



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
- PROFMAT

DANIVALTON FERNANDES DE OLIVEIRA

**O CICLO TRIGONOMÉTRICO MANIPULÁVEL COMO RECURSO DIDÁTICO  
FACILITADOR DO PROCESSO DE ENSINO - APRENDIZAGEM DA  
TRIGONOMETRIA**

**Vitória da Conquista  
2015**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
- PROFMAT

DANIVALTON FERNANDES DE OLIVEIRA

**O CICLO TRIGONOMÉTRICO MANIPULÁVEL COMO RECURSO DIDÁTICO  
FACILITADOR DO PROCESSO DE ENSINO - APRENDIZAGEM DA  
TRIGONOMETRIA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade

Vitória da Conquista  
2015

## Catlogação

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
- PROFMAT

**O CICLO TRIGONOMÉTRICO MANIPULÁVEL COMO RECURSO DIDÁTICO  
FACILITADOR DO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DA  
TRIGONOMETRIA**

Danivalton Fernandes de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade

Esta Dissertação foi apresentada à banca examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Campus Vitória da Conquista, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade.

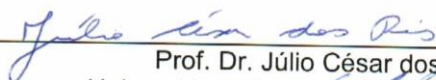
Aprovado em: 30 de SETEMBRO de 2015.

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade (Orientador)  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB



---

Prof. Dr. Júlio César dos Reis (Convidado)  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB



---

Prof. Dr. Paulo Espinheira Menezes de Melo (Convidado)  
Instituto Federal da Bahia - IFBA

Vitória da Conquista  
Bahia – Brasil  
2015

## DEDICATÓRIA

*Dedico esse trabalho à memória de Dalva F. Oliveira, minha mãe, que sempre me incentivou com um carinho inesgotável.*

## AGRADECIMENTOS

*Agradeço primeiramente a Deus pela presença constante em minha vida, direcionando sempre meu caminho.*

*A minha amada esposa Gabriela pelo apoio e incentivo, indispensáveis para a conclusão deste trabalho.*

*Ao meu pai que mesmo longe sempre torceu por mim.*

*A meus irmãos e cunhados pela força e cobrança.*

*Aos alunos do 2º ano do IFNMG que fizeram parte desta pesquisa.*

*Aos colegas e amigos do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Campus Salinas, em especial à Direção Geral e sua equipe.*

*A todos os professores que estiveram presentes nestes dois anos, proporcionando momentos de profunda reflexão e conhecimento na minha formação como professor. Em especial à professora Dra. Maria Deusa F. da Silva pelas sugestões e indicações.*

*Aos colegas de Mestrado, pelo apoio, cumplicidade, companheirismo e sugestões. Em especial aos amigos Leonardo, Eilson, Roberto e Anderson.*

*Ao meu orientador Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade, pelos seus ensinamentos e incentivos para a conclusão desse trabalho.*

*Enfim, a todos que acreditaram em mim, com palavras de força e coragem, para que continuasse nesta caminhada.*

*O único homem que está isento de erros, é aquele que não arrisca acertar.*  
*Albert Einstein*

## RESUMO

O ensino da matemática é alvo de muitas pesquisas, em sua maioria, buscando alternativas para melhorar o trabalho do professor em sala de aula. A trigonometria é uma disciplina de extrema importância no currículo do ensino médio, pois é com ela que o aluno irá compreender vários conceitos da física e modelos de fenômenos da natureza em que se utilizam funções periódicas para representá-los. A proposta desta pesquisa consiste em uma alternativa para o ensino-aprendizado da trigonometria utilizando um material manipulável. Essa pesquisa foi realizada com alunos da 2ª série do ensino médio no campus Salinas do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais, onde foi analisado o desempenho dos alunos com e sem a utilização do ciclo trigonométrico manipulável desenvolvido pelo autor, o qual aborda as 6 razões trigonométricas. Pretende-se com esse trabalho mostrar aos professores e futuros professores de matemática, um material que possa ser utilizado em sala de aula para auxiliar o ensino de trigonometria na educação básica, buscando assim melhorias no ensino através da inserção do ciclo trigonométrico manipulável no ambiente escolar.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Trigonometria, Material manipulável.



## **ABSTRACT**

The teaching of mathematics is the subject of much research, mostly seeking alternatives to improve teachers' work in the classroom. Trigonometry is a subject of extreme importance in the high school curriculum as it is with her that the student will understand various concepts of physics and natural phenomena of models that use periodic functions to represent them. The purpose of this research is to an alternative to the teaching and learning of trigonometry using a welding materials. This research was conducted with students of 2nd year of high school on campus Salinas North Federal Institute of Minas Gerais, where the performance of students with and without the use of manipulated trigonometric cycle developed by the author was analyzed, which addresses the six trigonometric ratios. The aim of this work show teachers and future teachers of mathematics, a material that can be used in the classroom to assist the trigonometry of teaching in basic education, thus seeking improvements in education by inserting the manipulated trigonometric cycle in the school environment.

Keywords: Teaching and Learning, Trigonometry, manipulable material.

## LISTA DE FIGURAS E GRÁFICOS

FIGURA 1 – Porcentagem de alunos com nível adequado segundo o movimento TPE.....	14
FIGURA 2 – Ilustração de Ptolomeu usando um quadrante.....	19
FIGURA 3 – Papiro Rhind, Museu de Londres.....	20
FIGURA 4 – Plimpton 322, Universidade de Columbia .....	20
FIGURA 5 – Equivalência entre o seno e a corda.....	22
FIGURA 6 – Teorema de Ptolomeu .....	23
FIGURA 7 – Layout utilizado no CTM .....	36
FIGURA 8 – Placa superior recortada.....	37
FIGURA 9 – Secante e Cossecante de $60^\circ$ .....	38
FIGURA 10 – Eixos e quadrantes .....	38
FIGURA 11 – Marcando o acetato com o compasso .....	39
FIGURA 12 – Finalizando o corte do acetato com um estilete .....	39
FIGURA 13 – Régua.....	40
FIGURA 14 – Componentes da régua .....	40
FIGURA 15 – Fixando o disco central com ilhós .....	41
FIGURA 16 – Unindo as placas .....	41
FIGURA 17 – Fixando a régua.....	42
FIGURA 18 – Seno e cosseno de $135^\circ$ .....	42
FIGURA 19 – Seno e cosseno.....	43
FIGURA 20 – Tangente e cotangente de $150^\circ$ .....	44
FIGURA 21 – Secante e cossecante de $330^\circ$ .....	45
FIGURA 22 – Pecentual de professores das Etapas da Educação Básica segundo o sexo –Brasil-2007 .....	47
FIGURA 23 – Alunos resolvendo exercícios com o CTM na IV SEMAT da UESB .....	48
FIGURA 24 – Apresentação do CTM na VI Semana da matemática UESB – Campus Jequié .....	51
FIGURA 25 – Aluno sendo auxiliado para manusear corretamente o CTM.....	51
FIGURA 26 – Encontrado o eixo das tangentes.....	57
FIGURA 27 – Cotangente.....	58
FIGURA 28 – Eixo das secantes .....	59
FIGURA 29 – Alunos da turma MQ resolvendo a atividade sobre secante .....	61
FIGURA 30 – Eixo das cossecantes.....	61
GRÁFICO 1 – Sexo dos participantes.....	46
GRÁFICO 2 – Idade dos participantes.....	46
GRÁFICO 3 – Sexo dos participantes do minicurso em Jequié .....	48
GRÁFICO 4 – Idade dos participantes do minicurso em Jequié.....	48
GRÁFICO 5 – Relação das razões trigonométricas conhecidas pelos participantes do minicurso em Jequié .....	49
GRÁFICO 6 – Relação eixos trigonométricos conhecidos pelos participantes do minicurso em Jequié .....	49
GRÁFICO 7 – Número de acertos na atividade de sondagem: Determinação do sinal .....	50
GRÁFICO 8 – Número de acertos na atividade de sondagem: Determinação do valor da razão.....	50
GRÁFICO 9 – Dificuldade em trigonometria na turma KO .....	53
GRÁFICO 10 – Dificuldade em trigonometria na turma MQ.....	53
GRÁFICO 11 – Nível de conhecimento do ciclo trigonometrico na turma KO .....	54
GRÁFICO 12 – Nível de conhecimento do ciclo trigonometrico na turma MQ.....	54
GRÁFICO 13 – Desempenho inicial da turma KO.....	54
GRÁFICO 14 – Desempenho inicial da turma MQ.....	54
GRÁFICO 15 – Seno na turma KO .....	55
GRÁFICO 16 – Seno na turma MQ.....	55

GRÁFICO 17 – Cosseno na turma KO .....	56
GRÁFICO 18 – Cosseno na turma MQ.....	56
GRÁFICO 19 – Tangente na turma KO.....	57
GRÁFICO 20 – Tangente na turma MQ.....	57
GRÁFICO 21 – Cotangente na turma KO .....	59
GRÁFICO 22 – Cotangente na turma MQ.....	59
GRÁFICO 23 – Secante na turma KO .....	60
GRÁFICO 24 – Secante na turma MQ.....	60
GRÁFICO 25 – Cossecante na turma KO.....	62
GRÁFICO 26 – Cossecante na turma MQ .....	62

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIações**

CTM – Ciclo Trigonométrico Manipulável

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IFNMG – Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PISA - Programme for International Student Assessment

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional

Saeb – Sistema de Avaliação da Educação Básica

TPE – Movimento Todos pela Educação

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	19
2.1. A origem da trigonometria .....	19
2.2. O uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática.....	25
2.3. O ensino de trigonometria .....	27
3. METODOLOGIA DA PESQUISA.....	32
3.1. Participantes da pesquisa .....	32
3.2. Instrumentos da pesquisa .....	33
4. CONSTRUÇÃO DO MATERIAL .....	35
4.1. Versão professor .....	35
4.2. Versão aluno .....	39
4.3. Instruções de uso .....	43
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	46
5.1. Pesquisa exploratória (Projeto Piloto) .....	46
5.2. Aplicação com alunos da 2ª série do ensino médio .....	52
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	63
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	65
APÊNDICES.....	68
APÊNDICE A – Questionários e exercício – Minicursos UESB.....	68
APÊNDICE B – Questionário diagnóstico aos discentes .....	72
APÊNDICE C – Atividades desenvolvidas com os discentes com e sem o CTM.....	73
APÊNDICE D – Layout utilizado no CTM.....	79



## 1. INTRODUÇÃO

O ensino de matemática é alvo de muitas pesquisas e atualmente tem-se investido muito nessa área. O PROFMAT é um bom exemplo desses investimentos, pois busca a capacitação de professores de matemática da educação básica de todo o país. O PIBID (Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência) é outro exemplo, pois este programa concede bolsas a alunos de licenciaturas, inclusive em matemática, participantes de projetos de iniciação à docência desenvolvido em instituições de educação superior em parceria com escolas de educação básica da rede pública de ensino.

Esses investimentos são devidos, em grande parte, à atual posição do Brasil em rankings internacionais. Segundo o PISA (*Programme for International Student Assessment*), que é um programa internacional de avaliação aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países, em 2012 o Brasil ocupou a 58ª colocação entre os 65 países comparados (ver tabela 1).

TABELA 1 – Pisa 2012 (adaptada)

	Mathematics				Reading		Science	
	Mean score in PISA 2012	Share of low- achievers (Below Level 2)	Share of top- performers in mathematics (Level 5 or 6)	Annualised change	Mean score in PISA 2012	Annualised change	Mean score in PISA 2012	Annualised change
OECD average	494	23.1	12.6	-0.3	496	0.3	501	0.5
Shanghai-China	613	3.8	55.4	4.2	570	4.6	580	1.8
Singapore	573	8.3	40.0	3.8	542	5.4	551	3.3
Hong Kong-China	561	8.5	33.7	1.3	545	2.3	555	2.1
Chinese Taipei	560	12.8	37.2	1.7	523	4.5	523	-1.5
Korea	554	9.1	30.9	1.1	536	0.9	538	2.6
Macao-China	538	10.8	24.3	1.0	509	0.8	521	1.6
Japan	536	11.1	23.7	0.4	538	1.5	547	2.6
⋮								
Chile	423	51.5	1.6	1.9	441	3.1	445	1.1
Malaysia	421	51.8	1.3	8.1	398	-7.8	420	-1.4
Mexico	413	54.7	0.6	3.1	424	1.1	415	0.9
Montenegro	410	56.6	1.0	1.7	422	5.0	410	-0.3
Uruguay	409	55.8	1.4	-1.4	411	-1.8	416	-2.1
Costa Rica	407	59.9	0.6	-1.2	441	-1.0	429	-0.6
Albania	394	60.7	0.8	5.6	394	4.1	397	2.2
<b>Brazil</b>	<b>391</b>	<b>67.1</b>	<b>0.8</b>	<b>4.1</b>	<b>410</b>	<b>1.2</b>	<b>405</b>	<b>2.3</b>
Argentina	388	66.5	0.3	1.2	396	-1.6	406	2.4
Tunisia	388	67.7	0.8	3.1	404	3.8	398	2.2
Jordan	386	68.6	0.6	0.2	399	-0.3	409	-2.1
Colombia	376	73.8	0.3	1.1	403	3.0	399	1.8
Qatar	376	69.6	2.0	9.2	388	12.0	384	5.4
Indonesia	375	75.7	0.3	0.7	396	2.3	382	-1.9
Peru	368	74.6	0.6	1.0	384	5.2	373	1.3

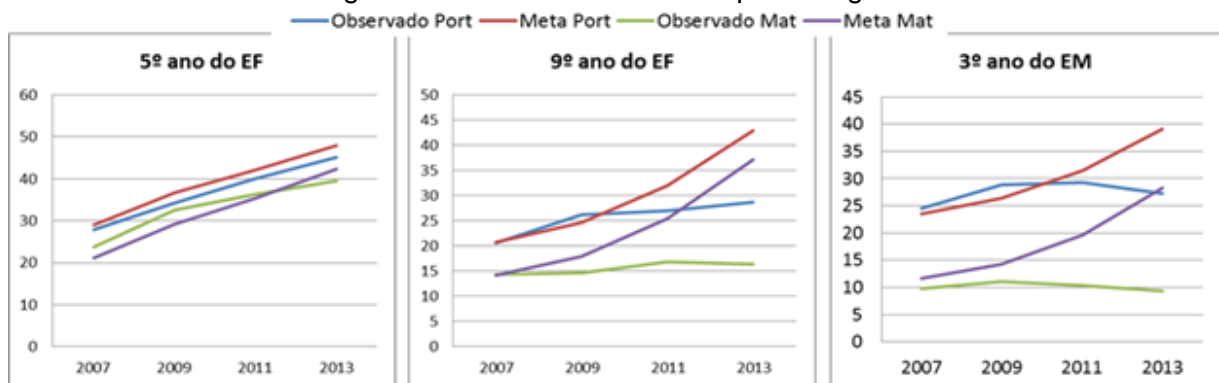
Fonte: <http://www.oecd.org/pisa>

As avaliações do PISA ocorrem a cada 3 anos e abrangem três áreas do conhecimento: leitura, matemática e ciências. A cada edição é dada maior ênfase a uma área, em 2012 destacou-se a Matemática.

Outro indicador da atual situação da educação nacional é o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica), que aponta o desempenho de escolas públicas e privadas. No ano de 2014 a nota do ensino médio ficou abaixo da meta esperada, situação preocupante para a educação básica brasileira.

Um levantamento feito pelo Movimento Todos pela Educação (TPE), com base na avaliação dos alunos aferida pela Prova Brasil e pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) mostra que somente 9,3% dos estudantes do 3º ano do ensino médio tiveram aprendizado considerado adequado em Matemática em 2013 e que esse número é inferior a 2011, quando 10,3% atingiram a meta, muito distante da meta que era de 28,3% proposta pelo TPE. Podemos observar na Figura 1 que o desempenho do 9º ano do ensino fundamental também aparece muito abaixo da meta esperada. Fato preocupante para o ensino de trigonometria, pois é nessa série que se inicia o ensino das razões seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo.

FIGURA 1 – Porcentagem de alunos com nível adequado segundo o movimento TPE



Fonte: <http://www.todospelaeducacao.org.br>

Esses resultados são muito importantes para indicar a atual situação do ensino e aprendizagem da matemática no país. Outro fator influenciador desse resultado é o fato da Matemática ser tida como uma das matérias mais difíceis do ensino básico. Segundo Silveira (2002), há um senso comum entre a comunidade escolar de que essa disciplina é difícil, e que é responsável pela maioria das reprovações escolares. Esse pensamento não é recente, vem desde o tempo de Pitágoras, em que acreditavam que a Matemática era para poucos.



Para Cunha (2013), o baixo nível de rendimento nessa disciplina está relacionado ao grau de insatisfação de muitos alunos que afirmam não haver significados nos problemas propostos em aula.

Dentre os conteúdos da matemática, podemos destacar a trigonometria como um importante conteúdo do ensino básico, pois ela é pré-requisito para outros conteúdos da matemática e está intimamente ligada a outras disciplinas, como por exemplo, a Física e a Geografia (CORDEIRO e MASSAROLO, 2008).

Oliveira (2006) concorda com Cordeiro e Massarolo (2008) em relação à importância desse conteúdo. Segundo Oliveira (2006), a trigonometria é uma disciplina muito importante para que o aluno aprenda conceitos da física, e contribui para aprofundar conceitos de geometria e de função. O referido autor cita como exemplos os estudos de vetores e a decomposição de forças aplicadas em um corpo que necessitam do uso do seno e do cosseno.

Devem-se procurar meios para reverter essa situação da Matemática no Brasil, para tanto é necessário buscar a cada aula, alternativas que possibilitem uma melhor compreensão e aceitação dos conceitos matemáticos pelos alunos.

Silva (2006) em sua pesquisa com alunos do ensino médio sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo diz que a trigonometria no ensino médio é como qualquer outro ramo da matemática, só consegue adquirir caráter significativo, quando possibilita desenvolver habilidades consideradas significativas no que diz respeito à leitura e à interpretação de fatos reais que envolvem não somente os conhecimentos matemáticos, mas as demais atividades da vida do aluno.

As recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino médio enfatizam o potencial da trigonometria para desenvolver habilidades e competências, em especial suas aplicações no cálculo de distâncias e modelos que utilizam funções periódicas, conforme se verifica abaixo:

Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de

modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL, 2000, p.44)

Durante nossa vida docente, deparamo-nos com momentos em que o fracasso dos alunos nos faz repensar nossa prática docente. Para atender o desafio diário de ensinar, os professores de matemática devem estar dispostos a buscar diferentes formas de ensinar e aprender que possibilitem a construção de práticas coerentes.

Pesquisando uma maneira de trabalhar a trigonometria no ciclo, através de um suporte que pudesse facilitar a compreensão do aluno, optamos pelo material manipulável, pois de acordo com Rodrigues e Graziere (2012) esse tipo de recurso didático torna as aulas mais dinâmicas e compreensíveis:

Os materiais didáticos manipuláveis constituem um importante recurso didático a serviço do professor em sala de aula. Estes materiais podem tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação da teoria matemática da constatação na prática, por meio da ação manipulativa. (RODRIGUES e GRAZIRE, 2012, p.2)

O aparelho, Ciclo Trigonométrico Manipulável (CTM), que foi utilizado nessa pesquisa foi desenvolvido pelo autor durante o segundo ano do mestrado.

A intenção é desenvolver o interesse dos alunos pela trigonometria através do manuseio do ciclo trigonométrico, identificando os valores das razões de arcos da primeira volta positiva do ciclo.

Buscamos ainda a vantagem da praticidade de ter um material pronto para ser usado em sala de aula, evitando assim o desperdício de tempo para desenhá-lo na lousa, o que resultará no maior aproveitamento da aula.

Mas ainda não temos informações suficientes para dizer que esse material facilitará o ensino e a aprendizagem da trigonometria. O que nos leva a questão diretriz desta pesquisa.

**Será que o ciclo trigonométrico manipulável, desenvolvido pelo autor, poderá facilitar o processo de ensino aprendizagem da trigonometria motivando os alunos através da ação manipulativa?**

Desta forma, com a intenção de responder a esta questão, seguem os objetivos norteadores deste trabalho.

## **Objetivos**

### **Objetivo Geral**

- Avaliar o ciclo trigonométrico manipulável como recurso didático facilitador no processo aprendizagem de trigonometria nas turmas do 2º ano do Ensino Médio do campus Salinas do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais

### **Objetivos Específicos**

- Abordar as 6 funções trigonométricas elementares no ciclo trigonométrico;
- Verificar o nível de aprendizagem e motivação despertada nos alunos com o uso do CTM;
- Observar a aceitação dos alunos em relação ao material manipulável proposto nesta pesquisa;
- Fazer um comparativo do desempenho dos alunos com e sem a utilização do CTM;
- Analisar as vantagens e as desvantagens da utilização do CTM como recurso didático no ensino e na aprendizagem de Trigonometria na 2ª série do ensino médio.

Esse trabalho foi formatado segundo a norma NBR 14724:2011. A versão citada é a norma mais recente da Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT para apresentação de trabalhos acadêmicos.

Este trabalho está dividido em seis capítulos, sendo este o primeiro, intitulado introdução. Neste primeiro capítulo, foram apresentados o objetivo geral, os objetivos específicos e questão diretriz dessa pesquisa.

No capítulo 2 apresenta-se a revisão de literatura desta dissertação por meio da consulta a livros, a artigos em periódicos, a dissertações de mestrado e a teses de doutorado na área. Tal capítulo abrangerá um histórico da Trigonometria, o uso de materiais manipuláveis e o ensino de Trigonometria.

No capítulo 3 apresenta-se a descrição da metodologia utilizada na pesquisa e o caminho para a realização da investigação, com a caracterização do tipo de pesquisa, onde se tornam explícitos os pressupostos metodológicos assumidos pelo autor.

O capítulo 4 consiste na construção do material. Nesta parte apresentaremos os materiais necessários e os passos empregados na confecção do aparelho.

O capítulo 5 consiste nos resultados da pesquisa. Esta etapa tem como objetivo expor e comparar os dados coletados.

O capítulo 6 apresenta as considerações finais, onde o autor descreve as conclusões que obteve após a realização desta pesquisa.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo foi organizado a partir da análise de livros, artigos, dissertações, publicações em eventos que abordam aspectos relacionados com o trabalho investigativo realizado.

A revisão de literatura desta dissertação está dividida em três partes, a primeira faz uma abordagem histórica da trigonometria com intuito de saber como se deu o seu surgimento, a segunda se trata do uso de materiais manipuláveis no ensino de matemática e a terceira diz respeito ao ensino de trigonometria.

### 2.1. A origem da trigonometria

Foi principalmente com fins de atender às necessidades da Astronomia, que ocorreu o desenvolvimento da Trigonometria e o surgimento das primeiras tabelas trigonométricas. Na Figura 2, tem-se uma ilustração de Ptolomeu observando o céu noturno com um quadrante. A Trigonometria, inicialmente parte daquela ciência, percorre um longo caminho histórico até ser incorporada pela Matemática (MENDES, 2009).

FIGURA 2 – Ilustração de Ptolomeu usando um quadrante



Fonte: <http://www.er.uqam.ca>

A Trigonometria – palavra de origem grega: trigonos (triângulo) + metrôm (medida) – pode ter suas origens no Egito, a partir das medições das pirâmides e na

Babilônia, relacionada à confecção de calendários, épocas de plantio e estações do ano (COSTA, 1997).

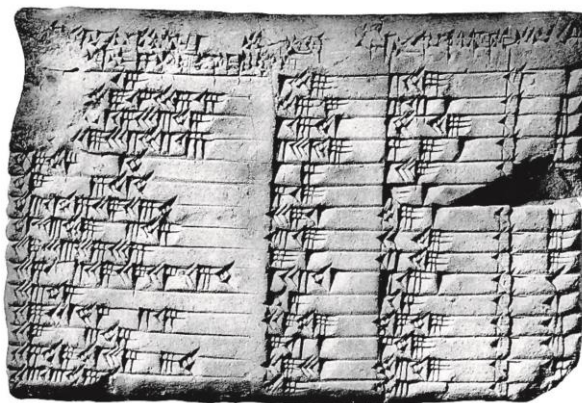
Há alguns problemas no papiro Rhind, Figura 3, que envolvem a cotangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide, e a tábua cuneiforme babilônica Plimpton 322, Figura 4, contém, essencialmente, uma notável tábua de secantes.

FIGURA 3 – Papiro Rhind, Museu de Londres



Fonte: MENDES (2010)

FIGURA 4 – Plimpton 322, Universidade de Columbia



Fonte: MENDES (2010)

Os astrônomos babilônicos dos séculos V e IV a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações que se sabe hoje terem chegado aos gregos e deram origem à trigonometria esférica.

A Trigonometria não foi uma obra individual. Desde sua origem na matemática grega recebeu importantes contribuições de pessoas de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus.

Foi visando atender às necessidades da Astronomia, que aconteceu o desenvolvimento da Trigonometria e a consequente construção das primeiras tabelas trigonométricas. Desta forma, os estudos de trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos sobre a superfície de uma esfera, mas tornou-se, para tanto, necessário desenvolver partes da trigonometria plana.

### **A trigonometria na Grécia**

Vários são os nomes importantes na história da trigonometria, dentre eles podemos destacar:

Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) que é considerado o pai da Trigonometria por ser o pioneiro na construção de uma tabela trigonométrica, com valores de arcos e cordas para uma série de ângulos e o fundador da Astronomia científica. Suas obras não chegaram aos dias atuais, sendo conhecidas através de citações em trabalhos posteriores, como nos de Cláudio Ptolomeu (90-168).

Provavelmente foi o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade. São creditados a Hiparco segundo EVES (2004, p.202), em astronomia, feitos como a determinação do mês lunar médio, um cálculo preciso da inclinação da eclíptica, a descoberta da precessão anual dos equinócios, cálculo da paralaxe lunar, determinação do perigeu e do movimento médio da Lua e a organização de um catálogo de 850 estrelas.

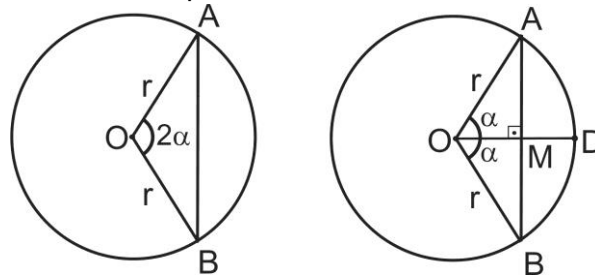
Não menos importantes que suas descobertas em astronomias foram os desenvolvimentos obtidos por Hiparco em trigonometria. Segundo EVES (2004, p.203), Teon de Alexandria (sec. IV) atribui a Hiparco um tratado em doze livros que se ocupa da construção de uma tábua de cordas.

Apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é justamente esse valor, ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo  $x$  é  $2 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$  como mostra a Figura 5 a seguir. Segundo ROQUE (2012,

p.175) os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim trabalhavam com a corda do arco duplo.

Acredita-se que a tabela de cordas devida a Cláudio Ptolomeu (90-168) tenha se baseado na de Hiparco.

FIGURA 5 – Equivalência entre o seno e a corda



$$\text{sen}\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{2AM}{2OA} = \frac{\text{crd}2\alpha}{2r}$$

Fonte: PEREIRA (2010, p.15) adaptado

Outro matemático grego, Menelau de Alexandria, por volta de 100 d.C., continuou os trabalhos de Hiparco, destacando-se como um grande astrônomo e geômetra grego defensor da geometria clássica. A ele, Teon atribui um trabalho sobre cordas de um círculo, em seis livros, que como vários outros, se perderam (COSTA, 1997).

O tratado, *Sphaerica* de Menelau, obra dividida em três livros, se preservou numa versão árabe. Segundo BOYER (1974, p. 119) no Livro I desse tratado Menelau estabeleceu uma base para triângulos esféricos; no Livro II descreve a aplicação da geometria esférica aos fenômenos astronômicos e é de pouco interesse matemático; finalmente, no Livro III encontra-se o “teorema de Menelau” que desempenhou um papel fundamental na trigonometria esférica e na astronomia.

Contudo, a mais influente e significativa obra trigonométrica da Antiguidade foi a *Syntaxis mathematica*, obra escrita por Cláudio Ptolomeu (90-168) de Alexandria, composta por treze livros e escrita cerca de meio século depois de Menelau. Segundo EVES (2004, p.204), baseado nos escritos de Hiparco, a obra de Ptolomeu é famosa por sua compacidade e elegância. A “Síntese matemática” foi associada, pelos comentadores, ao superlativo *magiste* ou “o maior” para distingui-la de trabalhos menores sobre astronomia. Mais tarde, na Arábia, surgiu o costume de chamar o



trabalho de Ptolomeu de o *Almagesto* (“o maior”), sendo por esse nome conhecida até os dias atuais.

Pouco se sabe da vida de Ptolomeu, principalmente onde ou quando nasceu. Segundo BOYER (1974, p. 119 e 120), Ptolomeu realizou observações em Alexandria de 127 a 151 d.C. e por isso supõe-se que nascera no fim do primeiro século, e segundo Suidas, escritor que viveu no século dez, Ptolomeu viveu ainda durante o império de Marco Aurélio (161 a 180 d.C.).

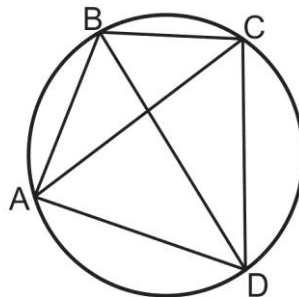
O *Almagesto* tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do Sistema Solar, supondo que a Terra está em seu centro<sup>1</sup>. Ptolomeu desenvolveu a trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro livro de sua obra. O capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos). ROQUE (2012, p.176).

O *Almagesto* foi preservado e nos trouxe não só as tabelas trigonométricas como também os detalhes dos métodos utilizados por Ptolomeu em sua construção.

Para a formulação desta tabela, Ptolomeu usou o fato de que em um quadrilátero inscritível ABCD (Figura 6) vale a relação:

FIGURA 6 – Teorema de Ptolomeu

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$$



Fonte: O autor

Esta proposição geométrica é conhecida como “teorema de Ptolomeu” e nos diz que a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais. Podemos prová-lo traçando BE de modo que o ângulo ABE seja igual ao ângulo DBC e observando a semelhança dos triângulos ABE e BCD.

O teorema de Ptolomeu leva, em notação moderna e usando as funções seno e cosseno, a expressões para  $\sin(\alpha \pm \beta)$  e  $\cos(\alpha \pm \beta)$ . Além destas, Ptolomeu se

<sup>1</sup> Teoria geocêntrica que será questionada, no século XV, pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico

valeu de outra fórmula equivalente da fórmula atualmente utilizada para o cálculo do seno da metade do ângulo, ou seja, sabia que se é conhecida a corda de um arco, a corda da metade do arco também é. Conhecendo o equivalente de nossas fórmulas fundamentais como citadas acima, Ptolomeu poderia assim construir uma tabela de cordas tão precisa quanto se poderia desejar.

O seno de um ângulo foi usado pela primeira vez em um dos trabalhos do hindu Aryabhata, por volta do século VI. Ele elaborou tabelas utilizando metade de cordas que atualmente conhecemos como tabelas de senos. O nome seno vem do latim *sinus* que significa seio, curva, cavidade. Muitos acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. O uso do termo *sinus rectus arcus* por Fibonacci rapidamente encorajou o uso universal de seno.

A palavra cosseno aparece somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. Os conceitos de seno e cosseno foram originados pelos problemas relativos à Astronomia, enquanto que o conceito de tangente, ao que parece, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

### **A contribuição da Índia e dos países árabes**

A trigonometria indiana era um instrumento para a astronomia. Segundo BOYER (1974, p. 157) uma das contribuições da Índia de maior influência na história da matemática foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega de cordas.

As mais antigas tabelas da função seno que se preservaram são as do *Siddhāntas* e do *Aryabhatiya*, manuais de Astronomia, como o *Sūrya Siddhānta* escrito por volta do ano 400 d.C., sendo o único que parece ter-se preservado completamente.

Segundo MOREY (2003, p. 19-20), os matemáticos indianos usavam, em seus estudos das funções trigonométricas, a meia-corda, que posteriormente tornou-se o seno indiano. As funções trigonométricas para eles ainda eram definidas como comprimento de um segmento e não como uma relação entre dois comprimentos, diferenciando-se das concepções modernas.

Após os Hindus, seguem-se as contribuições provindas dos países árabes, que deram um tratamento sistemático à Trigonometria sobre influência helênica e indiana. Segundo MENDES (2009, p. 17-18), é atribuída aos árabes a introdução das seis

funções básicas da trigonometria: seno e cosseno, tangente e cotangente, secante e cossecante. Os árabes deram às funções utilizadas pelos indianos uma forma mais próxima da moderna quando definiram a função seno em termos de um círculo de raio unitário.

Os árabes sentiram a necessidade de tabelas trigonométricas mais precisas do que as existentes para aplicação na Astronomia. Iniciando com Al-Hasib (c.850), com uma tabela de senos e tangentes, com intervalos de  $1^\circ$  (um grau), seguiu-se a construção de várias tabelas, na tentativa de se reduzir os intervalos, utilizando-se de múltiplos procedimentos de interpolação.

A trigonometria surge como uma ferramenta para auxiliar o desenvolvimento de outras áreas: Astronomia, agrimensura e navegações.

Tem início na Grécia com Aristarco de Samos, que já defendia a teoria heliocêntrica, com a criação da primeira tábua de cordas. Ainda na Grécia o astrônomo Claudio Ptolomeu, inspirado nos trabalhos de Hiparco, reúne e aprimora o conhecimento sobre astronomia no livro *Almagesto*, que serviu como referência até o século XV. Nesse século Regiomantanus conclui a tradução do *Almagesto* iniciada por Peurbach e escreve um importante tratado sobre trigonometria, o *De triangulis Omnimodis*, utilizado pelo polonês Nicolau Copérnico no século XVI, em sua obra *De revolutionibus orbium coelestium* que contraria a teoria geocêntrica de Ptolomeu e desenvolve a teoria Heliocêntrica, trazendo um grande avanço na trigonometria, onde apresenta duas tabelas trigonometrias ainda úteis até hoje, que envolve 6 funções trigonométricas, substituindo a tábua de cordas.

O conhecimento matemático surge a partir de uma necessidade, seja para ser usado como ferramenta, para responder uma pergunta ou para representar algo da natureza. É o resultado do esforço de muitos, cada um dando sua contribuição, buscando compreender o mundo à nossa volta.

## **2.2. O uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemática**

É comum encontrarmos materiais manipulativos em escolas da educação infantil. Utilizados para auxiliar as primeiras noções de quantidade e as relações de comparação, os educadores acreditam nessa metodologia por ser um facilitador da aprendizagem, uma vez que ao manipular objetos o aluno pode descobrir

propriedades e levantar hipóteses sobre o que está sendo trabalhado (CALDEIRA, 2009).

Na literatura a expressão “material manipulável”, definida por Hartshor e Boren (1990), refere-se a objetos que podem ser tocados e movidos pelos estudantes, para introduzir ou reforçar um conceito matemático. Contudo, entende-se que materiais manipuláveis não são utilizados somente por estudantes e que seu conceito vale também para outras disciplinas.

Há um interesse muito significativo sobre materiais manipuláveis em encontros educacionais, isso se deve possivelmente ao fato de que esses materiais proporcionam uma gama de possibilidades pedagógicas para o professor em sala de aula.

Muitos docentes defendem o uso de materiais manipuláveis. Lorenzato (2009) cita educadores de diversas épocas que ressaltaram a importância do visual e visual-tátil como facilitador da aprendizagem. Citando Comenius como precursor que por volta de 1650 escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto para o abstrato. Já para Nacarato (2005) esse tipo de material foi usado pela primeira vez no ensino por Pestalozzi no século XIX que defendia que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, ações concretas e experimentações.

Tanto Lorenzato (2009) quanto Nacarato (2005) destacam vários educadores que defendiam o uso do material manipulável como mediador ou facilitador do processo de ensino aprendizagem.

Santos e Cury (2011) destacam a importância do uso de materiais manipuláveis não só na aprendizagem, mas também nas relações entre os discentes e com o docente.

