UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EDSON PATRICIO BARRETO DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA PROPOSTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

VITÓRIA DA CONQUISTA

2015

EDSON PATRICIO BARRETO DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA PROPOSTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Júlio César dos Reis, DSc.

VITÓRIA DA CONQUISTA

2015

A446i Almeida, Edson Patricio Barreto de.

Introdução à programação linear: uma proposta de ensino e aprendizagem para alunos do ensino médio / Edson Patrício Barreto de Almeida, 2015.

87f.

Orientador (a): Júlio César dos Reis.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Vitória da Conquista, 2015.

Inclui referências. 87.

1. Programação linear 2. Matemática – Resolução de problemas. 3. Matemática – Ensino e aprendizagem. I. Reis, Júlio César dos. II. Universidade do Bahia, Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional – PROFMAT. T. III.

CDD. 519.72

Catalogação na fonte: *Cristiane Cardoso Sousa - CRB 5 / 1843*

Campus Vitória da Conquista-BA

EDSON PATRICIO BARRETO DE ALMEIDA

INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA PROPOSTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

APROVADA POR:

Prof. Júlio César dos Reis, DSc.
Presidente

Prof. Roque Mendes Prado Trindade, DSc.
Examinador

Prof. Paulo Espinheira Menezes de Melo, DSc.
Examinador

Vitória da Conquista, 03 de setembro de 2015

Dedico este trabalho a minha filha Alice por essa alegria que preenche a cada dia minha vida, a Gleice minha linda esposa que esteve sempre ao meu lado nos momentos tristes e alegres, obrigado pelo seu carinho e amor. Aos meus pais e irmãos pelo amor, confiança e todo incentivo de sempre.

AGRADECIMENTOS

Ao mestre amado Jesus, amigo de todas as horas, a quem em minhas orações recorro em todos os momentos de minha vida, agradeço por mais essa conquista.

Aos meus pais Rita e Val por todo amor, carinho. Aos meus irmãos Mari e Neto pelo incentivo e amor.

A minha esposa Gleice e minha filha Alice por todo amor e carinho.

A toda família pelo carinho, amor e incentivo.

Aos colegas e professores do PROFMAT e, em especial meu orientador Prof. Júlio César dos Reis pela paciência, sugestões e ensinamentos.

A minha Tia Miriam pelo amor, carinho e acolhimento no seu lar.

Aos amigos que conquistei durante o curso Fernando, Juninho, Leo, Magno e Rogério.

Por fim, agradeço a todos vocês e que Deus ilumine a cada um hoje e sempre. Meu muito obrigado por tudo!

“Desistir dos sonhos é abrir mão da felicidade porque quem não persegue seus objetivos esta condenado a fracassar 100% das vezes”.

(Augusto Cury)

RESUMO

Este estudo teve como principal objetivo apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear em conteúdos do ensino médio. A pergunta norteadora da investigação foi: **Podemos apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem de Programação Linear em conteúdos do ensino médio?** Para responder a este questionamento tivemos como objetivos específicos: Apresentar a Programação Linear no ensino médio em caráter introdutório; Resolver Problemas de Programação Linear e perceber impressões dos alunos sobre a Programação Linear. Tivemos como principais autores para fundamentação teórica: Prado (1999) e Yoshida (1987) que através de suas leituras pudemos ter uma boa compreensão da Programação Linear; Almeida, Silva e Vertuan (2012), Biembengut e Hein (2003), que conceitua a Modelagem Matemática, além disso, apresenta a Modelagem Matemática no Ensino e define suas fases relativas aos procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema; temos ainda os autores Dante (2000) e Polya (1995) que apresenta os objetivos e as fases da Resolução de Problemas. Os procedimentos de trabalho para o desenvolvimento da pesquisa foram apresentados como um recorte de um estudo de caso. Foram sujeitos desta pesquisa, o porfessor-pesquisador e um grupo de 08 alunos da 1ª série do ensino médio, da rede federal de ensino da cidade de Vitória da Conquista - Ba. Utilizamos como instrumento de coleta de dados um minicurso sobre a Programação Linear em caráter introdutório, dando ênfase à modelagem matemática, a resolução de problemas e à resolução gráfica para os casos envolvendo duas variáveis de decisão. E, por meio desses dados coletados percebemos que é possível trabalhar com a Programação Linear no ensino médio, desde que haja a possibilidade de contextualização do estudo de conteúdos prévios como: funções lineares, equações e inequações lineares, semiplanos e gráficos. Dessa forma, permitindo que problemas de otimização sejam utilizados como ponto de partida para o estudo desses conceitos desde a primeira série do ensino médio.

Palavras–chave: Programação Linear; Modelagem Matemática; Resolução de Problemas; Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

This study aimed to present a proposal for teaching and learning linear programming in high school content. The guiding research question was, **can we propose a teaching and learning of linear programming in high school content?** To answer this question we had the following objectives: to present the Linear Programming in high school in introductory character; solve linear programming problems and realize impressions of students about linear programming. We had as main authors for theoretical foundation: Meadow (1999) and Yoshida (1987) that through their readings we have a good understanding of linear programming; Almeida, Silva and Vertuan (2012), Biembengut and Hein (2003), which conceptualizes Mathematical Modelling also shows the Mathematical Modeling in Teaching and defines its phases on the procedures required for configuration, structuring and solving a problem situation ; we still have the authors Dante (2000) and Polya (1995) presenting the objectives and phases of Problem Solving. The working procedures for the development of the research were presented as a cut out of a case study. Were subject of this research, the professor researcher and a group of 08 students from the 1^{st} year of high school, in the federal schools of the city of Vitória da Conquista - Ba. We used as data collection instrument a short course on linear programming in introductory character, emphasizing the mathematical modeling, problem solving and graphic resolution for cases involving two decision variables. In addition, through these data collected realize that you can work with the Linear Programming in high school, provided there is the possibility of prior knowledge of the context study as linear functions, linear equations and inequalities, semiplanes and graphics. Thus allowing optimization problems are used as a starting point for the study of these concepts since the first year of high school.

Keywords: Linear Programming; Troubleshooting; Mathematical Modeling; Teaching and Learning.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

A Matemática está presente desde um simples troco de um picolé ao estudo sobre momento de inércia, volume, área de superfície e até mesmo pesquisas sobre fluidos sanguíneos entre outros. Com a modernidade e todo desenvolvimento tecnológico e científico as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas do conhecimento requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos torna-se necessário tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

Segundo os Parâmetros Curriculares – PCN para o ensino médio (1999), as finalidades do ensino de Matemática no nível médio norteiam alguns objetivos para os alunos, dentre eles destacamos:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica em geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo.

Nesse sentido, esta pesquisa procura apresentar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais fazendo com que o aluno possa aplicar conteúdos matemáticos e desenvolver a capacidade de raciocínio.

No mundo atual, seja no comércio, indústria ou na ciência é comum depararmos com situações complexas, que necessitam de uma solução ótima, para isso precisam ser avaliadas com a utilização de ferramentas matemáticas. Em alguns casos, estas situações podem ser modeladas por variáveis linearmente relacionadas. Na busca de uma meta que também pode ser modelada por uma função linear (função objetivo), precisamos realizar uma investigação das condições (restrições) existentes para a determinação da melhor solução (solução ótima). Nesse contexto, se inserem os

Problemas de Programação Linear (PPL) que serão tratados nesta pesquisa. Esses problemas já vêm sendo estudados desde a década de 40. E ao longo desse tempo, estamos percebendo que os estudos nesta área, vêm se expandindo a cada dia na indústria e na ciência.

Diante desse contexto, o objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear em conteúdos do ensino médio, mais particularmente nos conteúdos de equações, inequações e funções lineares, utilizando problemas que surgem em situações do cotidiano dos alunos, possibilitando uma intervenção crítica e participativa no seu meio de vivência.

A justificativa apresentada para esta pesquisa será abordada nos capítulos 2, 3 e 4. No capítulo 2 Programação Linear, fundamentamos um estudo teórico sobre o seu surgimento, suas diversas abordagens, os problemas de programação linear, suas representações e soluções geométricas, além disso, suas aplicações nas diversas áreas. Já no capítulo 3 por meio de teóricos conceituamos a Modelagem Matemática, sua aplicação no ensino e suas fases relativas aos procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema. No capítulo 4 destacamos a Resolução de Problemas seus objetivos e suas fases.

No Capítulo 5 apresentamos os aspectos metodológicos da investigação: pesquisa qualitativa do tipo Estudo de Caso com algumas características da Pesquisa-Ação.

Para iniciarmos a pesquisa questionamos: “Podemos apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear em conteúdos do ensino médio”? Para responder esta pergunta ministramos um minicurso a um grupo de quatro alunos da turma da 1ª série do ensino médio do Colégio Federal “Cidade Fria”, na cidade de Vitória da Conquista.

O estudo teve por objetivos específicos: Apresentar a programação linear no ensino médio em caráter introdutório; Resolver Problemas de Programação Linear e perceber impressões dos alunos sobre a Programação Linear.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste Capítulo apresentaremos os conceitos de Equação Linear, Solução Linear, Inequação Linear, Função Linear, Curvas de Nível, Gráficos, Região Convexa e Semiplano, que serão utilizados nas atividades propostas em sala.

1.1 Equação Linear e Soluções

Para Lipschutz e Lipson (2001), uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação que pode ser colocada na seguinte forma padrão

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \ (1)$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n \ e \ b$ são constantes. A constante a_1 é chamada de coeficiente de x_1 e b é chamado de termo constante da equação.

Uma solução da equação linear (1) é uma lista de variáveis ou, de modo equivalente, um vetor u em K^n, por exemplo

$$x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ \dots, x_n = k_n \quad \text{ou} \quad u = (k_1,\ k_2, \dots, k_n)$$

tal que a seguinte afirmação (obtida quando substituímos k_i por x_i na equação) é verdadeira:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n = b$$

Neste caso, dizemos que u satisfaz a equação.

Exemplo: Considere a seguinte equação linear em duas incógnitas x, y:

$$3x + 2y = 6$$

Observe que $x = 4$, $y = -3$ ou, do mesmo modo, o vetor $u = (4, -3)$, é uma solução da equação. Isto é,

$$3(4) + 2(-3) = 6 \ \text{ ou } \ 12 - 6 = 6 \ \text{ ou } \ 6 = 6$$

1.2 Inequação Linear

É uma sentença matemática, com uma ou mais incógnitas, que é expressa por um sinal de desigualdade.

Exemplos:

a) $x + y \leq 25$

b) $3x + 4y \geq 30$

1.3 Função Linear

Segundo Flemming e Gonçalves (2006), função do 1º grau é toda função que associa a cada número real x o número real $ax + b, com\ a \neq 0$. Os números reais a e b são chamados, respectivamente, de coeficiente angular e linear.

Exemplos:

a) A função $f(x) = 2x + 3$ é uma função do 1º grau crescente porque $a = 2 > 0$.

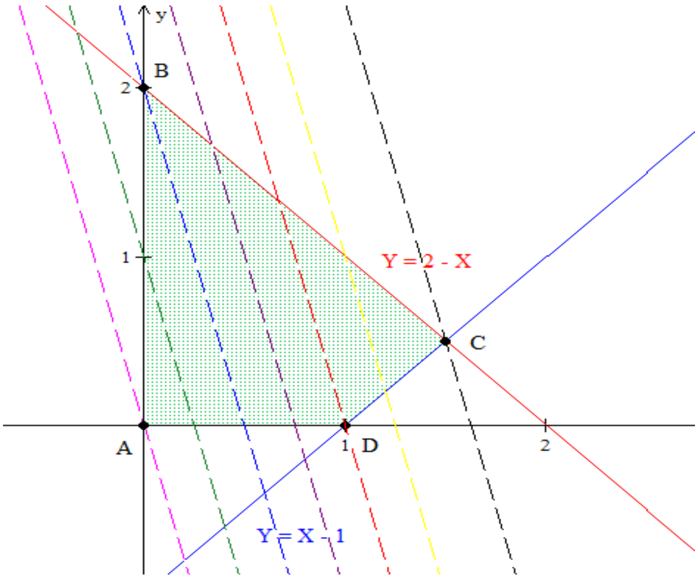
b) A função $f(x) = -3x + 1$ é uma função do 1º grau decrescente porque $a = -3 < 0$.

1.4 Curvas de Nível

Segundo Almeida (2015), curva (ou linha) de nível de uma função $z = f(x, y)$ é uma curva $f(x, y) = c$ (no plano xy), nos pontos da qual a função assume um único valor $z = c$, geralmente indicado nos desenhos. As curvas de nível também são conhecidas como curvas de contorno, e diagramas de curvas de nível conhecidos como diagramas de contorno. As curvas de nível são sempre paralelas entre si, pois possuem o mesmo coeficiente angular. Duas curvas de nível nunca podem se interceptar, pois o ponto de intersecção teria duas cotas diferentes, o que é impossível.

Exemplo: Dada a função objetivo $Z = 4x + y$, a Figura 1.1 apresenta algumas curvas de nível para os valores de $Z =$ 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.5.

Figura 1.1 - Curvas de nível da Função objetivo



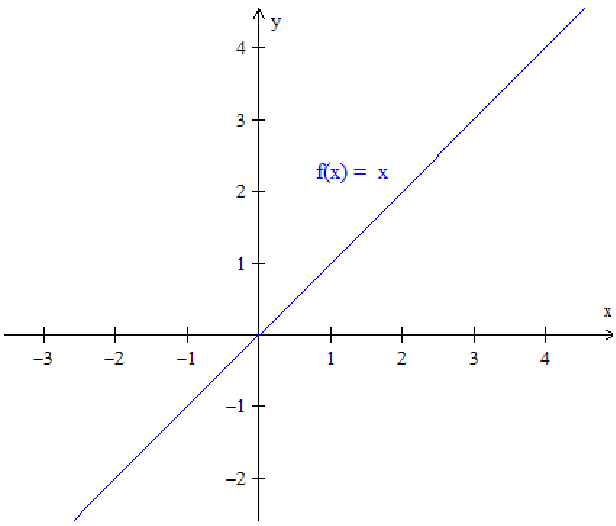
1.5 Gráficos de função

Para Flemming e Gonçalves (2006), temos a definição de gráfico. Seja f uma função. O gráfico de f é o conjunto de todos os pontos $(x, f(x))$ de um plano coordenado, onde x pertence ao domínio de f.

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela aos eixos coordenados.

Exemplo: Consideremos a função $f(x) = x$. Os pontos de seu gráfico são os pares $(x, y) \in R^2$. A Figura 1.2 mostra este gráfico.

Figura 1.2 - Função Linear $f(x) = x$



1.6 Região Convexa

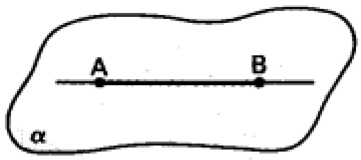
Para Dolce e Pompeo (1993), um conjunto de pontos $\sum$ é convexo (ou é uma região convexa) se, e somente se, dois pontos distintos quaisquer A e B de $\sum$ são extremidades de um segmento $\overline{AB}$ contido em $\sum$, ou se $\sum$ é unitário, ou se $\sum$ é vazio.

Exemplo:

a) Uma reta r é um conjunto de pontos convexos, pois

$\forall$ A, $\forall$ B, $\forall$ r (A $\neq$ B, A $\in r$, B $\in r \rightarrow \overline{AB} \subset r$)

b) Um plano α é uma região convexa, pois, se A e B são dois pontos distintos de α, o segmento $\overline{AB}$ está contido em α.



$\forall$ A, $\forall$ B, $\forall$ α (A $\neq$ B, A $\in \alpha$, B $\in \alpha \rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \rightarrow \overline{AB} \subset \alpha$)

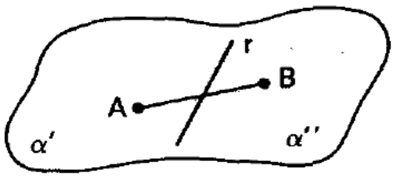
1.7 Semiplano

Segundo Dolce e Pompeo (1993), uma reta r de um plano α separa este plano em dois conjuntos tais que:

a) $\alpha' \cap \alpha'' = \emptyset$

b) α' e α'' são convexos

c) A $\in \alpha'$, B $\in \alpha'' \rightarrow \overline{AB} \cap r \neq \emptyset$



Cada um dos dois conjuntos (α' e α'') é chamado semiplano aberto.

Os conjuntos $r \cup \alpha'$ e $r \cup \alpha''$ são semiplanos.

A reta r é a origem de cada um dos semiplanos.

α' e α'' são semiplanos opostos.

Capítulo 2

Programação Linear

Para este capítulo abordaremos a Programação Linear tanto no contexto histórico, falando sobre seu surgimento, suas diversas abordagens, os problemas de programação linear, representação gráfica, soluções dos problemas e suas aplicações.

2.1 A Programação Linear

Segundo Prado (1999), do ponto de vista histórico os estudos sobre a programação linear tiveram início no ano de 1936 por Wassily Leontieff, que criou um modelo constituído por um conjunto de equações lineares, considerado como o primeiro passo para os estudos das técnicas de Programação Linear. Já no ano de 1939, o matemático russo L.V. Kantorovick publicou um trabalho sobre planejamento de produção que apresenta dentre as diversas abordagens, o uso de equações lineares. No entanto, só no ano de 1960 que esta pesquisa veio a ser conhecida. Em 1940, Frank L. Hichcock apresentou uma abordagem ao problema de transportes utilizando a programação linear. No entanto, só no ano de 1947 que esta técnica de planejamento se consolidou com George Dantzig, que desenvolveu o Método Simplex, capaz de resolver qualquer problema de PL.

Segundo Correia e Tavares (1999), foi a partir de 1951, que se realizou o primeiro simpósio sobre Problemas Linear, logo em seguida, inúmeros trabalhos foram surgindo procurando completar as bases teóricas, melhorando a eficiência computacional dos seus algoritmos e aperfeiçoando o nível de realismo das suas formulações.

A Programação Linear é uma das técnicas utilizadas na Pesquisa Operacional, que consiste num método matemático utilizado no processo de tomada de decisão. Ela procura encontrar a melhor solução (solução ótima) para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. Esta característica, linearidade das expressões, torna-a simples e altamente aplicável.

Para Hillier e Liberman (2006), a Programação Linear é um ramo da Matemática Aplicada que usa um modelo matemático na descrição do problema. Para os autores o objetivo da Programação Linear é buscar a melhor alocação dos recursos disponíveis. A Programação Linear consiste na otimização (maximização ou minimização) de uma função linear, denominada função objetivo, satisfazendo um sistema de igualdades e/ou desigualdades (restrições) lineares, com variáveis de decisão reais não negativas. Ao conjunto da interseção das restrições denominamos Região Viável. Ao se trabalhar com Programação Linear é preciso definir algumas etapas, tais como a definição do problema; a construção do modelo; a solução do modelo, a validação do modelo, e por fim a implementação da solução.

2.2 Problemas de Programação Linear (PPL)

Para Yoshida (1987), a programação linear pertence a uma classe de problemas chamada de otimização, que tem por objetivos maximizar ou minimizar (otimizar) uma função de várias variáveis sujeita a certas restrições. Então, entendemos que resolver um problema de programação linear (PPL), significa encontrar um valor máximo ou mínimo para uma função linear, denominada função objetivo, obedecendo a uma série de restrições descritas por equações ou inequações lineares.

Segundo Santos (2013), uma das formas que se apresenta um problema de programação linear é:

Maximizar a função $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ sujeito a

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{3n}x_n \leq b_3 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \leq b_m \\
x_j \geq 0
\end{gathered}$$

ou,

minimizar a função $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{3n}x_n \geq b_3$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_j \geq 0$$

onde,

- a_{ij}, b_j, c_j são números reais;
- $i\ e\ j$ são números naturais tais que $1 \leq i \leq m\ e\ \ 1 \leq j \leq n$;
- x_j são variáveis de decisão;
- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função objetivo;
- as inequações da forma $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_i$ no primeiro formato, assim como as da forma $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ no segundo formato, são as restrições da função objetivo;
- as inequações do tipo $x_j \geq 0$ são as condições de não negatividade;
- n e m são, respectivamente, o número de variáveis de decisão e o número de restrições da função objetivo.

Para Santos (2013), a solução ótima para um problema de programação linear pode ser descrito da seguinte forma:

> As restrições da função objetivo, juntamente com as condições de não negatividade, formam o conjunto de soluções viáveis ou região factível que constitui-se o conjunto dos possíveis valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$ que satisfazem as restrições do modelo e que chamaremos de soluções viáveis do problema. Dentre estas soluções viáveis, busca-se a melhor, a que tem o valor mais favorável, ou seja, aquela que otimiza a função objetivo e que designamos por solução ótima do problema.

No entanto, como o foco de nossa pesquisa é a aplicação da programação linear no ensino médio, utilizaremos apenas soluções geométricas para resolução dos problemas de programação linear onde a função objetivo possui apenas duas variáveis de decisão.

2.3 Representação e Solução Geométrica de um (PPL)

A representação geométrica de problemas de programação linear (PPL) só é possível, quando os problemas apresentam duas variáveis de decisão. A ferramenta gráfica utilizada para representação das soluções geométricas foi o software Winplot, a principal opção para escolha é por ser um software livre, podendo ser baixado da internet. Além disso, esse software permite a visualização de gráficos na forma 2D e 3D. O gráfico que representa as soluções geométricas facilita a visualização das principais características do processo de decisão.

Para resolver um problema de programação linear utilizando solução geométrica, devemos interpretar o problema de forma a transcrever os dados fornecidos para a linguagem matemática (Modelar o problema) e em seguida resolvê-lo. Para isto devemos seguir os seguintes passos:

- Identificar as variáveis envolvidas no problema.
- Estabelecer a Função Objetivo, as quais deverão maximizar ou minimizar.
- Identificar as restrições impostas pelo problema e transformá-las em inequações lineares.
- Traçar o gráfico das inequações lineares, obtendo com isso uma região convexa e determinar as coordenadas dos seus vértices.
- Voltar ao problema e fornecer a solução.

Por exemplo, uma vendedora de cosméticos trabalha com dois tipos de produtos: xampus e sabonetes. Sabe-se que na venda de uma unidade de xampu, ela tem um lucro de R$ 25,00 e na de sabonete um lucro de R$ 15,00. A fábrica só permite pedidos a partir de 5 unidades, mas num mês, ela vende no máximo 25 produtos. Qual a quantidade de xampus e sabonetes ela deve vender mensalmente para que tenha lucro máximo? E qual o lucro máximo?

Solução:

Identificando as Variáveis

A primeira tarefa para a resolução de um problema de programação linear (PPL) é identificar as variáveis inseridas na questão. No exemplo, as variáveis são a quantidade de artigos do tipo A (a qual chamaremos de x) e a quantidade de artigos do tipo B (que chamaremos de y), pois, a pergunta do problema refere-se à quantidade de artigos que o comerciante deverá comprar.

Deve-se ficar atento, para não confundir constantes com variáveis. No exemplo podemos verificar que R$ 25,00 de lucro da venda de uma unidade do xampu e R$ 15,00 de lucro da venda de uma unidade do sabonete são constantes.

