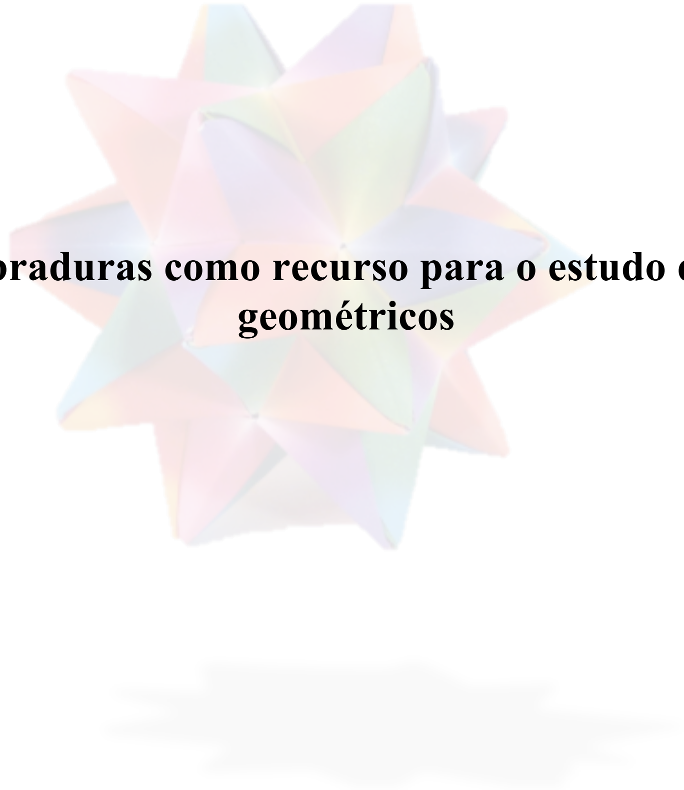
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

Kenia Carla Belo Domingues Glowecki



Uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos geométricos

Recife - PE

28 de Agosto de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

O uso de dobraduras como recurso para o estudo de conceitos geométricos

Kenia Carla Belo Domingues Glowecki

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof[a]. Dra. Maité Kulesza

Recife - PE

28 de Agosto de 2015

G565u Glowecki, Kenia Carla Belo Domingues
Uso de dobraduras como recurso para estudo de conceitos geométricos / Kenia Carla Belo Domingues Glowecki – Recife, 2015.
86 f. : il.

Orientador(a): Maité Kulesza.
. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Matemática, Recife, 2015.
Inclui referência(s) e apêndice(s).

1. Dobraduras 2. Geometria 3. Origami I. Kuleska, Maité, orientadora II. Título

CDD 510.7

KENIA CARLA BELO DOMINGUES GLOWECKI

O uso de Dobraduras como Recurso para o Estudo de Conceitos Geométricos

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT do Departamento de Matemática da UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 28/08/2015

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Maité Kulesza (Orientadora) – UFRPE

____

Profª. Drª. Rogéria Gaudêncio Rêgo – UFPB

____

Profª. Drª. Márcia Pragana Dantas - UFRPE

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a todos os colegas de profissão, pois a busca da transformação social e da qualidade da escola é muito árdua.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, pela graça de estar viva e concluir mais um grande desafio. A minha família, em especial meu esposo Ricardo Glowecki e ao meu filho Victor Ricardo, que foram os mais negligenciados nesses dois últimos anos pela minha ausência. Aos meus queridos educandos da Erem Oliveira Lima, pela compreensão de não receberem em alguns momentos maior dedicação.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT por terem contribuido com meu crescimento pessoal e intelectual, ao professor Antônio Carlos (Curso do Milênio IMPA-UFPE) pela confiança e incentivo para participar do PROFMAT, à minha querida professora na graduação, Josinalva Estácio, que me fez enxergar a sala de aula além das quatro paredes; e minha orientadora, professora Maité Kulesza. Enfim, a todos os colegas de dois anos de batalha.

“Matemática, de modo algum, são

fórmulas, assim como a música não são notas”.

(Y Jurquim)

RESUMO

Neste trabalho objetivamos apresentar ideias de atividades de matemática a partir do uso de dobraduras, como alternativa para aprendizagem, exploração e ampliação de conceitos básicos relacionados a figuras geométricas, ângulos, planos, vértices, semelhança, noções de proporcionalidade, álgebra, entre outros, permitindo aos educandos não só aquisição conceitual, como também o desenvolvimento de habilidades e competências próprias para o pensamento matemático.

A ênfase do trabalho é o estudo dos elementos geométricos, visto que a humanidade sempre buscou compreender e explicar o mundo à sua volta, desvendar os fenômenos naturais e a descobrir as relações entre eles. Para tanto, recorriam a desenhos, medidas e anotações, o que favoreceu o surgimento da geometria.

As propostas apresentadas foram desenvolvidas na Escola de Referência em Ensino Médio Oliveira Lima, pertencente a Rede Estadual, com educandos dos três anos do ensino médio, e constaram de três etapas: Diagnose, execução e avaliação de resultados.

As atividades não só contribuíram para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos educandos a partir das interações com os objetos, amadurecimento do pensamento indutivo e dedutivo, como também favoreceram o desenvolvimento de competências relacionais e pessoais de cooperação, interação, envolvimento, atenção, comunicação e autonomia.

Palavra-chave: Dobraduras, Geometria, Origami

ABSTRACT

This work aims to present mathematics activities ideas from use with folds as an alternative to learning, exploration and expansion of basic concepts related to geometric shapes, angles, flats, vertices, likeness, proportionality notions of algebra, allowing students not only rational and conceptual acquisition, as well as the development of own skills and competencies for mathematical thinking.

The emphasis of the work is the study of geometric elements, as mankind has always sought to understand and explain the world around you, unlock the natural phenomena and to discover the relationships between them. To do so, resorted to drawings, measurements and annotations, which favored the emergence of geometry.

The proposals were developed in the school, Escola de Referência em Ensino Médio Oliveira Lima, with students of the three years of High School, and consisted of three stages: Diagnosis, implementation and evaluation of results.

The activities not only contributed to the development of geometrical thinking of students from interactions with objects, maturing of inductive and deductive thinking, but also favored the development of relational and personal skills of cooperation, interaction, engagement, attention, communication and autonomy.

Key-word: Folding, Geometry, Origami

SUMÁRIO

Introdução **11**

Capítulo 1 - Origami

1.1 Uma breve história do Origami **14**

1.2 O origami e o conhecimento geométrico **16**

Capítulo 2 - Diagnose

2.1 Avaliação diagnóstica **24**

2.2 Expectativas de soluções **27**

2.3 Análise da avaliação diagnóstica **29**

Capítulo 3 - Oficinas

3.1 Oficina 1: Construindo figuras planas e suas propriedades **35**

3.1.1 Ficha de atividades Oficina 1

3.1.2 Expectativas de soluções Oficina 1

3.2 Oficina 2: Construindo figuras espaciais a partir de módulos de Origami **43**

3.2.1 Ficha de atividades Oficina 2

3.2.2 Expectativas de soluções Oficina 2

3.3 Oficina 3 - Analisando área e volume a partir de caixas triangulares **49**

Conclusão **54**

Referências Bibliográficas **55**

Apêndice

i Tipos de papel **56**

ii	Sinais e procedimentos	**56**
iii	Diagramas para construção das figuras da Oficina 1	**58**
iv	Algumas demonstrações da Oficina 1	**66**
v	Algumas propriedades da Oficina 1	**67**
vi	Diagramas da Oficina 2	**72**
vii	Algumas demonstrações da Oficina 2	**79**
viii	Algumas sólidos construídos a partir dos módulos da Oficina 2	**81**
ix	Diagramas para construção das caixas da Oficina 3	**83**

INTRODUÇÃO

Mesmo com todo o avanço tecnológico e o desenvolvimento das ciências, a Matemática continua sendo vista por muitos como de difícil aprendizagem. E por que a matemática ainda hoje é vista como um "monstro assustador"[1] para grande parte dos educandos, e mesmo educadores de outras áreas?

Nilson José Machado em seu livro "Matemática e Realidade" (1987, p.08) diz:

> "A matemática faz parte dos currículos escolares, ao lado da Linguagem Natural, como uma disciplina básica. Parece haver um consenso com relação ao fato de que seu ensino é indispensável ... a utilidade da matemática, todavia, não é clara. Essa falta de clareza pode ser talvez a principal responsável pelas dificuldades crônicas de que padece seu ensino."

A falta de clareza a que se refere o autor, diz respeito a caracterização da matemática como uma linguagem formal situada apenas no nível da técnica e desvinculada de significações, e este fato, é sem dúvida, responsável por grande parte das dificuldades do processo de ensino/aprendizagem da matemática.

Nos diversos níveis de ensino, cada vez mais, os educandos vão apresentando lacunas de aprendizagem, principalmente na área das ciências da natureza e matemática. Esta situação não é privilégio das escolas públicas, reflete-se também nas escolas privadas e até mesmo nas universidades.

Os boletins do SAEPE[2] da Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco mostram que 44,8% dos educandos da rede pública chegam ao ensino médio no nível elementar II e apenas 16,4% estão no nível básico. Por experiência própria há 17 anos trabalhando com educandos do ensino médio e nove desses anos em escolas de referência de ensino integral/semi integral, percebo que até mesmo os educandos que dizem gostar da matemática têm dificuldade de consolidar seus conhecimentos. O excesso de aulas e conteúdos por dia talvez contribuam para essa deficiência na aprendizagem. Nas escolas do Programa Integral são dez aulas por dia, e muitas vezes em ambientes cuja estrutura não favorece a aprendizagem desejada.

Os estudos realizados dentro da teoria da aprendizagem significativa mostram que esta não ocorre apenas quando se apresentam conteúdos organizados, nem quando os educandos

---

[1] Expressão utilizada por educandos da Erem Oliveira Lima: Escola de Referência da Rede Pública de

[2] SAEPE (Sistema de Avaliação da Educação de Pernambuco) é um instrumento de avaliação do desempenho dos estudantes da rede pública estadual e municipal. A avaliação é externa e medida através de 4 níveis de padrões de desempenho: Elementar I, Elementar II, Básico e Desejável. Mais informações disponível em www.educacao.pe.gov.br.

repetem aquilo que estudam muito, menos ainda quando gastam tempo treinando cálculos meramente mecânicos. David Asubel (1980) diz que a aprendizagem significativa está subjacente à integração construtiva do pensamento, dos sentimentos e das ações que levam à capacitação humana tanto quanto ao compromisso e à responsabilidade, ou seja, trabalhar o educando de forma integral dentro das quatro dimensões co-constitutivas do humano: *Logos*, a dimensão da razão, do cognitivo; *Pathos*, dimensão do sentimento, da afetividade; *Mythos*, dimensão da espiritualidade; *Eros*, dimensão da corporeidade, criatividade.

Dentro de uma nova concepção de ensino da matemática, aprender é compreender, é construir relações, ideias entre os diversos significados do que se investiga, e diante de novas situações, saber criar e transformar o que já se conhece. É o que Piaget chamava de desequilíbrio e reequilíbrio sucessivos. Segundo ele é preciso propor aos educandos atividades desafiadoras capazes de promover esse desequilíbrio, pois o conhecimento real e concreto é construído através de experiências. Os processos de assimilação e acomodação dos esquemas cognitivos em constantes trocas causam a adaptação e promovem o reequilíbrio. Para tanto, o educador é o agente facilitador da decodificação do cotidiano para o científico, aquele que leva o educando a descobrir, construir, pensar ao invés de lhe fornecer pacotes prontos e acabados.

No Brasil, o movimento da Educação Matemática teve como uma das pioneiras a pernambucana, natural de Timbaúba, Maria Laura Mouzinho[3], primeira mulher a ensinar geometria e primeira Doutora em Matemática no Brasil. Foi exilada pela ditadura e, no exílio, sempre preocupada com a formação de professores, aprofundou seus estudos matemáticos. Na França, conheceu o Instituto de Recherche Enseignement de Mathematiques (IREM) e em seu retorno ao Brasil ajudou a criar o GEPEM (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática) consolidando o Mestrado em Educação Matemática. Participou da criação do atual CNPq e IMPA, o mais importante instituto de matemática do Brasil. Inovadora de diferentes metodologias para o ensino da matemática propunha práticas que oportunizassem novas experiências aos educandos. Seguindo os passos de Maria Laura, a pesquisadora brasileira Beatriz D'Ambrósio publicou em seu artigo "Como ensinar matemática hoje?", propostas que seguem uma perspectiva construtivista como resolução de problemas, modelagem, abordagens etnomatemáticas, abordagens históricas, uso de computadores, softwares e o uso de jogos e material de manipulação, visando a melhoria do ensino da matemática.

[3] Para obter mais informações consultar artigo em www.abc.org.br/article.php3?ed_article=2777.

Assim sendo, considera-se necessário obter mais informações sobre novas estratégias. Este trabalho versa sobre a utilização do origami como recurso no processo ensino/aprendizagem da matemática.

1.0 - ORIGAMI

1.1 – Uma breve história do Origami

Antes do surgimento do papel, a humanidade durante muito tempo, utilizou-se de diversos materiais como pedra, madeira, placas de barro, papiro e pergaminho, cânhamo, capim, palha e trapos velhos para escrever e acredita-se que só por volta de 105 D.C na China o papel foi inventado. Quando foi introduzido no Japão entre os séculos VI e X por monges budistas chineses, o papel, somente era acessível à nobreza, por se tratar de um produto de custo elevado. Quando tornou-se mais acessível, as pessoas comuns começaram a fazer figuras de origami. Segundo Koshiro Hatori, inicialmente durante a era Edo o origami era conhecido como "orisue" ou "orikata" , e "orimono" a partir do fim da era Edo à era Showa. Somente a partir de 1880, passou a chamar-se origami e vem das palavras japonesas *oru* (dobrar) e *kami* (papel). Apesar de outras culturas também estarem envolvidas na cultura de dobradura de papel, os japoneses descobriram as possibilidades associadas à utilização de papel como um meio também para a arte. O envelope, feito a partir de dobraduras, é usado em cerimônias de casamento e funeral, as borboletas são usadas para decorar garrafas de saquê em festas, o tsuru (tradicional pássaro de dobradura), que simboliza a saúde e dinheiro e, é usado pelo japoneses para pedir algo aos deuses como, por exemplo, a cura de alguém doente.

Na Europa, a arte das dobraduras em papel também foi desenvolvida, principalmente na Espanha. A origem do origami nessa região não é exata mas pode estar relacionada com as certidões de batismos entre os séculos 16 e 17. Naquela época, os certificados de batismo eram dobrados em um duplo *blintz* (um tipo de dobra) com a mesma forma do modelo japonês chamado *menko* (origami modular feito a partir de duas folhas de papéis quadradas). Diz-se que este "origami cerimonial" pode datar do século 15. Os árabes trouxeram o segredo da fabricação do papel para o Norte da África e, no século VIII os mouros levaram este segredo até a Espanha. A religião dos mouros proibia a criação de qualquer figura simbólica, de modo que as dobraduras em papel eram usadas por eles apenas para estudar a Geometria presente nas formas e nas dobras. Depois que os mouros foram expulsos da Europa, os espanhóis foram além dos desenhos geométricos e desenvolveram a arte da dobradura, conhecida por papiroflexia, popular até hoje na Espanha e na Argentina.

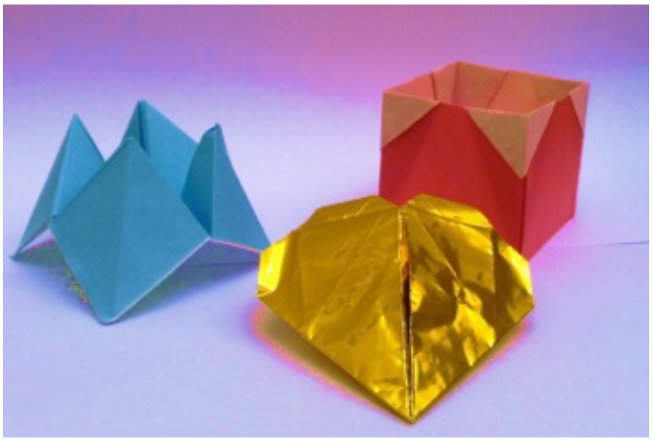
Na Argentina, uma das heranças culturais trazidas pelos espanhóis foi a tradição de dobrar papel, que na época foi influenciada por artigos escritos pelo filósofo espanhol Miguel Unamuno, que era reitor da Universidade de Salamanca. Mais tarde dois europeus emigraram para a Argentina, Dr. Vicente Solórzano Sagredo e Giordano Lareo, que publicaram livros no final da década de 1930 sobre o assunto. Estes conhecimentos acabaram se espalhando por alguns países da América do Sul.

Acredita-se que no Brasil, a arte do Origami foi introduzida de duas maneiras: uma através de nosso país vizinho, a Argentina, que possui muita influência da cultura espanhola; e outra, através dos imigrantes japoneses que aqui vieram, a partir de 1908.

Existem vários tipos de origami e com eles podem ser criadas figuras em duas ou três dimensões:

- os origamis simples que podem ser feitos a partir de diversas dobras com uma única folha de papel. (Fig.1)

Fig.1



Fonte: O autor, 2015

- os origamis compostos que se obtém através da união de diversos origamis simples. (Fig.2)

Fig.2

Fonte: O autor, 2015

- os origamis modulares que consistem em um origami composto, em que todas as peças são iguais, algumas entretanto, necessitando de peças de conexão. (Fig.3)

Fig.3

Fonte: O autor, 2015

Cada nação onde o origami se desenvolveu, trouxe algo para a evolução do mesmo e com a aprendizagem dessas dobraduras é possível tornar-se parte dessa história.

1.2 – O origami e o conhecimento geométrico

A humanidade sempre buscou compreender e explicar o mundo a sua volta, desvendar os fenômenos naturais e a descobrir as relações entre eles. Para tanto recorriam a desenhos, medidas e anotações, o que favoreceu o surgimento da geometria.

Os egípicos, babilônios, chineses e hindus já se utilizavam de conhecimentos geométricos. Os egípcios desenvolveram uma geometria de uso cotidiano, aplicada à demarcação de terras e às técnicas de construção. Seus conhecimentos serviram de inspiração para os gregos que tiveram em Euclides um representante importante. Sua obra Os Elementos reuniu todos os conhecimentos da época ordenados em 13 fascículos.

