. A resposta abaixo exemplifica isso:

- (a) Eu explicaria fazendo alguns procedimentos algébricos. 1º) 3,1 é o mesmo que $31 \cdot 10^{-1}$. Assim, poderíamos substituir no valor inicial dado: $2^{3,1} = 2^{31 \cdot 10^{-1}} = (2^{31})^{10^{-1}} = (2^{31})^{\frac{1}{10}} = 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}}$ (na hora da aula todos esses passos devem ser explicados detalhadamente usando e lembrando processos algébricos, etc. Sempre de maneira a deixar claro ao aluno todos os processos usados, quando usar e como usar.
- (b) Primeiro deve levar em consideração se o aluno tem conhecimento sobre números irracionais, em caso negativo, deve ser feita uma análise das dificuldades dos alunos no entendimento e posteriormente explicá-los o que vem a ser um número irracional (no caso o “pi”). Posteriormente com o entendimento deste número irracional que não há como transformá-lo em fração usando dízimas periódicas, etc. assim, poderíamos arredondar esse valor de “pi”, aproximá-lo, para que pudesse ser resolvida a potência acima.
- (c) [em branco]. (Estudante 17, 8º período)

Apesar da resposta do Estudante 17 ao item (a) ter mostrado uma preocupação apenas em relação aos procedimentos aritméticos empregados para mudar a notação e não mencionar qualquer coisa em relação ao significado dos números ou das operações empregadas nas passagens das igualdades, vê-se na resposta do item (b) que ele faz uma distinção deste segundo caso de expoente em relação ao primeiro. Ele começa classificando o expoente como irracional e arrazoa, breve e adequadamente, o motivo de não utilizar o mesmo artifício adotado no item (a), ou seja, que não há como utilizar um expoente fracionário para substituir o expoente irracional, isto revela o aspecto das *características essenciais* deste estudante. Por último, ele encerra fornecendo a alternativa de utilizar uma aproximação numérica para resolver a questão, o que mostra o aspecto da *forma alternativa de abordagem* que ele empregaria.

Dentre os Finalistas, verificou-se as duas seguintes respostas consideradas como *satisfatórias*. Elas aduzem argumentos semelhantes em relação ao item (a) porém distintos em relação ao item (c):

Exemplo 1

- (a) Sabendo que 3,1 é um número decimal e pode ser escrito na forma $\frac{31}{10}$, então $2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}} = \sqrt[10]{2^{31}}$.
- (b) π não é um número racional, então 2^π não trará um resultado exato. É um equívoco considerar π como sendo igual a 3,14, embora isso seja como em alguns livros didáticos e adotados por alguns professores. 2^π é um número que estará compreendido entre 8 e 16.
- (c) Por que via de regra tal afirmação de repetir só é válido considerando como sendo um número natural, zero não é um número natural. (Estudante 15, Finalistas)

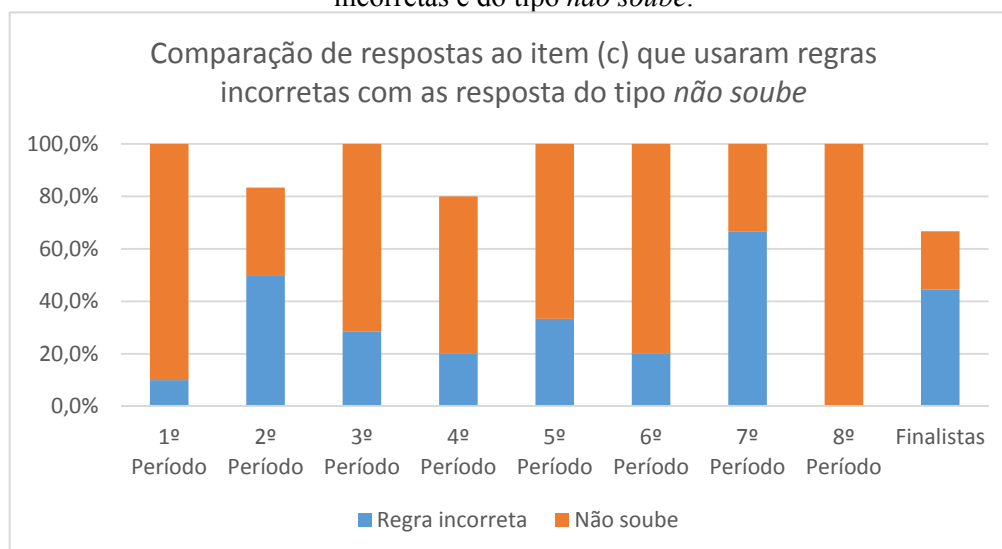
Exemplo 2

- (a) Temos que 3,1 é um número decimal, logo ele pode ser escrito como fração, ou seja, $\frac{31}{10}$. Assim o número $2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}}$; usando as propriedades de radiciação $2^{31/10} = \sqrt[10]{2^{31}}$.
- (b) [em branco].
- (c) 2^0 ou qualquer outro número diferente de zero, elevado a zero pode ser encarado como um “elemento neutro” do produto. Logo, $2^1 \cdot 2^0 = 2^{1+0} = 2$, $2^5 \cdot 2^0 = 2^{5+0} = 2^5$ e também na divisão (ou inverso multiplicativo) $2^7 \cdot \frac{1}{2^0} = 2^{7-0} = 2^7$. Logo, para que 2^0 seja o elemento neutro da multiplicação e divisão de números reais, então $2^0 = 1$, pois $2^7 \cdot 1 = 2^7$ e $\frac{2^{100}}{1} = 2^{100}$. (Estudante 12, Finalistas)

Da mesma maneira como os exemplos anteriores, os últimos exemplos revelam o aspecto das *diferentes representações* que o número racional 3,1 pode se apresentar e recorrem à representação fracionária para desenvolver uma outra notação à potencia dada no item (a). Mas, no item (c), o estudante do Exemplo 1 não responde diretamente o motivo da pergunta da questão, entretando ele explica que a definição de potência dada no enunciado só é válida para os expoentes naturais não-nulos. Quanto ao dilema da escolha da naturalidade (ou não naturalidade) do zero ele apenas colocou o posicionamento adotado por ele quando diz “zero não é um número natural” (Estudante 15, Finalistas). Já o estudante do Exemplo 2 optou por argumentar a resposta do item (c) respaldando-se no elemento neutro multiplicativo, acautelando-se previamente da situação da base nula, isto evidencia o nível de desenvolvimento da competência II (Compreender os significados das operações e como se relacionam umas com as outras) de Contreras et al. (2012) e também o aspecto das *formas alternativas de abordagem* de Even (2011).

O item (c) foi o que obteve o pior desempenho das respostas à Questão 3. Neste item, 61,8% (34) das respostas foram do tipo classificado como *não soube* e 29,1% (16) das respostas foram da categoria de respostas *incorretas*, pois usavam alguma regra de potenciação semelhante à da afirmação I da Questão 1, sem fazer distinção do caso de indeterminação. Tal conjuntura é desvelada na Figura 10.

Figura 10: Proporções (por período) de respostas ao item (c) da Questão 3 fundamentadas em regras incorretas e do tipo *não soube*.



É realmente curioso o fato da totalidade dos estudantes do 8ª período terem respostas do tipo *não soube* pois, de acordo com a Figura 2 anteriormente apresentada, este grupo é o que apresentou o maior índice de estudantes que se sentem preparados para ensinar matemática básica, porém eles não conseguiram fornecer uma resposta para o item (c) que é frequente na Educação Básica. Do mesmo modo, é preocupante o alto índice (44,4%) de estudantes do grupo Finalistas apresentarem como resposta a este item um regra matematicamente incorreta pois, estes estudantes estão na iminência de concluírem o curso e se tornarem professores de matemática da educação básica, reproduzindo em seus futuros alunos, por meio da sua prática de ensino, a sua própria falha conceitual que não foi sanada no curso superior, a de generalizar imprecisamente a potenciação de expoente zero. Além disso, o grupo de estudantes Finalistas foi o que sinalizou ter o maior índice de participantes com alguma experiência de ensino de matemática básica. Estes são dois exemplos das respostas que utilizaram uma regra incorreta:

Exemplo 1

- (c) Sinceramente, da mesma forma que aprendi, “É definição, todo número elevado a zero é igual a 1”. Nunca fiz esse questionamento. Mas buscarei saber o porquê. (Estudante 16, Finalistas, grifo nosso)

Exemplo 2

- (c) Explicaria da seguinte maneira: Você concorda comigo que se eu dividir um número por ele mesmo mesmo o resultado é 1; exemplo seja n um número qualquer, então $\frac{n}{n} = 1$ certo? Tipo $\frac{5}{5} = 1$, $\frac{2}{2} = 1$, ... Agora considere $\frac{2^n}{2^n} = 1$, pois, pela propriedade da (divisão de potências com mesma base, subtraia os expoentes), logo $\frac{2^n}{2^n} = 2^{n-n} = 2^0 = 1$. Logo,

$2^0 = 1$, e isso vale para qualquer número elevado a zero resulta em 1. (Estudante 40, Finalistas, grifo nosso)

Os exemplos anteriores mostram que estes estudantes não atentam para o caso da indeterminação 0^0 quando utilizam alguma generalização para o caso particular apresentado.

Das respostas à Questão 3 é plausível dizer que dois obstáculos conceituais foram identificados:

Um deles é o obstáculo gerado pelo uso mecânico ou automático de propriedades e procedimentos aritméticos, que se sobrepôs à compreensão de um significado mais profundo dos números racionais e irracionais envolvidos, como expoentes, na operação de potenciação. Isto condiz com Bachelard que define como um dos obstáculos conceituais o conhecimento pragmático e seu caráter utilitário que são usados, não só pela vantagem que podem oferecer para resolver algum problema, mas como princípio de explicação suficiente para fornecer uma razão ou definição (BACHELARD, 1996, p. 114-115).

O outro obstáculo é o mesmo percebido na análise da Questão 1, ou seja, o uso de generalizações (precipitadas ou incompletas) como regras de operações matemática impregnam o conceito prévio criando um entrave na percepção de casos de invalidez matemática. E isto, nada mais é do que a experiência inicial (o uso frequente das regras de potenciação constatado na Questão 1) sendo priorizada em relação ao conhecimento de um significado mais amplo da operação de potenciação.

Como esta questão utilizou-se de expoente racional para investigar o conceito de potenciação, viu-se a necessidade de apurar um pouco mais o que os estudantes sabem sobre frações e, em específico, as representações dos números racionais. Isto foi feito por meio da Questão 4.

3.4 Questão 4 – Diferentes representações numéricas

Questão 4

Para responder as questões abaixo, considere suas respostas destinadas a alunos da educação básica:

- (a) O que é fração para você?
- (b) O que é dízima periódica?
- (c) Obtenha a fração geratriz da dízima periódica 32,7999...
- (d) Se você encontrou a fração, tente agora realizar a divisão do numerador pelo denominador e encontrar o número dado. Você conseguiu? Explique como você fez.

O objetivo desta questão foi verificar em que medida os estudantes da licenciatura em Matemática são capazes de elaborar uma discussão sobre números racionais, frações e sua relação com o algoritmo da divisão. Dos resultados, apenas 3 dos 55 participantes consideraram explicitamente fração como sendo um número. E dos 21 participantes que declararam fração como sendo divisão, apenas 4 afirmaram que o denominador (ou divisor) não pode ser nulo.

Da mesma forma que ocorreu na questão anterior foi verificado também nesta questão que, quando o estudante não conseguia utilizar uma argumentação profusa para os itens (a) ou (b), ele também não articulava respostas corretas para os outros itens. Então, foram classificadas como *satisfatórias* apenas as respostas dos estudantes que conseguiram discorrer corretamente a pelo menos três dos quatro itens da questão. Os resultados da classificação das respostas está disposto na Tabela 7.

Tabela 7: Classificação das respostas dadas à Questão 4

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	10,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	11,1%
Não Satisfatória	90,0%	100,0%	100,0%	80,0%	83,3%	60,0%	100,0%	75,0%	88,9%
Não soube	0,0%	0,0%	0,0%	20,0%	16,7%	40,0%	0,0%	0,0%	0,0%

Fonte: Dados da pesquisa.

Pela tabela anterior, constata-se que apenas os participantes do 1º e do 8º períodos, e do grupo dos Finalistas elaboraram respostas satisfatórias e, mesmo assim, em percentuais muito pequenos. Para ser mais preciso, é necessário dizer que isto ocorreu com apenas um estudante de cada um destes grupos citados, e esta falta de concentração de respostas *satisfatórias* em um grupo específico revela que, a evolução dos períodos do curso não contribuiu para que os estudantes evidenciassem uma bagagem maior de argumentos para indagações como as da Questão 4. Isto pode ser um indício de uma falha formação dos estudantes no curso de licenciatura em questão. Mas, para se ter uma perspectiva maior deste problema, é necessário que se analise o grande volume de respostas *não satisfatórias* obtidas à esta questão.

Como algumas respostas ao item (a), classificadas como *não satisfatórias*, utilizaram termos muito genéricos para definir o que é uma fração, optou-se por não categorizá-las como respostas *com significado limitado* e nem como respostas *incorretas*, desta forma, elas passarão a ser descritas a seguir sem remeter-se a uma categoria específica.

Um quantidade expressiva de respostas (24 em 55) definiram fração como uma parte de um todo (ou parte de uma unidade). Levando-se em conta que foi solicitado no enunciado que as respostas fossem direcionadas a alunos da educação básica, este tipo de resposta é, de certo modo, confusa, pois pode deixar para o aluno as seguintes dúvidas: A parte pode ser maior do

que o todo como, por exemplo, na fração imprópria $\frac{5}{3}$? No caso de um numerador ser maior do que o denominador, se a fração é uma parte de uma unidade, qual é então a unidade que está sendo considerada? Dúvidas como essas possivelmente não permitam ao aluno ter clareza no conceito de números fracionários. Quanto a essa imagem conceitual de fração como parte de um todo, Moreira e David (2007, p. 68) enfatizam que “[...] a idéia de fração como expressão de uma relação parte-todo tem de ser repensada quando se trabalha com frações impróprias, no contexto de medida. Uma operação (adição ou divisão) envolvendo duas frações impróprias pode resultar numa fração imprópria”. Os exemplos das respostas aqui quantificadas são:

Exemplo 1

- (a) Fração é uma parte de um todo. É um pedaço de alguma coisa. (Estudante 24, 1º Período)

Exemplo 2

- (a) É uma determinada parte, ou pedaço de algum objeto. (Estudante 6, 3º Período)

Exemplo 3

- (a) É uma forma de representar uma parte de um todo, como uma fatia de pizza, podemos utilizar frações para mostrar que ela é uma pequena parte de algo maior. (Estudante 35, 5º Período)

Exemplo 4

- (a) Uma parte do inteiro. Por exemplo: uma pizza com 8 pedaços a metade da pizza corresponde à fração $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. (Estudante 45, 8º Período)

Exemplo 5

- (a) Podemos também considerar como fração como uma parte de um todo, exemplo, Júlia fez um bolo de chocolate e sua irmã Ana comeu metade do bolo, logo percebe-se que a fração correspondente é $\frac{1}{2}$, meio, metade. (Estudante 40, Finalistas)

Estes exemplos indicam que a concepção de fração como uma parte de uma unidade é algo que permeia desde os ingressantes do curso até os concluintes e, no Exemplo 3, o Estudante 35 exclui da sua definição de fração os números maiores do que uma unidade, quando diz que “é uma pequena parte de algo maior”, ou não deixa claro qual é a unidade em questão.

Numa outra quantidade considerável estão 15 das 55 respostas ao item (a), onde os participantes definiram fração como a operação de divisão em si, sem defini-la expressamente como um número escrito sob uma representação fracionária, como exemplificado a seguir:

Exemplo 1

- (a) Fração é uma outra forma de divisão sendo que o numerador fica na parte de cima e o denominador na parte de baixo. (Estudante 1, 1º Período, grifo nosso)

Exemplo 2

- (a) Fração é a maneira de dividir um número. (Estudante 4, 3º Período, grifo nosso)

Exemplo 3

- (a) Fração é uma divisão. (Estudante 28, 4º Período)

Exemplo 4

- (a) Tentaria explicar a ideia do todo pela parte, ou seja faria, uma relação intimamente ligada com a divisão. (Estudante 29, 5º Período)

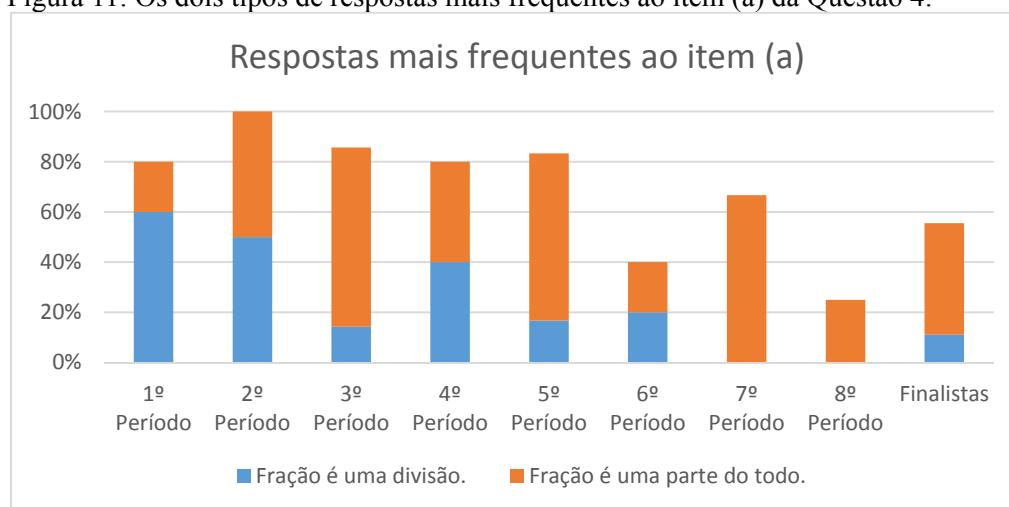
Exemplo 5

- (a) Fração é a razão entre dois números ou grandezas, desde que o denominador seja diferente de zero. (Estudante 12, Finalistas)

Estas respostas tentaram definir fração como algo que está mais próximo da operação de divisão do que do próprio conceito de número, isto fica nítido nas respostas dos Exemplos 1 e 2. Pelas explicações dadas nestes exemplos não se consegue inferir que estes estudantes consideraram que um número pode ser representado na forma fracionária e sim que a fração sugere a realização de uma operação com os dois números envolvidos na representação, isto pode ser associado com o aspecto da *relevância do conceito* de Even (1990), onde o conceito de fração entendido de modo simplista como uma operação de divisão pode dificultar a aprendizagem de outros assuntos que se relacionam com o próprio conceito de fração, como nas operações com frações por exemplo, se tornando então um obstáculo conceitual. A aparente confusão entre o conceito de número fracionário e o conceito da operação de divisão, sugerida por este tipo de resposta, também está associada com um possível desenvolvimento irregular das competências I (Compreender os números, suas diferentes representações, as relações entre eles e os conjuntos numéricos) e II (Compreender os significados das operações e como se relacionam umas com as outras) de Contreras et al. (2012).