Estabelecendo a Função Objetivo

Vamos raciocinar então! Temos que para cada unidade de xampu temos um lucro de R$ 25,00 e para cada unidade de sabonete um lucro de R$ 15,00. Como no problema diz que a comerciante deve obter o lucro Máximo, ou seja, refere-se ao lucro, devemos montar a função que representa o lucro total obtido, que chamaremos de L.
Concluímos que a Função Objetivo é:

$$\mathrm{L} = 25x + 15y$$

Identificando as restrições e escrevendo as inequações lineares

Geometricamente, as restrições lineares definem um polígono convexo. Uma importante propriedade apresentada pela programação linear é que "os pontos que satisfazem as restrições formam um *conjunto convexo*, em que quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um segmento de reta, inteiramente contida no próprio conjunto." Giordano (*apud* SILVA, 2013, p. 37).

Como o exemplo afirma que o pedido mínimo é de 5 unidades, então nossa primeira restrição é: a quantidade de xampu somada com a de sabonete deve ser maior ou igual a 5. Transformando esta restrição para inequação temos:

$$x + y \geq 5$$

A vendedora vende no máximo 25 unidades dos produtos, temos então que a quantidade x de xampu somada a quantidade y de sabonete é menor ou igual a 25. Escrevendo a inequação, temos: $x + y \leq 25$.

Como a quantidade de xampus e sabonetes deve ser maior ou igual a zero, temos as inequações: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Traçando o gráfico

Para construção do gráfico devemos reescrever todas as restrições obtidas e montar um sistema de inequações lineares. Analisando a região que cada inequação representa no gráfico e achando a região convexa, através da intersecção das regiões representadas por essas inequações.

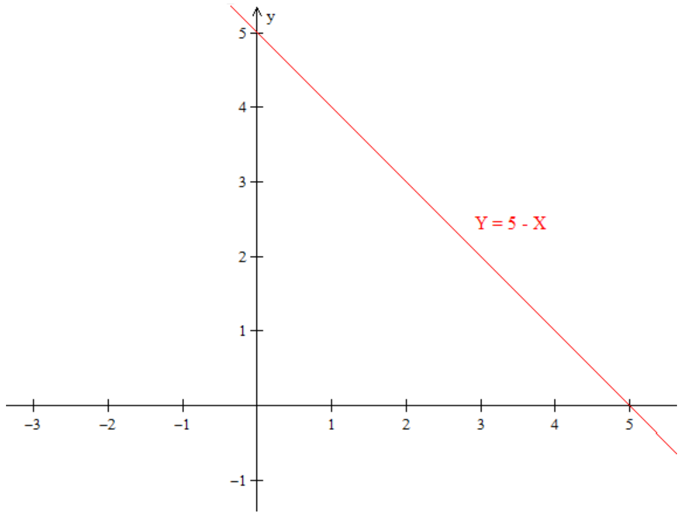
O sistema obtido será $\begin{cases} x+y \geq 5 \\ x+y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, após analisar graficamente cada inequação como veremos abaixo, obteremos a região convexa viável:

Para desenhar o gráfico da região, vamos inicialmente escrever cada inequação como uma equação linear:

$$x + y = 5 \ \rightarrow y = 5 - x$$

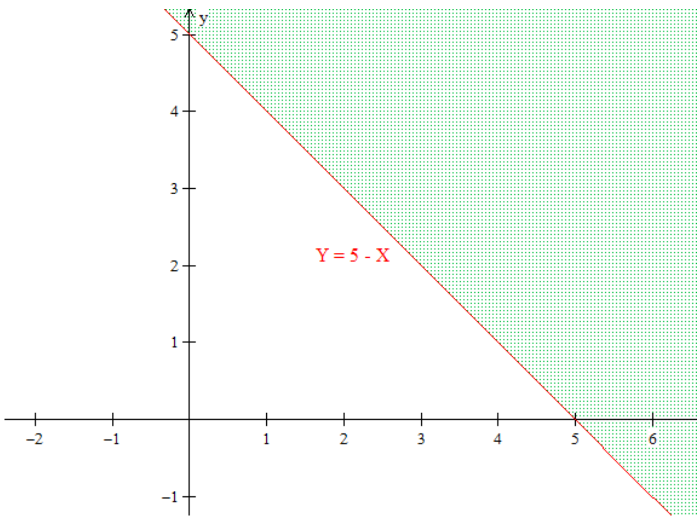
Desenhamos a reta $y = 5 - x$.

Figura 2.1 - Reta $y = 5 - x$



A inequação $x + y \geq 5$ é equivalente a $y \geq 5 - x$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte superior à reta $y = 5 - x$.

Figura 2.2 - Semiplano y $\geq 5 - x$

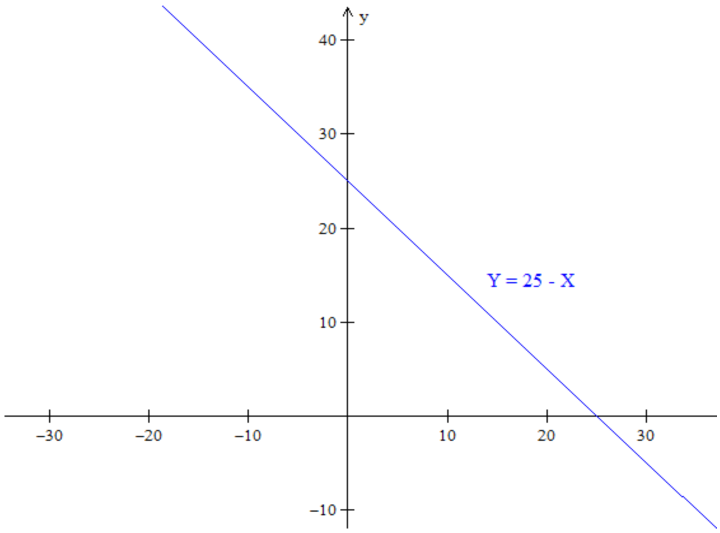


Agora, fazemos o mesmo com a próxima inequação:

$$x + y = 25 \ \rightarrow y = 25 - x$$

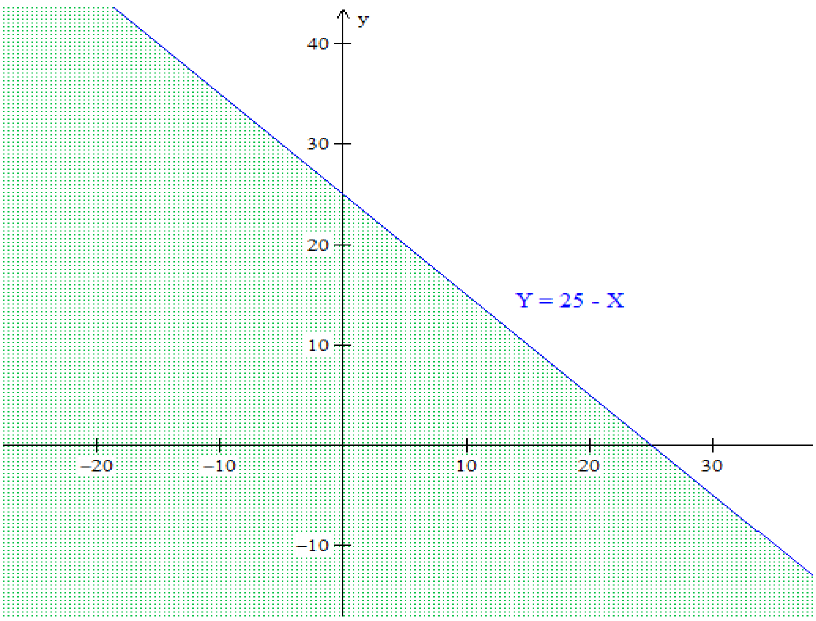
Desenhamos a reta $y = 25 - x$.

Figura 2.3 - Reta $y = 25 - x$



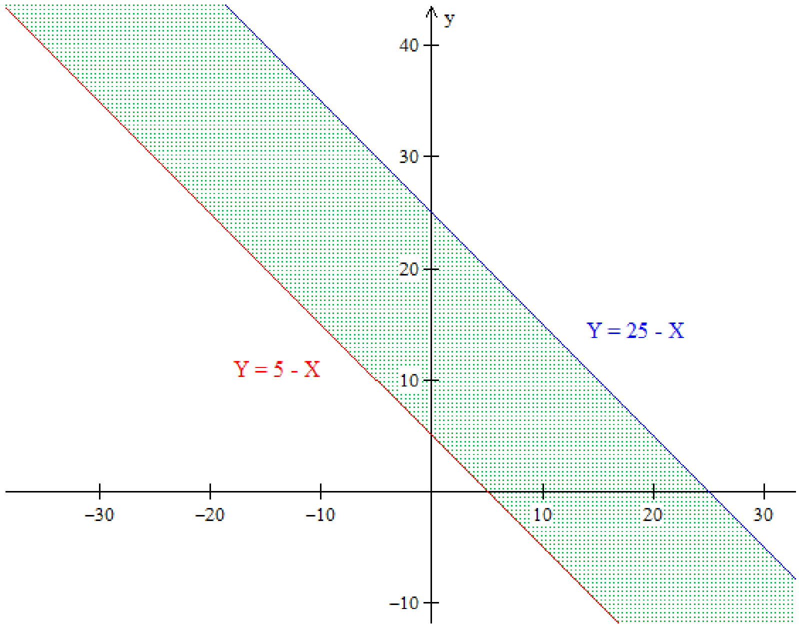
A inequação $x + y \leq 25$ é equivalente a $y \leq 25 - x$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte inferior à reta $y = 25 - x$.

Figura 2.4 - Semiplano $y \leq 25 - x$



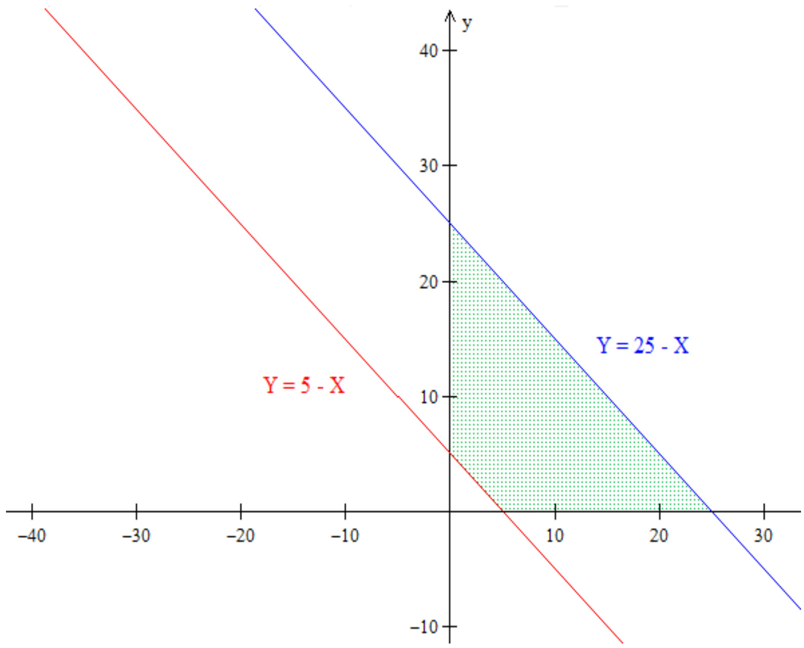
Combinando (intersecção) as duas regiões, obtemos o seguinte gráfico:

Figura 2.5 - Semiplanos $y \geq 5 - x$ e $y \leq 25 - x$



Lembramos que ainda temos duas outras inequações: $x \geq 0$ e $y \geq 0$, ou seja, todos os pontos da região procurada tem coordenadas positivas:

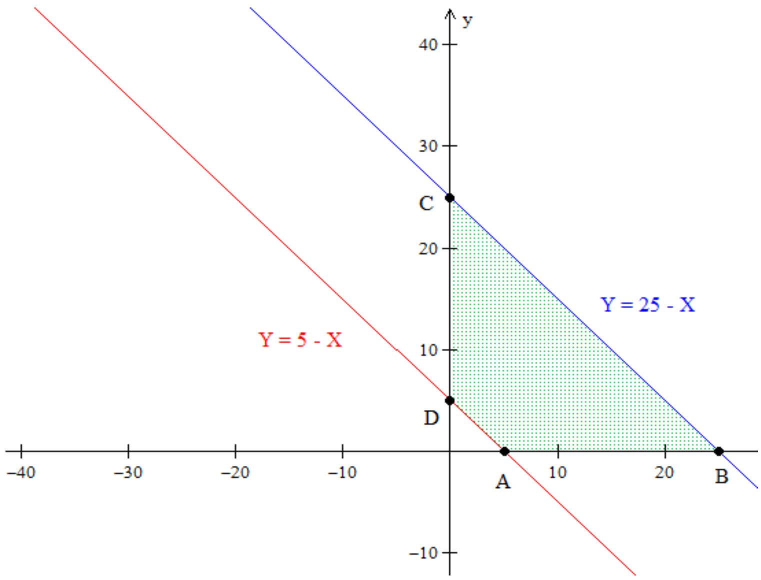
Figura 2.6 - Semiplanos y $\geq 5 - x$, y $\leq 25 -$ x, $x \geq 0$ e $y \geq 0$



A primeira parte do exercício está completa. Vamos, então, determinar o valor máximo da função objetivo.

Inicialmente, temos que determinar quais são os pontos de vértice da região convexa, como mostra a figura 2.7 (vértices A, B, C e D).

Figura 2.7 - Região viável do Problema da vendedora

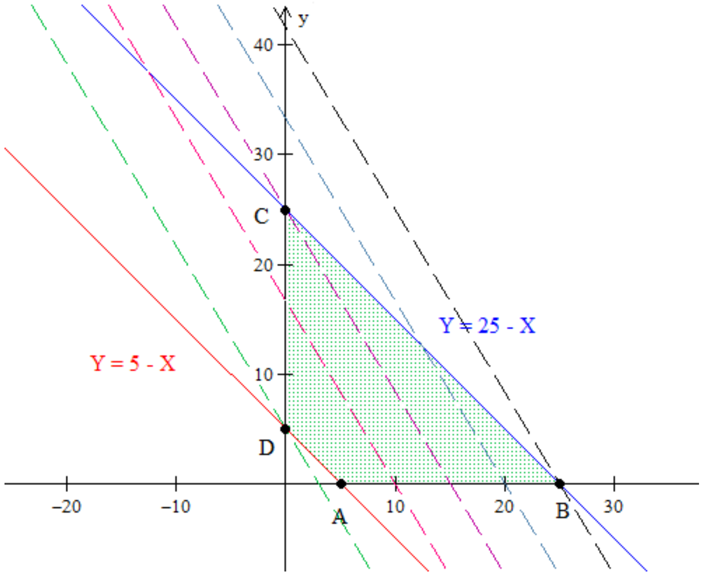


Calculando os valores da função objetivo

Identificada à região convexa, nosso próximo passo deverá ser atribuir valores à função objetivo $\mathrm{L} = 25x + 15y$, por exemplo, $\mathrm{L} = \mathrm{L}_0$, e verificar se a reta, chamada curva de nível intercepta a região convexa. Vejamos que, se $L_0 \geq 0$, $L_0 \in R$, qualquer ponto da reta $\mathrm{L}_0 = 25x + 15\mathrm{y}$ que intercepta a região convexa, satisfaz as restrições e tem lucro $L = L_0$.

A Figura 2.8 apresenta algumas curvas de nível (retas tracejadas) para Lucro $L = 75;\ 250; 375;\ 500;\ 625.$

Figura 2.8 - Curvas de nível da Função objetivo e Solução ótima



O conjunto de retas paralelas, que obtemos ao substituir L_0 por valores na função objetivo, nos indica, intuitivamente, que o valor máximo ocorre em um ponto extremo ou em um segmento de reta da região viável.

Todos os pontos que estão no interior da região convexa são soluções viáveis para a nossa função objetivo. Mas, precisamos encontrar a solução ótima para o nosso problema, isto significa calcular o valor máximo para a respectiva função objetivo. De acordo com Anton e Rorres (2001) basta tomarmos os valores extremos da região convexa.

A Tabela 2.1 apresenta os pontos extremos da região convexa e seus respectivos lucros aplicados na função objetivo. Em destaque, o ponto ótimo no qual se encontra o lucro máximo.

Tabela 2.1 - Pontos extremos da Região viável do Problema da vendedora

	Quantidade de unidade xampu	Quantidade de unidade de sabonete	Função objetivo Lucro (máximo)
Pontos da região	X	Y	$L = 25x + 15y$
A (15,0)	15	0	375
B (25,0)	25	0	625
C (0,25)	0	25	375
D (0,5)	0	5	75

Portanto, podemos verificar na Tabela 1 que a função objetivo obtém o seu valor máximo no ponto B (25,0) e o seu lucro máximo nesse ponto é 625. Mais adiante serão mostradas novas evidências geométricas de que o ponto extremo B é ótimo.

2.4 Aplicações da Programação Linear

A Programação Linear pode ser utilizada para resolver problemas de diferentes áreas, principalmente em departamentos que envolvem planejamento e controle da produção, tais como: controle de perdas e produção de energia elétrica, planejamento de produção avícola, planejamento de cortes de bobina de papel, dentre outros. Daí a importância dessa técnica da Pesquisa Operacional pelos diversos profissionais da área de engenharia, para ajudá-los a obter uma tomada de decisão mais eficiente.

Segundo Prado (1999, p. 16), a programação linear tem sido aplicada em diversas áreas do nosso cotidiano. Podemos ver alguns exemplos dessas aplicações:

> - **Alimentação**: Que alimentos as pessoas (ou animais) devem utilizar de modo que o custo seja mínimo e os mesmos possuam os nutrientes nas quantidades adequadas, e que também atendam a outros requisitos, tais como variedade entre as refeições, aspecto, gosto, etc?
> - **Rotas de transporte**: Qual deve ser o roteiro de transporte de veículos de carga de modo que entreguem toda a carga no menor tempo e no menor custo total?
> - **Agricultura**: Que alimentos devem ser plantados de modo que o lucro seja máximo e sejam respeitadas as características do solo, do mercado comprador e dos equipamentos disponíveis?
> - **Carteira de investimentos**: Quais as ações devem compor uma carteira de investimentos de modo que o lucro seja máximo e sejam respeitadas as previsões de lucratividade e as restrições governamentais?
> - **Petróleo**: Qual deve ser a mistura de petróleo a ser enviada para uma torre de craqueamento para produzir seus derivados (gasolina, óleo, etc) a um custo mínimo? Os petróleos são de diversas procedências e possuem composições diferentes.
> - **Siderúrgia**: Quais minérios devem ser carregados no alto-forno de modo a se produzir, ao menor custo, uma liga de aço dentro de determinadas especificações de elementos químicos?
> - **Mineração**: Em que sequência deve-se lavrar blocos de minério abaixo do solo, dados sua composição, posicionamento e custos de extração?
> - **Localização industrial**: Onde devem ser localizadas as fábricas e os depósitos de um novo empreendimento industrial de modo que os custos de entrega do produto aos varejistas sejam minimizados?

Capítulo 3

Modelagem Matemática

Neste Capítulo apresentaremos os conceitos da Modelagem Matemática, seu surgimento e a Modelagem Matemática no Ensino e suas fases. Além disso, apresentamos as etapas para introdução a uma atividade com Modelagem.

3.1 A Modelagem Matemática

Os primeiros conceitos e procedimentos em relação ao que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática surgem da Matemática Aplicada. Para os autores (Almeida, Silva e Vertuan, 2012), é a partir dessa "importação" da Matemática Aplicada que a conceitualização e a caracterização da Modelagem Matemática na Educação Matemática têm tido diferentes abordagens e têm sido realizadas segundo diferentes pressupostos em relação às concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturações teóricas das pesquisas científicas.

A Modelagem Matemática não é novidade, sua essência sempre esteve presente na criação das teorias científicas e, em especial, na criação das teorias matemáticas. Seu conceito surge durante o Renascimento, para auxiliar na construção das ideias iniciais da Física. Atualmente, constitui um ramo da Matemática que auxilia diversas áreas do conhecimento como: Biologia, Geografia, Economia, Engenharia e outros (BIEMBENGUT e HEIN *apud* MACHADO, 2003, p.21).

A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real (BASSANEZI *apud* SILVA 2013, p. 17). Várias ciências como a Física, a Química e a Biologia obtiveram grandes avanços com o uso da modelagem, utilizada como ferramenta de pesquisa, buscando criar modelos que se aproximassem das situações reais em estudo.

Para Biembengut e Hein (2003), a modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sobre certo olhar, é considerado um processo artístico, pois, na elaboração de um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber enxergar que conteúdo matemático melhor se adapta, além disso, ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Segundo as autoras Biembengut e Hein (2003), na elaboração de um modelo necessita de um conhecimento matemático prévio. Se esse conhecimento é restrito apenas a matemática elementar, como aritmética ou medidas, esse modelo poderá ficar delimitado a esses conceitos. Então, quanto maior for o conhecimento matemático, maiores serão as possibilidades de resolver questões que exijam uma matemática mais sofisticada.

Segundo Machado (2006, p.21), devido aos seus pressupostos multidisciplinares, “a Modelagem foi transposta para o terreno do ensino-aprendizagem e vem sendo empregada como metodologia nos últimos trinta anos, com objetivo de trabalhar problemas reais em sala de aula”.

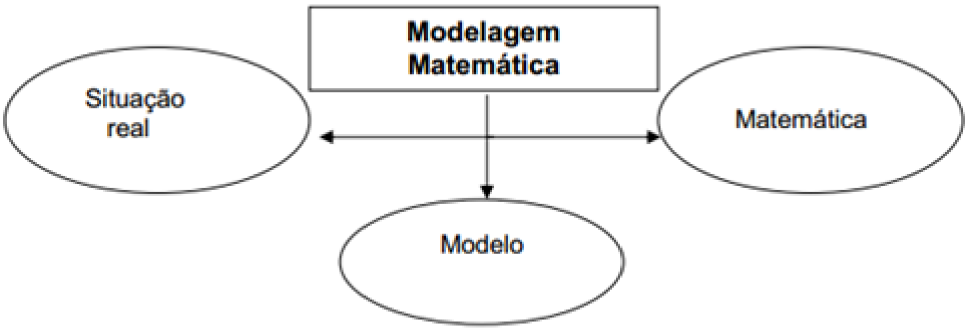
3.2 Modelagem Matemática no Ensino

Nota-se que o ensino da matemática nos dias atuais é motivo de crítica por alunos, pois não é feita reflexões com sua realidade. Muitos professores só se preocupam em resolver questões, muitas vezes sem nenhum significado para o aluno. É preciso que esses alunos possam adquirir melhor compreensão tanto da teoria matemática quanto da natureza do problema a ser modelado.

Dessa forma, segundo Biembengut e Hein (2003, p.18), a modelagem matemática no ensino torna-se um caminho para despertar o interesse do aluno por tópicos matemáticos ainda desconhecidos, ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

Portanto, Biembengut e Hein (2003), generaliza a matemática e a realidade como dois conjuntos disjuntos, ou seja, sem nenhuma ligação entre eles e a modelagem matemática funciona como uma ponte para fazer essa interação.