A utilização de materiais manipuláveis propicia, além do envolvimento do aluno com os materiais e a aprendizagem, o fortalecimento da relação dos estudantes entre si e deles com o professor, criando elos de amizade e respeito entre todos na sala de aula. (SANTOS; CURY, 2011)

O professor que não consegue alcançar resultados satisfatórios ou que quer melhorar sua prática docente busca cada vez mais pelos materiais didáticos e jogos. Uma evidência disso é a crescente participação desses profissionais em encontros educacionais (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

Na maioria das vezes, a expectativa dos professores em relação ao uso de manipuláveis é de reduzir as dificuldades do ensino e aprendizagem da matemática. Todavia, segundo Moyer (2001), muitos professores utilizam materiais manipuláveis para entreter os alunos nas suas aulas e não para ensinar conceitos matemáticos. Em sua pesquisa, dez professores receberam um kit contendo materiais manipuláveis para aplicarem em suas aulas no ano letivo. Ao final do ano, observou-se o pouco uso desses materiais pelos professores e quando usaram, foi com o intuito de tornar a aula mais divertida, uma vez que para o ensino de habilidades específicas e conceitos matemáticos foram utilizados outros métodos.

Este estudo indica que a forma com que os professores utilizam os materiais manipuláveis é que realmente fará o material ter significado naquele contexto, auxiliando assim, a construção de conceitos matemáticos pelos alunos.

Para enfatizar a importância do manipulável, Lorenzato (2009) faz uma reflexão quanto à dificuldade de caracterizar um objeto sem ao menos ter tocado ou visto.

É muito difícil, ou provavelmente impossível, para qualquer ser humano caracterizar espelho, telefone, bicicleta ou escada rolante sem ter visto, tocado ou utilizado esses objetos. (LORENZATO, 2009, p. 22)

### **2.3. O ensino de trigonometria**

As dificuldades encontradas no ensino de trigonometria têm sido abordadas em muitos textos científicos. Oliveira (2006), em sua dissertação de mestrado defendida Universidade Federal do Rio Grande do Norte, faz uma análise das dificuldades que os professores de ensino médio enfrentam no processo de ensino da trigonometria por meio de atividades. O referido autor destaca dificuldade com o ambiente físico, com materiais, com a organização da escola, com os paradigmas do ensino tradicional e com os paradigmas da profissão docente. Sua pesquisa foi baseada em observação de uma turma da 2ª série do ensino médio.

Nas suas conclusões, Oliveira (2006) faz algumas recomendações para superação das dificuldades do ensino. Primeiramente deve-se conhecer a clientela com entrevistas e atividades de teste, em seguida elaborar um material didático direcionado para ser utilizado com a turma e a elaboração das aulas deve conter procedimentos e habilidades que os alunos não dominam. Destaca também a

importância do professor conhecer todos os recursos disponíveis na escola, para que os mesmos possam ser utilizados adequadamente.

Costa (1997) em seu trabalho defendido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo investiga a influência de dois contextos diferentes, o do computador e o do “mundo experimental”. Sua pesquisa foi aplicada em dois grupos de alunos da 2ª série do ensino médio, um começando com o computador e depois com materiais manipuláveis que ela mesma inventou, o outro começando com manipuláveis e em seguida com o computador. Segundo a referida autora, a sequência didática mais eficiente para o estudo da trigonometria é a que começa com materiais manipuláveis. Sua teoria é amparada pelas ideias dos teóricos da educação, Piaget e Vergnaud.

Fernandes (2010), em sua dissertação de mestrado defendida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, teve como objetivo construir uma aprendizagem significativa dos conceitos básicos da trigonometria na circunferência, fundamentando-se em conceitos da teoria de Ausubel. Em sua pesquisa foram utilizados dois instrumentos de análise, com destaque para a análise didática do erro. O primeiro instrumento utiliza para a construção da circunferência trigonométrica apenas régua, transferidor e lápis. Já no segundo instrumento o autor utiliza um software de geometria dinâmica (Geogebra). A pesquisa foi realizada em dois momentos com alunos da 2ª série do ensino médio de uma escola estadual do interior de São Paulo que já haviam estudado esse conteúdo.

Fernandes (2010) conclui que todas as atividades tiveram importância no aprendizado dos alunos, mas o software Geogebra permitiu uma aprendizagem significativa, ou seja, permitiu que as novas informações se relacionassem com a estrutura do conhecimento já adquirido pelo indivíduo.

Santos (2011) investigou em seu trabalho de conclusão do mestrado profissionalizante em ensino de Física e Matemática defendido no Centro Universitário Franciscano em Santa Maria – RS, o uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos. Em sua pesquisa participaram alunos de uma turma de reforço da 2ª série do ensino médio de uma escola estadual do município de Uruguaiana no Rio Grande do Sul.

Santos (2011) analisou se o uso de maquetes despertava habilidades de questionar, hipotetizar e desenvolver resoluções autônomas de problemas de trigonometria. Concluiu sua pesquisa com resultados positivos, pois notou que a maior parte dos alunos obteve melhor desempenho nos problemas propostos.

Cassol (2012), que defendeu sua dissertação na Pontifícia Universidade Católica do Rio grande do sul, fez uma meta-análise de dissertações e teses brasileiras nos últimos cinco anos que tinham como tema as tecnologias no ensino e aprendizagem de trigonometria. A autora não encontrou nenhuma tese com esse tema, então fez seu trabalho apenas com dissertações. Foram analisadas 7 dissertações, sendo 5 defendidas em 2010 e 2 em 2012.

Cassol (2012) acredita que os autores das pesquisas consultadas estavam interessados no uso de tecnologias no ensino e na aprendizagem, pois todos utilizaram softwares para facilitar o ensino aprendido, sendo que seis deles utilizaram o Geogebra como recurso para o ensino de trigonometria. Todas apresentam várias razões para o uso do software no ensino de matemática e menciona a falta de suporte técnico, a falta de atualização das máquinas e a quantidade limitada como desvantagens desse recurso.

Sousa (2014) propõe atividades para o ensino de trigonometria em sua dissertação de mestrado defendida na Universidade Federal do Ceará. Relata em seu trabalho a aplicação em sala de aula de uma sequência de atividades de trigonometria destacando a construção, estudo e utilização da prancha trigonométrica numa turma do 2º ano técnico em comércio de uma escola profissional da rede estadual de ensino do Ceará. Seu trabalho avalia as facilidades e dificuldades encontradas pelos alunos na confecção dos materiais e na resolução das atividades propostas.

Sousa (2014) defende que o manuseio da prancha trigonométrica facilitou a resolução das atividades propostas.

No ensino médio os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – são organizados de forma que a Biologia, a Física, a Química e a Matemática compõem uma área do conhecimento denominada Ciências da Natureza e a Matemática. Foi organizado dessa forma, pois são ciências que tem em comum a investigação da natureza e dos desenvolvimentos tecnológicos, compartilhando linguagens, representações e sistematizações de fenômenos ou processos naturais ou tecnológicos.

Os PCN apresentam um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das habilidades e competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos.

Os PCN não apontam de forma específica que conteúdos que deverão ser trabalhados em sala de aula, mas dão diretrizes para a formação do aluno, dentre elas podemos destacar:

Compreender os conceitos, procedimentais e estratégias matemáticas que permitam ao aluno desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral [...].

Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação [...] (BRASIL, 1998, p. 45).

Os PCN de matemática do ensino fundamental enfatizam o ensino de semelhança de figuras planas, a verificação e aplicação do Teorema de Tales e do Teorema de Pitágoras, conteúdos que são pré-requisitos para o estudo da trigonometria.

No nível médio, os PCN de matemática destacam que o ensino da trigonometria deve ser direcionado para a aplicação, para que não haja excesso de cálculo algébrico nas identidades trigonométricas. Segundo o documento deve ser abordado, principalmente, em cálculos de distâncias inacessíveis e construção de modelos de fenômenos periódicos.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (2002) do ensino médio abordam a trigonometria de forma mais estruturada, esse documento traz a matemática organizada em três grandes eixos subdivididos em unidades temáticas:

- Álgebra: números e funções;
- Geometria e medidas;
- Análise de dados.

Para o desenvolvimento desse eixo Álgebra, números e funções; são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria.

Na unidade temática Trigonometria são propostos os conteúdos do triângulo retângulo, do triângulo qualquer e da primeira volta positiva do ciclo trigonométrico, no qual serão desenvolvidas as seguintes habilidades:



- Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
- Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

Apesar de sua importância, tradicionalmente a Trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas (BRASIL, 2002).

### **3. METODOLOGIA DA PESQUISA**

A presente pesquisa foi realizada, inicialmente como exploratória, em dois minicursos com acadêmicos do curso de matemática.

A pesquisa Exploratória para PRODANOV e FREIRAS (2013) tem como finalidade proporcionar mais informações sobre o assunto que vai ser investigado, facilitando assim, a delimitação do tema da pesquisa.

O primeiro minicurso aconteceu na IV SEMAT da UESB - campus Vitória da Conquista. Esse minicurso foi o primeiro momento em que o aparelho CTM foi utilizado, serviu para avaliar a continuidade dessa pesquisa e identificar possíveis falhas no aparelho ou em sua utilização.

No segundo minicurso, realizado na VI Semana da Matemática da UESB - campus Jequié, foi importante para aperfeiçoar o aparelho para ser utilizado com estudantes do ensino médio.

A segunda parte dessa pesquisa foi realizada com alunos da 2ª série do ensino médio e tem caráter quanti-qualitativo e a modalidade adotada foi a pesquisa-ação, pois o seu desenvolvimento envolveu pressupostos da observação participante em todas as etapas, visto que o pesquisador esteve presente no contexto observado. Essa abordagem foi escolhida porque o trabalho foi realizado dentro do ambiente escolar, tendo como fonte de dados as ações e os desempenhos dos alunos nas resoluções das atividades propostas, além de entrevistas e questionários.

Os métodos quantitativos e qualitativos, apesar de suas especificidades, não se excluem. O uso de ambos, de forma combinada, possibilita melhores resultados, visto que abrangem uma gama maior de características (TERENCE; FILHO, 2006).

Segundo Terence e Filho (2006) a pesquisa-ação possui um caráter participativo, pois promove a interação entre os membros investigados e o pesquisador. É um tipo de investigação social com base empírica que consiste em relacionar a pesquisa e ação em um processo que abranja o pesquisador e o grupo pesquisado, participando de modo cooperativo no contexto que estão inseridos.

#### **3.1. Participantes da pesquisa**

Participaram dessa pesquisa alunos das turmas KO e MQ da 2ª série do Ensino médio do campus Salinas do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais - IFNMG

localizado na Fazenda Varginha, zona rural de Salinas – MG, as quais o autor lecionou até agosto de 2014. As turmas KO e MQ são compostas, respectivamente, por alunos dos cursos técnicos em Informática/Agropecuária e Informática/Agroindústria integrados ao ensino médio. As turmas KO e MQ têm, respectivamente, 30 e 34 alunos matriculados, mas foram considerados nessa pesquisa apenas os alunos que estavam presentes nas três aulas e participaram de todas as atividades. Foram 17 alunos da turma KO e 15 alunos da turma MQ.

No campus Salinas do IFNMG o curso técnico é integrado ao ensino médio no turno diurno. São 8 as aulas, quatro pela manhã e quatro à tarde, sendo que as aulas específicas da parte técnica são agrupadas em um turno que é alternado a cada semana.

### **3.2. Instrumentos da pesquisa**

Como instrumento de coleta de dados quantitativos foram elaboradas atividades para cada uma das seis razões trigonométricas, isto é, uma para o seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante as quais foram aplicadas nessa ordem.

Inicialmente foi aplicado um questionário (Apêndice B), com o objetivo de conhecer as dificuldades dos alunos em relação à Trigonometria e traçar um perfil de cada turma para comparação.

Cada atividade foi precedida de uma revisão da razão no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico.

Para efeito de comparação, em cada atividade, apenas uma turma empregou o CTM, a outra turma utilizou o ciclo trigonométrico impresso em folha A4 com o mesmo layout do CTM. A escolha da turma foi definida por sorteio, a turma KO usou o aparelho nas atividades que envolviam seno, cosseno, tangente e cotangente e a turma MQ utilizou o aparelho nas atividades com a secante e a cossecante.

Para a análise das respostas dos alunos nas atividades, foram consideradas corretas ou incorretas e, a seguir, foi feita a contagem do número de itens corretos para a construção dos gráficos. Para facilitar a comparação, os resultados foram convertidos em porcentagem, pois nas turmas havia quantidades diferentes de alunos.

A coleta de dados qualitativos foi realizada pelo autor através de observações, entrevistas durante e após a realização dos trabalhos propostos e por uma questão

aberta no final de cada exercício, onde o aluno expressava suas considerações sobre a atividade.

## 4. CONSTRUÇÃO DO MATERIAL

Pensando na visualização, manipulação e custo, o CTM foi construído em duas versões. Uma para o professor e a outra para o aluno. A versão professor é a maior, com formato quadrado de 40 centímetros de lado e a versão aluno, de baixo custo, tem o tamanho de uma folha A4 para facilitar a manipulação pelos alunos nas carteiras escolares.

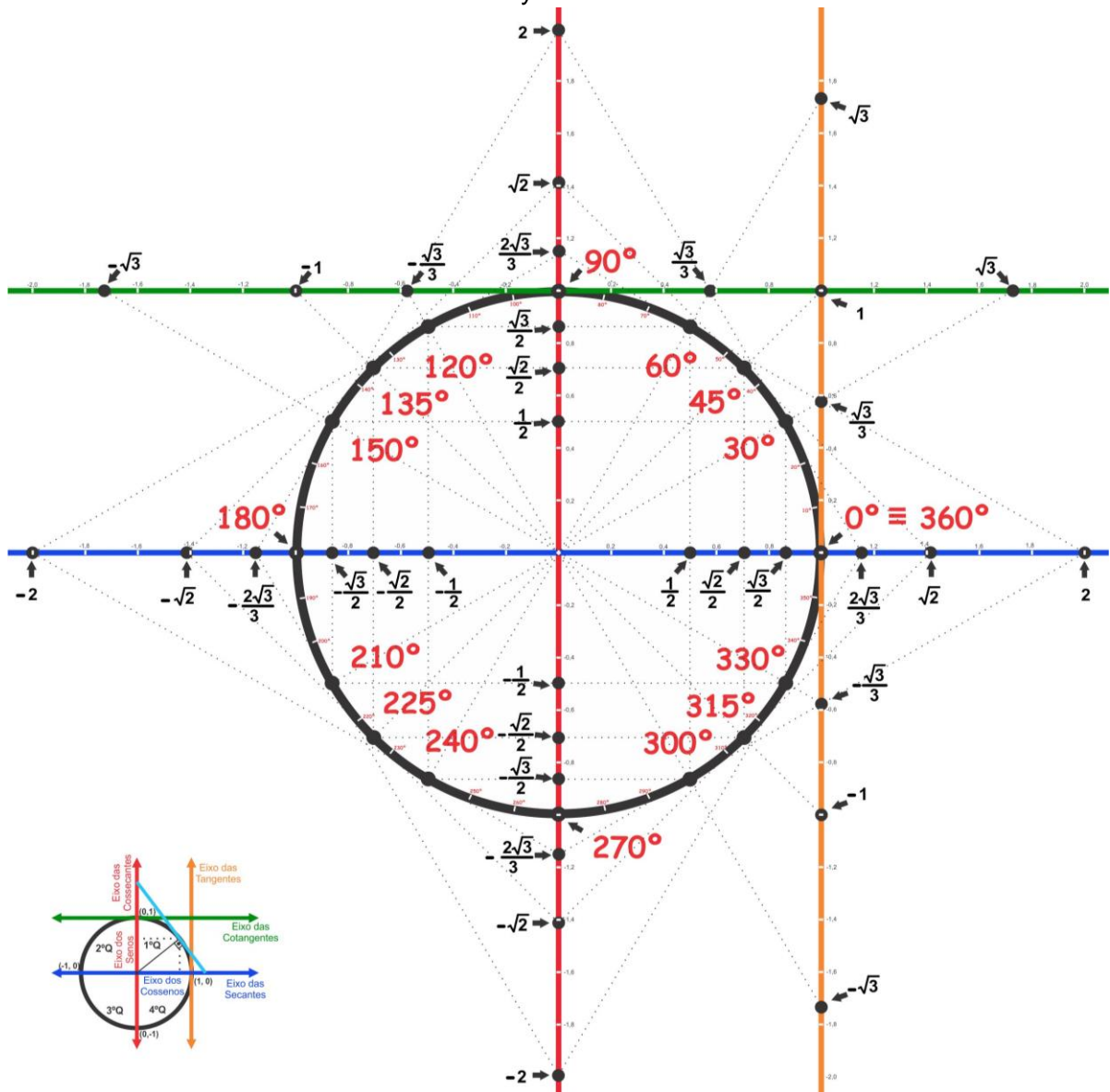
### 4.1. Versão professor

A versão professor foi construída com duas placas quadradas de 40 cm de lado de acrílico transparente de 3 mm de espessura, 6 parafusos de 2 mm de diâmetro, 11 porcas e ciclo trigonométrico impresso em um adesivo de vinil branco.

O layout mostrado na Figura 7, usado no CTM, foi criado utilizando o software de desenho vetorial Corel Draw. Esse software foi escolhido pela facilidade de uso e precisão nas dimensões. A precisão do desenho é de fundamental importância para a leitura correta das razões trigonométricas.

O layout foi criado pelo autor, com eixos em cores diferentes, destacando os ângulos notáveis ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ) e seus múltiplos, permitindo encontrar um valor aproximado da razão de um arco qualquer, pois a circunferência está dividida de 10 em 10 graus, os eixos estão graduados a cada 0,2 unidades e para finalizar, foram adicionadas linhas pontilhadas, paralelas e perpendiculares aos eixos para facilitar a leitura das razões mesmo sem uma régua.

