UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LEONARDO MARTINS DO NASCIMENTO

O GEOPLANO CIRCULAR DINÂMICO E AS TÁBUAS DE CORDAS DE PTOLOMEU E COPÉRNICO COMO ALTERNATIVA NO ENSINO APRENDIZAGEM DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LEONARDO MARTINS DO NASCIMENTO

O GEOPLANO CIRCULAR DINÂMICO E AS TÁBUAS DE CORDAS DE PTOLOMEU E COPÉRNICO COMO ALTERNATIVA NO ENSINO APRENDIZAGEM DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
ORIENTADORA: Profª. Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva

VITÓRIA DA CONQUISTA – BA
AGOSTO – 2015

LEONARDO MARTINS DO NASCIMENTO

O GEOPLANO CIRCULAR DINÂMICO E AS TÁBUAS DE CORDAS DE PTOLOMEU E COPÉRNICO COMO ALTERNATIVA NO ENSINO APRENDIZAGEM DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

____

Prof.ª Dr.ª Maria Deusa Ferreira da Silva (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____

Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Roseane Ramos
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____

Prof.ª Dr.ª Selma Rozane Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA

VITÓRIA DA CONQUISTA - BA

AGOSTO – 2015

À minha esposa Ranielle e meus filhos Felipe, Gabriel e Rafael, que são o motivo maior dessa conquista e fonte de todo o incentivo, amor e compreensão de que precisei.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, pelas graças alcançadas durante toda minha vida, e por me conduzir em suas mãos durante esse mestrado.

À minha mãe Lêda, pelas orações e dedicação à minha esposa e filhos em minhas constantes ausências para os estudos.

Aos meus irmãos e seus familiares, pelo apoio e pela alegria transmitida quando compartilhamos cada uma das vitórias obtidas nessa caminhada.

À minha orientadora Profª. Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva, por tudo o que me ensinou, pela paciência, pela disponibilidade e pela excelente condução desse trabalho.

Aos colegas da E.E. Deputado Esteves Rodrigues, em especial à Diretora Tânia Mendes Alves pelo apoio e contribuição, abrindo as portas da escola para o desenvolvimento das atividades.

Aos meus alunos da turma do 3º Ano matutino de 2014, pela participação, empenho e enorme contribuição nessa pesquisa.

Aos meus amigos Danivalton, Eilson, Roberto e Anderson, pela alegria das conversas que amenizaram os desgastes das longas viagens, além da enorme contribuição com sugestões e opiniões sempre coerentes.

Ao meu filho Felipe, por estar sempre ao meu lado, e pela contribuição com suas revisões e sugestões.

À minha esposa Ranielle, e meus filhos Gabriel e Rafael pelo amor, carinho e compreensão dedicados durante essa trajetória, me inspirando e recarregando minhas forças a todo momento.

RESUMO

Sendo vista como uma ciência com características próprias de investigação, a Matemática permite que sua dimensão histórica, intimamente relacionada com a sociedade e a cultura ao longo do desenvolvimento da humanidade, ampliem o seu espaço de conhecimento. Esta pesquisa, desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), tem por objetivo mostrar a importância para o processo ensino-aprendizagem do uso da história como um recurso didático em aulas investigativas, na aprendizagem de conceitos matemáticos. Para isso, aplicamos a alunos do ensino médio da E.E. Deputado Esteves Rodrigues, no último semestre de 2014, um conjunto de atividades com a utilização de procedimentos de investigação histórica em sala de aula, levando-os a percorrerem os primeiros passos na construção das tábuas de cordas de Ptolomeu e Copérnico, e a relacioná-las com a tabela do seno. Para tal, elaboramos uma sequência metodológica distribuída em três momentos distintos, que permitiram, através de questionários e de um bloco de atividades, a coleta de dados e anotações para uma análise qualitativa. Desta forma, inicialmente apresentamos um breve resumo da evolução histórica da trigonometria, citando alguns de seus principais personagens e suas contribuições na construção desse campo da matemática, destacando a importância dos trabalhos de Ptolomeu e Copérnico que, de modo semelhante, construíram suas tábuas de cordas. No segundo momento, realizamos atividades de reconstrução das tábuas de cordas, e buscamos a relação com a tabela do seno. No terceiro momento, foi feita uma discussão sobre o uso de materiais concretos no ensino da Matemática como uma alternativa didática e sobre trabalhar uma atividade envolvendo trigonometria em sala de aula, a partir de um processo de investigação e recriação da história da Matemática. Na realização de atividades de reconstrução das tábuas de cordas, além de outros materiais didáticos utilizamos o Geoplano Circular Dinâmico (GCD), por nós idealizado e construído como parte desta pesquisa, para auxiliar o aluno na busca de resultados e levantamento de hipóteses. Diante das respostas, das interações e discussões estabelecidas no decorrer das atividades, percebemos que essa abordagem histórica propiciou uma reformulação de conceitos e redescoberta por parte dos alunos, contribuindo para a consolidação do conhecimento sobre trigonometria. Com essa pesquisa, entendemos que é possível mostrar aos alunos uma visão de que o ensino de trigonometria não se resume apenas em conhecer e aplicar as fórmulas e tabelas trigonométricas, que é importante conhecer o seu desenvolvimento e dar significado ao seu estudo, principalmente através de uma percepção histórica.

Palavras-chave: Trigonometria; Tábua de cordas; Ptolomeu.

ABSTRACT

Being seen as a science with its own characteristics, the mathematics research allows its historical dimension, closely related to society and culture along the development of mankind, broad your space of knowledge. This research developed in the Professional Master's Program in Mathematics (PROFMAT), aims to show the importance, to the teaching-learning process, of using history as a teaching resource in investigative lessons, in learning mathematical concepts. For this, we applied to the high school students of E.E. Deputado Esteves Rodrigues, in the last half of 2014, a set of activities with the use of procedures of historical research in the classroom, taking them to walk down the first steps in the construction of the boards of ropes of Ptolemy and Copernicus, and to relate them with the sine table. For that, we elaborate a methodological sequence distributed in three different moments, which allowed, through questionnaires and a block of activities, the collection of data and notes to a qualitative analysis. In this way, initially we present a brief summary of the historical evolution of trigonometry, citing some of his main characters and their contributions in the construction of this field of mathematics, highlighting the importance of the work of Ptolemy and Copernicus that, similarly, built their boards of ropes. In a second moment , we perfomed reconstruction activities of the boards of ropes, and seek a relationship with the sine table. In a third moment, there was a discussion on the use of concrete materials in teaching mathematics as an alternative teaching and about working an activity involving trigonometry in the classroom, from a process of investigation and re-creation of the history of mathematics. In the realization of reconstruction activities of the boards of ropes, as well as other educational materials, we use the Dynamic Circular Geoboard (GCD), we designed and built as part of this survey, to assist the student in finding results and raise hypotheses. On the answers, the interactions and discussions established in the course of activities, we realized that this historical approach led to a reformulation of concepts and rediscovered by the students, contributing to the consolidation of knowledge of trigonometry. With this research, we believe that it is possible to show students a vision where the teaching of trigonometry is not limited only to know and apply the formulas and trigonometric tables, it is important to meet your development and give meaning to your study, primarily through a historical perception.

Keywords: Trigonometry; Board of strings; Ptolemy.

LISTAS DE FIGURAS

LISTAS DE GRÁFICOS

LISTAS DE TABELAS

LISTAS DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1.1. Justificativa: motivações e questões

A experiência adquirida durante 17 anos, atuando como Professor de Educação Básica em escolas públicas da rede estadual de Minas Gerais, e trabalhando com a disciplina matemática em turmas do ensino médio, proporcionou-me momentos de reflexão acerca da melhor forma de abordar os conteúdos. Nem sempre tinha as respostas e, por isso, optava por fazer um ensino na forma tradicional, com a exposição do conteúdo, algumas vezes sem contextualização com atividade prática ou do cotidiano. Isso me incomodava muito, uma vez que percebia o baixo rendimento dos alunos e o desinteresse pela disciplina. Assim, em busca de respostas para essas reflexões, procurei melhorar minha formação docente.

Em 2013, ingressei no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, onde tive a oportunidade de rever conceitos e visualizar possibilidades para o ensino dessa disciplina. Todavia, as primeiras disciplinas cursadas, apesar de melhorar minha formação matemática, não responderam às reflexões postas anteriormente. Isso mudou quando, no primeiro semestre de 2014, cursei a disciplina Tópicos de História da Matemática[1], na qual realizei uma atividade proposta que consistia em redigir em grupo um artigo sobre um dos diversos temas da Matemática. Neste momento, escolhemos o tema trigonometria e, então, tive a oportunidade de aprofundar-me no trabalho da história desse campo do conhecimento. Chamou-me a atenção a evolução das tabelas trigonométricas, mais especificamente a tabela de senos, que originou-se das tábuas de cordas desenvolvidas a partir dos trabalhos de Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.), passando por Ptolomeu (90-168) até Copérnico (1473-1543).

Desse modo, ao fazermos a pesquisa para escrever o artigo, foi possível perceber várias situações em que se poderia aplicar a história da matemática, como por exemplo, utilizar o desenvolvimento histórico da matemática como um recurso didático, através de atividades que buscassem nos textos históricos uma possibilidade

[1] Ministrada pela Professora Doutora Maria Deusa Ferreira da Silva, que é a orientadora nesta dissertação.

de reconstrução do desenvolvimento de tópicos da trigonometria. Após a conclusão do artigo, em conjunto com a orientadora do presente trabalho, entendemos que tínhamos um campo fértil para desenvolver uma dissertação que abordasse a construção das tábuas de cordas, que deram origem à tabela de seno conforme estudamos hoje. Ainda vimos a possibilidade de utilizar a investigação matemática como uma metodologia aliada ao uso da história na construção de um conjunto de atividades de ensino.

Assim, a proposta para o presente trabalho, consistiu em desenvolver um conjunto de atividades voltadas para estudantes do ensino médio, traçando o caminho histórico da evolução do conhecimento matemático, em especial a trigonometria, por meio de atividades investigativas refazendo a construção das tábuas de cordas de Ptolomeu e Copérnico.

Portanto, neste trabalho buscamos responder ao seguinte questionamento: De que forma o uso da história da matemática e de aulas investigativas por meio de reconstrução de tabelas trigonométricas pode propiciar uma aprendizagem significativa de conceitos da Trigonometria?

1.2. Objetivo Geral

- ✓ Despertar o interesse para o uso da história da matemática em aulas investigativas, como um recurso didático para a aprendizagem de conceitos da Trigonometria.

1.3. Objetivos Específicos

- ✓ Perceber a importância do conhecimento da história da matemática na construção de conceitos matemáticos;
- ✓ Analisar o interesse dos alunos frente ao estudo de trigonometria através de aulas investigativas;
- ✓ Proporcionar ao aluno oportunidade de verificação das relações entre elementos de uma circunferência e de polígonos inscritos, através da manipulação de material concreto;

- ✓ Conhecer os procedimentos necessários para a construção de uma tábua de cordas para alguns valores de arcos de uma circunferência.

1.4. Estruturação do trabalho

Este trabalho está estruturado em seis capítulos. No primeiro capítulo, inserimos uma breve discussão sobre nossa motivação e apresentamos os objetivos da nossa pesquisa.

No segundo capítulo, fazemos uma discussão teórica, fundamentando o nosso trabalho com temas tratando da investigação histórica no ensino de matemática, da importância da história da matemática para uma aprendizagem significativa e da utilização de materiais manipuláveis.

No capítulo três, além da metodologia utilizada, apresentamos também a forma como idealizamos e construímos o material manipulável utilizado nesse trabalho, a saber, o Geoplano Circular Dinâmico - GCD. O capítulo quatro apresenta a sequência didática que foi utilizada na pesquisa, e o detalhamento dos questionários e das atividades aplicadas.

No quinto capítulo, discutimos os resultados e fazemos uma análise de todas as informações coletadas, por meio de relatos e respostas aos questionários, durante o desenvolvimento das atividades. Já no capítulo seis apresentamos nossas considerações finais.

2. DISCUSSÃO TEÓRICA

A Matemática a ser ensinada no ensino médio, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), deve contribuir para que os jovens tenham uma visão de mundo, que consigam ler e interpretar a realidade, desenvolvendo capacidades para aplicar em sua vida social e profissional.

Nesse sentido, a Matemática coloca-se como ciência com características próprias de investigação, o que permite que sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura ao longo da evolução da humanidade ampliem o seu espaço de conhecimento. A história da matemática, nesse contexto, permite ao professor criar condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento, especialmente buscando respostas a alguns porquês e, desse modo, contribuindo para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Dessa forma, quando se objetiva desenvolver no aluno a competência de contextualização das ciências no âmbito sociocultural, a Matemática pode desempenhar uma importante função pois, por meio do estudo da história da matemática o professor pode ser capaz de levar o aluno a compreender a construção desse conhecimento

> [...] como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas (BRASIL, 2002, p.117).

A exemplo de outros ramos da matemática, a trigonometria é um vasto campo onde se apresentam diversas situações que permitem ao professor desenvolver atividades práticas e contextualizadas, tendo em vista que foi sendo construída, com a participação de diferentes povos e matemáticos ao longo dos tempos.

Assim, nas próximas seções apresentamos as bases teóricas do presente trabalho, estabelecendo uma ligação entre o uso da história da matemática em sala de aula através de aulas investigativas, incluindo o uso de materiais manipuláveis, de forma a propiciar uma aprendizagem significativa, contemplando os aspectos que são mencionados nas normas legais e que orientam o processo ensino-aprendizagem.

2.1. Investigação histórica no ensino de matemática

A história pode ser vista como uma fonte sempre crescente de informações sobre a cultura de uma sociedade, suas tradições, suas formas de aprender e de ensinar. Perenizados em seus registros históricos, essas informações sobre uma sociedade podem proporcionar uma gama de possibilidades a fim de auxiliar o professor na sua prática educativa, sendo

> [...] praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade. (D´AMBROSIO, 1999, p.97)

Segundo D'Ambrosio (1996a), a matemática está presente em quase todos os campos da atividade humana. Na visão desse autor, a matemática, em seu percurso histórico, tem sua dimensão política, onde sua evolução está intimamente ligada ao contexto social, econômico, político e ideológico da sociedade.

Dessa forma, é possível selecionar uma variedade de temas que à primeira vista (numa primeira leitura) parecem não ter nenhuma relação com a história da matemática, mas que à medida que se aprofunda nas discussões, percebe-se uma estreita relação entre o desenvolvimento desse conhecimento e o da sociedade como um todo. Compartilhamos o pensamento de D'Ambrósio (1999) quando afirma que

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBRÓSIO, 1999, p.97)

Desse modo, a matemática pode ser vista como uma ciência com suas características próprias e detentora de uma história onde se vê sua construção ligada à solução de situações-problemas do cotidiano, vividas por diversas sociedades e diferentes povos, em épocas distintas que se torna um vasto campo para discussões e trabalhos sobre a sua utilização nos contextos da sociedade atual (MENDES, I., 2009a).

Ainda, destacamos as ideias de Caraça[2], citadas em Ponte (2013), onde percebemos dois modos de se ver a matemática: ou a vemos como um todo harmonioso, onde as ideias se encadeiam, obedecendo a uma sequência lógica e sem contradições, a título de exemplo o que encontramos nos livros didáticos, ou a vemos como um conhecimento progressivo, observando a maneira como foi elaborada. Nesse segundo modo, descobrimos que esse processo foi lento, com contradições e hesitações.

Percebe-se, assim, que o conhecimento matemático não foi construído de forma linear e cumulativa, nem tampouco isolado das outras ciências, sem nenhuma contextualização sócio – cultural. Sua história, pelo contrário, mostra conflitos, alterações significativas de suas bases teóricas (seus conceitos, teorias, hipóteses) e aponta para uma construção coletiva, inter-relacionando com outros campos do conhecimento e na solução de problemas do cotidiano (VALDÉS, in MENDES, I., 2006, p. 19). Nas palavras de Valdés,

> [...] trabalhar o ensino de matemática numa perspectiva histórica nos permite mostrar, entre outras coisas, que a matemática é um conjunto de conhecimentos em evolução contínua e que nesta evolução desempenha, amiúde, um papel de primeira ordem, sua inter-relação com outros conhecimentos e a necessidade de resolver determinados problemas práticos. (VALDÉS, in MENDES, I., 2006, p. 20)

Nas discussões sobre esse tema, conforme exposto anteriormente, percebemos a busca por uma interação entre a história da matemática, com seus aspectos cognitivos utilizados na construção desses conhecimentos, e a aprendizagem matemática, a fim de se desenvolver propostas sobre o ensino de Matemática apoiado em sua construção histórica.

Nesse sentido, a perspectiva histórica no ensino aprendizagem de Matemática possibilita o entendimento de como essa ciência foi construída, os passos percorridos, os erros e percursos à vezes equivocados em sua evolução. Uma proposta metodológica que utiliza esse enfoque histórico, no nosso entendimento,

---

[2] Bento de Jesus Caraça (1901-1948) – Matemático português, autor do livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Lisboa: Sá da Costa, 1958.

atuará como motivação para o aluno, que terá oportunidade de descobrir as origens de conceitos utilizados em sala de aula.

Segundo D'Ambrosio (1996b) quando se utiliza a História da Matemática em atividades de ensino deve-se explorar esse caráter motivador desse conhecimento, apresentando aos alunos atividades diferenciadas, com curiosidades e que busquem despertar o seu interesse.

Sobre isso, Mendes, I. (2009a, p. v) afirma que uma proposta é utilizar a história da Matemática por meio de atividades investigativas e problematizadoras da matemática ensinada na escola. Afirma ainda que através de uma atividade de investigação e recriação da história da Matemática é possível compreender determinados aspectos cognitivos envolvidos no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Acerca dessas atividades investigatórias, a Educação Matemática, como área de estudo que se relaciona com os problemas que abrangem o processo de ensino da matemática, tem enfatizado a importância da perspectiva histórica e da sua fundamentação epistemológica na formação científica. Esse pensamento, que compartilhamos, também encontramos em Mendes, I. (2009a), quando afirma que

> Entre os vários subsídios já apresentados por diversos pesquisadores e estudiosos da Educação Matemática, é possível ditar a proposição de uso da história da Matemática como fonte geradora de conhecimento matemático na aprendizagem dos estudantes." (MENDES, I., 2009a p.3)

Esse enfoque histórico nos faz perceber uma tendência à redução do ensino baseado na memorização de fórmulas e transmissão unilateral de um conteúdo visto como pronto e acabado (método tradicional), sem buscar a origem desse conhecimento, como algo que apareceu por acaso, em favor de incorporar um trabalho da história da matemática, onde nós possamos, enquanto professores, buscar atividades adequadas, coerentes e que facilitem a construção do conhecimento por parte dos alunos.

Essa utilização da história da Matemática, segundo Mendes (2009a, p. 4 - 5) é vista por professores da educação básica como uma forma de melhor compreender a epistemologia dos diversos conceitos matemáticos, e podendo servir em sua prática docente como um recurso pedagógico. O professor, de posse desse conhecimento, deve desenvolver práticas na abordagem de conhecimentos matemáticos, que possibilitem aulas investigativas com o uso da história da Matemática. Baseado nesses pensamentos que desenvolvemos as atividades do presente trabalho, com os conteúdos da trigonometria.

A efetivação da transmissão desse conhecimento, segundo D'Ambrosio (1996b), além do domínio do conteúdo da disciplina que indiscutivelmente o professor de matemática deve ter, em sua atividade docente, passa pela compreensão que deve ter das origens, das motivações de seu desenvolvimento e das justificativas da necessidade desse conhecimento fazer parte da organização curricular. Nesse processo, recorre-se à história da matemática que tem como um dos principais objetivos destacar esses fatos, fornecer informações e interpretações ligadas ao corpo de conhecimentos que é objeto de trabalho.

Contudo, nesse momento em que o professor se vê diante da tomada de decisão sobre qual a melhor forma de abordar o conteúdo, há de se ter bem definido o que se entende por atividade investigativa e histórica no ensino de Matemática. Para Mendes, I. (2009a) a atividade investigativa no ensino aprendizagem de Matemática é

> [,,,] o encaminhamento didático dado ao processo de geração de conhecimento matemático, que provoca a criatividade e o espírito desafiador do aluno para encontrar resposta às suas indagações cognitivas e construir essas ideias sobre o que pretende aprender.(MENDES, I., 2009a p. 7)

Já Ponte (2013, p. 13), aponta que "para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades."

A investigação histórica no ensino de Matemática, pode ser utilizada para "aquelas atividades investigatórias de ensino que conjugadas com o desenvolvimento histórico da Matemática, trazem um significado mais profundo ao conhecimento construído na sala de aula." (MENDES, I., 2009a, p.8) Tais atividades podem ser manipulativas ou não, mas que, dentro de uma contextualização, favorecem a interatividade entre o aluno e o conceito a ser estudado.

Sobre esse discurso histórico, encontramos em Miguel e Miorim (2011) uma análise das diferentes formas de como ele tem se manifestado em trabalhos científicos brasileiros, ao confrontar os diferentes argumentos que reforçam ou questionam a participação da história da matemática no processo de ensino-aprendizagem. Os autores fazem uma reflexão crítica sobre o posicionamento de alguns estudiosos que defendem que o conhecimento histórico desperta o interesse do aluno pelo conteúdo que lhe está sendo ensinado e acreditam que uma abordagem histórica significativa, orgânica e esclarecedora pode modificar qualitativamente as práticas escolares, e que a história da Matemática

> [...] pode e deve se constituir ponto de referência tanto para a problematização pedagógica quanto para a transformação qualitativa da cultura escolar e da educação escolar e, mais particularmente, da cultura matemática que circula e da educação matemática que se promove e se realiza no interior da instituição escolar. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p.152)

Para Miguel e Miorim (2011, p.33), a manifestação da história da matemática exercendo um papel importante na busca por métodos pedagogicamente adequados e interessantes para a abordagem de certos tópicos da Matemática escolar, encontra-se presente na literatura, pelo menos, desde o século XVIII. Segundo esses autores, a partir da década de 80 existe uma crescente ampliação de manifestações da participação da história em textos dirigidos à prática pedagógica de Matemática, sendo vista como uma fonte de busca da compreensão e dos significados para o ensino aprendizagem.