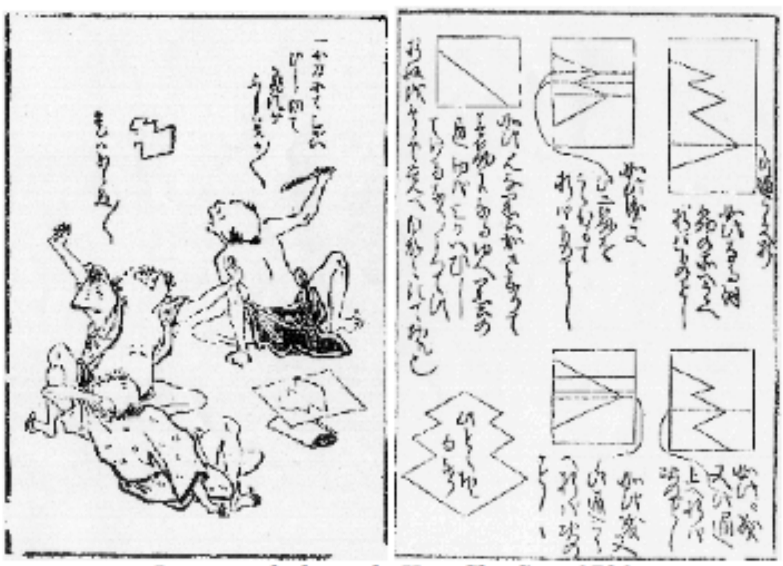
Segundo Sérgio Lorenzato (1995, p.5):

> A Geometria está por toda parte..., mas é preciso conseguir enxergá-la..., mesmo não querendo, lida-se no cotidiano com as ideias de paralelismo, perpendicularismo, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área e volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente se está envolvido com a Geometria.

A ligação do origami com a geometria é clara, as dobras feitas fornecem excelente material para o estudo de divisão de ângulos, formas geométricas, figuras planas e espaciais, semelhança, equivalências, e esses conceitos são parte importante do currículo da matemática. Muitas construções geométricas podem ser feitas a partir do Origami. A matemática do Origami consiste numa estrutura lógica profunda e consistente, mas sua aplicabilidade tem seus limites.

Existem vários livros e artigos publicados sobre o assunto. O primeiro livro que se tem conhecimento, com contexto matemático, é o livro *Wakoku Chiyekurabe (* fig.4*)*, de Kan Chu Sen, publicado em 1721. Esse livro tem uma variedade de problemas envolvendo raciocínio matemático.

Fig.4



Imagens do livro de Kan Chu Sen, 1721

Fonte: http://www.nilsonjosemachado.net/20041008.pdf

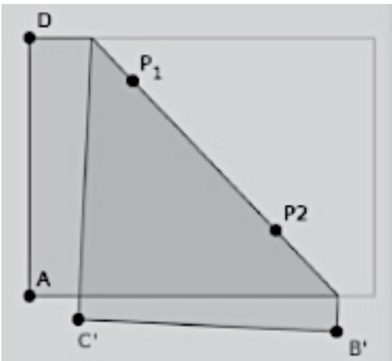
O livro de T. Sundara Row, *Geometric Exercises in paper folding*, publicado em Madras, Índia, em 1893, mostra a possibilidade de construção de polígonos regulares por origami, e demonstra proposições geométricas com o auxílio das dobraduras.

O alemão Froebel, que se dedicou ao trabalho com crianças, usava liberdade e criatividade em sua metodologia de ensino e dentre seus jogos pedagógicos estava a dobradura. Ele trabalhava com figuras tradicionais e influenciou muitos outros educadores na Europa e no Japão.

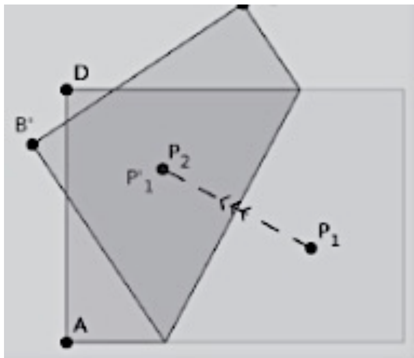
Muitos estudiosos se dedicaram ao estudo das possíveis dobras no Origami. Em 1970, o matemático japonês Humioki Huzita descreveu seis axiomas, os quais se tornaram a primeira descrição formal das construções geométricas possíveis com origami. Estes axiomas são equivalentes aos axiomas da geometria de Euclides e que permitem as construções geométricas com régua e compasso. Acesso a explicação detalhada, demosntrações e consequências desses axiomas podem ser vistos na Tese de Mestrado Origami: História de uma Geometria Axiomática por Liliane Cristina Nogueira Monteiro. Seguem os axiomas:

AXIOMAS DE HUZITA[4][5]

Axioma I: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.



Axioma II: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir P_1 com P_2

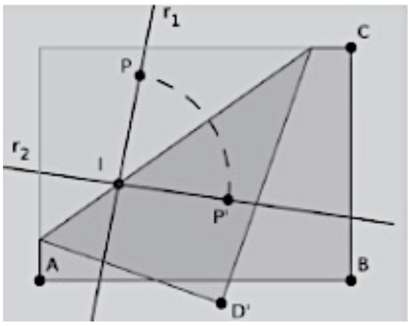


---

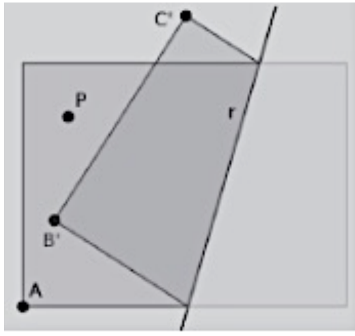
4 Disponível em http://catalogo.ul.pt/F/?func=itemglobal&doc_library=ULB01&type=03&doc_number=000561234

5 Todas as imagens dos axiomas disponível em Explorando Geometria com Origami por Eduardo Cavacami e Yolanda Kioko Saiko Furuia. http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf

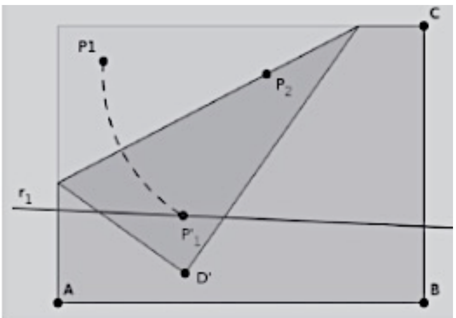
Axioma III: Dadas as retas r_1 e r_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir r_1 com r_2.



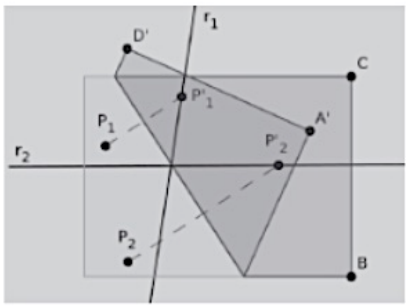
Axioma IV: Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra perpendicular a r e que passa por P.



Axioma V: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r, se a distância de P_1 a P_2 for superior ou igual a distância de P_2 a r, então existe uma dobra que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2.

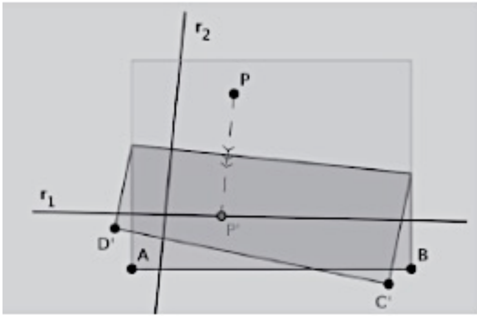


Axioma VI: Dados dois pontos P_1 e P_2, e duas retas r_1 e r_2, se as retas não forem paralelas e a respectiva distância não for superior a distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e P_2 em r_2.



Mais tarde Koshiro Hatori apresentou um sétimo axioma que, junto com os outros 6, constituem os Axiomas de Huzita-Hatori.

Axioma VII: Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, se as retas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e é perpendicular a r_2



Em 2003 o físico americano Robert Lang publicou o artigo “Origami and Origamic Constructions”, em que demonstra a completude dos axiomas de Huzita-Hatori, ou seja, eles definem dentro da teoria matemática de construções geométricas do origami, o que é possível construir com esses axiomas, fazendo incidir combinações de pontos e retas. Esses axiomas permitem solucionar problemas clássicos da matemática grega através de dobraduras, impossíveis com régua e compasso, como é o caso da duplicação do cubo, a trisecção do ângulo e a quadratura do círculo. Estas e outras construções podem ser vistas na publicação da OBMEP: Os três problemas clássicos da matemática grega, por João Pitombeira de Carvalho.

Segundo Thomas Hull[6] , “A Matemática do Origami”, significa entender as dobras modelando o processo de dobrar com a matemática, ou seja, entender as leis por trás das dobraduras. Para ele, mesmo as dobras mais simples podem revelar um terreno fértil para o estudo de conteúdo matemático. Em seu livro ***Origami***[3], Hull reúne trabalhos do 3º Encontro Internacional de Origami Ciências, Matemática e Educação, promovido pela OrigamiUSA. Eles abrangem temas que vão desde a matemática do origami usando construções de polígonos e projeções geométricas, até aplicações e ciência de origami e o uso de origami na educação. Ainda segundo Hull, as atividades com Origami podem ser desenvolvidas na escola em qualquer nível, inclusive na universidade. É o que ele mostra em seu livro “Projeto

---

[6] Thomas Hull é um dos maiores especialistas de matemática do origami (dobradura de papel) e deu palestras sobre o tema em todo o mundo. Sua pesquisa usa a teoria dos grafos, análise combinatória, geometria e outras áreas da matemática, com aplicações em engenharia, ciência de materiais, arte e educação.

Origami: Atividades Explorando Matemática", que traz atividades a partir do Origami modular.

No Brasil, alguns autores têm produzido conteúdos sobre a aplicação do origami no ensino da matemática como Luiz Márcio Imenes com a construção de polígonos, poliedros, ângulos e retas (1996). Nilson José Machado apresenta problemas que envolvem técnicas de composição e decomposição de figuras geométricas (1996). Michel Spira apresenta uma série de dobraduras de sólidos geométricos de fácil execução (1997). Rogéria Rego, Rômulo Rego e Gaudêncio Jr, com atividades para o uso em sala de aula (2004).

De acordo com Rego et al (2003, p. 18):

> O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual, os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte, tem-se a oportunidade de apresentar e discutir uma grande variedade de conteúdos matemáticos, relacionando-os a outros campos de conhecimento.

Ainda, segundo Rêgo, na matemática, o uso do Origami permite o desenvolvimento de atividades voltadas para:

- a construção de conceitos: as dobraduras, por mais simples que pareçam, envolvem elementos que podem ser explorados na construção de conceitos matemáticos diversos, não apenas geométricos;

- a discriminação de forma, posição e tamanho: uma simples dobra num papel realiza transformações de forma, posição ou tamanho de uma figura, estimulando o desenvolvimento do pensamento geométrico, aritmético e algébrico.

- a leitura e interpretação de diagramas: constituindo uma linguagem simbólica completa e diferenciada de outras linguagens usadas para comunicação de ideias, a linguagem é universal, além de introduzir o desenho técnico em sala de aula.

- a construção de figuras planas e espaciais: riqueza de possibilidades de formas geométricas ou não, planas ou espaciais.

- o uso de termos geométricos em um contexto: possibilita o conhecimento dos elementos geométricos, sua nomenclatura e definição.

- o desenvolvimento da percepção e discriminação de relações planas e espaciais: estimula ações de observação, composição, decomposição, tranformação, representação e comunicação.

- o desenvolvimento do raciocínio do tipo passo-a-passo: estimula o sequenciamento de etapas muito utilizado na resolução de problemas.

- o desenvolvimento do senso de localização espacial: utilização de elementos de linguagem de posição no espaço, como cima, baixo, esquerda, direita, etc.

Em Pernambuco, os documentos oficiais que dão suporte aos currículos nas escolas públicas do Estado, (Parâmemtros Curriculares, Base Comum para as Redes Públicas de Ensino de Pernambuco BCC, Parâmetros em sala de Aula), orientam sobre o uso de recursos no Ensino Médio que, em geometria, devem privilegiar e consolidar conceitos como a proporcionalidade, congruência e semelhança, relações métricas e trigonométricas nos triângulos, teorema de Pitágoras e construções com régua e compasso, a fim de desenvolver o pensamento dedutivo na geometria. No campo da geometria analítica deve permitir a habilidade de visualização e articulação da geometria com a álgebra, sem ficar na manipulação simbólica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais citam a importância do estudo da geometria e o uso das formas geométricas para o entendimento do mundo a nossa volta, como vemos a seguir:

(PCN's, 1999, p.123):

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante desse tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas.

A Base Curricular Comum de Pernambuco traz, dentre as sugestões de recursos para uso em sala de aula, as dobraduras. BCC/PE, 2007. p. 124:

> Sem pretensão de esgotar o que se poderia incluir na categoria de materiais concretos para uso na aula Matemática, podem ser citados: modelos concretos de figuras geométricas; moldes para montagem de figuras; maquetes**; dobraduras**… (grifo nosso)

Portanto, existe uma gama de possibilidades do uso do origami na matemática. Cabe ao professor elaborar atividades que desempenhem papel relevante na construção do conhecimento pelos educandos. No entanto, deve-se verificar que o uso do recurso didático por si só não produz essa aprendizagem. Ele é um instrumento facilitador do processo permitindo que os educandos interajam de forma lúdica e descontraída com o conteúdo matemático.

O objetivo geral deste trabalho foi a vivência prática e lúdica de conteúdos matemáticos como complementação da sala de aula, promovendo situações desafiadoras e que possam despertar o interesse do educando para a matemática, através das oficinas de origami.

Como objetivos específicos temos a construção de polígonos e suas propriedades, construção de figuras espaciais, características e propriedades, desenhar vistas, perspectivas e planificações e consolidar conteúdos de geometria plana, trigonometria, área e volume.

2.0 - DIAGNOSE

A avaliação diagnóstica foi aplicada aos educandos do 1º ano do ensino médio, com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios que estes trazem do Ensino Fundamental, já que estes são oriundos de diferentes escolas na região metropolitana do Recife.

2.1 – Avaliação diagnóstica

A seguinte avaliação diagnóstica foi aplicada com 78 educandos do 1º ano C e 1º ano D.

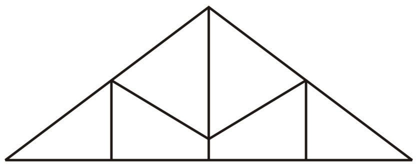
Avaliação diagnóstica

1. O que vem a sua cabeça quando falamos a palavra ***GEOMETRIA***?

2. Considerando os elementos básicos da geometria, indique qual se encaixa adequadamente a cada uma das situações:

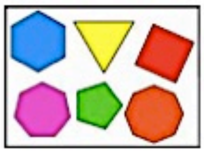
a) Você possui uma piscina e esta encontra-se cheia, o espelho d'água na superfície passa a ideia de _______________.

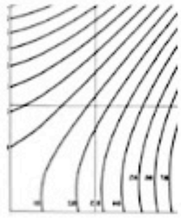
b) Para construção de um telhado, são utilizadas peças estruturais formadas a partir de vigas de madeira chamadas tesouras, como mostra a figura:

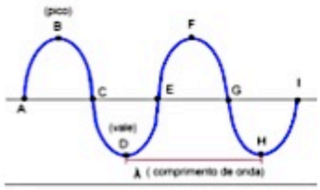


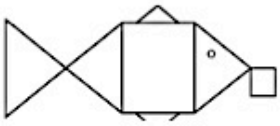
Cada viga dessa tesoura passa-nos a ideia de __________________, enquanto que o encontro de duas ou mais vigas, passa-nos a ideia de __________________.

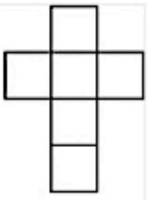
3. Classifique os objetos representados nas figuras abaixo em unidimensional, bidimensional ou tridimensional.

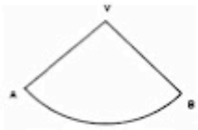





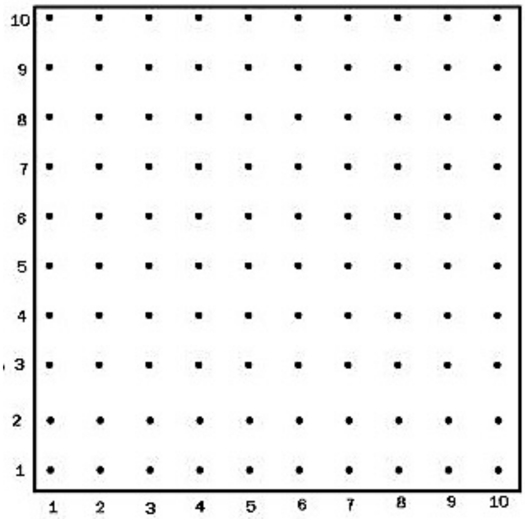




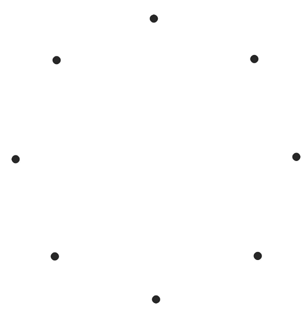





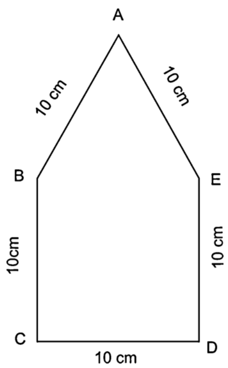
4. Abaixo temos uma malha pontilhada. Unindo os pontos dessa malha desenhe um quadrado, um retângulo, um losango, um trapézio, um triângulo isósceles e um paralelogramo. Identifique-os.



5. Os pontos abaixo são de uma circunferência, ligue-os de modo a obtermos um hexágono, e neste, construa uma diagonal.



6. A figura abaixo é formada por segmentos de reta.



a) Nomeie-a

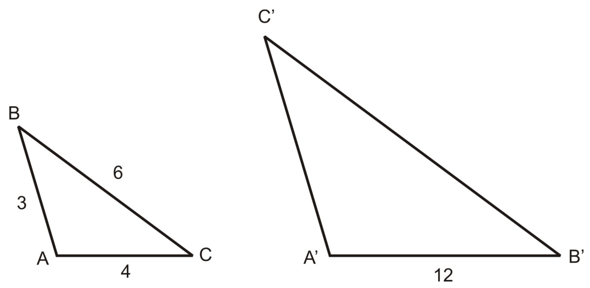
b) Indique a medida dos ângulos internos

c) Construa o segmento BE

d) O segmento BE é bissetriz do ângulo ∠ ABC? Justifique?