FIGURA 7 – Layout utilizado no CTM



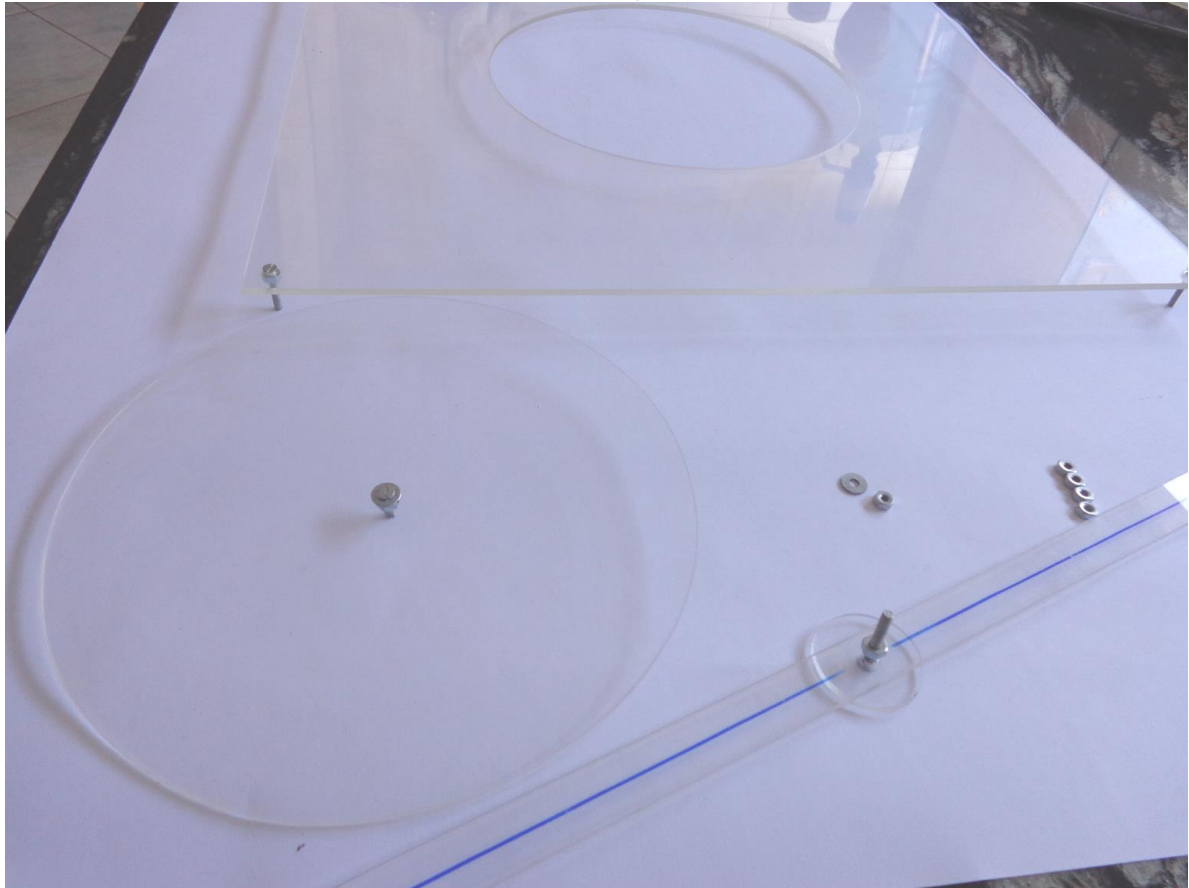
Fonte: o autor

As placas foram perfuradas em 5 pontos, sendo um deles no centro e os demais nos quatro cantos. Em uma das placas foi colado um adesivo de vinil com o ciclo trigonométrico nele impresso. A outra foi perfurada acoplada com a primeira, para que os furos coincidisse e foi retirado um disco de 20 centímetros de diâmetro cujo centro ajustasse-se ao o centro da placa quadrada.

Do disco retirado foi recortado outro disco concêntrico ao primeiro de 18,5 centímetros de diâmetro, obtendo assim três peças: um quadrado, um quadrado perfurado e um disco. Acrescentou-se à estrutura um pedaço retangular, que servirá de régua, e um pequeno disco de 3 centímetros de diâmetro usado para segurar a

régua, ambos do mesmo material. Na Figura 8, a seguir, tem-se os itens anteriormente citados.

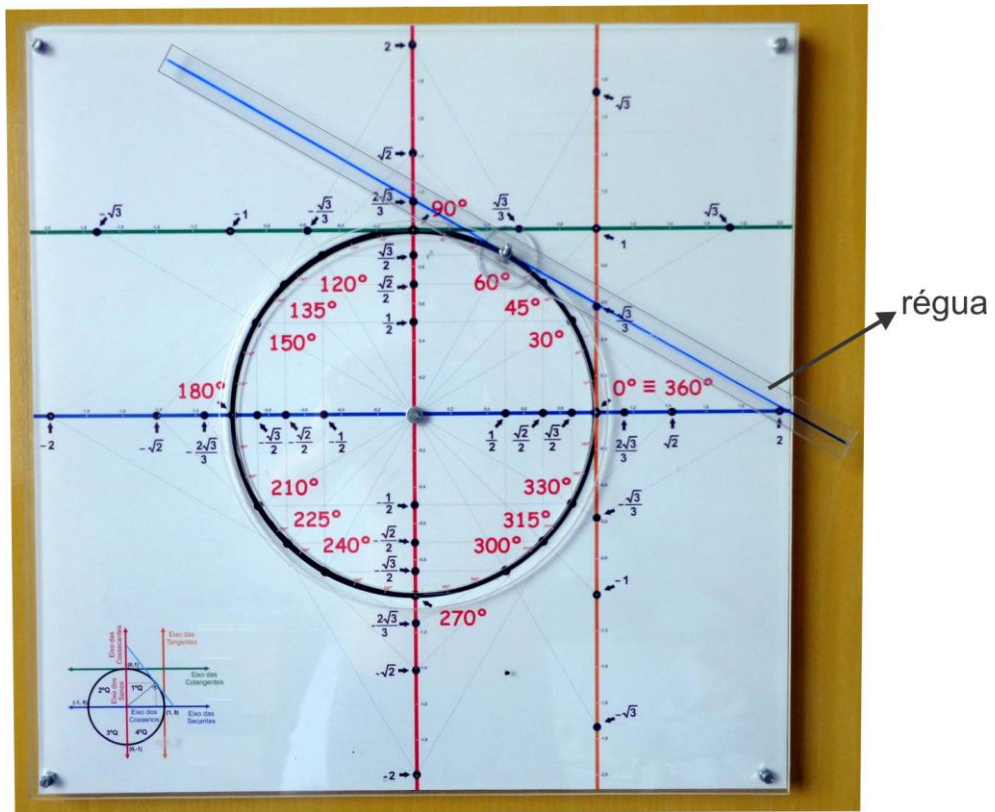
FIGURA 8 – Placa superior recortada



Fonte: o autor

Essas peças foram unidas com os parafusos e porcas. Utilizou-se porcas entre as placas para gerar um espaçamento entre elas. De forma que essa régua possa se movimentar em torno da circunferência, além de girar em seu próprio eixo. Na Figura 9, mostrada a seguir, temos o CTM montado. Nessa figura, a régua está indicando a secante e a cossecante de  $60^\circ$  que valem, respectivamente,  $2$  e  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

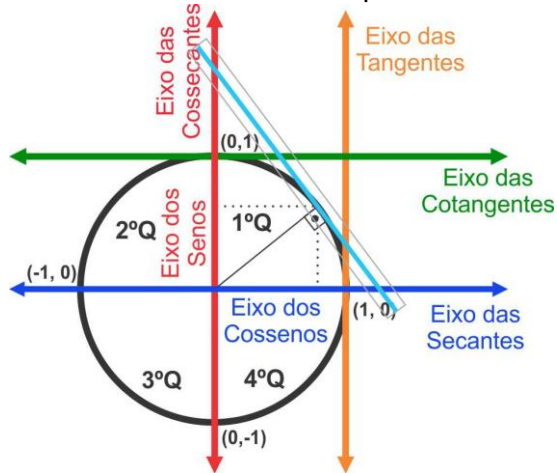
FIGURA 9 – Secante e Cossecante de 60°



Fonte: o autor

Ao desenho foi acrescentado um ciclo secundário, que pode ser visto no canto inferior esquerdo da Figura 9 e com mais detalhes na Figura 10, para auxiliar a utilização do aparelho, no qual estão destacados os nomes de cada eixo e os quadrantes.

FIGURA 10 – Eixos e quadrantes



Fonte: o autor

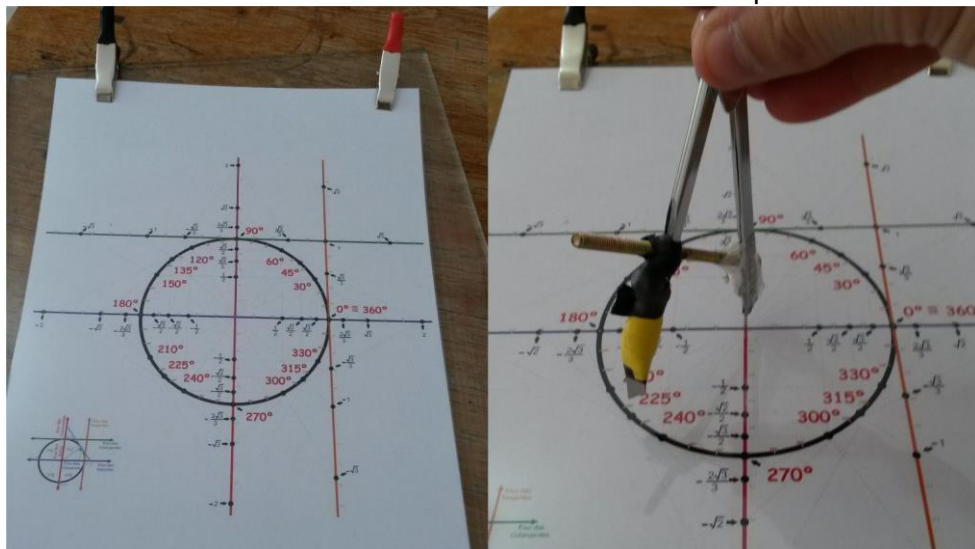


## 4.2. Versão aluno

A versão aluno, que tem um custo significativamente menor, foi construída com acetato transparente de 0,40 mm de espessura, adesivo com ciclo trigonométrico impresso e para fixação foi utilizado fita adesiva transparente e um ilhós no centro.

Após colar o adesivo no acetato, recortou-se um disco do mesmo material de tamanho igual ao impresso. Para recortar o disco utilizou um compasso com uma lâmina fixada em uma das pontas, veja Figura 11 e em seguida finalizou o corte com um estilete como pode ser observado na Figura 12.

FIGURA 11 – Marcando o acetato com o compasso



Fonte: o autor

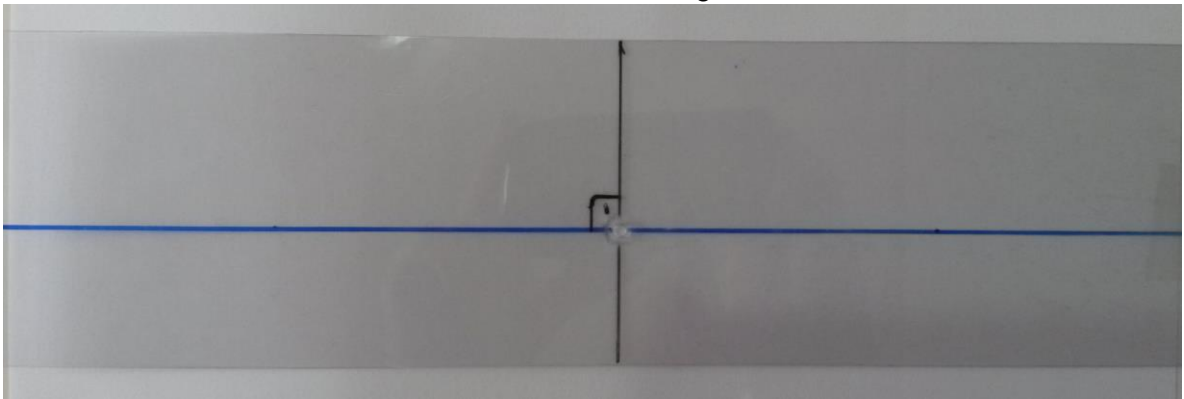
FIGURA 12 – Finalizando o corte do acetato com um estilete



Fonte: o autor

Cortou-se um retângulo de 30 cm de comprimento e 8 cm de largura para servi de régua. Nele foi traçado duas linhas perpendiculares e foi feito um furo na interseção dessas linhas, conforme Figura 13

FIGURA 13 – Régua



Fonte: o autor

Adicionou um pequeno disco de 2,5 cm de diâmetro, com um furo no centro, e um parafuso para prender a régua (ver Figura 14).

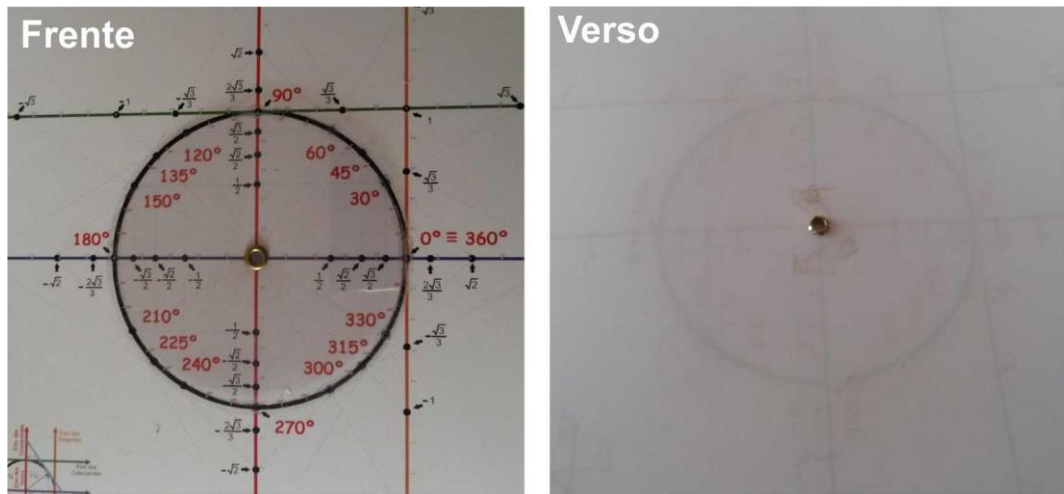
FIGURA 14 – Componentes da régua



Fonte: o autor

Com todas as peças cortadas, iniciou a montagem do CTM fixando o disco central de 9,3 cm no centro da placa que foi colado o adesivo com o layout com um ilhós, conforme Figura 15.

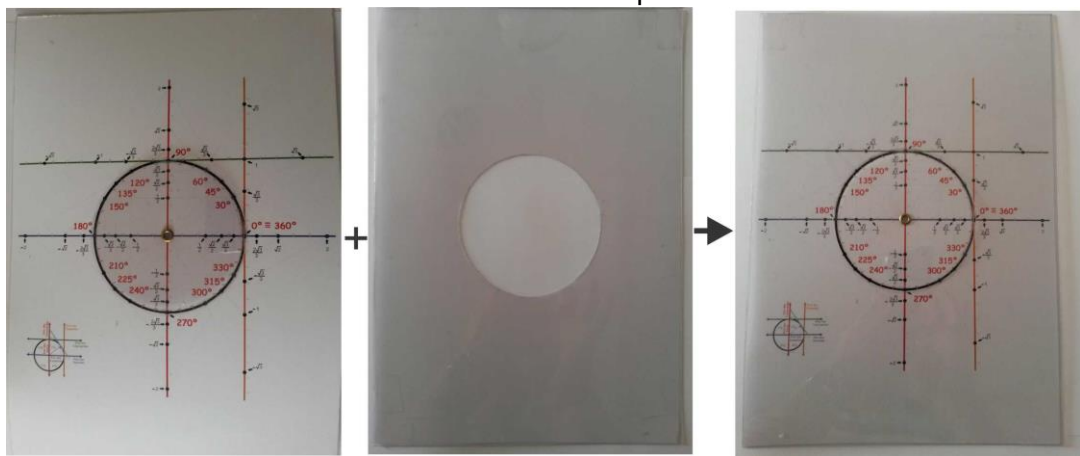
FIGURA 15 – Fixando o disco central com ilhós



Fonte: o autor

Em seguida utilizando fita adesiva nos quatro cantos, fixou-se as duas placas de acetato (Figura 16).

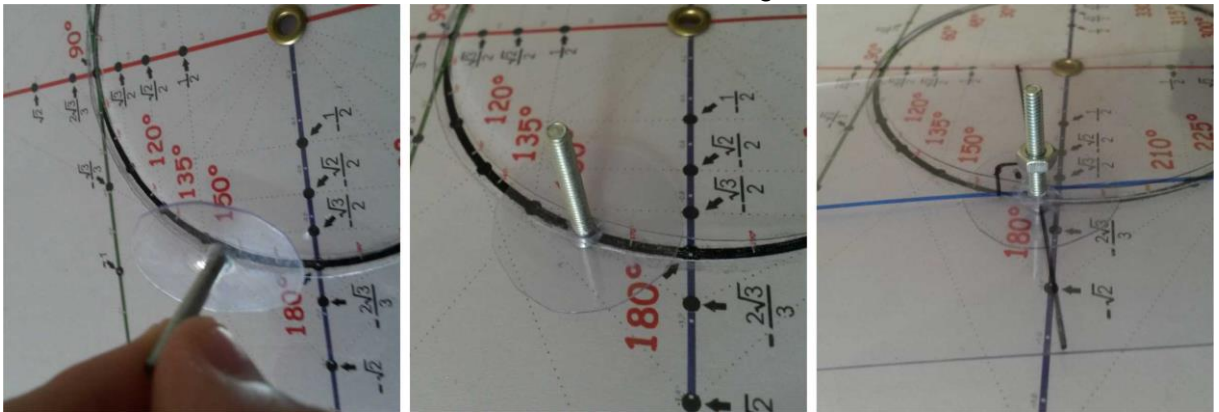
FIGURA 16 – Unindo as placas



Fonte: o autor

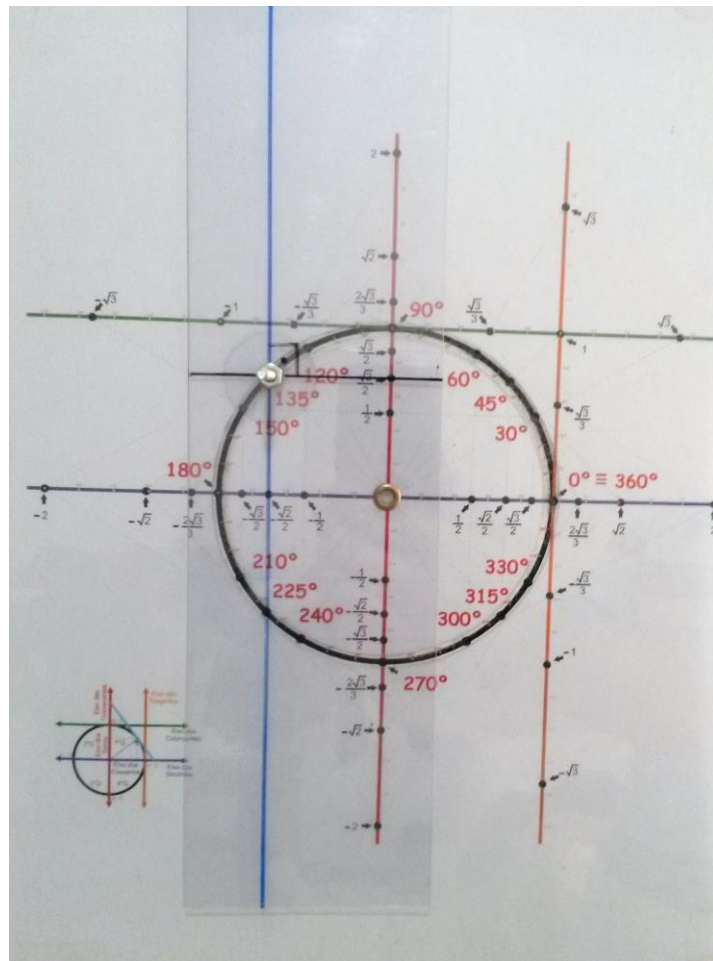
Por último, adicionamos a régua utilizando um parafuso com porca e o pequeno disco encaixado entre as placas, conforme Figura 17.