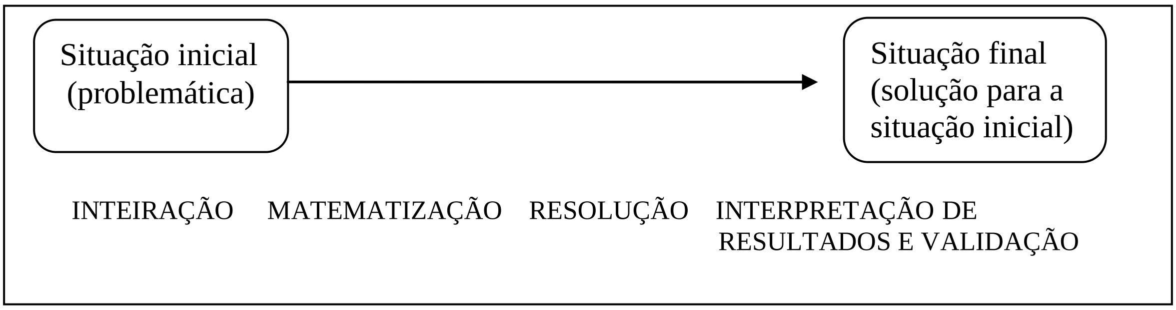
Figura 3.1 - Esquema do processo da Modelagem Matemática
Fonte: BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.13



Outro aspecto relevante para a aprendizagem em matemática e que pode motivar os estudantes diz respeito à incorporação do uso do computador nas aulas. Atividades de Modelagem Matemática são requerentes, por excelência, dessa incorporação (Almeida, Silva e Vertuan, 2012). No entanto, há de se considerar que o uso desse recurso tecnológico não garante a aprendizagem e, na verdade, "está longe de ser suficiente para garantir transformações qualitativas na prática pedagógica" (PAIS *apud* ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012).

Numa atividade de Modelagem Matemática existem algumas fases relativas aos procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema dentre os quais se destacam: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012).

Figura 3.2 - Fases da Modelagem Matemática
Fonte: ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15



3.2.1 Inteiração

A respeito de uma atividade de Modelagem Matemática, essa etapa representa um reconhecimento da situação-problema que se pretende estudar, com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. Implica, portanto, cercar-se de informações sobre a situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativos. É ainda nessa etapa que formulamos o problema e definimos metas para sua resolução.

3.2.2 Matematização

Esta é uma etapa complexa e desafiadora, pois identificada e estruturada a situação-problema na fase anterior, o objetivo agora é traduzir ou transformar da linguagem natural para a linguagem matemática. É necessário alguns elementos para esta fase como intuição, criatividade e experiência acumulada.

3.2.3 Resolução

Esta fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

3.2.4 Interpretação de Resultados e Validação

A interpretação dos resultados indicados pelo modelo significa encontrar uma resposta para o problema. Analisar a solução do problema constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e que implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação.

Para os autores Bassanezi e Biembengut (1995), devemos seguir algumas etapas para a introdução do trabalho com Modelagem:

1. escolher um tema central para ser desenvolvido pelos alunos;
2. recolher dados gerais e quantitativos que ajudem na elaboração de hipóteses;
3. elaborar problemas conforme interesse dos grupos;
4. selecionar as variáveis envolvidas nos problemas e formular as hipóteses;
5. sistematizar os conceitos que serão utilizados para resolução dos modelos

que fazem parte do conteúdo programático;

6. interpretar a solução (analítica e, se possível, graficamente);

7. validar os modelos.

Capítulo 4

Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas tem sido uma temática de muita discussão e análise nas últimas duas décadas. Seja por professores e educadores, ou ainda, pesquisadores e elaboradores de currículos (SMOLE e DINIZ, 2001, p. 87).

A autora Diniz (2001, p. 87), reflete sobre a Resolução de Problemas:

> uma perspectiva metodológica a serviço do ensino e aprendizagem de matemática amplia a visão puramente metodológica e derruba a questão da grande dificuldade que alunos e professores enfrentam quando se propõe a Resolução de Problemas nas aulas de matemática. A utilização de recursos da comunicação pode resolver ou fazer com que não existam essas dificuldades.

Como foco de nossa pesquisa é a aplicação da programação linear no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos do ensino médio, ou seja, mostrar aos alunos por meio desta técnica de otimização a utilização de determinados conteúdos em situações reais. Nesse sentido, utilizaremos a metodologia Resolução de Problemas que vem ao encontro das necessidades de tornar a Matemática Aplicada mais significativa ao contexto do aluno.

4.1 Objetivos da Resolução de Problemas

Segundo Dante (2000), a resolução de problemas apresenta os seguintes objetivos:

- Fazer o aluno pensar produtivamente.
- Desenvolver o raciocínio do aluno.
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática.
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas.
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

4.2 Fases da Resolução de Problemas

No livro A Arte de Resolver Problemas o autor Polya (1995) para agrupar convenientemente as indagações e sugestões divide em quatro fases o processo de resolução de problemas.

1ª fase: Compreensão do problema

Primeiramente o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido. É importante fazer perguntas. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? Elas são suficientes ou não para determinar à incógnita? Construir figuras para esquematizar a situação proposta no exercício pode ser muito útil, sobretudo introduzindo-se notação adequada. Sempre que possível, procurar separar as condições em partes.

2ª fase: Estabelecimento de um plano

Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso.

Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares caso uma conexão não seja encontrada em tempo razoável. É importante fazer algumas perguntas:

- Você já encontrou este problema ou um parecido?
- Você conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar?

Olhe para a incógnita e tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante. Caso você encontre um problema relacionado ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo. Você pode usar seu resultado ou método? É necessário introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos?

Não se esqueça de levar em conta todos os dados e todas as condições.

3ª fase: Execução do plano

Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. No entanto, a execução do plano é fácil e a paciência é a virtude que mais se precisa para essa etapa do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular esta etapa prematuramente e acabam se dando mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução (e, deste modo, acabam sendo obrigados a voltar para a etapa anterior e elaborar uma nova estratégia).

O principal é que o estudante fique honestamente convicto da correção de cada passo. Em certos casos, pode o professor realçar a diferente entre “perceber” e “demonstrar”. É possível perceber claramente que o passo está certo? Mas pode também demonstrar que o passo está certo?

4ª fase: Retrospecto

Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas.

Capítulo 5

Metodologia

5.1 Tipo de Pesquisa

A investigação recorre a uma metodologia qualitativa. André e Lüdke (1986) nos afirmam que pesquisadores da área de educação vêm mostrando que o uso das metodologias qualitativas tem tido uma crescente, apesar de ainda existir muitas indagações do que caracteriza uma pesquisa qualitativa, quando utilizá-la e, além disso, de que forma é tratado o rigor científico nesse tipo de investigação.

Para Triviños (1987, p.120) é complicado definir a pesquisa qualitativa. Ele menciona que existem duas dificuldades para defini-la, a primeira delas diz respeito "à abrangência do conceito, à especificidade de sua ação, aos limites deste campo de investigação". Enquanto que a segunda dificuldade "surge na busca de uma concepção precisa da ideia de pesquisa qualitativa, é muito mais complexa e emerge dos suportes teóricos fundamentais que a alimentam".

Pensando na pesquisa qualitativa de tipo fenomenológico, Bogdan e Biklen (*apud* TRIVIÑOS, 1987, p.127, 128) destacam cinco características fundamentais a essa classe de atividade inquisitiva.

1. A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento-chave.

2. A pesquisa qualitativa é descritiva.

3. Os pesquisadores qualitativos estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados e o produto.

4. Os pesquisadores qualitativos tendem a analisar seus dados indutivamente.

5. O significado é a preocupação essencial na abordagem qualitativa.

Neste trabalho, justificamos a opção pela pesquisa qualitativa porque percebemos que ela possui um ambiente natural como fonte primária das informações, na qual o pesquisador atua como instrumento-chave; ela é descritiva; os pesquisadores qualitativos estão engajados com o desenvolvimento do processo e não só com o resultado final. Sendo assim, ela é adequada ao estudo desta pesquisa, pois podemos ouvir o que as pessoas têm a nos dizer, explorando suas ideias, dúvidas e preocupações sobre o assunto. Dessa forma, podendo interpretá-los em termos do seu significado e nortear um melhor caminho a ser seguido. Destas características mencionadas acima, a de número quatro não se adapta a essa pesquisa, pois não serão analisados os dados de forma indutiva.

Segundo Gil (2006) alguns modelos alternativos de pesquisa vêm sendo propostos, dentre esses modelos destaca-se a pesquisa-ação, que pela definição de Thiollent (*apud* GIL, 2006, p.46):

> É um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos do modo cooperativo ou participativo.

Para Fiorentini, Garnica e Bicudo (2004, p.69) a pesquisa-ação, “é um processo investigativo de intervenção em que caminham juntas a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa”.

Justificamos que este trabalho apresenta características da pesquisa-ação porque o pesquisador era também o professor da turma investigada. O que implica dizer que ele não só observava e compreendia o que acontecia naquele contexto, mas principalmente porque refletia sobre o que ocorria na prática, permitindo melhorias nessas práticas. Ressaltamos que o tempo investido nessa pesquisa foi pequeno para o que propõe a pesquisa-ação, por isso alegamos que este trabalho apresentou características da pesquisa-ação.

Entretanto, por ser algo tão particular específico da turma investigada, caracterizamos este trabalho também como um estudo de caso, que conforme Gil (1999, p.72) caracteriza-se pelo estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, a fim de permitir o seu conhecimento amplo e detalhado.

Fiorentini e Lorenzato (2006, p.110), diz que:

> O estudo de caso busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização.

5.2 Local e Participantes da Pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida no Colégio Cidade Fria (nome fictício) da rede federal de ensino, na cidade de Vitória da Conquista-Ba, que foi escolhido devido ser o local de trabalho do professor-pesquisador.

Foi sujeito desta pesquisa, o professor-pesquisador, que segundo Pesquita (2015) é na interação entre observador e observado que emerge o conhecimento que pretendemos alcançar. Iremos optar por desempenhar simultaneamente dois papéis: o de investigador e o de professor.

Além disso, também são sujeitos um grupo de 08 alunos da turma do 1º ano de Informática do turno matutino desta escola. A escolha dos alunos para participação do minicurso foi por meio de um convite numa aula do professor-pesquisador, essa composição dos participantes se deu de forma aleatória, no entanto, foram impostos alguns critérios de permanência no minicurso que foram: assiduidade, disciplina e cumprimento das atividades propostas. Destacamos ainda que a identidade dos alunos foi preservada por se tratar de jovens com menor idade. Por meio de um documento solicitamos para cada aluno uma autorização dos pais para participar da pesquisa.

Capítulo 6

Análise dos Dados

6.1 Instrumentos e Procedimentos de Coleta de Dados

Os procedimentos de trabalho para o desenvolvimento da pesquisa foram apresentados como um recorte de um estudo de caso. Apresentamos neste tópico os dados coletados referentes à descrição do minicurso apresentado a um grupo de 8 alunos da turma do 1º ano de Informática.

No primeiro encontro iniciamos fazendo uma revisão dos conteúdos que serão necessários para o desenvolvimento das atividades propostas. Durante uma hora e trinta minutos trabalhamos com os seguintes conteúdos: equações e inequações lineares, função do primeiro grau, equação geral e reduzida da reta, resolução de sistemas de equações de duas variáveis, regiões no plano determinadas por desigualdades, famílias de retas, gráficos de funções. Por se tratar de uma turma de 1º ano de ensino médio, todos os conteúdos revisados foram trabalhados no presente ano letivo.

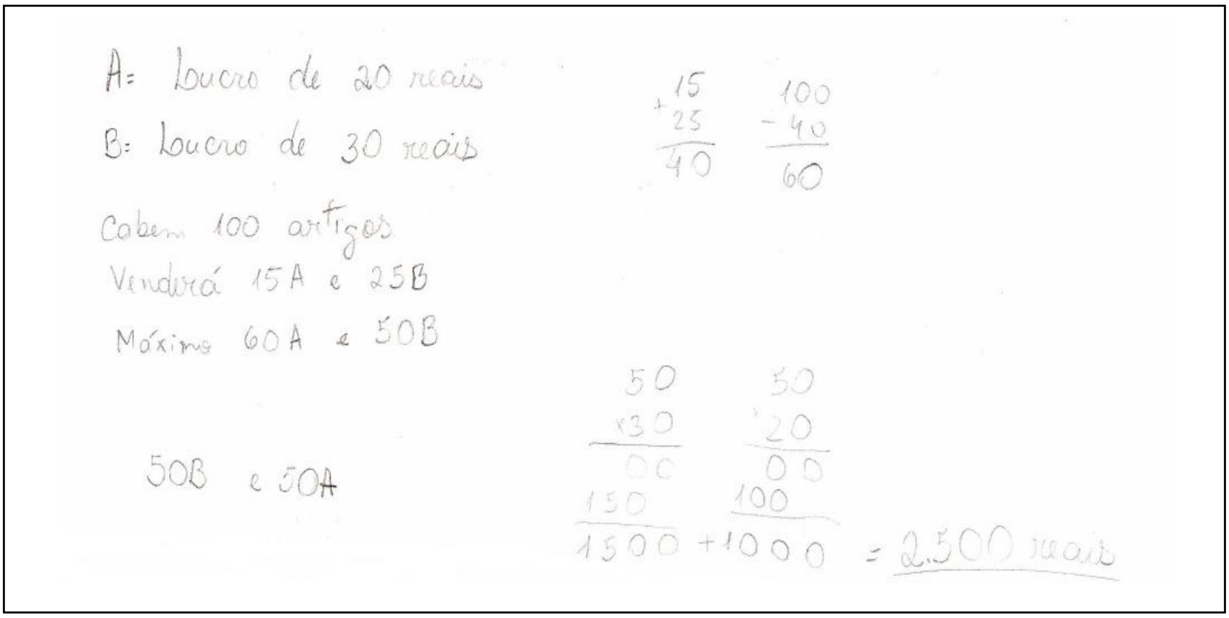
Na fase seguinte das aulas iniciamos propondo um problema de PL de fácil entendimento e que de certa forma despertem a atenção dos alunos. Esse problema é passível de resolução através do método de tentativa e erro, os alunos discutiram o problema livremente em um primeiro momento e apresentaram suas respostas individualmente.

Segundo Dante (2006), propomos o Problema de economia.

Um comerciante vende dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo A, tem um lucro de R$ 20,00 por unidade e na venda do artigo B, um lucro de R$ 30,00. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos, ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 artigos do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que os vendam todos, obtenha o lucro máximo?

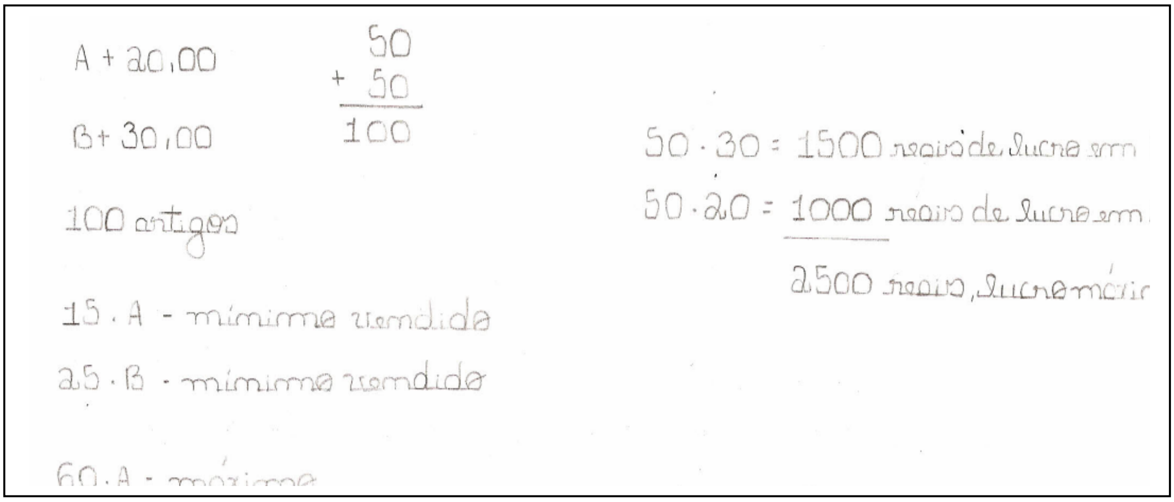
Apresentamos algumas soluções feitas pelos alunos: Aninha, Pedrinho, Carolzinha e Joãozinho. Todos os nomes dos alunos são fictícios para resguardar a identidade dos mesmos.

Figura 6.1 - Solução de Aninha



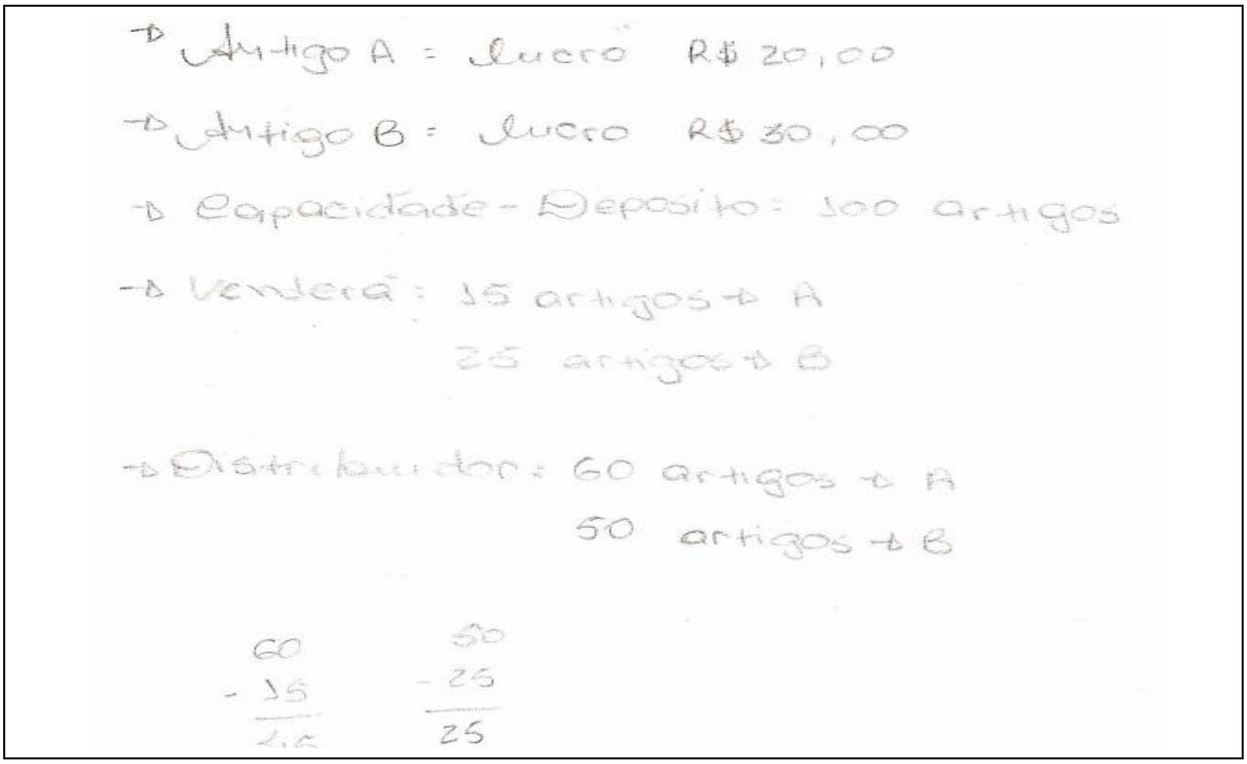
Podemos perceber que a aluna consegue interpretar os dados do problema, e consegue obter a solução exata do problema, no entanto, sua resolução é feita por tentativa e erro. A aluna não utiliza de conceitos como inequações e equações lineares, conteúdos trabalhados em classe.

Figura 6.2 - Solução de Pedrinho



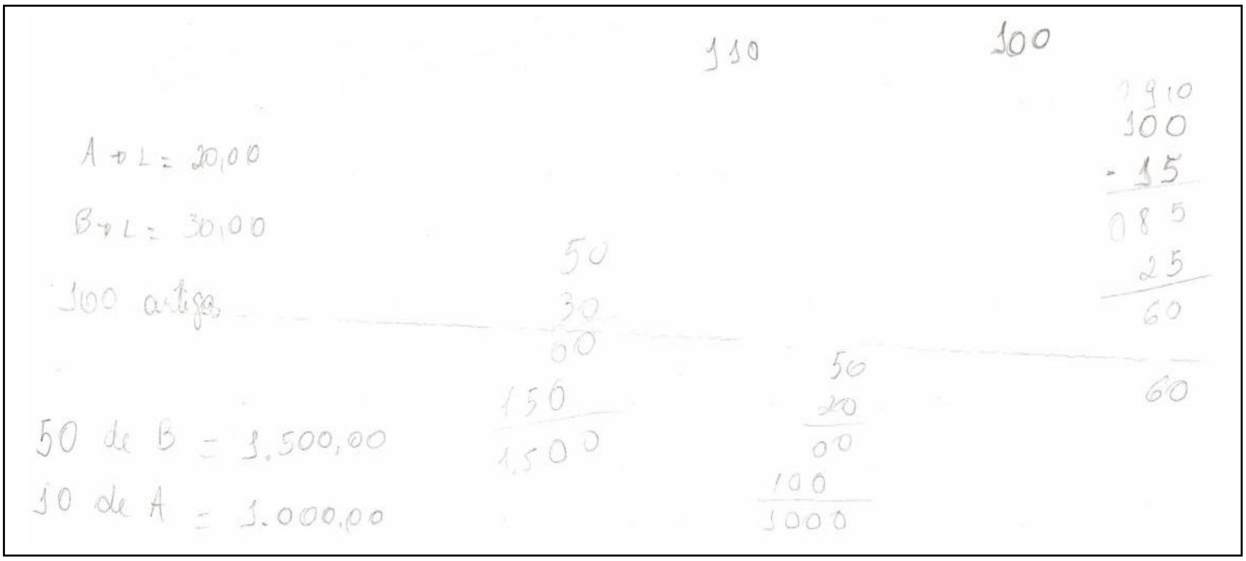
Notamos que o aluno consegue interpretar e modelar os dados do problema, e também consegue obter a solução exata do problema, no entanto, sua resolução é feita por tentativa e erro.

Figura 6.3 - Solução de Carolzinha



Notamos que apesar do aluno conseguir identificar os dados do problema, não prossegue o seu raciocínio e a sua atividade fica sem apresentar solução.

Figura 6.4 - Solução de Joãozinho



Notamos que o aluno não consegue interpretar e modelar os dados do problema, ele apresenta alguns cálculos, mas não consegue prosseguir o seu raciocínio.

Após apresentarem as atividades, questionamos a forma que eles responderam, perguntando por que eles não associaram a atividade aos conteúdos revisados. Ouvimos de alguns deles os seguintes relatos: como utilizar a ideia de função naquele problema ou mesmo, como montar um gráfico com aqueles dados. Encerramos aquele bate-papo dizendo que no próximo encontro iniciaríamos o nosso minicurso sobre Programação Linear.

No segundo encontro, iniciamos a apresentação do minicurso Introdução à Programação Linear: Uma proposta para alunos do Ensino Médio, por meio de um recurso tecnológico, o data show, durante 50 minutos fizemos uma explanação do que é a Programação Linear, o surgimento, alguns aspectos históricos, o que é resolver um problema de programação linear (PPL), passos para resolver um (PPL), análise dos resultados encontrados nos Problemas de Programação Linear (PPL), o software Winplot e suas aplicações.

Em seguida, apresentamos o software Winplot para turma e destacamos suas funções. O Winplot é um programa de fácil manuseio, os alunos aprenderam com muita rapidez o que facilitou a aprendizagem. Começamos com uma atividade de representação gráfica que veremos a seguir.