7. Um tesouro foi enterrado a igual distância de três pedras. Como você faria para encontrar o tesouro?

8. Observe os dois triângulos semelhantes abaixo. Neles estão assinalados algumas de suas medidas. Lembre-se que os lados que se correspondem em triâgulos semelhantes são proporcionais, complete:



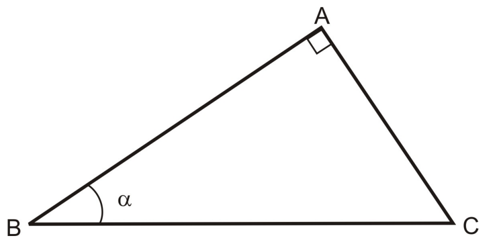
$a) BC =$ $\quad f) \frac{A'C'}{6} =$ $\quad i) A'B' =$

$b) B'C' =$ $\quad g) \frac{A'B'}{AB} =$ $\quad j) A'C' =$

$c) \frac{B'C'}{BC} =$ $\quad h) AB =$

$d) \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

9. Os lados de um triângulo retângulo recebem nomes especiais. Dado o triângulo ABC, retângulo em A, indique a hipotenusa e catetos. Em relação ao ângulo a como chamamos as razões:



$\frac{AC}{BC} =$

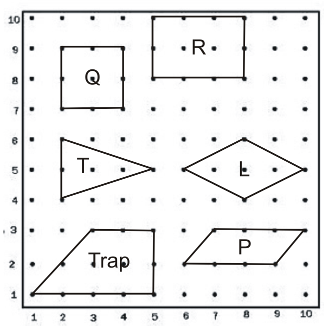
$\frac{AB}{BC} =$

$\frac{AC}{AB} =$

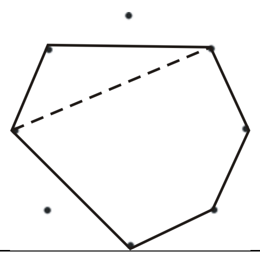
2.2 – Expectativas de soluções

Abaixo estão as expectativas de soluções da avaliação diagnóstica.

1. Estudo das formas planas e espaciais, a relação entre elas, bem como suas propriedades.
2. a) plano, b) retas ou segmentos de retas, pontos.
3. tridimensional, bidimensional, tridimensional, unidimensional, unidimensional, bidimensional, tridimensional, bidimensional, tridimensional, bidimensional e unidimensional.
4. uma solução possível.

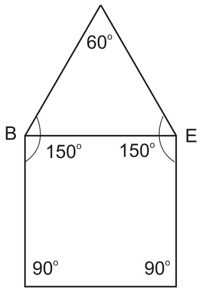


5. Uma possível solução



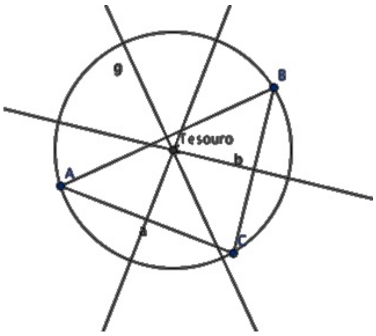
6. a) pentágono

a) e c)



d) não, pois não divide o ângulo ABC em ângulos congruentes.

7. a ideia era encontrar o circuncentro.



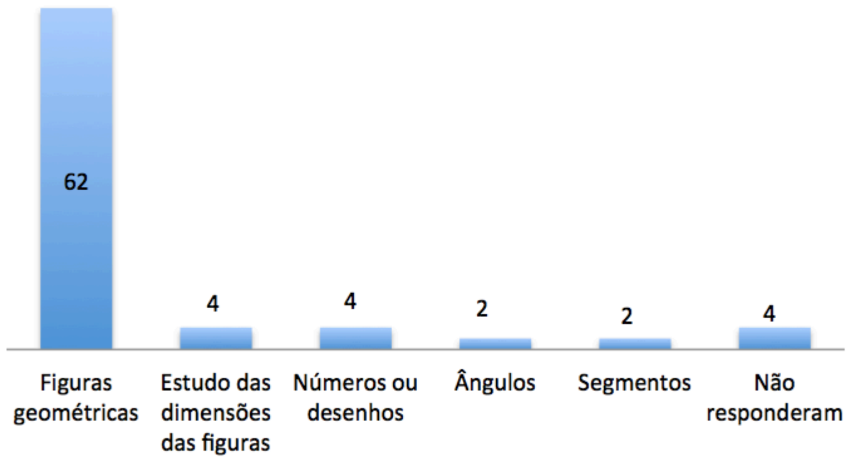
8. a) 6 b) 18 c)18/6 d) $\frac{9}{3} = \frac{18}{6}$ f) 9/6

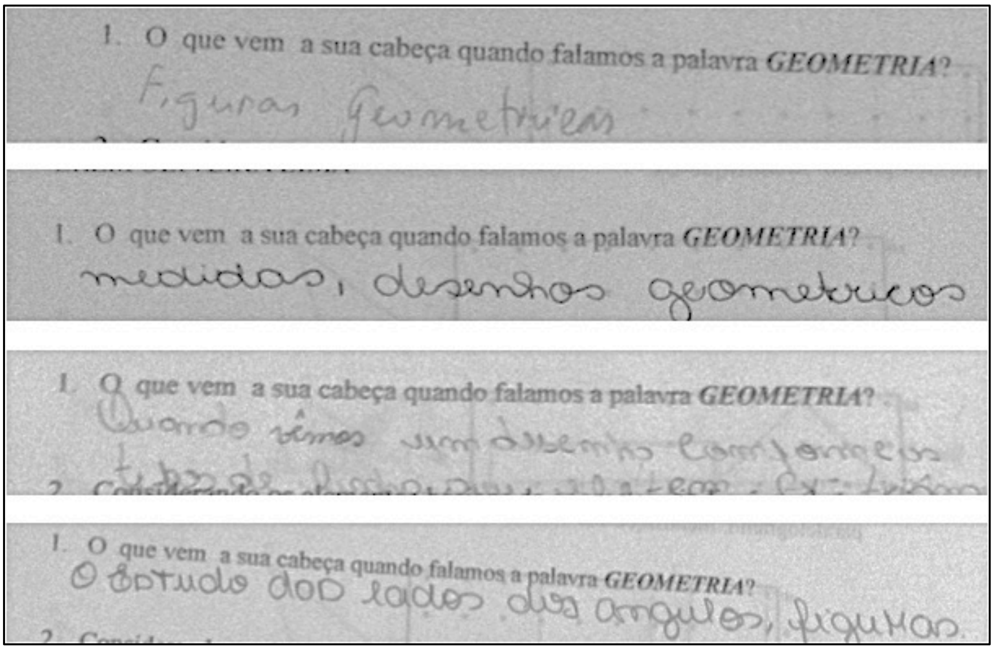
g) 3 h) 3 i) 12 j) 9

9. seno de $\propto$, cosseno de $\propto$, tangente de $\propto$.

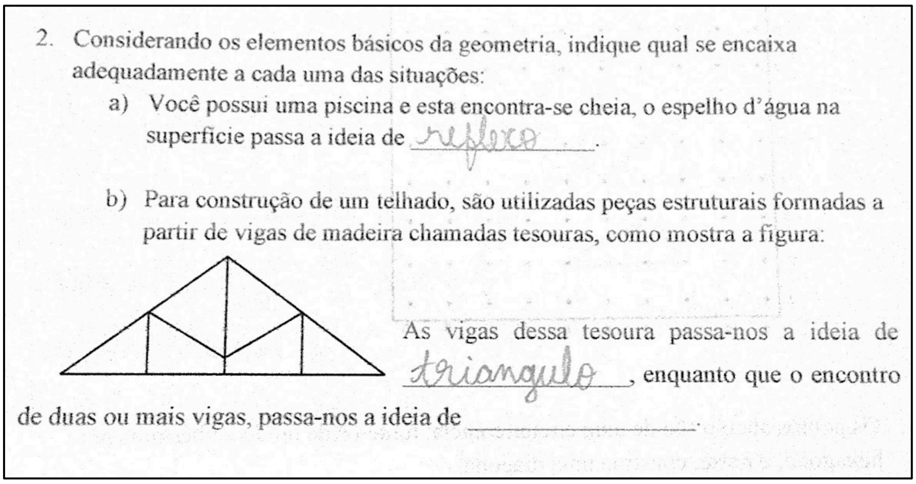
2. 3 - Análise da diagnose

Questão 01: Quase a totalidade dos educandos responderam a questão e relacionaram a geometria com formas, figuras, segmentos, entre outros. Abaixo um gráfico com as respostas dadas por eles e um recorte da avaliação.





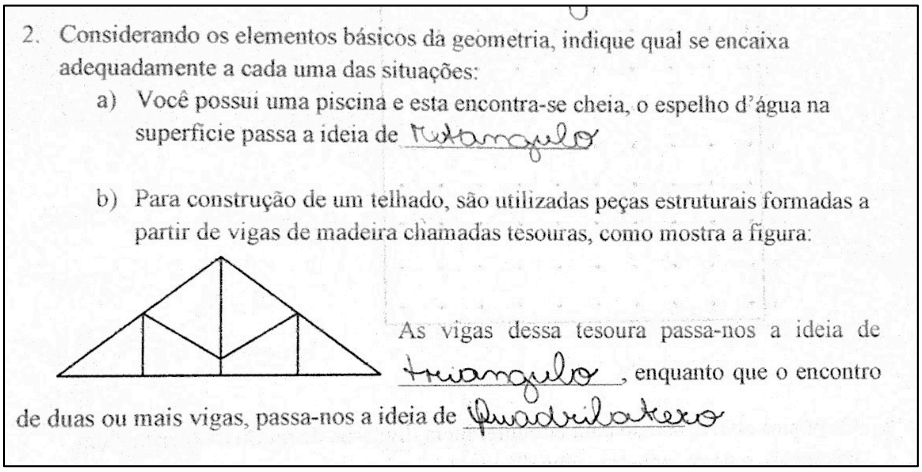
Questão 02: Era esperado que os educandos relacionassem os itens com a ideia de plano, reta e ponto, no entanto, nenhum deles fez essa associação, o que não significa que os mesmos não soubessem as respostas. Acreditamos que não houve uma compreensão do enunciado da questão. Talvez uma reformulação do enunciado, tornasse mais clara a questão.Abaixo algumas respostas encontradas.


2. Considerando os elementos básicos da geometria, indique qual se encaixa adequadamente a cada uma das situações:

a) Você possui uma piscina e esta encontra-se cheia, o espelho d'água na superfície passa a ideia de reflexo.

b) Para construção de um telhado, são utilizadas peças estruturais formadas a partir de vigas de madeira chamadas tesouras, como mostra a figura:

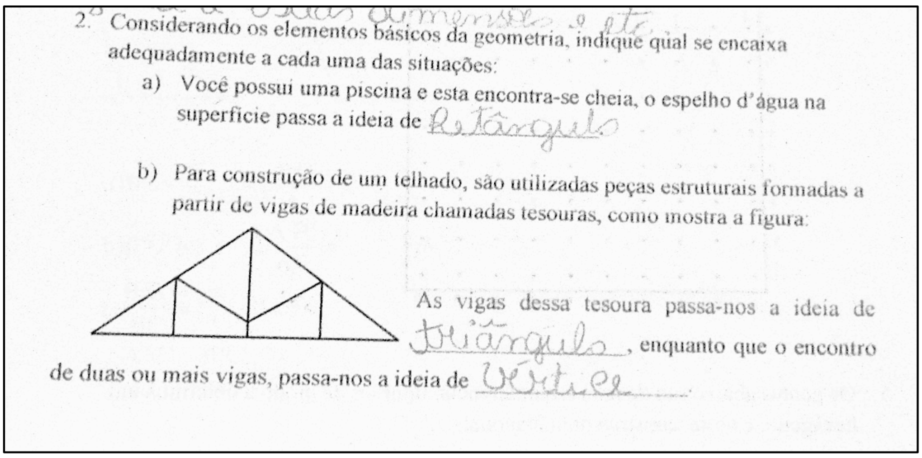
As vigas dessa tesoura passa-nos a ideia de triangulo, enquanto que o encontro de duas ou mais vigas, passa-nos a ideia de ______.


2. Considerando os elementos básicos da geometria, indique qual se encaixa adequadamente a cada uma das situações:

a) Você possui uma piscina e esta encontra-se cheia, o espelho d'água na superfície passa a ideia de retangulo

b) Para construção de um telhado, são utilizadas peças estruturais formadas a partir de vigas de madeira chamadas tesouras, como mostra a figura:

As vigas dessa tesoura passa-nos a ideia de triangulo, enquanto que o encontro de duas ou mais vigas, passa-nos a ideia de quadrilatero


2. Considerando os elementos básicos da geometria, indique qual se encaixa adequadamente a cada uma das situações:

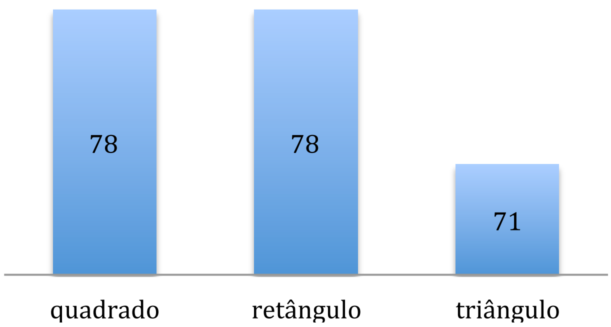
a) Você possui uma piscina e esta encontra-se cheia, o espelho d'água na superfície passa a ideia de Retângulo

b) Para construção de um telhado, são utilizadas peças estruturais formadas a partir de vigas de madeira chamadas tesouras, como mostra a figura:

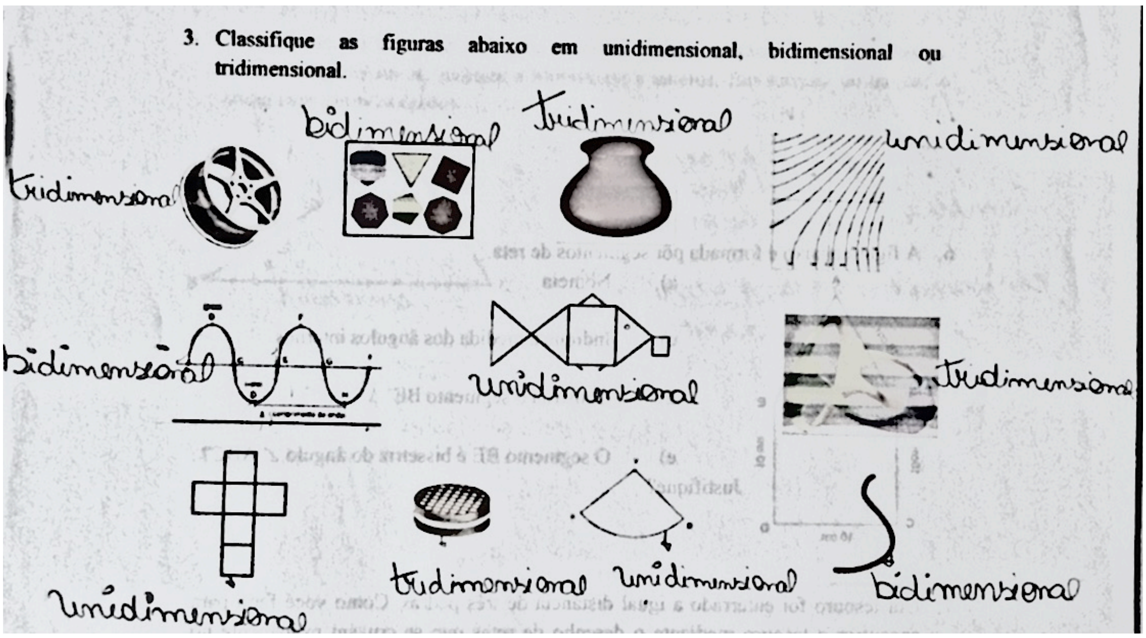
As vigas dessa tesoura passa-nos a ideia de triângulo, enquanto que o encontro de duas ou mais vigas, passa-nos a ideia de vértice.

Questão 03: Nesta questão era esperado que os educandos classificassem as figuras de acordo com as suas dimensões (unidimensional, bidimensional e tridimensional).

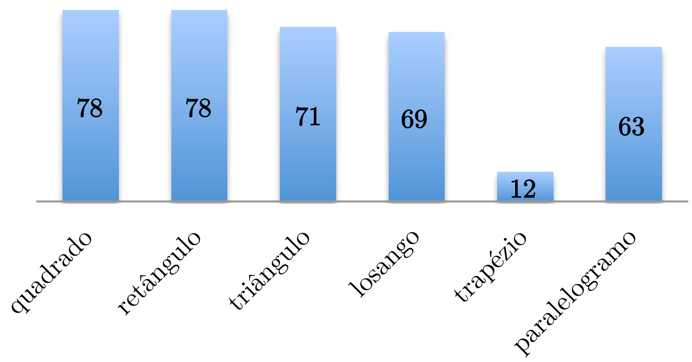
O que pôde-se notar é que os educandos distinguem bem figuras tridimensionais, no entanto, a diferença entre unidimensional e bidimensional ainda geram dúvidas, o que nos leva a pensar que a identificação do tridimensional é mais clara, pois as figuras apresentadas na forma de fotos facilitou a visualização e estamos rodeados no nosso cotidiano por objetos tridimensionais. Abaixo, no gráfico, o número de acertos por dimensão.



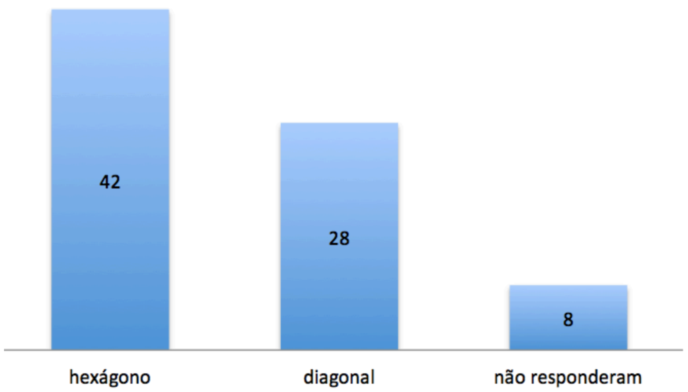
Resposta de um dos educandos



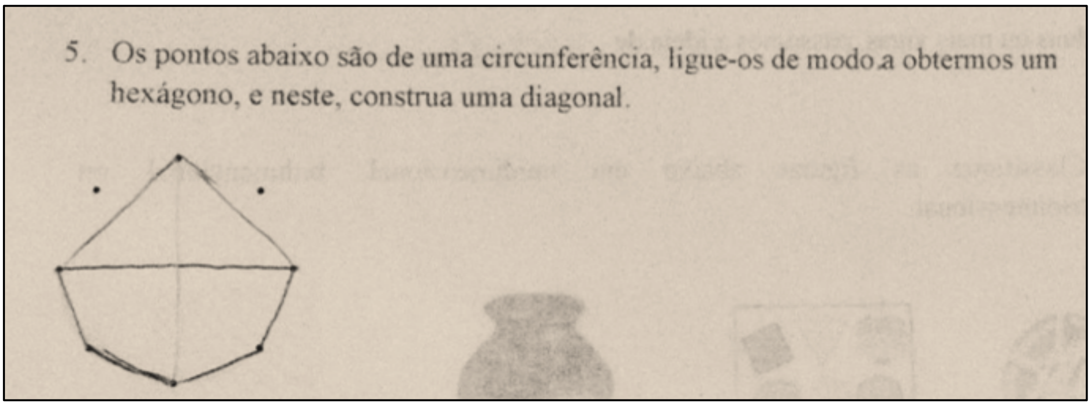
Questão 04: Nesta questão os educandos não tiveram dificuldades em representar o quadrado, retângulo e triângulo. A maior dificuldade apresentada foi a representação do trapézio. Apenas 12 conseguiram representar.