Para se ter uma noção quantitativa do modo como os dois tipos de respostas descritos anteriormente apareceram na amostra, foi elaborada na Figura 11 um gráfico que fornece a proporção destes dois tipos de resposta por período. Esse gráfico revela que a quantidade de respostas que tentam definir fração como uma parte de um todo são persistentes em muitas respostas de todos os grupos da amostra, porém as respostas que associam fração com divisão diminuem ao avançar os períodos dentro da amostra, aparecendo apenas um caso isolado entre os Finalistas, sendo o intervalo do 5º período até os Finalistas onde se concentra a menor quantidade de respostas deste tipo, intervalo este onde estão os estudantes que alegaram contato (ou dificuldade) com as disciplinas de Álgebra I e II, conforme a Figura 5 anteriormente citada. Tais disciplinas, são as que abordam o algoritmo euclidiano da divisão e isto pode ter influenciado o decréscimo deste tipo de resposta.

Figura 11: Os dois tipos de respostas mais frequentes ao item (a) da Questão 4.



Fonte: Dados da pesquisa.

Além dos dois tipos de respostas descritas anteriormente, foram detectadas falhas conceituais mais profundas em oito respostas distribuídas no 1º, no 4º, no 7º período e nos Finalistas (uma resposta, cada) e no 6º e 8º período (duas respostas, cada). Diz-se falhas mais profundas pois estas respostas apresentam erros técnicos e, por isso, foram caracterizadas como respostas *incorretas*. Tais respostas são transcritas a seguir:

Exemplo 1

(a) É uma forma de divisão de um número inteiro não nulo (Z). (Estudante 32, 1º Período)

Exemplo 2

(a) Fração está dentro do conjunto dos números racionais, ao qual seria uma divisão de um número por outro, onde o resultado não dá um número inteiro. (Estudante 7, 4º Período)

Exemplo 3

(a) Divisões que não dão resultados reais, ou seja que não é possível calcular a divisão. (Estudante 37, 6º Período)

Exemplo 4

(a) Fração é um número na qual dividido pelo outro, não se obtém resultados inteiros. (Estudante 39, 6º Período)

Exemplo 5

(a) A fração é um número divisível pelo outro, ou seja $\frac{a}{b}$, que quer dizer a representação de um todo de um ou mais números inteiros. (Estudante 8, 7º Período)

Exemplo 6

(a) É o quociente entre dois números podendo ou não ser números inteiros. (Estudante 9, 8º Período)

No Exemplo 1 o estudante procurou restringir os elementos que compoem uma fração, porém, da forma que ele definiu, foi excluído a representação fracionária do zero. Nos Exemplos 2 e 4 foram excluídas as representações fracionárias dos números inteiros e, de modo

análogo, no Exemplo 3 aparentemente há uma exclusão da representação fracionária dos números reais quando o estudante 37 diz que “não dão resultados reais” e, além disso, ele associa fração com uma divisão impossível. Nos Exemplos 5 e 6 não há qualquer menção da restrição do divisor (ou denominador) quando se diz que fração é o quociente (ou razão) entre dois números deixando a possibilidade de uma divisão por zero.

Além das respostas *incorretas*, houve três categorizadas como respostas *com significado limitado*. Elas foram assim categorizadas pois foram muito suscintas nas explicações apresentadas. Eis as respostas:

Exemplo 1

- (a) É um número racional. É dividir o inteiro em partes. (Estudante 21, 3º Período)

Exemplo 2

- (a) Fração é um número racional, constituído de numerador e denominador. (Estudante 36, 5º Período)

Exemplo 3

- (a) Fração: é um número que possui numerador e denominador ($\neq 0$). (Estudante 41, Finalistas)

Ao analisar estas respostas, vê-se que a definição dada no Exemplo 1, apesar de assumir fração como um número racional, não diz se a divisão do inteiro é em partes iguais e nada explica sobre a representação fracionária com numerador e denominador. Já os Exemplos 2 e 3 não fornecem maiores informações sobre a constituição do numerador e do denominador e nenhuma menção faz sobre a divisão. Para Ball e Bass (2002, p. 11), não há como o professor promover o desenvolvimento da compreensão do conceito de fração apenas com a definição formal de um número racional pois, quando as crianças aprendem sobre frações, eles não começam com a noção de número real, nem mesmo de número racional. Elas aprendem constatando que certas quantidades são partes de totalidades e, em seguida, tendem a assimilar isso numa representação fracionária para, só então operar com essas quantidades. Enquanto isso, suas experiências com a expansão de valores em notação decimal desenvolvem-se em outro território para se juntar mais tarde com as frações e constituir o conceito emergente de números racionais.

Em contrapartida, dois estudantes, um do 8º período e outro dos Finalistas, responderam de um modo mais amplo ao item (a), conforme transcrito a seguir:

Exemplo 1

- (a) Uma razão entre dois números inteiros, em que o numerador é a porção total do objeto e o denominador é a quantidade de partições deste objeto. (Estudante 10, 8º Período)

Exemplo 2

- (a) Fração é a razão de dois números inteiros onde a parte de baixo é chamado denominador (representado pelo inteiro dividido em determinadas partes iguais), e o numerador onde se encontra a quantidade de partes que se tem daquele inteiro que foi subdividido. (Estudante 11, Finalistas)

Estas últimas respostas procuram, de modo sucinto, definir fração como um número que pode assumir uma representação fracionária e, além disso, forneceram uma explicação plausível para os elementos que constituem a representação fracionária. Por este fato, estas respostas se enquadram, juntamente com as respostas dadas por estes estudantes aos outros itens, como respostas *satisfatórias*.

Dentro das respostas *não satisfatórias* foram verificadas também quatro respostas ao item (b) da categoria *com significado limitado*, sendo duas respostas do 1º Período e duas do 3º Período, conforme os exemplos a seguir:

Exemplo 1

- (b) É um número decimal que depois da vírgula um certo número se repete infinitas vezes, como por exemplo, 35,777..., 0,333... (Estudante 47, 1º Período)

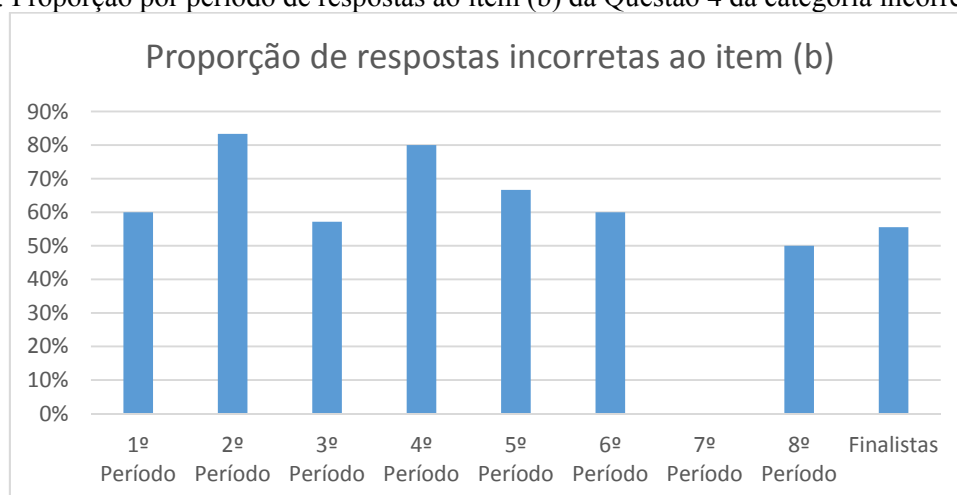
Exemplo 2

- (b) É um número decimal em que o final dele é um valor repetido infinitas vezes. (Estudante 33, 1º Período)

Estes dois exemplos referem-se ao período da dízima periódica utilizando os termos “número” e “valor”. Estes termos parecem não ser adequados para expressar o bloco de algarismos que se repetem infinitamente nas casas decimais, pois pode fazer com que o aluno associe o conceito de número aos algarismos. Observe no Exemplo 1 que o estudante define a dízima periódica como “É um número” e logo a seguir diz “um certo número se repete”, isto transparece que o termo “número”, para o Estudante 47, é tanto a dízima periódica em questão quanto os algarismos do período, independente da posição decimal que eles ocupam. Já no Exemplo 2, o termo “valor” não é muito adequado para se referir ao período pois, dependendo da posição decimal que o período ocupa seu valor não é o mesmo.

Também nas respostas não satisfatórias, foram detectadas 33 repostas (60%) ao item (b) da categoria incorretas, distribuídas proporcionalmente por período conforme a Figura 12

Figura 12: Proporção por período de respostas ao item (b) da Questão 4 da categoria incorretas.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 12 revela que apenas o 7º Período não apresentou respostas desta categoria e isto ocorreu pois, dos três participantes deste período, dois apresentaram respostas corretas a este item e um não soube responder. Exceto o 7º Período, em todos os outros grupos da amostra, mais da metade dos estudantes apresentaram respostas do tipo incorreta quando questionados sobre o que é uma dízima periódica. Exemplos destas respostas são:

Exemplo 1

(b) Um número com vírgula, que em algum momento após a vírgula acontece uma sequência de números. (Estudante 46, 1º Período)

Exemplo 2

(b) Com a divisão de fração se obtemos a dízima periódica dela. (Estudante 50, 3º Período)

Exemplo 3

(b) É uma sequência de números que se repetem nas casas decimais. (Estudante 45, 8º Período)

Exemplo 4

(b) É o que ocorre quando se faz uma divisão entre dois números e esse resultado não pode ser obtido na forma exata, então ao fazer a operação terá números dos conjuntos dos racionais que podem não ter fim, ou seja, podem haver números que se repetiram infinitamente. (Estudante 9, 8º Período)

Exemplo 5

(b) Dízima periódica é uma sequência (finita ou infinita) que pode (ou não) se repetir após a vírgula. Exemplo: $5 \div 3 = 1,666 \dots$ logo essa dízima, 1,666... corresponde a uma divisão não exata. (Estudante 40, Finalistas)

Na definição dada pelo Estudante 46 no Exemplo 1, um número irracional como 0,12345678910111213... seria considerado dízima periódica. Ele, assim como o estudante do Exemplo 3, também não diz se a sequência é finita ou infinita. Já no Exemplo 2, o estudante

deixa livre que em qualquer divisão de fração obtém-se uma dízima periódica e isto inclui qualquer fração decimal (como $1/10$ por exemplo). E, nos Exemplo 4 e 5, os estudantes deixam a possibilidade de haver dízimas periódicas finitas ou infinitas. Houve casos mais sérios como dos exemplos a seguir:

Exemplo 1

- (b) Dízima periódica pode ser o resultado de uma fração dividida, é um número “quebrado” como costumamos dizer. Por exemplo, se pegarmos o resultado de π que é 3,149... será uma dízima periódica. (Estudante 34, 2º Período, aspas no original)

Exemplo 2

- (b) É um número Irracional. (Estudante 21, 3º Período)

Exemplo 3

- (b) Dízima periódica são números irracionais, que podem também ser representados por meio de frações. (Estudante 35, 5º Período)

Exemplo 4

- (b) Dízima periódica são números irracionais. (Estudante 11, Finalistas)

Estes últimos exemplos, além de transparecerem um baixo entendimento da representação decimal das dízimas periódicas, atribuem à elas a irracionalidade que é uma deficiência de classificação numérica constatada também no trabalho de Iglioni e Silva (2001) que aplicaram um questionário, contendo nove questões, a 36 estudantes iniciantes de um curso de Ciência da Computação e a uma turma de 14 estudantes finalistas de um curso de Licenciatura em Matemática:

As respostas indicam que as representações decimais ilimitadas são associadas à irracionalidade. Serve como exemplo que confirma esta assertiva a classificação feita do número 4,212121...: dentre os 36 iniciantes, 22 alunos o consideraram irracional e 4 dos 14 finalistas, também. (IGLIORI e SILVA, 2001, p. 50)

É curioso que os resultados do presente trabalho se assemelhem aos apresentados pelos autores citados pois, mesmo os estudantes que já concluíram a disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I (como o do 5º Período e o Finalista) que, conforme a Figura 4 do início deste capítulo, tem em sua ementa os Conjuntos Numéricos, apresentem a dificuldade de classificação de números racionais e irracionais. Isto sugere uma falha no desenvolvimento da competência numérica I de Contreras et al (2012), mais especificamente na descrição I.9 (Comparar e contrastar as propriedades dos números e dos conjuntos numéricos) desta competência.

De todas as respostas analisadas, dentro do aspecto das *características essenciais*, as duas imagens conceituais mais evidenciadas em relação ao conceito de dízima periódica foram,

em ordem decrescente de maior predominância: Primeiro, a imagem que associa a dízima periódica a um número decimal com vírgula; Segundo, a imagem de possuir alguma repetição. A característica que menos apareceu foi a de associar a dízima periódica a uma fração ou identificá-la como um número racional.

O aspecto do *repertório básico* foi muito escasso pois, dos poucos estudantes que utilizaram exemplos de dízimas periódicas em suas respostas, somente um utilizou exemplo de dízima periódica simples e composta, os outros utilizaram apenas exemplos de dízimas periódicas simples. Esse cenário revela quão débil estão os dois aspectos aqui abordados entre os indivíduos da amostra.

Essa fragilidade nos aspectos mencionado pode ter nexos com o baixo índice de respostas ao item (c), pois uma quantidade extremamente pequena, apenas quatro estudantes (7,3%), conseguiu encontrar uma fração geratriz correta para a dízima periódica fornecida. Estes quatro indivíduos são: um estudante do 1º Período, dois do 8º Período e um dos Finalistas. Além deles, cinco estudantes encontraram uma fração incorreta, conforme as respostas transcritas a seguir:

Exemplo 1

(c) (Crianças, amanhã agente continua!) Mas acho que é: $\frac{3279}{100}$. (Estudante 28, 4º Período)

Exemplo 2

(c) 32 parte inteira, 0,7999 parte decimal. Logo temos, $32 + \frac{7999}{9999} = \frac{31968+7995}{9999}$ logo a fração geratriz é $\frac{3247}{99}$. (Estudante 8, 7º Período)

Exemplo 3

(c) $32,7999 = x$
 $32799,999 = 100x$
 $\frac{3247,2}{99} = \frac{99x}{99}$ é $\frac{3247}{99}$. (Estudante 9, 8º Período)

Exemplo 4

(c) $\frac{327}{90}$. (Estudante 11, Finalistas)

Exemplo 5

(c) $\frac{32}{777}$. (Estudante 40, Finalistas)

Algo que se destaca nestas respostas é que, a maior parte dos estudantes que arriscaram responder alguma fração geratriz, quando não tinham certeza da resposta, preferiam não registrar os procedimentos empregados para encontrar tal resposta. Os outros 46 estudantes (83,6%) não encontraram fração alguma para responder ao item (c).

Este infausto resultado do item (c) induziu uma baixa quantidade de respostas ao item (d) que solicitava ao participante que verificasse a resposta obtida no item anterior fazendo a

divisão do numerador pelo denominador da fração geratriz pois, somente quatro estudantes responderam à este item conforme as transcrições dos itens (c) e (d) das respostas deles a seguir:

Exemplo 1

(c) $x = 32,79999 \dots (\cdot 10)$

$$10x = 327,999 \dots = 327 + 0,999 \dots = 327 + \frac{9}{9}$$

$$90x = 2943 + 9$$

9

$$90x = 2952$$

$$\frac{2952}{90}$$

$$x = \frac{2952}{90}$$

(d) $2952 \div 90 = 32,8$ Não consegui! (Estudante 33, 1º Período)

Exemplo 2

(c) $3279,\bar{9} = 100x$

$$327,\bar{9} = 10x$$

$$3279,\bar{9} - 327,\bar{9} = 100x - 10x$$

$$2952 = 90x \rightarrow x = \frac{2952}{90}$$

(d) $2952 \div 90 = 32,8111$. (Estudante 10, 8º Período)

Exemplo 3

(c) Primeiro observamos a parte inteira, depois a parte decimal caso os alunos encontrem dificuldade em resolver, deve-se observar o período que é 9 sendo repetido várias vezes. $32,799\dots$ pode ser visto como

$$32,80 = \frac{328}{10}$$

(d) $32,799 \dots \cong 32,80 = \frac{328}{10}$. (Estudante 17, 8º Período)

Exemplo 4

(c) $\frac{327}{90}$

(d) Não consegui a partir da fração geratriz que obtive. (Estudante 11, Finalistas)

Destas últimas respostas, somente os Estudantes 33 e 17 (Exemplos 1 e 3, respectivamente) conseguiram encontrar corretamente o número 32,8 mas não conseguiram identificar que ele é exatamente o número 32,7999... fornecido no item anterior. Revela-se então a dificuldade que os participantes têm no aspecto das *diferentes representações* de um número racional, mesmo estando os dois números representados sob a forma decimal. O Estudante 17 foi o único que aproximou de estabelecer a igualdade, porém sua afirmação “pode ser visto” no item (c) e o símbolo \cong utilizado no item (d) sugerem que ele não considera a igualdade numérica entre as duas representações.