6.2 Exercitando a Representação Gráfica com auxílio do Winplot

Na atividade abaixo, exercitaremos com o auxílio do software Winplot apenas a representação gráfica dos sistemas já “montados” e o cálculo dos valores da função objetivo pré-estabelecida.

<u>Atividade Resolvida</u>

Desenhe o gráfico do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

E encontre o valor máximo da seguinte função objetivo: $z = 4x + y$.

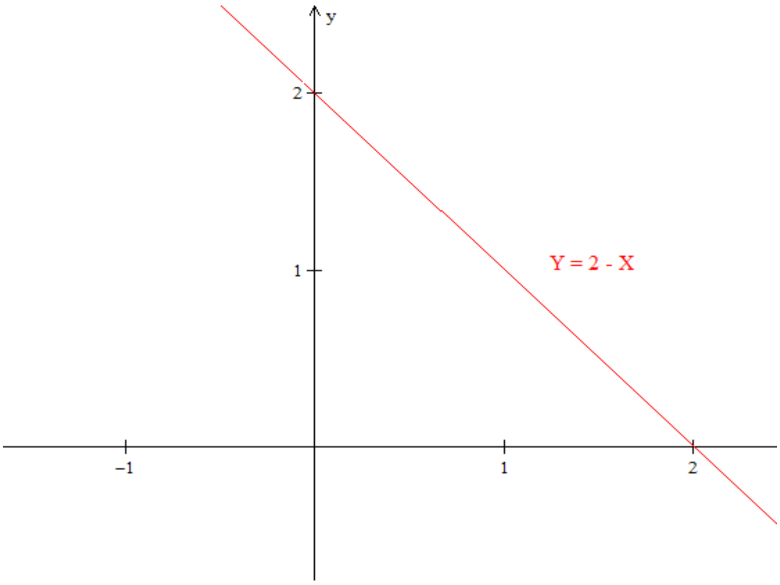
Solução:

Para desenhar o gráfico da região, vamos inicialmente considerar cada inequação como uma equação linear:

$$x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x$$

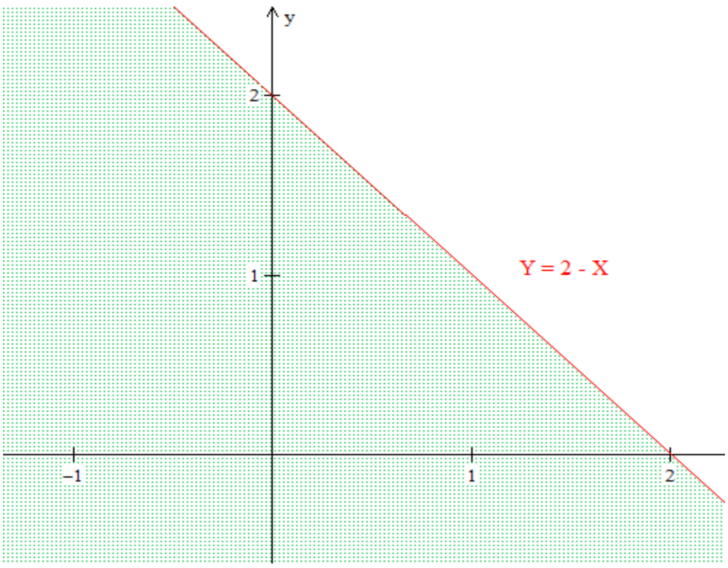
Na Figura 6.5, apresentamos a reta $y = 2 - x$.

Figura 6.5 - Reta $y = 2 - x$



A inequação $x + y \leq 2$ é equivalente a $y \leq 2 - x$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte inferior à reta $y = 2 - x$.

Figura 6.6 - Semiplano $y \leq 2 - x$

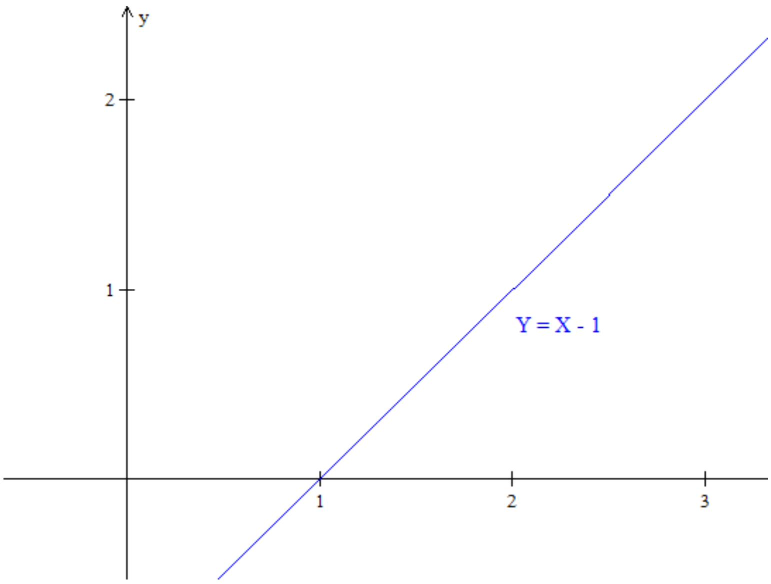


Agora, fazermos o mesmo com a próxima inequação:

$$x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$$

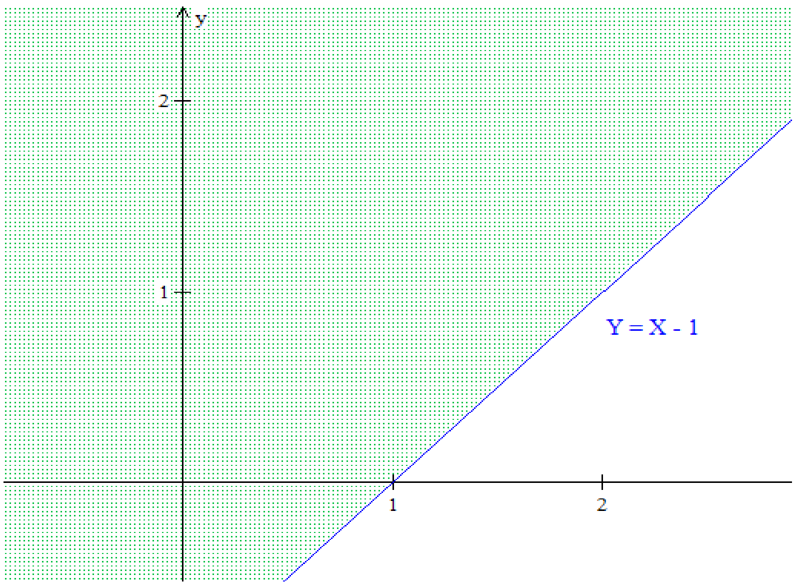
Desenhamos a reta $y = x - 1$.

Figura 6.7 - Reta $y = x - 1$



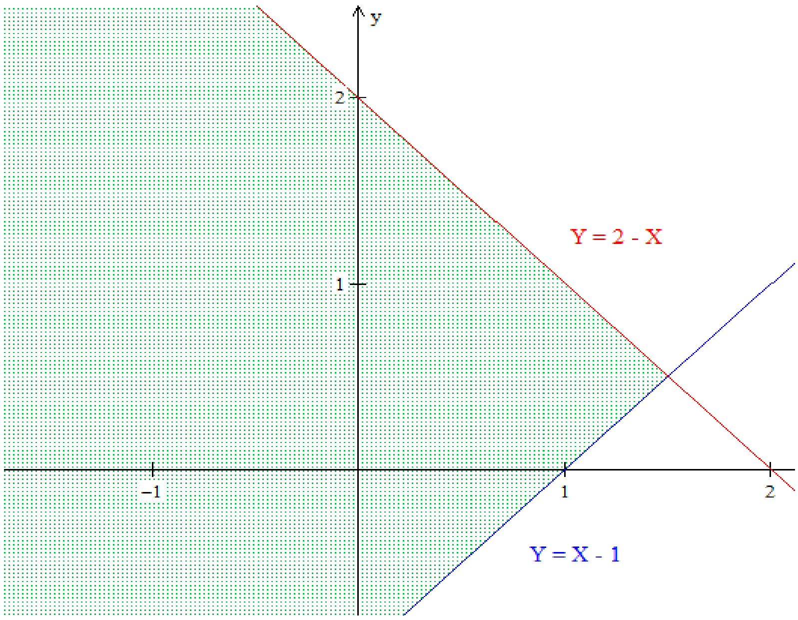
A inequação $x - y \leq 1$ é equivalente a $y \geq x - 1$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte superior à reta $y = x - 1$.

Figura 6.8 - Semiplano $y \geq x - 1$



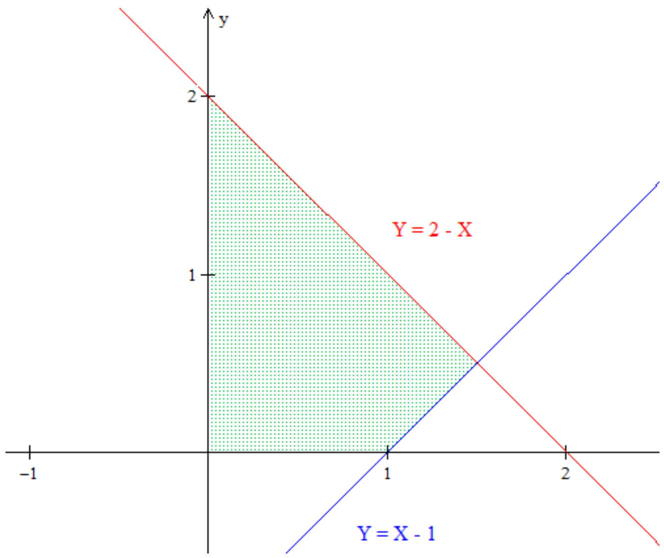
Combinando (intersecção) as duas regiões, obtemos o seguinte gráfico:

Figura 6.9 - Semiplanos $y \geq x - 1$ e $y \leq 2 - x$



Lembre-se que ainda temos duas outras inequações: $y \geq 0\ e\ x \geq 0$, ou seja, todos os pontos da região procurada tem coordenadas positivas:

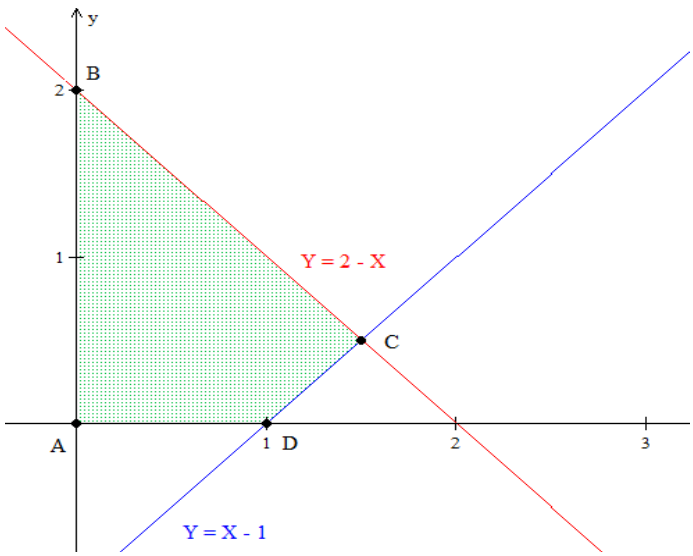
Figura 6.10 - Região viável



A primeira parte do exercício está completa. Vamos, então, determinar o valor máximo da função objetivo.

Inicialmente, temos que determinar quais são os pontos de vértice da região acima:

Figura 6.11 - Pontos extremos da Região viável



Para encontrarmos as coordenadas do ponto C, igualamos as retas

$$y = 2 - x \;\; e \;\; y = x - 1$$
$$2 - x = x - 1$$
$$x = \frac{3}{2}$$

Substituindo o valor de x numa das equações, encontramos o valor de y:

$$y = 2 - \frac{3}{2}$$
$$2y = 4 - 3$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Verificamos os valores da função objetivo em cada um dos pontos da região viável conforme tabela abaixo:

Tabela 6.1 - Pontos extremos da Região viável e Função objetivo

	Valores relacionados à variável X	Valores relacionados à variável Y	Função objetivo
Par Ordenado	X	Y	$Z = 4x + y$
A (0,0)	0	0	0
B (0,2)	0	2	2
C $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
D (1,0)	1	0	4

Assim, dentre os pontos extremos da região convexa o ponto C é onde a função objetivo alcança o seu valor máximo. Logo, afirmamos que o máximo da função objetivo é 6,5. Entretanto, houve dúvidas e comentários dos alunos a partir dessa resposta, eles questionaram que apesar de não terem feito o gráfico da região viável eles encontraram a mesma solução ótima, da maneira deles é claro, ou seja, tentativa e erro.

Realmente podemos notar que apesar de restringirmos o conjunto solução para uma região limitada, a solução encontrada para o problema foi feita pelo método de tentativa e erro, conforme feita por alguns alunos, pois testamos alguns pontos desta região na função objetivo. Então era necessário apresentar evidências para corroborar que o ponto C era de fato o ponto ótimo.

Para o terceiro encontro apresentamos o Teorema da Programação Linear que garante que a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo em pontos extremos da região viável. Para nossos estudos não iremos apresentar a demonstração do Teorema, pois não faz parte dos nossos objetivos.

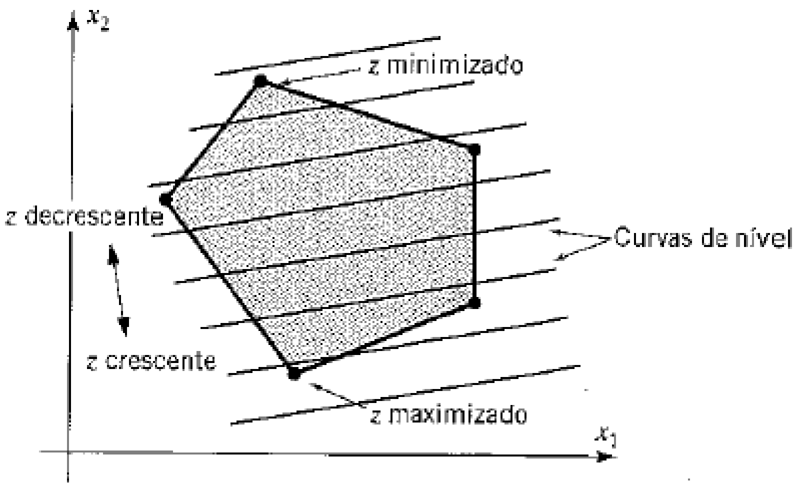
6.3 Teorema da Programação Linear

O Teorema (Valores Máximos e Mínimos) segundo Anton e Rorres (2001, p.373) é definido:

> Se a região viável de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.

Segundo Anton e Rorres (2001) a Figura 6.12 sugere a ideia por trás da prova do teorema. Como a função objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ de um problema de programação linear é uma função linear de x_1 e de x_2, suas curvas de nível (as curvas ao longo das quais z tem valor constante) são retas. À medida que nos deslocamos perpendicularmente a estas retas, a função objetivo ou cresce ou decresce monotonamente. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de z devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos, como indica a Figura 6.12.

Figura 6.12 - Ideia do Teorema (Valores Máximos e Mínimos)
Fonte: ANTON; RORRES, 2001, p.373



Depois que os alunos aprenderam como representar uma região gráfica de acordo ao sistema de inequações lineares (restrições) e interpretar a solução do problema de acordo à função objetivo, apresentamos a solução do problema da economia proposto no início do minicurso utilizando a Programação Linear.

Solução do Problema da Economia:

Identificando as Variáveis

x = Quantidade de artigos do Tipo A

y = Quantidade de artigos do Tipo B

Estabelecendo a Função Objetivo

Temos que para cada artigo do tipo A temos um lucro de R$ 20,00 e para cada artigo do tipo B um lucro de R$ 30,00. Como no problema diz que o comerciante deve obter o lucro máximo, ou seja, refere-se ao lucro, devemos montar a função que representa o lucro total obtido, que chamaremos de L.

Concluímos que a Função Objetivo é:

$$\mathrm{L} = 20x + 30y$$

Identificando as restrições e escrevendo as inequações lineares

Como o exemplo afirma que no deposito só cabem 100 artigos, então nossa primeira restrição é: a quantidade de artigo do tipo A somada com a de B deve ser menor ou igual a 100. Transformando esta restrição para inequação temos:

$$x + y \leq 100$$

Como o comerciante deve vender pelo menos 15 artigos do tipo A, temos que $x \geq 15$. E pelo menos 25 artigos do tipo B, temos que $y \geq 25$.

O distribuidor entregará no máximo 60 artigos do tipo A e 50 do tipo B. Daí, temos que, $x \leq 60$ e $y \leq 50$. Por se tratar de quantidade de artigos, ou seja, objetos as variáveis que representam a quantidade dos artigos tipo A e B são $x, y \geq 0$.

Traçando o gráfico

Para construção do gráfico devemos reescrever todas as restrições obtidas e montar um sistema de inequações lineares. Analisando a região que cada inequação representa no gráfico e achando a região convexa, através da intersecção das regiões representadas por essas inequações.

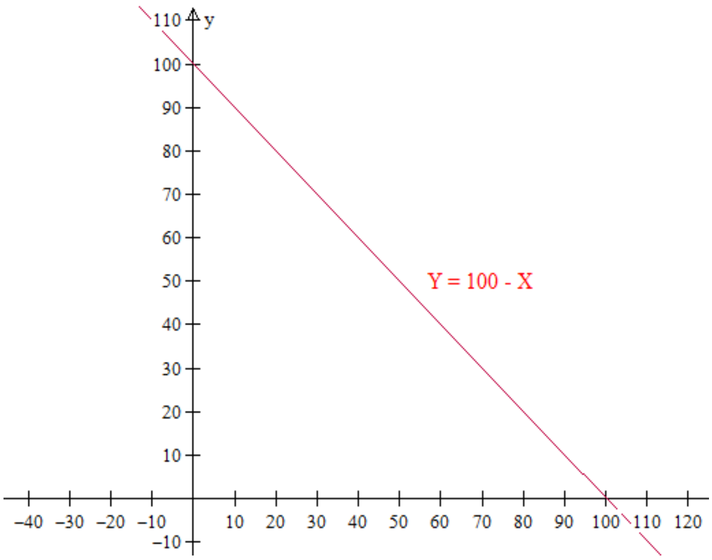
O sistema obtido será $\begin{cases} x + y \leq 100 \\ y \geq 25 \\ x \geq 15 \\ x \leq 60 \\ y \leq 50 \end{cases}$, após analisar graficamente cada inequação como veremos abaixo, obteremos a região convexa viável:

Para desenhar o gráfico da região, vamos inicialmente cada inequação como uma equação linear:

$$x + y = 100 \ \rightarrow \ y = 100 - x$$

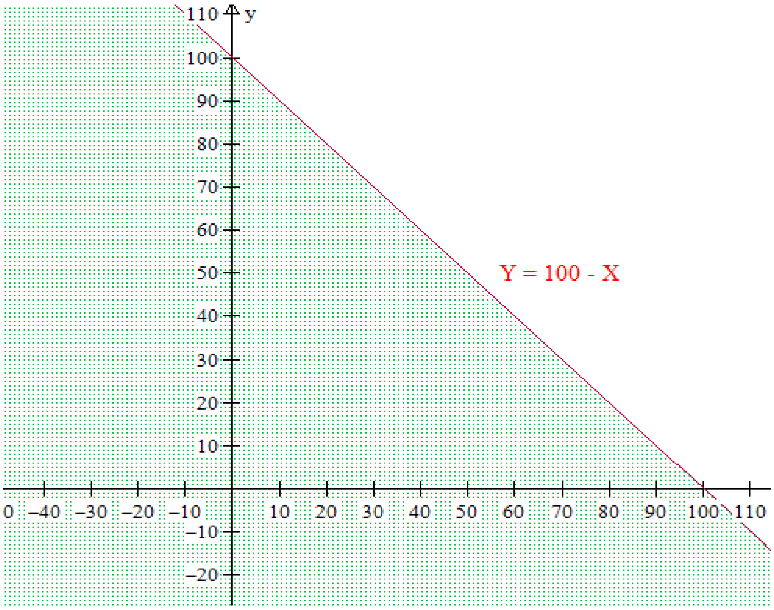
Desenhamos a reta $y = 100 -$ x.

Figura 6.13 - Reta $y = 100 - x$



A inequação $x + y \leq 100$ é equivalente a $y \leq 100 - x$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte inferior à reta $y = 100 - x$.

Figura 6.14 - Semiplano $y \leq 100 - x$

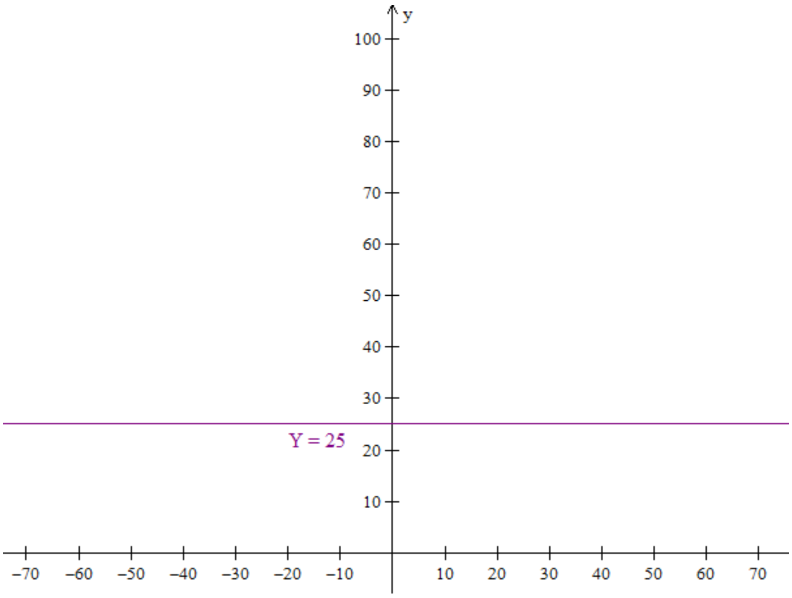


Agora, fazemos o mesmo com a próxima inequação:

$$y \geq 25 \ \rightarrow y = 25$$

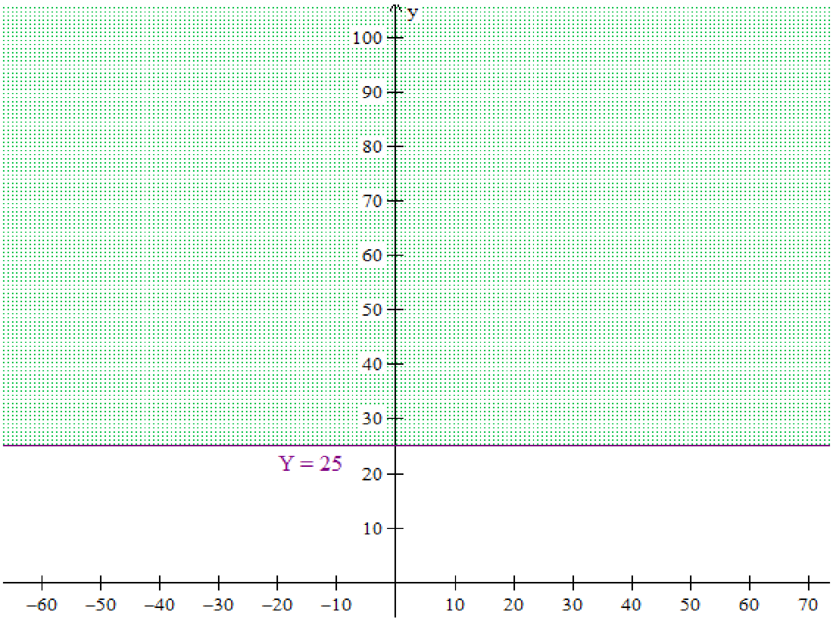
Desenhamos a reta $y = 25$.