FIGURA 17 – Fixando a régua



Fonte: o autor

Na Figura 18, pode-se observar o CTM, versão aluno, montado e indicando o seno e cosseno de  $135^\circ$  que valem, respectivamente,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

FIGURA 18 – Seno e cosseno de  $135^\circ$ 

Fonte: o autor

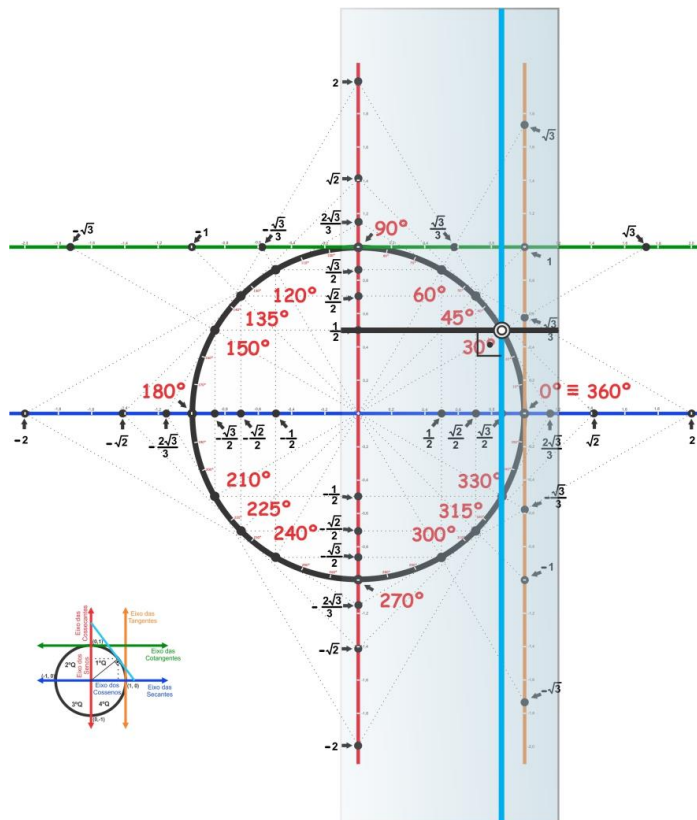
### 4.3. Instruções de uso

O CTM permite a visualização dos valores das 6 razões trigonométricas, a seguir será mostrado, com exemplos, como posicionar a régua para leitura das razões em um arco qualquer.

Para determinar o seno e o cosseno de um arco qualquer, posicione o parafuso da régua sobre o arco escolhido e coloque a régua na posição vertical. Desta forma a linha azul marcará o cosseno e a linha preta indicará o seno do arco escolhido.

Na Figura 19, a régua foi posicionada de forma a obter o seno e o cosseno de  $30^\circ$ , que valem, respectivamente,  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

FIGURA 19 – Seno e cosseno



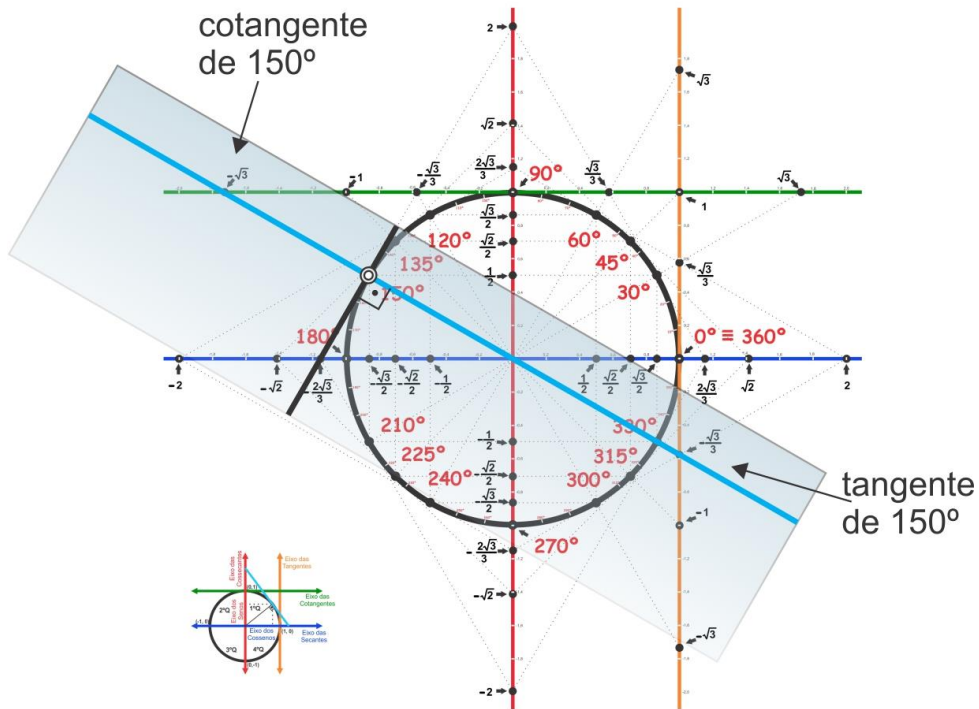
Fonte: o autor

Para determinar a tangente e a cotangente de um arco qualquer, coloque o parafuso da régua sobre o arco escolhido e em seguida, gire a régua de forma que a linha azul passe pelo centro do círculo. Desta forma, as interseções da linha azul

(régua) com as linhas laranja e verde indicarão, respectivamente, a tangente e a cotangente do arco escolhido.

Na Figura 20, a régua foi posicionada de forma a obter a tangente e a cotangente de  $150^\circ$ , que valem, respectivamente,  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  e  $-\sqrt{3}$ .

FIGURA 20 – Tangente e cotangente de  $150^\circ$

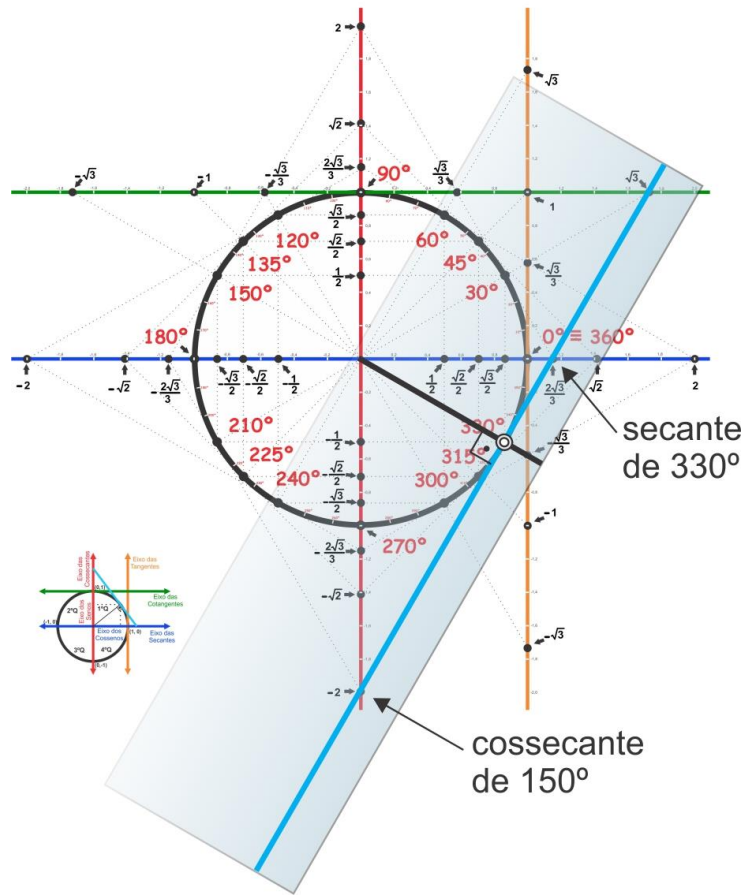


Fonte: o autor

Para determinar a secante e a cossecante de um arco qualquer, coloque o parafuso da régua sobre o arco escolhido e em seguida, gire a régua de forma que a linha preta passe pelo centro do círculo. Desta forma, as interseções da linha azul (régua) com as linhas azul (eixo das secantes) e vermelha marcarão, respectivamente, a secante e a cossecante do arco escolhido.

Na Figura 21, a régua foi posicionada de forma a obter a secante e a cossecante de  $330^\circ$ , que valem, respectivamente,  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  e  $-2$ .

FIGURA 21 – Secante e cossecante de  $330^\circ$



Fonte: o autor

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1. Pesquisa exploratória (Projeto Piloto)

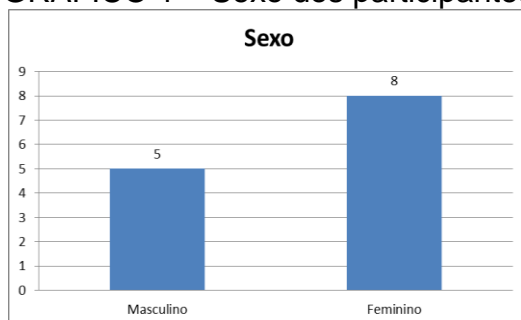
O projeto piloto ou pesquisa exploratória foi realizado com o objetivo de identificar se o material proposto poderia auxiliar o ensino aprendido da trigonometria, bem como descobrir suas deficiências antes de ser aplicado em sala de aula aos alunos da 2ª série do ensino médio regular.

Para verificar o efeito desse material manipulável no aprendizado dos alunos foram realizados dois minicursos em eventos da UESB e aplicado em sala de aula com alunos da 2ª série do ensino médio.

O primeiro minicurso intitulado “Ensino-aprendizagem de trigonometria: Ciclo trigonométrico manipulável” realizado na IV SEMAT da UESB que ocorreu no período de 15 a 17 de outubro de 2014 e teve duração de 4 horas dividido em dois dias com 2 horas cada, foi o primeiro momento que o CTM foi utilizado. Foram 13 participantes, sendo 12 acadêmicos do curso de matemática da UESB e uma graduada em matemática. Todos declararam, no início, que apresentavam dificuldades com o conteúdo de trigonometria.

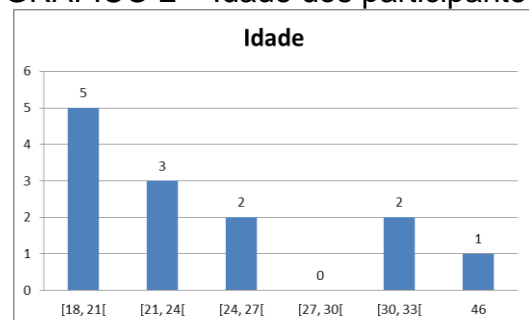
Abaixo temos representado nos Gráficos 1 e 2, o perfil dos participantes do minicurso quanto ao sexo e idade. Em relação à experiência docente, apenas 3 já ministraram aulas no ensino básico.

GRÁFICO 1 – Sexo dos participantes



Fonte: o autor

GRÁFICO 2 – Idade dos participantes



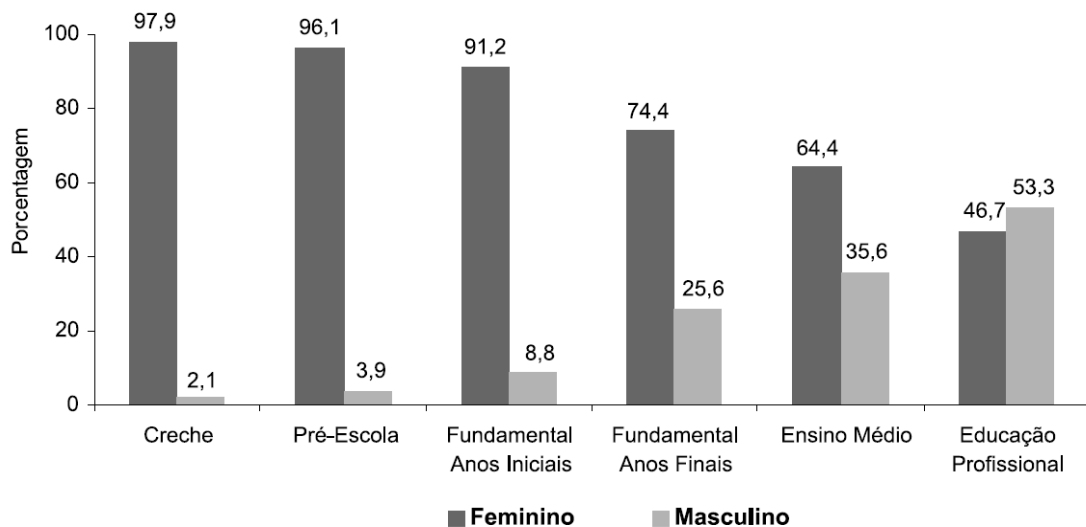
Fonte: o autor

Com base nos gráficos acima verifica-se que nesse grupo 61% são mulheres e que 61% tem menos de 24 anos, isto é, a maioria dos participantes são jovens do sexo feminino.



Pesquisas comprovam a superioridade feminina no magistério, isto é, as mulheres continuam sendo a maioria no exercício da profissão docente. Essa maioria só não foi superada no ensino profissional, como se pode observar no gráfico da Figura 22.

FIGURA 22 – Percentual de professores das Etapas da Educação Básica segundo o sexo – Brasil-2007



Fonte: Adaptado do MEC/Inep/Deed

No minicurso, inicialmente foi feita uma breve explanação do trabalho que estava sendo desenvolvido pelo autor e em seguida um resumo do conteúdo que seria abordado utilizando do CTM.

Nesse resumo foram destacadas as seis razões trigonométricas, a relação entre graus e radiano, a representação de cada razão no ciclo trigonométrico que inicialmente foi desenhado no quadro branco.

Em seguida, devido à quantidade limitada de aparelhos, a turma foi dividida em pequenos grupos, como pode ser observado na Figura 23 e foi distribuída para cada participante uma folha com exercícios (Apêndice A) para serem resolvidos utilizando o CTM. Após cada razão trigonométrica mostrada na lousa e no aparelho, os alunos resolviam exercícios utilizando o aparelho.

FIGURA 23 – Alunos resolvendo exercícios com o CTM na IV SEMAT da UESB



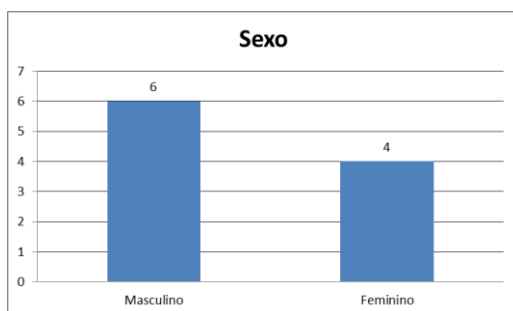
Fonte: o autor

Depois de encerradas as atividades do minicurso foi solicitado o preenchimento de um questionário, que compõe essa pesquisa, apêndice A – questionário A. Após análise dos questionários percebe-se que o material despertou o interesse e facilitou bastante a identificação de propriedades trigonométricas, tais como o sinal das funções em cada quadrante e a inexistência de algumas razões.

O segundo minicurso foi realizado na VI Semana da Matemática da UESB campus Jequié no período de 19 a 22 de novembro de 2014 com o título “O ensino da trigonometria com material manipulável”. Também teve duração de 4 horas, sendo 2 horas no dia 20 e as outras 2 no dia 21 de novembro de 2014. Todos os 10 participantes são acadêmicos do curso de matemática da UESB e apenas um já lecionou matemática no ensino básico. Isso indica que esse grupo tem pouca ou nenhuma experiência na docencia no ensino básico e que ainda estão em formação.

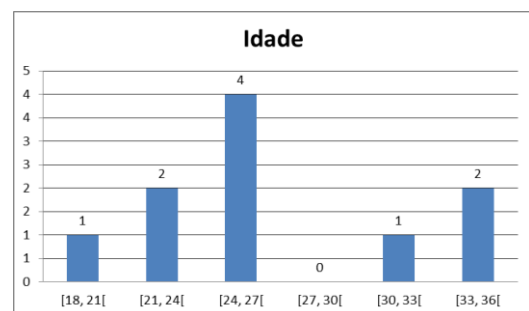
A seguir tem-se os Gráficos 3 e 4 que mostram o perfil desse grupo quanto ao sexo e a idade.