Este resultado condiz com os de Iglioni e Silva (2001, p. 59) quando detectaram que, apenas um dos 36 iniciantes de um curso de Ciência da Computação e nenhum dos 14 finalistas

do curso de licenciatura em Matemática reconheceram a igualdade entre os números do tipo $0,2$ e $0,1999$ Resultados como este indicam uma má formação da competência I de Contreras et al. (2012), mais precisamente nas descrições I.6 (Saber representar um número de maneiras distintas) e I.7 (Saber passar, o mesmo número, de uma representação a outra) pois os estudantes não conseguiram obter uma fração geratriz para uma dízima periódica dada e, também, na descrição I.8 (Compreender as relações entre os números, comparando-os e ordenando-os) pois os estudantes não estabeleceram a igualdade entre os dois tipos de representação decimal como, por exemplo, a igualdade $32,8 = 32,7999$

Soma-se a essa má formação o fato apurado de que, somente um dos 55 estudantes classificou a dízima periódica como um número racional, mostrando a deficiência que os estudantes tem no aspecto do *entendimento e da compreensão do conceito* de números racionais dado que, a maioria dos estudantes da amostra concluíram a disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I na qual estudaram sobre os conjuntos numéricos e os Finalistas que, além de terem concluído a disciplina de Álgebra I, concluíram ou estavam cursando a disciplina de Análise I que, conforme a Figura 5 no início do presente capítulo, possuem em suas ementas os assuntos “Representação dos Números Racionais; Dízimas periódicas” e “Construção dos números racionais e reais”, respectivamente.

Isto sinaliza que a abordagem dada no processo de formação matemática do professor para a construção dos números racionais pode ser questionada pois, ao longo do processo de formação, o conjunto dos números racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto os estudos mostram que a construção deste sistema numérico é uma das operações mais complexas da matemática escolar. A aceitação da proporção de dois inteiros como um número é um processo de longo prazo de elaboração e reelaboração de ideias que, eventualmente, levarão a um novo conceito de número (MOREIRA e DAVID, 2007).

O obstáculo conceitual detectado nas respostas à Questão 4 se assemelha ao substancialismo, pois os estudantes tem uma imagem conceitual sobre as frações racionais (tais como fatia de pizza, pedaço de bolo, parte do todo, dentre outras), mas não conseguem ir além dessa imagem nas explicações dadas nas respostas sobre dízimas periódicas, isto condiz com a afirmação de Bachelard sobre o substancialismo: “A clareza consciente da imagem esconde, como de costume, o princípio da convicção inconsciente.” (BACHELARD, 2006, p. 125)

Enxergar as frações racionais somente como uma imagem conceitual, semelhante a encontrada nas respostas aqui descritas, caracteriza-se como um obstáculo que pode impedir a compreensão dos números reais escritos sob a forma de representação decimal, tanto periódica como não periódica.

Quanto a isso, Moreira e David argumentam que, para que se tenha uma compreensão da representação decimal é necessário que se tenha, primeiramente, uma “boa” compreensão do sistema decimal de registro dos números naturais. A forma decimal para os não-inteiros pode ser vista, logicamente, como uma simples extensão dessa ideia básica. Mas essa forma de abordagem pode ser também um pouco problemática na escola, pois os decimais passam a representar uma forma um tanto ambígua, e também pedagogicamente importante, onde são usados para ajudar na construção do conceito abstrato de número racional e, ao mesmo tempo, eles podem ser vistos como uma outra forma de representar algo que já é conhecido, a fração. Entender essa dupla utilidade dos decimais é importante para o professor pois, uma vez que ele for capaz de compreender claramente as relações entre as formas de representar um objeto e o próprio objeto em si, ele terá desenvolvido o próprio processo de apreensão que o aluno pode ter. (MOREIRA e DAVID, 2007, p. 90)

Saber classificar um número real como racional ou irracional é uma habilidade que pode sugerir uma compreensão um pouco maior do conceito de número e pode ser explorada, por exemplo, em situações que exijam um método específico resolução de um problema, como é o caso da equação transcendente apresentada na Questão 5.

3.5 Questão 5 – Raízes de uma equação

Questão 5

Quantas raízes possui a equação $2^x = x^2$? Quais são? Essas raízes são racionais ou irracionais?

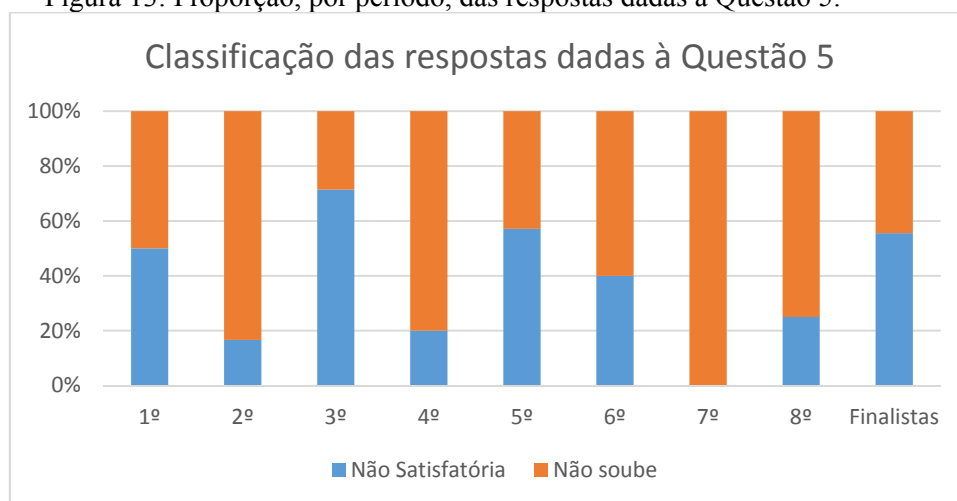
Esta questão pretendia verificar quais os métodos os estudantes usariam para encontrar as raízes da equação transcendente. Tal equação possui duas raízes racionais que são os números $x = 2$ e $x = 4$ e uma raiz irracional que, usando-se de algum método numérico (como o método da bisseção) pode-se ter uma estimativa do valor $x = -0,76666469 \dots$. Os métodos de estimativa de raízes são assuntos estudados pelos participantes do 6º Período em diante, porém esperava-se que os estudantes dos grupos anteriores ao 6º Período utilizassem métodos gráficos para encontrar a interseção das funções, exponencial e quadrática, envolvidas na equação, pois eles estudaram esses dois tipos de funções na disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar I.

Para que o estudante se sentisse livre em utilizar qualquer método que tivesse estudado, esta questão procurou não restringir, no enunciado, as respostas como explicações voltadas a

alunos da Educação Básica, como foi feito nas questões anteriores. Apesar dessa liberdade de escolha, não houve qualquer resposta que pudesse ser classificada como *satisfatória*. O improfícuo desempenho na Questão 5 ficou então distribuído entre as respostas *não satisfatórias* e *não soube*, apresentadas na Figura 13.

Ressalta-se que, todos os três participantes do 7º Período não souberam responder a esta questão, sendo que 32 (do total das 55) respostas da amostra foram consideradas como *não soube*.

Figura 13: Proporção, por período, das respostas dadas à Questão 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Uma característica diferente foi adotada para classificar as respostas como *não soube* nesta questão, além dos critérios adotados nas questões anteriores, levou-se em conta também a justificativa de algumas respostas conforme os exemplos transcritos a seguir:

Exemplo 1

Neste caso pode até ter alguns raiz, porque elas vai ter casos que são racional e irracional. (Estudante 42, 1º Período)

Exemplo 2

A equação possui n raízes. (Estudante 7, 4º Período)

Exemplo 3

$2^x - x^2 = 0$ Não consegui verificar as raízes, talvez utilizando o conteúdo de logaritmos para uma possível tentativa,

$$\log 2^x = \log x^2$$

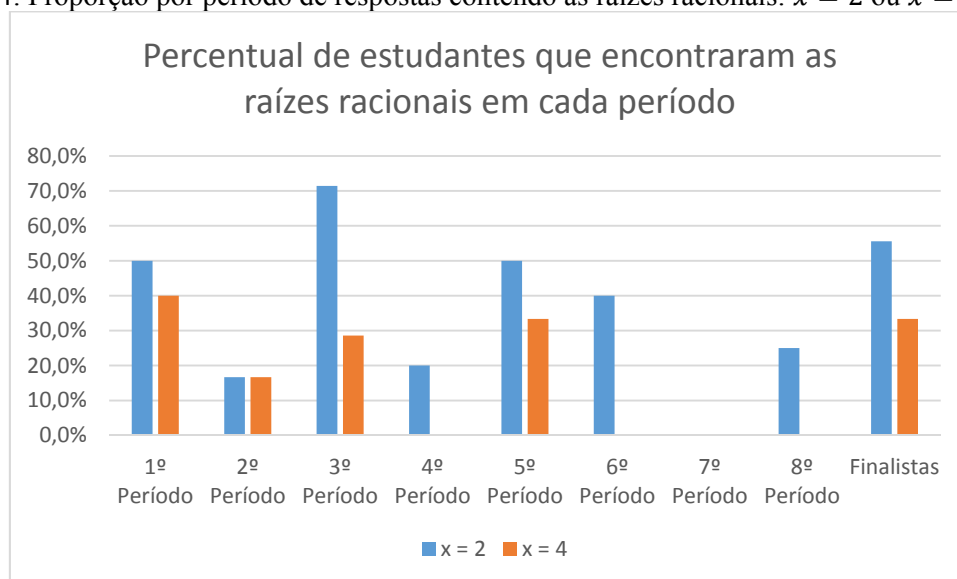
$$\log 2^x - \log x^2 = 0. \text{ (Estudante 40, Finalistas)}$$

Estudantes que davam este tipo de resposta deixavam transparecer que queriam evitar responder que não sabiam ou deixar em branco a questão. Por este motivo tais respostas foram

classificadas como *não soube*.

Já nas respostas consideradas como *não satisfatórias*, os estudantes conseguiram encontrar uma ou duas das raízes racionais porém, registravam alguma incoerência matemática, não classificavam as raízes ou nada diziam sobre a existência da terceira raiz. A proporção de estudantes, em cada período, que encontrou as raízes $x = 2$ ou $x = 4$ é apresentada na Figura 14.

Figura 14: Proporção por período de respostas contendo as raízes racionais: $x = 2$ ou $x = 4$.



Fonte: Dados da pesquisa.

Pela figura anterior vê-se que nenhum dos participantes do 4º, 6º e 8º períodos encontraram a raiz $x = 4$, apesar de terem encontrado a raiz $x = 2$. Na maioria das respostas, os estudantes não registravam os procedimentos empregados para encontrar as raízes, alguns traços a lápis apagados davam a entender que eles faziam tentativas de substituição de alguns valores e apresentavam as respostas a partir da validade de algumas operações básicas de potenciação. São exemplos de respostas registradas as seguintes:

Exemplo 1

3 raízes, 2, 4, 6. São raízes racionais. (Estudante 23, 1º Período)

Exemplo 2

$$2^x = x^2$$

$2^2 = 2^2$ Duas, ± 2 , racionais. (Estudante 28, 4º Período)

Exemplo 3

$$2^x = x^2$$

$$2^x = x \cdot x$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

$2^2 = 4 = \sqrt{4} = \pm 2$ Possui duas raízes. (Estudante 44, 5º Período)

Exemplo 4

$$2^x = x^2$$

$$2^2 = 2^2,$$

1, $x = 2$, são raízes racionais. (Estudante 37, 6º Período)

Exemplo 5

São racionais, $x = 2$. (Estudante 17, 8º Período)

Exemplo 6

Por se tratar de alunos de educação básica teria que verificar se os mesmos já trabalharam com logaritmo. Se não há a possibilidade de usar o método de tentativa e erro. Podendo encontrar por exemplo $x = 2$, $2^2 = 2^2$ e $x = 4$, $2^4 = 4^2$. Pode ser que haja outros.

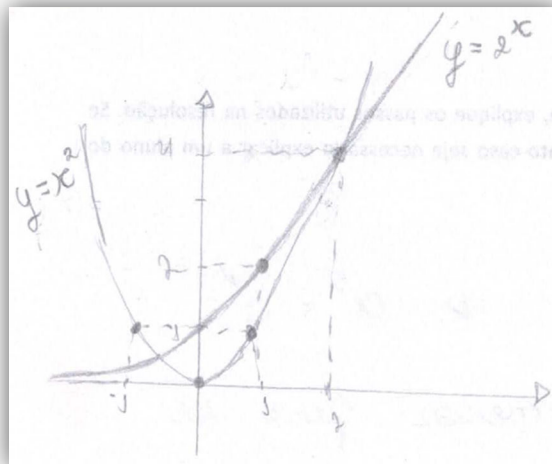
$$\log_2 2^x = \log_2 x^2$$

$$x \log_2 2 = 2 \log_2 x$$

$$x = 2 \log_2 x. \text{ (Estudante 13, Finalistas)}$$

Nos Exemplos 1 a 5 vê-se que cada um contém uma incoerência matemática, seja por afirmar incorretamente que algum número é raiz da equação (como -2 ou 6) ou por afirmar, a partir de uma resposta encontrada, que as raízes da equação são racionais. No Exemplo 6 fica claro o método da substituição utilizado pelos estudantes e nota-se também que a estratégia adotada pelo Estudante 13 em utilizar logaritmo para tentar encontrar outra raiz, o levou a cair numa outra equação transcendente da qual ele não conseguiu avançar na resolução e, por isso, não arriscou classificar as raízes da equação.

Figura 15: Gráfico da resolução da Questão 5 do Estudante 6, 3º Período.



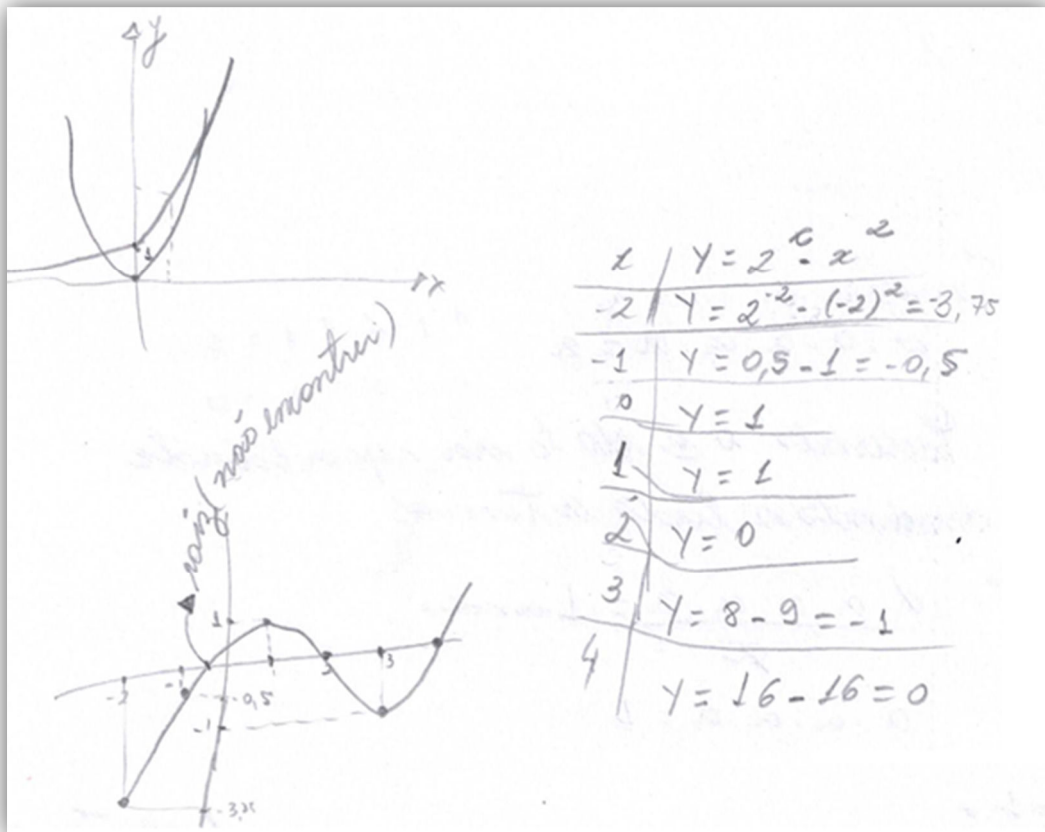
Fonte: Respostas do Estudante 6, 3º Período.

Apenas um estudante mencionou que há uma raiz irracional e, para isso, utilizou-se de um método diferente da simples tentativa de substituição ao responder, conforme pode ser visto na Figura 15. Ele fez uso do gráfico e, após isso, respondeu: “Possui duas raízes, uma é o dois que é racional e a outra é um número irracional que não é possível identificar.” (Estudante 6, 3º

Período). Contudo, os prolongamentos das curvas do gráfico, desenhado pelo estudante na Figura 15, o impediram de ver que as curvas se intersectariam novamente no valor $x = 4$, mas foi o suficiente para ele perceber que as curvas se intersectam duas vezes dentro do intervalo $-1 < x \leq 2$. Essa resposta foi considerada *não satisfatória* pois, apesar dessa estratégia adotada fornecer uma percepção visual contribuindo para a elaboração da resposta dada, a apresentação gráfica desenhada não o possibilitou encontrar a outra raiz e, por isso, ele não buscou encontrá-la lançando mão de outro método.

Similarmente ao Estudante 6, um dos Finalistas também tentou responder a esta questão empregando o gráfico de funções, mas antes disso ele experimentou resolver a questão por substituição da seguinte maneira “ $x = 2, 2^2 = 2^2 = 4. x = 4, 2^4 = 4^2 = 16$. Possui duas raízes $x = 2$ e $x = 4$. São raízes racionais.” (Estudante 16, Finalistas).

Figura 16: Gráfico da resolução da Questão 5 do Estudante 16, Finalistas.



Fonte: Respostas do Estudante 16, Finalistas.

A Figura 16 apresenta os gráficos desenhados pelo Estudante 16, onde constata-se que ele tenta representar o gráfico de duas funções como no caso anterior e, como não consegue identificar as raízes, ele modifica a equação tornando-a numa função real cuja lei de associação

é $y = 2^x - x^2$, a partir daí, ele utiliza alguns valores no domínio para obter as respectivas imagens que forneceram um comportamento do gráfico. Quando ele esboça o segundo gráfico, percebe que há uma terceira raiz indicando-a dentro do intervalo $-1 < x < 0$. Porém, ele não cita isso na sua resposta final, transcrita anteriormente, e afirma que as raízes são racionais, nada dizendo sobre a possibilidade da terceira raiz não encontrada ser irracional. Por este motivo, esta resposta também foi classificada como *não satisfatória*.

Quanto ao aspecto do *entendimento e compreensão do conceito* de números reais, confirmou-se, nas repostas a esta questão, a mesma dificuldade encontrada na questão anterior, ou seja, os estudantes não conseguiram distinguir claramente um número racional de um número irracional e nem mencionaram qualquer ligação destes tipos numéricos com a equação transcendente dada.