Figura 6.15 - Reta $y = 25$



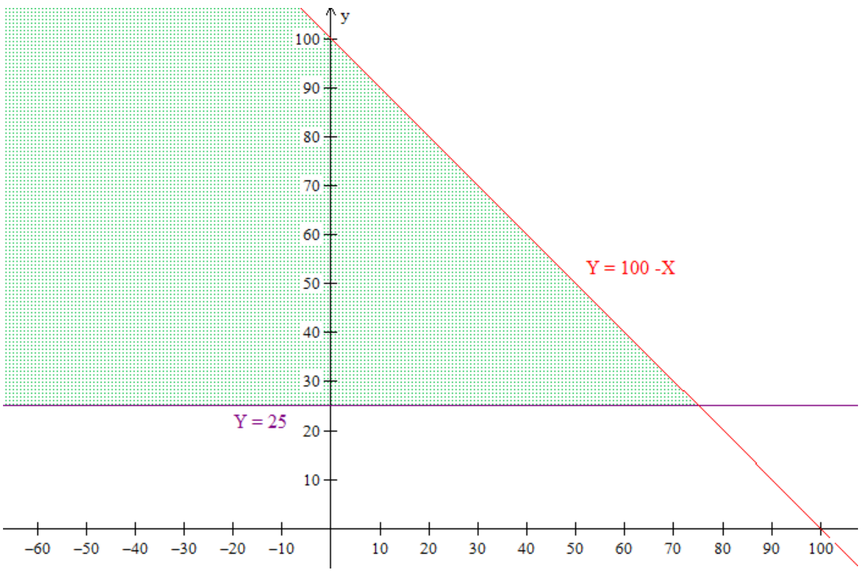
Os pontos que obedecem a inequação $y \geq 25$ estão na parte superior da reta $y = 25$.

Figura 6.16 - Semiplano $y \geq 25$



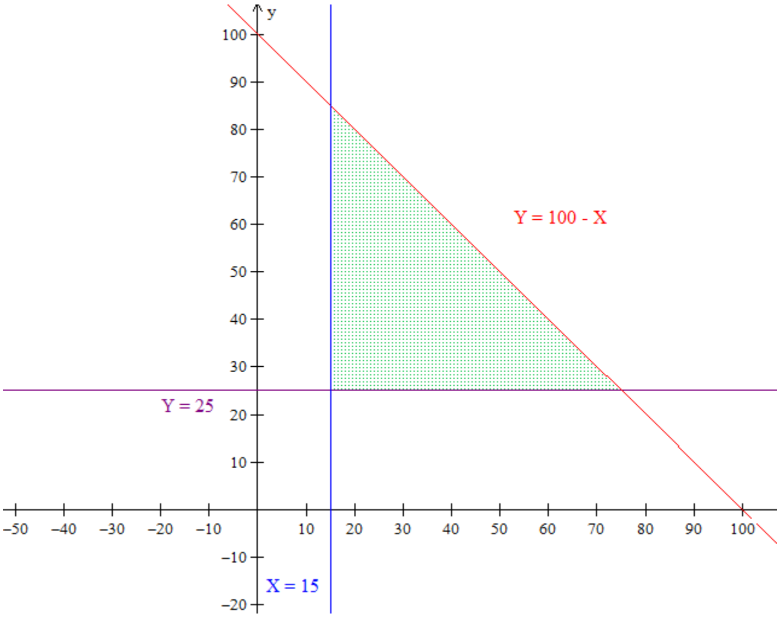
Combinando (intersecção) as duas regiões, obtemos o seguinte gráfico:

Figura 6.17 - Semiplanos $y \leq 100 - x$ e $y \geq 25$



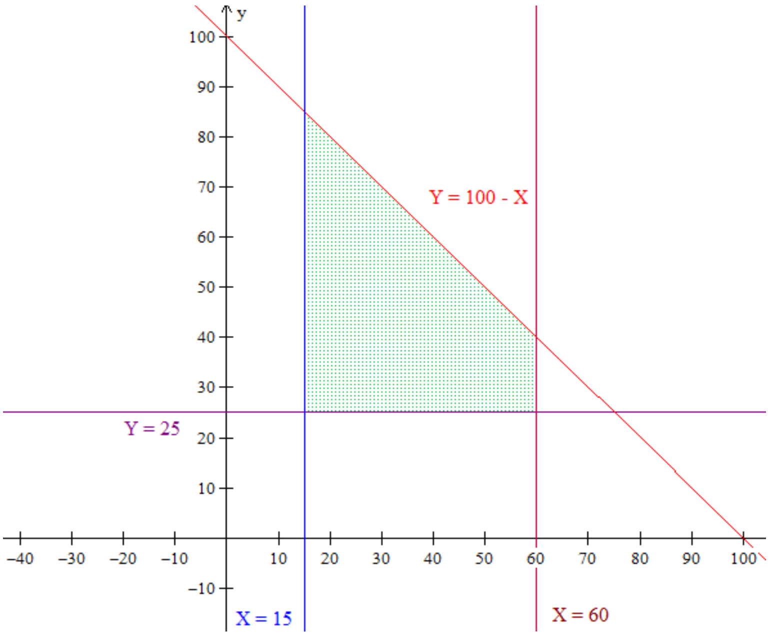
Na sequência escrevemos a inequação $x \geq 15$, os pontos que obedecem esta inequação estão situados à direita da reta $x = 15$.

Figura 6.18 - Semiplanos $y \leq 100 - x$, $y \geq 25$ e $x \geq 15$



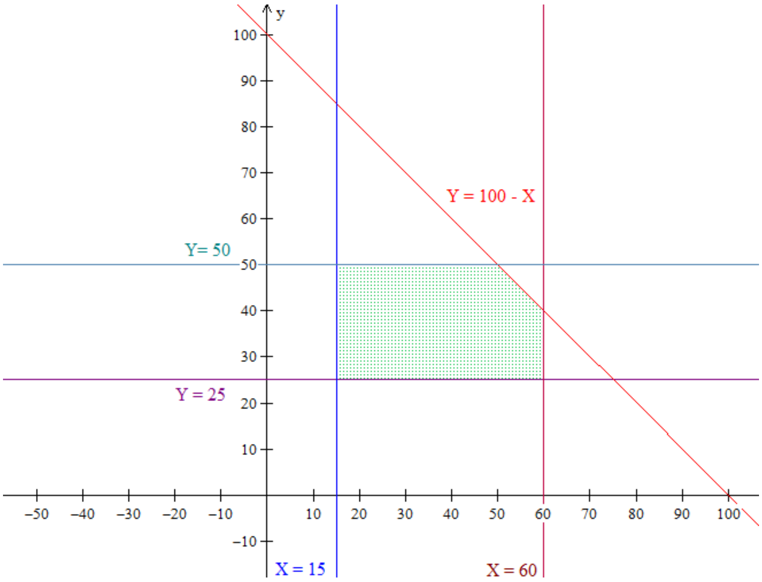
Em seguida escrevemos a inequação $x \leq 60$, os pontos que obedecem esta inequação estão situados à esquerda da reta $x = 60$.

Figura 6.19 - Semiplanos $y \leq 100 - x$, $y \geq 25$, $x \geq 15$ e $x \leq 60$



Por fim, escrevemos a inequação $y \leq 50$, os pontos que obedecem esta inequação estão situados abaixo da reta $y = 50$.

Figura 6.20 - Região convexa viável do Problema da Economia

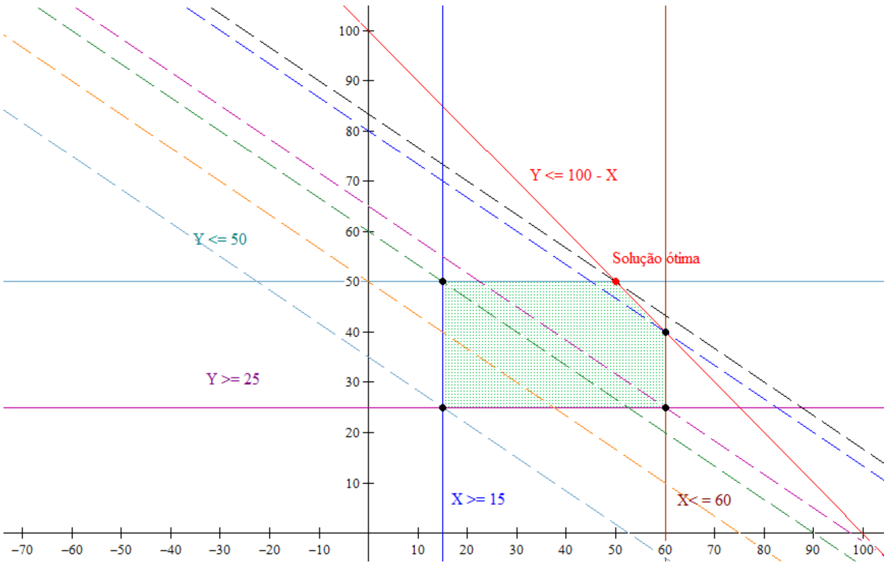


Calculando os valores da função objetivo

Identificada à região convexa, nosso próximo passo deverá ser determinar os pontos extremos da região e atribuir valores à função-objetivo $L = 20x + 30y$, por exemplo, L = L_0, e verificar se a reta, chamada curva de nível intercepta a região convexa. Vejamos que, se $L_0 \geq 0$, $L_0 \in R$, qualquer ponto da reta $L_0 = 20x + 30y$ que intercepta a região convexa, satisfaz as restrições e tem lucro $L = L_0$.

A Figura 6.21 apresenta os pontos extremos e algumas curvas de nível (retas tracejadas) para Lucro $L = 1050;\ 1500;\ 1800$; 1950; 2400; 2500.

Figura 6.21 - Pontos extremos da Região viável e curvas de nível



Esse conjunto de retas paralelas, que obtemos ao substituir L_0 por valores na função objetivo, nos indica, intuitivamente, que o máximo ocorre em um ponto extremo ou em um segmento de reta da região viável.

Determinado as curvas de nível e os pontos extremos apresentamos a Tabela 6.2 e seus respectivos lucros aplicados na função objetivo.

Tabela 6.2 - Vértices da Região viável e Função objetivo Problema Economia

	Quantidade de artigo do Tipo A	Quantidade de artigo do Tipo B	Lucro (máximo)
Pontos da região	X	Y	$L = 20x + 30y$
A (15,25)	15	25	1050
B (15,50)	15	50	1800
C (50,50)	50	50	2500
D (60,40)	60	40	2400
E (60,25)	60	25	1950

Portanto, podemos verificar na tabela 6.2 que a função objetivo obtém o seu valor máximo no ponto C e o seu lucro máximo nesse ponto é R$ 2500,00.

Após a apresentação da solução do problema de economia, aplicamos alguns exercícios propostos e pedimos para os alunos resolverem com o auxílio do software Winplot.

<u>Exercícios Propostos</u>

1. Monte o gráfico dos seguintes sistemas de inequações lineares:

a) $$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ x + y \geq -1 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

2. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função lucro $L = 10x + 15y$, sujeita às restrições abaixo:

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 20 \\ x + y \geq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 15 \end{cases}$

3. Determine o máximo da função objetivo $P = 2x + y$, sujeita as seguintes restrições:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases}$$

No quarto encontro, iniciamos apresentando os tipos de soluções que surge quando resolvemos um problema de programação linear (PPL), apresentamos uma definição segundo Prado (1999).

6.4 Tipos de Soluções de um PPL

Segundo Prado (1999), ao tentarmos solucionar um problema de PL, podemos ter várias situações possíveis, em termos dos tipos de solução encontrada.

1. Problema Solúvel
   - Única solução
   - Infinitas soluções
2. Problema mal definido
3. Problema não-solúvel

6.4.1 Problema Solúvel

- A solução provavelmente estará em um vértice, neste caso dizemos que o problema admite uma solução única.
- Eventualmente a solução poderá coincidir com um dos segmentos de reta de alguma restrição, em que qualquer ponto do segmento é solução ótima (nestes casos dizemos que o problema apresenta infinitas soluções).

As Figuras 6.22 e 6.23 representam gráficos de um problema solúvel, onde apresentam solução única e infinitas soluções, respectivamente.

Figura 6.22 - Região viável e solução ótima única

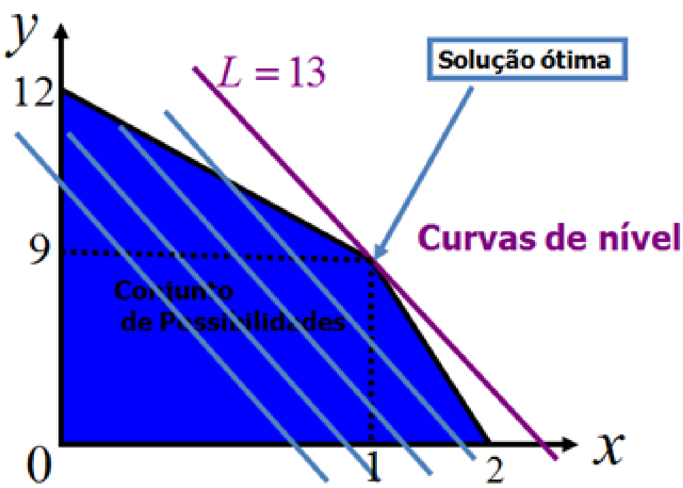
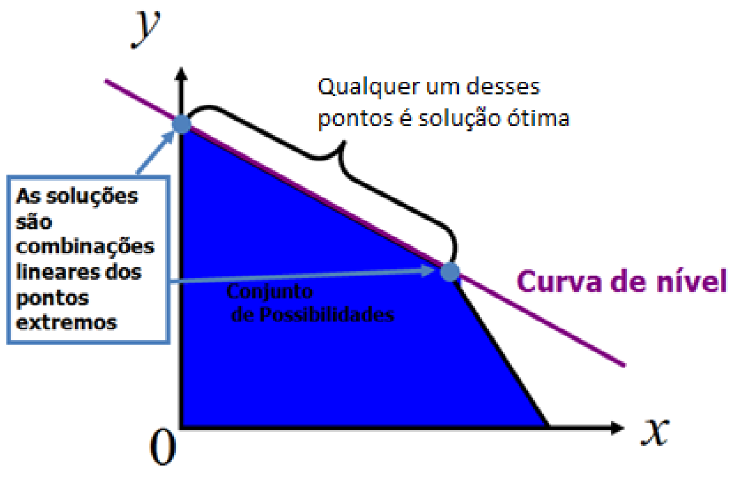


Figura 6.23 - Região viável e infinitas soluções ótima



6.4.2 Problema Mal Definido

Nesta categoria temos os modelos nos quais a função objetivo pode atingir valores infinitos ou zero, incompatível com o resultado desejado. Por exemplo:

- Um modelo de minimização em que solicitamos, por engano, uma maximização.
- Um modelo de maximização em que solicitamos, por engano, uma minimização.
- Um modelo de maximização em que as restrições não formam uma região convexa, ou seja, forma uma região "aberta".

Para esse tipo de problema o conjunto de possibilidades é vazio, não há solução compatível, a solução é ilimitada, não há como definir a decisão. As Figuras 6.24 e 6.25 ilustram esse tipo de solução.

Figura 6.24 - Região aberta (vazia)

Figura 6.25 - Região ilimitada

6.4.3 Problema Não-Solúvel

Um problema é dito não-solúvel quando o conjunto de restrições é contraditório em si mesmo, tal como no modelo abaixo:

$$a + b \leq 1$$

$$a + b \geq 2$$

Em modelos reais e de grande porte, descobrir a causa desta contradição pode ser uma tarefa bastante difícil.

Destas soluções apresentadas acima, a de número três não se adapta a essa pesquisa, pois não serão analisados problemas cujo conjunto de restrições apresenta contradições.

Após a explicação dos tipos de soluções de um PPL apresentamos o Problema da Indústria Laticínios que ilustra bem essas soluções. Nesse exemplo, pedimos aos alunos que resolvessem o problema em 30 minutos.

6.5 Problema da Indústria de Laticínios

Uma indústria de laticínios, Lactus, recebe matéria prima de duas fazendas, América e Rei do Gado e produz três produtos: leite desnatado (LD), iogurte (IO) e creme de leite (CL). Os leites têm diferentes composições químicas e fornecem diferentes quantidades de produtos por litro processado.

Cada litro de leite in natura da Fazenda América dá 30% de LD, 40% de IO e 20% de CL.

Para a Fazenda Rei do Gado estas quantidades são respectivamente: 40%, 20% e 30%. Há 10% de resíduos.

Os leites também diferem em custo e disponibilidade.

A Lactus pode comprar até 9.000 litros da Fazenda América a R$ 2,00 o litro e até 6.000 litros da Fazenda Rei do Gado a R$ 1,50 o litro.

Contratos da Lactus com distribuidores exigem que ela produza no mínimo 2.000 litros por dia de LD, 1.400 de IO e 500 de CL. Pergunta-se:

a) Como cumprir os contratos gastando o mínimo?
b) Suponha agora que a função objetivo seja Minimizar: $2x + y$?
c) Se as duas fazendas passassem a produzir apenas 2.000 litros de leite cada?

Solução letra a)

Identificando as Variáveis

$x =$ Quantidade litros de leite comprados da Fazenda América

$y =$ Quantidade litros de leite comprados da Fazenda Rei do Gado

Estabelecendo a Função Objetivo

Minimizar: $2x + 1{,}5y$

Identificando as restrições e escrevendo as inequações lineares

$x, y \geq 0$ (litros de leite não podem ser negativos)

$0{,}3\,x + 0{,}4\,y \geq 2.000$ (Leite Desnatado)

$0{,}4\,x + 0{,}2\,y \geq 1400$ (Iogurte)

$0{,}2x + 0{,}3y \geq 500$ (Creme de Leite)

$x \leq 9.000$ (América)

$y \leq 6.000$ (Rei do Gado)

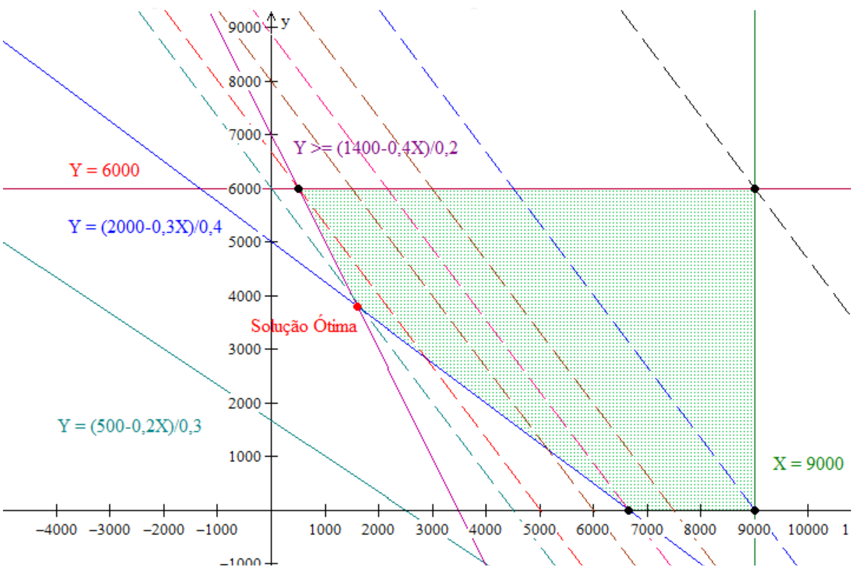
Abaixo quadro ilustrativo das restrições do problema da mistura:

Tabela 6.3 – Dados do Problema da Indústria de Laticínios

Fazendas	Leite in natura	Custo/Litro	Leite Desn (LD)	Iorgute (IO)	Creme Leite (CL)
América	9.000 L	R$ 2,00	0,3	0,4	0,2
Rei do Gado	6.000 L	R$ 1,50	0,4	0,2	0,3
Quant.Min. Contratadas			2.000 L	1.400 L	500 L

<u>Traçando o gráfico</u>

Figura 6.26 - Região viável do Problema da Indústria de Laticínios



Valor da Função Objetivo nos pontos extremos da Região:

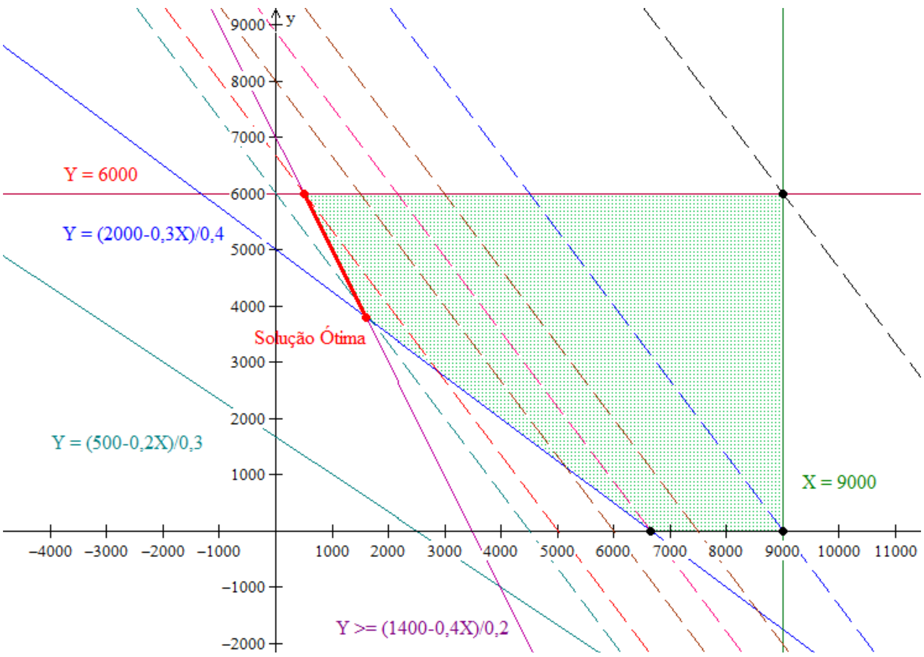
Tabela 6.4 - Pontos extremos da Região viável e Função objetivo

	Quantidade de L de leite América	Quantidade de L de leite Rei do Gado	Função objetivo Custo (mínimo)
Pontos da região	X	Y	$L = 2x + 1{,}5y$
(500,6000)	500	6000	10000
(1600,3800)	1600	3800	8900
(6666,0)	6667	0	13334
(9000,0)	9000	0	18000
(9000,6000)	9000	6000	27000

Solução letra b)

Após encontrar a solução fizemos algumas inferências e perguntamos caso o problema Lactus, a função objetivo fosse trocada para Minimizar: $2x + y$.

Figura 6.27 - Região viável e curvas de nível



Teríamos o mesmo gráfico, no entanto, a solução ótima seria um segmento de reta destacado em vermelho no gráfico da Figura 6.28, onde cada ponto desse segmento é também solução ótima.