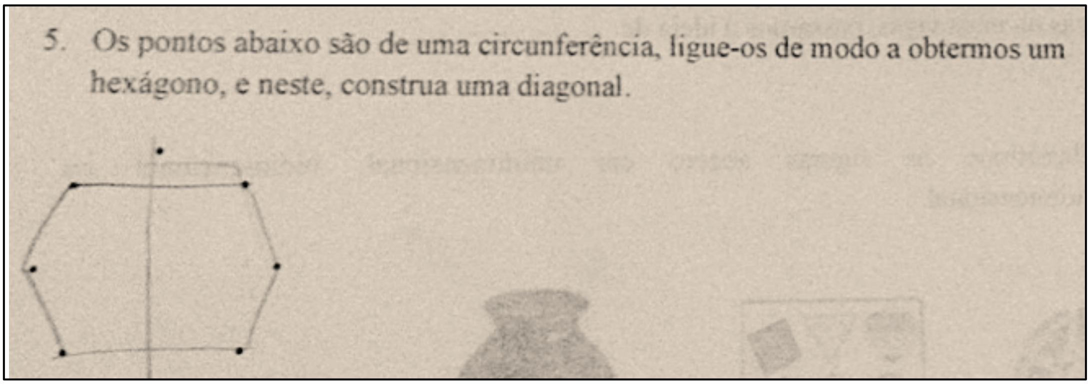


Questão 05: O gráfico mostra a quantidade de acertos na construção solicitada. Pôde-se perceber que os educandos identificam bem os polígonos, no entanto, acreditamos que aqueles que não construíram como desejado, tiveram dificuldade em identificar que o polígono desejado não seria regular. Quanto ao conceito de diagonal, ainda gera dúvidas para grande parte deles.

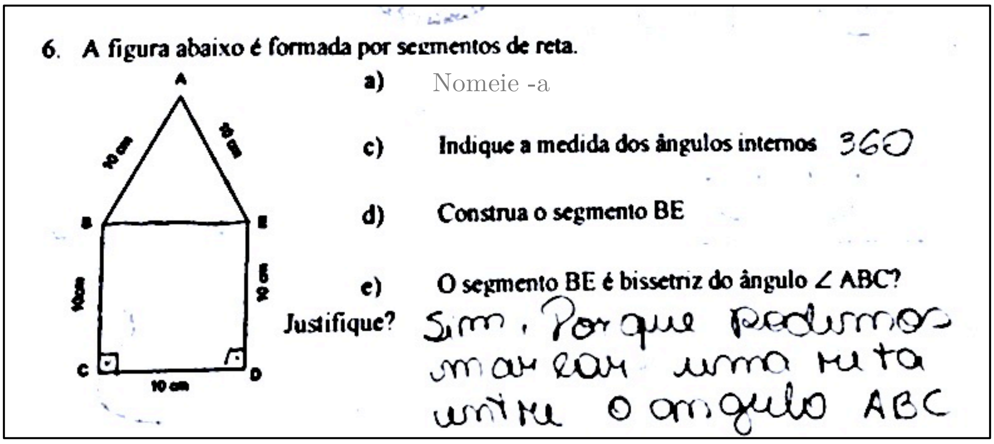


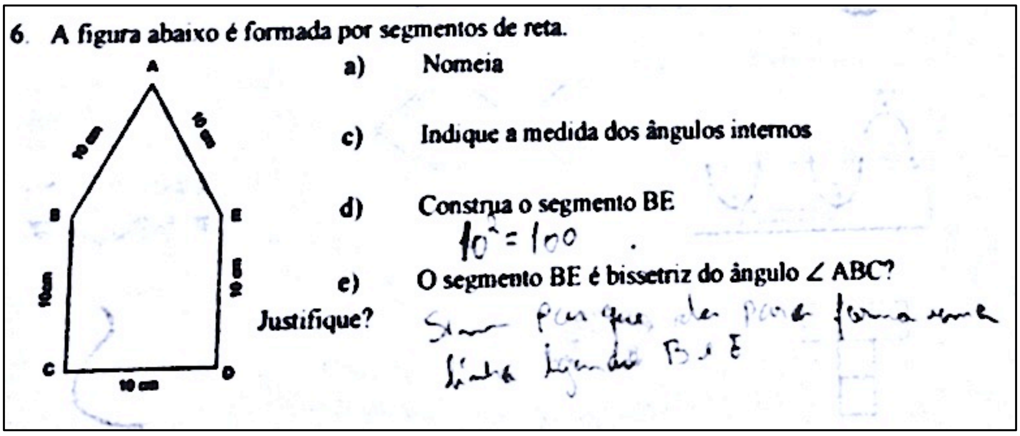
Abaixo um recorte na avaliação de dois educandos





Questão 06: Dos quatro itens solicitados apenas o item da construção do segmento $\overline{BE}$ foi respondido de acordo com o esperado por 16 educandos. Abaixo a resposta de dois educandos.





Questão 07: Nenhum educando respondeu a essa questão. Tratava-se de um desafio em que a solução envolvia o conceito de circuncentro e mediatriz.

Questão 08, 09 e 10: Não temos resultados a apresentar pois a Oficina 3 não foi aplicada e estas questões seriam solicitadas apenas aos educandos dos 3º anos. Pretendemos realizar esta oficina em um momento posterior.

3.0 – OFICINAS

As atividades aqui propostas foram aplicadas na EREM Oliveira Lima (Escola de Ensino Médio da Rede Estadual de Pernambuco).

Durante a execução de cada oficina os educandos puderam exercitar os conhecimentos dos elementos geométricos, trigonométricos, algébricos, analíticos, nomenclaturas e conceitos como simetria, congruências, semelhança, bissetriz, diagonal, e outros, bem como agirem reflexivamente, privilegiando a criatividade e autonomia na busca de soluções para os diversos problemas.

3.1 - Oficina 1: Construindo figuras planas e suas propriedades.

Esta oficina foi aplicada a 38 educandos do 1º ano C e 40 educandos do 1º ano D.

Objetivo: Construir polígonos convexos, verificar, por meio de manipulação, e justificar matematicamente suas propriedades, fazer demonstrações simples .

Conteúdos: bissetriz, diagonal, ângulos, equivalência, semelhança, congruência, área.

Público Alvo: Educandos da 1º ano do Ensino Médio

Tempo estimado: 4 a 6 horas/aula

Material necessário: papel espelho 15 x 15 cm e 15 x 20 cm, papel ofício, ficha de atividade (em anexo), lápis, borracha, celular para acesso a internet (pesquisa).

Orientações para o trabalho em sala de aula:

1ª etapa: Dividir os educandos em duplas. Cada dupla receberá uma ficha de atividades[7] e folhas de papel espelho. A ficha será preenchida durante cada etapa da oficina.

2ª etapa: Apresentar as dobras e símbolos básicos do origami, os diagramas (ver apêndice) e construir cada polígono. Durante a construção relembrar conceitos como vértice, diagonal, bissetriz, ângulo e outros que se fizerem necessários.

3ª etapa: A partir de cada polígono construído, verificar as dobras, identificar os elementos e as propriedades de cada um. (Ver ficha de avaliação processual)

4ª etapa:. Elaboração de uma demonstração simples.

[7] A ficha de atividades além de ser um instrumento facilitador do trabalho com materiais manipulativos, também é importante para desenvolver a autonomia dos educandos. Nela deverão conter todas as orientações necessárias para que o educando execute todos os passos desejados e o professor seja apenas o mediador do processo.

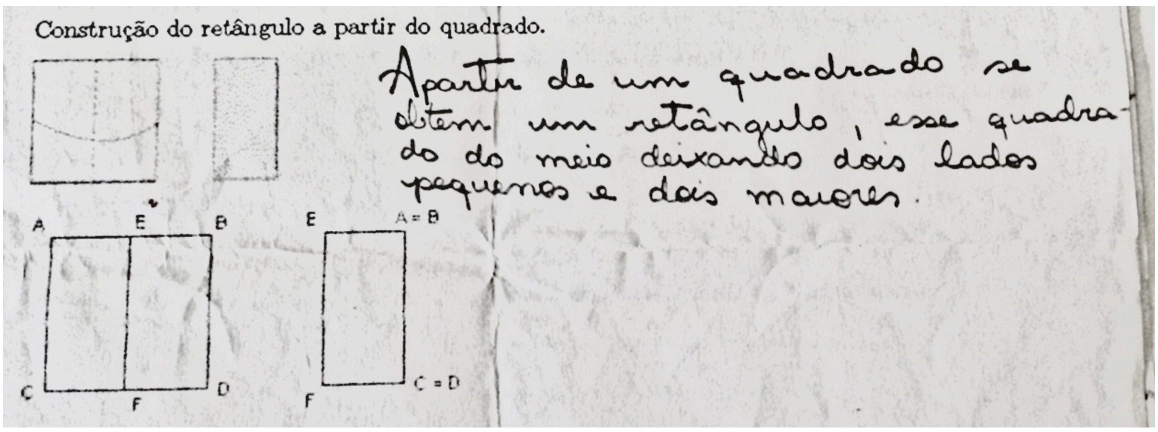
Desenvolvimento:

As etapas para construção dos polígonos foram apresentadas por meio de projeção e complementação oral. A maioria dos educandos não apresentou dificuldades quanto a construção, mas perceberam que a precisão e paciência nas dobras são fundamentais para um bom resultado das figuras. Quanto aos educandos com mais dificuldades, percebeu-se que os erros são devidos a falta de apreensão dos conceitos, por exemplo, não reconhecer uma diagonal, uma bissetriz.

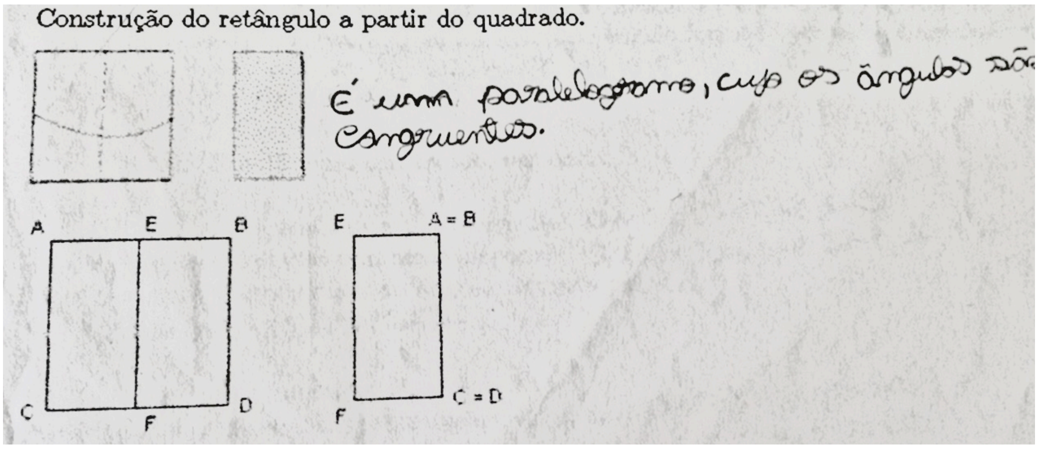
Pôde-se perceber também que as discussões surgidas durante as construções, demonstram que atividades práticas como instrumento pedagógico são bem aceitas pelos educandos e facilitam a compreensão.

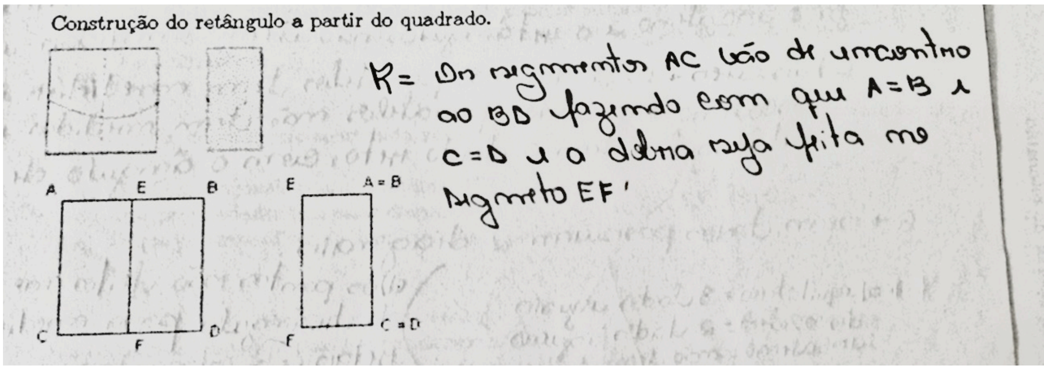
Na etapa de preenchimento da ficha de atividades (avaliação processual) os educandos através de manipulação, construção de novas dobras, sobreposição e inclusive cortes, puderam identificar as principais características e propriedades dos polígonos construídos. Os educandos que faltaram no dia da aplicação da oficina receberam um kit pronto, e estes, apresentaram maior dificuldade na resolução da ficha de atividades.

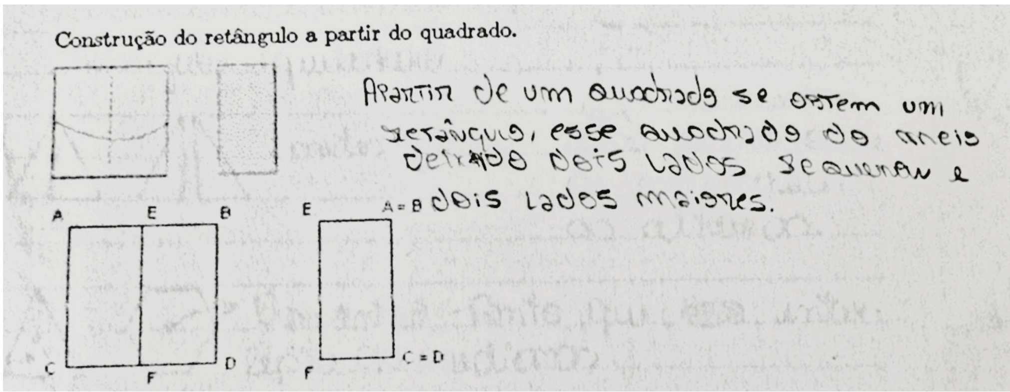
Ainda nesta etapa foi elaborada uma demonstração simples para que os educandos exercitassem habilidades de formalização de resultados. No entanto, os resultados não foram satisfatórios. Eles ainda apresentam muita dificuldade em compreender a liguagem formal e aplicá-la para provar os conceitos, por este motivo, as demais demosntrações[8], mais complexas, foram deixadas para uma próxima etapa em que os conhecimentos estejam mais consolidados. Abaixo um recorte da questão referente a demonstração.



[8] Sugestões de algumas demonstrações constam do apêndice.







Uma outra observação pertinente, é que as fichas de atividades não podem ser grandes, pois os mesmos perdem a concentração e começam a se dispersar, o que não ocorreu durante as atividades lúdicas.

O tempo estimado de 4 horas/aula para realização da oficina foi suficiente (utilizado apenas para construção dos polígonos). Outras 2 horas/aula foram reservadas para avaliação diagnóstica e de 3 a 4 horas/aula para a avaliação processual (resolução da ficha de atividades).

3.1.1 - Ficha de Atividades (avaliação processual)

As questões das atividades podem ser formuladas de acordo com o objetivo de cada professor. Abaixo estão apenas sugestões de conteúdos que podem ser trabalhados com a oficina.

ATIVIDADE 1 : Construindo figuras planas e suas propriedades.

Observando os polígonos construídos, responda as questões abaixo. Nesta etapa, você pode cortar, sobrepor, colar, comparar.

Quadriláteros

1. A partir do quadrado construído:

a) Marque um ponto em qualquer parte desse quadrado. Dobre o papel de modo que as dobras passem pelo ponto marcado. Quantas dobras você conseguiu fazer?
b) Marque, agora, dois pontos. Faça dobras de modo que elas passem pelos pontos marcados. Quantas dobras você conseguiu fazer?

Esboce aqui sua solução e, considerando as dobras como retas, sistematize suas conclusões.

c) Que dobras podemos fazer no quadrado para conseguirmos 4 triângulos iguais? Esboce sua solução.

d) E se quisermos 4 quadrados iguais? Esboce sua solução.

e) Considerando o quadrado inicial como unidade de área, que área tem cada triângulo formado no item c? E cada quadrado do item d?

f) Com o quadrado em mãos, dobre suas diagonais. O que podemos concluir sobre elas? Se interceptam? Elas possuem a mesma medida? Qual a medida do ângulo formado por essas diagonais? Faça um esboço e sistematize suas conclusões.

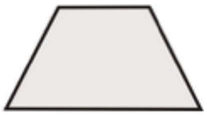
2. A partir do retângulo construído:

a) Quantas diagonais o retângulo possui?
b) Que propriedades têm suas diagonais?
c) O que podemos dizer do ângulo formado por elas?

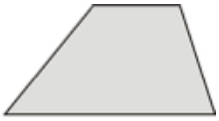
3. A partir do paralelogramo:
a) O que podemos observar quanto a seus lados?
b) Quantas diagonais o paralelogramo possui?
c) Que propriedades têm suas diagonais?
d) O que podemos dizer do ângulo formado por elas?

4. A partir do losango:
   a) O que dizer dos seus lados?
   b) Quantas diagonais o losango possui?
   c) Que propriedades têm suas diagonais?
   d) O que podemos dizer do ângulo formado por elas?

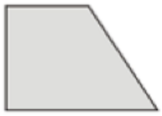
5. A partir do trapézio:
   a) O que dizer de seus lados?
   b) Quantas diagonais o trapézio possui?
   c) Que propriedades têm as diagonais, em cada trapézio construído?
   d) Sistematize suas conclusões para cada trapézio obtido.



Isósceles



escaleno



Retângulo

6. A partir dos dados observados anteriormente com o quadrado, retângulo, losango e paralelogramo, é possível estabelecermos algumas características comuns? Quais?

Triângulos

7. A partir dos triângulos construídos:

   a) Classifique cada triângulo de acordo com a medida dos lados.

   b) Sobrepondo os triângulos no quadrado, verifique seus ângulos internos e classifique em acutângulo, retângulo, obtusângulo identificando suas características.

   c) Use a internet e pesquise sobre o ortocentro, incentro, baricentro e circuncentro do triângulo. A partir do triângulo equilátero, faça dobras para obter cada um. Cole aqui sua figura.

   d) O que podemos dizer desses pontos no triângulo equilátero? Por quê?