Diante do exposto, percebemos que uma proposta de ensino, que faz uso da história da matemática, deve fornecer a base em que o conhecimento a ser estudado foi construído por meio de um processo investigatório, por meio de atividades que situem o estudante no problema enfrentado pela sociedade da época e, a partir das inter-relações na sala de aula, ele possa construir o seu conhecimento e, na medida do possível, ser capaz de aplicá-lo em situações do cotidiano atual.

Para isso, incluímos no presente trabalho uma metodologia com a utilização de aulas investigativas, explorando os aspectos históricos da construção do conhecimento de conceitos da trigonometria, de forma a relacionar a construção das tábuas de cordas com as tabelas trigonométricas utilizadas na atualidade, que resultou na construção e aplicação de um artefato que denominamos de Geoplano Circular Dinâmico – GCD, que em muito facilitou a compreensão de vários conceitos.

2.2. A História da Matemática como um organizador prévio no contexto da teoria da aprendizagem significativa

Quando falamos em aprendizagem com significado para o aluno, tomamos como base fundamental a teoria da aprendizagem significativa proposta por David Ausubel[3]. A teoria ausubeliana, que propõe uma aprendizagem com atribuição de significados, com a incorporação à estrutura cognitiva do aluno de novos conhecimentos, ancorados nos conhecimentos prévios e na disposição em aprender (MOREIRA, 1982, 2008), tem sido estudada e enriquecida por diversos autores, que defendem a sua implementação na prática escolar.

Portanto, é possível encontrarmos diversas propostas metodológicas baseadas na teoria da aprendizagem significativa que envolvem o ensino de matemática. Em Brighenti (2003), contrapondo à concepção tradicional de ensino, na qual o aluno ouve passivamente o que lhe é transmitido por meio de aulas expositivas, encontramos uma proposta metodológica diferente, no desenvolvimento de ações para facilitar o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos, incluindo os trigonométricos, fundamentadas na teoria ausubeliana. A autora ainda enfatiza que, nessa teoria a aprendizagem se verifica quando o novo conhecimento é acrescentado aos conceitos já existentes, chamados *conceitos subsunçores*. Quando esses conceitos são inexistentes ou ainda pouco apreendidos, o professor pode utilizar-se dos organizadores prévios, que servem de ponte entre o que o aluno já sabe e o novo conhecimento. Os organizadores devem ser apresentados aos alunos ao se iniciar um novo assunto, como materiais introdutórios que explicitem as novas ideias a serem assimiladas, preparando-os e motivando-os para o conteúdo que será desenvolvido. (BRIGHENTI, 2003, p.24)

Nessa sua proposta, Brighenti (2003) sugere ações que permitem ao aluno utilizar todo o seu conhecimento prévio, habilidades e técnicas já adquiridos em sua estrutura cognitiva para apoiar o novo conhecimento. A autora sugere como organizador prévio o uso da história da Matemática de forma que “antes de se ter os primeiros contatos com os conceitos das razões trigonométricas no triângulo

---

[3] David Paul Ausubel (1918-2008), psicólogo norte-americano que publicou sobre a teoria da aprendizagem significativa em 1963 (*The Psychology of Meaningful Verbal Learning*).

retângulo, o professor apresente aos alunos um texto histórico" (BRIGHENTI, 2003, p.40). Como exemplo, a resolução de problemas do cotidiano que eram resolvidos pelos egípcios do séc. VI a.C., como base para o entendimento desses novos conceitos.

Em sintonia com essa concepção Nunes et al. (2010) também se fundamentam na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (1963) quando fazem uma reflexão sobre a utilização da História da Matemática como um organizador prévio e apresentam como proposta

> [...] uma conjunção entre a aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos e sua trajetória histórica, evidenciando a necessidade de se trabalhar com os alunos, primeiramente, atividades que os coloquem em contato com a construção das ideias matemáticas. (NUNES et al. 2010, p.538)

Portanto, as investigações históricas que visam à construção epistemológica dos conceitos se constituem em uma das formas de se trabalhar tais atividades, num contexto histórico, evidenciando esse campo do conhecimento como uma ciência em construção, que se inter-relaciona com diversas áreas do conhecimento. Essas investigações, se tratadas como recurso pedagógico em atividades de exploração, descoberta e reinvenção, podem contribuir para uma aprendizagem significativa, e favorecer as conexões entre informações novas e antigas. (NUNES et al. 2010, p. 542 a 544)

Ao escolhermos os sujeitos do presente trabalho, identificamos que os conteúdos de trigonometria que os alunos da turma haviam estudado nas séries anteriores seriam, dentro da teoria da aprendizagem significativa, os subsunçores (trigonometria no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico). Através das atividades que apresentaremos, a história da matemática foi utilizada como um organizador prévio, com a intenção de estabelecer a ligação entre aqueles subsunçores e o novo conhecimento sobre funções trigonométricas, envolvendo o processo de construção das tábuas de cordas.

2.3. Utilização de materiais manipuláveis em atividades investigatórias na sala de aula

Outro tema que surge, quando aprofundamos uma discussão sobre o uso de atividades de investigação histórica nas aulas de matemática, diz respeito à utilização de materiais manipuláveis como um recurso pedagógico.

Sobre isso, Fiorentini e Miorim (1990) apontam que, há momentos em que os professores, em reuniões, encontros e conversas informais, discutem sobre como repensar a prática ou a metodologia utilizada para que o aluno efetivamente construa o conhecimento pretendido. Percebe-se o interesse pelos materiais manipuláveis, os quais podem ser uma solução para os problemas de aprendizagem vividos na rotina da sala de aula. Os referidos autores abrem uma discussão sobre a eficácia da utilização dos materiais concretos como meios de garantir uma efetiva aprendizagem matemática, quando afirmam que, “Na verdade, por trás de cada material, se esconde uma visão de educação, de matemática, do homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica.” (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p.2)

Nesse trabalho os autores apresentam argumentos dos que são a favor da utilização desses materiais e daqueles que veem com ressalvas essa prática, e propõem uma reflexão mais profunda acerca do tema.

Nessa discussão, estamos de acordo com os autores sobre a escolha do material concreto a ser utilizado em uma atividade com alunos na sala de aula, pois “[...] devemos refletir sobre a nossa proposta político-pedagógica; sobre o papel histórico da escola, sobre o tipo de aluno que queremos formar, sobre qual matemática acreditamos ser importante para esse aluno.” (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p.4)

Pensando dessa forma, ao propormos em nosso trabalho as atividades de investigação histórica, buscamos idealizar, paralelamente, um material concreto para o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de trigonometria, de forma a agregar possibilidades de exploração e auxílio ao professor para tornar efetiva e significativa a aprendizagem do aluno.

Esse ponto de vista encontramos também em Lorenzato (2006), quando afirma que diversos educadores ressaltaram, nos últimos séculos, a importância da utilização de objetos de apoio visual ou visual-tátil como facilitadores no processo de ensino-aprendizagem, onde “cada educador, a seu modo, reconheceu que a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem.” (LORENZATO, 2006, p.4), ficando evidenciado o papel relevante que um material manipulável pode ser capaz de realizar na aprendizagem do aluno em sala de aula.

Contudo, pode-se supor, a princípio, que com o desenvolvimento dos recursos computacionais, tornou-se obsoleto o uso do material didático manipulável no ensino de trigonometria, uma vez que diversos softwares de geometria dinâmica estão disponíveis para utilização em laboratórios de informática para esse fim. Apesar de nem toda escola pública contar com o laboratório de informática, um outro fator que aponta para a continuidade de utilização do material didático manipulável – MDM é que esses materiais

> [...] tem-se mostrado um eficiente recurso para muitos alunos que, não compreendendo a mensagem (visual) da tela do computador, recorrem ao MD (manipulável) e então prosseguem sem dificuldades com o computador. Assim sendo, para muitos alunos, o MD desempenha a função de um pré-requisito para que se dê a aprendizagem através do computador. (LORENZATO, 2006, p.32)

A utilização de MDM, segundo Nacarato (2005) vai além de qualquer tendência didático-pedagógica, uma vez que a sala de aula apresenta uma complexidade que não pode ser subjugada. Ao contrário, esse fato permite ao professor, em seu planejamento, escolher a melhor tendência para o ensino do conteúdo, não necessariamente única, bem como utilizar de materiais diversos. A autora afirma que nesse contexto, a utilização de materiais manipuláveis pode perpassar qualquer uma das tendências escolhida (NACARATO, 2005, p. 5)

Corroborando com o exposto anteriormente, sobre a utilização de MDM, encontramos em Ottesbach e Pavanello (2009) uma experiência de formação continuada de professores de matemática visando à capacitação para o uso de materiais manipuláveis, e em Rodrigues e Gazire (2012) um trabalho bibliográfico, tipo metanálise, sobre a importância da correta utilização de materiais didáticos manipuláveis no ensino de matemática. Em ambos trabalhos os autores defendem que os materiais didáticos manipuláveis podem intervir fortemente na aprendizagem dos alunos, tornando-a mais significativa e prazerosa.

Com base nessa discussão, em nossa pesquisa optamos por incluir o uso de material manipulável como um recurso didático nas atividades de investigação histórica. Esse recurso seria um meio auxiliar para que o aluno pudesse fazer experimentações, levantamento de hipóteses e chegar a conclusões sobre conhecimentos da circunferência e de polígonos regulares inscritos.

2.4. A História da Matemática e o ensino de trigonometria no Conteúdo Básico Comum (CBC) em Minas Gerais

A proposta curricular para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental e Médio em todas as Escolas Estaduais de Minas Gerais é apresentada através do Conteúdo Básico Comum (CBC), pela Secretaria de Estado de Educação (SEE), que tem por finalidade estabelecer os conhecimentos, as habilidades e competências a serem adquiridos e desenvolvidas pelos alunos na educação básica, bem como as metas a serem alcançadas pelo professor a cada ano.(MINAS GERAIS, 2007)

O CBC para o ensino de matemática expressa os aspectos fundamentais dessa área do conhecimento; aqueles que são essenciais dentro da disciplina, para o ensino e para a aprendizagem do aluno. Ele serve como base para a elaboração de avaliações externas à escola, a exemplo do Programa de Avaliação da Educação Básica (PROEB) e do Programa de Avaliação da Aprendizagem Escolar (PAAE), além de auxiliar as escolas no estabelecimento de seu projeto pedagógico.

O CBC propõe a adoção de estratégias de ensino de forma a permitir ao professor conhecer não apenas o que se ensina, mas para quem se ensina. Isso permitirá ao professor traçar planos de ação bem como orientá-lo na escolha da metodologia a ser utilizada de forma a obter um melhor aproveitamento no processo ensino-aprendizagem dessa disciplina.

Para o ensino médio, o CBC está fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) e nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+ : Ciências da Natureza, Matemática e suas

Tecnologias). Para esse nível de ensino, o CBC reitera a necessidade de um ensino de Matemática contextualizado, sendo a contextualização um instrumento bastante útil e capaz de estimular a criatividade, o espírito inventivo e a curiosidade do aluno, tornando-o co-participativo no processo de sua aprendizagem. O conhecimento matemático apresentado através de um tratamento contextualizado tem por objetivo

> [...] criar condições para uma aprendizagem motivadora que leve a superar o distanciamento entre os conteúdos estudados e a experiência do aluno, estabelecendo relações entre os tópicos estudados e trazendo referências que podem ser de natureza histórica, cultural ou social, ou mesmo de dentro da própria Matemática. (MINAS GERAIS, 2007, p.40)

O CBC do ensino médio apresenta uma seleção de tópicos e temas agrupados nos seguintes eixos temáticos:

- Números, Contagem e Análise de Dados;
- Funções Elementares e Modelagem;
- Geometria e Medidas.

De acordo com o CBC, esses eixos são os mesmos para os três anos do Ensino Médio, sendo que a distribuição dos conceitos e métodos para o primeiro ano se destina à formação básica, abrangendo conceitos de todos os temas estruturadores. Para o segundo ano, os conceitos e métodos destinam-se ao aprofundamento enquanto, para o terceiro ano, destinam-se à complementação da formação, permitindo a escolha de tópicos complementares. (MINAS GERAIS, 2007, p.42),

Nessa distribuição, encontramos o conteúdo de Trigonometria nas propostas dos três anos do ensino médio, integrando o eixo temático *Geometria e Medidas*. Dessa forma, inicia-se o trabalho de trigonometria no primeiro ano com o tópico *Trigonometria no triângulo retângulo*, que integra o tema *Semelhança e Trigonometria*, conforme o Quadro 1.

Quadro 1: Tópico para o ensino de trigonometria no 1º ano Ensino Médio

Eixo Temático III Geometria e Medidas *Tema 7: Semelhança e Trigonometria*	
TÓPICOS	**HABILIDADES**
15. Trigonometria no triângulo retângulo	15.1. Reconhecer os seno, o cosseno e a tangente como razões de semelhança e as relações entre elas. 15.2. Resolver problemas que envolvam as razões trigonométricas: seno cosseno e tangente. 15.3. Calcular o seno, cosseno e tangente de 30^0, 45^0, 60^0.

Fonte: CBC – Minas Gerais (2007)

Para esse tópico, são apresentadas algumas sugestões de atividades no CBC, dentre as quais destacamos a seguinte:

> Propor que os alunos desenvolvam projetos para a contextualização histórica do uso da semelhança de triângulos, produzindo materiais que possam ser divulgados em eventos para a comunidade escolar ou não. (MINAS GERAIS, 2007, p.71)

Percebe-se nessa sugestão uma referência à utilização da história da matemática no desenvolvimento do tópico sobre semelhança de triângulos. Pensamos que isto poderia se estender também para uma contextualização histórica sobre a origem da trigonometria: quem foram seus construtores e quais trabalhos foram desenvolvidos em diversos campos da ciência, a exemplo da astronomia e da agrimensura. Uma abordagem sobre esse assunto é proposta no CBC para o 3º ano do ensino médio, que contém a seguinte proposta de atividade para o tópico *Funções trigonométricas*, dentro do tema *Semelhança e Trigonometria*: “Propor atividades de pesquisas mostrando a motivação histórica da extensão da trigonometria no triângulo retângulo ao círculo trigonométrico.” (MINAS GERAIS, 2007, p.77)

Além da abordagem histórica no ensino de matemática, percebemos também uma proposta de utilização de materiais manipuláveis no ensino de trigonometria no 2º ano, referente ao tópico *Trigonometria no círculo e Funções trigonométricas*, dentro do tema *Semelhança e Trigonometria*, nos seguintes termos:

> [...] - com papelão, sobre o qual desenha-se um círculo de raio 1, palito (como raio) que deve estar atado ao centro por um prego (de forma a permitir que o palito possa girar), linha presa à extremidade do palito e um pequeno peso na outra extremidade, marcar uma escala ou colocar uma régua graduada sobre dois diâmetros perpendiculares (que funcionarão como o eixo das abscissas e o das ordenadas). (MINAS GERAIS, 2007, p. 73)

Tal proposta possibilita a introdução ao conceito das funções seno e cosseno, o estudo do sinal dessas funções, bem como o cálculo dos valores das razões trigonométricas de alguns ângulos notáveis.

Ainda sobre esse tema, encontramos uma proposta de construção e utilização de material manipulável nas Orientações pedagógicas de Matemática. Essas Orientações Pedagógicas e os Roteiros de Atividades, são partes integrantes e fundamentais da Proposta Curricular do estado de Minas Gerais, sendo disponibilizadas no Centro de Referência Virtual do Professor – CRV, juntamente com o CBC, e apresentam sugestões para os professores para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo, que apontamos aqui:

> Para as atividades práticas de medição de alturas inacessíveis pode-se construir um teodolito rústico com um canudo fixado num transferidor para medir ângulos e uma fita métrica para medir as distâncias. (MINAS GERAIS,2015)

Pelo exposto, a utilização da história da Matemática e de material manipulável no desenvolvimento de conteúdos relacionados com a trigonometria, estão presentes tanto no CBC para o ensino de Matemática, quanto em suas partes integrantes, ou seja, nas Orientações Pedagógicas e nos Roteiros de Atividades.

2.5. Alguns trabalhos sobre o tema

Sobre a utilização da história da Matemática como um recurso didático auxiliar no desenvolvimento de conceitos trigonométricos, Silveira e Filho (2013) apresentaram os resultados de uma pesquisa realizada em 2010 com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental na Escola Municipal de Ensino Fundamental Profa. Alice Couto Moraes, localizada em Santo Antônio do Aracanguá, no Estado de São Paulo. Utilizando uma metodologia de resolução de problemas, os autores, primeiramente, liam um texto contendo um panorama histórico sobre a trigonometria seguido de comentários e discussões. Em seguida, os alunos realizavam as atividades individualmente, e depois cada um apresentava os resultados obtidos aos colegas que, juntos, chegavam à conclusão de qual método de resolução seria o correto a ser utilizado. Para esses autores, a utilização da história da Matemática como apoio ao processo de ensino e aprendizagem foi de importância fundamental, levando-os a perceber, durante a aplicação, um notável interesse e uma motivação nos alunos, que queriam entender as origens dos conceitos matemáticos. Para os autores, foi possível perceber também, que a compreensão das origens dos conceitos trabalhados implicou em uma maior facilidade na interpretação dos problemas a serem resolvidos.

Das atividades trabalhadas com os alunos, Silveira e Filho (2013) apresentaram apenas alguns recortes, em forma de relatos para a atividade que envolvia as tabelas trigonométricas (atividade 2 do referido trabalho). Segundo esses autores, naquela atividade foi trabalhada a tabela trigonométrica e as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Relatam que inicialmente, os alunos fizeram observações sobre os valores do seno e do cosseno dos arcos complementares, sendo posteriormente apresentadas as razões trigonométricas para aplicação na resolução de situações-problemas. Ainda segundo os autores, os alunos tiveram dificuldades na interpretação e representação das situações-problemas por não saberem aplicar as fórmulas adequadas, os quais foram orientados a representar através de desenhos (SILVEIRA; FILHO, 2013, p.56). Esse fato nos motivou a desenvolver as atividades no presente trabalho com a utilização da história da matemática por meio da investigação sobre as origens das razões trigonométricas, visando uma melhor compreensão por partes dos alunos pesquisados.

Encontramos em Bortoli (2012) uma pesquisa similar com alunos do Ensino Médio, onde foram analisadas as possibilidades de inserção da História da Matemática no ensino e na aprendizagem da Trigonometria presente no triângulo retângulo. A pesquisa foi realizada em 2011, em uma escola da rede particular de ensino da cidade de Caxias do Sul, no Rio Grande do Sul, tendo uma proposta de envolver os alunos com os conteúdos de Trigonometria, utilizando para esse fim, a História da Matemática como ponto de partida, enfatizando problemas históricos e as contribuições deixadas pelos estudiosos para a matemática escolar. Em seu trabalho, a autora pôde perceber que ensinar o conteúdo de Trigonometria no triângulo retângulo, relacionando-o à sua evolução histórica, bem como aos saberes matemáticos presentes no cotidiano do aluno e da sociedade, tornou o processo educativo mais interativo, obtendo um maior interesse dos alunos. Acrescenta a autora, que as atividades envolvendo o discurso histórico estimularam a criatividade dos alunos, gerando uma melhor compreensão e acrescentando mais significados aos conteúdos estudados.

Também em Mendes, M. (2010) encontramos outro trabalho realizado com alunos do curso de Licenciatura em Matemática sobre a construção de uma tabela de senos de acordo com a obra de Nicolau Copérnico[4], intitulada *De revolutionibus orbium coelestium* (A revolução das orbes celestes), como forma de subsidiar a análise que a autora faz sobre as implicações do conhecimento dessa obra na formação do professor de Matemática. Para a autora, isso pode levar o futuro professor de Matemática a perceber que os passos percorridos para a construção dessa ciência é parte integrante do processo da construção da sociedade. Esse processo de reconstrução da tabela de cordas de Copérnico proposto pela autora e realizado com os alunos da graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, no primeiro semestre letivo de 2008, na turma de Didática da Matemática, tornou-se o principal referencial para a construção das atividades que propomos em nosso trabalho.

O trabalho de Mendes, M. (2010) apresenta um bloco de oito atividades, numa abordagem histórica para construção de tabelas trigonométricas. Tais atividades levam os participantes a perfazerem os caminhos de Copérnico na construção de suas tábuas de cordas para depois relacioná-las com as trigonométricas atuais. Segundo a autora, o conhecimento do processo de construção do conhecimento matemático auxiliou os futuros professores para uma reflexão sobre o papel do educador, de como ele precisa de um maior envolvimento com o processo educativo, para estar intimamente ligado ao contexto sociocultural da escola e de seus alunos, a fim de buscar soluções para as diversas questões pedagógicas que possam surgir em seu cotidiano.

[4] Nicolau Copérnico (1473 – 1543): físico polonês, autor da teoria do heliocentrismo, provando que a Terra gira como planeta em redor do Sol, o que contestou a teoria geocêntrica de Ptolomeu.

3. METODOLOGIAS DO TRABALHO

3.1. Características do Trabalho

Na busca para enfatizar a importância da utilização de procedimentos de investigação histórica em sala de aula, como forma de motivação para os alunos em relação ao ensino do conteúdo de trigonometria, observamos e registramos o comportamento e as reações dos pesquisados no processo ensino-aprendizagem dentro da sala de aula, por meio de relatos e entrevistas que foram fundamentais para a validação do nosso estudo. O aluno, com suas ideias e questionamentos, foi levado a expressar-se como sujeito participativo em todo o nosso processo de pesquisa, onde seus discursos e narrativas foram úteis para a construção de significados.