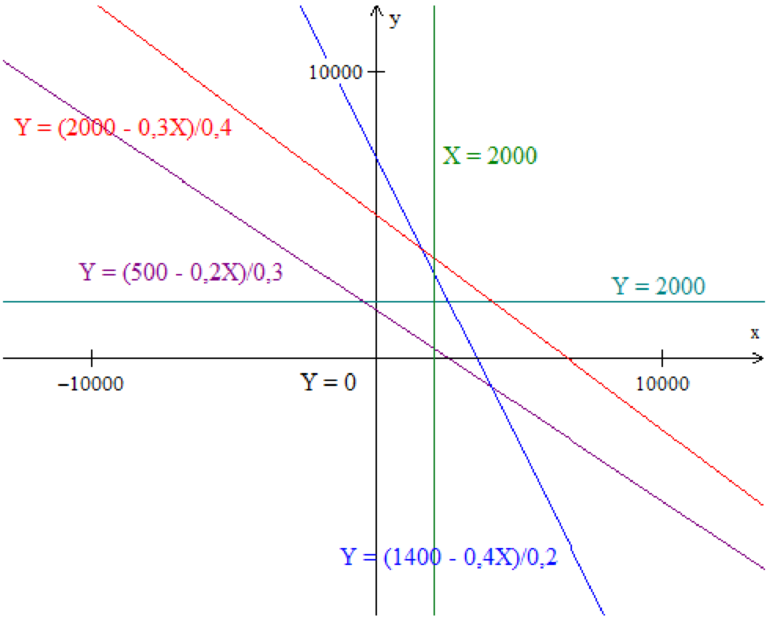
Tabela 6.5 - Pontos da Região viável e Função objetivo do Problema da Indústria

	Quantidade de L de leite América	Quantidade de L de leite Rei do Gado	Função objetivo Custo (mínimo)
Pontos da região	X	Y	$L = 2x + y$
(6667,0)	6667	0	13334
(500,6000)	500	6000	7000
(600,5800)	600	5800	7000
(700,5600)	700	5600	7000
(800,5400)	800	5400	7000
(1000,5000)	1000	5000	7000
(1400,4200)	1400	4200	7000
(9000,0)	9000	0	18000
(9000,6000)	9000	6000	24000

<u>Solução letra c)</u>

Com as restrições da produção de leite para 2000 litros para cada fazenda, o gráfico que representa essa situação está representado na Figura 6.29.

Figura 6.28 - Região viável vazia



Nesse caso não haveria como cumprir os contratos e o conjunto de soluções viáveis seria nulo.

Passado o tempo proposto para atividade, surgiram algumas dúvidas, a primeira foi identificar a função objetivo. Em seguida, questionaram como relacionar todas aquelas restrições a apenas duas variáveis, ainda disseram que esse problema é muito difícil comparado aos anteriores feitos em sala. Entendemos que os alunos tiveram dificuldades para modelar o problema, pois não conseguiram montar as restrições adequadas o que tornou inviável para a resolução. Então, dialogamos por um tempo que a dificuldade de resolver o problema era devido principalmente a falta de prática de questões e a interpretação do problema. A turma era formada por alunos muito inquietos e curiosos, então eles questionaram para ver a resolução e apresentamos a seguir o enunciado do problema e sua solução.

No quinto e último encontro propomos coletar todas as atividades feitas durante o minicurso e montar uma apostila didática como se fosse uma revista que resumisse todos os encontros e ofertar ao acervo da biblioteca do colégio para que fique como material de apoio didático. A apostila segue no anexo desta pesquisa. Por fim, resolvemos questionar aos alunos suas impressões gerais sobre este minicurso.

6.6 Impressões Gerais

Nesse tópico apresentamos alguns relatos dos alunos sobre a experiência de participar desse minicurso, bem como nossa avaliação geral dessa atividade. Para ouvir os discentes, fizemos três perguntas abertas onde questionamos:

1. Quais as dificuldades encontradas na resolução de problemas de programação linear?
2. Qual a importância do curso no processo de ensino e aprendizagem?
3. Qual sua impressão sobre o minicurso?

Abaixo transcrevemos na integra as respostas apresentadas pelos alunos Pedrinho, Aninha, Joãozinho e Carolzinha.

Carolzinha

1. No meu caso, só encontrei dificuldade na compreensão do problema. Exemplo: Quais são as variáveis e as restrições.
2. Acho que ele é de extrema importância para todos os alunos. Pois, além de ajudá-lo a compreender, resolver e encontrar o melhor resultado possível para os problemas que estão presentes em nosso meio, ele o estimula a desenvolver as suas capacidades cognitivas.
3. Adorei o curso! Pois aprendi um conteúdo novo de muita aplicação para o meu dia-a-dia.

Pedrinho

1. No começo a dificuldade maior era pintar a área, com a solução, mas o resto é simples depois que se aprende.
2. O minicurso foi de grande importância, pois aprendi sobre um assunto que não sabia e agora consigo responder questões desse nível.
3. Muito bom o curso, ver conteúdos básicos como equações, inequações e funções se transformarem em regiões convexas e delas encontrar soluções de problemas do nosso cotidiano.

Aninha

1. A dificuldade para resolver os problemas de programação linear foi, principalmente, encontrar as restrições da função, já que era necessária uma interpretação das questões.
2. O minicurso é importante para que possamos expandir nosso campo de conhecimento e é uma espécie de incentivo para a busca do aprimoramento do ensino e aprendizagem.
3. Gostei muito do curso, principalmente por ter sido um assunto interessante do qual eu não tinha conhecimento prévio.

Joãozinho

1. O assunto é bastante complexo quando tiramos as primeiras impressões, mas nada que impossibilite seu aprendizado. Minha maior dificuldade foi que, quando já possuímos a área pintada do gráfico, ainda existem números que não se encaixam na função, o que mais "atrapalha" é encontrar essas exceções.
2. O minicurso foi bastante proveitoso e nos mostrou que podemos resolver questões complexas do dia-a-dia de forma bastante simples.
3. O minicurso em si foi muito bom, porém se realizado com maior frequência e tempo seria mais esclarecedor.

Refletindo sobre as respostas dos discentes podemos notar que apesar de alguns alunos terem encontrado dificuldades no assunto e na resolução de alguns problemas, foi possível alcançar os objetivos pretendidos nesta atividade. Percebemos o enorme interesse dos alunos pelo minicurso, pois mesmo após o encerramento de cada encontro eles permaneciam no laboratório, questionando um problema, apresentando outras soluções e até novas ideias.

7 Considerações Finais

Na trajetória da presente pesquisa, em meio a inquietações e anseios, buscamos ao longo de um mês e uma semana, ou seja, 15 aulas, apresentar para uma turma de 08 alunos da 1ª série do ensino médio, do Colégio “Cidade Fria”, situado no município de Vitória da Conquista – Ba, uma proposta introdutória de ensino e aprendizagem do conteúdo Programação Linear.

Este estudo teve como foco principal a aplicação da Programação Linear para resolução de problemas reais do cotidiano. A pergunta norteadora da pesquisa foi: “Podemos apresentar uma proposta de ensino e aprendizagem através da programação linear em conteúdos do ensino médio?”. As respostas para este questionamento pode ser observado por meio dos instrumentos de coleta dos dados.

De nossas análises de dados, foi possível constatarmos por meio dos exercícios resolvidos e propostos em sala, que é conveniente ao iniciarmos o trabalho com Programação Linear utilizar problemas com apenas duas variáveis de decisão, pois isso facilita a sua representação gráfica. O método gráfico e as soluções geométricas mostraram muita eficiência para problemas de otimização com apenas duas variáveis. Além disso, uso do software Winplot serviu de grande aliado nesse trabalho com seu fácil manuseio e suas ricas funções os alunos puderam construir os gráficos e as regiões viáveis para solucionar determinados problemas. A possibilidade de contextualização do estudo de conteúdos prévios como: funções, desigualdades e gráficos, permitiram que problemas de otimização fossem utilizados como ponto de partida para o estudo desses conceitos desde a primeira série do ensino médio.

No início do minicurso, mesmo após uma breve revisão dos conteúdos prévios, percebemos que durante as primeiras atividades propostas, os alunos utilizaram o método da tentativa e erro. Foi comum perceber erros de interpretação. No entanto, quando descrevemos os passos para se resolver um problema de programação linear, eles puderam compreender melhor e a partir daí começaram a não mais utilizar o antigo método da tentativa e erro.

Apesar do curto tempo, a proposta deste minicurso foi bastante prazerosa e significativa, uma vez que proporcionou aos alunos, uma breve construção de alguns conhecimentos na área da Programação Linear. Notamos que mesmo com as dificuldades apresentadas nas resoluções de alguns problemas, não faltou dedicação, disciplina e entusiasmo dos discentes por aprenderem algo novo.

A Programação Linear é um tema que proporciona inúmeras aplicações em diversas outras ciências, com isso, podemos trabalhar com a questão da interdisciplinaridade, por exemplo, aliando o conhecimento matemático com a biologia, física, química entre outras. Por fim, pudemos perceber através dessa pesquisa que é possível trabalhar com a Programação Linear no ensino médio. Desde que haja a possibilidade de contextualização do estudo de conteúdos prévios como: funções lineares, equações e inequações lineares, semiplanos e gráficos. Para que permitam que problemas de otimização sejam utilizados como ponto de partida para o estudo desses conceitos desde a primeira série do ensino médio.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, M. C. Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAABs1oAF/curvas-nivelAcesso> Acesso em 10/01/2015

ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra Linear com Aplicações. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BASSANEZI, R. C., BIEMBENGUT, M. S. Modelação matemática: uma alternativa para o ensino aprendizagem de matemática em cursos regulares. Bol. Informativo do Dep. Matem. Blumenau, v.10, n.33, p. 1-5, maio 1995.

BIEMBENGUT, M., & HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino* (3 ed.). São Paulo, SP: Contexto, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias/Ministério da Educação. - Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnologia, 1999.

DANTE, L.R. *Matemática contexto & aplicações*, Volume 2, Editora Ática, São Paulo, 2006.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas**. Editora Ática, São Paulo, 2000.

DOLCE, Osvaldo ; Pompeo, José Nicolau: Fundamentos de Matemática Elementar, vol 9 (Geometria Plana), 7.ed, São Paulo: Atual Editora, 1993.

FIORENTINI, D.; GARNICA, A. V. M.; BICUDO, M. A. V. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* – Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLEMMING, Diva, GONÇALVES, Mirian. Cálculo A e B. São Paulo: Prentice Hall. 2006.

GIL. Antônio Carlos. *Métodos e Técnicas de pesquisa social*. – 5 ed. – São Paulo: Atlas, 1999.

GIL, Antônio Carlos. *Didática do ensino superior*. – São Paulo: Atlas, 2006.

HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. Tradução A. Griesi; Revisão técnica J. Chang Junior. São Paulo: McGraw-Hill, 8ª ed. 2006.

LIPSCHUTZ, S; LIPSON, M. Álgebra Linear, 3ª Edição, Coleção Schaum, Editora Bookman, Porto Alegre, 2001.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E. D. A. *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas (Temas Básicos de Educação e Ensino)*. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, Elisa Spode. Modelagem Matemática e Resolução de Problemas. Dissertação (Mestrado). PUCRS. Porto Alegre, 2006.

PESQUITA, I. M. P. Álgebra e pensamento algébrico de alunos do 8º ano. Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em Educação. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/Idalia%20Pesquita%20(Tese%20mestrado%2007).pdf..> Acesso em: 08 de janeiro de 2015.

POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRADO, Darci Santos do. Programação linear (Série Pesquisa Operacional, vol. 1). Belo Horizonte: Editora Desenvolvimento Gerencial, (1999).

SANTOS, Josias Moreira. Programação Linear: *Uma Aplicação Possível no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). UFBA. Salvador, 2013.

SILVA, Kléber. Modelagem Matemática com Programação Linear: *Uma Proposta de Trabalho no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). UESB. Vitória da Conquista, 2013.

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. **Ler escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Artmed Editora, Porto Alegre, 2001.

TAVARES, L. Valadares, CORREIA, F. Nunes. Optimização linear e não linear. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2ª edição, 1999.

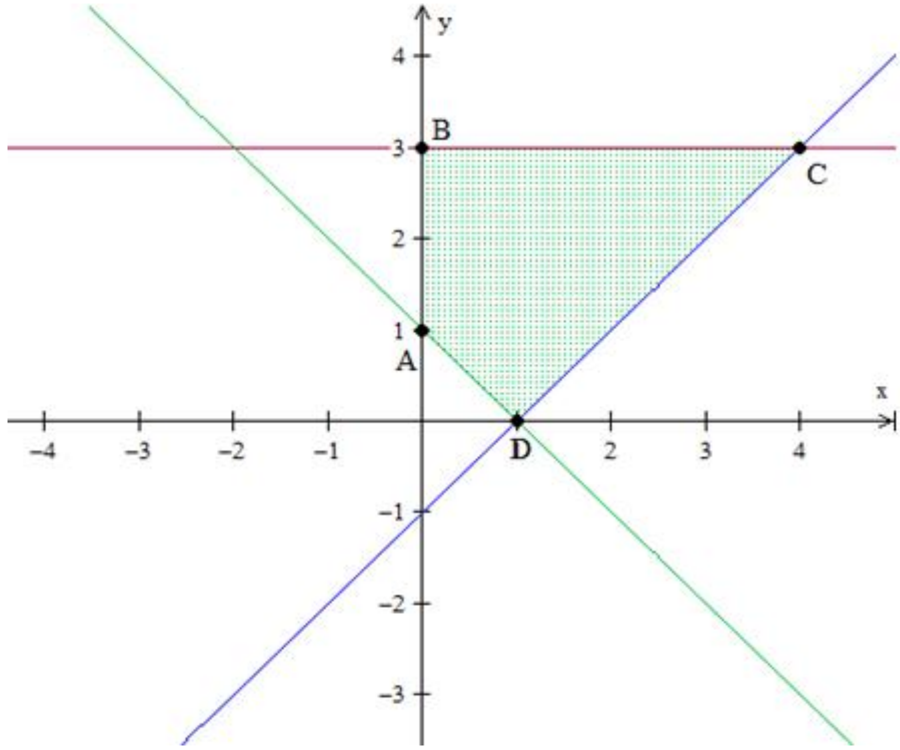
TRIVIÑOS, A. N. S. *Introdução à Pesquisa Qualitativa em Ciências Sociais*: *A pesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas, 1987.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo; ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa da. Modelagem Matemática na educação básica. – São Paulo: Contexto, 2012.

YOSHIDA, Luzia Kazuko, Programação Linear. Métodos Quantitativos, Atual Editora, 1987.

APÊNDICE

APOSTILA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA O ENSINO MÉDIO: UMA INTRODUÇÃO



VITÓRIA DA CONQUISTA
2014

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

<u>Introdução</u>

Ufa! Estou exausto! Preciso arrumar um emprego em que eu **trabalhe mais e ganhe menos.**

Estou muito gordo! Vou fazer uma dieta rigorosa, **comendo menos e engordando mais.**

Se você ouvir alguém dizer uma dessas frases vai pensar que a pessoa está maluca. Todos procuram **otimizar aquilo que fazem. Quando alguém vai numa** liquidação de sapataria, por exemplo, está querendo comprar mais sapatos gastando menos dinheiro. Ou quando uma equipe de Fórmula 1 desenvolve um novo carro, está querendo correr mais rápido, usando menos combustível. Essa é a ideia de otimização.

A Otimização pode ser definida como a necessidade de eficiência. Otimizar é uma atividade que ocupa grande parte da vida, pessoal ou profissional. Seja para maximizar a quantidade de bens e serviços adquiridos com o salário que se recebe, seja para obter o maior lucro possível para a empresa em que se trabalha, com os recursos disponíveis, ou reduzir ao máximo os custos operacionais.

Na maioria das vezes a otimização não é tão simples de ser aplicada. Por exemplo:

Imagine que uma pessoa receba duas ofertas de emprego:

1. A empresa A paga R$ 10 por hora num período de 4 horas e R$ 20 por cada hora extra;
2. A empresa B que paga R$ 15 reais por hora num período de 4 horas e R$ 17 por hora extra.

Ela pode aceitar os dois trabalhos, mas precisa descansar pelo menos 12 horas por dia.

De que maneira esta pessoa poderia agendar seu trabalho para que seu rendimento fosse o maior possível?

Existe um ramo da Matemática chamado Pesquisa Operacional, que ajuda na tomada de decisões de modo a utilizar os recursos disponíveis da maneira mais eficiente possível. Um dos métodos utilizados na Pesquisa Operacional é a Programação Linear.

No mundo atual, é comum depararmos com problemas que precisam ser avaliados com a utilização de ferramentas matemáticas. Por exemplo, montar uma função linear, analisar inequações lineares e montar uma região gráfica, através de um sistema de equações lineares. Esses problemas já vêm sendo estudados desde a década de 40. E ao longo desse tempo, estamos percebendo que os estudos nesta área, vêm se expandindo.

Por isso, elaboramos esta apostila abordando Problemas de Programação Linear (PPL) num nível introdutório. Esperamos que sua leitura seja prazerosa e educativa.

A Programação Linear

A programação linear surgiu por volta de 1947, durante a Segunda Guerra mundial, para resolver problemas de logística e estratégica. Ela procura encontrar a melhor solução (solução ótima) para problemas que tenham seus modelos representados por expressões lineares. Esta característica, linearidade das expressões, torna-a simples e altamente aplicável.

Resolver um problema de programação linear significa encontrar um valor máximo ou mínimo para uma função linear, denominada função objetivo, obedecendo a uma série de restrições, também, lineares.

Exemplo:

Um criador de porcos pretende determinar a quantidade de cada tipo de ração a dar diariamente a cada animal, para conseguir uma dada qualidade nutritiva a custo mínimo.

Os dados relativos ao custo de cada tipo de ração, às quantidades mínimas diárias de ingredientes nutritivos básicos a fornecer a cada animal, bem como às quantidades destes existentes em cada tipo de ração (g/kg) constam do quadro abaixo.

Tabela A.1 - Problema de Nutrição

	Granulado (g/kg)	Farinha (g/kg)	Quantidade mínima requerida
Hidratos de carbono	20	50	200
Vitaminas	50	10	150
Proteínas	30	30	210
Custo (esc./kg)	10	5	

Para resolver um problema de programação linear (como o exemplo acima), devemos interpretar o problema de forma a transcrever os dados fornecidos para a linguagem matemática (Modelar o problema) e em seguida resolvê-lo. Para isto devemos seguir os seguintes passos:

- Identificar as variáveis envolvidas no problema.
- Estabelecer a Função Objetivo, as quais deverão maximizar ou minimizar.
- Identificar as restrições impostas pelo problema e transforma-las em inequações lineares.
- Traçar o gráfico das inequações lineares, obtendo com isso uma região convexa e determinar as coordenadas dos seus vértices.
- Voltar ao problema e fornecer a solução.

Vamos explicar então como seguir cada um desses passos acima, modelando e resolvendo o exemplo anterior.

- **Identificando as Variáveis**

A primeira tarefa para a resolução de um problema de programação linear (PPL) é identificar as variáveis inseridas na questão. No exemplo anterior, as variáveis são a quantidade (Kg) de granulado existente na ração diária (a qual chamaremos de x_1) e a quantidade (Kg) de farinha existente na ração diária (que chamaremos de x_2).

- **Estabelecendo a Função Objetivo**

Vamos raciocinar então! Temos que para cada quilo de granulado do tipo x temos um custo de R$ 10,00 e para cada quilo do tipo y um custo de R$ 5,00. Como no problema diz que o comerciante deve obter o custo mínimo, ou seja, refere-se ao custo, devemos montar a função que representa o custo mínimo total, que chamaremos de Z.
Concluímos que a Função Objetivo é minimizar:

$Z = 10x + 5y$ (custo diário)

- **Identificando as restrições e escrevendo as inequações lineares**

➢ Quantidade mínima diária de hidratos de carbono

$$20x + 50y \geq 200$$

➢ Quantidade mínima diária de vitaminas

$$50x + 10y \geq 150$$

- Quantidade mínima diária de proteínas

$$30x + 30y \geq 210$$

- $x, y \geq 0$ (não negatividade)

- **Traçando o gráfico**

Para construção do gráfico devemos reescrever todas as restrições obtidas e montar um sistema de inequações lineares. Analisando a região que cada inequação representa no gráfico e achando a região convexa, através da intersecção das regiões representadas por essas inequações.

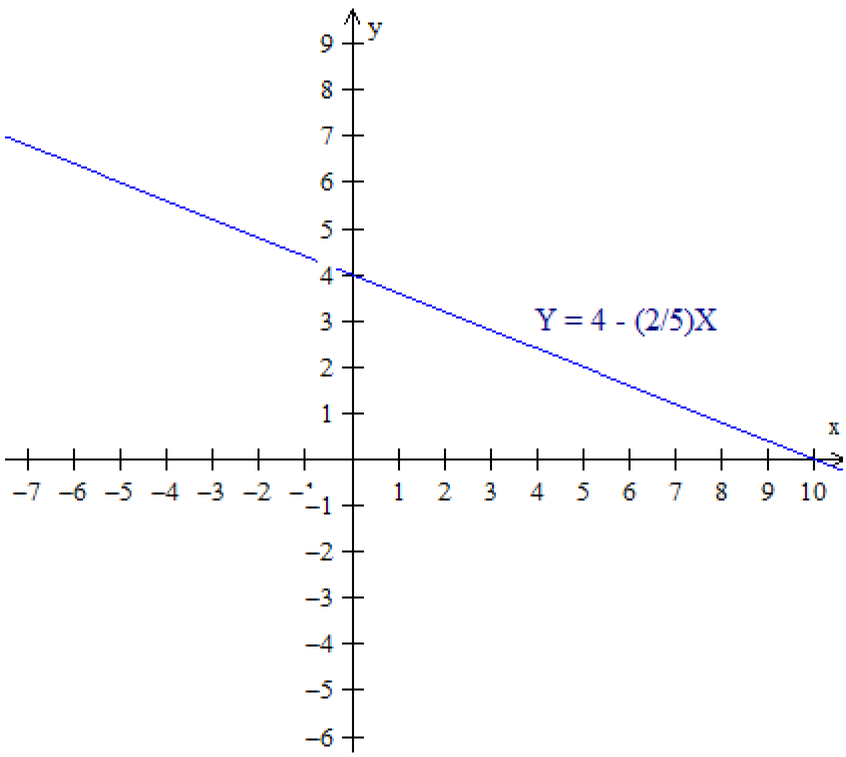
O sistema obtido será $\begin{cases} 20x + 50y \geq 200 \\ 50x + 10y \geq 150 \\ 30x + 30y \geq 210 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$, após analisar graficamente cada inequação como veremos abaixo, obteremos a região convexa viável:

Para desenhar o gráfico da região, vamos inicialmente cada inequação como uma equação linear:

$$20x + 50y = 200 \; \rightarrow \; y = 4 - \left(\frac{2}{5}\right)x$$

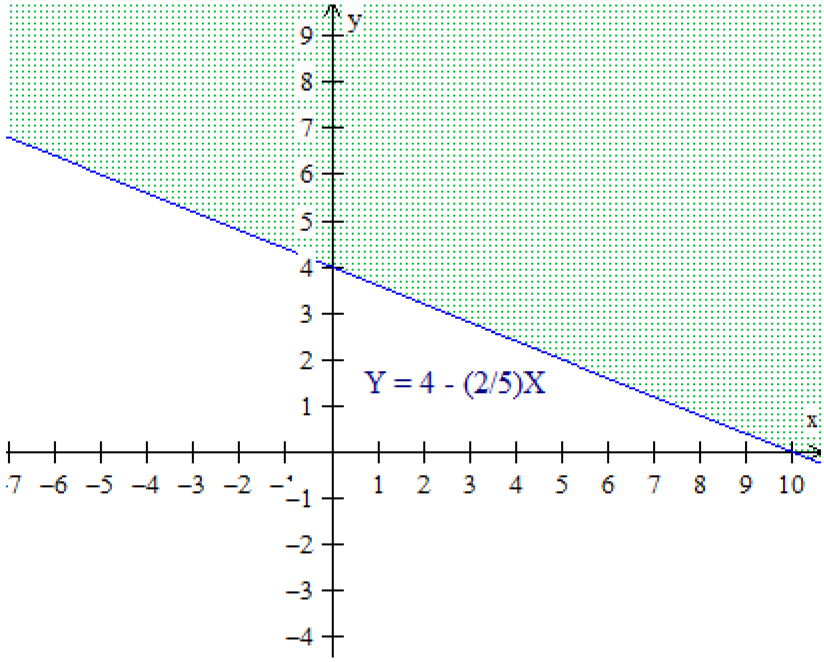
Desenhamos a reta $y = 4 - \left(\frac{2}{5}\right)x$

Figura A.1 - Reta $y = 4 - \left(\frac{2}{5}\right)x$



A inequação $20x + 50y \geq 200$ é equivalente a $y \geq 4 - (\frac{2}{5})x$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte superior à reta $y = 4 - (\frac{2}{5})x$.