Em suma, o que se pode depreender da maioria das respostas obtidas é que o aspecto do *repertório básico* utilizado pelos estudantes para responder a esta questão fundamentava-se em duas estratégias principais: 1 - Utilizar tentativas aleatórias de substituição de valores na incógnita para encontrar uma resposta; ou 2 - Elaborar alguma manipulação algébrica como, por exemplo, fazer uso da raiz quadrada ou do logaritmo em ambos os membros da igualdade para tentar isolar a incógnita. Porém, nenhuma destas estratégias propiciou uma visão mais profunda acerca do significado numérico da equação dada. De acordo com Even (2011, p. 537), isso se deve ao fato de que a compreensão incompleta da estrutura dos conjuntos numéricos, ou seja, dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, e até mesmo os complexos, são uma deficiência do *repertório básico* que provoca dificuldades com a compreensão de funções ou equações.

No presente trabalho, foi detectado que a maioria das respostas evidenciavam a primeira estratégia, ou seja, as tentativas de substituições (intuitivas ou aleatórias) de valores nas incógnitas foram utilizadas para verificar a validade da equação para alguns números. Ao encontrar um número que validasse a questão, o estudante interrompia o procedimento de apuração numérica e concluía a resposta a partir do número válido encontrado. Isto pode ser indício de um obstáculo conceitual onde o estudante, ao alcançar algum resultado experimental válido, sente-se satisfeito com um “conhecimento” que aparentemente possui, e por isso não questiona a si próprio no intuito de reconstruir ou expandir esse conhecimento. Todavia, como mais de 58% das respostas a esta questão foram consideradas como *não soube*, as informações obtidas nesta questão não permitiram uma dedução mais incisiva sobre o obstáculo citado e, para resolver esse óbice, é necessário utilizar os resultados obtidos na Questão 6 para acurar melhor tal dedução.

3.6 Questão 6 – Soluções reais e complexas e simplificação por zero

Questão 6

Ao elaborar um problema, o professor pensou num número que multiplicado por ele mesmo cinco vezes é igual a ele próprio e criou a seguinte equação:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$$

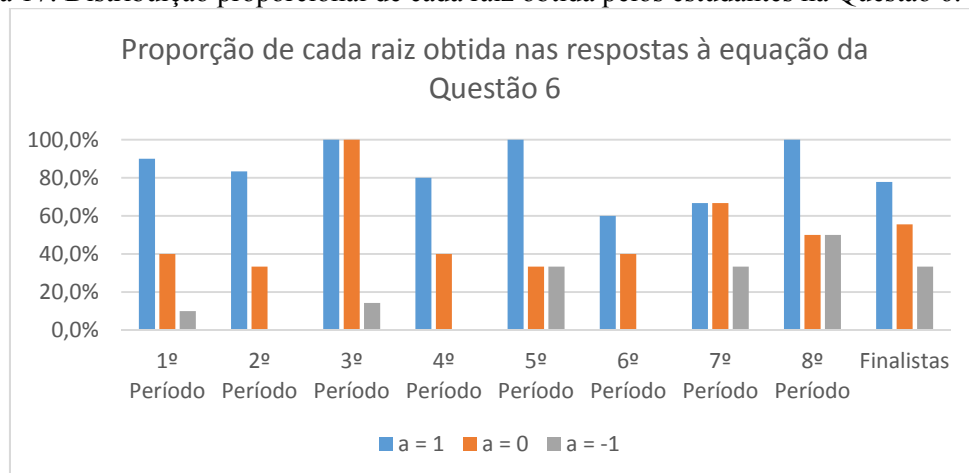
Qual a resposta da equação dada? Se você resolveu algebricamente, explique os passos utilizados na resolução. Se possível, utilize mais de uma resolução para facilitar o entendimento caso seja necessário explicar a um aluno do ensino médio.

Esta questão obteve um dos menores índices (12,7%) de respostas classificadas como *não soube*, e por isso, forneceu uma visão mais ampla sobre o obstáculo citado na questão anterior. Mas, antes de comentar sobre esse obstáculo, é necessário descrever a classificação das respostas obtidas.

Ao resolver esta questão, o estudante deveria encontrar os cinco números que compõem o conjunto solução da equação ($S = \{0, \pm 1, \pm i\}$). Assim como foi feito na Questão 5, essa questão utilizou-se de uma equação que possui raízes em conjuntos numéricos distintos, isto foi feito para verificar se o estudante é capaz de pensar além de um único conjunto numérico.

Dos 55 participantes do teste, 47 responderam a essa questão afirmando que o número 1 é solução da equação. 28 estudantes responderam que o número 0 é solução. E, apenas 10 estudantes assumiram o número -1 como uma solução. Apesar disso, nenhum dos estudantes mencionaram alguma das raízes $\pm i$ como solução da equação. Isso denotou que, mesmo que o enunciado não tenha feito qualquer restrição do conjunto solução, os estudantes tiveram alguma resistência em pensar além do conjunto dos números reais para resolver a equação dada. A distribuição dessas respostas está representada na Figura 17.

Figura 17: Distribuição proporcional de cada raiz obtida pelos estudantes na Questão 6.



Fonte: Dados da pesquisa.

Da Figura 17, nota-se que a raiz -1 é a menos identificada dentre as soluções reais da equação, ocorrendo uma alternância nos índices nulos dessa resposta até o 6º período. Isso ocorreu pois, 31 das 55 respostas obtidas nessa questão utilizavam alguma regra multiplicativa que não possibilitava ao estudante encontrar uma resposta negativa. Os exemplos deste tipo de resposta são transcritos a seguir:

Exemplo 1

Todo número multiplicado por 1 é igual a ele mesmo, $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Todo número multiplicado por 0 é igual a 0 $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.(Estudante 46, 1º Período)

Exemplo 2

Uma possível resposta é o número 1. Vamos pensar dessa forma, o número 1 pode ser multiplicado várias vezes que o resultado não muda, será 1. Substituindo na equação temos, $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.(Estudante 47, 1º Período)

Exemplo 3

Neste caso, podemos usar o número 1 como exemplo quando multiplicamos ele $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ sempre vai ser 1, isso pode ser até infinitas vezes que sempre vai ser ele mesmo. (Estudante 42, 2º Período)

Exemplo 4

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a \Rightarrow a^5 = a^1$$

Só existe dois números que se eu elevar a 5 e a 1 darão o mesmo resultado, o 1 e o 0.

A outra forma seria passar o a dividindo, mas então eu já estaria afirmando que $a \neq 0$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{a}{a}$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = 1 \Rightarrow a^4 = 1$$

Um número multiplicado por ele mesmo várias vezes é 1, então ele é 1. Ou

$$a^4 = 1 \Rightarrow a = \sqrt[4]{1} \Rightarrow a = 1 \text{ (Estudante 6, 3º Período)}$$

Exemplo 5

O único número que multiplicado por ele mesmo infinitas vezes e tem ele próprio como resultado é o número 1. Elemento neutro da multiplicação. (Estudante 10, 8º Período)

O Exemplo 4 expressa de uma forma mais enfática que, ao evocar a regra “Um número multiplicado por ele mesmo várias vezes é 1, então ele é 1” o Estudante 6, mesmo tendo efetuado alguns procedimentos algébricos, concluiu a sua resposta fundamentando-se na própria regra e, por isso, não considerou as outras raízes.

Tendo feito essa abordagem antecipada das respostas obtidas, espera-se que se compreenda os critérios estabelecidos para classificação e categorização das respostas.

Como não houve qualquer resposta que considerou um número complexo como solução da equação, decidiu-se em classificar como resposta *satisfatória* as que apresentassem todas as

três raízes reais (-1, 0 e 1) pois, desse modo, o estudante estaria contemplando todas as soluções da equação pertencentes a um dos dois conjuntos numéricos. Adotando esse critério, obtém-se os resultados apresentados na Tabela 8 onde, dos grupos amostrais, somente os participantes do 3º, do 7º e do 8º Período apresentaram respostas do tipo *satisfatória*. O que chama a atenção é o fato de nenhum dos estudantes Finalistas apresentarem todas as três raízes reais, pois era esperado que estes estudantes encontrassem todas as raízes, inclusive as complexas, já que todos os participantes desse grupo cursaram as disciplinas Fundamentos da Matemática Elementar II e Álgebra II, que contemplam em seus planos de ensino os assuntos: Equações Polinomiais, Polinômios Complexos, Raízes e Multiplicidade. Isso aponta uma falha no aporte dessas disciplinas para a resolução desta questão.

Tabela 8: Classificação das respostas dadas à Questão 6

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	0,0%	0,0%	14,3%	0,0%	0,0%	0,0%	33,3%	25,0%	0,0%
Não Satisfatória	90,0%	83,3%	85,7%	80,0%	100,0%	60,0%	66,7%	75,0%	77,8%
Não soube	10,0%	16,7%	0,0%	20,0%	0,0%	40,0%	0,0%	0,0%	22,2%

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas do tipo *não satisfatórias* foram todas da categoria *incorretas* pois, fundamentavam-se exclusivamente numa regra multiplicativa, como os exemplos apresentados anteriormente, ou realizavam algum procedimento inadequado, como nos exemplos a seguir:

Exemplo 1

A solução é 1 e 0. Começaria pela definição de multiplicação, explicando que o 1 é sempre elemento neutro. Então se o produto é igual a 1 é porque algum dos elementos é o próprio 1, como são todos iguais então $a = 1$.

O caso do zero é semelhante. Se o produto é igual a 0 então um dos elementos é o 0. Como todos são iguais então $a = 0$.

Depois provaria por absurdo para o restante dos números:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$$

$$a^5 = a$$

$5 = 1$, ABSURDO! (Estudante 5, 3º Período)

Exemplo 2

$a^5 = a^1 \Rightarrow \frac{a^5}{a^1} = 1 \Rightarrow a = 1$. Logo $a = 1$. (Estudante 35, 5º Período).

Exemplo 3

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$$

$$a^4 \cdot a = a$$

$$a^4 = \frac{a}{a}$$

$a^4 = 1$. O número 1 é possível de realizar essa operação pois o número 1 multiplicado 5 vezes é igual a ele mesmo. (Estudante 29, 5º Período).

Temos $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$ passando o a do lado direito da igualdade para o lado esquerdo, obtemos

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a} = 1, \text{ simplificando, } a \cdot a \cdot a \cdot a = 1 \Rightarrow a^4 = 1.$$

Tirando a raiz quarta de ambos os membros, temos $\sqrt[4]{a^4} = \sqrt[4]{1} \Rightarrow a = 1$.
(Estudante 16, Finalistas)

Exemplo 4

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$ dividindo ambos os lados por a

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a} = \frac{a}{a}, \text{ Simplificando temos: } a \cdot a \cdot a \cdot a = 1 \text{ mas } a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4,$$

$$\text{então } a^4 = 1 \Rightarrow a^4 - 1 = 0$$

Consideremos $x = a^2$, então de $a^4 - 1 = 0$ temos $(a^2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$, disto temos:

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, \text{ mas como } x = a^2, \text{ para } x = 1 \text{ temos: } a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

Já para $a^2 = -1$ não haverá raiz real. (Estudante 15, Finalistas)

Exemplo 5

Considere pensando número igual a x , considere esse número multiplicado 5 vezes: $5x$

E o resultado resulte no próprio número x :

$$x \cdot 5x = x$$

$$5x^2 - x = 0$$

Agora para resolver essa equação do segundo grau, utilize a fórmula de Bhaskara.

$$5x^2 - x = 0, \text{ onde } a = 5, b = -1, c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{+1 \pm 1}{2} \text{ onde } x_1 = \frac{2}{2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{0}{2} = 0. \text{ Logo a solução são as raízes } 1 \text{ e } 0.$$

2ª) Considerando $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$

$$\text{então } a^5 = a \Rightarrow a^5 - a = 0 \Rightarrow a(a^4 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } (a^4 - 1) = 0$$

$$a^4 - 1 = 0 \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a = 1 \text{ (Estudante 40, Finalistas)}$$

Os estudantes dos Exemplos 1 e 3, apesar de registrarem erros de caráter matemático, como declarar o absurdo a partir de uma igualdade forçada dos expoentes (Exemplo 1) e efetuar uma simplificação irrestrita (Exemplo 2), valeram-se de alguma propriedade multiplicativa, mesmo que incorreta, para responder a questão proposta. O Exemplo 2 registra implicações lógicas incorretas que, se realizadas em ordem inversa fariam sentido lógico. No Exemplo 4, há outra simplificação irrestrita. E, no Exemplo 5, ainda que o Estudante 40 tenha resolvido a questão por duas maneiras distintas, conforme solicitou o enunciado, na primeira maneira ele confunde o expoente 5 com um coeficiente e, a partir daí elabora uma outra equação diferente da apresentada na questão, e na segunda maneira ele não considera a solução negativa da última implicação.

Houve cinco respostas que registraram a simplificação irrestrita (simplificação por zero) como as transcritas nos exemplos anteriores. Duas dessas respostas foram do grupo dos estudantes do 5º Período e três delas do grupo dos Finalistas. Sendo um quantitativo pequeno em relação à grande quantidade de respostas que apoiaram-se numa regra multiplicativa.

As únicas três respostas que atenderam ao critério estabelecido para serem classificadas como *satisfatórias* são:

Exemplo 1

$$a^5 - a = 0$$

$$a(a^4 - 1) = 0$$

$$a = 0 \quad a^4 - 1 = 0$$

$$a^4 = 1$$

$$a = \pm 1 \text{ (Estudante 21, 3º Período)}$$

Exemplo 2

$$(a^5 - a) = 0$$

$$a(a^4 - 1) = 0$$

$$a = 0 \text{ ou } a^4 - 1 = 0$$

$$a^4 = 1. \text{ } a \text{ é um número cuja a 4ª potência dá 1, como } a = 0, \text{ temos que}$$

$$a^4 = 1.$$

Seja $a^4 = y^2$ então $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$, ou seja, as soluções são $a = 0$, $a = 1$ e $a = -1$. (Estudante 30, 7º Período)

Exemplo 3

Temos a multiplicação de “n” fatores iguais dando o próprio **a**, assim, a maneira de explicar ao aluno sobre o valor de **a**, bastamos notar que o elemento neutro da multiplicação é 1, como o **a** é multiplicado n vezes, a única solução é que o **a** seja igual a 1 ou zero, além disso **a** poderá ser negativo, ou seja, -1, pois o produto contém n fatores ímpares.

Outro método é pensar que como é um produto de valores iguais podemos pensar em resolver potencialmente, então teríamos:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a \Rightarrow a^5 = a^1, \text{ daí, os únicos valores que } a \text{ pode assumir será } 1, -1 \text{ ou zero. (Estudante 17, 8º Período)}$$

Ainda que estas respostas tenham sido consideradas como *satisfatórias* para quantificar uma classe de respostas, elas não apresentaram uma boa competência numérica quando se trata da descrição IV.3 (Decidir e justificar, por escrito e oralmente, a melhor maneira de resolver um problema em termos de eficácia e de formalidade matemática e discutir a invalidade de caminhos alternativos.) da competência IV (Elaborar e resolver problemas aritméticos) de Contreras et al. (2012) pois, a validade matemática das explicações dadas podem ser questionadas, principalmente pelo fato destes estudantes não terem registrado o conjunto numérico ao qual estavam empregando os métodos adotados.

Sob o aspecto das *formas alternativas de abordagem* de Even (1990), foram detectadas

apenas duas formas de abordagem da questão que são: 1 – Utilizar uma propriedade multiplicativa para intuir alguma respostas; 2 – Aplicar alguma propriedade de potenciação para realizar uma manipulação aritmética. Sendo que a primeira estratégia foi a mais utilizada. E poucos estudantes utilizaram as duas estratégias ao mesmo tempo.

Retomando o obstáculo conceitual citado na Questão 5, os resultados da Questão 6 corroboraram para afirmar que os estudantes, ao encontrarem um resultado experimental, seja usando uma propriedade das operações numéricas ou por tentativa de substituição, não conseguem ir além disso e, portanto, não questionam a si próprios sobre outras possibilidades de resolução de um problema. Ou seja, é como se aquela solução encontrada pelo estudante manifestasse um conhecimento que ele já possui e esse conhecimento inicial se torna uma obstrução à aquisição de um novo conhecimento ou ao desenvolvimento de conexões entre os níveis de conhecimento que ele já possui. A resposta que melhor representa essa situação é a do estudante do 7º Período que diz: “Só consigo pensar que $a = 1$.” (Estudante 18). Esta situação é descrita por Bachelard (1996) da seguinte maneira:

O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno. As revelações do real são recorrentes. O real nunca é "o que se poderia achar" mas é sempre o que se deveria ter pensado. O pensamento empírico torna-se claro depois, quando o conjunto de argumentos fica estabelecido. (BACHELARD G. , 1996, p. 17, aspas no original)

Portanto, o conhecimento (parcial) do estudante sobre uma propriedade multiplicativa o fez “achar” que ele já sabia a solução da equação impedindo-o de ter pensado nas outras soluções mobilizando outros conhecimentos como, por exemplo, lembrar-se que uma equação polinomial de quinto grau possui até cinco raízes ou que é possível fatorar o polinômio a partir de uma raiz conhecida e verificar a existência de outras raízes, tais assuntos são estudados na disciplina de Fundamentos da Matemática Elementar II, cursada pelo estudantes logo no primeiro semestre letivo.

Para tentar esquadrihar melhor a compreensão do modo como os estudantes acionam os conhecimentos que possuem para solucionar equações obtendo os números que tornam válida a igualdade é aperiante espreitar os resultados obtidos na Questão 7 onde, além de encontrar os números que são presumidos como raízes da equação, é necessário que o estudante indague a si mesmo sobre a resposta encontrada e substitua tais respostas na equação apresentada para constatar a validade das respostas.

3.7 Questão 7 – Raízes estranhas

Questão 7

Resolva a equação $\sqrt{x} + 2 = x$

Como você explica as raízes obtidas nesta equação?