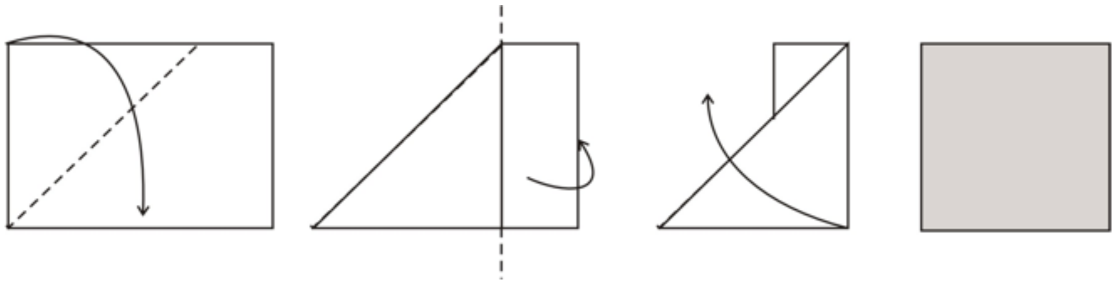
   e) E no triângulo isósceles? Faça o mesmo utilizando as dobras.

8. A partir do pentágono e hexágono construídos:

   a) Quantas são suas diagonais?

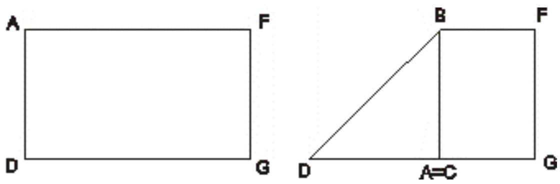
Ensaiando demonstrações.

9. Observe a demonstração abaixo:
Construção do quadrado a partir do retângulo



Através de alguns argumentos matemáticos, podemos mostrar que a figura obtida é um quadrado.

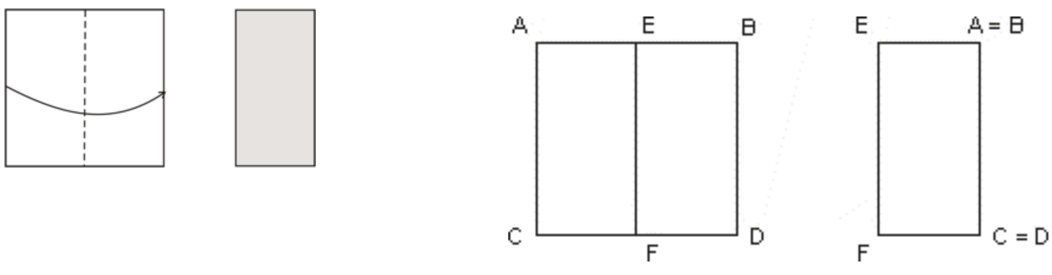
<u>Prova</u>:



Considere o retângulo AFGD, por sobreposição o segmento AD = DC e a dobra formada é a bissetriz do ângulo $A\widehat{D}G$. Como o ângulo no vértice A é reto, temos que BC $\perp$DC e o ângulo $B\widehat{D}A$ mede 45º, temos que o triângulo BDC é isósceles, portanto BC = DC = AB = AD e que BA $\perp$AD e. Logo ABCD é um quadrado.

Agora é com você. Use argumentos matemáticos para mostrar que a figura obtida é um retângulo.

Construção do retângulo a partir do quadrado.



3.1.2 – Expectativas de soluções

Atividades - Oficina 1

1. a) Consegui fazer várias dobras. b) Consegui fazer apenas uma única dobra. Por um ponto passam infinitas retas e por dois pontos distintos passa uma única reta.

c) Podemos dobrar pelas diagonais.

d) Podemos dobrar ao meio fazendo os lados opostos coincidirem.

e) A medida da área do quadrado do item c é ¼ da área do quadrado inicial. E a medida da área do quadrado do item d é também ¼ da área do quadrado inicial.

f) As diagonais se interceptam no seu ponto médio, possuem a mesma medida e formam um ângulo reto entre elas.

2. a) O retângulo possui duas diagonais. b) As diagonais possuem mesma medida, se inteceptam no ponto médio.

c) As diagonais não formam ângulo reto entre si.

3. a) Dois a dois seus lados opostos são paralelos e possuem mesma medida.

b) O paralelogramo possui 2 diagonais. c) Suas diagonais não possuem medidas iguais. d) As diagonais não formam ângulo reto entre si.

4. a) Seus lados são congruentes, ou seja, possuem medidas iguais. b) O losango possui 2 diagonais. c) Se cruzam ao meio e tem medidas diferentes.

d) Suas diagonais formam um ângulo reto entre si.

5.a) Possui apenas dois lados paralelos. b) O trapézio possui duas diagonais.

c) O trapézio isóslceles: possui diagonais congruentes que se interceptam, porém não no ponto médio.

O trapézio retângulo possui as diagonais de medidas diferentes, se interceptam mas não no ponto médio.

O trapézio escaleno possui diagonais de medidas diferentes, não congruentes, e não se encontram no ponto médio.

6. Quadrado, retângulo, losango e paralelogramo são quadriláteros, possuem duas diagonais, seus lados opostos são paralelos e suas diagonais se encontram em seus pontos médios.

7. a) O triângulo equilátero possui os três lados de medidas iguais; O triângulo isósceles possui dois lados iguais; O triângulo escaleno possui os três lados diferentes.

b) Triângulo acutângulo possui três ângulos agudos (entre 0 e 90^o); O triângulo retângulo possui um ângulo reto (medindo 90^o); O triângulo obtusângulo possui um ângulo obtuso (entre 90^o e 180^o).

c) O ortocentro é o ponto de encontro das retas suportes das alturas desse triângulo; O incentro é o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo; O baricentro é o ponto de encontro das medianas desse triângulo; O circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados desse triângulo.

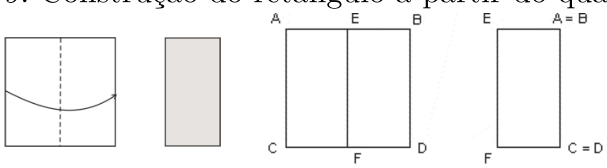
d) No triângulo os quatro pontos estão num mesmo lugar porque todas as cevianas em relação aos três vértices coincidem, reduzindo esse quatro pontos a um único.

e) No triângulo isósceles os quatro pontos notáveis estão sobre a mesma reta, porque a mediatriz, mediana, altura e bissetriz relativas à base coincidem.

8. A partir do pentágono e hexágono construídos:

a) Podemos perceber que o pentágono possui cinco diagonais e o hexágono possui 9 diagonais.

9. Construção do retângulo a partir do quadrado.



Considere o quadrado ABDC. O segmento $\overline{EF}$ é mediatriz dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Os ângulos nos vértices E e F são retos, EA = FC e EF = BD. Portanto, EFCD é um retângulo.

3.2 - Oficina 2 - Construindo figuras espaciais a partir de módulos de Origami.

Esta oficina foi aplicada aos educandos do 2º ano A do Ensino Médio

Objetivos:

-Construir figuras espaciais a partir de módulos de Origami.

-Identificar características comuns e não comuns dos sólidos construídos.

-Desenhar vistas e perspectivas e planificações.

Conteúdos: bissetriz, diagonal, ângulos, equivalência, semelhança, congruência, face, aresta, vértices, etc.

Público Alvo: 2º ano do Ensino médio

Tempo estimado: 4 horas/aula

Material necessário: papel espelho, papel ofício, ficha de atividade (ver apêndice), lápis, borracha.

Orientações para o trabalho em sala de aula

1ª etapa: Dividir os educandos em duplas. Cada dupla receberá uma ficha de atividades e folhas de papel espelho suficiente para as construções.

2ª etapa: Construção dos módulos, fixando os conceitos da geometria plana.

3ª etapa: Pesquisa e construção dos sólidos.

4ª etapa: Classificação segundo características comuns e não comuns.

5ª etapa: Elaboração de algumas demonstrações simples.

Desenvolvimento:

Nesta oficina foram trabalhados os conceitos de figuras espaciais, diferenciando dentre os poliedros, as características de pirâmides e prismas, a noção de volume e a relação de Euler.

As etapas para construção dos módulos foram feitas por meio de projeção e as orientações de montagens dos sólidos, verbalmente.

Pôde-se observar que com atividades práticas e um número menor de educandos por oficina há um maior envolvimento, proporcionando uma maior interação e rendimento entre eles, levando-os a fazer conexões com outros campos conceituais e construção de novos conhecimentos. A maior parte dos educandos durante a construção dos módulos, já identificava as figuras criadas a partir das dobras.

Para esta oficina, não foi aplicada a avaliação diagnóstica, apenas a processual. Durante a processual, poucas dúvidas surgiram. No entanto, conforme análise das atividades, existe uma deficiência em explicitar resultados, que só o amadurecimento dos conhecimentos proporcionará. A representação das figuras tridimensionais no plano também gerou dificuldade nos educandos. Abaixo um recorte na avaliação.

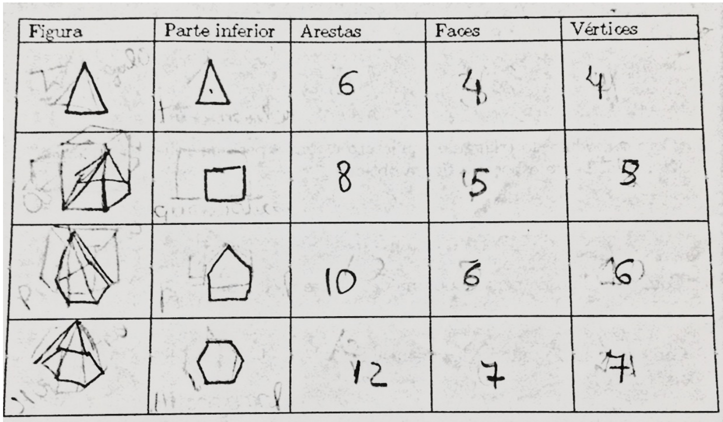


Figura	Parte inferior	Arestas	Faces	Vértices
		6	4	4
		8	5	5
		10	6	6
		12	7	7

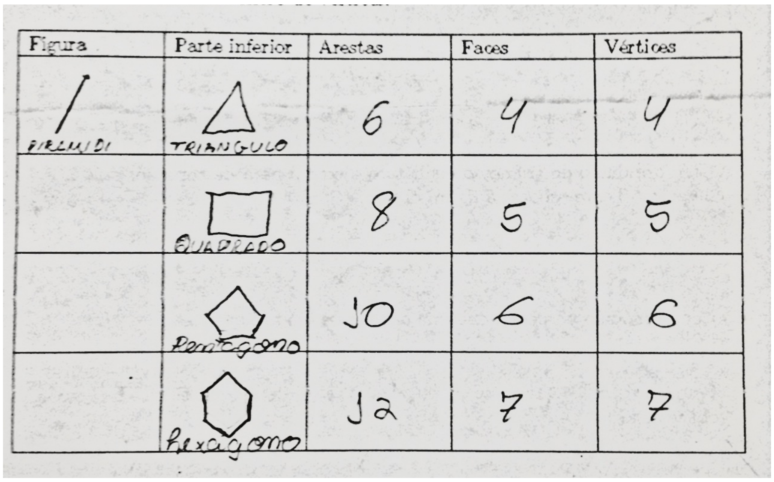


Figura	Parte inferior	Arestas	Faces	Vértices
PIRAMIDE	TRIANGULO	6	4	4
	QUADRADO	8	5	5
	Pentágono	10	6	6
	hexágono	12	7	7

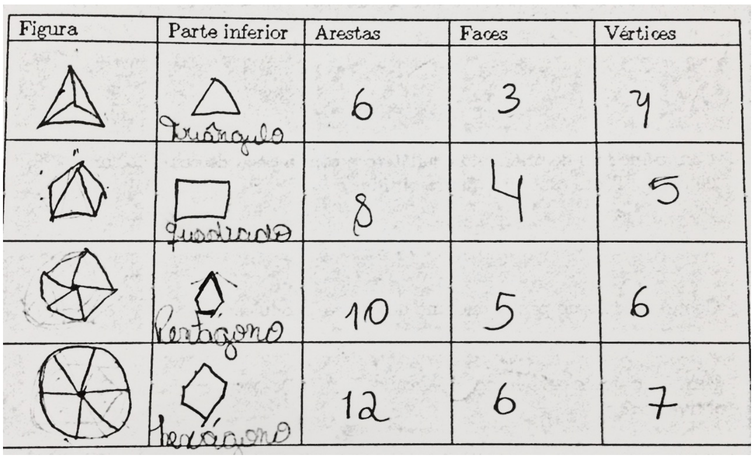


Figura	Parte inferior	Arestas	Faces	Vértices
	Triângulo	6	3	4
	Quadrado	8	4	5
	Pentágono	10	5	6
	Hexágono	12	6	7

Em sala de aula, foram apresentadas as devidas correções e, quando necessário, ressignificamos e sistematizamos os conceitos estudados.

3.2.1 - Ficha de Atividades (avaliação processual)

ATIVIDADE 2

1. Usando o módulo copo encaixe dois, depois três, quatro, cinco e seis desses módulos.

a) O que aconteceu quando você uniu apenas dois módulos?

b) As peças formadas lembram algo de seu conhecimento?

c) A parte inferior das peças são chamadas de base. Que figuras foram formadas? A que grupo pertencem?

d) Cada módulo nas peças forma uma face, e em cada encontro de duas faces temos uma aresta. O encontro de duas ou mais arestas forma um vértice. Considerando que a parte inferior(base) também é uma face, faça uma tabela com o esboço da figura obtida, o número de faces, o número de arestas e o número de vértices.

Tabela 1

Figura	**Base**	**Arestas**	**Faces**	**Vértices**

e) Baseando-se nas construções e nas informações da tabela, como você caracterizaria essas figuras?

2. Agora utilizando o módulo da face quadrada 3, encaixe-as seguindo o mesmo processo do módulo copo. Encaixe três, quatro, cinco e seis módulos e preencha a tabela 2. A parte superior e inferior dos módulos são as bases.

Tabela 2

Figura	**Bases**	**Arestas**	**Faces**	**Vértices**

a) Baseando-se nas construções e nas informações da tabela como você caracterizaria essas figuras?

3. Compare as figuras construídas nos itens 1 e 2 (observe as figuras e tabelas). Existe alguma semelhança entre elas? E diferenças?

4. Faça as seguintes construções:

a) Com o módulo do triângulo equilátero e com a peça de conexão, una 4, 8 e 20 peças. Tente esboçar as figuras obtidas.

b) Com o módulo do pentágono, una doze desses módulos.

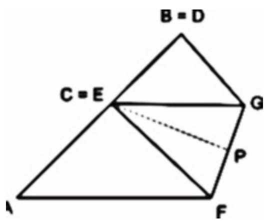
c) Com o módulo do quadrado, encaixe 3 e 6 desses módulos.

d) Pesquise outros sólidos que você poderá construir com os módulos construídos.

e) Observando todos os sólidos construídos procure uma ou mais características comuns entre eles e construa uma definição para os mesmos.

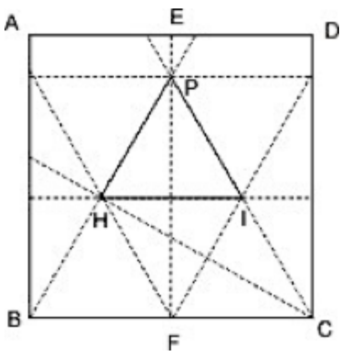
9. Ensaiando demonstrações:

Observe os argumentos abaixo para mostrar que o módulo obtido na primeira dobradura (módulo copo) é um triângulo isósceles.



Observe que o triângulo CGF formado é isósceles, pois como AC é bissetriz do ângulo reto, o ângulo FCG mede 45º e EC é a bissetriz do mesmo. No triângulo CGF, temos que CP é a bissetriz e a mediatriz, logo EG = EF e, portanto, O triângulo CGF é a bissetriz.
Podemos verificar quais polígonos podem ser formados encaixando esses módulos e construir sólidos (pirâmides).

Desdobre um dos triângulos equiláteros e, a partir das observações feitas anteriormente, use argumentos matemáticos para mostrar que o módulo obtido é um triângulo equilátero.



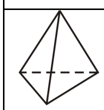
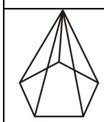
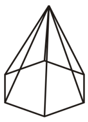
3.2.2 – Expectativas de soluções

Atividades - Oficina 2

1.a) Com apenas dois desses módulos não conseguimos formar um sólido. b) As figuras formadas lembram pirâmides.

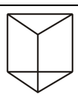
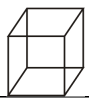
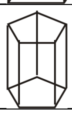
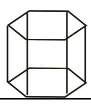
c) As bases têm a forma de triângulo, quadrado, pentágono, hexágono. Todos pertencm ao grupo dos polígonos.

d)

Figura	Base	Arestas	Faces	Vértices
	Triângulo	6	4	4
	quadrado	8	5	5
	Pentágono	10	6	6
	Hexágono	12	7	7

e) As pirâmides são sólidos cujas faces laterais são triangulares, possuem uma única base, a qual é um polígono qualquer, e o número de faces é igual ao número de vértices.

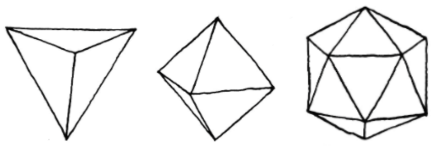
2.

Figura	Base	Arestas	Faces	Vértices
	Triângulo	9	5	6
	quadrado	12	6	8
	Pentágono	15	7	10
	Hexágono	18	8	12

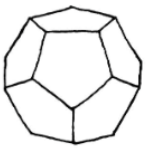
a) Os prismas retos são sólidos que possuem duas bases iguais e paralelas, as quais são polígonos quaisquer, e suas faces laterais são todas retangulares.

3. Nos dois grupos, as bases são polígonos quaisquer. Nos prismas as faces laterais são sempre retangulares, enquanto que nas pirâmides, são triangulares.

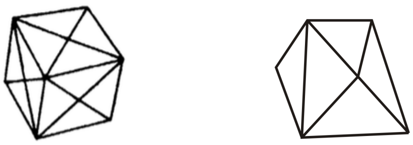
4. a)



b)



c)



d) Ver fotos, páginas 80 e 81.

e) Os sólidos são todos limitados por polígonos. Esses polígonos são suas faces, o encontro de faces formam as arestas e o encontro de três ou mais arestas são os vértices. Esses sólidos recebem o nome de poliedros.