Nessa perspectiva, ao definirmos a metodologia de pesquisa a ser utilizada no presente trabalho, percebemos que esta se configurou como uma pesquisa de abordagem qualitativa, na qual

> [...] privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos, etc. (BICUDO; In: BORBA; ARAÚJO, 2013, p.117)

Caracterizado dessa forma, o termo pesquisa qualitativa designa diversas abordagens à pesquisa em ensino que, segundo Moreira (2011, p.46 e 47), trazem como característica básica o interesse central na questão dos significados atribuídos pelos participantes, suas ações e interações no ambiente de estudo. Segundo esse autor, o pesquisador fica imerso no ambiente natural onde se dá o estudo do fenômeno de interesse, participando ativamente das ações e coletando dados de natureza qualitativa que serão objetos de análise. (MOREIRA, 2011, p.76)

Dentro dessa abordagem qualitativa, utilizamos a metodologia da pesquisa-ação, tendo em vista que visávamos procurar uma melhoria em sua prática de ensino na apresentação de uma proposta de enfoque histórico para o ensino de trigonometria. Segundo Moreira (2011, p. 92), o objetivo dessa metodologia é a melhoria das práticas e da compreensão de situações através da colaboração de todos os envolvidos no processo investigativo.

A pesquisa-ação é um processo investigativo de intervenção onde, segundo Fiorentini (In: BORBA; ARAÚJO, 2013), as práticas investigativa, reflexiva e educativa se completam. Para esses autores, não obstante seu caráter colaborativo e participativo, a pesquisa-ação também se caracteriza quando um professor desenvolve uma intervenção intencionada e planejada, realizando uma investigação sobre sua prática.

3.2. Perfil dos Sujeitos e Ambiente onde se deu a Pesquisa

Os sujeitos do presente trabalho são 30 alunos do 3º ano do Ensino Médio, turma A-2014, da Escola Estadual Deputado Esteves Rodrigues, localizada no município de Montes Claros/MG, na qual esse pesquisador lecionou a disciplina de Matemática no período de julho de 2002 a dezembro de 2014.

A escolha da turma se deu pelo fato do pesquisador ser professor da mesma, o que facilitaria o desenvolvimento da pesquisa, do planejamento até a avaliação final. Por conhecer os alunos, a aplicação das atividades e a coleta de dados seria um facilitador para a receptividade às atividades, pelo entrosamento entre os alunos e o professor pesquisador.

Optamos por desenvolver os trabalhos nessa turma do 3º ano, além do exposto no parágrafo anterior, também pelo fato de ser previsto o ensino de trigonometria nessa etapa do ensino, haja vista que, segundo as orientações do CBC, conforme exposto na seção 2.4, no planejamento anual para a disciplina de Matemática em 2014, a equipe de professores da escola optou por distribuir aquele conteúdo nas três séries do ensino médio. Dessa forma, apesar do tópico que trata das razões trigonométricas no triângulo retângulo figurar como parte do conteúdo a ser desenvolvido no 1º ano do ensino médio, o planejamento previa o ensino no 3º ano das funções trigonométricas, como conteúdo complementar. Sendo assim, o trabalho desenvolvido serviria como uma revisão dos conhecimentos adquiridos e como uma introdução ao conteúdo a ser ensinado.

Antecedendo ao início dos trabalhos com os alunos do ensino médio, optamos por testar a validade das atividades e dos materiais que seriam utilizados em sala de aula. Esse momento ocorreu durante a IV Semana de Matemática, realizada na

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Campus Vitória da Conquista, em outubro de 2014. Na oportunidade, ministramos um minicurso intitulado *Trigonometria: atividades utilizando o Geoplano Circular Dinâmico numa investigação histórica de reconstrução das tábuas de cordas de Ptolomeu e Copérnico*, com a participação de uma turma de 12 alunos da referida instituição, dos cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física. Nesse cenário, por meio dos relatos dos participantes, vislumbramos a coleta de informações que possibilitariam o desenvolvimento e aprimoramento dos elementos do presente trabalho.

3.3. Instrumentos de Coletas de Dados

Para um bom desenvolvimento dos trabalhos, utilizamos como instrumentos para a coleta de dados questionários e atividades dirigidas, feitas em sala de aula com discussões com toda a turma, sendo devolvidas pelos alunos do professor pesquisador.

Nas atividades realizadas com os alunos do ensino médio, aplicamos inicialmente um questionário, para verificar os conhecimentos prévios e opiniões sobre o ensino de trigonometria. No decorrer das aulas foram aplicadas quatro atividades didáticas, e finalizamos com a aplicação de um questionário de opiniões, incluindo questões de verificação de aprendizagem.

Os instrumentos utilizados foram elaborados e propostos com o objetivo de fornecer os dados necessários para uma posterior análise dos aspectos qualitativos envolvidos na pesquisa de campo. Esses instrumentos permitiram a coleta de opiniões e também a observação dos aspectos fundamentais das inter-relações durante a realização das atividades em sala de aula. Tais instrumentos possibilitaram a coleta de dados sobre o contexto das atividades dirigidas na utilização do material didático manipulável, desenvolvido para a utilização nas atividades propostas.

3.4. Técnica para a Análise dos Dados

Após a aplicação dos instrumentos de coleta de dados, os mesmos foram organizados de forma a permitir uma leitura criteriosa, após a qual seguiu-se uma atividade de interpretação e análise das informações obtidas.

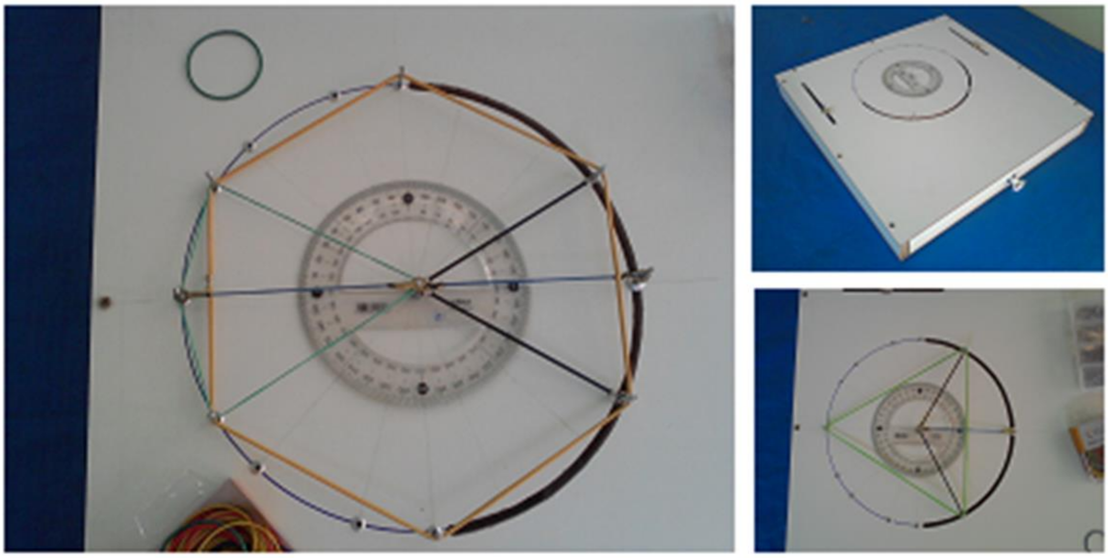
Os resultados dos questionários analisados foram configurados em forma de gráficos em valores percentuais das opiniões dos pesquisados, enquanto que as atividades e as anotações foram realizadas durante a aplicação das mesmas, e permitiram uma análise das categorias construídas para subsidiar uma reflexão qualitativa sobre a viabilidade da proposta do nosso trabalho.

3.5. Idealização do Geoplano Circular Dinâmico – GCD

Durante a definição da metodologia que seria utilizada no desenvolvimento do tema escolhido para a presente dissertação, optamos por incluir a utilização de materiais didáticos manipuláveis nas atividades em sala de aula. Na busca de materiais didáticos disponíveis, não encontramos nenhum que se adequasse à nossa proposta, uma vez que queríamos apresentar aos alunos os elementos de uma circunferência, os polígonos regulares inscritos e algumas relações entre seus elementos. Nossa intenção era encontrar um material no qual pudéssemos alterar certas medidas, posições e formas durante a atividade, permitindo aos alunos fazer experimentações, levantamento de hipóteses e redescobertas. Nessa concepção, o material didático deveria estar próximo dos geoplanos que atualmente são utilizados em atividades de ensino de geometria, porém que tivesse uma certa flexibilidade para a escolha de pontos em uma circunferência.

Dessa forma, criamos um geoplano circular dinâmico (GCD) conforme Figura 1, que permite variar principalmente o tamanho da corda de um arco de circunferência. A partir desse momento, iniciamos o desenvolvimento e a construção do GCD como parte desta dissertação.

Figura 1: Geoplano Circular Dinâmico (GCD)



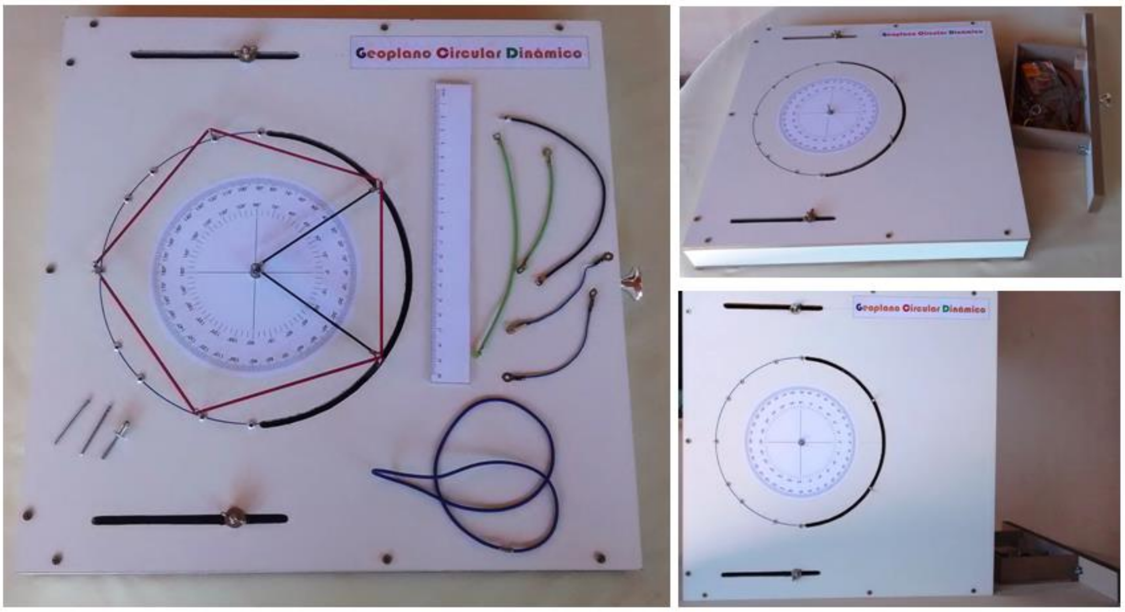
Fonte – Arquivo do autor

O Geoplano Circular Dinâmico (GCD) foi criado para suprir as dificuldades encontradas nos geoplanos comuns (estáticos), uma vez que naquele tipo de geoplano, as representações geométricas são limitadas pela quantidade de pontos (pinos) que possuem.

Com esse material, as possibilidades de representações na circunferência são ampliadas em decorrência dos dois pontos móveis que ele possui. Isso torna possível representar, por exemplo, a variação do tamanho de uma corda em função do arco que esses pontos determinam ao percorrerem a circunferência, para valores em 0º e 180º, ligando-os por um fio extensível.

O Geoplano Circular Dinâmico (GCD), em sua versão final (Figura 2), é um material didático para ser manipulado pelo aluno ou grupo de alunos, auxiliando na redescoberta de conceitos geométricos e na previsão de resultados.

Figura 2: Geoplano Circular Dinâmico (GCD) e seus elementos



Fonte: Arquivo do autor

O GCD é um artefato de baixo custo e pode ser construído com materiais encontrados em lojas de armarinho e em lojas de venda de materiais para confecção de móveis.

4. SEQUÊNCIA DIDÁTICA DAS ATIVIDADES

Para o desenvolvimento do nosso trabalho, elaboramos uma sequência metodológica distribuída em três momentos distintos.

Inicialmente aplicamos um questionário para coleta de opinião e em seguida apresentamos um breve resumo da evolução da trigonometria, destacando o percurso histórico para a construção das tábuas de cordas por meio de estudo dirigido com textos e de apresentação de slides.

Em um segundo momento, realizamos quatro atividades visando a reconstrução das tábuas de cordas e a relação com a tabela do seno, onde utilizamos além de outros materiais didáticos, o GCD. As atividades foram realizadas em dias e horários distintos, no período de outubro a novembro de 2014.

Num terceiro momento, aplicamos um questionário para a coleta de opiniões sobre as atividades realizadas, acrescido com questões de verificação da aprendizagem. Abrimos um espaço para a discussão sobre a proposta apresentada, sobre o desenvolvimento das atividades e da utilização do material didático GCD.

4.1. Questionários

Foram aplicados dois questionários na turma do 3º ano A da Escola Estadual Deputado Esteves Rodrigues. O primeiro questionário (vide Apêndice A) foi aplicado para verificar o conhecimento dos alunos sobre conceitos geométricos, trigonométricos e a origem da trigonometria.

O segundo questionário (Apêndice B), foi aplicado no final das atividades, objetivando coletar a opinião dos alunos sobre a utilização do GCD, as atividades desenvolvidas e o ensino de trigonometria.

As respostas dos alunos a ambos os questionários foram objetos de uma análise posterior que contribuiu tanto para o desenvolvimento do trabalho quanto para momentos de reflexão para ações futuras.

4.2. Atividades

No ensino médio, os estudos sobre a trigonometria se inicia com as relações métricas no triângulo retângulo, depois com as definições das funções trigonométricas associadas às coordenadas de um ponto no círculo trigonométrico e, posteriormente, associadas ao conjunto dos números reais.

Ao estudar a trigonometria no triângulo retângulo, o aluno se vê diante de resultados que tornam possíveis cálculos de forma indireta de medidas e distâncias inacessíveis, como a distância da Terra à Lua. Este tópico está diretamente relacionado à semelhança de triângulos, uma vez que são enfatizadas as razões de semelhança entre triângulos retângulos. No entanto, as origens das tabelas trigonométricas não são abordadas, e os estudos se restringem às demonstrações dos valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis de 30º, 45º e 60º.

Para construir a tabela de seno, podemos partir de atividades que levem o aluno a perceber a equivalência entre o conceito de comprimento de corda de um ângulo central e o seno da metade deste mesmo ângulo, perfazendo assim o mesmo caminho percorrido na história para a construção desse conhecimento. Para isso, apresentamos uma sequência de atividades que, conforme já expomos anteriormente, foram adequadas à utilização do material didático manipulável GCD para serem aplicadas aos alunos pesquisados. O Quadro 2 apresenta um paralelo entre algumas das atividades propostas no trabalho de Mendes, M. (2010), as quais foram realizadas com a utilização de elementos e instrumentos do desenho geométrico, diferente das que aplicamos no nosso trabalho na utilização do GCD.

Quadro 2: Comparativo entre atividades com régua e compasso e com o GCD

Trechos de Atividade proposta em Mendes, M. (2010, p.168-170), com utilização de régua e compasso.	*Trechos das atividades refeitas por nós usando o GCD*
Atividade 3 – Construções geométricas com régua e compasso	Atividade 2: Construção de uma tábua de cordas com dados experimentais.
1. Trace circunferências e encontre procedimentos para dividi-las respectivamente, em 3, 4 e 6 partes iguais. 2. Após a divisão da circunferência, trace os polígonos regulares que ficam inscritos no círculo. 3. Relacione os lados desses polígonos com as cordas que eles representam.	1) Construir no GCD os polígonos regulares de 3, 4, 5, e 6 lados procurando relacionar os lados dos polígonos inscritos e as cordas determinadas por eles.
Atividade 3 – Construções geométricas com régua e compasso	Atividade 3: Formalizando conceitos
5. Você observou que 120º é arco suplementar de 60º? - Existe uma relação geométrica que nos permite determinar, a partir de uma corda conhecida, a corda de seu arco suplementar. Tente encontrar essa relação.	1) Você percebe alguma relação entre os pares de arcos dentre os valores trabalhados na atividade anterior? Qual? 2) No GCD construa um triângulo tomando como vértices um dos pontos móveis do aparelho e os extremos de um diâmetro da circunferência. Observando o triângulo formado, como você classificaria, com relação aos ângulos internos, um triângulo inscrito em uma semicircunferência. 3) Observando no GCD a figura construída no item 2, e supondo conhecido o raio da circunferência, encontre um procedimento para determinar a partir da corda conhecida, a corda de seu arco suplementar.

Fonte: Arquivo do autor

Podemos observar que as construções que na primeira coluna são efetuadas com régua e compasso podem ser representadas no GCD, conforme a segunda coluna, para obter os mesmos objetivos das atividades propostas em Mendes, M. (2010).

As atividades foram direcionadas ao que podemos chamar de fase inicial da construção das tábuas, onde seus autores lançam mão dos conhecimentos já estabelecidos em sua época, sobre polígonos regulares inscritos em uma circunferência.

4.3. Detalhamento das atividades aplicadas aos pesquisados

Apresentaremos aqui recortes das atividades aplicadas na turma do 3º Ano do ensino médio, fazendo uma discussão com relação aos procedimentos e aos objetivos propostos, bem como sobre o que se esperava do aluno quando realizava cada uma das tarefas contidas nas mesmas. No Apêndice C, as referidas atividades podem ser encontradas na íntegra, tal como foram impressas na aplicação das mesmas em sala de aula.

4.3.1. Apresentação de um breve histórico sobre a Trigonometria

O texto elaborado foi lido e discutido juntamente com os alunos, no início dos trabalhos. Os alunos foram motivados a conhecer e refazer os passos seguidos pelos construtores na confecção das tábuas de cordas, por meio da realização de atividades:

Atividade 1: Retomando conceitos

Atividade 2: Construção de uma tábua de cordas com dados experimentais

Atividade 3: Formalizando conceitos

Atividade 4: Encontrando o seno

4.3.1.1 O Percurso Histórico desde as Tábuas de Cordas ao Seno

A Trigonometria – a palavra trigonometria teve origem na Grécia: *trigonos* (triângulo) + *metrûm* (medida) – pode ter suas origens no Egito, a partir das medições das pirâmides, e na Babilônia, relacionada à confecção de calendários, épocas de plantio e estações do ano.

Há alguns problemas no papiro Rhind, segundo Eves (2004, p.203), que envolvem a co-tangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide, e na tábua cuneiforme babilônica Plimpton 322, que contêm, essencialmente, uma notável tábua de secantes. Temos ainda os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. que acumularam uma massa considerável de dados de observações que se sabe hoje terem chegado aos gregos, e deram origem à trigonometria esférica.

A Trigonometria não foi uma obra individual. Desde sua origem na matemática grega recebeu importantes contribuições de pessoas de várias culturas: hindus, muçulmanos e europeus.

Vários são os nomes importantes na história da trigonometria, dentre eles podemos destacar:

Aristarco de Samos (c. de 287 a.C.) – Aplicou a matemática à astronomia. Tornou-se conhecido como o Copérnico da Antiguidade por ter formulado a hipótese heliocêntrica do sistema solar. Em seu opúsculo *Sobre os Tamanhos e Distâncias do Sol e da Lua*, Aristarco usou algo equivalente ao fato de que

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} b} < \frac{a}{b} < \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}$$

Onde $0 < b < a < \frac{\pi}{2}$.

Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.) – É considerado o pai da Trigonometria, pelo fato de ser o pioneiro na construção de uma tabela trigonométrica com valores de arcos e cordas para uma série de ângulos, e o fundador da Astronomia científica.

Menelau de Alexandria (c. de 100 d.C.) – Continuou os trabalhos de Hiparco, destacando-se com um grande astrônomo e geômetra grego defensor da geometria clássica. A ele, o comentador Teon de Alexandria (sec. IV) atribui um trabalho sobre cordas de um círculo, em seis livros, os quais se perderam. (EVES, 2004)

Cláudio Ptolomeu (90-168) – Foi o autor da mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade, a *Syntaxis matemática*, composta por treze livros e escrita cerca de meio século depois de Menelau. Segundo Eves (2004, p.204), a obra de Ptolomeu, baseada nos escritos de Hiparco, é famosa por sua compacidade e elegância, sendo um tratado de influência científica rara. A “Síntese matemática” foi associada, pelos comentadores, ao superlativo *magiste* ou “o maior” para distingui-la de trabalhos menores sobre astronomia. Mais tarde, na Arábia, surgiu o costume de chamar o trabalho de Ptolomeu o *Almagesto* ("o maior"), sendo por esse nome conhecida até os dias atuais.

Pouco se sabe da vida de Ptolomeu, principalmente onde ou quando nasceu. Segundo Boyer (1974, p. 119 e 120), realizou observações em Alexandria de 127 a 151 d.C. e por isso supõe-se que nascera no fim do primeiro século, e provavelmente viveu ainda durante o império de Marco Aurélio (161 a 180 d.C.).

O *Almagesto* tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do Sistema Solar, supondo que a Terra está em seu centro[5]. Ptolomeu desenvolveu a trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro livro de sua obra. O capítulo 11 consiste em uma tabela de cordas (ou seja, de senos). (ROQUE, 2012, p.176).

O *Almagesto* foi preservado e nos trouxe não só as tabelas trigonométricas como também os detalhes dos métodos utilizados por Ptolomeu em sua construção.

Encontramos uma descrição dos métodos utilizados por Ptolomeu na construção da sua tabela de cordas (equivalente a uma tabela de senos dos ângulos por intervalos de quarto de grau de 0º a 90º), em Pereira (2010).