Esta questão possui dois comandos a serem atendidos pelo estudante, o primeiro é resolver a equação fornecida e o segundo é explicar a solução obtida e os procedimentos empregados para obter tal solução. Por este motivo, se o estudante apontou uma solução correta valendo-se apenas de uma substituição numérica intuitiva ou, se ele registrou procedimentos adequados porém não explicou tais procedimentos então, pelo critério da explicação pedagógica insuficiente, sua resposta foi enquadrada como *não satisfatória*, conforme o Exemplo 1 adiante. Além disso, se o estudante apontou duas soluções numéricas distintas e não verificou a validade de tais soluções então, pelo critério da incoerência matemática, a sua resposta também foi considerada como *não satisfatória*, como no Exemplo 2 a seguir.

Exemplo 1

$$\sqrt{x} - x = -2$$

$$\sqrt{4} - 4 = -2$$

$$2 - 4 = -2 \text{ (Estudante 31, 1º Período)}$$

Exemplo 2

$$\sqrt{x} + 2 = x$$

$$(\sqrt{x})^2 = (x - 2)^2$$

$$x = x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x' = 4$$

$$x'' = 1$$

Para calcularmos a equação que possui uma raiz em um dos membros, devemos elevar ambos os membros ao quadrado para descartarmos a raiz. E elevando ambos os membros não alteramos o resultado da equação. Assim, usando a fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$ e $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, obtém-se $x = 4$ e $x = 1$;

Para tirar a prova basta substituir estes valores na equação. (Estudante 49, 2º Período)

Após a classificação, obteve-se o cenário apresentado na Tabela 9 onde, apenas dois participantes (3,6%) do total da amostra registraram respostas classificadas como *satisfatórias*, sendo um participante do 3º e o outro do 5º período.

Tabela 9: Classificação das respostas dadas à Questão 7.

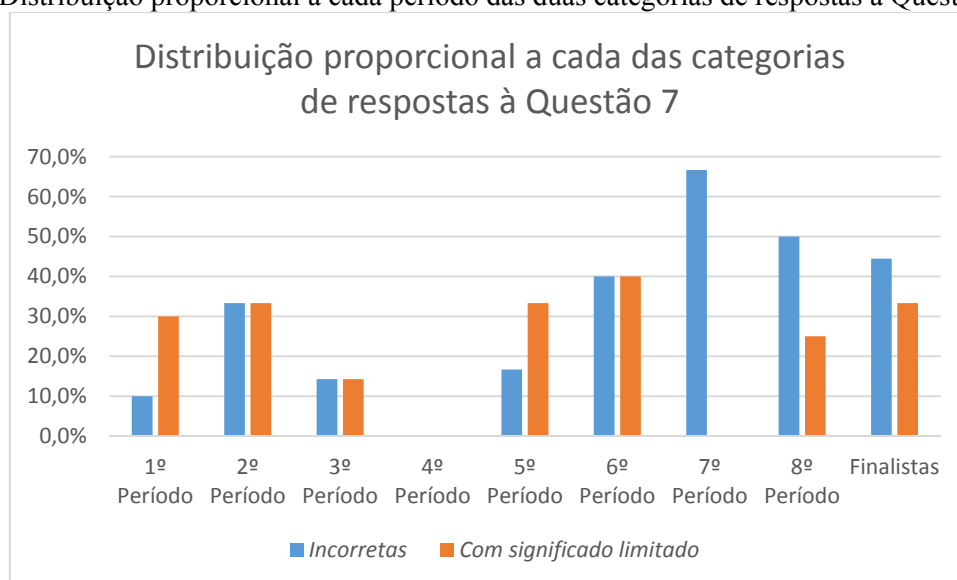
Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	0,0%	0,0%	14,3%	0,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Não Satisfatória	40,0%	66,7%	28,6%	0,0%	50,0%	80,0%	66,7%	75,0%	77,8%
Não soube	60,0%	33,3%	57,1%	100,0%	33,3%	20,0%	33,3%	25,0%	22,2%

Fonte: Dados da pesquisa.

Destaca-se nesta classificação o fato de que, nenhum dos cinco participantes do 4º período souberam responder a esta questão, o que contrasta com os dados da Figura 2 no início deste capítulo, onde o 4º período disputa com o 6º período a segunda posição quando se compara a proporção de estudantes com experiência docente e, também, é o 4º período o grupo com a segunda maior proporção de estudantes que se sentem preparado para ensinar matemática básica.

Além disso, das 29 respostas classificadas como não satisfatórias, 15 respostas foram da categoria *incorretas* e 14 da categoria *com significado limitado*. A distribuição destas categorias, proporcional a cada grupo da amostra, está representada na Figura 18, onde pode-se ver que os três maiores índices de respostas *incorretas* ocorreu no grupos do 7º período, do 8º período e dos Finalistas.

Figura 18: Distribuição proporcional a cada período das duas categorias de respostas à Questão 7.



Fonte: Dados da pesquisa.

Foram incluídas na categoria *incorretas* as respostas semelhantes ao Exemplo 2, citado anteriormente, pois forneciam incorretamente o número $x = 1$ como raiz da equação sem verificar a validade deste tipo de resposta. Isto ocorreu em sete respostas sendo, uma do 1º e uma do 2º período, duas do 7º período e três dos Finalistas. As oito respostas restantes da categoria *incorretas* registravam erros procedimentais diversos como os apresentados nos exemplos a seguir:

Exemplo 1

$$\sqrt{x} + 2 = x$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x})^2 + 2 &= x^2 \\
 x + 2 &= x^2 \\
 -x^2 + x + 2 &= 0 \\
 \Delta &= 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (2) = 1 + 8 = 9 \\
 x &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \\
 x' &= -1 \\
 x'' &= 2. \text{ (Estudante 42, 2º Período)}
 \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x} + 2 - x &= 0 \\
 x^{\frac{1}{2}} + 2 - x &= 0 \\
 x^{\frac{3}{2}} + 2 &= 0 \\
 x^{\frac{1}{2}} &= -2. \text{ São raízes irracionais. (Estudante 51, 6º Período)}
 \end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x} + 2 - x &= 0 \\
 x^{\frac{1}{2}} - x &= -2
 \end{aligned}$$

$$x^{\frac{1}{2}} \left(1 - x^{\frac{1}{2}}\right) = -2$$

$$\begin{array}{l|l}
 x^{\frac{1}{2}} = -2 & 1 - x^{\frac{1}{2}} = -2 \\
 \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x = 4 & -x^{\frac{1}{2}} = -3 \\
 & \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9. \text{ Erro.}
 \end{array}$$

(Estudante 45, 8º Período)

No Exemplo 1, o estudante 42 erra ao elevar os membros da equação ao quadrado aplicando o procedimento, no primeiro membro, somente ao elemento (\sqrt{x}) . No Exemplo 2, o estudante 51 aplica incorretamente uma propriedade de produtos de potência de mesma base com os elementos $x^{1/2}$ e $-x$ para obter o termo $x^{3/2}$. E, no Exemplo 3, o estudante 45 utiliza inadequadamente uma propriedade da multiplicação por zero num produto cujo resultado é -2 .

Já nas respostas *com significado limitado*, estão as que resolveram corretamente a equação e verificaram a validade dos números obtidos como raiz da equação porém, não explicaram o motivo de terem obtido números que não são raízes da equação, isso ocorreu em duas respostas, sendo uma do 5º período e uma dos Finalistas, como o exemplo a seguir:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x} + 2 &= x \\
 \sqrt{x} &= x - 2 \\
 (\sqrt{x})^2 &= (x - 2)^2 \\
 x &= x^2 - 4x + 4 \\
 x^2 - 5x + 4 &= 0
 \end{aligned}$$

Eu diria para isolar o número com raiz de um membro da equação, em seguida elevaria ambos os lados da equação ao quadrado, para poder eliminar a raiz, diria que é um artifício de cálculo. Logo depois ao encontrar as raízes, pediria para substituir os valores encontrados na equação

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x' = 4, x'' = 1.$$

original e ai sim verificar se as raízes encontradas são solução da equação, no caso apenas $x = 4$ é verdadeira. (Estudante 29, 5º Período)

As outras 12 respostas *com significado limitado* são as que mencionaram corretamente a raiz $x = 4$ obtida exclusivamente através da substituição intuitiva desse valor na equação. Essa estratégia de resolução apareceu em três respostas do 1º Período, em duas repostas do 2º período, do 6º período e dos Finalistas (cada), e em uma resposta do 3º, do 5º e do 8º período (cada). Isto mostra que esta estratégia é persistente desde os estudantes ingressantes aos concluintes do curso.

Sob o aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* (EVEN, 1990) percebeu-se que, dos nove estudantes que tentaram resolver a equação utilizando-se de uma manipulação algébrica, somente dois verificaram para quais das respostas obtidas estabelecia-se uma verdade matemática. E que, dos 14 estudantes que forneceram uma resposta correta, 12 utilizaram-se de uma substituição intuitiva mas não conseguiram explicar um procedimento adequado para justificar a obtenção da resposta. Este tipo de resposta é sintetizada pelo Estudante 50 quando diz: “ $\sqrt{x} + 2 - x = 0$. Visualmente consigo perceber que $x = 4$ é solução da equação mas não consigo desenvolver o cálculo.” (Estudante 50, 3º Período). Isto dá ênfase ao obstáculo conceitual detectado na Questão 6.

Nas duas respostas *satisfatórias* nota-se que o aspecto da *compreensão do conceito* (EVEN, 1990) de raiz quadrada não está tão bem consolidado no estudante do 5º período em relação ao estudante do 3º período, conforme pode ser visto a seguir:

Exemplo 1

$$x - \sqrt{x} - 2 = 0, u = \sqrt{x}, u^2 = x$$

$$u^2 - u - 2 = 0, \Delta = 1 + 8 = 9$$

$$u = \frac{1 \pm 3}{2}, u_1 = 2, u_2 = -1 \text{ como } u = \sqrt{x} \text{ esse último resultado não é possível.}$$

$$\sqrt{x} = 2, x = 4 \text{ Só existe uma, pois os números ou são pequenos demais para que a diferença seja 2 ou são grandes demais. Só o quatro nos dá essa possibilidade. (Estudante 6, 3º Período)}$$

Exemplo 2

$$\sqrt{x} = x - 2 \rightarrow \text{passo 1}$$

$$x = (x - 2)^2 \rightarrow \text{passo 2}$$

$$x^2 - 4x + 4 - x = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x' = 4, x'' = 1. \text{ Logo, o } x = 4 \text{ é solução da equação. Após encontrar as raízes podemos substituir e avaliar se está correto. Neste caso ao utilizar passo 1 e}$$

passo 2, temos uma perda de informações e propriedades e, por isso, o $x = 1$ não se encaixa na solução. (Estudante 35, 5º Período)

Vê-se que os dois estudantes utilizaram procedimentos algébricos diferentes, porém o estudante do Exemplo 1 (3º Período) deixa transparecer seu entendimento de que não é possível que um número negativo seja resultado de uma raiz quadrada, enquanto que o estudante do Exemplo 2 (5º Período) afirma que na passagem do passo 1 para o passo 2 há “uma perda de informações e propriedades” mas não deixa claro quais informações ou propriedades são essas.

Em síntese, fica notório que os estudantes conseguiram, dentro da competência III (CONTRERAS et. al., 2012), calcular com fluidez ou fazer uma estimativa razoável para uma raiz quadrada que representa um número natural mas não demonstraram um bom desenvolvimento da competência II, ou seja, não compreendem completamente o significado da operação envolvida na equação. E, para investigar melhor a competência II (Compreender os significados das operações e como se relacionam umas com as outras) foi utilizada a Questão 8.

3.8 Questão 8 – Racionalização

Questão 8

Na escola, ao terminar um problema envolvendo radicais, geralmente somos instados a racionalizar o denominador do resultado obtido. Por que isso?

O objetivo da Questão 8 foi detectar se o estudante era capaz de associar a representação fracionária de um número irracional com o algoritmo da divisão. Por isso, se a resposta mencionou a influência da racionalização na operação de divisão, era manifestada a competência II (Compreender os significados das operações e como se relacionam umas com as outras) de Contreras et. al. (2012) ou, se a resposta apontou a validade de ambas as representações reconhecendo a igualdade da forma racionalizada com a não racionalizada era evidenciada a competência I (Compreender os números, suas diferentes representações). Em ambos os casos, a resposta foi classificada como *satisfatória*. Deste modo, foram obtidas seis respostas *satisfatórias*, sendo uma do 1º e uma do 2º período, duas do 3º período e duas dos Finalistas conforme os exemplos transcritos a seguir:

Exemplo 1

Para facilitar divisões futuras, geralmente quando se racionaliza um

denominador, é porque ele é uma raiz inexata, um número irracional, ao tirar esse radical do denominador, a divisão posterior terá um resultado mais preciso. (Estudante 33, 1º Período)

Exemplo 2

Para questões de notação mesmo, pois ao racionalizar o denominador o resultado obtido corresponde ao anterior. Só a escrita que é diferente. (Estudante 49, 2º Período)

Exemplo 3

Tomaremos como exemplo $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}$ é um número irracional que equivale aproximadamente a 1,4... Dividir 2 por esse é muito mais difícil que efetuar $\frac{2\sqrt{2}}{2}$. Portanto, aprende-se racionalizar para facilitar. Não é errado raiz no denominador, só é mais difícil. (Estudante 21, 3º Período)

Exemplo 4

Isto acontece porque é mais fácil efetuar uma divisão de um número irracional por um número racional do que o contrário. (Estudante 15, Finalistas)

Exemplo 5

Tipo $\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Se mantermos a fração inicial temos uma divisão por um número irracional, o que não é viável, sendo que a multiplicação por este mesmo elemento é mais fácil. (Estudante 14, Finalistas)

Verifica-se nos exemplos 1, 3, 4 e 5 que estes estudantes conseguiram estabelecer alguma relação da racionalização como a operação de divisão. E, nos exemplos 2 e 3 os respectivos estudantes assumiram a igualdade das duas representações.

Por outro lado, se a resposta foi confusa ou inconclusiva, então ela foi considerada como *não soube*, como, por exemplo:

Exemplo 1

Para deixar o resultado o mais pequeno possível, simplificando-o. (Estudante 23, 1º Período)

Exemplo 2

A velha mania de achar que se a questão tem raiz ela vai terminar em raiz. (Estudante 31, 1º Período)

De um modo geral, o desempenho de cada grupo da amostra na classificação das respostas pode ser visto na Tabela 10

Tabela 10: Classificação das respostas dadas à Questão 8.

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	10,0%	16,7%	28,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	22,2%
Não Satisfatória	20,0%	33,3%	42,9%	20,0%	16,7%	40,0%	0,0%	25,0%	44,4%
Não soube	70,0%	50,0%	28,6%	80,0%	83,3%	60,0%	100,0%	75,0%	33,3%

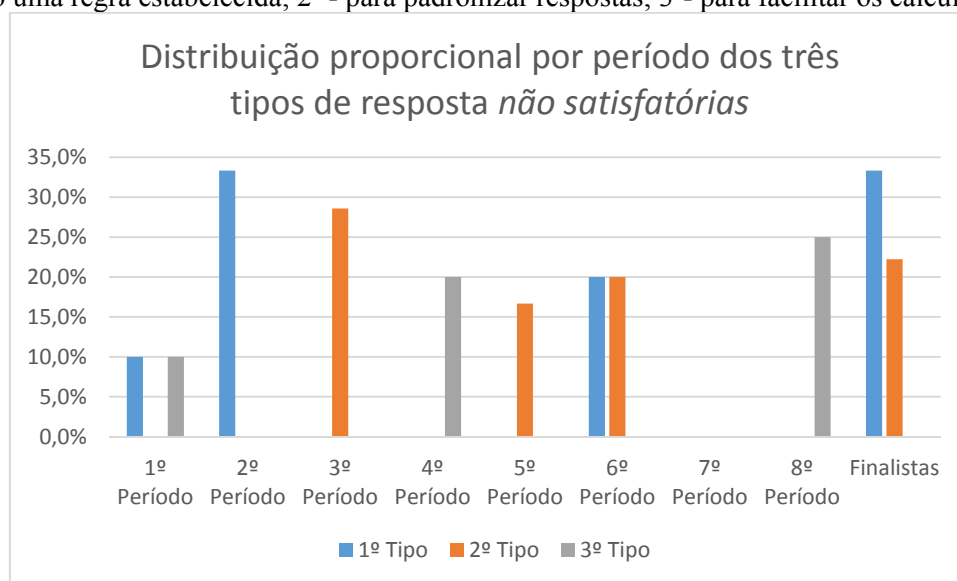
Fonte: Dados da pesquisa.

Cabe frisar que todos os três participantes do 7º Período tiveram suas respostas

classificadas como *não soube* e que esta questão foi a que obteve o maior índice (60%) da amostra total de respostas deste tipo.

Dentro das 16 respostas classificadas como *não satisfatórias* estão três tipos de respostas que, pela aspecto subjetivo que eflui de tais respostas, optou-se por não categorizá-las como *incorretas* ou *com significado limitado*. Os três tipos, em ordem decrescente de maior predominância, são: 1º - respostas que assumiam a racionalização como uma regra estabelecida para impedir que haja radicais no denominador; 2º - respostas que afirmavam que a racionalização tem a função de padronizar as respostas (soluções numéricas); 3º - respostas que alegavam que a racionalização tem o objetivo de facilitar os cálculos com as frações irracionais. O primeiro tipo ocorreu em sete respostas, o segundo tipo em seis respostas e o terceiro tipo em três respostas. Uma melhor visualização dos índices de ocorrência destes três tipos de respostas é possível a partir da Figura 19.

Figura 19: Proporção por período de cada um dos três tipos de resposta que atribuíam a racionalização: 1º - como uma regra estabelecida; 2º - para padronizar respostas; 3º - para facilitar os cálculos.



Fonte: Dados da pesquisa.