Figura A.2 - Semiplano y $\geq 4 - (\frac{2}{5})x$

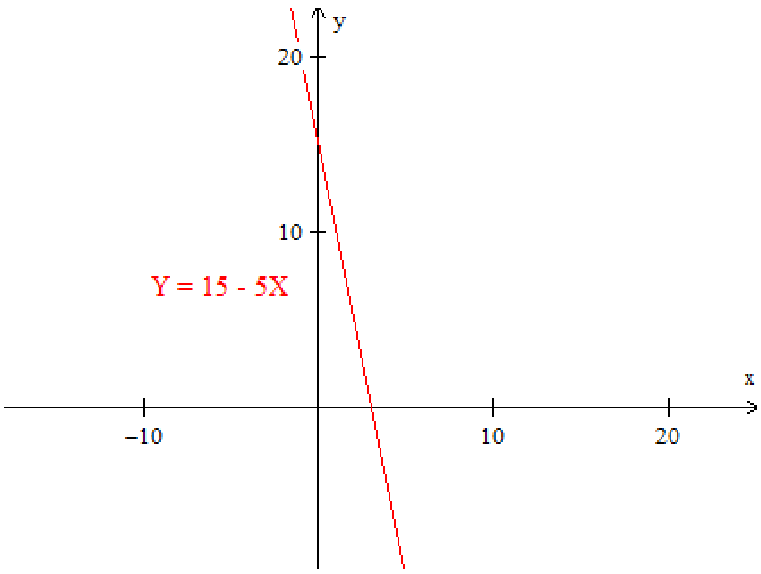


Agora, fazemos o mesmo com a próxima inequação:

$$50x + 10y \geq 150 \ \rightarrow y \geq 15 - 5x \ \rightarrow y = 15 - 5x$$

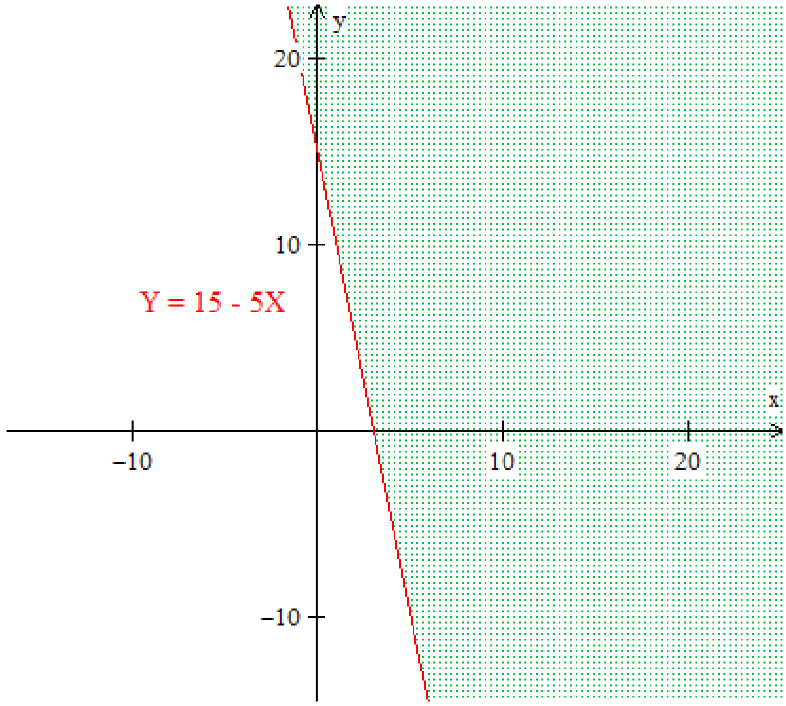
Na Figura A.3, desenhamos a reta $y = 15 - 5x$.

Figura A.3 - Reta $y = 15 - 5x$



Os pontos que obedecem a inequação $y \geq 15 - 5x$ estão na parte superior da reta $y = 15 - 5x$.

Figura A.4 - Semiplano y $\geq 15 - 5x$

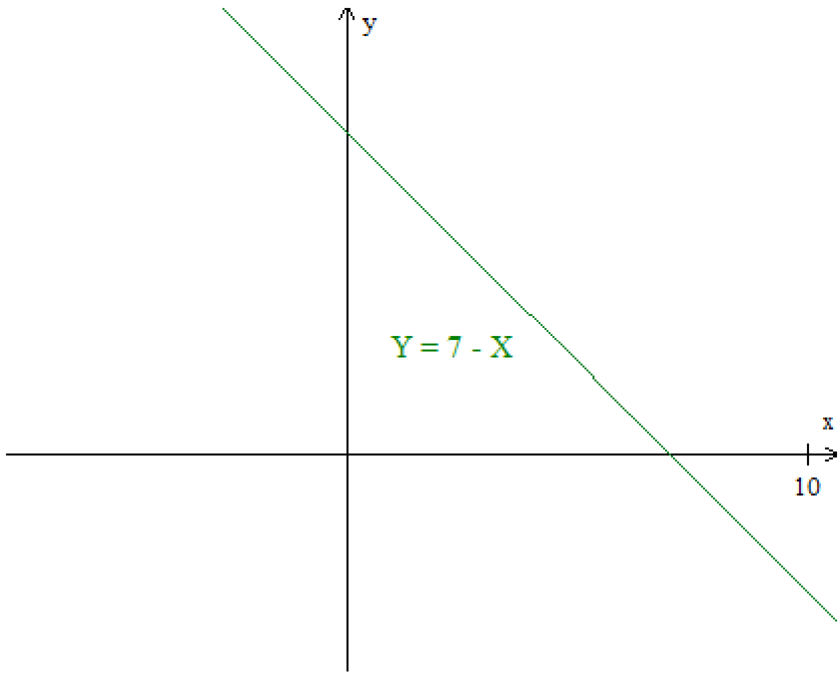


Novamente, fazemos o mesmo com a próxima inequação:

$$30x + 30y \geq 210 \ \rightarrow y \geq 7 - x \ \rightarrow y = 7 - x$$

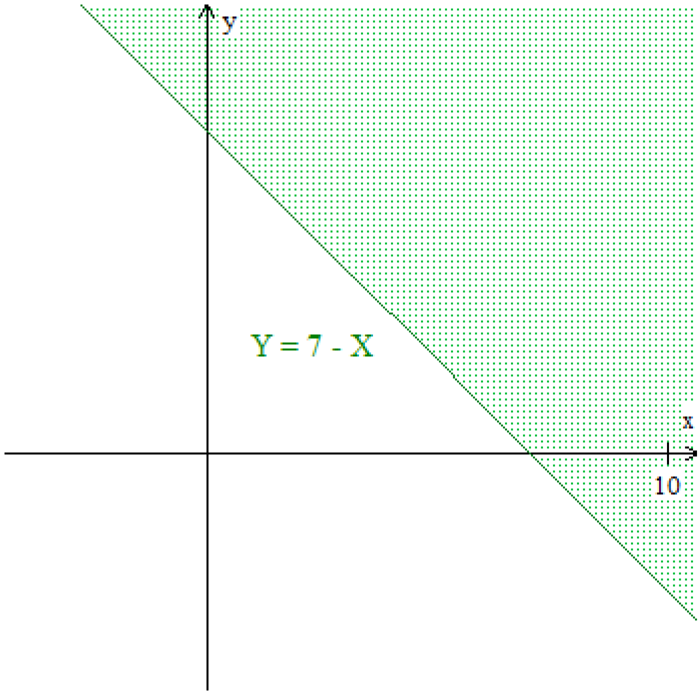
Na Figura A.5, desenhamos a reta $y = 7 - x$.

Figura A.5 - Reta $y = 7 - x$



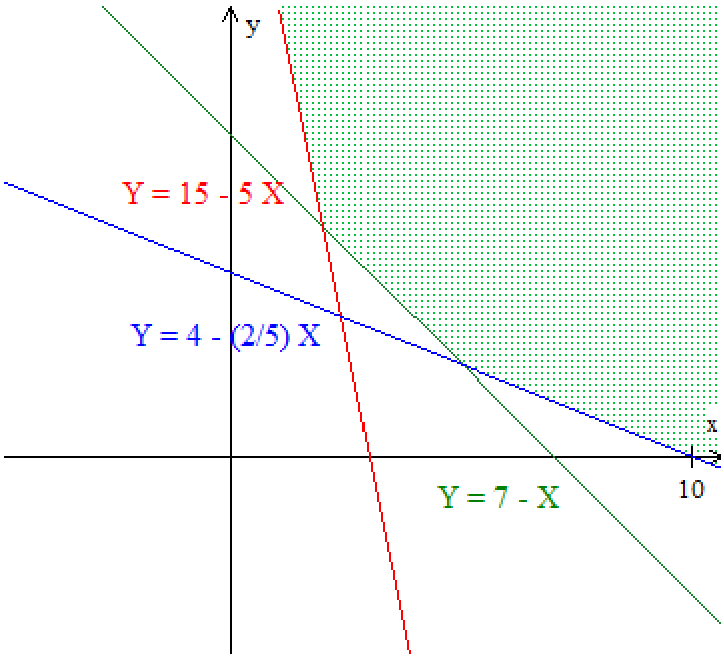
Os pontos que obedecem a inequação $y \geq 7 - x$ estão na parte superior da reta $y = 7 - x$.

Figura A.6 - Semiplano y $\geq 7 - x$



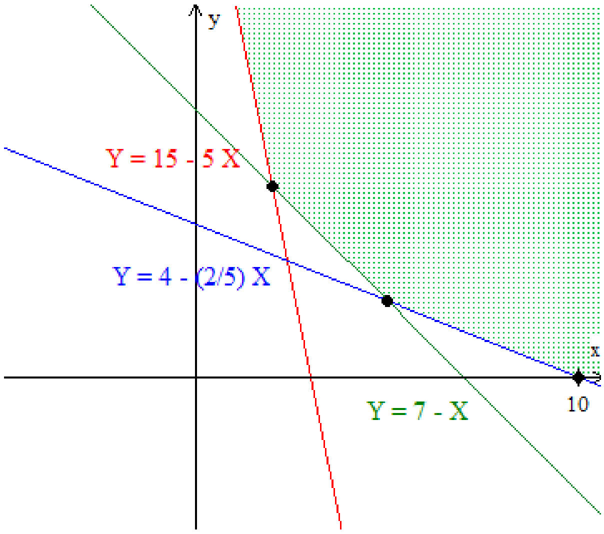
Combinando (intersecção) as três regiões, obtemos o seguinte gráfico:

Figura A.7 - Semiplanos $y \geq 4 - \frac{2}{5}x,\ y \leq 15 - 5x$ e $y \leq 7 - x$



Lembramos que ainda temos duas outras inequações: $x \geq 0$ e $y \geq 0$, ou seja, todos os pontos da região procurada tem coordenadas positivas, marcamos os pontos extremos e verificamos a região viável abaixo na Figura A.8.

Figura A.8 - Semiplanos $y \geq 4 - \frac{2}{5}x$, $y \leq 15 - 5x$, $y \leq 7 - x$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$

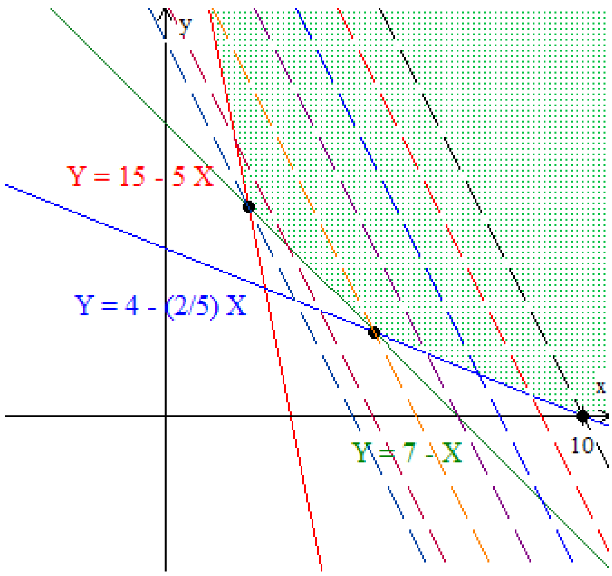


Curvas de Nível

Identificada à região, nosso próximo passo deverá ser atribuir valores à função-objetivo $Z = 10x + 5y$, por exemplo, $Z = Z_0$, e verificar se a reta, chamada curva de nível intercepta a região. Vejamos que, se $Z_0 \geq 0$, $Z_0 \in R$, qualquer ponto da reta $Z_0 = 10x + 5y$ que intercepta a região, satisfaz as restrições e tem custo $Z = Z_0$.

A Figura A.9 apresenta algumas curvas de nível (retas tracejadas) para custo $Z = 45;\ 50;\ 60;\ 70$; 80; 90; 100.

Figura A.9 - Curvas de Nível da Função objetivo e Solução ótima



- **Calculando os valores da função objetivo**

Identificada à região, nosso próximo passo deverá ser calcular os valores da função objetivo em cada um dos vértices da região, ou seja, substituir os valores das coordenadas na função objetivo.

Conforme tabela a seguir:

Tabela A.2 - Pontos Extremos e Função objetivo do Problema de Nutrição

	Quantidade de artigo do Tipo A	Quantidade de artigo do Tipo B	Função objetivo Lucro (máximo)
Par Ordenado	x	y	$Z = 10x + 5y$
(2,5)	2	5	45
(5,2)	5	2	60
(10,0)	10	0	100

Todos os pontos que estão na região ilimitada são soluções viáveis para a nossa função objetivo. Mas precisamos encontrar a solução ótima para o nosso problema, isto significa calcular o valor máximo ou mínimo para a respectiva função objetivo. Para calcular o valor máximo ou mínimo da função objetivo, basta tomar os valores do vértice da região como fizemos na tabela acima. O maior dos valores encontrado será o valor máximo e o menor dos valores será o mínimo. O problema proposto acima pede o custo mínimo, ou seja, o valor mínimo.

- **Voltando ao problema e fornecendo a solução**

Podemos verificar na tabela acima que a função objetivo obtém o seu valor mínimo no ponto (2,5) e o custo mínimo nesse ponto é 45.

Exercitando a Representação Gráfica com auxílio do Winplot

A atividade anterior nos mostrou passo-a-passo como resolver um problema de programação linear. Vimos que para isso é necessário conhecimento de inequações lineares e sistemas de inequações, representações gráficas, além de interpretação. Nas atividades abaixo, exercitaremos com o auxílio do software Winplot apenas a representação gráfica dos sistemas já "montados" e o cálculo dos valores da função objetivo pré-estabelecida.

Atividade Resolvida

Desenhe a região que representa o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A seguir determine qual o menor valor da função: $R = 8x - 4y$.

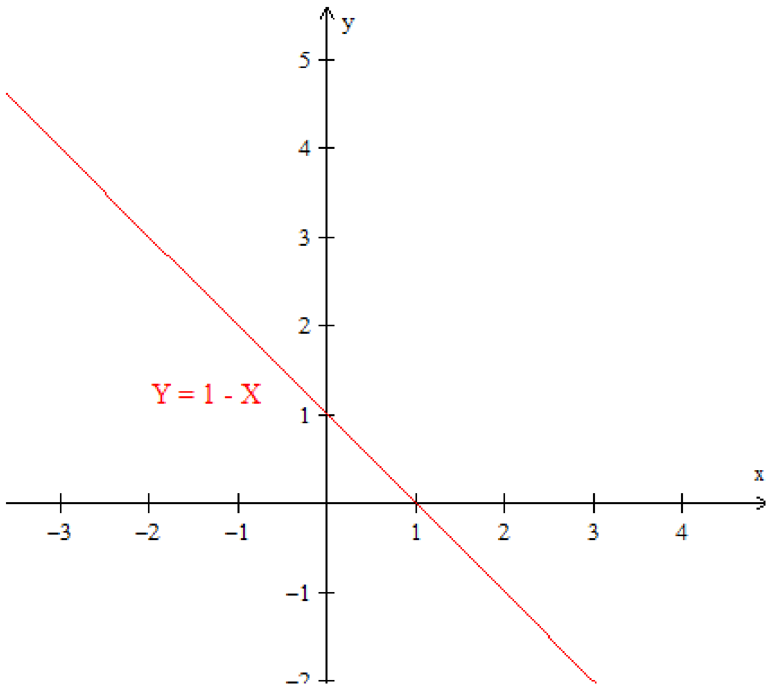
Solução:

Para desenhar o gráfico da região, vamos inicialmente considerar cada inequação como uma equação linear:

$$x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

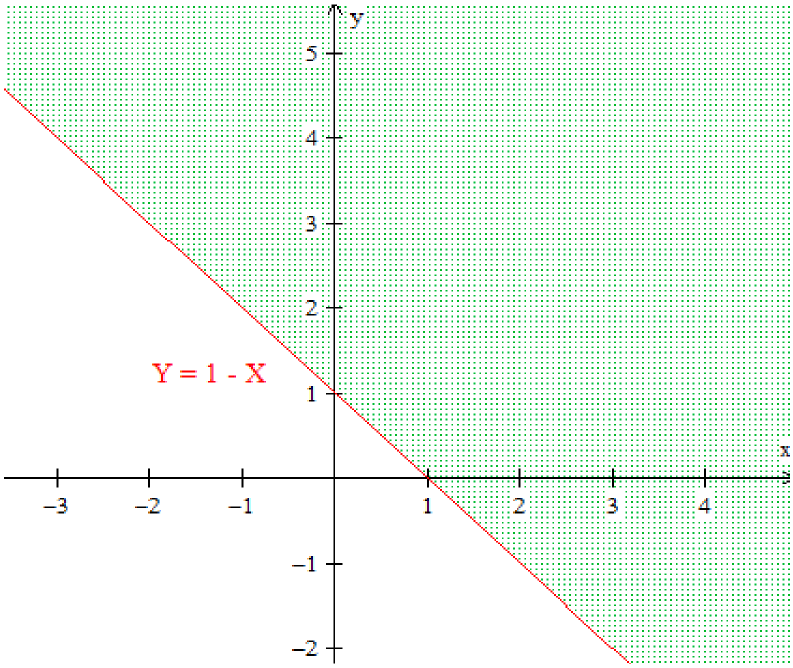
Na Figura A.10, desenhamos a reta $y = 1 - x$.

Figura A.10 - Reta $y = 1 - x$



A inequação $x + y \geq 1$ é equivalente a $y \leq 1 - x$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte superior à reta $y = 1 - x$.

Figura A.11 - Semiplano $y \geq 1 - x$

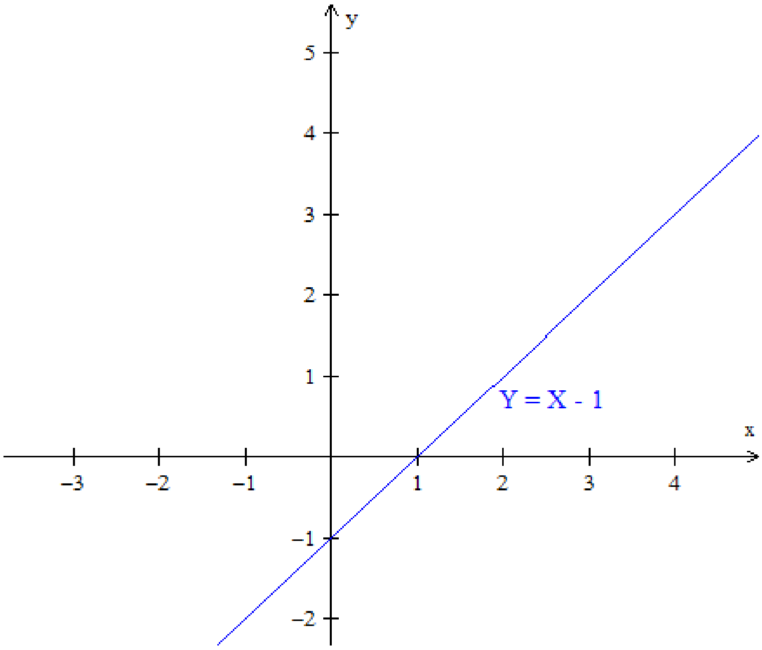


Agora, fazermos o mesmo com a próxima inequação:

$$x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$$

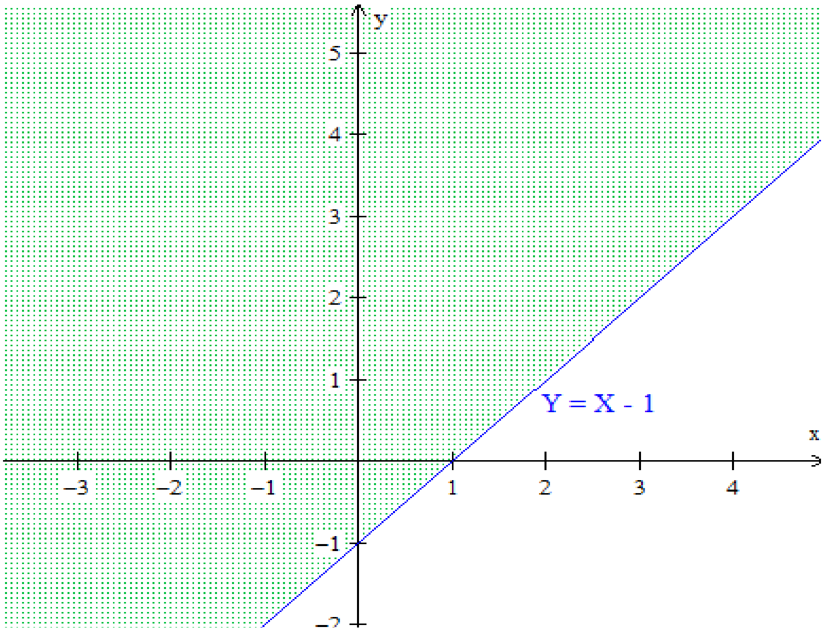
Na Figura A.12, desenhamos a reta $y = x - 1$.