Para a construção desta tabela, Ptolomeu usou, além dos conhecimentos da época sobre polígonos regulares inscritos em uma circunferência, o fato de que em um quadrilátero inscritível ABCD vale a relação $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$, isto é, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais. Esta proposição é conhecida como "teorema de Ptolomeu" e leva a fórmulas para a corda da soma e a corda da diferença de dois arcos, bem como para a corda do arco-metade. Desta forma, Ptolomeu poderia iniciar a construção de sua tabela com a precisão desejada.

Somente com esses procedimentos é impossível encontrar o comprimento de corda para o arco de 1°. Para isso, Ptolomeu recorreu a uma interpolação que permitiu deduzir a seguinte desigualdade:

$$0{,}01745130 < \operatorname{sen} 1° < 0{,}01745279$$

[5] Teoria geocêntrica que será questionada, no século XV, pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico

Ptolomeu pôde então finalizar sua tabela, que fornece os comprimentos de cordas para arcos de 0 a 180°, com incremento de 1/2 em 1/2 grau. Esta tabela, como já foi dito, formava parte integrante do Livro I do *Almagesto* e continuou a ser indispensável para os astrônomos por vários séculos.

Regiomontanus (1436-1476) – Johann Müller (1436-1476), geralmente conhecido por Regiomontanus, nome que vem da versão latina do nome de sua cidade natal *Königsberg* ("montanha do rei"), foi, segundo Eves (2004, p.204), o mais capaz e influente matemático do século XV. É muito provável que suas duas obras trigonométricas tenham influenciado trabalhos do começo do século XVI.

Nicolau Copérnico (1473-1543) – Dentre os astrônomos que muito contribuíram para o desenvolvimento da matemática, destaca-se o polonês Nicolau Copérnico, autor da obra *De revolucionibus orbium coelestium*, na qual desenvolve a teoria do Heliocentrismo, contrária à de Ptolomeu sobre o Universo, considerada o ponto de partida da Astronomia moderna. Sua obra apresenta noções de trigonometria, onde ele constrói as tabelas necessárias para a compreensão de sua teoria. De forma muito próxima da construção da tabela de cordas de Ptolomeu, Copérnico explica em seis teoremas e um problema, os procedimentos para a construção de sua tabela de senos. (MENDES, M., 2010)

A tabela construída por Copérnico passa a ser, a partir de então, um modelo para a Astronomia juntamente com os trabalhos de seu discípulo Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576) que, segundo Eves (2004, p.313), foi o primeiro a definir as funções trigonométricas como razões entre lados de um triângulo retângulo e também dedicou doze anos de sua vida, auxiliado por calculadores remunerados, à construção de duas tabelas trigonométricas notáveis e ainda úteis hoje. Uma delas envolve as seis funções trigonométricas e a outra é uma tabela de senos.

A contribuição da índia e dos países árabes – A trigonometria indiana era um instrumento para a astronomia. Segundo Boyer (1974, p. 157) uma das contribuições da Índia de maior influência na história da matemática foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega de cordas.

Após os Hindus, seguem-se as contribuições provindas dos países árabes, que deram um tratamento sistemático à Trigonometria sobre influência helênica e indiana. Segundo Mendes e Rocha (2009, p. 17 e 18), é atribuída aos árabes a introdução das seis funções básicas da trigonometria: seno e cosseno, tangente e cotangente, secante e cossecante. Os árabes deram às funções utilizadas pelos indianos uma forma mais próxima da moderna quando definiram a função seno em termos de um círculo de raio unitário.

4.3.1.2 Atividades desenvolvidas

ATIVIDADE 1: RETOMANDO CONCEITOS

Objetivo:

- ✓ Propiciar um momento de retomada dos conceitos geométricos necessários ao desenvolvimento das atividades de reconstrução das tábuas de cordas.

Material necessário:

- ✓ Lápis, borracha, transferidor e régua.
- ✓ Geoplano Circular Dinâmico (GCD).

Questões:

1) Observe o GCD e procure identificar os elementos geométricos nele representados.

Inicialmente, o material didático manipulável é apresentado e os pesquisados foram orientados quanto aos seus recursos e a forma correta do manuseio. Esperava-se que, através de um primeiro contato com o material didático, o aluno começasse a explorar as possibilidades de representação de figuras geométricas.

Resposta esperada: circunferência, pontos, segmentos de reta

2) Como você define circunferência?

Esperava-se que o aluno identificasse a circunferência como um conjunto de pontos de um plano (ou o lugar geométrico dos pontos de um plano) que estão a uma mesma distância de um ponto fixo desse plano.

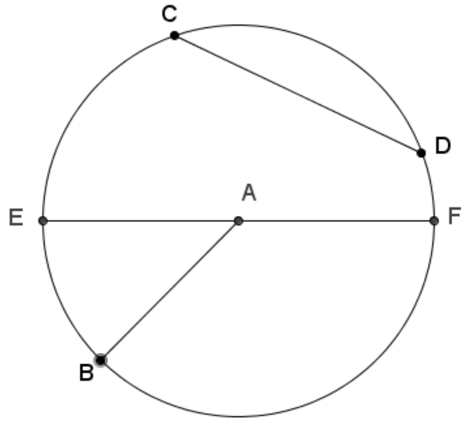
3) Observe a figura ao lado e escreva o nome dos segmentos indicados:

$\overline{AB}$ ______________________________

$\overline{EF}$ ______________________________

$\overline{CD}$ ______________________________

$\overline{AF}$ ______________________________



Ao responder a essa atividade o aluno se manifestaria sobre quais conhecimentos ele reteve dos principais elementos de uma circunferência, a saber: um raio ($\overline{AB}$ e $\overline{AF}$), um diâmetro ($\overline{EF}$) e uma corda ($\overline{CD}$).

4) Represente no GCD um raio, um diâmetro e uma outra corda qualquer.

Nessa atividade foi dada a oportunidade ao aluno para a representação, por meio de um material concreto, dos elementos identificados no item anterior.

5) Utilizando a régua do GCD, determine a medida do raio e do diâmetro da circunferência nele representada. Qual a medida aproximada dessa circunferência? (Use $\pi=3,14$)

Esperávamos que o aluno fizesse experimentações e verificações através do material concreto dos conceitos adquiridos sobre a circunferência, e que levantasse questões acerca da precisão das medidas efetuadas.

Resposta esperada: medida do raio –> 10cm; medida do diâmetro –>20cm; medida aproximada da circunferência –> 62,8 cm.

6) Se o raio de uma circunferência tem comprimento de 5,2 cm, qual é a medida do diâmetro dessa circunferência?

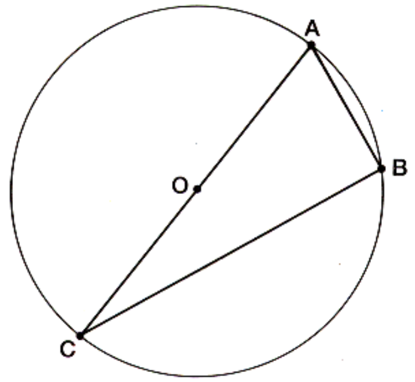
Como no item anterior, esperávamos que o aluno fizesse observações e questionamentos sobre a precisão das medidas efetuadas.

Resposta esperada: 32,656cm

7) Na figura ao lado, considere a circunferência com centro em O e:

a) Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

b) indique uma relação entre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$?

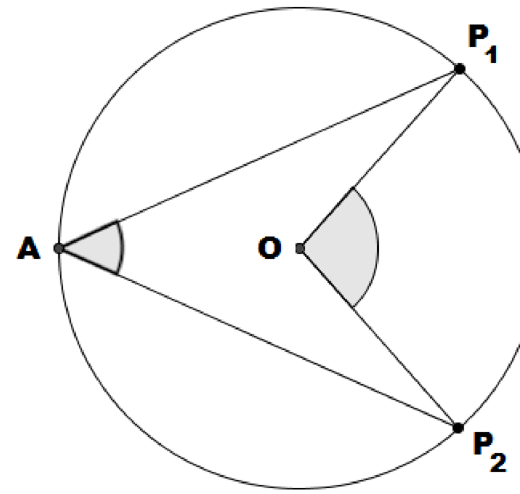


No item 7, letra a, dessa atividade esperávamos que o aluno determinasse a medida de um ângulo inscrito em uma semicircunferência (90º). Uma vez determinado corretamente o valor do ângulo, esperávamos que o aluno fosse capaz de aplicar o teorema de Pitágoras para responder o item 7–b): ($\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$).

8) Construa no GCD a figura abaixo, atribuindo um valor entre 0º e 180º ao ângulo $P_1\hat{O}P_2$.

a) Verifique a medida do ângulo $P_1\hat{A}P_2$ utilizando um transferidor avulso. O que você observa?

b) Faça variar a posição dos pontos P_1 e P_2 observando a relação entre os dois ângulos. Qual a propriedade que você identifica com esse experimento?



Nessa atividade o aluno deveria demonstrar seus conhecimentos sobre a relação entre um ângulo inscrito e o ângulo central em uma circunferência, e comprovar a validade da resposta dada ao item 7–a).

ATIVIDADE 2: CONSTRUÇÃO DE UMA TÁBUA DE CORDAS COM DADOS EXPERIMENTAIS.

Objetivo:

- ✓ Permitir a busca de dados relevante e convenientes para a construção de uma tábua de cordas, através da manipulação do Geoplano Circular Dinâmico (GCD), da observação e da experimentação.

Material necessário:

- ✓ Geoplano Circular Dinâmico (GCD), lápis e borracha.

Questões:

1) Construir no GCD os polígonos regulares de 3, 4, 5, e 6 lados procurando relacionar os lados dos polígonos inscritos e as cordas determinadas por eles.

Durante a execução do experimento proposto neste item, os alunos deveriam ser capazes de perceber que:

- Ao inscrever um polígono regular de n lados na circunferência, essa fica dividida em n partes iguais, ou seja, em n arcos côngruos.
- Tomando o grau (º) como unidade de medida para um arco de circunferência, a medida do ângulo central correspondente a cada um dos arcos em que ficou dividida é dada pela expressão 360º/n.
- Cada lado do polígono inscrito corresponde à corda do arco determinado por ele.

2) Represente no GCD cada um dos arcos correspondentes aos ângulos centrais indicados na tabela (Tabela 1), e complete-a com as medidas das cordas desses arcos. Obs.: Utilize a régua do GCD para efetuar a medida das cordas.

Com os procedimentos utilizados na realização do item 1, esperávamos que o aluno fosse capaz de representar no GCD uma corda para qualquer valor do ângulo central entre 0º e 180º, podendo assim determinar as medidas da tabela. Com a obtenção desses valores experimentais os alunos seriam estimulados a discutir sobre uma forma de obtê-los por meio da geometria, com a precisão desejada.

Tabela 1: Item 2 da atividade 2

Ângulo central α	Crd α
0º	
36º	
60º	
72º	
90º	
108º	
120º	
144º	
180º	

Fonte: Mendes, M. (2010)

ATIVIDADE 3: FORMALIZANDO CONCEITOS

Objetivo:

- ✓ Construir uma tabela de cordas.

Material necessário:

- ✓ GCD, calculadora, régua, lápis e borracha.

Questões:

1) Você percebe alguma relação entre pares de arcos dentre os valores trabalhados na atividade anterior? Qual?

Esperávamos que o aluno percebesse os pares de arcos suplementares que podem ser construídos com os valores descritos na tabela.

2) No GCD construa um triângulo tomando como vértices um dos pontos móveis do aparelho e os extremos de um diâmetro da circunferência. Observando o triângulo formado, como você classificaria, com relação aos ângulos internos, um triângulo inscrito em uma semicircunferência.

Ao construir o triângulo, o esperado é que o aluno percebesse que o mesmo está inscrito em uma semicircunferência e, pela relação entre ângulo inscrito em uma circunferência e o ângulo central, visualizasse que o triângulo é retângulo no vértice do ponto móvel.

3) Observando no GCD a figura construída no item 2, e supondo conhecido o raio da circunferência, encontre um método para determinar a partir da corda conhecida, a corda de seu arco suplementar.

Uma vez que o aluno identificou no item 2 o triângulo como sendo retângulo, esperávamos que ele citasse como procedimento a aplicação do teorema de Pitágoras pois, conhecendo o diâmetro e uma das cordas, obteria através dessa relação a corda desconhecida.

4) Construa no GCD as figuras e procure encontrar, em função do raio da circunferência, uma relação de comprimento das cordas dos arcos de 0º, 60º, 90º, 120º e 180º.

Aqui o aluno poderia resolver a questão pelo método atual, utilizando as fórmulas já conhecidas para se determinar o lado de um triângulo equilátero, de um quadrado e de um hexágono inscrito. Mas, para não fugir do contexto do trabalho, seria interessante que ele encontrasse essa relação de comprimento partindo do procedimento estabelecido no item 3.

5) Você conhece as relações de comprimento em função do raio da circunferência para os arcos de 36º, 72º, 108º e 144º?

É possível que nesse nível de ensino alguns alunos desconhecessem uma forma de se determinar os lados de um pentágono e de um decágono regulares e, portanto, não seriam capazes de estabelecer as relações pretendidas. Os resultados poderiam ser obtidos por meio dos valores para os arcos de 36º e 72º, e assim, os valores dos arcos de 108º e 144º através do procedimento do item 3.

6) Com as relações obtidas no item 4, complete a tabela abaixo considerando unitário o raio da circunferência. Compare com a tabela obtida na atividade anterior e faça uma discussão em grupo sobre a que se atribuem as diferenças observadas.

Tabela 2: Item 6 da atividade 3

Ângulo central α	Crd α
0º	
60º	
90º	
120º	
180º	

Fonte: Arquivo do autor

Uma discussão em grupo promoveria a socialização dos resultados obtidos sobre as maneiras de se obter a medida de uma corda, bem como a validação dos resultados obtidos na experimentação.

ATIVIDADE 4: ENCONTRANDO O SENO.

Objetivo:

- ✓ Construir uma tabela de seno a partir de uma tabela de cordas.

Material necessário:

- ✓ GCD, calculadora, régua, lápis e borracha.

Questões:

1) Construa no GCD um triângulo com vértices no centro e nos dois pontos móveis. Identifique o raio que divide ao meio o lado do triângulo que representa uma corda. Observando a figura construída, tente relacionar a corda de um arco com o seno de um ângulo. Expresse esse fato através de uma equação. Variando a posição dos pontos móveis, essa relação ainda se verifica?

Com essa atividade o aluno deveria ser capaz de encontrar uma relação entre a corda de um arco com o seno de um ângulo em uma circunferência. Essa relação é de fundamental importância para que ele possa perceber a evolução histórica das tabelas trigonométricas, a partir do momento que identificasse nas tábuas de cordas uma tabela do seno atual.

2) Complete a tabela abaixo utilizando para a 2ª coluna os valores obtidos na atividade (3), e para a 4ª coluna a equação do item 1.

Tabela 3: Item 2 da atividade 4

Ângulo central α	crd α	Ângulo central α/2	sen α/2
0º			
60º			
90º			
120º			
180º			

Fonte: Arquivo do autor

Com a relação obtida no item 1, o aluno deveria completar a tabela através de uma substituição dos valores encontrados na atividade anterior. Assim, com a verificação da correspondência existente entre seno e corda de um arco, o ideal seria que o aluno percebesse a importância de se conhecer o caminho histórico da construção do conhecimento matemático para a aprendizagem de novos conceitos.

5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

5.1. Análise do Questionário 1

Esse questionário foi aplicado a 26 estudantes da turma do 3º ano A da Escola Estadual Deputado Esteves Rodrigues, em outubro de 2014, que teve como objetivo verificar o conhecimento dos alunos sobre conceitos geométricos, trigonométricos e a origem da trigonometria. A primeira parte do questionário foi composta por três questões sobre a história da trigonometria, e a segunda parte composta por quatro questões, sobre o conhecimento prévio de alguns conceitos necessários ao entendimento das atividades a serem desenvolvidas.

Na análise das respostas dos alunos à primeira parte desse questionário, percebemos um desconhecimento pela maioria deles sobre a história da trigonometria. A primeira questão teve o seguinte enunciado:

1) Você já conhece a História da Trigonometria? Sim ou Não? Se sim, o que você conhece?

O Gráfico 1 apresenta uma tabulação das respostas dos alunos sobre o conhecimento da história da trigonometria.

Gráfico 1: Conhecimento sobre a História da Trigonometria

Fonte: Dados da pesquisa – Outubro de 2014

Com esses dados notamos que a história da trigonometria ainda era desconhecida pela maioria dos alunos. Como se tratava de uma turma do 3º ano, esses alunos já tinham estudado trigonometria no 1º ano, no entanto, não conheciam seus aspectos históricos.

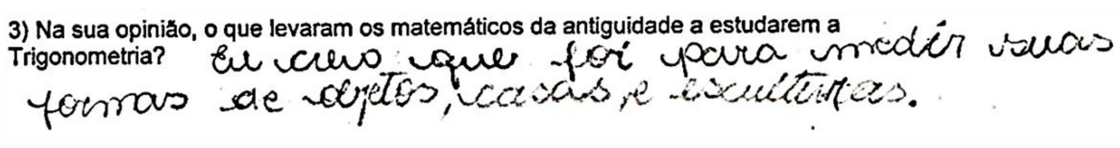
De acordo com Mendes, I. (2006, p. 83) a história da matemática é pouco explorada nos livros didáticos utilizados por professores e alunos no sistema educacional brasileiro, muitas vezes figurando apenas informações sobre figuras e alguns acontecimentos históricos desnecessários à construção do conhecimento por parte do aluno.

O desconhecimento sobre a história da trigonometria se percebe também nas respostas dadas à terceira questão, que tinha o seguinte enunciado:

3) Na sua opinião, o que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a Trigonometria?

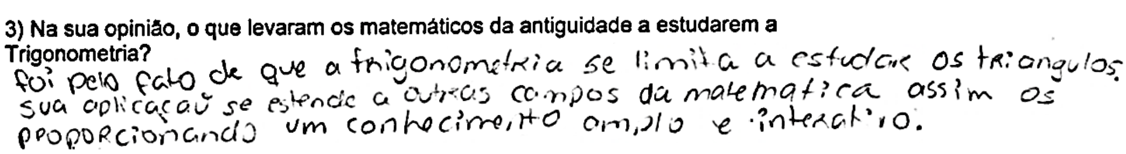
Ao responderem a esse questionamento, os alunos se mostraram confusos entre a motivação que tiveram os estudiosos e a definição de conceitos trigonométricos, de acordo com as respostas a seguir, onde esses alunos estão identificados como aluno 2, aluno 7, etc.

Resposta do aluno 2:


3) Na sua opinião, o que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a Trigonometria? Eu creio que foi para medir suas formas de objetos, casas, e esculturas.

"Eu creio que foi para medir suas formas de objetos, casas e esculturas."

O aluno 7 respondeu:


3) Na sua opinião, o que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a Trigonometria?
foi pelo fato de que a trigonometria se limita a estudar os triangulos: sua aplicaçaõ se estende a outras campos da matematica assim os proporcionando um conhecimento amplo e interativo.

"Foi pelo fato de que a trigonometria se limita a estudar os triângulos, sua aplicação se estende a outros campos da matemática assim os proporcionando um conhecimento amplo e interativo."

De acordo com o aluno 9:

3) Na sua opinião, o que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a Trigonometria?
Descobrir os dois lados do triangulo retangulo.

“Descobrir os dois lados do triângulo retângulo”

Segundo o aluno 13:

3) Na sua opinião, o que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a Trigonometria? atender as necessidades da astronomia. medir distancias.

“Atender as necessidades da astronomia, medir distâncias”

O processo da construção histórica do conhecimento da trigonometria, segundo Mendes, I. (2009b, p.95), deve ser explorando em sala de aula justamente para que o aluno possa ter essa compreensão do significado dessas ideias, a sua importância para o desenvolvimento da Matemática nos diversos contextos sociais, políticos e culturais, implicando em uma ressignificação dessa história no seu cotidiano.

A segunda questão nos permitiu conhecer a opinião dos alunos sobre a importância de se estudar a história da trigonometria, para uma melhor aprendizagem de conceitos trigonométricos, e tinha o seguinte enunciado:

2) Para você é importante conhecer a história da trigonometria paralelamente ao trabalho desse conteúdo? A aprendizagem seria melhor? Por quê?

Os alunos foram unânimes em suas respostas ao responderem que é importante trabalhar a histórica da trigonometria. O resultado reflete a necessidade demonstrada pelos alunos em aprender e descobrir sobre alguns questionamentos relacionados ao trabalho desse conteúdo. Segundo Mendes, I. (2006; p.101) a história da matemática pode ser um grande aliado do professor nesse momento, desde que se incorpore às atividades de ensino-aprendizagem uma dinâmica de investigação histórica sobre o tema.

Para os alunos a história da trigonometria seria uma fonte para melhor compreensão do conteúdo, conforme as respostas dadas a essa questão.

Nesse caso, o aluno 4 respondeu:

2) Para você é importante conhecer a história da trigonometria paralelamente ao estudo desse conteúdo? A aprendizagem seria melhor? Por quê?

Sim, Talvez se conhecermos á fundo á Trigometria, entenderiamos melhor ela.

"Sim, talvez se conhecermos a fundo a trigonometria, entenderíamos melhor ela."

Segundo o aluno 6:

2) Para você é importante conhecer a história da trigonometria paralelamente ao estudo desse conteúdo? A aprendizagem seria melhor? Por quê?

É importante para estudar os lados e medidas dos objetos

"É importante para estudar os lados e medidas dos objetos"

Na visão do aluno 7:

2) Para você é importante conhecer a história da trigonometria paralelamente ao estudo desse conteúdo? A aprendizagem seria melhor? Por quê?

Sim, porque a trigonometria sendo importante ou naõ e sempre bom todos terem o conhecimento das coisas.