GRÁFICO 3 – Sexo dos participantes do minicurso em Jequié



Fonte: o autor

GRÁFICO 4 – Idade dos participantes do minicurso em Jequié



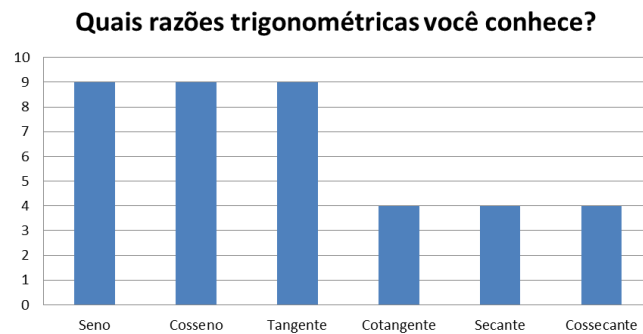
Fonte: o autor

Observa-se que 60% dos participantes desse grupo são do sexo masculino e 70% tem idade entre 18 e 27 anos, ou seja, tem-se um grupo jovem cuja maioria são do sexo masculino. Nesse grupo não encontramos maioria feminina, possivelmente devido ao tamanho da amostra.

Antes de iniciar o minicurso os participantes responderam um questionário diagnóstico, apêndice A, que investigava o nível de conhecimento de trigonometria.

Um dos itens se referia a facilidade ou dificuldade em trigonometria. Nesse item todos marcaram que tinham dificuldades. As demais questões foram tabuladas e estão representadas nos Gráficos 5, 6, 7 e 8 mostrados a seguir.

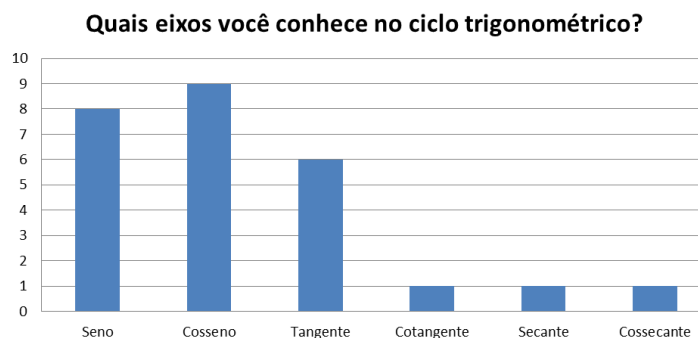
GRÁFICO 5 – Relação das razões trigonométricas conhecidas pelos participantes do minicurso em Jequié



Fonte: o autor

Nessa questão, esperava-se que todos os participantes declarassem conhecer as 6 razões trigonométricas, pois esse assunto está no currículo do ensino médio e todos os participantes são acadêmicos do curso superior, ou seja, já estudaram esse conteúdo no nível médio.

GRÁFICO 6 – Relação eixos trigonométricos conhecidos pelos participantes do minicurso em Jequié

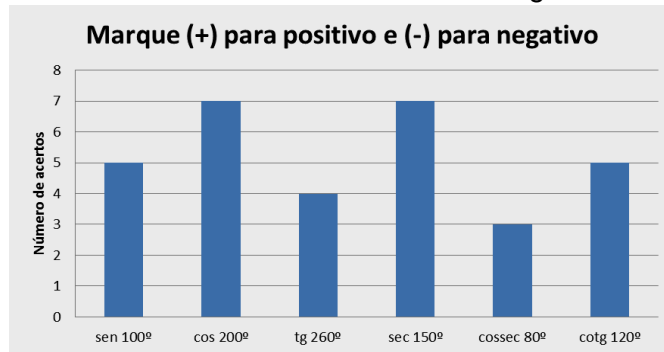


Fonte: o autor

Complementando a questão anterior sobre o conhecimento dos eixos trigonométricos, o Gráfico 6 mostra que a maioria dos integrantes do grupo conhecem apenas os eixos: seno, cosseno e tangente. Apenas um aluno disse conhecer os seis eixos trigonométricos.

Nessa questão, cujo resultado está representado no Gráfico 7, mostrado a seguir, foi avaliado a capacidade de determinar o sinal de algumas razões trigonométricas.

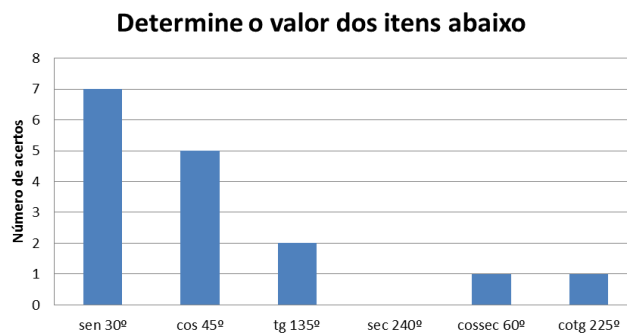
GRÁFICO 7 – Número de acertos na atividade de sondagem: Determinação do sinal



Fonte: o autor

Observa-se no Gráfico 7, que os participantes não estão completamente seguros quanto aos sinais das razões, pois erraram muitos itens, vale resaltar que a maioria declarou não conhecer as razões secante, cossecante e cotangente. Portanto é provável que tenham determinado os sinais de forma aleatória.

GRÁFICO 8 – Número de acertos na atividade de sondagem: Determinação do valor da razão

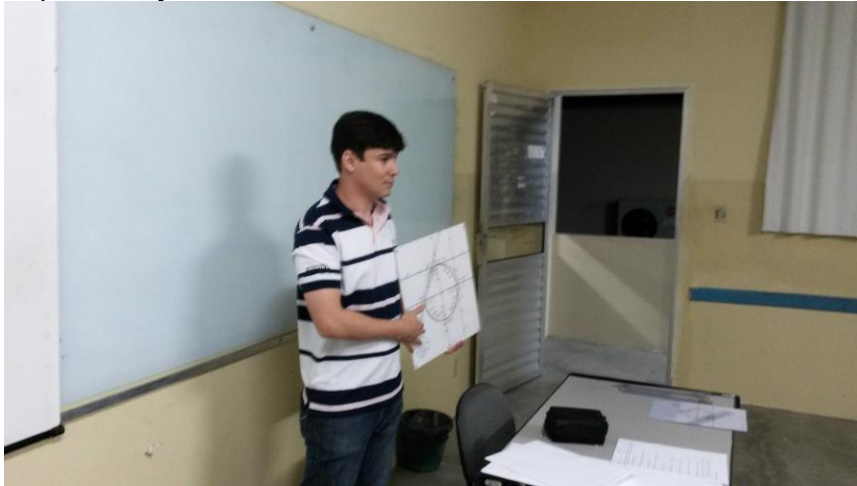


Fonte: o autor

Conforme Gráfico 8, os dados indicam que esse grupo tem pouco conhecimento de trigonometria, principalmente das razões inversas: secante, cossecante e cotangente.

Após o questionário, iniciou-se o minicurso com uma breve apresentação do trabalho de conclusão de curso desse mestrado, em seguida foi definindo o que é material manipulável e na sequência foi apresentando o CTM como objeto de estudo desta pesquisa (Figura 24).

FIGURA 24 – Apresentação do CTM na VI Semana da matemática UESB – Campus Jequié



Fonte: o autor

Após um breve resumo sobre as razões trigonométricas, iniciou-se a construção do ciclo trigonométrico na lousa, mostrando os eixos das 6 razões trigonométricas. Após cada razão apresentada no ciclo e no CTM os participantes resolviam questões propostas no exercício, apêndice A, em folha entregue no início do minicurso.

Os participantes foram auxiliados pelo autor, quando solicitado, durante a realização das atividades (Figura 25).

FIGURA 25 – Aluno sendo auxiliado para manusear corretamente o CTM



Fonte: o autor

Ao final do minicurso os participantes responderam o questionário II, apêndice A, que avaliava o grau de satisfação, interesse e suas considerações sobre o CTM.

Analisando as respostas dos questionários pode-se perceber uma grande aceitação do CTM pelos participantes e segundo eles, o CTM torna a trigonometria mais atrativa e interessante, além de facilitar a visualização dos valores das razões trigonométricas.

Um dos participantes fez um relato surpreendente no questionário final: *“Formidável. Estou em cálculo II no momento e eu não sabia até então o que era o ciclo trigonometria”*.

O que nos leva a pensar que a trigonometria é um conteúdo em que, até acadêmicos do curso de matemática, ainda tem dificuldade em seu entendimento.

Outro participante chamou atenção em relação à parte mecânica do aparelho, ele disse que o CTM utilizado estava travando. A partir dessa observação o aparelho foi revisado e após suavizar as imperfeições do corte com o estilete, o problema foi resolvido.

As dificuldades identificadas nos minicursos foram fundamentais para o aperfeiçoamento do aparelho, uma vez que foi possível corrigir, em tempo hábil, falhas encontradas na execução das atividades. Possibilitando assim uma versão melhorada do aparelho para ser utilizado na pesquisa com alunos do ensino médio.

## **5.2. Aplicação com alunos da 2ª série do ensino médio**

Tendo em vista a experiência adquirida na pesquisa exploratória nos dois minicursos e após algumas modificações e aperfeiçoamentos no aparelho, chegou o momento de investigar sua eficiência na 2ª série do ensino médio ao qual este estudo foi inicialmente pensando e direcionado.

Esta fase da pesquisa foi executada em uma semana do mês de dezembro de 2014 no campus Salinas do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais localizado na Fazenda Varginha zona rural de Salinas – MG. Foram escolhidas as turmas KO e MQ, as quais o autor lecionou até agosto de 2014. As turmas KO e MQ são compostas, respectivamente, por alunos dos cursos técnicos em Informática/Agropecuária e Informática/Agroindústria integrados ao ensino médio, ambas da 2ª série.

Foram utilizadas três aulas em cada turma, cada aula incluiu duas atividades, sendo que cada atividade abordava uma razão trigonometria diferente, na seguinte

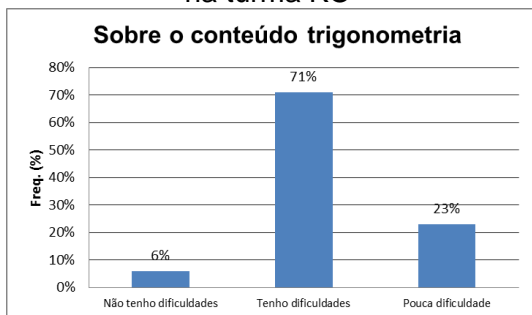
ordem: a primeira atividade foi envolvendo o seno e na sequência atividades com o cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

Antes de iniciar as atividades foi solicitado o preenchimento do questionário I, apêndice B, que busca investigar o perfil de cada aluno em relação ao seu conhecimento de trigonometria, conteúdo esse que já tinha sido estudado anteriormente pelos alunos dessas duas turmas.

Tentando traçar um perfil dessas duas turmas em relação ao seu domínio do conteúdo trigonometria, foram construídos os seguintes gráficos com base na análise do questionário referido anteriormente.

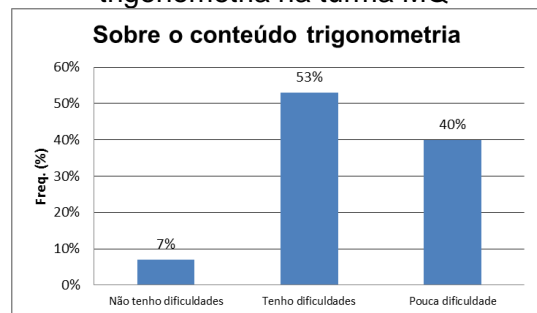
Os gráficos foram organizados em colunas para facilitar a comparação das turmas envolvidas na pesquisa. Ao serem questionados a respeito do conhecimento adquirido sobre o assunto em questão, obteve-se os seguintes resultados mostrados nos Gráficos 9 e 10.

GRÁFICO 9 – Dificuldade em trigonometria na turma KO



Fonte: O autor

GRÁFICO 10 – Dificuldade em trigonometria na turma MQ



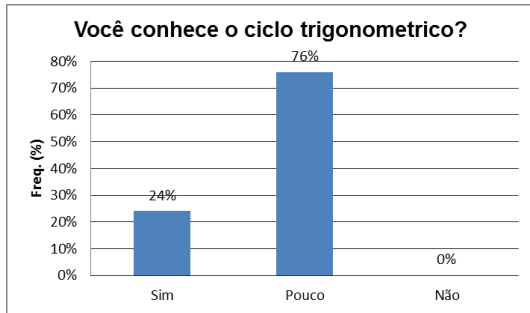
Fonte: O autor

Com base nos gráficos acima, os alunos das duas turmas viram o conteúdo, mas não assimilaram completamente, o que nos leva a questionar o que deu errado durante esse período.

O próximo item do questionário refere-se às razões ou eixos que eles têm conhecimento. Para esse item não foi necessário expressar usando gráfico, pois todos assinalaram ter conhecimentos das razões/eixos seno, cosseno e tangente e demonstraram desconhecimento total sobre cotangente, secante e cossecante. Isso foi confirmado pela professora, que relatou não ter trabalhado as razões inversas.

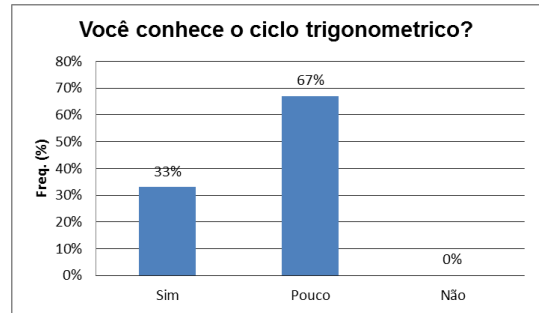
Em seguida, temos os gráficos referentes ao nível de conhecimento do ciclo trigonométrico em ambas as turmas.

GRÁFICO 11 – Nível de conhecimento do ciclo trigonometrico na turma KO



Fonte: o autor

GRÁFICO 12 – Nível de conhecimento do ciclo trigonometrico na turma MQ



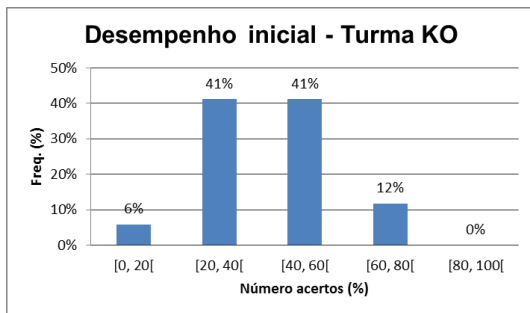
Fonte: o autor

Os gráficos acima indicam a equivalência entre as turmas com relação ao nível de conhecimento do ciclo trigonométrico, uma vez que todos declaram ter conhecimento do ciclo trigonométrico.

E finalmente para concluir o questionário I (Apêndice B), foram apresentadas duas questões sobre o assunto. A primeira com 6 itens, um de cada razão, que pedia para marcar positivo ou negativo e a segunda questão, também com 6 itens pedia para determinar o valor de seis razões, para essas foram utilizados os arcos notáveis e seus simétricos.

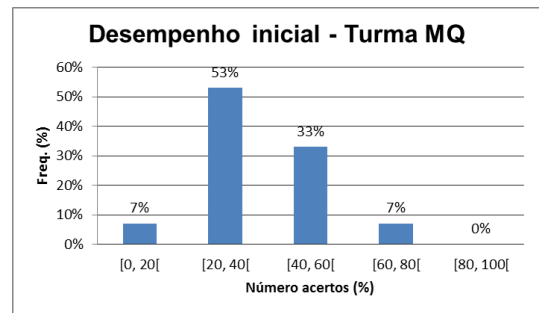
Os resultados foram convertidos em porcentagem para facilitar a comparação, seguem abaixo os gráficos das duas turmas.

GRÁFICO 13 – Desempenho inicial da turma KO



Fonte: o autor

GRÁFICO 14 – Desempenho inicial da turma MQ



Fonte: o autor

As informações acima indicam que as turmas escolhidas apresentam desempenho semelhante, sendo que a maioria os alunos em ambas as turmas tiveram rendimentos entre 20% e 60%.



Com o objetivo de investigar o desempenho dos alunos utilizado o CTM, foi sorteado uma turma para utilizar o aparelho primeiro, a outra turma utilizou o ciclo trigonométrico impresso em uma folha A4, com os mesmos detalhes do CTM.

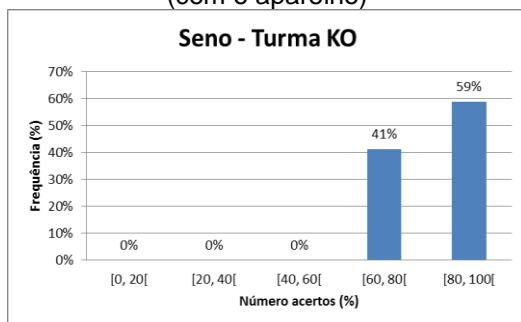
Afim de não favorecer nenhuma turma, o CTM foi utilizado nas duas primeiras aulas da turma KO e na terceira aula da turma MQ. Com isso a turma KO utilizou o CTM nas atividades envolvendo seno, cosseno, tangente e cotangente. Já a turma MQ utilizou o aparelho nas atividades envolvendo a secante e a cossecante.

Após aplicação do questionário I (Apêndice B), iniciou-se a revisão do conteúdo trigonometria tendo o ciclo trigonométrico como foco. À medida que a revisão acontecia foi possível perceber, através de observações, que eles estavam recordando tudo que haviam estudado anteriormente. Na primeira aula foram revisados o seno e o cosseno, tanto no triângulo retângulo quanto no ciclo trigonométrico que inicialmente foi desenhado na lousa e logo em seguida apresentado como material manipulável em uma turma e como material impresso em outra.

Após revisão do seno, tanto no triângulo retângulo quanto no ciclo trigonométrico, os alunos responderam à atividade 1, Apêndice C, na qual foram avaliados 22 itens.

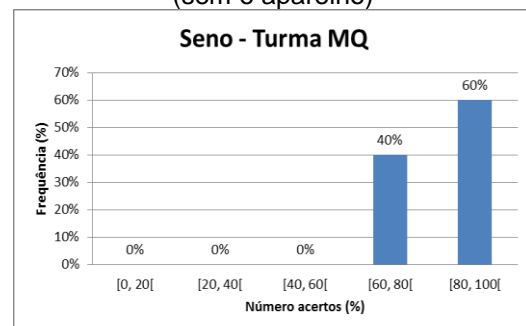
O desempenho nessa atividade pode ser observado nos Gráficos 15 e 16 referentes às turmas KO e MQ, respectivamente.