9. Queremos provar que o triângulo HIP é equilátero.
Note que, por construção, ΔBFP é retângulo em F, que é ponto médio de BC = CP.
O triângulo FCP, retângulo em F, tem $P\hat{C}F$ medindo 60^o , pois $\overline{FC}$ é metade do segmento $\overline{PC}$.
Como ΔBCP é isósceles, pois PC = CB, então os ângulos da base $\overline{PB}$ são congruentes e medem 60^o , portanto, o Δ PCB é equilátero e semelhante ao triângulo PHI, e podemos concluir que PHI é equilátero.

3.3 - OFICINA 3 - Analisando área e volume a partir de caixas triangulares.

Esta oficina até o momento da defesa não havia sido executada, portanto apresentaremos o que deveria ser o seu desenvolvimento e resultados esperados.

Objetivo: Consolidar conteúdos de trigonometria, área e volume, bem como a análise de parâmetros como altura, largura, comprimento e ângulo, a partir da construção de caixas triangulares com dobraduras.

Conteúdos: Área, volume, razões trigonométricas

Público Alvo: Educandos da 3º ano do Ensino médio

Tempo estimado: 4 horas/aula

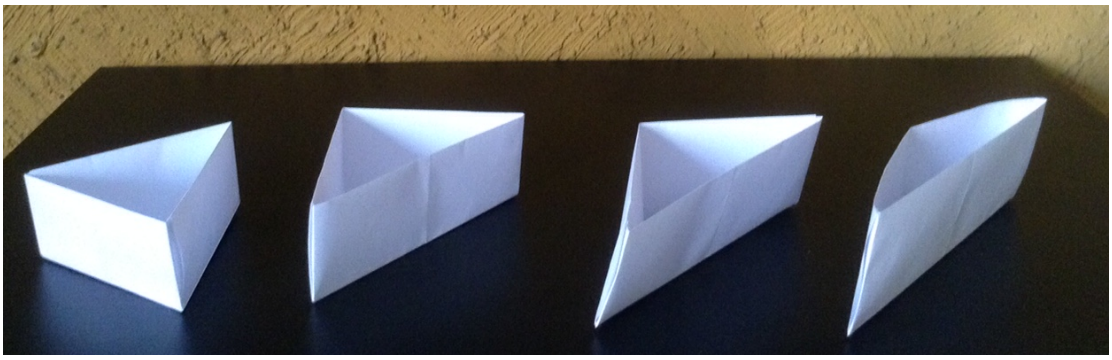
Material necessário: papel espelho, papel ofício, ficha de atividade (em anexo), lápis, borracha, calculadora, régua, transferidor.

Orientação para o professor:

1ª eteapa: Divisão dos educandos, em duplas, e entrega da ficha de atividades.

2ª etapa: Construção das caixas: Os educandos construirão 4 caixas, a partir de uma folha A4(largura (L): 20,99 cm e comprimento (C): 29,69 fixados).

Cada caixa, a partir dos ângulos de 30º, 45º, 60º e 75º, conforme gabarito.



3ª etapa: Solicitar que os educandos intuitivamente ordenem as caixas da menor para a maior em área de face triangular e volume.

4ª etapa: Com o auxílio de uma régua, medir as caixas e preencher a tabela com o ângulo inicial, área e volume, construir um gráfico e comparar com a classificação intuitiva. Com os gráficos, espera-se que os educandos possam identificar que, a partir de um determinado ângulo, as áreas e volumes começam a diminuir. Portanto, existe um ângulo que tornam área e volume máximos.

Tabela de área e volume

Caixa	Ângulo	Dimensões da face triangular	Área	Volume
01	30°	B= 10,4 cm H = 9,1 cm	A = 47,32	V= 241,33 cm^3
02	45°	B = 15 cm H= 7,2 cm	A= 54,0 cm^2	V= 297,0 cm^3
03	60°	B= 18,1 cm H= 5,1 cm	A= 46,16 cm^2	V= 281,55 cm^3
04	75°	B=20,2 cm H= 2,8 cm	A= 28,28 cm^2	V= 192,30 cm^3

Gráfico da área

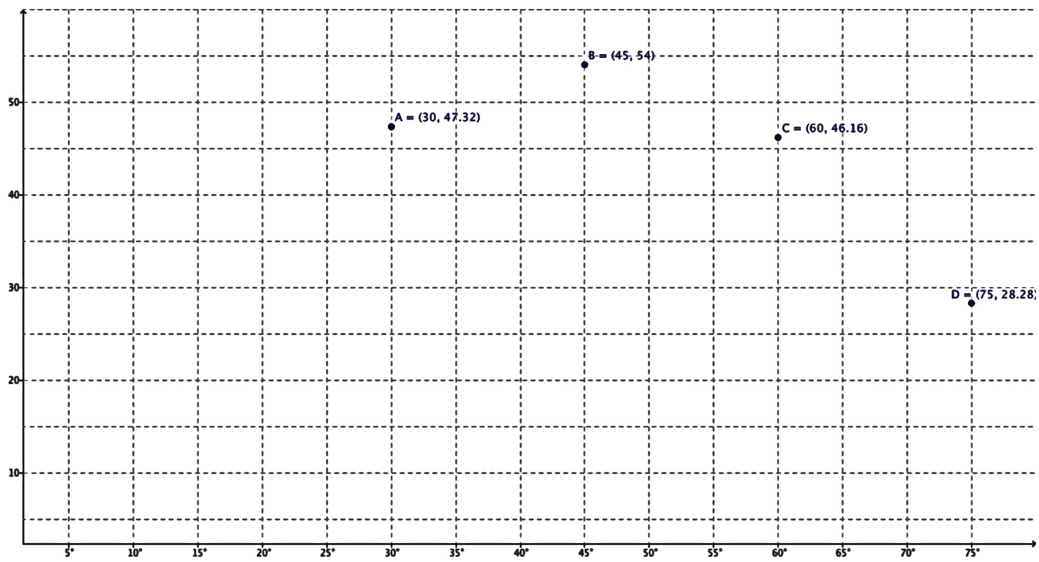
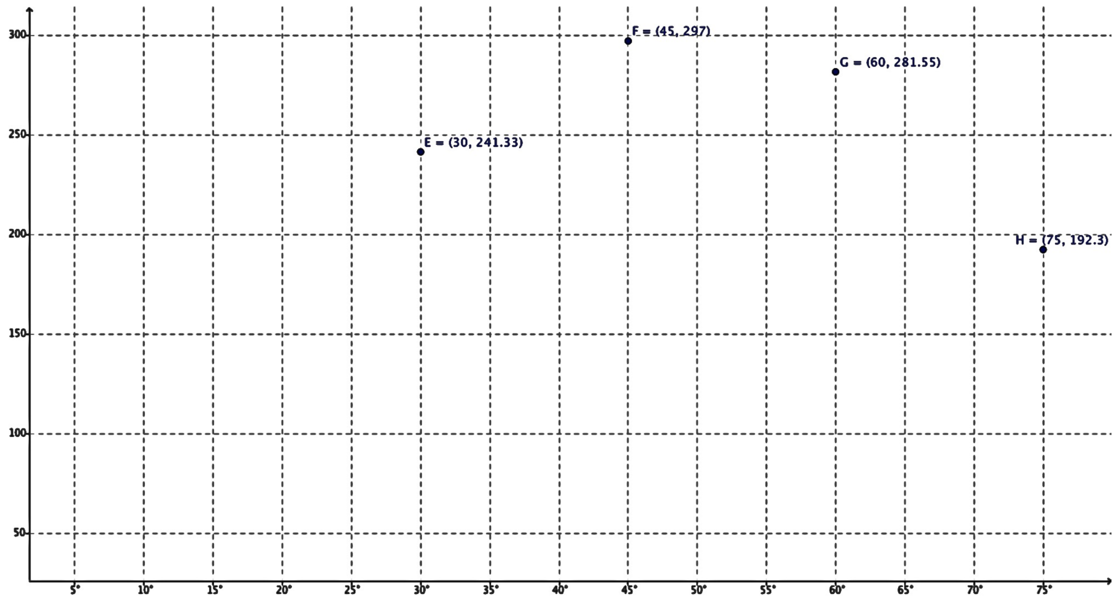
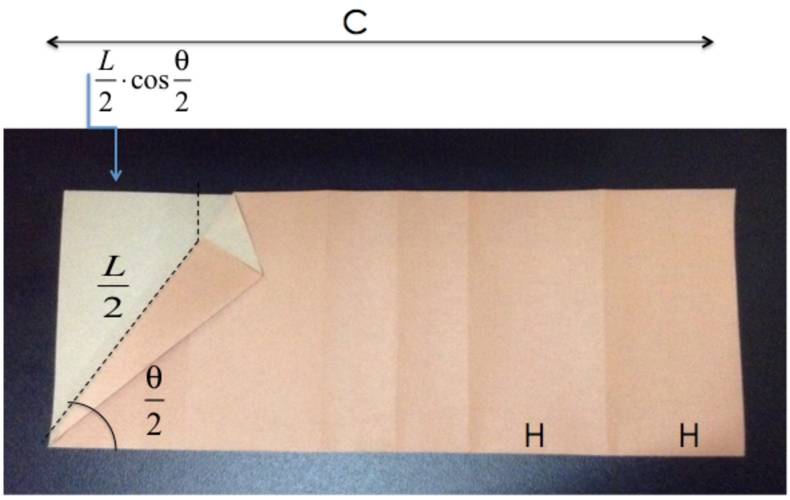


Gráfico do volume



5ª etapa: A partir do desmonte das caixas, encontrar a relação entre os parâmetros C = comprimento, L = largura, H = altura e θ.



Pelo desmonte da caixa, podemos observar que:

$$C - \frac{L}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 4H$$

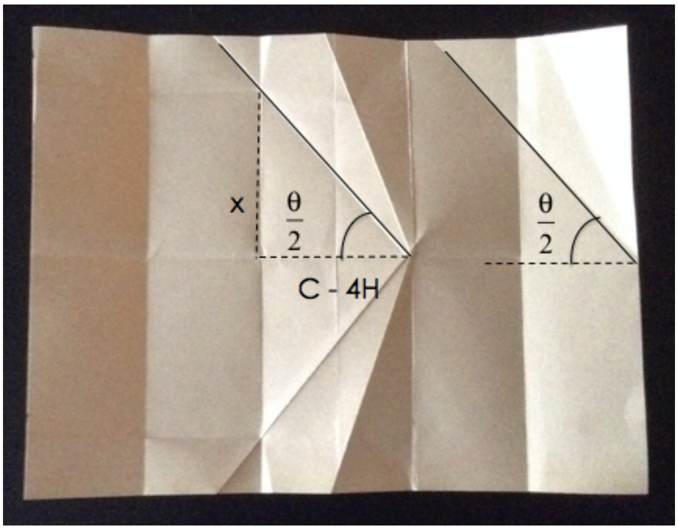
Usando o fato que $0 < \theta < 180^\circ$, *isto é,*

$$0 < \cos\frac{\theta}{2} < 1, \text{ temos que:}$$

$$C - \frac{L}{2} < 4H < L$$

6ª etapa: Pedir que os educandos construam uma caixa de altura 7cm, definindo os vincos e ângulo para satisfazer a condição. Os educandos deverão verificar que a escolha do ângulo determina H (altura da caixa).

7ª etapa: Desfazer uma caixa e, verificando os vincos, encontrar uma fórmula para área da face triangular da caixa e uma fórmula para o volume. Não é necessário que o educando chegue a uma expressão muito elaborada, mas ele deve obter alguma que possa ratificar os resultados encontrados quando medidos com a régua.



Observando a face triangular que é a base da caixa, temos:

Determinando x

$$tg\frac{\theta}{2} = \frac{x}{C-4H}$$

$$x = (C-4H)tg\frac{\theta}{2}$$

Cálculo da área:
Como

$(C-4H) = \left(\frac{L}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}$, temos:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

$$A = \frac{2x(C-4H)}{2} = (C-4H)^2 tg\frac{\theta}{2}$$

$$A = \left(\frac{L^2}{4}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} . \frac{sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$A = \left(\frac{L^2}{4}\right)\cos\frac{\theta}{2}\cdot sen\frac{\theta}{2} = \frac{sen\theta}{2}\frac{L^2}{4}$$

$$A = \frac{L^2}{8}sen\theta$$

Cálculo do volume:

Como,

$$H = \frac{1}{4}\left(C - \left(\frac{L}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$V = A_b . H$$

$$V = \frac{L^2}{8} \cdot sen\theta \cdot H$$

$$substituindo\ H, temos:$$

$$V = \frac{L^2}{8} \cdot sen\theta \frac{1}{4}\left(C - \left(\frac{L}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$V = \frac{L^2}{32} \cdot sen\theta \left(C - \left(\frac{L}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

8ª etapa: Recalcular área e volume das caixas a partir das fórmulas obtidas e comparar com os valores encontrados anteriormente.

Caixa	Área	Volume
01	A = 47,69	V= 245,56 cm^3
02	A= 55,07 cm^2	V= 306,60 cm^3
03	A= 47,69 cm^2	V= 291,44 cm^3
04	A= 27,54 cm^2	V= 185,68 cm^3

CONCLUSÃO

A construção e apropriação de novos conceitos ou de todos os aspectos de uma situação é um processo longo e que demanda um domínio progressivo dos educandos ao longo de sua etapa escolar. O que podemos notar com essas propostas de atividades é que muitos deles têm conhecimentos implícitos, mas não os desenvolveram ao ponto de torná-los explícitos. O medo do erro ainda é muito constante, mesmo em atividades mais lúdicas.

Pedagogicamente o origami é um recurso que pode ser trabalhado interdisciplinarmente (arte, história, biologia, linguagens e outros campos conceituais da matemática), favorecendo o desenvolvimento de competências relacionais de cooperação, interação, atitudinais de envolvimento, atenção, aceitação e pessoais como a comunicação e autonomia, além de ser um recurso material de grande efeito, de fácil acesso e custo baixo.

Do ponto de vista matemático, podemos concluir que o trabalho com origami contribuiu para o desenvolvimento do pensamento geométrico. A partir das interações com os objetos, os educandos puderam construir representações mentais que possibilitaram reconhecer características das figuras geométricas, antecipar transformações de figuras planas e espaciais, levando também a um amadurecimento do pensamento indutivo e dedutivo.

Acreditamos que os objetivos das oficinas executadas foram alcançados, mesmo que com algumas dificuldades, e que o uso de recursos concretos em atividades bem dirigidas e coordenadas contribuem não só para formação do conhecimento matemático, de forma dialética e reflexiva de nossos educandos, como também para formação integral e crítica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) CAVACAMI, EDUARDO E FURUYA, YOLANDA: Explorando Geometria com Origami. Página consultada em 26 de abril de 2015. <http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>

(2) FUSE, Tomoko, Unit Origami, Tokyo: Japan Publications 1990.

(3) GÊNOVA, A. C. Brincando com Origami. São Paulo. Global Editora, 1990.

(4) GÊNOVA, A. C. Origami, contos e encantos. São Paulo. Escrituras Editora, 2008.

(5) HULL, Thomas. Origami ^{3}. AK Peters, Ltd.(2002).

(6) HULL, Thomas. Project Origami: Activities for exploring mathematics. AK Peters, Ltd.(2206).

(7) IMENES, L.M. Geometria das dobraduras. São Paulo. Editora Scipione, 1988.

(8) LORENZATO, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? In: Educação Matemática em Revista – SBEM 4, p. 3-13.

(9) MACHADO, N. J. Matemática e realidade. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1987.

(10) OBMEP. Página consultada em 21 de janeiro de 2015 <www.obmep.org.br/>

(11) ORIGAMI A MAGIA DE PAPEL. Página consultada em 10 de maio de 2015 <www.magiadepapel.com/>

(12) ORIGAMI RESOURCE CENTER. Página consultada em 10 de maio de 2015 <www.origami-resource-center.com/history-of-origami>

(13) RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho; GAUDÊNCIO, Severino Júnior. A Geometria do Origami. João Pessoa, PA: Editora Universitária/ UFPB, 2003.

(14) ROBERT J LANG ORIGAMI. Página consultada em 30 de janeiro de 2015 <www.langorigami.com/science>

(15) ROW, T. S. Geometric exercises in paper folding. Dover Publications, Inc. New York, 1966.

APÊNDICE

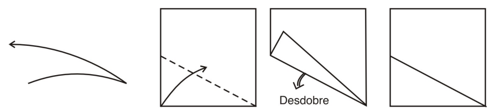
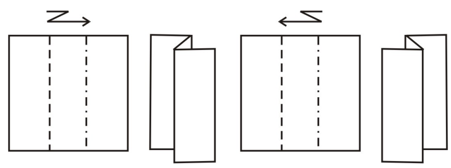
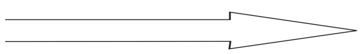
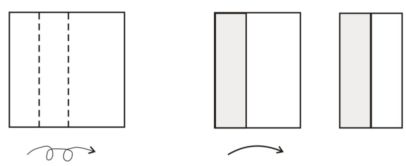
i - Tipos de papel para dobrar

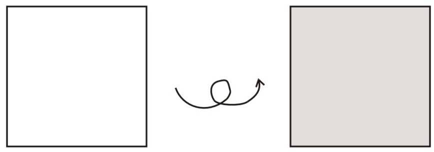
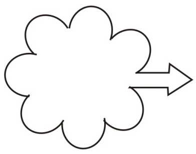
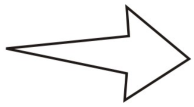
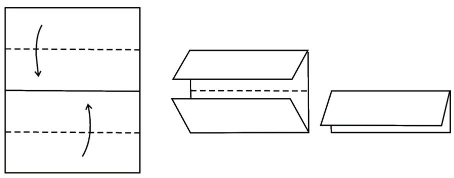
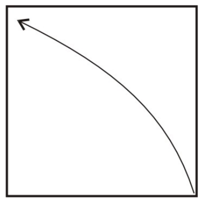
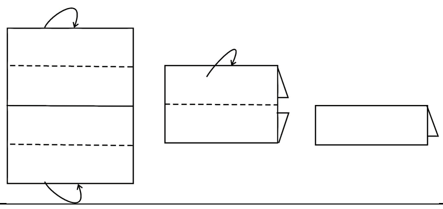
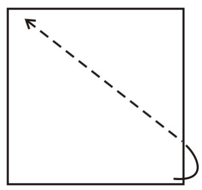
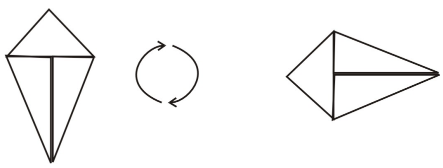
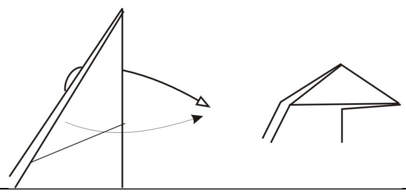
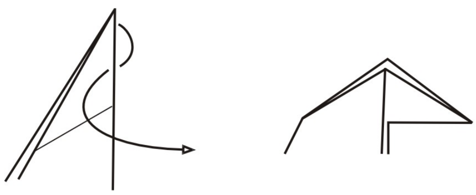
Em todas as bibliografias a respeito do tema, existe uma simbologia, relativamente universal, que funciona como instruções dos referidos modelos. Abaixo estão listados tipos de papel, símbolos e sinais básicos para construção do Origami.