"Sim, porque a trigonometria sendo importante ou não é sempre bom todos terem o conhecimento das coisas."

De acordo com o aluno 9:

2) Para você é importante conhecer a história da trigonometria paralelamente ao estudo desse conteúdo? A aprendizagem seria melhor? Por quê?

Sim, seria melhor pois conheceriamos e entenderiamos o motivo de ter que fazer.

"Sim, seria melhor pois conheceríamos e entenderíamos o motivo de ter que fazer."

O aluno 11 apresentou a seguinte opinião:

2) Para você é importante conhecer a história da trigonometria paralelamente ao estudo desse conteúdo? A aprendizagem seria melhor? Por quê? Sim, é sempre bom saber a historia daquilo que usamos constantemente, para facilitar o entendimento

"Sim, é sempre bom saber a história daquilo que usamos constantemente, para facilitar o entendimento."

Na análise das respostas dos alunos à segunda parte do Questionário 1, procuramos fazer um levantamento do desempenho dos alunos em cada um dos itens apresentados.

Iniciaremos essa análise pelas questões de número 4 e 7, que foram do tipo questão aberta, sendo necessária a redação das respostas pelos alunos. Para essas questões utilizamos quatro parâmetros para correção das mesmas: ACERTOU, ACERTOU PARCIALMENTE, ERROU e NÃO SABE/NÃO RESPONDEU, com os seguintes critérios:

- ACERTOU: o aluno respondeu corretamente à questão;
- ACERTOU PARCIALMENTE: o aluno respondeu corretamente a maioria dos itens que compõem a questão;
- ERROU: o aluno respondeu de forma incorreta a maioria dos itens que compõem a questão;
- NÃO SABE/NÃO RESPONDEU: o aluno informou no formulário que não sabe ou deixou de responder à questão.

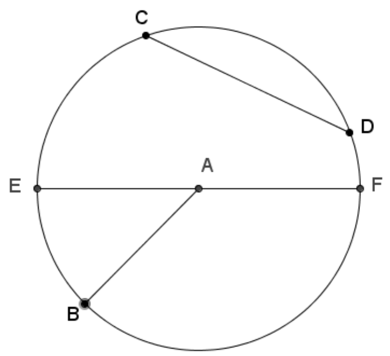
A questão 4 apresentou o seguinte enunciado:

4) Analise a figura abaixo, identifique os elementos em destaque na circunferência e responda:

a) Qual o nome dado ao segmento AB?

b) Qual o nome dado aos segmentos CD e EF?

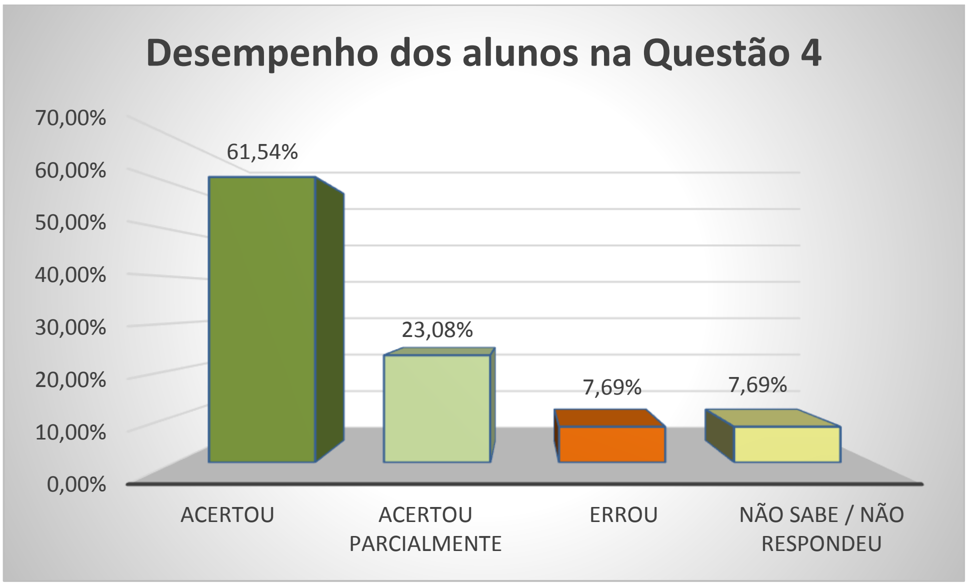
c) Por conter o ponto A, que outro nome podemos atribuir ao segmento EF?



Resposta esperada: a) raio; b) corda; c) diâmetro.

Os resultados obtidos para a questão 4 demonstram que a maioria dos alunos tem bem consolidado o conhecimento sobre a circunferência e seus elementos, conforme ilustra o Gráfico 2. Porém, devemos atentar para o percentual de erros que, acumulado com aqueles que não sabem ou não responderam atingiu 15,38% dos alunos. Tal fato justificou algumas intervenções que fizemos durante as atividades, retomando conceitos sobre a circunferência, a fim de suprir essa dificuldade inicialmente apresentada.

Gráfico 2: Desempenho dos alunos na Questão 4



Fonte: Dados da pesquisa – Outubro de 2014

A Questão 7 apresentou o seguinte enunciado:

7) Observe o triângulo da figura ao lado. Nele podemos identificar:

BC = Hipotenusa AC = Cateto AB = Cateto

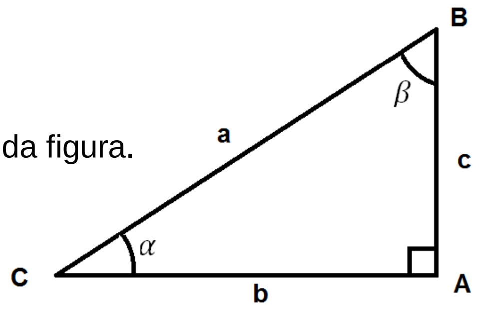
α (alfa) e β (beta) - Ângulos agudos

De acordo com o triângulo retângulo da figura.

I - O lado AB é cateto

( ) oposto ao ângulo α

( ) adjacente ao ângulo α

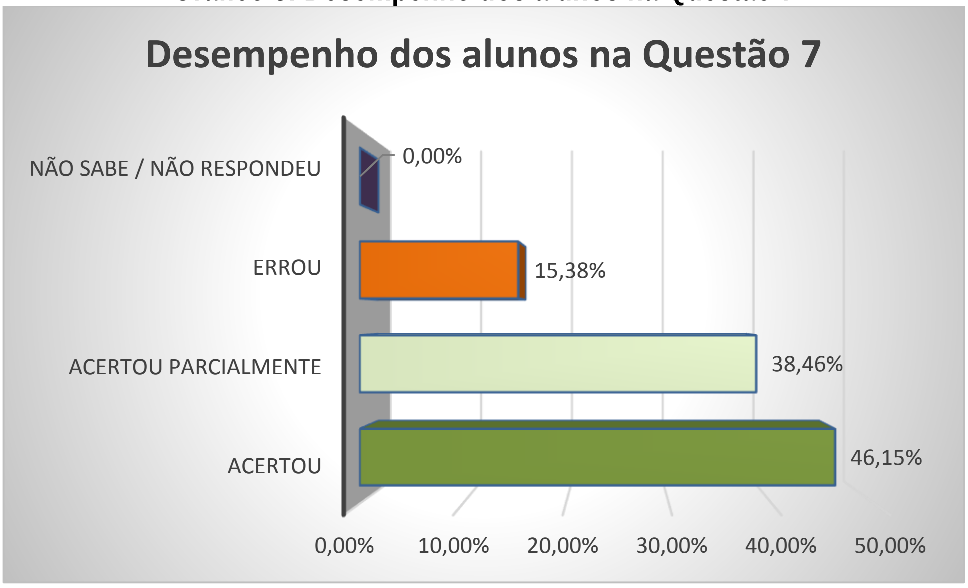


II – Qual identidade trigonométrica corresponde à razão $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{c}{a}$?

Resposta esperada: 7– I) (x) oposto ao ângulo α; 7– II) seno do ângulo α

Observando os resultados do desempenho dos alunos na Questão 7 apresentados no Gráfico 3, observamos que aproximadamente metade dos alunos tem domínio sobre alguns tópicos do conteúdo que envolve razões trigonométricas no triângulo retângulo, ou seja, sabem relacionar os elementos de um triângulo retângulo e identificar as razões trigonométricas.

Gráfico 3: Desempenho dos alunos na Questão 7



Fonte: Dados da pesquisa – Outubro de 2014

Chama-nos a atenção o fato de 38,46% dos alunos terem acertado parcialmente a questão, o que indica que não consolidaram esse conhecimento. As dificuldades apresentadas por esses alunos e aqueles que erraram a questão justificam o desenvolvimento das atividades propostas nessa pesquisa, haja vista que

> [...] é possível uma “acomodação” do novo conhecimento tanto verticalmente, ao relacionar o novo conteúdo com as idéias âncoras existentes, quanto horizontalmente, ao estabelecer as diferenças e semelhanças entre o que se sabe e o novo. Desta forma, será possível reajustar o novo conhecimento às estruturas cognitivas, modificando os subsunçores existentes e ampliando o conhecimento sobre o assunto. (BRIGHENTI, 2003, p.23)

Sendo assim, buscamos proporcionar-lhes uma oportunidade de rever um conteúdo através de um olhar diferente, sob uma perspectiva histórica, buscando alcançar uma aprendizagem significativa.

As questões de número 5 e 6 foram do tipo múltipla escolha, sendo que o aluno deveria assinalar o item que contém a resposta correta. Para essas questões fizemos o levantamento dos resultados através de três parâmetros, da seguinte forma:

- ACERTOU: atribuído ao aluno que assinalou a resposta correta;
- ERROU: atribuído ao aluno que não assinalou a resposta correta e nem a opção (E);
- NÃO SABE/NÃO RESPONDEU: atribuído ao aluno que deixou de responder à questão ou assinalou a opção (E).

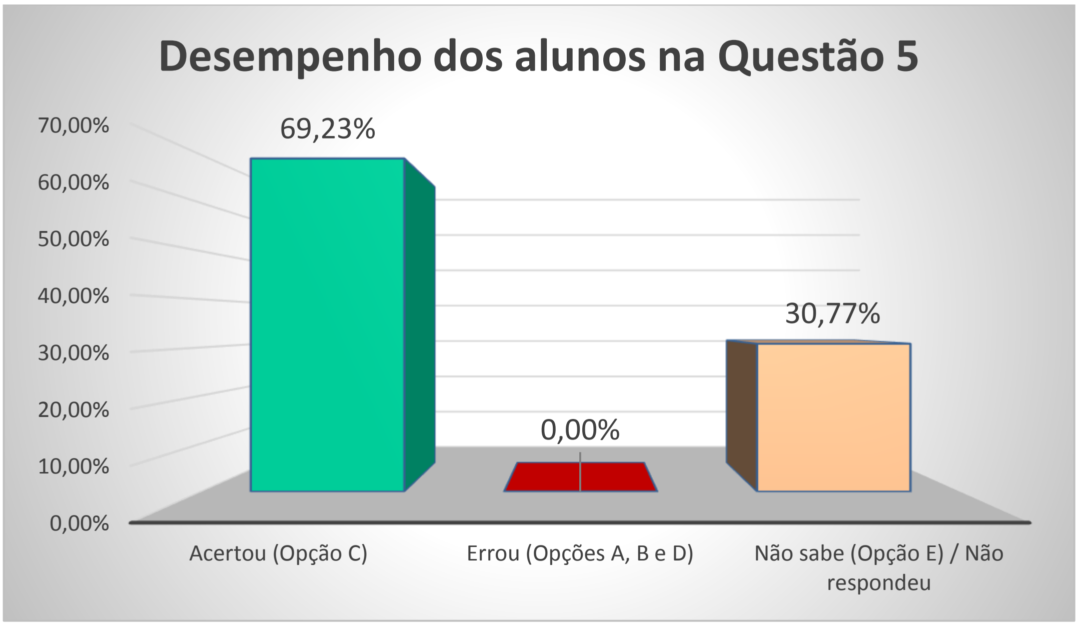
O enunciado da Questão 5 foi o seguinte:

5) Qual item abaixo apresenta uma razão entre dois números?
a) ( ) 15 b) ( ) $\sqrt{13}$ c) ( ) $\frac{7}{9}$ d) ( ) 5,3 e) ( ) não sei.

Resposta esperada: letra c

No levantamento das respostas para a Questão 5, obtivemos os resultados apresentados no Gráfico 4.

Gráfico 4: Desempenho dos alunos na Questão 5



Fonte: Dados da pesquisa – Outubro de 2014

Percebe-se, pelo resultado obtido na Questão 5, que boa parte dos alunos, 30,77% de acordo com o Gráfico 4, ainda têm dificuldades com alguns conceitos elementares de aritmética, e que são importantes no trabalho de trigonometria, tendo em vista que ele deverá identificar a razão entre medidas de lados de um triângulo retângulo. Isso mostra uma necessidade constante de avaliações diagnósticas para verificar o nível de conhecimento dos alunos, com fins a direcionar as ações do professor para que possa obter um máximo de rendimento e aprendizagem na turma.

A Questão 6 apresentou o seguinte enunciado:

6) Assinale a opção que apresenta uma característica específica do triângulo retângulo.

a) ( ) Têm os três lados congruentes.

b) ( ) Contém pelo menos um ângulo obtuso.

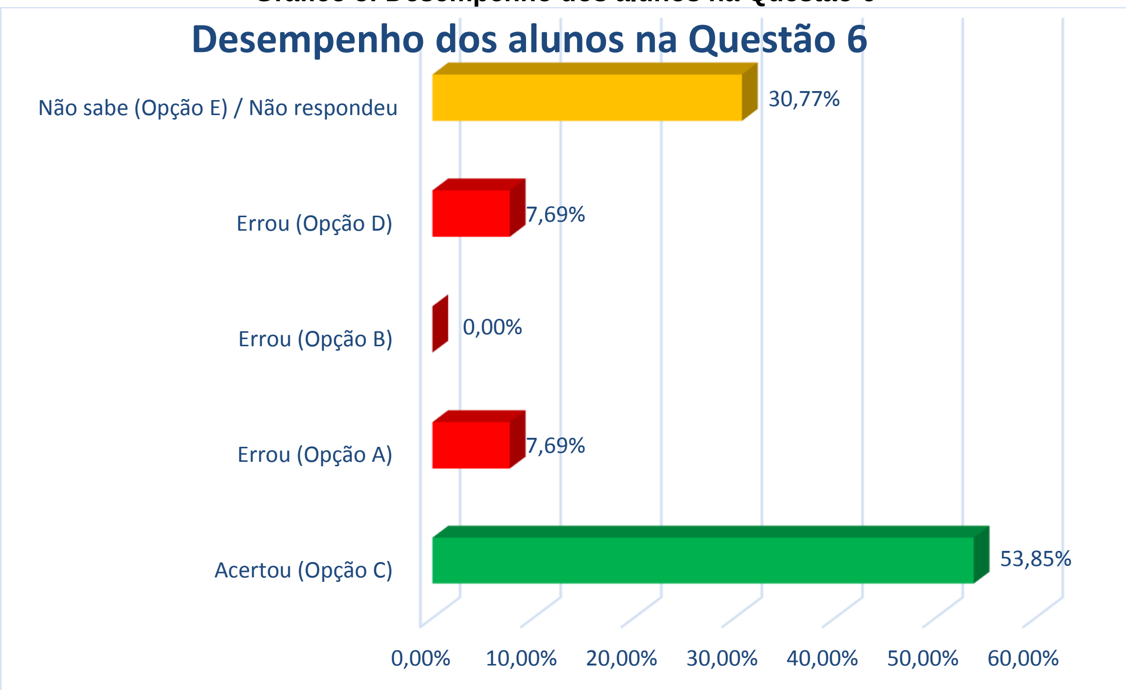
c) ( ) Contém um ângulo de 90° (reto) e os outros dois ângulos são agudos.

d) ( ) Todos seus ângulos são de 60°.

e) ( ) não sei.

No levantamento das respostas para a Questão 6, obtivemos os resultados apresentados no Gráfico 5.

Gráfico 5: Desempenho dos alunos na Questão 6



Fonte: Dados da pesquisa – Outubro de 2014

Na análise dos resultados obtidos na Questão 6, observamos que a situação descrita para a Questão 5 se evidencia ainda mais com relação aos conceitos elementares de geometria, essenciais no trabalho de trigonometria. O desconhecimento por parte de 46,15% dos alunos dos elementos que caracterizam o triângulo retângulo, nesse nível de ensino, indica uma deficiência no ensino de geometria plana, justificando os procedimentos de retomada de conceitos que incluímos no desenvolvimento desse trabalho.

Na análise dos resultados obtidos no primeiro questionário encontramos diversos elementos que reforçaram a nossa ideia de utilização da investigação histórica como recurso pedagógico, como expõe Mendes, I. (2006), quando afirma que

> Podemos, portanto, argumentar favoravelmente a respeito da inserção dos aspectos históricos nas aulas de matemática, considerando que a geração de conhecimentos por meio da investigação histórica pressupõe um estudo sobre o desenvolvimento histórico-epistemológico de um tópico da matemática, seguido de uma transposição adaptativa para as condições didáticas de uso em sala de aula, de modo a exercer uma ação cognitiva na aprendizagem dos alunos. (MENDES, I., 2006, p. 105)

Portanto, essa abordagem histórica, no contexto dos pesquisados, propiciaria uma reformulação de conceitos por alguns e uma redescoberta por uma outra parte dos alunos, contribuindo para a consolidação do conhecimento sobre trigonometria.

5.2. Observações realizadas durante a execução das atividades de reconstrução das tábuas de cordas

No transcorrer das atividades, coletamos informações e dados através de anotações dos relatos dos alunos. Muitas das respostas e questionamentos realizados pelos alunos eram esperados, porém alguns não foram previstos, o que se justifica, uma vez que

> A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação. (PONTE, 2013, p.25)

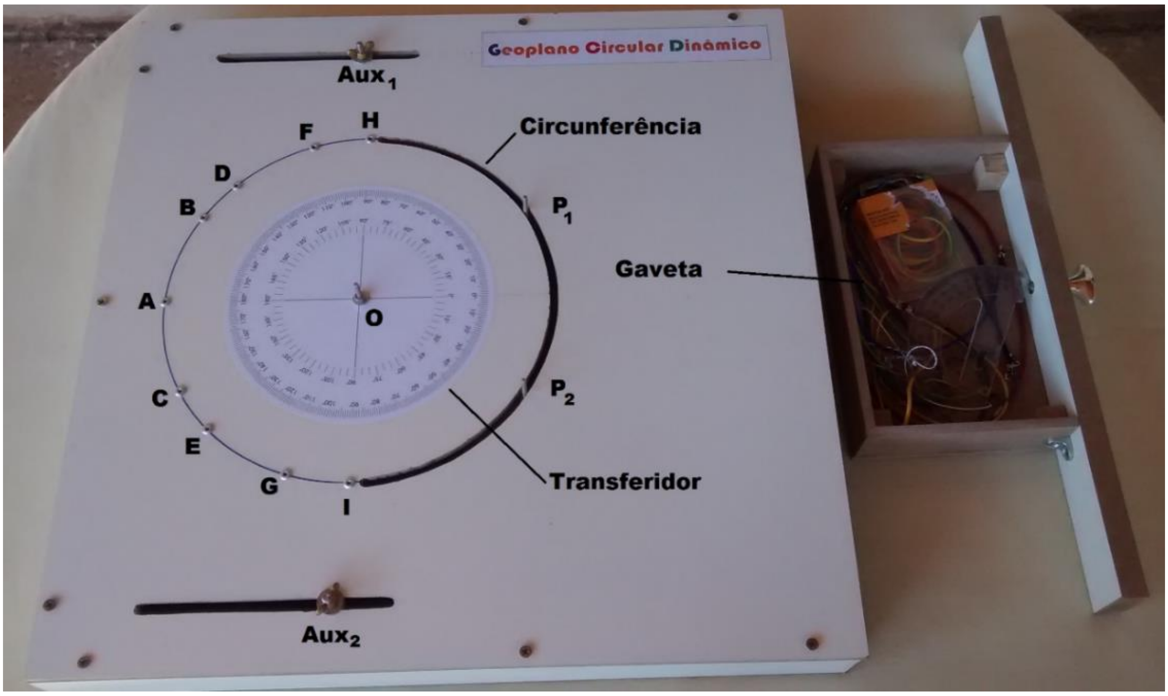
Dessa forma, o pesquisador pode programar o modo de começar uma investigação, mas dificilmente saberá como ela irá acabar. As constatações do que foi previsto, bem como das divergências verificadas, foram incorporadas ao nosso estudo e serviram como objeto de análise, tendo em vista a finalidade de permitir uma melhoria na qualidade do processo ensino-aprendizagem.

Conforme a proposta metodológica, iniciamos os trabalhos com um resumo histórico sobre a evolução da Trigonometria. Apresentamos aos alunos, utilizando slides do PowerPoint, as tábuas de cordas de Ptolomeu e de Copérnico, e discutimos sobre as motivações dos diversos colaboradores na construção desse campo do conhecimento. Fizemos uma apresentação do material didático e demonstramos como utilizar o GCD.

No momento seguinte, entregamos aos alunos um bloco de folhas, contendo as atividades de 1 a 4, apresentadas na seção 4.3 e constantes do Apêndice C, envolvendo conceitos matemáticos que julgamos serem pré-requisitos para o trabalho e reconstrução das tábuas de cordas. As atividades envolviam a circunferência e polígonos regulares inscritos.