GRÁFICO 15 – Seno na turma KO  
(com o aparelho)



Fonte: o autor

GRÁFICO 16 – Seno na turma MQ  
(sem o aparelho)



Fonte: o autor

Nessa atividade a turma KO, que utilizou o CTM, obteve um desempenho praticamente idêntico em relação à turma MQ que não utilizou o aparelho manipulável, mesmo assim as duas turmas apresentaram um bom desempenho, uma vez que todos conseguiram alcançar pelo menos 60%, que é a média na maioria das escolas

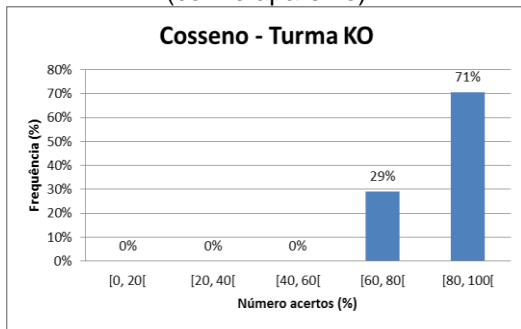
brasileiras e em ambas as turmas mais da metade tiveram aproveitamento acima de 80%.

Durante essa atividade, foi possível perceber que os alunos de ambas as turmas não encontraram dificuldades para resolvê-la e que a maioria dos erros encontrados foram promovidos por falta de atenção e não por ausência de conhecimento sobre o assunto.

A segunda atividade foi sobre o cosseno, que da mesma forma iniciou-se com a revisão do conteúdo, pois esse assunto já havia sido trabalhado anteriormente. Essa atividade continha 24 itens para serem completados ou respondidos, na correção foram considerados todos com o mesmo peso.

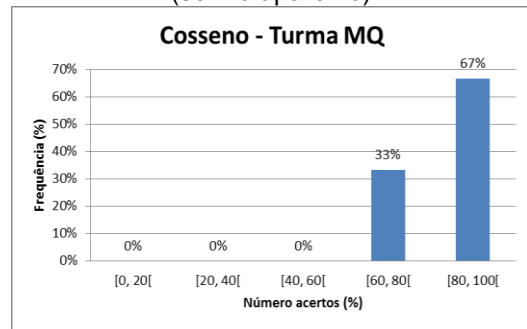
Os Gráficos 17 e 18 a seguir mostram o rendimento das duas turmas nessa atividade.

**GRÁFICO 17 – Cosseno na turma KO (com o aparelho)**



Fonte: o autor

**GRÁFICO 18 – Cosseno na turma MQ (sem o aparelho)**



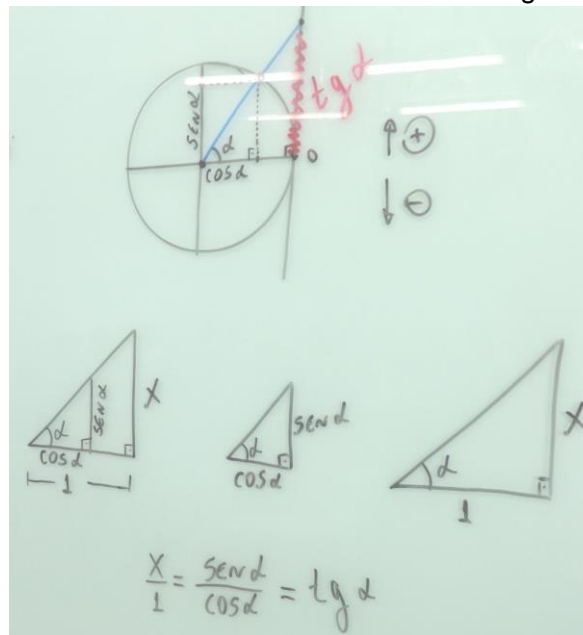
Fonte: o autor

Pode-se observar nos gráficos acima, que as turmas obtiveram desempenho bem semelhante. A turma KO utilizou o CTM e a turma MQ utilizou o ciclo trigonométrico impresso em folha A4 que continha o mesmo desenho do ciclo que foi utilizado no aparelho manipulável.

Nesse momento podemos questionar se o CTM está sendo uma ferramenta significativa, proporcionando uma aprendizagem significativa, uma vez que os resultados encontrados nessas atividades foram praticamente idênticos.

A próxima atividade foi sobre a tangente que é obtida através da razão seno sobre cosseno. Essa razão foi desenvolvida, na lousa, utilizando a semelhança de triângulos mostrada na Figura 26, a seguir:

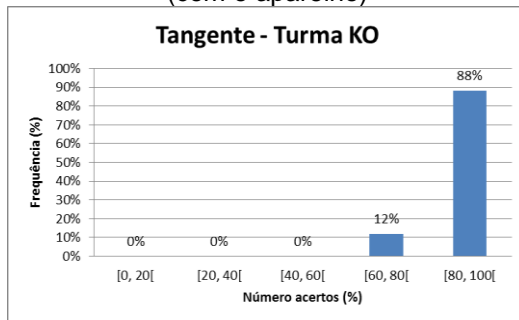
FIGURA 26 – Encontrado o eixo das tangentes



Fonte: o autor

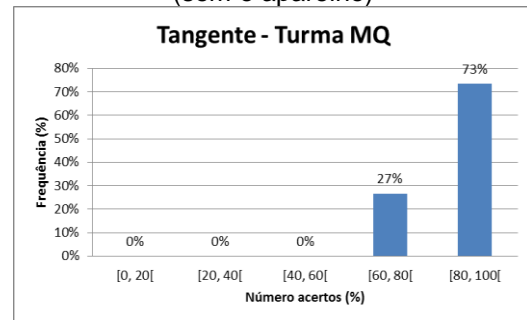
O desempenho das turmas nessa atividade está representado nos Gráficos 19 e 20 a seguir

GRÁFICO 19 – Tangente na turma KO (com o aparelho)



Fonte: o autor

GRÁFICO 20 – Tangente na turma MQ (sem o aparelho)



Fonte: o autor

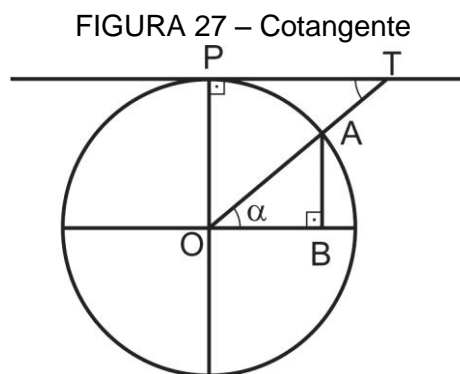
A turma KO que estava utilizando o aparelho obteve um desempenho relativamente superior à turma MQ que não utilizou o aparelho manipulável. A análise qualitativa, obtida através da observação do autor no decorrer das atividades sugere que o CTM criou um clima de curiosidade e interesse, pois ao manipularem o aparelho estavam descobrindo relações, tais como a não existência da tangente de  $90^\circ$  e a tendência da tangente para o infinito quando se aproxima  $90^\circ$ .

Após realização dessa atividade, durante uma entrevista com a turma KO, um dos alunos destacou que poderia tê-la resolvido com ou sem o aparelho manipulável,

mas o dispositivo facilitou a leitura dos valores da tangente uma vez que a régua movimenta-se por todo o ciclo e marca o valor da tangente em seu eixo.

Nas próximas atividades que envolviam as razões inversas: cotangente, secante e cossecante foram necessárias explicações detalhadas, pois tais conteúdos não haviam sido estudados. No entanto essas razões são consequências das anteriores, apenas invertidas.

A cotangente, razão inversa da tangente, cujo eixo pode ser mostrado no ciclo pela semelhança dos triângulos OAB e OPT da Figura 27.



Fonte: o autor

Os triângulos OAB e OPT da Figura 27 são semelhantes pelo caso AA (ângulo ângulo) então, tem-se a seguinte proporção:

$$\frac{PT}{OP} = \frac{OB}{AB}$$

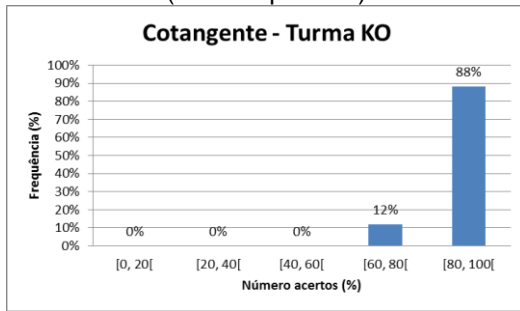
Sabe-se que AB e OB são, respectivamente, seno e cosseno do ângulo  $\alpha$  e OP é igual a um, pois é o raio da circunferência trigonométrica.

Daí tem-se:

$$PT = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{cot} \alpha$$

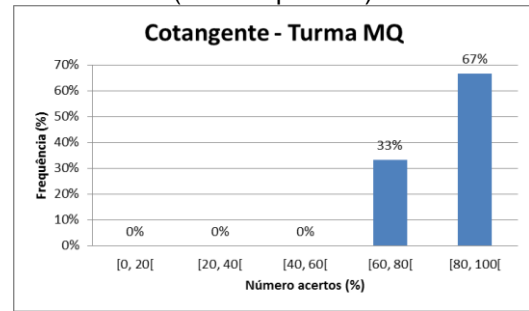
Após explicação e alguns exemplos, iniciou-se a 4ª atividade cujas questões envolviam a cotangente. Os resultados dessa atividade estão organizados nos Gráficos 21 e 22 mostrados a seguir.

GRÁFICO 21 – Cotangente na turma KO (com o aparelho)



Fonte: o autor

GRÁFICO 22 – Cotangente na turma MQ (sem o aparelho)



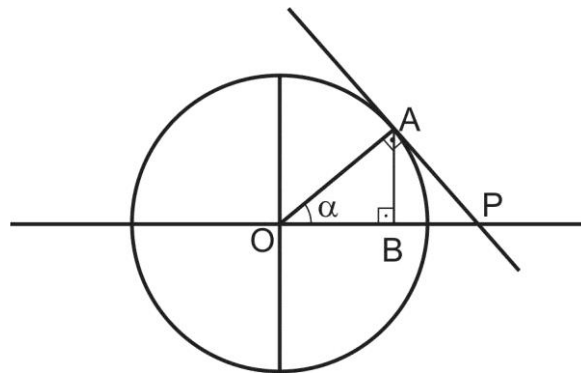
Fonte: o autor

Nessa atividade a turma KO, que utilizou o CTM obteve um desempenho superior ao da turma MQ que não o utilizou, mostrando, aparentemente, que o CTM facilitou a realização dessa atividade. Observa-se ainda que todos os alunos, de ambas as turmas, obtiveram desempenho superior a 60%.

Na última aula dessa pesquisa de campo investigamos o desempenho dos alunos em atividades que envolviam secante e cossecante.

A primeira foi a secante, que é a razão inversa do cosseno, cujo eixo pode ser mostrado no ciclo pela semelhança dos triângulos AOB e AOP da Figura 28.

FIGURA 28 – Eixo das secantes



Fonte: o autor

Os triângulos AOB e AOP da Figura 28 são semelhantes pelo caso AA (ângulo ângulo) então tem-se a seguinte proporção:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OP}$$

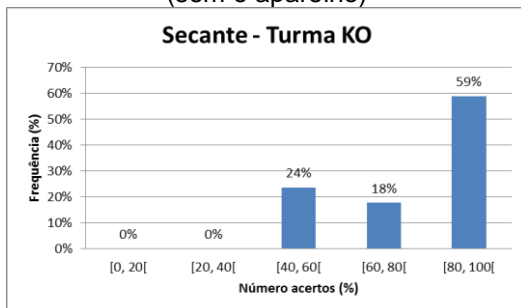
Sabe-se que OB é o cosseno do ângulo  $\alpha$  e OA é igual a um, pois é o raio da circunferência trigonométrica.

Daí tem-se:

$$OP = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

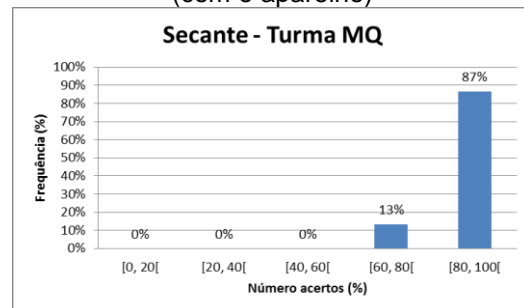
Nesta atividade quem utilizou o aparelho foi a turma MQ e o desempenho dos alunos nessa atividade está representado nos Gráficos 23 e 24 mostrados a seguir

GRÁFICO 23 – Secante na turma KO  
(sem o aparelho)



Fonte: o autor

GRÁFICO 24 – Secante na turma MQ  
(com o aparelho)



Fonte: o autor

Nessa atividade, foi notável o desempenho da turma MQ, que utilizou o aparelho, pois obteve um desempenho muito superior à turma KO, que não o utilizou, indicando que o aparelho facilitou a resolução das questões.

Alguns alunos da turma KO destacaram essa atividade como muito difícil, enquanto os da turma MQ, que utilizaram o aparelho pela primeira vez, disseram que o aparelho facilitou a resolução das questões.

Na Figura 29, pode-se observar o momento em que alunos da turma MQ estavam resolvendo a atividade sobre secante:

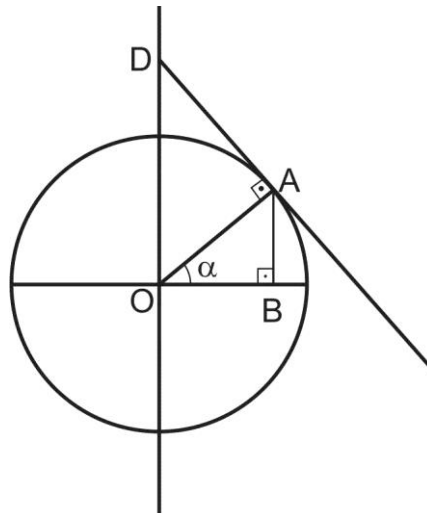
FIGURA 29 – Alunos da turma MQ resolvendo a atividade sobre secante



Fonte: o autor

A última atividade realizada foi envolvendo a cossecante, que é a razão inversa do seno pode ser encontrada no ciclo de forma semelhante à secante, basta traçar uma reta tangente à circunferência até o prolongamento do eixo dos senos. O eixo das cossecantes pode ser facilmente mostrado através da semelhança entre os triângulos AOD e AOB da Figura 30.

FIGURA 30 – Eixo das cossecantes



Fonte: o autor

Os triângulos AOD e AOB da Figura 30 são semelhantes pelo caso AA (ângulo ângulo) então tem-se a seguinte proporção  $AB/OA = AO/OD$ :

$$\frac{AB}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

Sabe-se que AB é o seno do ângulo  $\alpha$  e OA é igual a um, pois é o raio da circunferência trigonométrica.

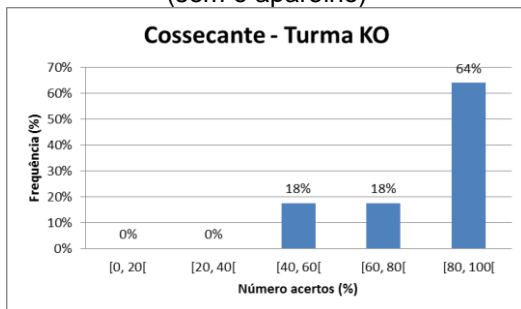
Daí tem-se:

$$OD = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

Nessa atividade foi possível observar que os alunos da turma KO não estavam tão motivados quanto os da turma MQ, que estava utilizando o aparelho para resolver a última atividade sobre cossecante.

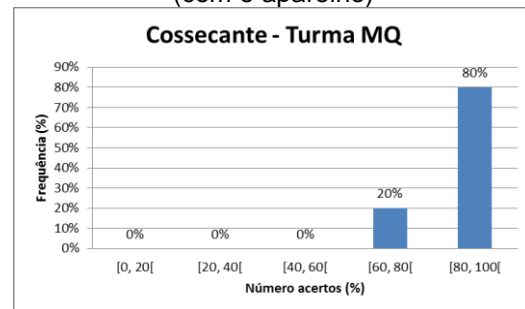
Nesse exercício a turma MQ continuou com o aparelho e o desempenho dos alunos está representado nos Gráficos 25 e 26 mostrados abaixo

GRÁFICO 25 – Cossecante na turma KO  
(sem o aparelho)



Fonte: o autor

GRÁFICO 26 – Cossecante na turma MQ  
(com o aparelho)



Fonte: o autor

Pode-se observar nos Gráficos 25 e 26, resultados semelhantes à atividade anterior. A turma MQ, que fez uso do aparelho obteve rendimento muito superior em relação à turma KO que não o utilizou.



## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa de mestrado profissionalizante teve como objetivo avaliar o ciclo trigonométrico manipulável como recurso didático facilitador no processo aprendizagem de trigonometria.

Entre os objetivos específicos, foi observada a aceitação dos alunos em relação ao material manipulável proposto nesta pesquisa e feito um comparativo de desempenho em atividades com e sem a utilização do CTM.

As turmas KO e MQ obtiveram desempenhos equivalentes nas atividades envolvendo as razões seno e cosseno. Essa equivalência pode ter ocorrido devido ao fato de que as razões acima citadas já terem sido compreendidas pela maioria dos alunos dessas turmas, o que justifica mais de 60% dos alunos apresentarem aproveitamento superior a 80%.

Nas atividades envolvendo as razões: tangente, cotangente, secante e cossecante a turma que empregou o aparelho obteve melhor desempenho, indicando que o aparelho facilitou a resolução das atividades propostas.

Dos alunos que não utilizaram o aparelho, 24% e 18% não atingiram 60% de acertos na atividade envolvendo secante e cossecante, respectivamente. Considerando que 60% é o mínimo necessário para aprovação na maioria das escolas brasileiras esses alunos não seriam aprovados nesse conteúdo.

Ao final deste trabalho, tendo analisado o desempenho dos alunos nas atividades propostas e observado o interesse e motivação, concordamos com Rodrigues e Grazire (2012), quando destacam a importância do material manipulável e o fato de tornar as aulas mais dinâmicas e compreensíveis.

Consideramos que o objetivo geral e os específicos foram atingidos, pois os resultados indicam que os alunos que usaram o aparelho obtiveram desempenho superior aos alunos que não utilizaram. O que indica que o CTM foi um recurso facilitador do processo de ensino – aprendizagem. Além disso, foi observado maior interesse na realização das atividades.