- **Espelho:** O mais indicado. O opaco é melhor para dobrar.
- **Metalizado**: Não é recomendado para principiantes
- **Fantasia**: Mais utilizado para ornamentação.

Papéis de alta gramatura tornam impossíveis as dobraduras mais complexas.

ii - Sinais e Procedimentos básicos do origami

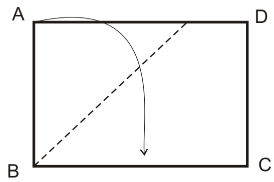
1. Dobrar e vincar	***10. Vincar (dobrar e desdobrar)*** 
2. Voltar ao passo anterior	***11. Dobra zigue-zague*** 
3. Puxar 	***12. Dobrar duas vezes*** 

4. Empurrar 	***13. Virar*** 
5. Assoprar 	***14. Desenho aumentado*** 
6. Dobra tipo vale(para frente) 	***15. Dobrar por dentro*** 
7. Dobra tipo montanha(para trás) 	***16. Dobrar por fora*** 
8. Mudar direção 	***17.Dobrar para fora*** 
9. Dobrar para dentro 	

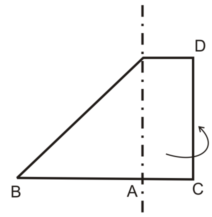
iii - Diagramas para construção das figuras da Oficina 1.

Quadrado

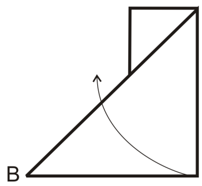
Passo 1: Faça uma dobra vale de modo que o lado AB coincida com o lado BC.



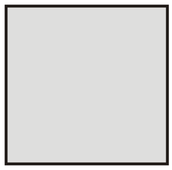
Passo 2: Faça uma dobra montanha passando por A.



Passo 3: Corte o retângulo excedente e desdobre a vale.

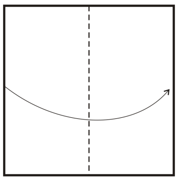


Passo 4: Quadrado construído.

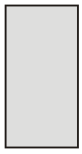


Retângulo

Passo 1: Faça uma dobra vale de modo que o lado esquerdo do quadrado sobreponha o direito.

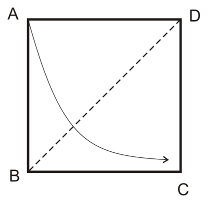


Passo 2: Retângulo construído

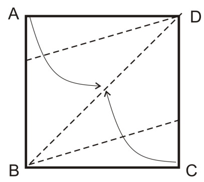


Paralelogramo

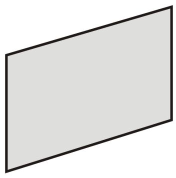
Passo 1: Faça uma dobra vale e desdobre.



Passo 2: Construa as bissetrizes dos ângulos $A\widehat{D}B$ e $C\widehat{B}D$.

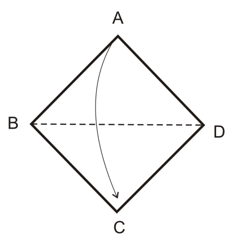


Passo 3: Paralelogramo construído.

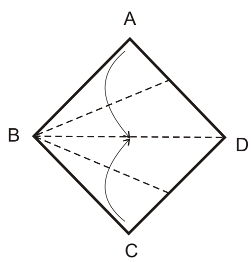


Losango

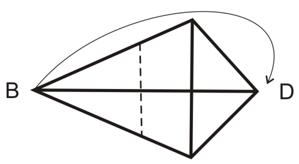
Passo 1: Faça uma dobra vale pela diagonal fazendo o vértice A coincidir com C e desdobre.



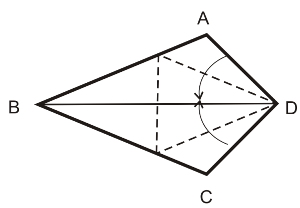
Passo 2: Faça dobras vales em B para obter suas bissetrizes dos ângulos $A\widehat{B}D$ e $C\widehat{B}D$.



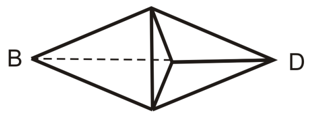
Passo 3: Dobre levando o vértice B até o vértice D e desdobre.



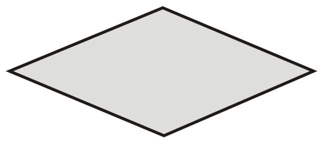
Passo 4: Dobre os lados AD e DC até sobrepor BD.



Passo 5: Vire a figura.

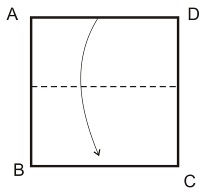


Passo 6: Losango construído.

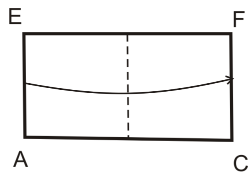


Trapézio isósceles

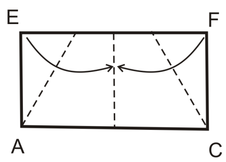
Passo 1: Dobre o quadrado de modo que o lado AD sobreponha o lado BC.



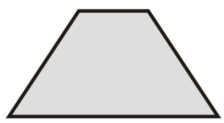
Passo 2: Dobre novamente Fazendo o lado EA coincidir com o lado FC e desdobre.



Passo 3: Dobre de modo que os vértices E e F coincidam com a linha central em um mesmo ponto.

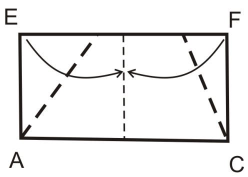


Passo 4: Vire a figura e o trapézio está pronto.

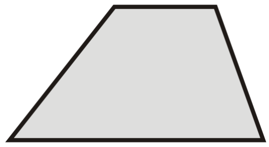


Trapézio escaleno

Passo 1: Repetindo os passos 1 e 2, dobre levando o vértice E à linha central e dobre o vértice F até a linha central formando um ângulo diferente da dobra anterior.

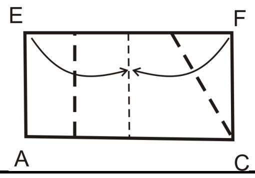


Passo 2: Vire a figura e o trapézio está pronto.

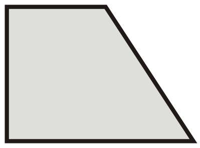


Trapézio retângulo

Passo 1: Construa os passos 1 e 2 do trapézio anterior. Dobra o lado EA sobre a linha central e dobre levando o vértice F também a linha central.

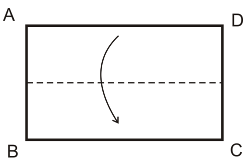


Passo 2: Vire a figura e o trapézio está pronto.

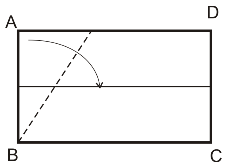


Triângulo equilátero

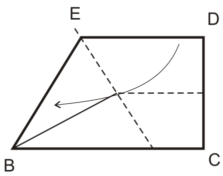
Passo 1: Faça uma dobra vale levando o lado AD sobre BC e desdobre.



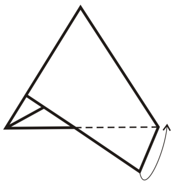
Passo 2: Dobre levando o vértice A até a linha formada com a dobra vale e vinque.



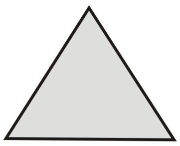
Passo 3: Dobre o lado ED sobre o lado BC.



Passo 4: Dobre o pedaço do papel que sobrou para trás.

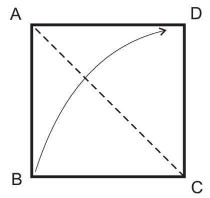


Passo 5: Vire a figura.

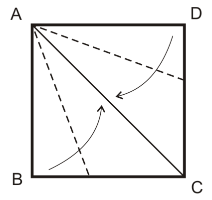


Triângulo isósceles

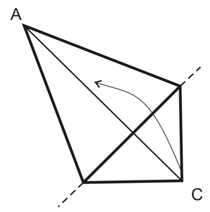
Passo 1: Faça uma dobra vale pela diagonal do quadrado e desdobre.



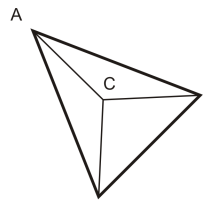
Passo 2: Construa as bssetrizes dos ângulos $D\widehat{A}C$ e $B\widehat{A}C$.



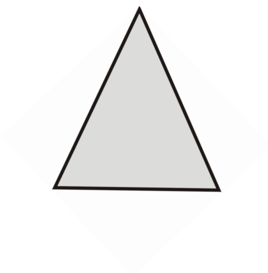
Passo 3: Dobre levando o vértice C até a linha central.



Passo 4: Vire a figura.

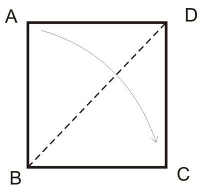


Passo 5: Triângulo construído.

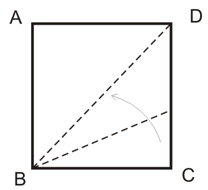


Triangulo escaleno

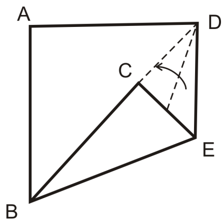
Passo 1: Faça uma dobra vale pela diagonal.



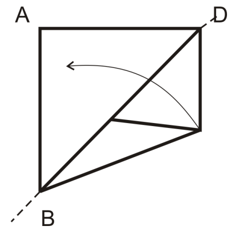
Passo 2: Dobre o vértice C até a diagonal construindo a bissetriz do ângulo $D\widehat{B}C$.



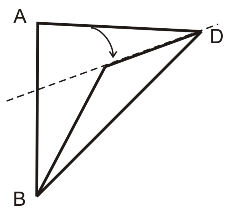
Passo 3: Faça uma dobra vale, obtendo a bissetriz do ângulo $C\widehat{D}E$.



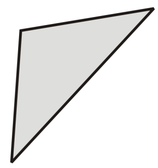
Passo 4: Dobre novamente sobre a diagonal BD.



Passo 5: Dobre novamente de modo que o lado AD sobreponha BD.

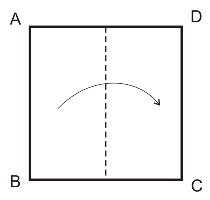


Passo 6: Vire a figura e o triângulo está construído.

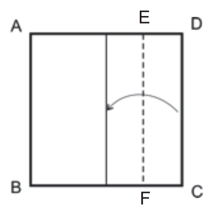


Pentágono

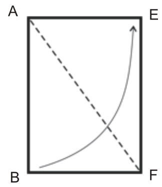
Passo 1: Dobre o quadrado ao meio sobrepondo o lado AB sobre DC.



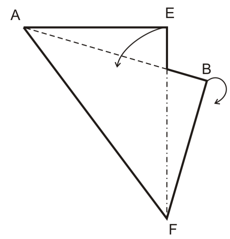
Passo 2: Faça uma dobra vale de modo que DC sobreponha a dobra anterior e corte o retângulo EFCD.



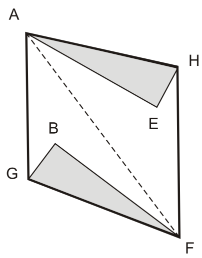
Passo 3: No retângulo restante construa a diagonal AF .



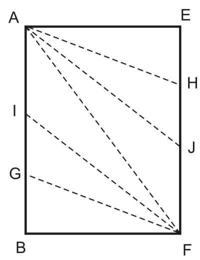
Passo 4: Dobre a aba AE fazendo uma vale sobre o triângulo e BF fazendo uma dobra montanha.



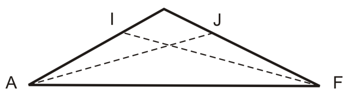
Passo 5: Abra a figura e deixe as abas voltadas para dentro. Dobre os lados GF e AH sobre o segmento AF .



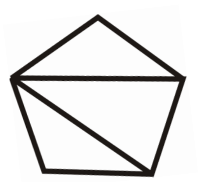
Passo 6: Desdobre e observe os segmentos IF e AJ formados.



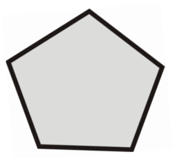
Passo 7: Dobre novamente a figura pelo semento AF, mantendo as abas encaixadas por dentro.



Passo 8: Dobre levando o vértice A até J e o vértice F até I.

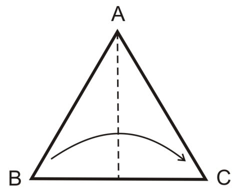


Passo 9: Vire a figura e o pentágono está pronto

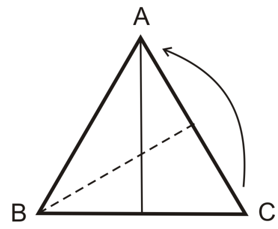


Hexágono

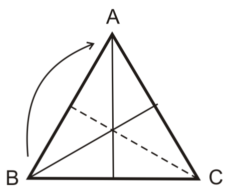
Passo 1: A partir de um triângulo equilátero, faça uma dobra vale passando por A, de modo que B coincida com C.



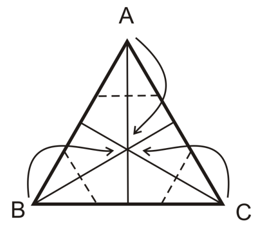
Passo 2: Repita a ação anterior para C e A.



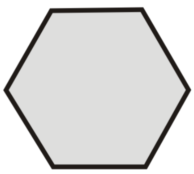
Passo 3: Repita o passo anterior para B e A.



Passo 4: Dobre levando os vértices A, B e C até o ponto onde as dobras se encontram.

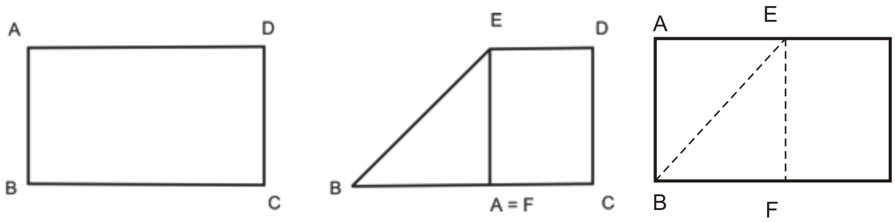


Passo 5: Vire a figura e o hexágono está construído.



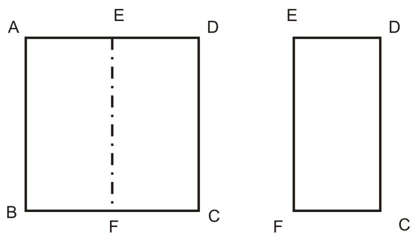
iv - Algumas demonstrações

- **Quadrado obtido do retângulo**



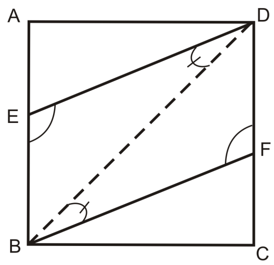
Considere o retângulo ABCD. Por sobreposição o segmento AB = BF. A dobra BE formada é a bissetriz de A$\hat{B}$C, pois os triângulos sobrepostos são congruentes e isósceles. Temos que AE = EF = BF = AB e que EA $\perp$ AB e EF $\perp$ BF. Logo ABFE é um quadrado.

- **Retângulo obtido do quadrado.**



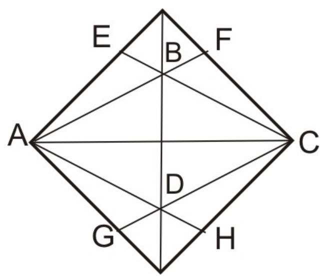
Considere o quadrado ABCD. O segmento $\overline{EF}$ é mediatriz dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Os ângulos nos vértices E e F são retos, ED = FC e EF = DC. Portanto, EFCD é um retângulo.

- **Paralelogramo**



Considere o quadrado ABCD. Por construção $\overline{BD}$ é bissetriz do ângulo A$\hat{B}$C. $\overline{DE}$ é bissetriz do ângulo A$\hat{D}$B e $\overline{BF}$ é bissetriz do ângulo D$\hat{B}$C. Os ângulos E$\hat{D}$B e D$\hat{B}$F são congruentes, pois são alternos internos, e $\overline{DE}//\overline{BF}$, portanto EBFD é um paralelogramo.

- **Losango**



A partir das dobras obtidas na construção, temos:

Note que os ângulos F$\hat{A}$C, C$\hat{A}$H, E$\hat{C}$A e A$\hat{C}$G são congruentes .

Os triângulos ABC e ADC são congruentes e isósceles, ou seja:

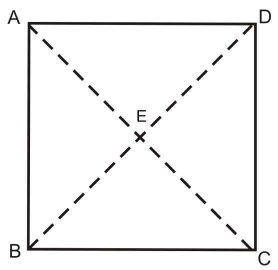
AB = BC

AB = CD

BC = AD, portanto AB = BC = CD = AD e ADCB é um losango.

v - Algumas propriedades

- **As diagonais do quadrado se encontram no ponto médio e sob um ângulo de 90º (ângulo reto).**



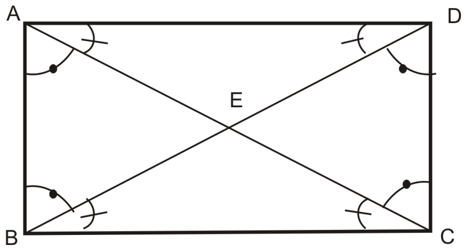
Considere o quadrado de vértices ABCD , as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e o ponto E, interseção das diagonais.

Note que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são bissetrizes dos ângulos D$\hat{A}$B e A$\hat{B}$C, respectivamente. Como são bissetrizes dividem os ângulos dos vértices A, B, C e D em dois ângulos congruentes que medem 45^o .

Observe que os triângulos assim formados AED, ABE, BCE e CDE são isósceles e congruentes pelo caso de congruência ALA (ângulo – lado – ângulo). Os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{BE}$, $\overline{ED}$ são congruentes e portanto, E é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ que têm mesmo comprimento.

Note também que os ângulos no vértice E medem 90º , ou seja, são retos, pois pelo teorema dos ângulos internos a soma dos ângulos internos em todo triângulo mede 180º.