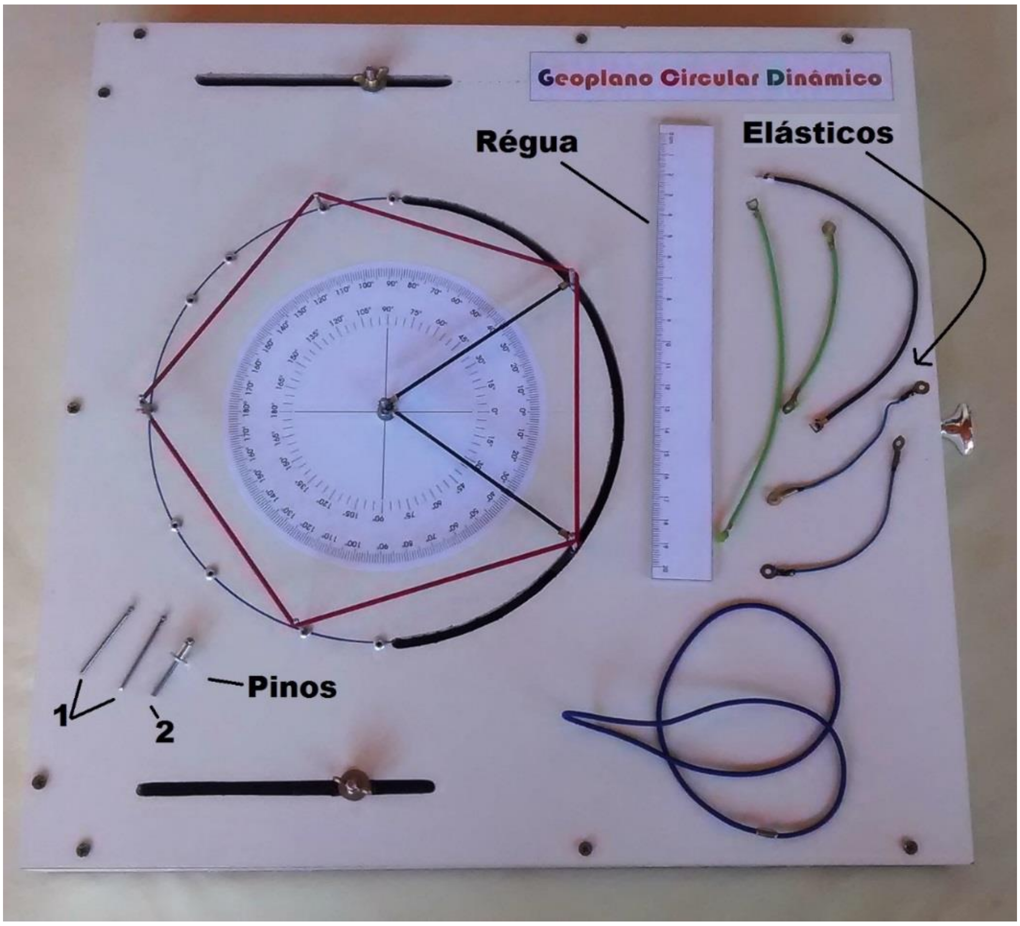
Percebemos uma dificuldade na resolução da atividade 1, pois, inicialmente os alunos manifestaram desconhecer os principais elementos de uma circunferência, e em alguns casos, disseram que já estudaram mas não se lembravam das definições. Esse fato já havia sido detectado anteriormente, conforme a análise do primeiro questionário, e, portanto, conduzimos a atividade através de uma dinâmica de trabalho dirigido, oportunizando aos alunos uma revisão desses conceitos. O mesmo aconteceu com as questões envolvendo polígonos inscritos, durante a realização da atividade 2, sobre as quais discutiremos a seguir, utilizando para referências e melhor entendimento das observações destacadas, as informações contidas nas Figura 3 e 4, que apresentam uma nomenclatura para os elementos do GCD.

Figura 3: Nomenclatura para os elementos do GCD



Fonte: Arquivo do autor

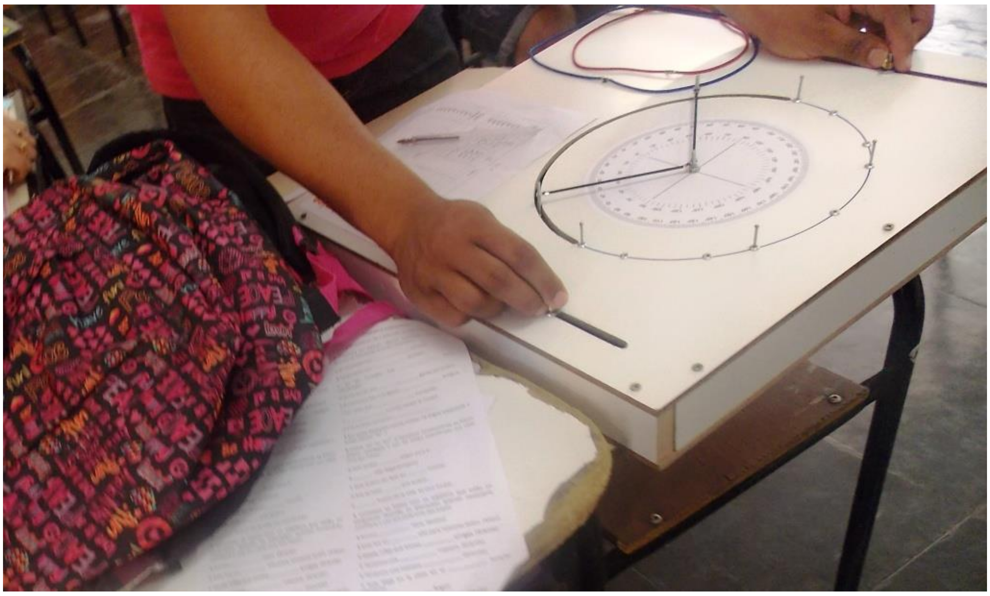
Figura 4: Nomenclatura para os elementos avulsos do GCD



Fonte: Arquivo do autor

A atividade 2, conforme dissemos, envolve a construção de polígonos regulares inscritos em uma circunferência. Nessa atividade, foi solicitado aos alunos que dividissem a circunferência representada no GCD em 3, 4, 5 e 6 partes iguais, usando os pinos móveis e os de pontos fixos do aparelho. A Figura 5 apresenta alunos procedendo a divisão da circunferência em seis partes.

Figura 5: Alunos manipulando o GCD durante a Atividade 2



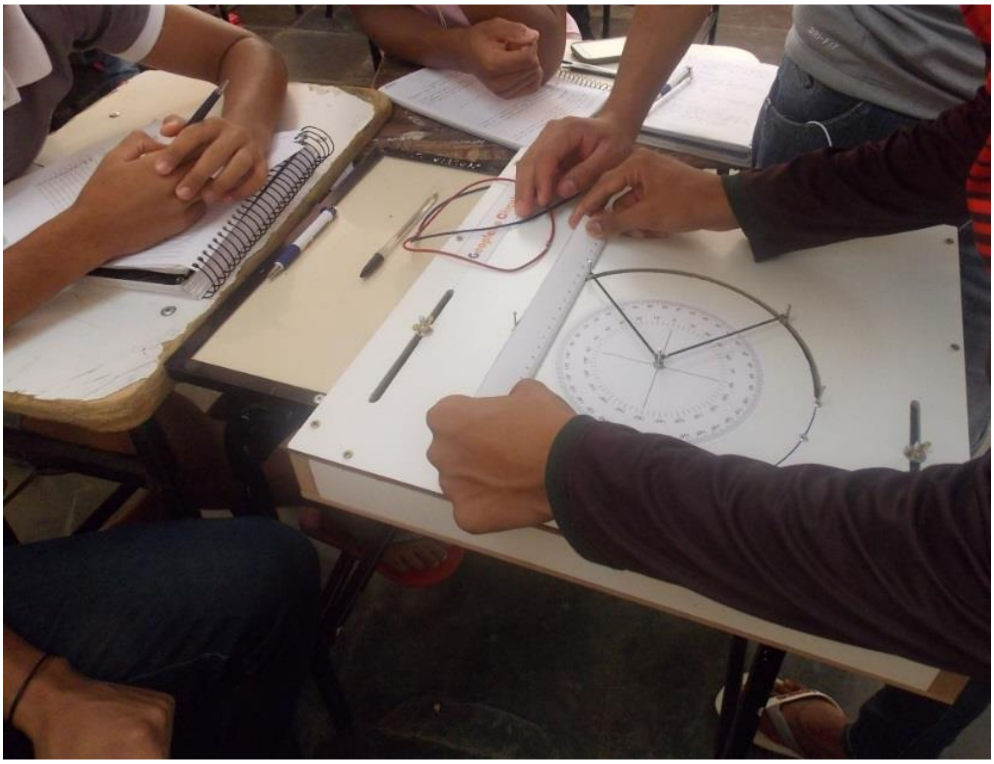
Fonte: Arquivo do autor

Inicialmente, foi necessária nossa intervenção orientando os alunos para que adotassem a divisão da circunferência em 360 partes, ou seja, adotamos o grau (º) como medida para um arco de circunferência, assim como fizeram Ptolomeu e Copérnico. Coube destacar que a medida de um arco em graus não correspondia à medida do comprimento desse arco.

No caso da divisão em 3 partes, os alunos perceberam que primeiro deveriam dividir 360º por 3, o que resulta em 3 arcos de 120º. Neste momento foi necessária uma intervenção para reforçar o conceito de ângulo central, e dessa feita eles fizeram a verificação de que a medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente, o que levou à conclusão de que o resultado obtido é também a medida do ângulo central correspondente a um arco cuja medida é igual a 1/3 da circunferência.

De posse desse resultado, os alunos deslocaram os pontos P_1 e P_2 no GCD, de forma a obter um ângulo central de 120º, fixando-os através dos pinos Aux_1 e Aux_2. Verificaram que o terceiro ponto se localizaria na parte de pontos fixos do aparelho. Questionamos sobre como fazer a escolha do ponto, uma vez que temos vários pontos indicados (A, B, C, D, E, F, G, H e I). Alguns não souberam responder, outros responderam que deveríamos medir novamente 120º a partir de um dos pontos móveis. Questionamos se através da medida da corda P_1P_2 poderíamos conseguir identificar o ponto. Com nossa intervenção verificaram que medindo, a partir de P_1 ou P_2, a distância P_1P_2 com a régua do GCD, deveriam encontrar na circunferência o ponto, conforme ilustra a Figura 6.

Figura 6: Alunos efetuando medidas no GCD



Fonte: Arquivo do autor

Procedendo desta forma, os alunos encontraram o terceiro ponto, indicado no GCD pela letra A. Ressaltamos que poderíamos comparar tal procedimento com a utilização de um compasso. Para isso, teríamos ponta seca do compasso em P_1, abertura P_1P_2 e, traçando um arco que intersecta a circunferência, obteríamos o ponto A. Neste momento, verificaram a divisão da circunferência em três partes iguais, ou seja, em três arcos congruentes.

Perguntamos aos alunos o que obteríamos se unîssemos através de segmentos de reta os pontos P_1, P_2 e A. Não apresentaram dificuldades em responder que teríamos um triângulo equilátero e, utilizando elásticos conforme ilustra a Figura 7, comprovaram tal fato obtendo no GCD um triângulo equilátero inscrito.

Figura 7: Alunos construindo um triângulo equilátero no GCD

Fonte: Arquivo do autor

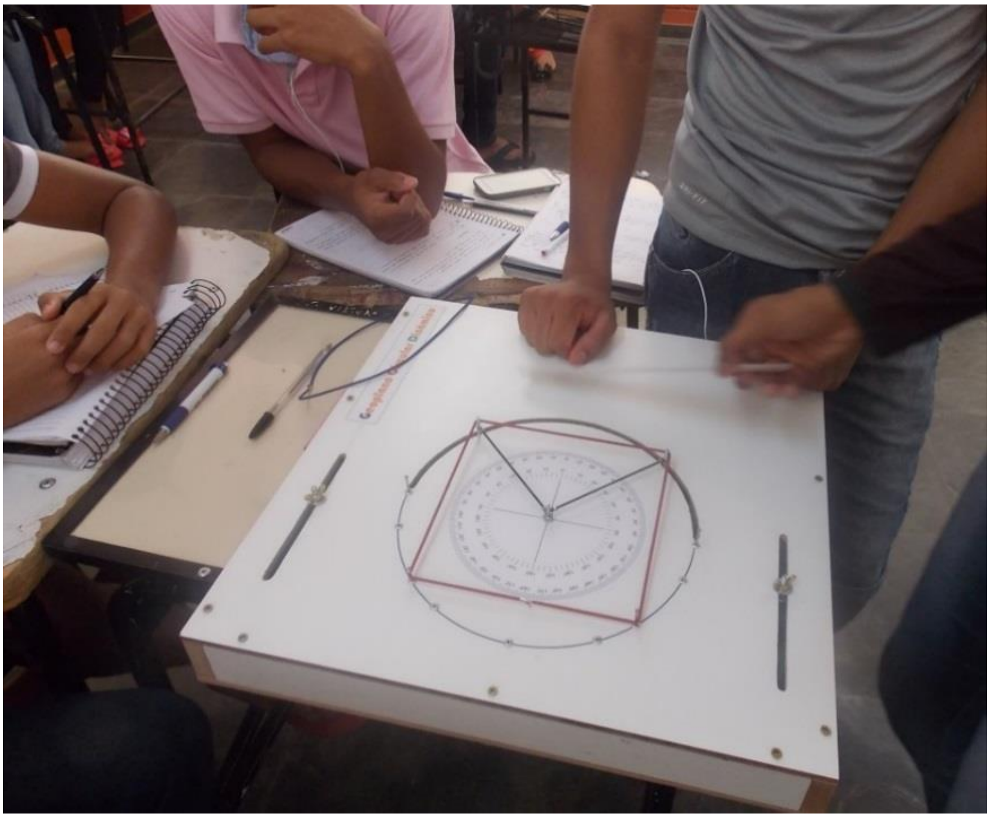
De forma análoga, os alunos verificaram que para dividir a circunferência em quatro partes iguais deveriam efetuar os seguintes passos:

- Efetuar a divisão de 360º por 4, obtendo 90º.
- Deslocar os pontos P_1 e P_2 no GCD de forma a obter um ângulo central de 90º.
- Ligar os pontos P_1 e P_2 com um elástico, obtendo a corda P_1P_2.
- Com a régua do GCD medir a distância P_1P_2.
- Com o zero da régua no ponto P_1 ou P_2, encontrar no GCD o ponto que está a uma distância P_1P_2 de um desses pontos.
- A partir do ponto encontrado repetir o procedimento para encontrar o quarto ponto.

- Identificar o polígono regular inscrito e representá-lo no GCD utilizando elásticos para indicar seus lados.

Nesse caso, os alunos verificaram que deveriam tomar os pontos D e E, colocando neles os pinos e utilizando elásticos para compor um quadrado inscrito, conforme ilustrado através da Figura 8. Após o procedimento, verificaram a analogia com uma construção em que se faz o uso de régua e compasso.

Figura 8: Alunos construindo um quadrado no GCD



Fonte: Arquivo do autor

Os passos anteriores foram seguidos sem grandes dificuldades na divisão da circunferência em 5 e 6 partes iguais, o que resultou em uma representação no GCD de um pentágono, ilustrado na Figura 9, e de um hexágono inscritos pelos alunos.

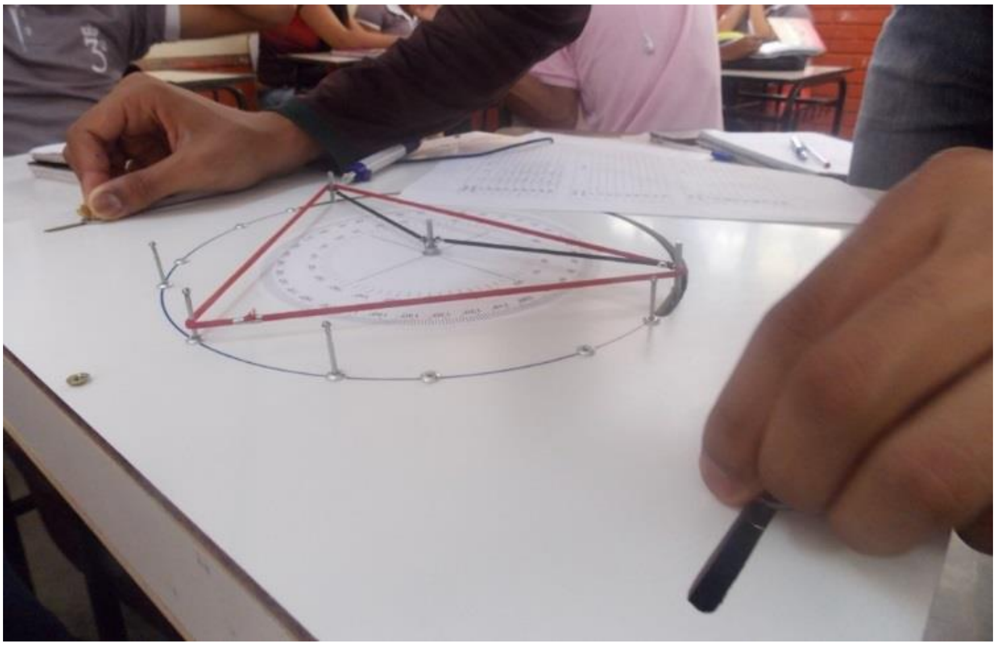
Figura 9: Representação de um pentágono no GCD

Fonte: Arquivo do autor

Como o objetivo era reconstruir as tábuas de cordas, durante a realização das atividades ressaltamos em cada construção o questionamento sobre de que forma poderíamos relacionar o lado de um polígono regular inscrito com a corda por ele determinada.

Através dos relatos, percebemos que os alunos tiveram facilidade em verificar que a medida do lado de um polígono regular corresponde à corda determinada por dois vértices consecutivos na circunferência em que está inscrito. Verificaram também que cada arco de circunferência subtende uma única corda por ele determinada, conforme ilustrado na Figura 10**.** Desta forma pode-se vincular a medida de um arco com a medida da corda correspondente. Questionados sobre como relacionar com o ângulo central, alguns alunos responderam que “como a medida do arco é igual à medida do ângulo central correspondente, então a relação é a mesma”, afirmando que um ângulo central determina na circunferência uma única corda. Foi consenso entre os alunos admitir que esses valores poderiam assim ser tabelados.

Figura 10: Alunos determinando a medida de uma corda



Fonte: Arquivo do autor

Nesse momento foi proposto aos alunos que experimentalmente construíssem uma tabela de cordas utilizando o GCD. Com a régua do GCD efetuaram as medidas dos lados dos polígonos regulares inscritos de 3, 4, 5 e 6 lados, ou seja, de um triângulo equilátero, de um quadrado, de um pentágono e de um hexágono inscritos, correspondendo às cordas dos arcos de 120º, 90º, 72º e 60º, respectivamente.

Para cada arco acima, foram tiradas as medidas por cinco alunos, e ao final tomou-se o valor médio com o qual preencheram a Tabela 4. O cálculo do valor médio para a medida das cordas não apresentou grandes dificuldades aos alunos, uma vez que, conforme relatos dos mesmos, “trabalhamos medidas estatísticas no início do ano letivo e ainda me recordo bem de como se calcula a média aritmética. Basta somarmos e dividir o resultado por cinco”.

Tabela 4: Para preenchimento com os valores experimentais da atividade 2

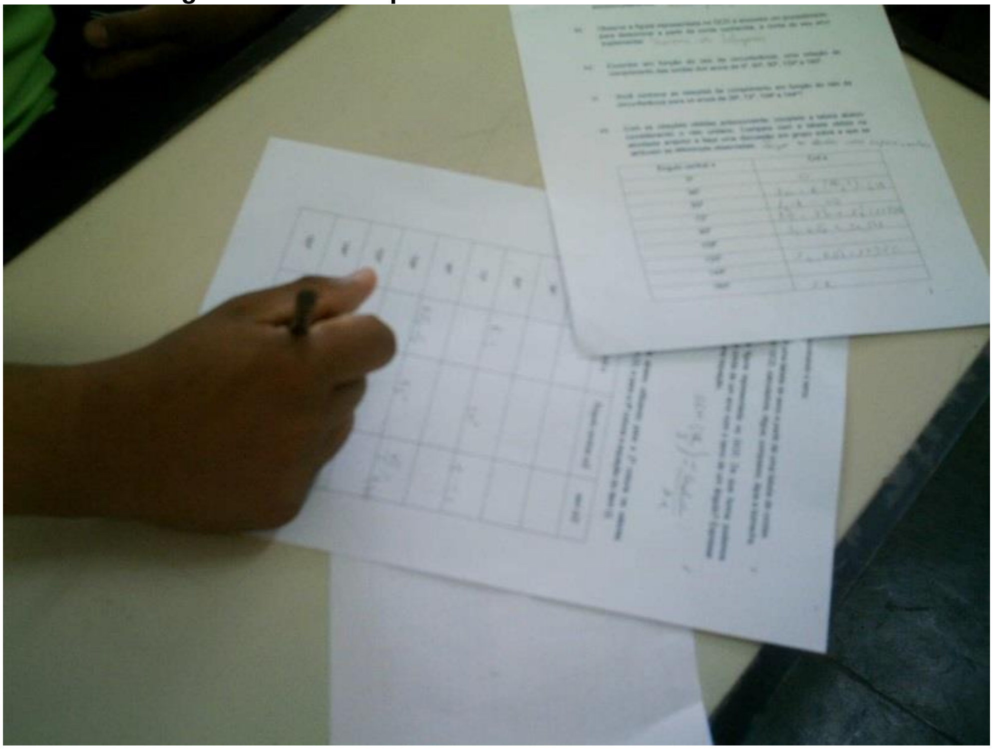
Ângulo central α	Crd α
0º	
36º	
60º	
72º	
90º	
108º	
120º	
144º	
180º	

Fonte: Bloco de atividades da pesquisa

Durante o preenchimento da tabela, os alunos verificaram que para os arcos de 36º, 108º e 144º ainda não havia sido feita nenhuma construção. Não tiveram dificuldades em dizer que a corda correspondente ao arco de 36º se trata do lado de um polígono de 10 lados (o nome decágono não foi dito por nenhum aluno). Explicamos que a construção de um decágono exigiria mais dois pinos no arco onde correm os pinos móveis do GCD e, portanto, trataríamos desse caso na lousa. Ressaltamos, entretanto, que a medida poderia ser feita no GCD normalmente, mesmo sem a representação do polígono.