Figura A.12 - Reta $y = x - 1$



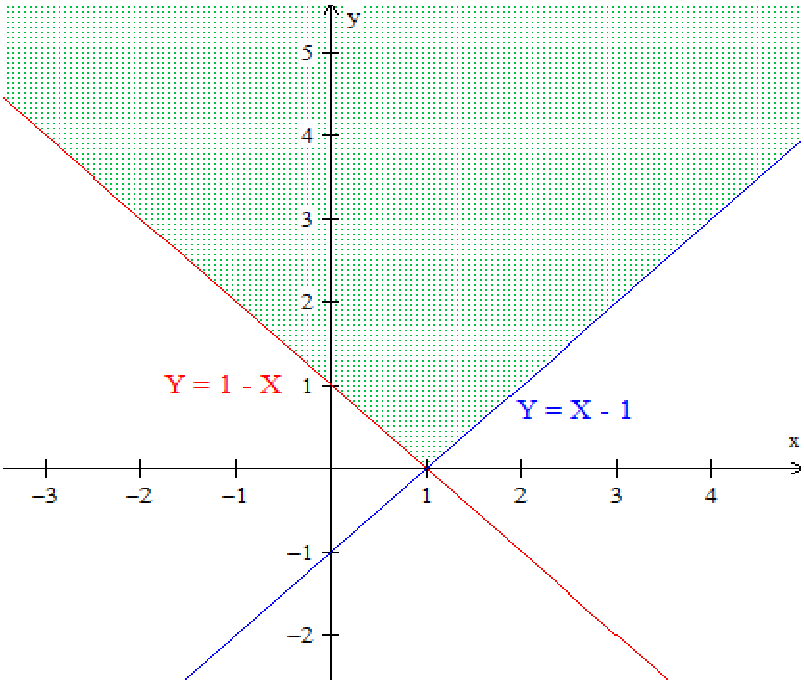
A inequação $x - y \leq 1$ é equivalente a $y \geq x - 1$, ou seja, no gráfico, os pontos que obedecem esta inequação estão situados na parte superior à reta $y = x - 1$.

Figura A.13 - Semiplano $y \geq x - 1$



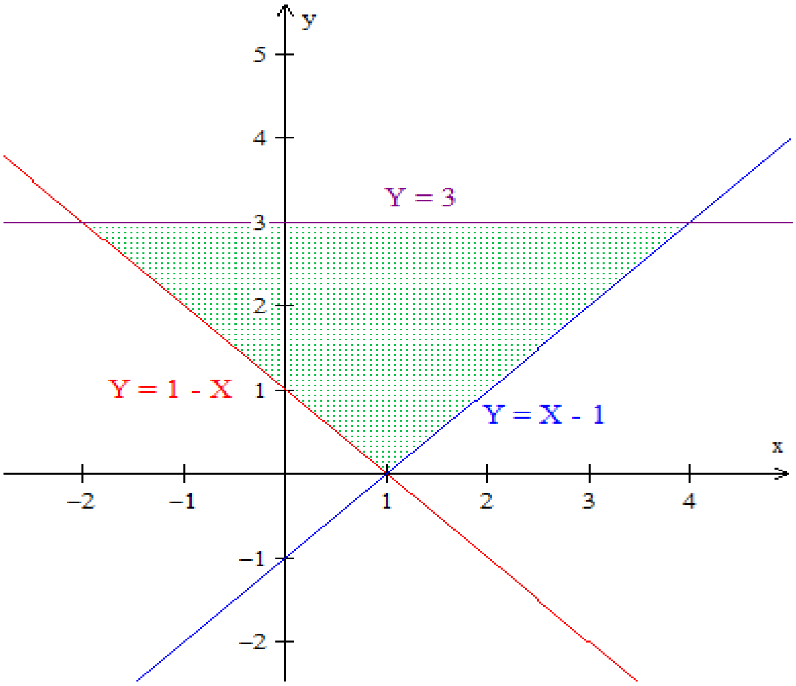
Combinando (intersecção) as duas regiões, obtemos o seguinte gráfico:

Figura A.14 - Semiplanos $y \geq 1 - x$ e $y \geq x - 1$



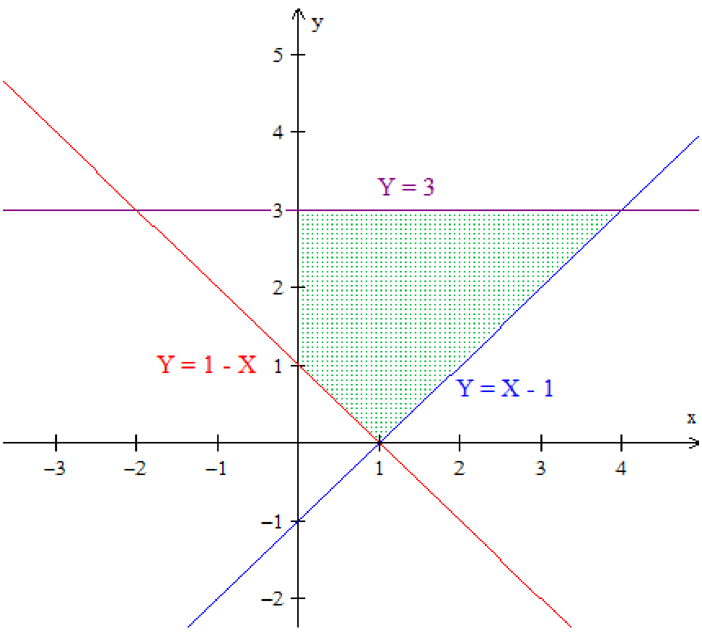
Na sequência escrevemos a inequação $y \leq 3$, os pontos que obedecem esta inequação estão situados abaixo da reta $y = 3$.

Figura A.15 - Semiplanos $y \geq 1 - x$, $y \geq x - 1$ e $y \leq 3$



Lembre-se que ainda temos duas outras inequações: $y \geq 0 \; e \; x \geq 0$, ou seja, todos os pontos da região procurada tem coordenadas positivas:

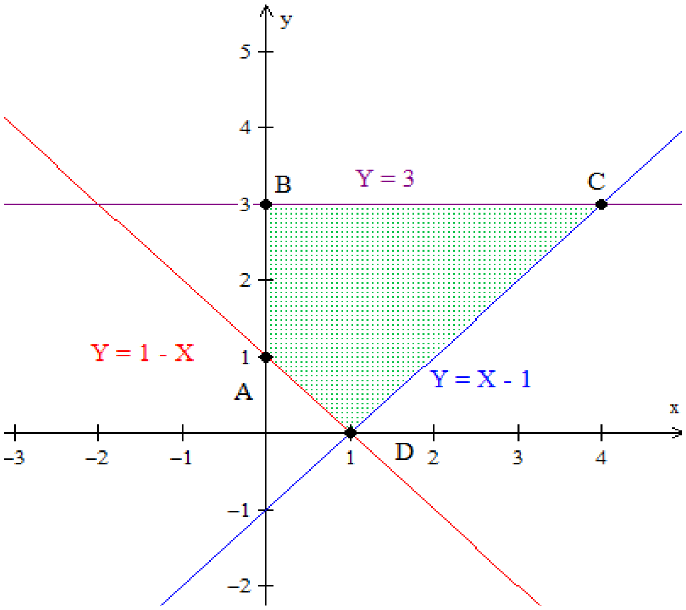
Figura A.16 - Região viável



A primeira parte do exercício está completa. Vamos, então, determinar o valor mínimo da função objetivo.

Inicialmente, temos que determinar quais são os pontos de vértice da região acima:

Figura A.17 - Pontos Extremos da Região viável



Verificamos os valores da função objetivo em cada um dos pontos na tabela abaixo:

Tabela A.3 - Pontos Extremos e Função objetivo

	Valores relacionados a variável X	Valores relacionados a variável Y	Função objetivo
Par Ordenado	x	y	$R = 8x - 4y$
A (0,1)	0	1	-4
B (0,3)	0	2	-12
C (4,3)	4	3	20
D (1,0)	1	0	8

Assim, o ponto B é onde a função objetivo alcança o seu valor mínimo. Logo, o valor mínimo da função objetivo é -12.

Exercícios Propostos

1. Monte o gráfico dos seguintes sistemas de inequações lineares:

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ x + y \geq -1 \\ y \leq 4 \end{cases}$

2. Determine o valor máximo e o valor mínimo da função lucro $L = 10x + 15y$, sujeita às restrições abaixo:

d) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 20 \\ x + y \geq 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 15 \end{cases}$

3. Determine o máximo da função objetivo $P = 2x + y$, sujeita as seguintes restrições:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases}$$

Interpretando e resolvendo Problemas de Programação Linear

As atividades a seguir são problemas cotidianos que podemos aplicar a Programação Linear para resolvê-los. A seguir, iremos apresentar um problema e apresentar sua solução seguindo os passos da resolução de problemas de programação linear.

P1. Problema da Vendedora

Uma vendedora de cosméticos trabalha com dois tipos de produtos: xampus e sabonetes. Sabe-se que na venda de uma unidade de xampu, ela tem um lucro de R$25,00 e na de sabonete R$ 15,00. A fábrica só permite pedidos a partir de 5 unidades, mas num mês, ela vende no máximo 25 produtos. Qual a quantidade de xampus e sabonetes ela deve vender mensalmente para que tenha lucro máximo? E qual o lucro máximo?

Solução:

Identificando as Variáveis

$x =$ Quantidade de xampu

$y =$ Quantidade de sabonete

Estabelecendo a Função Objetivo

O lucro é igual a 25 vezes a quantidade de xampu vendido mais 15 vezes à quantidade de sabonete vendido.

L = 25 x + 15 y

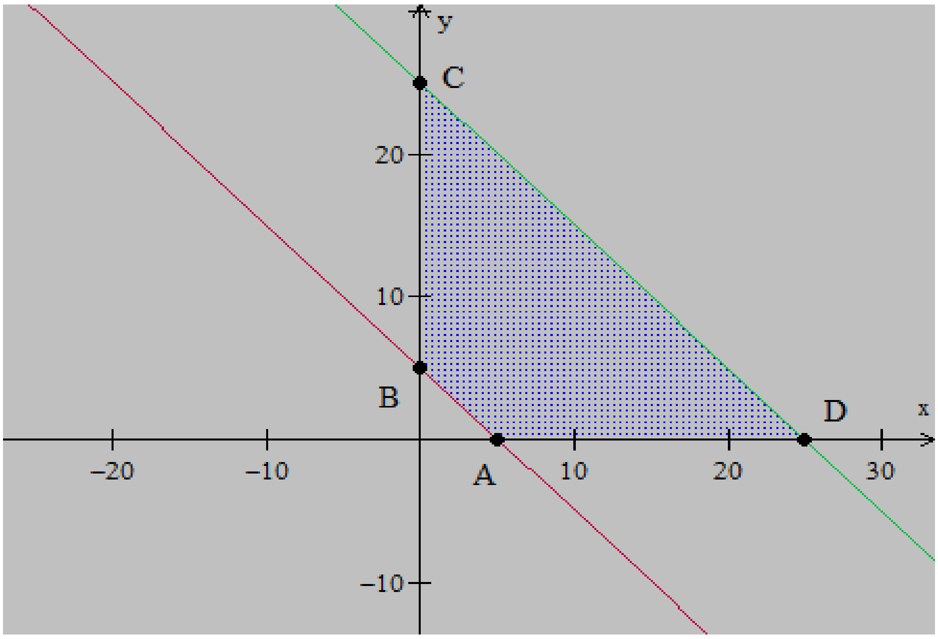
Restrições:

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ x + y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

O pedido mínimo é de 5 unidades.
Venda máxima por mês: 25 unidades.
A quantidade de xampus deve ser maior ou igual a zero.
A quantidade de sabonete deve ser maior ou igual a zero.

Traçando o gráfico

Figura A.18. Região viável



Valor da Função Objetivo nos pontos extremos da Região:

Tabela A.4 - Pontos Extremos e Função objetivo Problema da Vendedora

Ponto	x	y	Função objetivo: $L = 25x + 15y$
A (0,0)	0	0	0
B (0,2)	0	2	2
C $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
D (1,0)	1	0	2

Conclusão:

Para obter o lucro máximo, ela deve vender 25 xampus. Assim, conseguirá R$ 625,00 de lucro.

P2. Problema de Dieta

Dois produtos **P** e **Q** contêm as vitaminas **A**, **B** e **C** nas quantidades indicadas no quadro abaixo. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

Solução:

Identificando as Variáveis

$x =$ Quantidade do produto **P**

$y =$ Quantidade do produto **Q**

Estabelecendo a Função Objetivo

Minimizar o custo: $\mathrm{C} = 3x + 2y$

Identificando as restrições e escrevendo as inequações lineares

$x, y \geq 0$

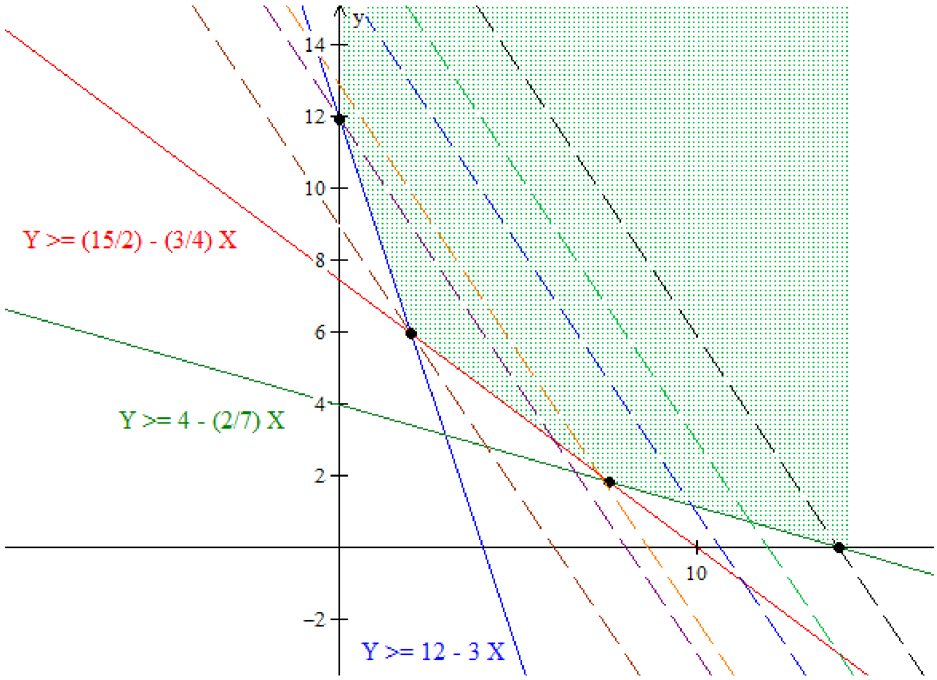
$3x + 4y \geq 12$

$3x + 4y \geq 30$

$2x + 7y \geq 28$

Traçando o gráfico

Figura A.19 - Região ilimitada do Problema da Dieta



Valores que a Função Objetivo assume nos pontos vértices:

Tabela A.5 - Pontos extremos e Função objetivo Problema das Fazendas

	Quantidade de L de leite América	Quantidade de L de leite Rei do Gado	Função objetivo Custo (mínimo)
Pontos da região	x	y	$C = 3x + 2y$
(0,12)	0	12	24
(2,6)	2	6	18
$(\frac{98}{13}, \frac{24}{13})$	$\frac{98}{13}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{342}{13}$
(14,0)	14	0	42

Conclusão:

A solução ótima, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir e unidades do produto **P** e 6 unidades do produto **Q**.

P3. Problema do Transporte

Uma fábrica possui 40 unidades de mercadoria no Depósito 01 e 50 unidades no Depósito 02. Devem ser enviadas 30 unidades ao cliente A e 40 unidades ao cliente B. Os gastos de transporte por unidades de mercadoria são:

- Depósito 01 para Cliente A: R$ 10/unidade
- Depósito 01 para Cliente B: R$ 14/unidade
- Depósito 02 para Cliente A: R$ 12/unidade
- Depósito 02 para Cliente B: R$ 15/unidade

De que maneira esta mercadoria deve ser enviada para que a despesa com transporte seja mínima?

Solução:

Identificando as Variáveis

$x =$ Quantidade de mercadoria enviada ao cliente A do Depósito 01

$y =$ Quantidade de mercadoria enviada ao cliente B do Depósito 01

Como temos que enviar 30 unidades ao cliente A, (30-x) deve ser a quantidade que devemos enviar para A, a partir do Depósito 02.

$(30 – x)$ = quantidade de mercadoria enviada ao cliente A do Depósito 02

E, como temos que enviar 40 unidades ao cliente B, (40-y) deve ser a quantidade que devemos enviar para B a partir do Depósito 02.

$(40 - y)$ = quantidade de mercadoria enviada ao cliente B do Depósito 02

Estabelecendo a Função Objetivo

Nosso objetivo é minimizar a despesa com transporte (T), como cada depósito tem um custo diferente de envio de mercadoria para cada cliente, a função objetivo é:

$$T = 10\,x + 14\,y + 12\,(30-x) + 15\,(40-y)$$

$$T = 960 – 2x - y$$

Identificando as restrições e escrevendo as inequações lineares

$x, y \geq 0$ (São unidades de mercadoria não podem ser negativos)

$x \leq 30$ (Quantidade que deve ser enviada ao cliente A)

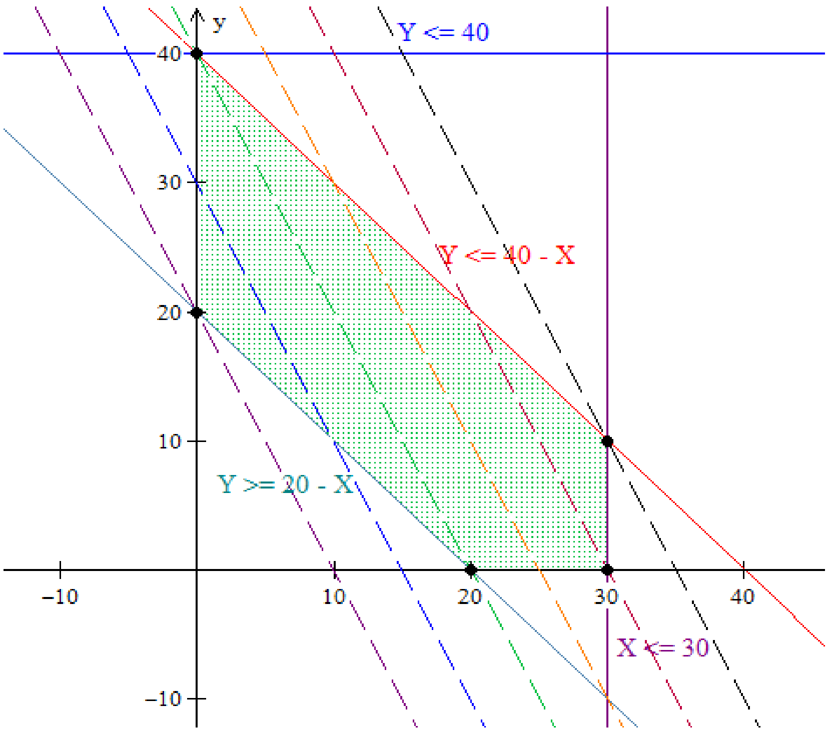
$y \leq 40$ (Quantidade que deve ser enviada ao cliente B)

$x + y \leq 40$ (Limite de Depósito 01)

$(30 - x) + (40 - y) \leq 50 \rightarrow x + y \geq 20$ (Limite de Depósito 02)

Traçando o gráfico

Figura A.20 - Região viável e curvas de nível



Valor da função objetivo nos pontos extremos da região:

Tabela A.6 - Pontos extremos e Função objetivo Problema do Transporte

Ponto	x	y	Função objetivo $T = 960 - 2x - y$
A (0,20)	0	20	940
B (0,40)	0	40	920
C (30,10)	30	10	890
D (30,0)	30	0	900
E (20,0)	20	0	920

Conforme tabela A.6, para que a despesa com transporte seja mínima a fábrica deve enviar:

- 30 mercadorias para o cliente A a partir do Depósito 01
- 10 mercadorias para o cliente B a partir do Depósito 01
- 30 mercadorias para o cliente B a partir do Depósito 02
- Nenhuma do Depósito 02 para o cliente A

Gastando assim R$ 890,00 com transporte.

Exercícios Propostos

E1. Carlos precisa vender uma certa quantidade de blusas e calças em um mês para poder fazer uma viagem com o dinheiro das vendas.Sabe-se que Carlos possui 5 blusas e 3 calças.E que ele obtém um lucro de R$ 15,00 por cada blusa vendida e R$ 25,00 por cada calça vendida.Além disso, por motivo de conhecimento, ele só consegue vender em média 6 peças (entre calças e blusas) por mês. Quantas calças e blusas Carlos deve vender no mês para que tenha lucro máximo? E qual o lucro máximo?

E2. Antonio tem um pequena chácara e vende com dois tipos de frutas na feira: jaca e graviola. Sabe-se que na venda de uma unidade de jaca, ele tem um lucro de R$ 5,00 e na de graviola R$ 3,00. Sua chácara produz no máximo 30 frutas por semana. Dona Emerentina, sua cliente, compra semanalmente pelo menos 6 graviolas e 2 jacas. Qual a quantidade de jacas e graviolas ele deve vender por semana para que tenha lucro máximo? E qual o lucro máximo?

E3. Uma pessoa resolve fazer uma dieta e procura a orientação de um nutricionista. Ele lhe passa uma dieta a base de dois produtos: Alfa e Beta. Sabe-se as seguintes informações sobre os produtos:

Produto	Preço unitário	Quantidade de vitamina por unidade de produto		
		Vit. A	Vit. B	Vit. C
Alfa	R$ 40	4 g	6 g	0 g
Beta	R$ 15	2 g	0 g	2 g

Segundo o nutricionista, o paciente deve consumir diariamente no **mínimo** 20 g de vitamina A e no **máximo** 30 g de vitamina B e 8 g de vitamina C. Quanto o paciente deve consumir de cada produto para que tenha um gasto mínimo?

(Atenção esta é uma dieta fictícia, sem nenhum respaldo científico!)

Referências Bibliográficas

ANTON, H., RORRES, C.. *Álgebra Linear com Aplicações*. São Paulo: Editora Bookman Companhia Editorial Ltda, 2012.

BAIER, T., DA SILVA, V.C., LEAL., *Programação Linear para o Ensino Médio*, documento eletrônico disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem, comunicação 62 último acesso em 25 de novembro de 2014.

BORTOLOSSI, H.J. *Cálculo Diferencial a Várias Variáveis. Uma introdução à Teoria da Otimização*. Editora PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2002.

DANTE, L.R., Matemática Contexto e Aplicações, Volume 2, Editora Ática, São Paulo, 1999.

PRADO, Darci Santos do. Programação linear (Série Pesquisa Operacional, vol. 1). Belo Horizonte: Editora Desenvolvimento Gerencial, (1999).

Disponível em http://www.di.ubi.pt/~cbarrico/Disciplinas/InvestigacaoOperacional/Downloads/Capitulo2.pdf acesso em 18/12/2014