No gráfico da figura anterior, constata-se que a manifestação dos três tipos de resposta é bastante irregular dentro da amostra, mas mesmo assim há uma concentração significativa do primeiro e do segundo tipo de respostas no grupo dos Finalistas. Isto expõe a visão sobre a racionalização que estes estudantes irão levar para a vida profissional. Adiante, são transcritos exemplos de cada um dos tipos de respostas aqui tratados:

Exemplo 1

Porque existe uma regra dentro da racionalização [SIC] que não é permitido

haver radicais no denominador de uma fração, apenas no numerador. (Estudante 47, 1º Período)

Exemplo 2

Isso existe para que seja possível padronizar as respostas obtidas, afim [SIC] de simplificar e facilitar respostas em livros e provas. Para que seja possível chegar em um mesmo resultado. (Estudante 6, 3º Período)

Exemplo 3

Para simplificar, pois racionalizar você faz com que se tenha radical apenas no numerador tornando os cálculos mais simples. (Estudante 9, 8º Período)

Exemplo 4

Porque como eu aprendi no ensino fundamental não se pode deixar raiz no denominador. Não sei explicar qual a razão disso. (Estudante 11, Finalistas)

Os exemplos 1 e 4 refletem que o estudante ingressante do curso traz da educação básica a concepção de que não se pode ter radicais no denominador e por isso deve-se racionalizar o resultado, e o estudante concluinte apresenta o mesmo conceito. Já o Exemplo 2 está relacionado com o segundo tipo de resposta que atribui a racionalização a função de padronizar a forma de apresentação das soluções dos problemas matemáticos, e o Exemplo 3 confere a racionalização a função de facilitar os cálculos, mas não diz que cálculos são esses. Nestes três tipos de definição da racionalização, apresentadas nas respostas *não satisfatórias*, é crível que há uma das condições apontadas por Bachelard como obstáculo ao conhecimento científico quando afirma que:

Há de fato um perigoso prazer intelectual na generalização apressada e fácil. A psicanálise do conhecimento objetivo deve examinar com cuidado todas as seduções da *facilidade*. Só com essa condição pode-se chegar a uma teoria da abstração científica verdadeiramente sadia e dinâmica. [...] É possível constatar que essas leis gerais *bloqueiam* atualmente as ideias. Respondem de modo global, ou melhor, respondem sem que haja pergunta. (BACHELARD G. , 1996, p. 26, itálico no original)

Segundo o autor, esse tipo de generalização tende a enterrar o pensamento, criando uma espécie de conhecimento geral que não permite que uma zona de desconhecimento se manifeste e seja resolvida, o que pode imobilizar o pensamento científico. O conhecimento generalizados precipitadamente “respondem sem que haja pergunta” como, por exemplo, quando se afirma que a racionalização deve ser efetuada pois não se pode ter radical no denominador, o estudante aceita como uma verdade sem questionar a “obrigatoriedade” de tal regra. Isso é percebido no Exemplo 4 anteriormente citado e na afirmação de outro estudante do grupo dos Finalistas:

Para falar a verdade, quando eu aprendi na escola, os professores apenas pediam para racionalizar, como forma de não deixar o numerador ou denominador em forma de radical (raiz), pois a raiz de um número tem um resultado. (Estudante 40, Finalistas)

Por isso, é necessário que as concepções trazidas pelos estudantes sejam confrontadas e questionadas para que zona do desconhecido seja evidenciada a fim de ser resolvida.

3.9 Questão 9 – Valor absoluto

Questão 9

Resolva e interprete geometricamente a seguinte inequação:

$$|x + 1| < 2$$

Do mesmo modo que a Questão 7, a Questão 9 possui dois comandos a serem atendidos pelo estudante os quais foram: resolver a inequação e fornecer uma interpretação geométrica. Portanto, se o estudante apenas resolveu corretamente a questão mas não forneceu qualquer explicação geométrica, sua resposta foi classificada como *não satisfatória*. O resultado da classificação das respostas é apresentado na Tabela 11.

Tabela 11: Classificação das respostas dadas à Questão 9.

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	Finalistas
Satisfatória	0,0%	0,0%	14,3%	0,0%	16,7%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
Não Satisfatória	50,0%	33,3%	57,1%	60,0%	66,7%	100,0%	66,7%	50,0%	77,8%
Não soube	50,0%	66,7%	28,6%	40,0%	16,7%	0,0%	33,3%	50,0%	22,2%

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da Tabela 11 vê-se que apenas os grupos do 3º e do 5º períodos forneceram uma resposta do tipo *satisfatória* mas nenhum dos estudantes do grupo Finalistas conseguiu elaborar uma resposta desse tipo. As duas únicas respostas *satisfatórias* são transcritas a seguir:

Exemplo 1

$$2 > |x + 1| > -2$$

$$\begin{aligned} x + 1 < 2 & \quad x + 1 > -2 \\ x < 1 & \quad x > -3 \end{aligned}$$

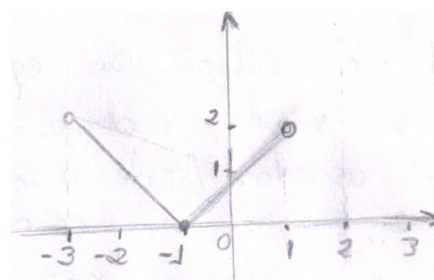
Significa que o $(x + 1)$ está em um intervalo entre o 2 e o -2. (Estudante 6, 3º Período)

Exemplo 2

$$|x + 1| < 2$$

$$1^\circ) x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$2^\circ) x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

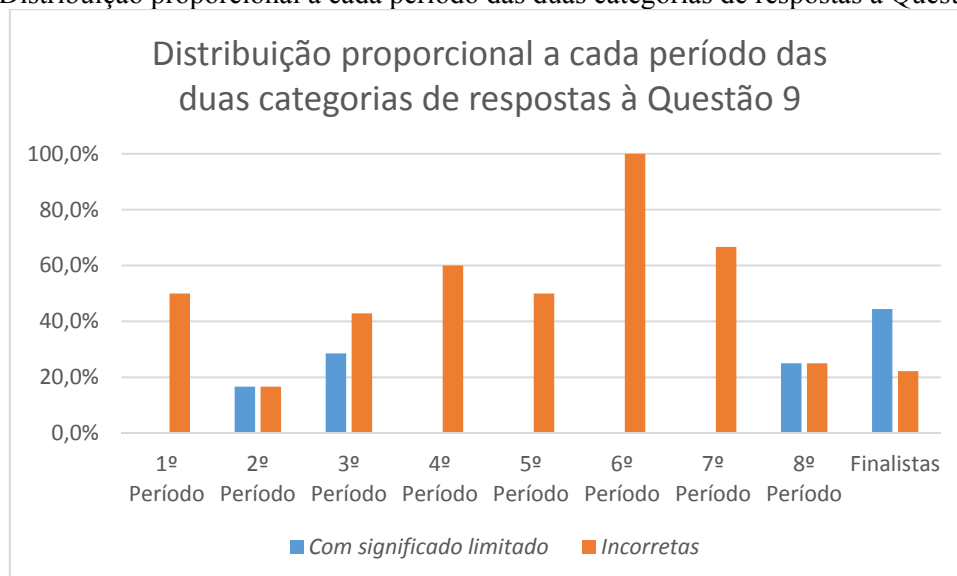


Neste caso $-3 < x < 1$. (Estudante 35, 5º Período)

No Exemplo 1, o Estudante 6 tenta utilizar como explicação geométrica o intervalo real ao qual o número representado pela expressão $(x + 1)$ está compreendido. Já no Exemplo 2, o Estudante 35 utiliza como tentativa de interpretação geométrica a representação gráfica de uma função modular, todavia nenhum desses dois estudantes mencionaram a relação do valor absoluto com a noção de distância entre dois pontos.

Das 33 respostas *não satisfatórias*, 25 foram categorizadas como *incorretas* por apresentarem alguma incoerência matemática e as outras oito respostas restantes registraram alguma solução adequada porém não atendiam ao segundo comando do enunciado, ou seja, não forneceram uma explicação geométrica para a inequação ou para a solução encontrada e, portanto, foram categorizadas como *com significado limitado*. A distribuição destas duas categorias proporcionalmente a cada grupo da amostra pode ser vista na Figura 20.

Figura 20: Distribuição proporcional a cada período das duas categorias de respostas à Questão 7.



Fonte: Dados da pesquisa.

Pelas informações da Figura 20, nota-se que a totalidade do grupo do 6º Período elaborou respostas da categoria *incorretas* mas, de acordo como a Figura 1 no Capítulo 2, este grupo é o que apresentou a maior variabilidade na quantidade de disciplinas (do Núcleo de Formação Específica) concluídas, onde os estudantes registraram quantitativos de zero a onze disciplinas concluídas. Além disso, observa-se que, apesar das respostas da categoria *com significado limitado* serem respostas matematicamente coerentes, não há uma regularidade na manifestação deste tipo de respostas nos grupos amostrais e, por isso, não há como associar a coerência matemática dessas respostas com alguma disciplina específica, pois era esperado que

os estudantes que houvessem concluído a disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar I, que possui em seu conteúdo programático o assunto Função Modular, estivessem aptos a fornecer uma solução adequada à inequação modular apresentada, assim como fez o Estudante 35 do exemplo anterior.

Para uma melhor compreensão das duas categorias de respostas é oportuno transcrever alguns exemplos de resposta de cada uma das duas categorias. A começar pelas categoria *com significado limitado*, pode-se citar os exemplos a seguir:

Exemplo 1

$$\begin{aligned} & -2 < x + 1 < 2 \\ x + 1 > -2 & \quad \text{ou} \quad x + 1 < 2 \\ x > -2 - 1 & \quad \quad \quad x < 2 - 1 \\ x > -3 & \quad \quad \quad x < 1 \end{aligned}$$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$. (Estudante 49, 2º Período)

Exemplo 2

Esqueci como efetua a operação. Mas os valores que satisfazem essa inequação são $-3 < x < 1$. (Estudante 16, Finalistas)

Os dois exemplos anteriores ilustram as oito respostas da categoria *com significado limitado* onde os estudantes registraram uma solução correta mas não forneceram qualquer explicação. Isto é um sinal de que, para estes estudantes, o objetivo de encontrar uma solução para a inequação é mais marcante ou mais relevante do que buscar uma compreensão numérica da situação apresentada.

Das 25 respostas *incorretas*, houve 13 que registraram como resposta apenas $x < 1$ conforme os exemplos a seguir:

Exemplo 1

$$\begin{aligned} & |x + 1| < 2. \\ & x < 2 - 1 \\ & x < 1. \text{ (Estudante 1, 1º Período)} \end{aligned}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} & |x + 1| < 2. \\ & |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x + 1 \geq 0 \\ -x + 1, & \text{se } x + 1 < 0 \end{cases} \\ & \begin{array}{ll} x + 1 \geq 0 & x + 1 < 0 \\ x \geq 1 & x < 1 \end{array} \\ & x + 1 < 2 \\ & x < 2 - 1 \\ & x < 1. \text{ (Estudante 42, 2º Período)} \end{aligned}$$

Exemplo 3

Considere módulo de um número como sua distância até a origem, logo esse valor em módulo (ou valor absoluto) $|x + 1| < 2 \Rightarrow x + 1 < 2 \Rightarrow x < 1 \rightarrow$ na reta valores menores que 1 em módulo. (Estudante 40, Finalistas)

No Exemplo 1, o estudante iniciante manipula a resolução da equação como se o módulo não existisse. No Exemplo 2, o Estudante 42 assinala uma tentativa de utilização da definição de valor absoluto mas comete um erro de inversão de sinais na segunda sentença da definição, aplicando a inversão do sinal apenas na incógnita, daí em diante ele não estabelece um estudo adequado da inequação. E por fim, no Exemplo 3, o estudante finalista faz constar uma interpretação geométrica do conceito de módulo de um número, porém não consegue aplica-la na resolução da inequação e acaba resolvendo-a do mesmo modo que o estudante iniciante do Exemplo 1.

As outras 12 respostas *incorretas* apontavam erros diversos como se pode ver nos exemplos adiante:

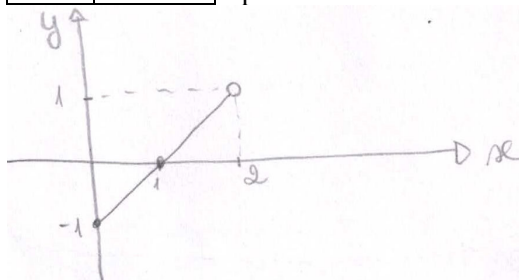
Exemplo 1

Tomamos a seguinte equação e encontramos dois pontos desta:

$f(x)$	$ x + 1 $
0	-1
1	0
2	1

$$f(x) = |x + 1|.$$

Assim é possível fazer um esboço [SIC] da equação. Observe que $f(x)$ será sempre positiva e menor que 2, ou seja, $0 \leq f(x) < 2$. Podemos tomar $f(x) = 2$ para ver qual valor de x não fará parte desta inequação ($x = 1$).



(Estudante 22, 3º Período)

Exemplo 2

$$\begin{array}{l|l|l|l} |x + 1| < 2 & -x + 1 < 2 & x = 1 & x = 2 \\ |-2 + 1| < 2 & -1 + 1 < 2 & |x + 1| < 2 & 2 + 1 < 2 \\ -1 < 2 & 0 < 2 & |1 + 1| < 2 & 3 < 2 \text{ E} \\ & & 2 < 2 \text{ E} & \end{array}$$

Para o x negativo todo número será menor que 2. Para todo número maior que zero o resultado será igual a 2 ou maior que dois. (Estudante 52, 4º Período)

Exemplo 3

$$\begin{cases} x + 1 < 2 \Rightarrow x < 1 \\ -x - 1 > 2 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

Que para qualquer valor de x , o módulo é sempre menor que 2. (Estudante 39, 6º Período)

Exemplo 4

$$|x + 1| < 2 = \begin{cases} x + 1 < 2 \Rightarrow x < 1 \\ -x + 1 < 2 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

$-1 < x < 1$. (Estudante 13, Finalistas)

No Exemplo 1, o Estudante 22 associou o módulo da inequação a uma função modular e tentou fazer um estudo do comportamento dessa função mas, ao atribuir valores para a

imagem da função, o estudante valeu-se, incorretamente, da injetividade pois, para o elemento da imagem $f(x) = 1$ ele considerou apenas o elemento $x = 0$ do domínio e não assumiu o elemento $x = -2$. Do mesmo modo, para elemento da imagem $f(x) = 2$ foi atribuído somente o elemento do domínio $x = 1$, negligenciando o elemento $x = -3$. Logo em seguida, o Estudante 22 afirma que a função será sempre positiva, sem observar o zero que ele próprio utilizou como imagem, e também que a função sempre será menor do que dois mas, conclui encontrando uma restrição no domínio em $x = 1$. Já na tentativa de esboço do gráfico, o estudante faz uma inversão dos eixos reais x e y .

A tentativa desse estudante em fazer associações do conceito de valor absoluto da inequação apresentada com o conceito de função tende a evidenciar o aspecto de *entendimento e compreensão do conceito* (EVEN, 1990) porém, é nítido que há vários outros problemas no aspecto das *características essenciais*, pois há uma distorção nas imagens mentais associadas ao conceito de função tanto em relação à injetividade, quanto à representação gráfica, dentre outras.

Já, na resposta do Exemplo 2, a estratégia de substituição aleatória de valores na inequação, constatada na Questão 7, é manifestada novamente e, a partir de quatro valores substituídos, o Estudante 52 conclui equivocadamente a solução afirmando que “Para o x negativo todo número será menor que 2. Para todo número maior que zero o resultado será igual a 2 ou maior que dois.”

A resposta do Exemplo 3 retrata um ensaio de utilização da definição de valor absoluto todavia, um erro na inversão de sinal na segunda sentença levou o estudante a concluir “Que para qualquer valor de x , o módulo é sempre menor que 2” (Estudante 39, 6º Período). Fato semelhante ocorre no Exemplo 4, onde o estudante do grupo dos Finalistas tenta utilizar a definição de valor absoluto mas não elabora corretamente a segunda sentença e conclui a resposta com uma solução incorreta.

O que se pode deduzir das respostas dadas à Questão 9 é que há uma deficiência conceitual associada ao aspecto das *características essenciais*, onde as imagens conceituais associadas à definição de valor absoluto apresentam falhas, com relação ao emprego da definição para os números negativos, ou distorções, no manejo algébrico da inversão de sinais. A imagem conceitual de módulo de um número que menos apareceu foi a que associa o valor absoluto de um número com uma distância na reta numérica. Estes dois tipos de deficiências manifestaram-se desde o grupo de estudantes do 1º Período até o grupo dos Finalistas de modo que é inviável afirmar que houve alguma contribuição das disciplinas cursadas na formação do conceito abordado nesta questão.

Na tentativa de explorar melhor a compreensão dos estudantes sobre a inversão de sinal utilizada na definição de valor absoluto foi empregada a Questão 10.

3.10 Questão 10 – Produto de dois negativos

Questão 10

Por que $(-1) \cdot (-1) = 1$?

A Questão 10 abordou uma multiplicação de sinais negativos, que é algo utilizado também na definição de módulo de um número para realizar a inversão de sinal e assim obter o valor absoluto de um número negativo. Portanto, era possível que o estudante, ao responder a Questão 10, fizesse alguma referência à Questão 9 ou a definição de módulo. Contudo, nenhum estudante ousou arriscar uma resposta que contemplasse essa ideia.

Também não houve respostas que fizeram referência a História da Matemática, nem analogias da regra de multiplicação de sinais e nem qualquer menção da distributividade da multiplicação em relação à adição. Todas as 47 das 55 respostas mencionavam, de alguma maneira, uma das regras de multiplicação de sinal como pode ser visto nos exemplos seguintes:

Exemplo 1

Porque quando não há sinal entre parênteses, significa que se trata de uma multiplicação, multiplicando os sinais dos números temos um número positivo, pois $-$ vezes $-$, é igual a $+$, e 1 vezes 1 corresponde a 1 . (Estudante 47, 1º Período)

Exemplo 2

Porque $(-)\cdot(-) = +$, $(+)\cdot(+) = +$, $(-)\cdot(+) = -$, $(+)\cdot(-) = -$. (Estudante 43, 2º Período)

Exemplo 3

Um número negativo vezes um número negativo resulta em um número positivo, onde aplicaria a regra da multiplicação de sinais. (Estudante 7, 4º Período)

Exemplo 4

Respondendo para um aluno do ensino fundamental ou médio, podemos levar em consideração as regras de sinais ensinadas para multiplicação de dois números negativos isto dá um resultado positivo. (Estudante 17, 8º Período)

Exemplo 5

$(-1) \cdot (-1) = (-) \cdot (-) \cdot 1 \cdot 1 = +1 = 1$

Ou melhor, seja $(-1) \cdot (-1) = (-1)^2 = (-)^2 \cdot (1)^2 = +1 = 1$. Mais ou menos assim. (Estudante 14, Finalistas)

É nítida a caracterização da memorização da regra de multiplicação de sinais, pelos estudantes, mesmo sem saber a justificativa de tal regra. É uma aceitação passiva que

geralmente ocorre na Educação Básica e fica arraigada pela utilização incontestada na resolução de questões, tanto da matemática escolar como universitária, sem que se saiba o significado de tal regra. E esse conhecimento incompleto proveniente da Educação Básica, conforme o Capítulo 1, será o arcabouço utilizado pelo futuro professor para o exercício na própria Educação Básica e, possivelmente, estará reproduzindo nos alunos a mesma concepção dogmática que ele possui da regra da multiplicação de sinais, isso é detectável na resposta do Exemplo 4 pois, mesmo que a questão não solicitasse o direcionamento da respostas como outras questões o fizeram, o estudante do 8º Período se preocupou em revelar como ele explicaria a operação apresentada a um aluno do ensino fundamental ou médio. A característica aqui aludida é reforçada pelos próximos exemplos:

Exemplo 1

Aprendemos que menos vezes menos é igual a mais. O porque propriamente disto não me foi dado. (Estudante 21, 3º Período)

Exemplo 2

Porque no ensino médio aprendi e uso até hoje as regras das multiplicações dos sinais: $(-)\cdot(-)=+$, $(+)\cdot(+)=+$, $(-)\cdot(+)=-$.