No caso dos arcos de 108º e 144º, perguntamos aos alunos se havia algum polígono regular que, quando inscrito em uma circunferência, os lados corresponderiam às cordas dos arcos de 108º e 144º. Após alguns cálculos e tendo observado os valores obtidos para o triângulo equilátero e o quadrado inscritos, com certa dificuldade responderam que não. Concluímos afirmando e informando que estudaríamos a relação entre esses ângulos e os demais nas atividades seguintes, mas que as medidas das cordas poderiam ser feitas no GCD normalmente. Desta forma completaram a tabela com os dados experimentais, conforme ilustra a Figura 11.

Figura 11: Alunos preenchendo uma tabela de cordas

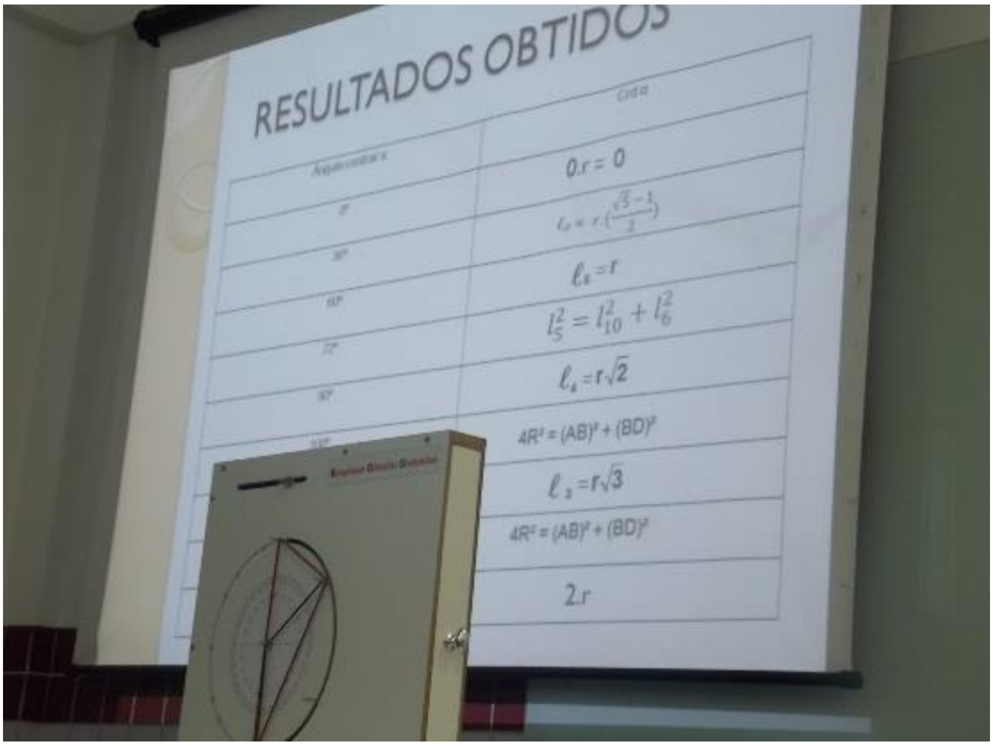


Fonte: Arquivo do autor

Ao final dessa atividade, ressaltamos que esses procedimentos utilizados para construir nossa tabela apenas nos fornecem valores aproximados, que dependem da precisão dos equipamentos e das medidas efetuadas. Para encontrarmos os valores corretos, com a precisão que desejarmos, lançamos mão nas atividades seguintes de procedimentos geométricos e algébricos, como fizeram Ptolomeu e Copérnico.

As atividades posteriores (3 e 4) se referiam ao cálculo das cordas dos arcos já vistos anteriormente sendo que foi necessário, inicialmente, que os alunos encontrassem em função do raio da circunferência, uma relação de comprimento das cordas dos arcos, conforme ilustra a Figura 12. Foi necessário a nossa intervenção para que eles conseguissem completar uma tabela com esses dados, principalmente para as cordas dos arcos de 36º e 72º.

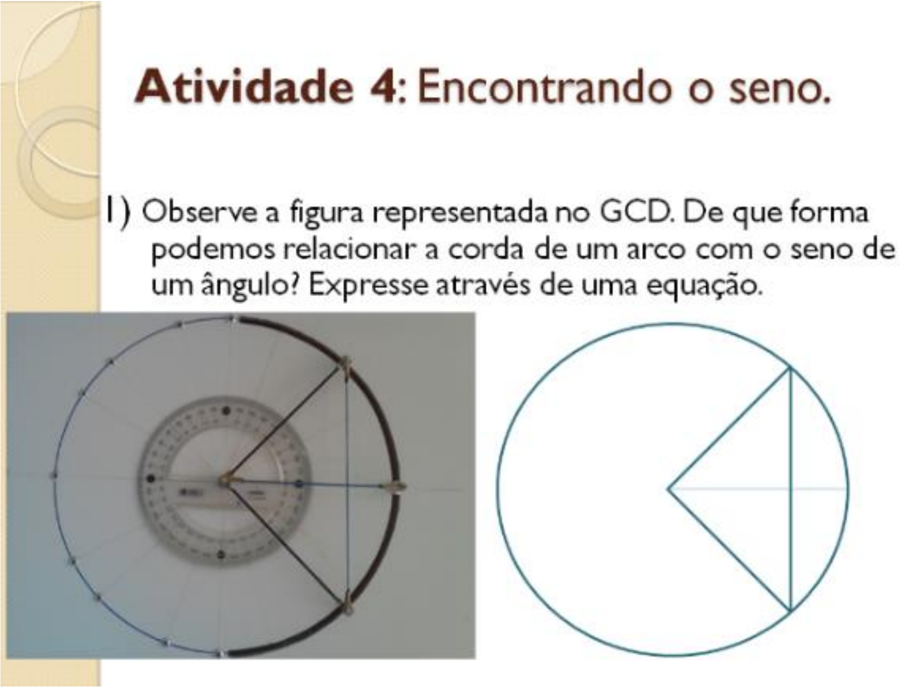
Figura 12: Apresentação das relações obtidas



Fonte: Arquivo do autor

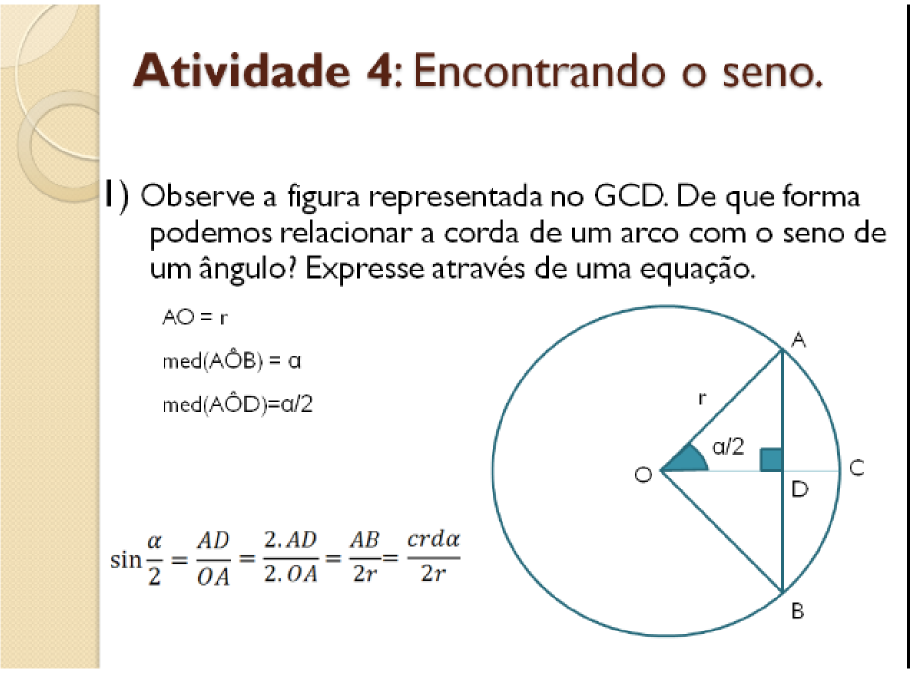
Importante ressaltar que o GCD foi sempre utilizado na construção de figuras e representando situações que pudessem auxiliar os alunos em suas conclusões, para identificar a relação entre cordas de arcos suplementares e, na atividade seguinte, para relacionar a corda de um arco com o seno de um ângulo, conforme ilustram as Figuras 13 e 14, que apresentam uma sequência de slides exibida após a conclusão dos alunos.

Figura 13: Slide A: relação entre corda e seno



Fonte: Arquivo do autor

Figura 14: Slide B: relação entre corda e seno



Fonte: Arquivo do autor

De posse da relação da atividade 4 (Figura 14), e dos dados já coletados, os alunos completaram a tabela de seno, dos ângulos nela indicados. Após o preenchimento, os alunos relataram que os valores obtidos na última coluna já eram conhecidos por eles, através das tabelas dos ângulos notáveis, estudada no primeiro ano do ensino médio. Vários deles disseram que acharam muito interessante a forma como esses mesmos dados foram obtidos através das atividades envolvendo cordas em uma circunferência.

Finalizando as atividades, retomamos o texto que fora apresentado no primeiro momento da pesquisa, mais especificamente a parte que fala sobre a obra de Ptolomeu e sobre a de Copérnico. Fizemos uma breve discussão sobre os resultados a que os alunos chegaram em relação à construção da tábua de cordas.

5.3. Análise do Questionário 2

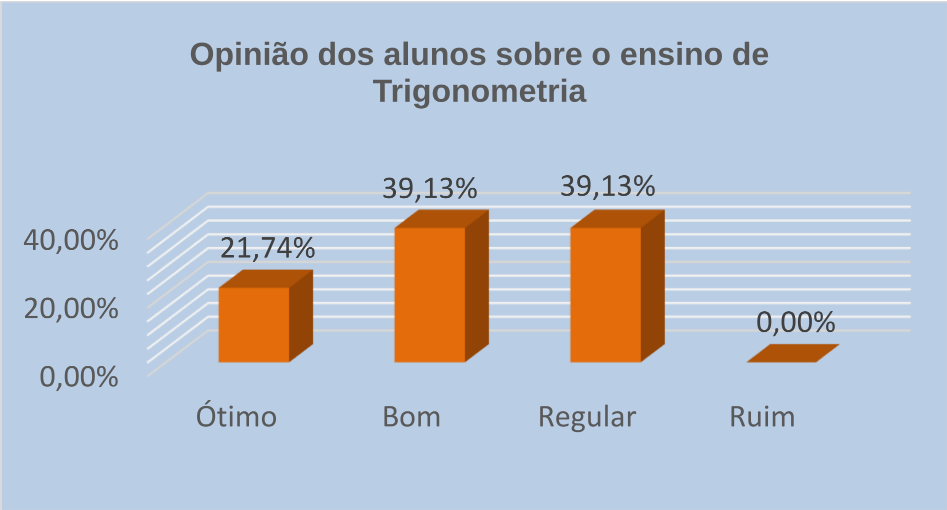
Esse questionário foi aplicado na turma do 3º ano A da Escola Estadual Deputado Esteves Rodrigues, em novembro de 2014, marcando o encerramento do desenvolvimento do projeto, estando presentes 26 estudantes, e teve como objetivo coletar a opinião dos alunos sobre a utilização do GCD, sobre as atividades desenvolvidas e sobre o ensino de trigonometria. Buscamos também verificar o conhecimento dos alunos após as atividades de reconstrução das tábuas de cordas, através da resolução de uma atividade sobre o seno de um ângulo.

A primeira questão teve o seguinte enunciado:

> 1) Qual sua opinião sobre o ensino de Trigonometria na educação básica atualmente?
>
> ( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim

Conforme o resultado apresentado através do Gráfico 6, para a maioria dos alunos (60,87%), o ensino de trigonometria está bom ou ótimo, revelando uma certa afinidade dos alunos com esse campo do conhecimento. No entanto, um número considerado de alunos (39,13%) acha que está regular, o que reforça a necessidade apresentada nesse trabalho, de se estudar esse conhecimento sob uma nova perspectiva, abordando sempre que possível a história da trigonometria e utilizando, no momento adequado, materiais didáticos para que se possa modificar essa situação.

Gráfico 6: Opinião dos alunos sobre o ensino de Trigonometria



Fonte: Dados da pesquisa – Novembro de 2014

Na Questão 2, cujo enunciado está transcrito a seguir, os alunos foram unânimes ao assinalar a primeira opção de resposta, através da qual expressam que é interessante a utilização da investigação histórica no ensino de Matemática e que isso os auxilia na aprendizagem de temas como a trigonometria.

2) Qual sua opinião sobre a utilização da investigação histórica no ensino de Matemática para auxiliar na compreensão de temas como a trigonometria? ( ) É interessante e auxilia na aprendizagem ( ) É interessante mas não auxilia na aprendizagem ( ) Não é interessante. ( ) Outros ____

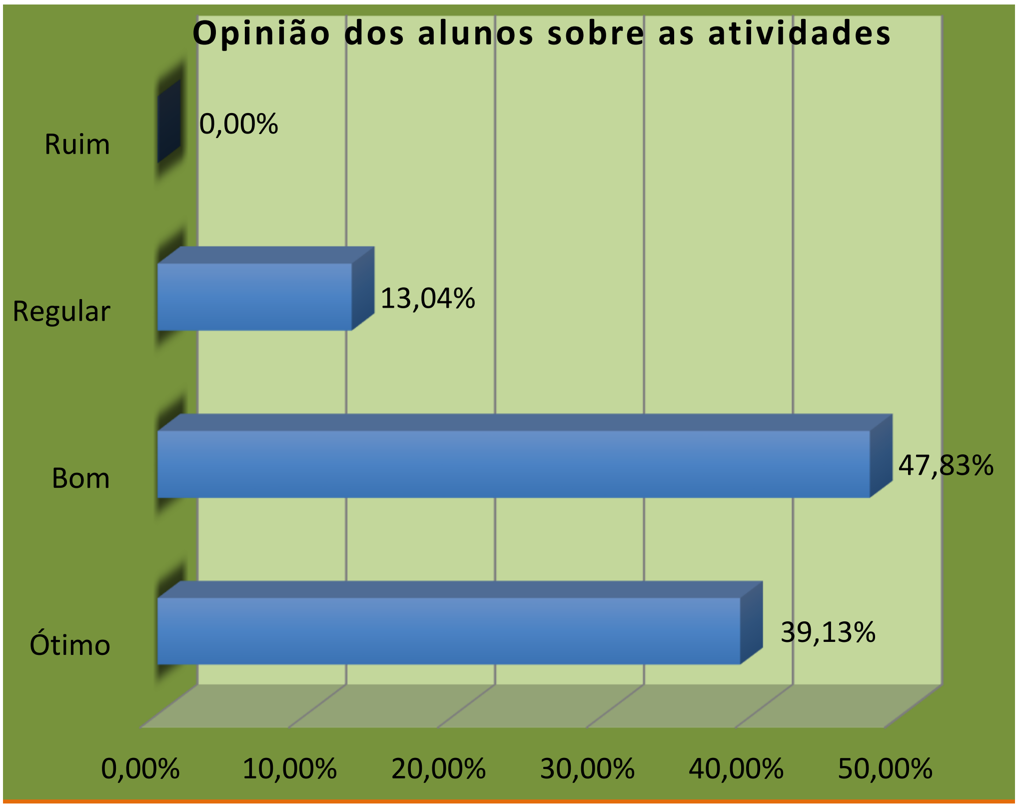
Podemos perceber uma receptividade por parte dos alunos acerca da utilização dessa metodologia nas aulas de Matemática. Esse fato tem sua importância, uma vez que “O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações.” (PONTE, 2013, p.23)

A Questão 3 coletou a opinião dos alunos sobre as atividades desenvolvidas durante esse trabalho, apresentando o seguinte enunciado:

3) Qual sua opinião sobre as atividades desenvolvidas? ( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim - Foram adequadas? ( ) Sim ( ) Não - Levaram a uma melhor compreensão do tema proposto? ( ) Sim ( ) Não

Sobre os questionamentos se foram adequadas ou se levaram a uma melhor compreensão do tema, os alunos foram unânimes ao assinalarem a opção SIM. Sobre a qualidade das atividades, o resultado representado no Gráfico 7 revela uma satisfação da maioria dos alunos, apesar de uma pequena parcela (13,04%) achar regular, o que nos mostra que o processo não está pronto e acabado, permitindo inclusão ou reforma de atividades, de forma a tornar ainda mais motivador e eficiente o processo de ensino-aprendizagem de trigonometria no ensino médio.

Gráfico 7: Opinião dos alunos sobre as atividades



Fonte: Dados da pesquisa – Novembro de 2014

Os enunciados das Questões 4, 5 e 6, estão apresentados a seguir.

4) Os materiais e recursos didáticos utilizados, contribuíram para melhor entendimento do tema proposto?

( ) Sim ( ) Não

5) Sobre o aparelho GCD – Geoplano Circular Dinâmico:

( ) É interessante e auxiliou na aprendizagem

( ) É interessante mas não auxiliou na aprendizagem

( ) Não é interessante.

( ) Outros ____

6) Qual sua opinião sobre a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula?

( ) Interessante e auxilia na aprendizagem

( ) Interessante mas não auxilia na aprendizagem

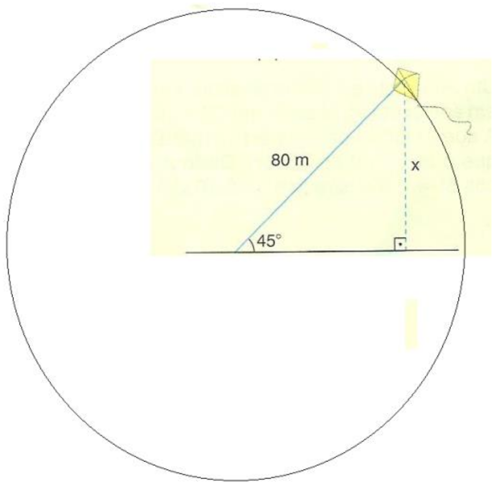
( ) Indiferente, pois é possível aprender sem a utilização deles

( ) Desnecessário

Nessas questões, procuramos coletar a opinião dos alunos acerca do GCD e demais recursos didáticos utilizados durante esse trabalho. Nas três questões, os alunos em sua totalidade, foram favoráveis à utilização do GCD, o qual acharam interessante, tendo auxiliado na aprendizagem, e estenderam essa opinião ao uso de outros materiais manipuláveis em sala de aula. Essa constatação se justifica, segundo Lorenzato (2006), pelo fato de o material didático facilitar a aprendizagem, qualquer que seja o assunto, curso ou idade. Para esse autor, em aulas onde os alunos manuseiam o material didático, "as observações e reflexões deles serão mais profícuas, uma vez que poderão, em ritmos próprios, realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durantes suas atividades." (LORENZATO, 2006, p. 27)

Para a Questão 7, apresentamos um problema envolvendo os lados de um triângulo retângulo, cujo enunciado é o seguinte:

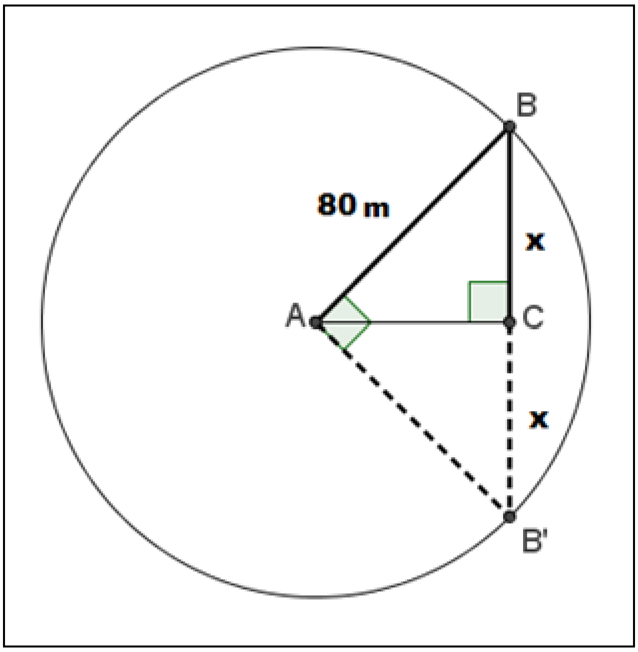
7) Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento do fio é 80 m. determine a altura da pipa em relação ao solo. Dado: $\sqrt{2} = 1{,}41$



Fonte:http://www.educacional.com.br/escolas/arquivos/80810001/publicacao/494602/1385580636736.pdf. Acesso em 07 de Out. 2014. (Adaptado)

Para este item, esperava-se que os alunos visualizassem uma solução utilizando o conceito de cordas, motivo pelo qual foi incluída a circunferência na figura e não foi fornecido o valor do seno de 45º. Fazendo uma construção conforme a Figura 15 pode-se encontrar o valor x utilizando os conceitos estudados sobre cordas. Para isso, tomamos o ponto em que o fio está preso ao solo como o centro (ponto A na Figura 15) de uma circunferência de raio 80m e que contém o ponto em que o fio está preso a pipa (ponto B na Figura 15). Teremos assim a altura da pipa ao solo (medida de BC na Figura 15) como sendo o valor da meia-corda do ângulo central de 90º.