Os minicursos foram muito importantes na parte inicial deste trabalho, pois com eles foi possível identificar e corrigir falhas no aparelho além de proporcionar experiência na forma de utilizá-lo. Neles observamos também, o baixo nível de conhecimento em trigonometria pelos acadêmicos do curso de matemática e a

necessidade de procurar estratégias de ensino desse conteúdo tão importante para compressão de conceitos da matemática e da Física como afirma Oliveira (2006).

Por fim, o uso do CTM no ensino de trigonometria mostrou bons resultados na amostra pesquisada, mas se faz necessário continuar pesquisando formas facilitadoras do processo ensino – aprendizagem para conseguir atingir o principal objetivo: o aprendizado do aluno.

## 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

\_\_\_\_\_. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, 2000.

\_\_\_\_\_. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

CALDEIRA, M. F. T. H. S. **A Importância dos Materiais para uma Aprendizagem Significativa da Matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Ciência da Educação) - Departamento de Didáctica de la Lengua y la Literatura, Universidad de Málaga, Málaga/Espanha. 2009. Disponível em: <[riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/4574/05TMFTHSC.pdf](http://riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/4574/05TMFTHSC.pdf)> acesso em 01/04/2015

CASSOL, V. J. **Tecnologias no ensino e aprendizagem de trigonometria: uma meta-análise de dissertações e teses brasileiras nos últimos cinco anos**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

CORDEIRO, V. M. de S.; MASSAROLO, C. P. **A trigonometria e o cálculo de distâncias**. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2008. Curitiba: SEED/PR., 2011. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <[http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernos/pdebusca/producoes\\_pde/2008\\_unioeste\\_mat\\_artigo\\_valerio\\_marcio\\_de\\_souza\\_cordeiro.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernos/pdebusca/producoes_pde/2008_unioeste_mat_artigo_valerio_marcio_de_souza_cordeiro.pdf)>. Acesso em 01/04/2015.

COSTA, N. M. L. da. **Funções Seno e Cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do “Mundo Experimental” e do computador**. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997

CUNHA, D. da S. **A educação matemática e o desinteresse do aluno**. REBES - Revista Brasileira de Educação e Saúde, Pombal – PB, v. 3, n. 3, p. 20-24, jul.-set., 2013

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FERNANDES, R. U. **Estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o ensino de Trigonometria na circunferência**. Dissertação (Mestrado

Profissionalizante em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim SBEM-SP, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

HARTSHOR, R.; BOREN, S. **Experiential learning of mathematics: using manipulatives**. 1990. Disponível em: < <http://www.ericdigests.org/pre-9217/math.htm>>. Acesso em 10 mar. 2015.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, S. (ED) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, p. 3- 38, 2009.

MENDES, M. J. de F. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium**. 2010. 193 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2010

MENDES, M. J. de F.; ROCHA, M. L. P. C.. **Problematizando os caminhos que levam à tabela trigonométrica**. Belém: SBHMat, 2009 (Coleção História da Matemática para Professores)

MOREY, B. B. **Geometria e trigonometria na Índia e nos países árabes**. Rio Claro, SP: Editora SBHMat, 2003. (Coleção História da Matemática para Professores)

MOYER, P. S. Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics. *Journal Educational Studies in Mathematics*, Springer, v. 47, p. 175-197, 2001.

NACARATO, Adair Mendes. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista da Educação Matemática*. São Paulo: SBEM, v. 9, n. 9 e 10, p. 1-6. 2004-2005.

OLIVEIRA, F. C. de. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de Trigonometria por meio de atividades**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006

PEREIRA, A. C. C. **A obra “de triangulis omnimodis libri quinque” de Johann Müller Regiomontanus (1436 – 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria**. 2010. 329 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2010

RODRIGUES, F. C.; GRAZIRE, E. S. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão**. *Revemat*. Florianópolis, v.07, n.2, p. 187-196, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

SANTOS, D. C. dos. **O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na**

**Resolução de problemas trigonométricos.** Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2011.

SANTOS, D. C. dos; CURY, H. N. C. **O uso de materiais manipuláveis como ferramenta na resolução de problemas trigonométricos.** VIDYA, v. 31, n. 1, p. 49-61, jan./jun., 2011 - Santa Maria, 2011.

SILVA, S. A. da. **Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVEIRA, M. R. A. **“Matemática é difícil”**: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. Rio de Janeiro, 2002. Disponível em: <[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_25/matematica.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf)> Acesso em: 16 set. 2014

SOUSA, F. D. P. de. **Proposta de atividades para o ensino de trigonometria.** Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014

PISA - Programme for International Student Assessment. Disponível em: <<http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-brazil.pdf>> acesso em 31/03/2015

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. Metodologia do Trabalho Científico: **Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico** – 2. Ed. - Novo Hamburgo: Feevale, 2013

TERENCE, A. C. F.; FILHO, E. E. **Abordagem quantitativa, qualitativa e a utilização da pesquisa-ação nos estudos organizacionais.** XXVI ENEGEP – Fortaleza, CE, Brasil, 9 a 11 de outubro de 2006. Disponível em: <[http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2006\\_tr540368\\_8017.pdf](http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2006_tr540368_8017.pdf)> acesso em 13 mar. 2015

## APÊNDICES

### APÊNDICE A – Questionários e exercício – Minicursos UESB

#### Questionário A

IV Semana de Matemática – IV SEMAT  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Minicurso:

### ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA: CICLO TRIGONOMÉTRICO MANIPULÁVEL

Danivalton F. Oliveira  
PROFMAT / UESB  
danivalton@hotmail.com

#### Questionário

Nome: \_\_\_\_\_

Sexo:  Masculino      Idade: \_\_\_\_      Grau de escolaridade: \_\_\_\_\_  
 Feminino

Você leciona no ensino básico? \_\_\_\_\_      Quais séries? \_\_\_\_\_

Você já utilizou material manipulável em sala de aula?  Sim       Não  
Se não, por quê?

Qual sua opinião sobre o ciclo trigonométrico manipulável apresentado nesse minicurso?

Em sua opinião, o uso do ciclo trigonométrico manipulável pode auxiliar os alunos a compreender o conteúdo de trigonometria? Justifique

Sim, muito       Sim, pouco       Não

Este material poderá ser utilizado por você em suas aulas? Justifique

Sim       talvez       Não

Quais os pontos positivos e negativos do material apresentado?

Em sua opinião, o uso do ciclo trigonométrico manipulável tornou a trigonometria mais compreensível? Justifique.

Sim, muito       Sim, pouco       Não

## Questionário B

VI Semana de Matemática

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB / Jequié

Minicurso: O ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM MATERIAL MANIPULÁVEL

Data: 20/11/2014

Esse minicurso faz parte da minha pesquisa de mestrado e gostaria de contar com a sua colaboração para responder às questões abaixo.

Obrigado!

Prof. Danivalton F. Oliveira

## Questionário I

Nome: \_\_\_\_\_

Sexo:  Masculino      Idade: \_\_\_\_      Grau de escolaridade: \_\_\_\_\_  
 Feminino

1. Você leciona no ensino básico? \_\_\_\_\_ Quais séries? \_\_\_\_\_

2. Você já utilizou material manipulável em sala de aula?       Sim       Não  
 Se não, por quê?

3. Sobre o conteúdo trigonometria?  
 Não tenho dificuldades       Tenho dificuldades       \_\_\_\_\_

4. Você conhece o ciclo trigonométrico?  
 Sim       Não       Pouco

5. Quais razões trigonométricas você conhece?  
 seno       cosseno       tangente  
 cotangente       secante       cossecante

6. Quais eixos você conhece no ciclo trigonométrico?  
 seno       cosseno       tangente  
 cotangente       secante       cossecante

7. Marque ( + ) para positivo e ( - ) para negativo nos itens abaixo

$\sin 100^\circ$         $\cos 200^\circ$         $\operatorname{tg} 260^\circ$   
  $\operatorname{sec} 150^\circ$         $\operatorname{cossec} 80^\circ$         $\operatorname{cotg} 120^\circ$

8. Determine o valor dos itens abaixo

a)  $\sin 30^\circ =$       b)  $\cos 45^\circ =$       c)  $\operatorname{tg} 135^\circ =$

d)  $\operatorname{sec} 240^\circ =$       e)  $\operatorname{cossec} 60^\circ =$       f)  $\operatorname{cotg} 225^\circ =$

## Questionário C

VI Semana de Matemática

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB / Jequié

**Minicurso: O ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM MATERIAL MANIPULÁVEL**

Data: 21/11/2014

Esse minicurso faz parte da minha pesquisa de mestrado e gostaria de contar com a sua colaboração para responder às questões abaixo.

Obrigado!

Prof. Danivalton F. Oliveira

## Questionário II

Nome: \_\_\_\_\_

1. Qual sua opinião sobre o ciclo trigonométrico manipulável apresentado nesse minicurso?
2. Em sua opinião, o uso do ciclo trigonométrico manipulável pode auxiliar os alunos a compreender o conteúdo de trigonometria? Justifique  
 Sim, muito                       Sim, pouco                       Não
3. Este material poderá ser utilizado por você em suas aulas? Justifique  
 Sim                       talvez                       Não
4. Quais os pontos positivos e negativos do material apresentado?
5. Em sua opinião, o uso do ciclo trigonométrico manipulável tornou a trigonometria mais compreensível? Justifique.  
 Sim, muito                       Sim, pouco                       Não.



### Exercício

Nome: \_\_\_\_\_

Data: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_\_

As atividades abaixo foram retiradas trabalho de BRIGHENTI (2003) cujo objetivo neste minicurso é exemplificar a aplicação do aparelho para resolver os problemas da trigonometria no ensino médio.

01. Determine o  $\text{sen } 330^\circ$ ;  $\text{sen } 240^\circ$ ;  $\text{sen } 30^\circ$ .
02. Dê todos os valores de  $\alpha$ , do intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\cos \alpha = -1/2$
03. Dê o sinal de  $\cos 308^\circ$ ;  $\text{sen } 265^\circ$ .
04. Fazendo  $\alpha$  variar de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , como é a variação da tangente?
05. Determine  $\text{tg } 300^\circ$ ,  $\text{tg } 315^\circ$ ,  $\text{tg } 330^\circ$
06. Dê todos os valores de  $\alpha$  para  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\text{tg } \alpha = \sqrt{3}$ .
07. Determinar o valor da  $\text{cotg } 30^\circ$ ,  $\text{sec } 120^\circ$  e  $\text{cossec } 225^\circ$ .
08. Para quais valores de  $\alpha$  para  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tem-se  $\text{sec } \alpha = 2$ .
09. Complete os valores da tabela e construa o gráfico de  $y = \text{tg } x$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
y = tg x								

$\pi$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	$2\pi$

10. Quais os quadrantes onde  $\text{tg } x < 0$ ?

## APÊNDICE B – Questionário diagnóstico aos discentes

### Questionário I

Identificação: \_\_\_\_\_

Sexo:  Masculino      Idade: \_\_\_\_      Série: \_\_\_\_\_  
 Feminino

1. Sobre o conteúdo trigonometria?  
 Não tenho dificuldades     Tenho dificuldades     \_\_\_\_\_
2. Você conhece o ciclo trigonométrico?  
 Sim                     Não                     Pouco
3. Quais razões trigonométricas você conhece?  
 seno                     cosseno                     tangente  
 cotangente                     secante                     cossecante
4. Quais eixos você conhece no ciclo trigonométrico?  
 seno                     cosseno                     tangente  
 cotangente                     secante                     cossecante
5. Marque ( + ) para positivo e ( - ) para negativo nos itens abaixo  
  $\text{sen}100^\circ$                       $\text{cos } 200^\circ$                       $\text{tg } 260^\circ$   
  $\text{sec } 150^\circ$                       $\text{cossec } 80^\circ$                       $\text{cotg } 120^\circ$
6. Determine o valor dos itens abaixo  
a)  $\text{sen } 30^\circ =$                     b)  $\text{cos } 45^\circ =$                     c)  $\text{tg } 135^\circ =$   
d)  $\text{sec } 240^\circ =$                     e)  $\text{cossec } 60^\circ =$                     f)  $\text{cotg } 225^\circ =$

## APÊNDICE C – Atividades desenvolvidas com os discentes com e sem o CTM

As atividades a seguir foram elaboradas com o objetivo de avaliar os discentes a respeito das razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. Foram avaliados, a habilidade de identificação dos arcos notáveis e de seus múltiplos, o sinal das razões nos quatro quadrantes e a identificação de um ângulo conhecendo sua razão trigonométrica.

### Atividade 01 – Seno

#### Questão 01

Observando o ciclo trigonométrico, complete a tabela:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
sen $\alpha$									

$\alpha$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
sen $\alpha$								

#### Questão 2

- Qual é o valor máximo do seno?
- Qual é o valor mínimo do seno?
- Se  $\text{sen } \alpha = x$ , o que podemos afirmar sobre o valor de  $x$ ?
- Qual o sinal do seno no 1º quadrante?
- Qual o sinal do seno no 2º quadrante?
- Qual o sinal do seno no 3º quadrante?
- Qual o sinal do seno no 4º quadrante?

#### Questão 3

Qual o sinal de:

- sen  $255^\circ$
- sen  $160^\circ$

#### Questão 4

Dê todos os valores de  $\alpha$ , do intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\text{sen } \alpha = -1/2$ .

#### Questão 05

Quais suas considerações sobre o que foi apresentado nesta atividade? Aponte os principais conceitos aprendidos, suas dúvidas e dificuldades, caso existam.

**Atividade 02 - Cosseno**

## Questão 01

Observando o ciclo trigonométrico, complete a tabela:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\cos \alpha$									

A	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
$\cos \alpha$								

## Questão 2

- Qual é o valor máximo do  $\cos$ ?
- Qual é o valor mínimo do  $\cos$ ?
- Se  $\cos \alpha = x$ , o que podemos afirmar sobre o valor de  $x$ ?
- Qual o sinal do cosseno no 1º quadrante?
- Qual o sinal do cosseno no 2º quadrante?
- Qual o sinal do cosseno no 3º quadrante?
- Qual o sinal do cosseno no 4º quadrante?

## Questão 3

Qual o sinal de:

- $\cos 255^\circ$
- $\cos 160^\circ$

## Questão 4

Dê todos os valores de  $\alpha$ , do intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\cos \alpha = -1/2$ .

## Questão 05

Quais suas considerações sobre o que foi apresentado nesta atividade? Aponte os principais conceitos aprendidos, suas dúvidas e dificuldades, caso existam.

**Atividade 03 – Tangente**

Questão 01

Observando o ciclo trigonométrico, complete a tabela:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\text{tg } \alpha$									

$\alpha$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
$\text{tg } \alpha$								

Questão 2

- Se  $\text{tg } \alpha = x$ , o que podemos afirmar sobre o valor de  $x$ ?
- Qual o sinal da tangente no 1º quadrante?
- Qual o sinal da tangente no 2º quadrante?
- Qual o sinal da tangente no 3º quadrante?
- Qual o sinal da tangente no 4º quadrante?

Questão 3

Qual o sinal de:

- $\text{tg } 100^\circ$
- $\text{tg } 190^\circ$

Questão 4

Dê todos os valores de  $\alpha$ , do intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\text{tg } \alpha = -\sqrt{3}$ .

Questão 05

Fazendo  $\alpha$  variar de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , como é a variação da tangente?

Questão 06

Quais suas considerações sobre o que foi apresentado nesta atividade? Aponte os principais conceitos aprendidos, suas dúvidas e dificuldades, caso existam.

**Atividade 04 – Cotangente**

Questão 01

Observando o ciclo trigonométrico, complete a tabela:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\cotg \alpha$									

$\alpha$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
$\cotg \alpha$								

Questão 2

- Se  $\cotg \alpha = x$ , o que podemos afirmar sobre o valor de  $x$ ?
- Qual o sinal da cotangente no 1º quadrante?
- Qual o sinal da cotangente no 2º quadrante?
- Qual o sinal da cotangente no 3º quadrante?
- Qual o sinal da cotangente no 4º quadrante?

Questão 3

Qual o sinal de:

- $\cotg 100^\circ$
- $\cotg 190^\circ$

Questão 4

Dê todos os valores de  $\alpha$ , do intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\cotg \alpha = -\sqrt{3}$ .

Questão 05

Fazendo  $\alpha$  variar de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , como é a variação da tangente?

Questão 06

Quais suas considerações sobre o que foi apresentado nesta atividade? Aponte os principais conceitos aprendidos, suas dúvidas e dificuldades, caso existam.

**Atividade 05 – Secante**

Questão 01

Observando o ciclo trigonométrico, complete a tabela:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
sec $\alpha$									

$\alpha$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
sec $\alpha$								

Questão 2

- Se  $\sec \alpha = x$ , o que podemos afirmar sobre o valor de  $x$ ?
- Qual o sinal da secante no 1º quadrante?
- Qual o sinal da secante no 2º quadrante?
- Qual o sinal da secante no 3º quadrante?
- Qual o sinal da secante no 4º quadrante?

Questão 3

Qual o sinal de:

- sec  $100^\circ$
- sec  $190^\circ$

Questão 4

Dê todos os valores de  $\alpha$ , do intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\sec \alpha = -2$ .

Questão 05

Fazendo  $\alpha$  variar de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , como é a variação da secante?

Questão 06

Quais suas considerações sobre o que foi apresentado nesta atividade? Aponte os principais conceitos aprendidos, suas dúvidas e dificuldades, caso existam.

**Atividade 06 – Cossecante**

## Questão 01

Observando o ciclo trigonométrico, complete a tabela:

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
cossec $\alpha$									

$\alpha$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
cossec $\alpha$								

## Questão 2

- Se  $\text{cossec } \alpha = x$ , o que podemos afirmar sobre o valor de  $x$ ?
- Qual o sinal da cossecante no 1º quadrante?
- Qual o sinal da cossecante no 2º quadrante?
- Qual o sinal da cossecante no 3º quadrante?
- Qual o sinal da cossecante no 4º quadrante?

## Questão 3

Qual o sinal de:

- $\text{cossec } 100^\circ$
- $\text{cossec } 190^\circ$

## Questão 4

Dê todos os valores de  $\alpha$ , do intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que  $\text{cossec } \alpha = -2$ .

## Questão 05

Fazendo  $\alpha$  variar de  $180^\circ$  a  $270^\circ$ , como é a variação da cossecante?

## Questão 06

Quais suas considerações sobre o que foi apresentado nesta atividade? Aponte os principais conceitos aprendidos, suas dúvidas e dificuldades, caso existam.



## APÊNDICE D – Layout utilizado no CTM