E sei que $1\cdot 1=1$. então $(-1)\cdot(-1)=1$ (Estudante 4, 3º Período)

Exemplo 3

Pela propriedade de multiplicação, aprendemos no ensino médio que $(-)$ menos com $(-)$ é $(+)$. Logo por definição. (Estudante 35, 5º Período)

Exemplo 4

Sinceramente não saberia responder, pois a forma que eu aprendi no Ensino Fundamental é que quando se multiplicava dois sinais iguais como no exemplo acima o resultado sempre daria positivo. (Estudante 11, Finalistas)

Nestas últimas respostas, os estudantes citam claramente o conhecimento adquirido na Educação Básica como esteio principal das suas explicações para a regra da multiplicação de sinais. O único estudante que teve o intento de realizar alguma interpretação diferente para esta questão não se sentiu confiante nos conhecimentos adquiridos na graduação e respondeu da seguinte maneira: “~~Pois se trata da distância múltipla de vetores.~~ Não sei.” (Estudante 28, 4º Período, tachado no original). É possível que ele tenha tentado se referir à interpretação geométrica da multiplicação de um vetor por um escalar, porém ele percebeu que a conexão mental que ele possuía entre os dois conceitos era vaga demais para lhe fornecer a confiança para elaborar uma a explicação e resolveu declarar que não sabia responder.

Portanto, o aspecto do *conhecimento da natureza da Matemática* (EVEN, 1990) não se manifestou nas respostas obtidas pois nenhuma delas tentou se referir à validade da regra da multiplicação de sinais negativos. Os dois únicos estudantes que forneceram uma ideia da contribuição de alguma disciplina do curso para o entendimento de tal regra não souberam

expressar a explicação ou demonstração matemática que lhes foram apresentadas no curso de licenciatura aqui estudado, isso pode ser visto em:

Exemplo 1

No momento não lembro, mas estudei isso em Álgebra 1. O professor até introduziu um teorema como Teorema da Regra de Sinais. Ok.

Pela definição que aprendemos na escola é pelo fato de sinais iguais dá + e sinais diferentes (-) menos. (Estudante 30, 7º Período)

Exemplo 2

Não me lembro da questão, pois fiz Álgebra mas fui reprovado, para mim é uma matéria difícil, pois nela apresenta várias demonstrações da qual tenho dificuldade. (Estudante 8, 7º Período)

No Exemplo 1 o estudante comenta sobre um teorema que ele supostamente viu na disciplina Álgebra I, mas pelo fato dele não lembrar o suficiente para explicar, ele prefere recorrer ao conhecimento da Educação Básica para responder. E, no Exemplo 2, o estudante também faz alusão à disciplina que supostamente também é Álgebra I, mas ele confessa a dificuldade que ele possui com a característica lógica dedutiva que as demonstrações matemáticas, tratadas na disciplina, possuem.

A pseudo-facilidade transmitida pela memorização de uma regra generalizada dissimula a lacuna conceitual que o estudante possui e se transforma em obstáculo na compreensão das bases lógicas dedutivas inerentes à natureza da Matemática, por isso os estudante preferem a generalização fácil em relação às definições, teoremas ou demonstrações matemáticas e isso concorda com Palis (2013) quando diz que:

A maior parte dos alunos de ensino médio e inicial universitário não consulta ou se apoia em definições quando trabalha com tarefas matemáticas que lhes são propostas. Hábitos de pensamento do cotidiano assumem o controle das ações empreendidas, e as definições podem ser ignoradas mesmo quando as questões que lhes são propostas requerem que sejam levadas em conta. Assim, esses alunos não desenvolvem hábitos de pensamento que são essenciais em contextos técnicos nos quais as consultas às definições são esperadas. Além disso, o desconhecimento da terminologia dificulta a comunicação entre alunos e professores em sala de aula. (PALIS, 2013, p. 2)

Quanto a isso, BACHELARD (2006) afirma que é necessário criticar a cultura da ciência elementar, da ciência fácil, aquela que faz o estudante participar da imobilidade do conhecimento inicial, e entrar-se, então, no reino da cultura científica difícil. E que, para várias pessoas, a matemática mais elementar pode ser muito difícil.

Já, em relação ao aspecto das *diferentes formas de abordagem*, era esperado que os estudantes ao menos reproduzissem alguma estratégia de interpretação da regra da

multiplicação de sinais negativos, como a analogia citada por Lima (1991, p. 151) “O inimigo do meu inimigo é meu amigo, quer dizer, $(-)(-) = +$ ”, porém nenhuma outra maneira de abordagem da questão, distinta da regra memorizada, foi evidenciada pelas respostas dos estudantes. Isso torna muito exígua a apreciação deste aspecto.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, de acordo com o referencial teórico, tentou-se confrontar o conhecimento matemático básico sobre números e operações, necessário à prática escolar na educação básica, com os conhecimentos adquiridos pelos estudantes na formação inicial no curso presencial de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), do Campus do Mucuri na cidade de Teófilo Otoni (Minas Gerais).

Tal preocupação me inspirou a desenvolver uma pesquisa com os estudantes do curso em tela que culminou com o presente trabalho. A pesquisa buscou verificar os conhecimentos que os estudantes do curso apresentam sobre números e operações, conteúdo essencial para o exercício profissional no ensino básico, e detectar quais deficiências neste conteúdo persistiam ao longo dos nove períodos acadêmicos necessários à conclusão da Licenciatura. Nesse sentido, a pesquisa teve o intuito de responder às seguintes questões:

(A) Quais deficiências ou dificuldades em relação aos conceitos numéricos são encontradas nos discentes do curso de Licenciatura em matemática da UFVJM?

(B) Quais obstáculos conceituais estão associados às deficiências apresentadas?

Para tentar responder as perguntas norteadoras, buscou-se primeiramente examinar alguns trabalhos que se referem à formação do professor de matemática tentando detectar as principais deficiências conceituais que eles revelavam. Tendo feito isso, percebeu-se nos trabalhos que os estudantes ingressam num curso de Licenciatura em Matemática portando muitos problemas conceituais ligados à matemática básica e que, ao concluírem o curso, ainda apresentam os mesmos problemas conceituais que possuíam anteriormente. A partir das leituras que fundamentaram o referencial teórico, viu-se que muitos problemas conceituais poderiam estar ligados aos conceitos de números e operações mal formados nos estudantes. Nesse aspecto, com o intuito de aprofundar a visão sobre as concepções numéricas que os estudantes do curso de Licenciatura recebem, procurou-se estudar o Projeto Pedagógico do Curso e os Planos de Ensino das disciplinas do curso que se relacionam com esse assunto. Com isso percebeu-se que, tanto no projeto pedagógico, como nos Planos de Ensino, que há uma preocupação do curso em oferecer uma formação que contemple a matemática básica escolar.

Num segundo momento, efetuou-se uma etapa investigativa com uma amostra de 55 (42,64%) estudantes do primeiro ao último semestre da Licenciatura citada, na ocasião em que foi aplicado um teste contendo dez questões sobre potenciação; divisão por zero; diferentes representações de números; raízes reais e complexas de uma equação; valor absoluto; produto de números negativos, inequações, vide apêndices.

O que se esperava é que o desempenho das respostas apresentadas por um grupo que cursou uma maior quantidade de períodos letivos revelasse um maior domínio conceitual do que os grupos com menor quantidade de períodos letivos cursados. Contudo, à medida que as respostas do teste eram analisadas e classificadas, foi constatado a repetição dos mesmos problemas apontados no referenciais teóricos do presente trabalho, mais precisamente no que afirma Moreira (2004), em que as contribuições da formação proporcionada por uma Licenciatura em relação aos conceitos de números não são suficientes para preparar um professor de matemática para o bom exercício da profissão pois,

dentre as várias formas de distanciamento que normalmente se estabelecem entre o processo de formação inicial do professor de matemática e a prática docente escolar, constatamos, na Licenciatura diurna da UFMG, uma forma específica que se refere ao fato de que os conhecimentos matemáticos sobre os sistemas numéricos trabalhados no processo de formação não se ajustam ao tratamento escolar de uma série de questões importantes que se apresentam ao professor em sua prática docente. A identificação do aspecto característico dessa forma específica constitui a conclusão geral do nosso estudo: *o conhecimento matemático é trabalhado no processo de formação a partir da perspectiva e dos valores da matemática acadêmica, ignorando-se importantes questões escolares que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores.* (MOREIRA, 2004, p. 178, grifo no original)

Os resultados obtidos demonstraram que, ainda que o Projeto Pedagógico do Curso e os Planos de Ensino de algumas disciplinas levem em conta assuntos ligados aos conceitos numéricos e operacionais básicos, as mesmas deficiências conceituais apresentadas pelos ingressantes são detectados também nos estudantes mais avançados no curso, inclusive nos estudantes que irão concluir o curso. Além disso, essas deficiências conceituais manifestaram-se associadas a obstáculos conceituais comuns construídos na Educação Básica e não confrontados ou eliminados no curso superior. Agrava-se a isso a situação alertada por Klein (2009) e Moreira (2004), também detectada neste trabalho, onde os estudantes revelaram em suas respostas que se fundamentariam nos conhecimentos imprecisos que obtiveram na própria Educação Básica para o exercício profissional como futuros professores. Isso registra que a matemática universitária, fundamentada no rigor da dedução lógica e formal, não foi suficiente para quebrar os obstáculos conceituais que tais estudantes possuem, não havendo um confronto do conhecimento prévio do estudante com o conhecimento novo pois, segundo Bachelard (2006, p. 165) “Ao desdizer um passado de erros, encontramos a verdade num autêntico arrependimento intelectual. Com efeito, nós conhecemos *contra* um conhecimento anterior,

destruindo conhecimentos mal feitos.”

Nesse sentido, no que se refere aos conjuntos numéricos e operações, percebe-se que há uma necessidade de se detectar quais conhecimentos matemáticos que os estudantes possuem sobre esses assuntos. Seria um momento em que eles próprios refletissem sobre o que não aprenderam, para reconstruírem a sua própria aprendizagem, destruindo os erros subjetivos um a um, o que não é uma tarefa fácil, pois os erros são coordenados numa rede de aceitação passiva ocorrida por meio da experiência inicial dos estudantes (BACHELARD, 2006). Entendendo que os obstáculos conceituais em Matemática começam a ser criados no Ensino Fundamental nos diz também Venturi (1949) que,

A esse nível, tal como uma estrutura geológica, os conhecimentos matemáticos se sedimentam e se estratificam. Disso resulta, como maior legado, o entendimento e a motivação pela disciplina no Ensino Médio. Este embasamento representa a *conditio sine qua non* para um bom rendimento na Faculdade. Isto posto, a carência de tal embasamento leva a obstáculos que podem ser transpostos na interação aluno-professor. A nós, professores, importa a sensibilidade à percepção de tais dificuldades bem como a disposição de retornar aos níveis anteriores sempre que necessário. É frustrante observar que em certos cursos - em especial noturnos - o índice de desistência atinge 50% até ou logo após a primeira avaliação. Se consciente da sofrível formação anterior, cabe ao universitário novel a busca junto aos livros, professores e colegas. Atirar pedras no passado, pela má qualidade de ensino ou pela má qualificação de alguns professores do Ensino Fundamental ou Médio, não leva a nada. ‘O importante - afirma Jean Paul Sartre - não é o que fizeram de nós, mas o que fazemos do que fizeram de nós’. (VENTURI, 1949, p. 12)

Tal afirmação mostra que, tanto os discentes quanto os docentes, têm a responsabilidade da desconstrução de concepções equivocadas relativas a conceitos matemáticos com vistas a uma boa formação inicial de professores para o eficiente exercício da prática docente da matemática na Educação Básica.

Os resultados apontados no presente trabalho evocam que é no nível de Educação Básica que a aprendizagem dos conceitos numéricos e operacionais se dá pela memorização de regras prontas para respostas imediatas, impensadas e, praticamente, automáticas. No entanto, no ensino superior, a matemática torna-se repentinamente demonstrativa, usando-se de teoremas que são incorporados pelos estudantes como regras adicionais, num distanciamento nítido entre as tratativas adotadas nos dois níveis de ensino. Pela “errônea praticidade” das regras apresentadas na Educação Básica, o estudante só tem a elas para recorrer pois, em geral, nunca

lhes foram demonstradas. Isso também é apontado por Venturi (1949) quando diz que:

Ao ingressar na Universidade, o calouro sente-se perplexo e desamparado. Há, no sistema educacional brasileiro, uma dicotomia entre o Ensino Médio e a Faculdade. Enfatizam-se demonstrações, teoremas e abstrações aqui e quase nada lá. Cobra-se autodidatismo e raciocínio na faculdade de quem cursou (salvo exceções) um Ensino Médio preponderantemente à base de memorizações e expedientes similares. Tal procedimento - argumenta Valmir Chagas - ‘desenvolve uma estranha metodologia de perguntas e respostas tipificadas e gera maus hábitos de estudo’. (VENTURI, 1949, p. 12)

A expectativa do presente trabalho foi a de contribuir para uma reflexão sobre os obstáculos conceituais existentes na aprendizagem de números e suas propriedades em Matemática a nível do Ensino Superior e da Educação Básica. Tais obstáculos sempre acontecem, conforme trabalhos anteriores sobre o assunto, e permanecerão como aqui foi apontado, quando seu ensino está centrado na memorização de regras em detrimento do ensino de seus verdadeiros significados. Quando os estudantes pesquisados foram confrontados sobre a validade ou significado de regras não apreendidas e sim memorizadas, alguns deles responderam que nunca pararam para pensar sobre o assunto e outros responderam que apenas decoraram tais regras sem se aterem aos seus significados, pois foi assim que lhes foram ensinadas.

Importante ressaltar que, num nível diferenciado em forma de espiral, todos os conteúdos matemática da Educação Básica estão presentes nas disciplinas componentes da grade curricular dos cursos de graduação em Matemática, em especial nas Licenciaturas. Cabe ao corpo docente desses cursos fazerem uma ponte entre as duas modalidades de ensino para promover aos discentes uma instrução intelectual sólida, pois a aprendizagem é contínua e sempre é necessário aprender a apreender, tomar para si.

Espera-se que o presente trabalho tenha contribuído para o repensar da formação do professor de matemática na dialógica entre o fator dicotômico *eu-aluno* e *eu-futuro professor* pois quando nos tornamos professores, mesmo academicamente instruídos, dificilmente nos desembaraçamos de posturas erráticas de nossos antigos professores enquanto alunos da Educação Básica. Como é possível se apropriar de números, de cálculos, de classificações, da lógica ou do pensamento crítico, se a prática escolar não estimula tais habilidades? Para atingir tais objetivos se faz necessário a reformulação dos projetos pedagógicos das Licenciaturas em Matemática para que a prática escolar se respalde na compreensão de novos conceitos matemáticos, para o estabelecimento de ligação com conceitos anteriormente estudados, pois é

notório que a matemática não apreendida pode inibir ou promover atitudes desfavoráveis no processo de aprendizagem da disciplina.

Além disso, pretendeu-se estimular iniciativas para sanar o problema bem como, de alguma maneira, chamar à reflexão sobre a formação do professor de matemática com vistas ao preparo para a prática escolar no Educação Básica. Ressalva-se também que não se pretende afirmar que o conhecimento referente à matemática elementar aqui tratado seja estritamente necessário à prática do professor da Educação Básica e nem que ele é autossuficiente para a formação do referido profissional. O que condiz com Moreira (2004, p. 11), quando afirma que o conhecimento envolvido nas questões que se colocam para o professor de matemática na prática escolar deve ser objeto de consideração cuidadosa no processo de sua formação.

Como reflexão, segue um trecho extraído de *Memórias, sonhos e reflexões* do famoso psicanalista Carl Gustav Jung sobre a sua experiência na escola, em especial nas aulas de matemática:

O colégio me aborrecia. Tomava muito do tempo que eu teria preferido consagrar aos desenhos de batalhas ou a brincar com fogo. O ensino religioso era terrivelmente enfadonho e as aulas de matemática me angustiavam. A Álgebra parecia tão óbvia para o professor enquanto que para mim os próprios números nada significavam: não eram flores, nem animais, nem fósseis nada que se pudesse representar, mas apenas quantidades que se produziam, contando. A minha grande conclusão era saber que as quantidades podiam ser substituídas por letras – que são sons – de forma que se podia ouvi-las. Para minha surpresa, os outros alunos compreendiam tudo isso com facilidade. Ninguém podia me dizer o que os números significavam e eu mesmo não era capaz de formular a pergunta. Com grande espanto descobri que ninguém entendia a minha dificuldade. Reconheço que o professor se esforçava consideravelmente no sentido de me explicar a finalidade da singular operação que consiste em transpor em sons quantidades compreensíveis, mediante o emprego de um sistema de abreviações, de modo a representar numerosas quantidades com ajuda de uma fórmula abreviada.