Figura 15: Esquema para resolução da Questão 7



Fonte: Arquivo do autor

Uma solução utilizando as tábuas de cordas, seria:

- ✓ Pela Figura 15, temos que:

  $crd(B\hat{A}B') = 2x$

  Como o ângulo BÂB' é reto, temos que:

  $crd90º = 2x$ (1)

- ✓ Conforme determinado nas atividades de construção das tábuas de cordas, temos que:

  $crd90º = r\sqrt{2}$ (2)

- ✓ Pelas igualdades (1) e (2), obtemos:

  $2x = r\sqrt{2}$ (3)

- ✓ Substituindo em (3) o valor do raio (r =80 m) conforme indicado na Figura 15, obtemos:

  $2x = 80\sqrt{2}$ (4)

- ✓ Da equação em (4), segue:

  $x = 40\sqrt{2}$ (5)

- ✓ Substituindo em (5) o valor dado para $\sqrt{2}$, segue:

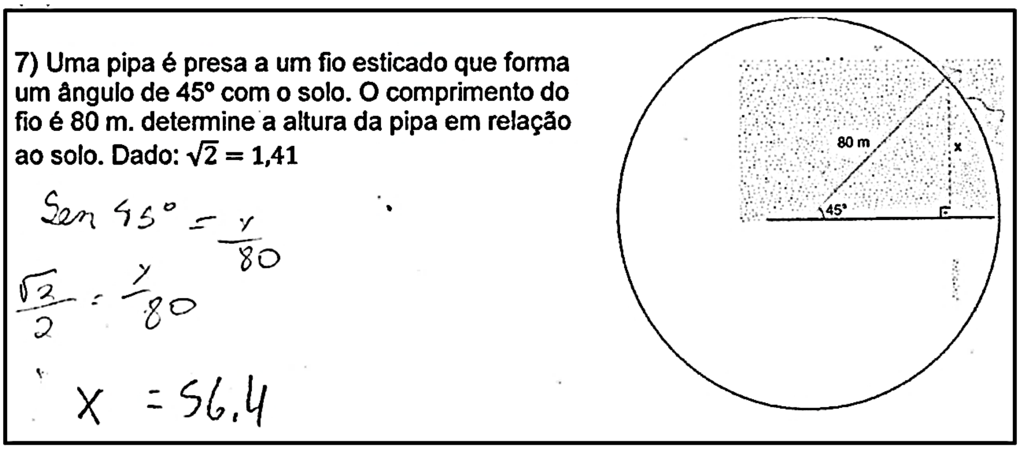
  $x = 40 \times 1{,}41$

$x = 56{,}4\ \mathrm{m}$

Encontrando assim o valor procurado.

Todos os alunos que resolveram essa questão (70%) utilizaram o método tradicional, através da razão seno.

O aluno 01 resolveu essa questão da seguinte maneira:



Quando apresentada a solução envolvendo o uso dos conceitos sobre cordas, os alunos acharam interessante o método utilizado e solicitaram mais exemplos para que pudessem resolver através dele. A verificação desse fato vai de encontro ao exposto em Mendes, I. (2006, p. 100), onde o autor afirma que a investigação, como princípio articulador entre o ensino-aprendizagem e as atividades envolvendo a história da matemática, pressupõe uma valorização do saber e do fazer históricos na ação cognitiva dos alunos. Segundo esse autor, uma investigação histórica nas aulas de matemática permite uma redescoberta desse conhecimento, a partir de informações do passado, sendo ressignificado pelo aluno de acordo com a contextualização sociocultural.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentre os diversos desafios que envolvem a carreira docente, a adoção de novas metodologias em sala de aula nos provoca e instiga a buscar inovações e estudar novas tendências para fazer frente às exigências da profissão. Melhorar a nossa prática, visando à qualidade no ensino e a alcançar um nível maior de satisfação dos alunos em aprender conceitos, deve sempre ser um norte para nossas ações.

Pensando dessa forma, o professor de Matemática que proporciona uma aprendizagem significativa através de atividades de ensino que despertam o interesse dos estudantes, tem na história da Matemática um ótimo campo de atuação. Em relação ao nosso objeto de estudo, a percepção da evolução histórica da construção dos conhecimentos trigonométricos, numa variedade de tópicos apresentados, e através de pesquisas investigativas e criativas, proporcionaram situações inovadoras para serem aplicadas no ambiente escolar.

Com a realização de nossa pesquisa, as questões iniciais no nosso entendimento foram respondidas, uma vez que constatamos que a história da matemática deve ser utilizada como forma de dar significado à aprendizagem dos alunos, através de atividades que os permita confrontar a maneira como o conhecimento foi construído e como é apresentado atualmente.

As aulas investigativas se apresentaram como um excelente recurso metodológico para explorar os aspectos históricos envolvidos, pois diante das interações e discussões estabelecidas no decorrer das atividades, percebemos um grande envolvimento dos alunos. Dessa forma, acreditamos ter alcançado o objetivo de proporcionar aos mesmos uma visão de que o ensino de trigonometria, e em geral o ensino de Matemática, não se resume apenas em conhecer e aplicar as fórmulas e tabelas. É necessário dar significado ao que está sendo estudado, principalmente através do conhecimento da evolução desse campo da matemática por uma percepção histórica.

Através dessa pesquisa, constatamos também que a utilização de materiais manipuláveis como um recurso didático, quando feito de forma coerente e adequada às atividades e com fins bem definidos, torna-se um grande aliado do professor no desenvolvimento de conteúdos em sala de aula, pelo seu papel motivador e integrador, sendo capaz de despertar o interesse dos alunos pelo tema abordado.

Pelas observações feitas durante as atividades e através de relatos, os alunos nos passaram uma confirmação de que a utilização do material manipulável Geoplano Circular Dinâmico – GCD facilitou a compreensão de vários conceitos, além de permitir a construção de formas geométricas para auxiliá-los na resolução das atividades.

Percebemos que a utilização do GCD durante as atividades também otimizou o tempo para ministração dos conteúdos, uma vez que simplificou diversos procedimentos que utilizariam as técnicas do desenho geométrico, com régua e compasso.

Diante do exposto, acreditamos que nosso trabalho possa colaborar para que os professores reflitam sobre o uso da história em suas aulas, por meio de atividades investigativas sobre a evolução histórica do conhecimento a ser estudado, bem como perceba a importância da construção de materiais manipuláveis para dar significado aos conteúdos matemáticos, a exemplo da trigonometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica.** In: BORBA, M.C., ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

BORTOLI, G. **Um olhar histórico nas aulas de trigonometria: possibilidades de uma prática pedagógica investigativa**. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas - PPGECE. 2012. Disponível em www.univartes.br/bdu. Acesso em 18 de dezembro de 2014.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais. PCN+ Ensino Médio.** Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**.** Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRIGHENTI, M. J. L. **Representações gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos**. Bauru, SP: Edusc, 2003. (Coleção Educar).

D´AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V.(org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas***.** São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

D’AMBROSIO, U. (a) **História da Matemática e Educação.** In: *Cadernos CEDES 40*. ***História e Educação Matemática*****.** 1ª ed. Campinas, SP: Papirus. 1996. p.7-17.

D’AMBROSIO, U. (b) **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas, SP: Papirus, 1996.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D. **Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente?** In: BORBA, M.C., ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013, p. 53 – 85.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática.** Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: LORENZATO, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na* formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MENDES, I. A. **A história como um agente de cognição na educação matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES, I. A. (a) **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

MENDES, I. A. (b) **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. Ed. rev. e aum. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

MENDES, M. J. de F. **Possibilidades de exploração da história da ciência na formação do professor de matemática: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium.** 2010. 193 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

MENDES, M. J. de F.; ROCHA, M. L. P. C. **Problematizando os caminhos que levam à tabela trigonométrica**. Belém: SBHMat, 2009 (Coleção História da Matemática para Professores).

MIGUEL, A.; MIORIN, M. A. **A História na educação matemática: propostas e desafios**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **Conteúdo Básico Comum (CBC) – Proposta Curricular – MG Matemática - Ensino Médio**. SEE/MG, 2007.

Disponível em: http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7B4DA513B4-3453-4B47-A322-13CD37811A9C%7D_ Matem%C3%A1tica%20final.pdf Acesso em 30 jan. 2015

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. **CRV – Centro de Referência Virtual do Professor**. SEE/MG. 2015. Acesso através do *link*- http://crv.educacao.mg.gov.br

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. **Aprendizagem significativa: a teoria de aprendizagem de David Ausubel**. São Paulo: Editora Moraes, 1982.

MOREIRA, M. A. **A teoria da Aprendizagem Significativa segundo Ausubel**. In: MASINI, E. F. S.; MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa**. São Paulo: Vetor, 2008.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de pesquisa em ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

NACARATO, A. M. **Eu trabalho primeiro no concreto**. Revista da Educação Matemática. São Paulo: SBEM, v. 9, n. 9 e 10, p. 1-6. 2004-2005.

NUNES, J. M. V.; ALMOULOUD, S. A.; GUERRA, R. B. **O Contexto da História da Matemática como Organizador Prévio**. In.: Bolema, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p.537 a 561, abril 2010 ISSN 0103-636X. Disponível em: <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291221892026.pdf> Acesso em 22 jan. 2015.

PEREIRA, A. C. C. **A obra "*de triangulis omnimodis libri quinque*" de Johann Müller Regiomontanus (1436 – 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria**. 2010. 329 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

PONTE, J. P., BROCADO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 3. Ed. rev. ampl. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

RODRIGUES, F.C.; GAZIRE, E.S. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão.** In:

Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. e ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187/23460>. Acesso em: 28 jan. 2015.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

SILVEIRA, J. S.; FILHO, I. F. B. **Uma Proposta para o Ensino de Trigonometria por meio da História da Matemática**. UNOPAR Cient. Exatas Tecnol., Londrina, v. 12, n. 1, p. 51-60, Nov. 2013.

OTTESBACH, R.C.; PAVANELLO, R.M. **Laboratório de Ensino e Aprendizagem da Matemática na apreciação de professores**, 2009. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_rosangela_cristina_ottesbach.pdf >. Acesso em: 28 jan. 2015.

APÊNDICE

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO 1

Programa de Pós-Graduação em Matemática – PROFMAT

Título da pesquisa: Proposta de utilização de material concreto em atividades de investigação histórica sobre a trigonometria existente nas tabelas de cordas de Ptolomeu/Copérnico

Autor: Leonardo Martins do Nascimento

Instituição:____

Questionário

1) Você já conhece a História da Trigonometria? Sim ou Não? Se sim, o que você conhece?

2) Para você é importante conhecer a história da trigonometria paralelamente ao trabalho desse conteúdo? A aprendizagem seria melhor? Por quê?

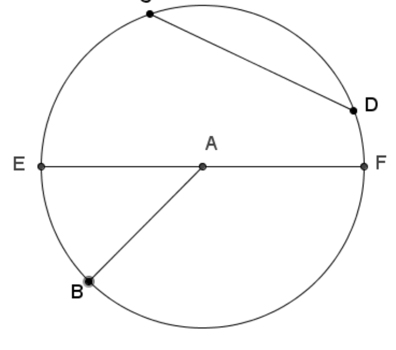
3) Na sua opinião, o que levaram os matemáticos da antiguidade a estudarem a Trigonometria?

4) Analise a figura abaixo, identifique os elementos em destaque na circunferência e responda:

a) Qual o nome dado ao segmento AB?

b) Qual o nome dado aos segmentos CD e EF?

c) Por conter o ponto A, que outro nome podemos atribuir ao segmento EF?



5) Qual item abaixo apresenta uma razão entre dois números?

a) (   ) 15   b) (   ) $\sqrt{13}$ c) (   ) $\frac{7}{9}$ d) (   ) 5,3   e) (   ) não sei.

6) Assinale a opção que apresenta uma característica específica do triângulo retângulo.

a) (   ) Têm os três lados congruentes.

b) (   ) Contém pelo menos um ângulo obtuso.

c) (   ) Contém um ângulo de 90° (reto) e os outros dois ângulos são agudos.

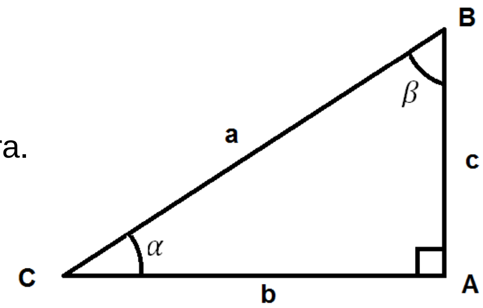
d) (   ) Todos seus ângulos são de 60°.

e) (   ) não sei.

7) Observe o triângulo da figura ao lado. Nele podemos identificar:

BC = Hipotenusa   AC = Cateto AB = Cateto

α (alfa) e β (beta) - Ângulos agudos



De acordo com o triângulo retângulo da figura.

I - O lado AB é cateto

(   ) oposto ao ângulo α

(   ) adjacente ao ângulo α

II – Qual identidade trigonométrica corresponde à razão $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{c}{a}$?

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO 2

Programa de Pós-Graduação em Matemática – PROFMAT

Título da pesquisa: Proposta de utilização de material concreto em atividades de investigação histórica sobre a trigonometria existente nas tabelas de cordas de Ptolomeu/Copérnico.

Autor: Leonardo Martins do Nascimento – PROFMAT/UESB

Instituição:____

Questionário

1) Qual sua opinião sobre o ensino de Trigonometria na educação básica atualmente?
( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim

2) Qual sua opinião sobre a utilização da investigação histórica no ensino de Matemática para auxiliar na compreensão de temas como a trigonometria?
( ) É interessante e auxilia na aprendizagem
( ) É interessante mas não auxilia na aprendizagem
( ) Não é interessante.
( ) Outros ______________________________________

3) Qual sua opinião sobre as atividades desenvolvidas?
( ) Ótimo ( ) Bom ( ) Regular ( ) Ruim
- Foram adequadas? ( ) Sim ( ) Não
- Levaram a uma melhor compreensão do tema proposto? ( ) Sim ( ) Não

4) Os materiais e recursos didáticos utilizados, contribuíram para melhor entendimento do tema proposto?
( ) Sim ( ) Não

5) Sobre o aparelho GCD – Geoplano Circular Dinâmico:
( ) É interessante e auxiliou na aprendizagem
( ) É interessante mas não auxiliou na aprendizagem
( ) Não é interessante.
( ) Outros ____

6) Qual sua opinião sobre a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula?

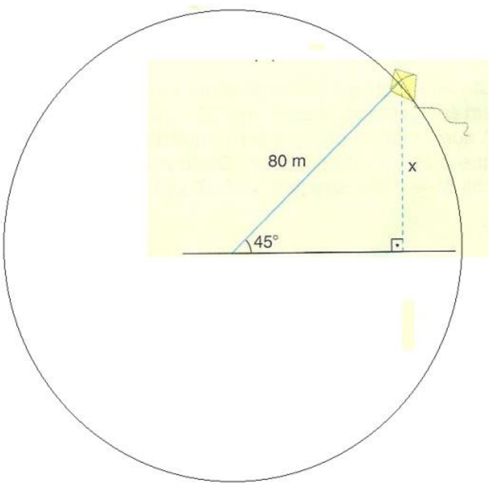
( ) Interessante e auxilia na aprendizagem

( ) Interessante mas não auxilia na aprendizagem

( ) Indiferente, pois é possível aprender sem a utilização deles

( ) Desnecessário

7) Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento do fio é 80 m. determine a altura da pipa em relação ao solo. Dado: $\sqrt{2} = 1{,}41$



APÊNDICE C – BLOCO DE ATIVIDADES (01 A 04)

Atividade 1: Retomando conceitos

Objetivo: Propiciar um momento de retomada dos conceitos geométricos necessários ao desenvolvimento das atividades de reconstrução das tábuas de cordas.

Material necessário: Lápis, borracha, transferidor, régua e Geoplano Circular Dinâmico (GCD).

Questões:

1) Observe o GCD e procure identificar os elementos geométricos nele representados.

2) Como você define circunferência?

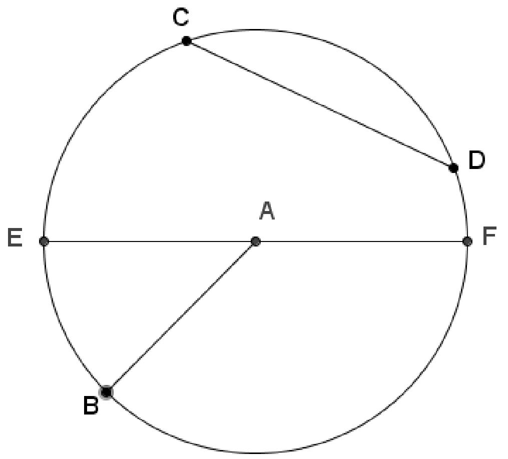
3) Observe a figura ao lado e escreva o nome dos segmentos indicados:

$\overline{AB}$ ______________________________

$\overline{EF}$ ______________________________

$\overline{CD}$ ______________________________

$\overline{AF}$ ______________________________

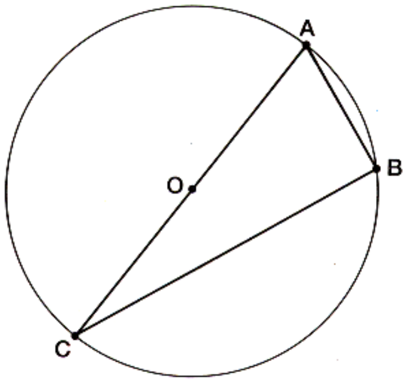


4) Represente no GCD um raio, um diâmetro e uma outra corda qualquer.

5) Utilizando a régua do GCD, determine a medida do raio e do diâmetro da circunferência nele representada. Qual a medida aproximada dessa circunferência? (Use π=3,14)

6) Se o raio de uma circunferência tem comprimento de 5,2 cm, qual é a medida do diâmetro dessa circunferência?

7) Na figura ao lado, considere a circunferência com centro em O e:



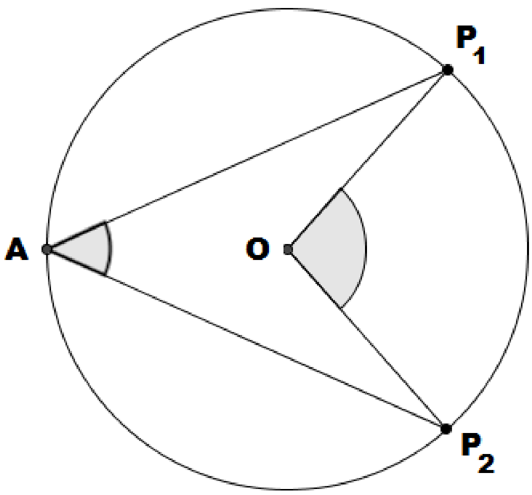
a) Calcule a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

b) indique uma relação entre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$?

8) Construa no GCD a figura abaixo, atribuindo um valor entre 0º e 180º ao ângulo $P_1\hat{O}P_2$.

a) Verifique a medida do ângulo $P_1\hat{A}P_2$ utilizando um transferidor avulso. O que você observa?

b) Faça variar a posição dos pontos P_1 e P_2 observando a relação entre os dois ângulos. Qual a propriedade que você identifica com esse experimento?



Atividade 2: Construção de uma tábua de cordas com dados experimentais.

Objetivo: Permitir a busca de dados relevante e convenientes para a construção de uma tábua de cordas, através da manipulação do Geoplano Circular Dinâmico (GCD), da observação e da experimentação.

Material necessário: Geoplano Circular Dinâmico (GCD), lápis e borracha.

Questões:

1) Construir no GCD os polígonos regulares de 3, 4, 5, e 6 lados procurando relacionar os lados dos polígonos inscritos e as cordas determinadas por eles.

2) Represente no GCD cada um dos arcos correspondentes aos ângulos centrais indicados na tabela, e complete-a com as medidas das cordas desses arcos. Obs.: Utilize a régua do GCD para efetuar a medida das cordas.

Ângulo central α	Crd α
0º	
36º	
60º	
72º	
90º	
108º	
120º	
144º	
180º	

Atividade 3: Formalizando conceitos

Objetivo: Construir uma tabela de cordas.
Material necessário: GCD, calculadora, régua, lápis e borracha.
Questões:

1) Você percebe alguma relação entre pares de arcos dentre os valores trabalhados na atividade anterior? Qual?

2) No GCD construa um triângulo tomando como vértices um dos pontos móveis do aparelho e os extremos de um diâmetro da circunferência. Observando o triângulo formado, como você classificaria, com relação aos ângulos internos, um triângulo inscrito em uma semicircunferência.

3) Observando no GCD a figura construída no item 2, e supondo conhecido o raio da circunferência, encontre um procedimento para determinar a partir da corda conhecida, a corda de seu arco suplementar.

4) Construa no GCD as figuras e procure encontrar, em função do raio da circunferência, uma relação de comprimento das cordas dos arcos de 0º, 60º, 90º, 120º e 180º.

5) Você conhece as relações de comprimento em função do raio da circunferência para os arcos de 36º, 72º, 108º e 144º?

6) Com as relações obtidas no item 4, complete a tabela abaixo considerando unitário o raio da circunferência. Compare com a tabela obtida na atividade anterior e faça uma discussão em grupo sobre a que se atribuem as diferenças observadas.

Ângulo central α	Crd α
0º	
60º	
90º	
120º	
180º	

Atividade 4: Encontrando o seno.

Objetivo: Construir uma tabela de seno a partir de uma tabela de cordas.

Material necessário: GCD, calculadora, régua, lápis e borracha.

Questões:

1) Construa no GCD um triângulo com vértices no centro e nos dois pontos móveis. Identifique o raio que divide o lado do triângulo ao meio. Observando a figura construída, tente relacionar a corda de um arco com o seno de um ângulo. Expresse esse fato através de uma equação. Variando a posição dos pontos móveis, essa relação ainda se verifica?

2) Complete a tabela abaixo utilizando para a 2ª coluna os valores obtidos na atividade (3), e para a 4ª coluna a equação do item 1.

Ângulo central α	crd α	Ângulo central α/2	sen α/2
0º			
60º			
90º			
120º			
180º			