Isso não me interessava em absoluto. Eu achava excessivamente arbitrário exprimir os números por sons. Por que, então, não fazer de a uma amoreira, de b uma bananeira, de x um ponto de interrogação? a, b, c, x e y nada me significavam e, segundo me parecia, esclareciam menos acerca do número do que a amoreira, por exemplo! Entretanto, o que mais me irritava era o princípio: “se $a = b$ e se $b = c$, então $a = c$.” Tendo sido dado, por definição que a é diferente* de b, por conseguinte não pode ser igual a b, e ainda menos de c. Quando se trata de uma igualdade diz-se que $a = a$, $b = b$, etc.. Mas dizer que $a = b$ me parecia

* Jung se refere, evidentemente, a diferença sonora entre a e b no âmbito da linguagem.

uma fraude evidente, uma mentira. Sentia também a mesma revolta quando o professor, contradizendo sua própria definição das paralelas, afirmava que elas se encontravam no infinito. Isto parecia-me uma trapaça estúpida que eu não podia e nem queria aceitar. Minha honestidade intelectual revoltava-se contra esses jogos inconsequentes que me barravam o caminho à compreensão das matemáticas. Até idade avançada conservei a convicção de que se nesses anos de colégio tivesse podido admitir sem me chocar, como meus colegas que $a = b$, ou que sol igual lua, cão igual gato, etc., a matemáticas ter-me-iam enganado para sempre. Foi preciso esperar meus 83 anos para chegar a esta conclusão. O fato de nunca ter conseguido encontrar um ponto de contato com as matemática (embora não duvidasse que fosse possível calcular validamente) permaneceu um enigma por toda a minha vida. O mais incompreensível era a minha dívida moral com a matemática. Eu só podia compreender as equações quando substituía as letras por algarismos, confirmando assim mediando um cálculo concreto o sentido da operação. Foi penosamente que me equilibrei nessa matéria, copiando a fórmulas algébricas cujo conteúdo permanecia misterioso para mim, decorando a combinação de letras que fora colocada num determinado lugar do quadro negro. Mas ao refazer os cálculos, ficava frequentemente confuso, pois o mestre dizia às vezes: “Aqui, nós introduzimos a expressão...” e escrevia algumas letras no quadro – negro. Eu não sabia de onde vinham nem por quê! ... Provavelmente para tornar possível uma conclusão que o satisfizesse. Ficava de tal forma humilhado com minha impossibilidade de compreender que não ousava qualquer pergunta. As aulas de matemática tornaram-se meu horror e o meu tormento. Mas como tinha facilidade nas outras matéria, que me pareciam fáceis, e graças a uma boa memória visual, conseguia desembaraçar-me também no tocante à matemática: meu boletim geralmente era bom, mais a angustia de poder fracassar e insignificância da minha existência da grandeza do mundo provocava em mim não apenas mal-estar, mas uma espécie de desalento mudo que acabou por me indispor profundamente com a escola. (AMARAL, 2007, p. 5)

REFERÊNCIAS

- AMARAL, V. L. do. **Psicologia da educação: A inteligência**. Natal: EDUFRN, 2007. 208 p. Disponível em: <http://www.ead.uepb.edu.br/arquivos/cursos/Geografia_PAR_UAB/Fasciculos%20-%20Material/Psicologia_Educacao/Psi_Ed_A02_J_GR_20112007.pdf>. Acesso em: 29 Julho 2015.
- BACHELARD, G. **A formação do Espírito Científico. Contribuição para uma psicanálise do Conhecimento**. Tradução de Esteia dos Santos ABREU. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. 316 p.
- BACHELARD, G. **A Epistemologia: Gaston Bachelard**. Tradução de Fatima Lourenco Godinho e Mario Carminho Oliveira. Lisboa: Edições70, 2006.
- BALL, D. L. **Knowledge and Reasoning in Mathematical Pedagogy: Examining What Prospective Teachers Bring to Teacher Education**. (Tese de Doutorado). Michigan: Department Of Teacher Education. Michigan State University, v., 1988.
- BALL, D. L. et al. **A theory of Mathematical Knowledge for Teaching**. Aguas de Lindoia. Maio 2005. Disponível em: <http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/ball_ICMI_prop_oct11.doc>. Acesso em: 01 jan. 2015.
- BALL, D. L.; BASS, H. **Toward a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching**. Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group. Kingston, Canada: CMESG. 2002. p. 3-14.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching: what makes is special?** Journal of Teacher Education, v. 59. n° 5, p. 389-407, 2008. Disponível em: <www.math.ksu.edu/~bennett/onlinehw/qcenter/ballmkt.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2015.
- BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental - MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 02 Fev 2015.
- CARVALHO, J. P.; SZTAJN, P. **As Habilidades "básicas" em Matemática**. Revista Presença Pedagógica. Belo Horizonte. v. 3, n° 15, p. 15-21. maio/jun 1997.
- CHÁCON, I. M. G. **Matemática Emocional - Os afetos na aprendizagem matemática**. Porto Alegre: ARTMED, 2003.
- CONTRERAS, L.; et al. **Un Estudio Exploratorio sobre las Competencias Numéricas de los Estudiantes para Maestro**. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Rio Claro, 26. n. 42B, abril 2012. 433-457. ISSN 0103-636X.
- COSTA, C. B. de J. **O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o Conceito de Função**. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática). Rio de Janeiro: Unversidade Federal do Rio de Janeiro, 2008. 117p.
- CRUZ, Elaine. **Compreendendo os aspectos físicos, sociais e emocionais da adolescência**.

Revista Ensinador Cristão, Rio de Janeiro: Casa Publicadora das Assembleias de Deus, Ano 15, n. 59, 2014. p. 27-31

EVEN, R. **Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions.** Educational Studies in Mathematics, n. 21, 1990. 521-544.

EVEN, R. **The relevance of advanced mathematics to teaching secondary school mathematics: practitioners' views.** ZDM The International Journal on Mathematics Education, 26 Junho 2011. 941-950. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs11858-011-0346-1#page-1>>. Acesso em: 01 jan. 2015.

FERREIRA, M. C. C. **Conhecimento Matemático Específico para o Ensino na Educação Básica: A Álgebra na Escola e na Formação do Professor.** Tese (Doutorado em Educação). Belo Horizonte: Faculdade de Educação. UFMG, 2014.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. de C. C. O. **Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?** Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), 27, n. 47, dezembro 2013. 917-938. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291229747011>>. Acesso em: 29 Jan 2015. ISSN: 0103-636X.

FONSECA, H. N. T. **Os números racionais nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Investigando saberes docentes.** Dissertação (Mestrado em Educação). Belo Horizonte: Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

GIMENEZ, C. S. C.; BURIN, N. E. **Resolução de Problemas.** 2ª. ed. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2011. ISBN 978-85-8030-011-6.

GUIRLES, J. R. G. **Competencia matemática em primaria.** SIGMA - Revista de Matemáticas, v. único. n.32, p. 31-49, Novembro 2008.

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais.** V. 1 -Tópicos de história da matemática, Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. D. **Concepções dos Alunos sobre Números Reais.** In: LACHINI, J.; LAUDARES, J. B.; (ORG) Educação Matemática: A Prática Educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 190.

KAMII, C. **A Criança e o Número: Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos.** Tradução de Regina A. de ASSIS. 37ª. 2009. ed. Campinas - SP: Papyrus, 1990. ISBN 85-308-0151-2.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior.** Lisboa: SPM, v. I. Parte I. Aritmética, 2009.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L.; et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 9ª. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 1, 2006. ISBN 85-85818-10-7.

LIMA, E. L.; et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, v. 4, 2007.

MAGNUSSOM JR, M.; MAMERI, M. **Dos primeiros passos aos primeiros números**. Ensino em Re-Vista, São Paulo, 1, n. 1, Dez 1992. 23-28. Disponível em: <<http://www.seer.ufu.br/index.php/emrevista/article/view/7748/4878>>. Acesso em: 13 março 2015. ISSN: 1983-1730.

MOREIRA, P. C. **O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica**. Tese (Doutorado em Educação). Belo Horizonte: Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A Formação Matemática do Professor: Licenciatura e Prática Docente Escolar**. 1ª. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 114 p.

MORETTI, M. T. **A Regra dos Sinais para a Multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em Matemática**. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Rio Claro, v. 26, n. n. 42B, p. 691-714, abr 2012. ISSN0103-636X.

PALIS, G. de la R. **Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do Ensino Médio e universitário inicial**. Professor de Matemática Online, v. 1, n.º 1, p. 1-11, 2013. ISSN 2319-023X.

RIPOLL, C. C. **Mal ditas frases encontradas em livros didáticos de Matemática da Escola Básica**. Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, outubro 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~cydara/mal_ditas.pdf>. Acesso em: 28 julho 2015.

SIERPINSKA, A. **On Understanding the Notion of Function**. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. The Concept of Funtion: Aspects of Epistemology and Pedagogy. [S.l.]: Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, v. 25, 1992. p. 25-58.

SILVERMAN, J.; THOMPSON, P. W. **Toward s framework for the development of mathematical knowledge for Teaching**. Journal of Mathematics Teacher Education, 11, 14 Out 2008. 499-511.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de Matemática: como dois e dois: a construção da matemática**. São Paulo: FTD, 1997.

UFVJM. **Projeto Pedadgógico do Curso de Graduação em Matemática (Licenciatura)**. Teófilo Otoni: Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFMG, 2007.

VALENTE, W. R. **O Lugar da Matemática Escolar na Licenciatura em Matemática**. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Rio Claro, 27. n. 47, Dezembro 2013. 939-953. ISSN 0103-636X.

VENTURI, J. J. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**. 9ª. ed. Curitiba: Unificado, 1949. ISBN 85.85132-48-5.

WALLE, J. A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6^a. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p. ISBN 978-85-363-1971-1.

APÊNDICE A – TESTE

Instrumento de teste da pesquisa:

LACUNAS CONCEITUAIS SOBRE NÚMEROS E SUAS OPERAÇÕES NA FORMAÇÃO DO PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Obs. Responda as questões sequencialmente!

Questão 1

Durante uma aula sobre potenciação, um professor do ensino fundamental fez as seguintes afirmações:

- I- *Todo número elevado a zero é igual a um, por exemplo: $3^0 = 1$, $8^0 = 1$ ou $1000^0 = 1$*
- II- *Todo número elevado a um é igual a ele próprio, por exemplo: $2^1 = 2$, $5^1 = 5$ ou $1000^1 = 1000$.*
- III- *Zero elevado a qualquer número é igual a zero, por exemplo: $0^2 = 0$, $0^5 = 0$ ou $0^{100} = 0$.*

- a) Você já ouviu ou utilizou alguma dessas regras? Caso afirmativo, qual?
- b) Você explicaria de outra maneira as afirmações efetuadas pelo professor? Caso afirmativo, justifique.

Questão 2

Suponha que um estudante lhe pergunte “O que significa a operação 7 dividido por 0?”. Como você o responderia?

Questão 3.

Em muitos livros didáticos o significado de expoente de um número é a quantidade de vezes em que a base aparece se repetindo na multiplicação por si própria. Por exemplo:

A potência a^n é igual ao produto de n fatores iguais a a . (IEZZI, 1984. p.68)²

Por exemplo: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Considerando a definição dada, de que maneira você explicaria aos alunos do **ensino médio**:

- a) O que significa a potenciação $2^{3,1}$?
- b) O que significa 2^π ?
- c) Ao apresentar que $2^0 = 1$ o aluno questiona o professor: “Como que o 2 não se repete nenhuma vez e o resultado é igual a 1?” Como você explicaria?

² IEZZI, Gelson. **Matemática e Realidade: 5ª série.**/Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado. São Paulo: Atual, 1984

Questão 4

Para responder as questões abaixo, considere suas respostas destinadas a alunos da educação básica:

- (a) O que é fração?
- (b) O que é dízima periódica?
- (c) Obtenha a fração geratriz da dízima periódica 32,7999...
- (d) Se você encontrou a fração, tente agora realizar a divisão do numerador pelo denominador e encontrar o número dado. Você conseguiu? Explique.

Questão 5

Quantas raízes possui a equação $2^x = x^2$? Quais são? Essas raízes são racionais ou irracionais?

Questão 6

Ao elaborar um problema, o professor pensou num número que multiplicado por ele mesmo cinco vezes é igual a ele próprio e criou a seguinte equação:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a$$

Qual a solução da equação dada? Se você resolveu algebricamente, explique os passos utilizados na resolução. Se possível, utilize mais de uma resolução para facilitar o entendimento caso seja necessário explicar a um aluno do ensino médio.

Questão 7

Resolva a equação $\sqrt{x} + 2 = x$

Como você explica as raízes obtidas nesta equação?

Questão 8

Na escola, ao terminar um problema envolvendo radicais, geralmente somos instados a racionalizar o denominador do resultado obtido. Por que isso?

Questão 9

Resolva e interprete geometricamente a seguinte inequação:

$$|x + 1| < 2$$

Questão 10

Por que $(-1)(-1) = 1$?

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Resolução nº 196, de 10 de Outubro de 1996, do Conselho Nacional de Saúde.

O presente termo em atendimento à Resolução 196/96, destina-se a esclarecer ao participante da pesquisa intitulada “**LACUNAS CONCEITUAIS SOBRE NÚMEROS E SUAS OPERAÇÕES NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA**”, sob responsabilidade dos pesquisadores (Maria Aparecida Roseane Ramos e Rogério Starich Silva), do curso de (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas (UESB), os seguintes aspectos:

Objetivo: Evidenciar e analisar as dificuldades apresentadas por discentes do curso de Licenciatura em Matemática do campus do Mucuri da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri – UFVJM sobre os conceitos de números e operações, conteúdo essencial da matemática básica.

Metodologia: Será realizado teste com questões de matemática básica com discentes de todos os períodos do curso em questão. Em outro momento serão entrevistados alguns dos participantes do teste para melhor entendimento das respostas. As respostas destes dois procedimentos serão analisadas quantitativa e qualitativamente à luz dos estudos teóricos realizados.

Justificativa e Relevância: A pesquisa se faz necessária para contribuir com o estudo teórico sobre a formação do professor de matemática da educação básica e poderá ser útil para estimular reflexões da grade curricular e da proposta pedagógica do curso de Matemática da UFVJM.

Participação: O participante deverá responder um teste contendo 10 questões abertas sobre conteúdos matemáticos da educação básica, um questionário situacional e comparecer a uma entrevista individual e restrita previamente agendada.

Desconfortos e riscos: Devido à metodologia empregada não há riscos envolvidos no estudo. Em caso de desconforto em qualquer etapa da pesquisa é facultado ao participante retirar a sua participação sem nenhum prejuízo para o participante. Todo o material da pesquisa será analisado única e restritamente pelos pesquisadores para garantir o sigilo da identificação dos participantes.

Confidencialidade do estudo: Todos os procedimentos do estudo são sigilosos e nenhuma identificação dos participantes da pesquisa será publicada.

Benefícios: A pesquisa poderá contribuir para a reflexão e melhorias na proposta pedagógica do curso.

Dano advindo da pesquisa: Nenhum dano direto ou indireto.

Garantia de esclarecimento: É garantido aos participantes da pesquisa esclarecimentos adicionais sobre os procedimentos em qualquer momento entre as etapas da pesquisa.

Participação Voluntária: A participação dos sujeitos da pesquisa no projeto é voluntária e livre de qualquer forma de remuneração e participante pode retirar seu consentimento em participar da pesquisa a qualquer momento.

- **Consentimento para participação:** Eu estou de acordo com a participação no estudo descrito acima. Eu fui devidamente esclarecido quanto os objetivos da pesquisa, aos procedimentos aos quais serei submetido e os possíveis riscos envolvidos na minha participação. Os pesquisadores me garantiram disponibilizar qualquer esclarecimento adicional que eu venha solicitar durante o curso da pesquisa e o direito de desistir da participação em qualquer momento, sem que a minha desistência implique em qualquer prejuízo à minha pessoa ou à minha família, sendo garantido anonimato e o sigilo dos dados referentes a minha identificação, bem como de que a minha participação neste estudo não me trará nenhum benefício econômico.

Eu, _____, aceito livremente participar do estudo intitulado “O CONCEITO DE NÚMERO E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA NA LICENCIATURA DA UFVJM” desenvolvido pelo pesquisador Rogério Starich Silva, sob a responsabilidade da Professora Dra. Maria Aparecida Roseane Ramos da Universidade estadual do Sudoeste da Bahia (UESB).

Assinatura

do

Participante

COMPROMISSO DO PESQUISADOR

Eu discuti as questões acima apresentadas com cada participante do estudo. É minha opinião que cada indivíduo entenda os riscos, benefícios e obrigações relacionadas a esta pesquisa.

Teófilo Otoni, Data: __/__/__

Assinatura do Pesquisador

Para maiores informações, pode entrar em contato com:

Rogério Starich Silva. E-mail: rogerio.starich@ufvjm.edu.br

Dra. Maria Ap. Roseane Ramos. E-mail: aparecidaroseane.ramos@yahoo.com.br

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO SITUACIONAL DO ESTUDANTE

Questionário situacional da pesquisa:

LACUNAS CONCEITUAIS SOBRE NÚMEROS E SUAS OPERAÇÕES NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

- 1) Quantos semestres letivos você já cursou no curso de Matemática da UFVJM?
- 2) Das disciplinas abaixo, marque com um X as colunas que representam suas respostas:

Disciplinas	Estou cursando	Já concluí
Fundamentos da Matemática Elementar I		
Fundamentos da Matemática Elementar II		
Geometria Analítica		
Introdução à C. da Computação		
Cálculo Diferencial e Integral I		
Geometria Euclidiana Plana		
Álgebra Linear		
Cálculo Diferencial e Integral II		
Geometria Euclidiana Espacial		
Álgebra I		
Cálculo Numérico		
Cálculo Diferencial e Integral III		
Física Básica I		
Álgebra II		
Cálculo Diferencial e Integral IV		
Física Básica II		
Estatística e Probabilidade		
Análise I		
Matemática Financeira		
História da Matemática		

- 3) Em quais disciplinas você teve maior dificuldade?

- 4) Você já ministrou ou ministra aulas em alguma escola? Se sim, por quanto tempo? Em qual ano ou série?

- 5) Você já ministrou ou está ministrando aulas particulares? Para qual tipo de aluno? Há quanto tempo?

- 6) Você cursou sua educação básica: (marque uma opção)
 - a) Totalmente em escola pública
 - b) Parte em escola pública e parte em escola particular
 - c) Totalmente em escola particular
 - d) De outra forma: _____
- 7) Você já se sente preparado para ensinar matemática básica para alunos do ensino fundamental ou médio?
 - a) Sim
 - b) Não
 - c) Não sei