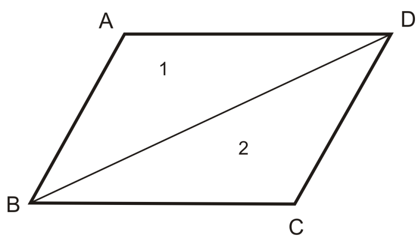
- **As diagonais do retângulo se encontram no ponto médio e não são perpendiculares**



Considere o retâgulo ABCD da figura. Note que por construção $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais e que se interceptam no ponto E. Note também que os ângulos D$\hat{A}$C , A$\hat{C}$B, A$\widehat{D}$B e D$\hat{B}$C são congruentes (alternos internos) e os ângulos C$\hat{A}$B, A$\hat{C}$D, A$\hat{B}$D e B$\widehat{D}$C são congruentes (alternos internos), portanto os triângulos AEB e DEC são congruentes pelo caso de congruência ALA (ângulo – lado- ângulo). Os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$ são congruentes, da mesma forma que os segmentos $\overline{EB}$ e $\overline{DE}$, por conseguinte o ponto E é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

- **Num paralelogramo os lados opostos são congruentes, ângulos opostos são congruentes e as diagonais se interceptam no ponto médio.**

(i) Considere o paralelogramo ABCD e seja $\overline{BD}$ uma diagonal. Note que nos trângulos formados ABD e DBC, temos:



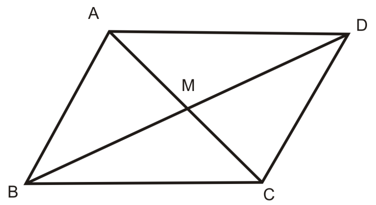
- Os ângulos A$\hat{B}$D e B$\widehat{D}$C são congruentes (alternos internos)
- Os ângulos A$\widehat{D}$B e D$\hat{B}$C também são congruentes (alternos internos).
- O segmnto $\overline{BD}$ é lado comum aos dois triângulos.

Portanto, pelo caso de congruência ALA esses triângulos são congruentes e AB = CD e BC = AD.

(ii) Pelo item anterior temos que os triângulos 1 e 2 são congruentes, portanto os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são congruentes (ângulos opostos a lados congruentes).

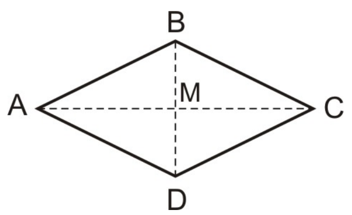
Note também que A$\hat{B}$D + D$\hat{B}$C = A$\widehat{D}$B + B$\widehat{D}$C e portanto, $\hat{B} = \widehat{D}$.

(iii) Considere agora um ponto M na interseção das diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ do paralelogramo.



Os triângulos AMB e DMC são congruentes, caso ALA, pois B$\hat{A}$C = A$\hat{C}$D, A$\hat{B}$D = B$\widehat{D}$C e AB = DC. Logo, AM = MC e BM = MD e portanto M é ponto médio.

- **Num losango as diagonais se interceptam no ponto médio e são perpendiculares.**



Note que $\overline{AC}$ é bissetriz do ângulo no vértice A. Temos que os ângulos B$\hat{A}$M e M$\hat{A}$D são congruentes.

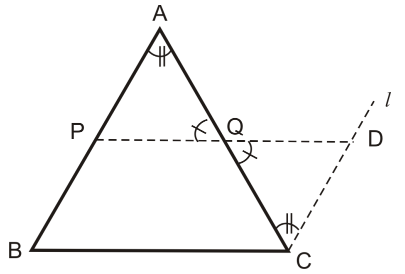
Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são congruentes, pois são lados dos losango.

Pelo caso e congruência LAL os triângulos BAM e MAD são congruentes ($\overline{AM}$ lado comum) e portanto BM = MD, ou seja, M é ponto médio de $\overline{BD}$.

O triângulo BAD é isósceles e $\overline{AM}$ é bissetriz e altura, portanto os triângulos BAM e MAD sâo retângulos.

Procedendo de maneira análoga para os triângulos ADM e MDC , temos que M é ponto médio de $\overline{DB}$ e que os triângulos ADM e MDC são retângulos.

- **Em todo triângulo o segmento que une os pontos médios de dois de seus lados é paralelo ao terceiro lado e sua medida é metade desse lado. (base média)**



Considere o triângulo ABC. Sejam P e Q os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. Tracemos por C uma reta l paralela ao segmento $\overline{AB}$. Vamos prolongar o segmento $\overline{PQ}$ até encontrar a reta l no ponto D.

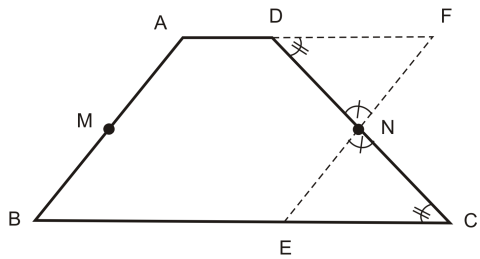
Note que:

- Os ângulos A$\hat{Q}$P e C$\hat{Q}$D são opostos pelo vértice, por isso, são congruentes;
- Os ângulos B$\hat{A}$C e A$\hat{C}$D são alternos internos, e por isso, também congruentes;
- Os segmentos AQ = AC, pois Q é ponto médio de $\overline{AC}$.

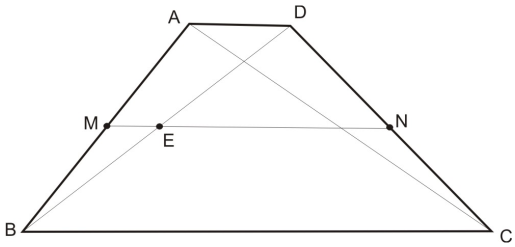
Então, por congruência (ALA) ΔPAQ ≡ ΔDCQ ⇒ CD = AP, daí BPDC é um paralelogramo (lados opostos congruentes e paralelos), portanto $\overline{PQ}$ // $\overline{BC}$.

Note também, que da congruência ΔPAQ ≡ ΔDCQ, temos que PQ = QD e no paralelogramo BPDC, PD = BC e PD = PQ + QD ⇒ PD = PQ + PQ ⇒ PD = 2PQ ⇒ PQ = PD/2, mas PD = BC ⇒ PQ = BC/2.

- **O segmento que une os pontos médios dos lados transversos de um trapézio é paralelo as bases e tem medida a média aritmética simples destas bases.**



Considere M e N os pontos médios dos lados transversos. Por N tome uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$, determinando os pontos E e F. Os ângulos no ponto N são opostos pelo vértice, portanto são congruntes e os ângulos nos pontos D e C são alternos internos, isto implica que os triângulos DFN e ENC são congruentes, portanto EN = FN. ABEF é um paralelogramo por construção então AB = EF, isto implica AM = NE = BM, daí BMNE é um paralelogramo, daí BM// EN e MN//BC//AD.



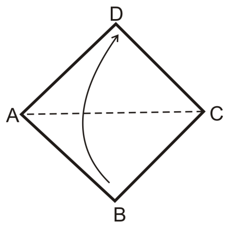
Considere o ponto E na interseção da diagonal $\overline{BD}$ com o segmento que une os pontos médios M e N. Note que $\overline{ME}$ é base média de $\overline{AD}$ no triângulo BAD e $\overline{EN}$ é base média de $\overline{BC}$ no triângulo BDC. O segmnto MN = ME + EN, daí temos:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$$

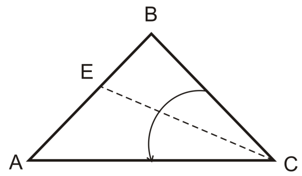
vi - Diagramas para construção das figuras da oficina 2

MÓDULO COPO (Módulo do triângulo isósceles)

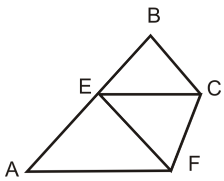
Passo 1: Dobre a diagonal AC do quadrado fazendo coincidir os vértices B e D.



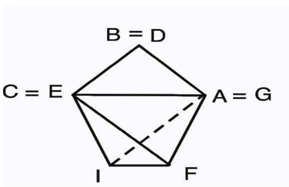
Passo 2: Dobre a bissetriz do ângulo C, determinando assim, o ponto E e desdobre.



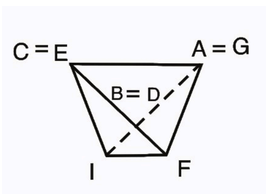
Passo 3: Dobre levando o vértice C até E.



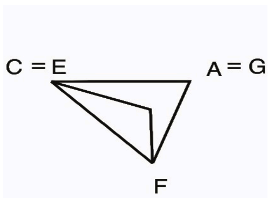
Passo 4: Dobre para trás levando o vértice A até G.



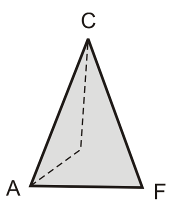
Passo 5: Faça duas dobras CG e AE encaixando os vértices B e D nas respectivas bolsas



Passo 6: Faça a dobra EF. O módulo formado é um triângulo isósceles com uma ponta triangular e uma bolsa

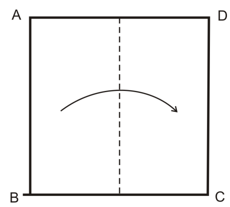


Passo7:. Vire e gire a figura

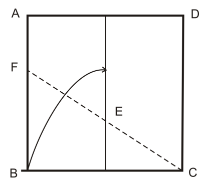


MÓDULO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

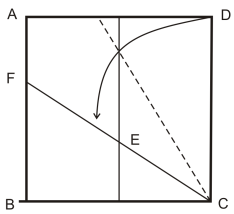
Passo 1: Dobre o quadrado de modo que o lado AB sobreponha DC e desdobre.



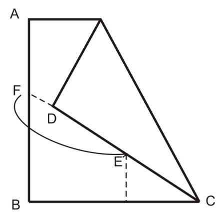
Passo 2: Leve o vértce B até a linha obtida com a dobra anterior e desdobre.



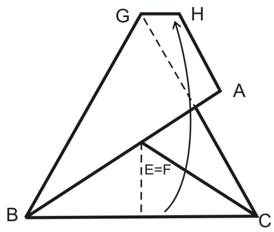
Passo 3: Faça um dobra vale sobrepondo DC em FC.



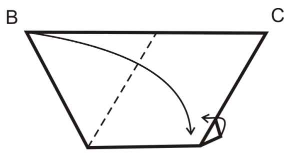
Passo 4: Faça o ponto F coincidir com o ponto E.



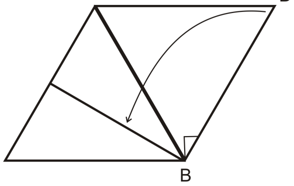
Passo 5: Sobreponha o lado BC em GH.



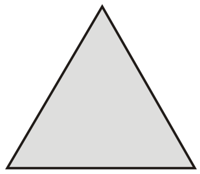
Passo 6: Faça uma dobra levando o vértice B até o canto inferior direito e dobre para frente a aba restante.



Passo 7: Encaixe o vértice C na abertura formada no passo anterior.

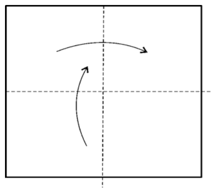


Passo 8: Vire a figura e teremos o módulo com 3 bolsas.

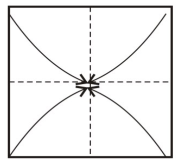


Peça de conexão

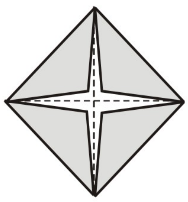
Passo 1: Faça uma dobra vale nas duas direções e desdobre e separe cada um dos quadrados formados.



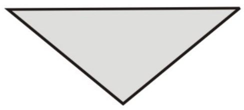
Passo 2: Dobre novamente cada quadrado e desdobre.



Passo 3: Leve cada vértice ao centro.

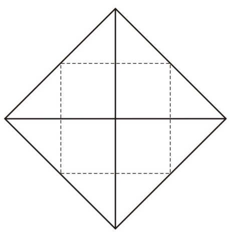


Passo 4: Dobre ao meio e a conexão está feita.

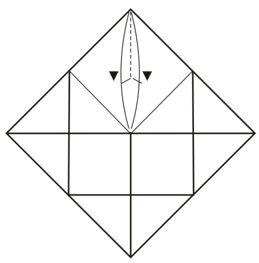


MÓDULO FACE QUADRADA – 1

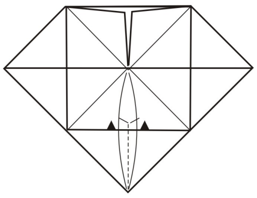
Passo 1: Dobre marcando as diagonais e desdobre, leve cada vértice ao encontro das diagonais formando um novo quadrado. Leve novamente os vértices ao centro e desdobre.



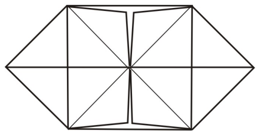
Passo 2: Coloque o vértice superior para dentro.



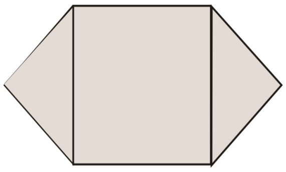
Passo 3: Repita o passo anterior no vértice inferior.



Passo 4: Duas bolsas estarão formadas.

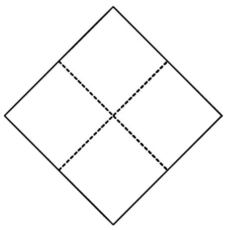


Passo 5: Vire a figura e o módulo estará pronto.

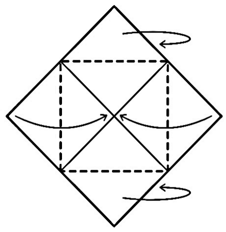


MÓDULO FACE QUADRADA – 2

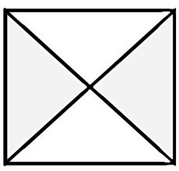
Passo 1: Dobre o quadrado ao meio de modo que um lado sobreponha outro e desdobre. Repita o passo na outra direção.



Passo 2: Leve dois vértices opostos ao centro das dobras obtidas no passo anterior. Vire a figura e leve os outros dois vértices ao centro.

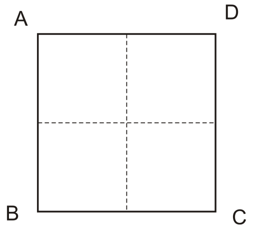


Passo 3: O módulo é formado por duas abas em cada lado.

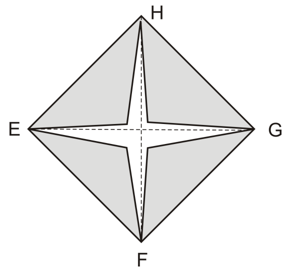


MÓDULO FACE QUADRADA – 3

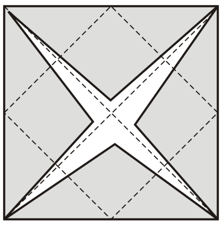
Passo 1: Dobre o lado AB sobre DC e desdobre. Repita a dobra com olado AD sobre BC.



Passo 2: Dobre levando os vértices A, B, C e D até o centro.

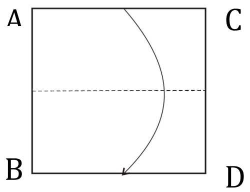


Passo 3: Dobre novamente levando cada vértice ao meio e desdobre. O módulo é uma base quadrada formada por 4 abas.

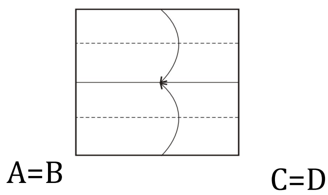


MÓDULO FACE QUADRADA – 4

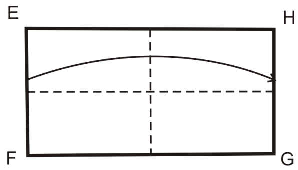
Passo 1: Faça uma dobra de modo que AC coincida com BD.



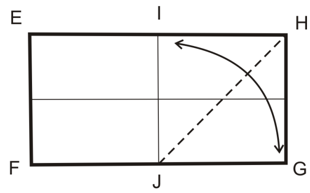
Passo 2: Dobre cada metade obtida ao meio.



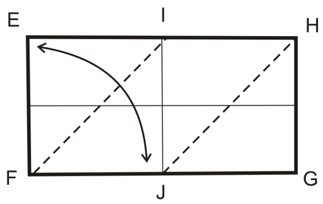
Passo 3: Dobre o retângulo sobrepondo EF a HG e desdobre.



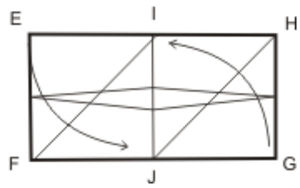
Passo 4: Dobre levando o vértice G até o ponto I e desdobre.



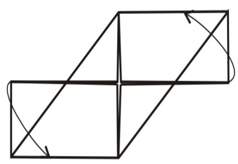
Passo 5: Repita o passo anterior levando E ao ponto J.



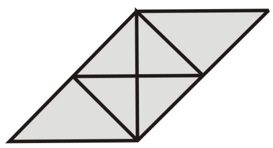
Passo 6 : Leve G por dentro da linha central até I e repita levando E por dentro da linhacentral até J.



Passo 7: Dobre as abas para dentro. E vire a figura.

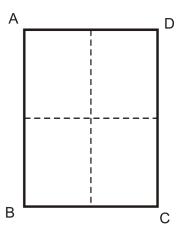


Passo 8: Dobre conforme indicado para delimitar o quadrado. Face pronta formada por quatro bolsas e duas pontas

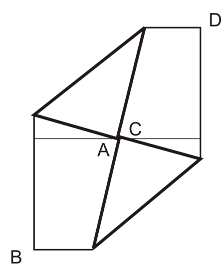


MÓDULO FACE PENTAGONAL

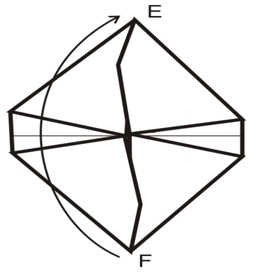
Passo 1: A partir de um retângulo na proporção de 3:4, dobre AD sobre BC e desdobre. Reptida o passo anterior dobrando AB sobre DC e desdobre.



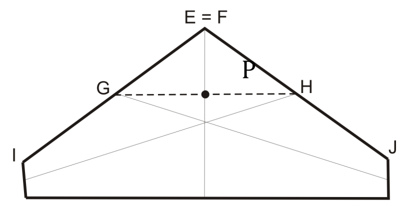
Passo 2: Dobre os vértices A e C até o centro. Faça o mesmo com os vértices B e D.



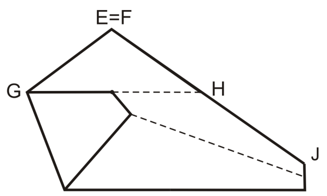
Passo 3: Dobre levando F até E



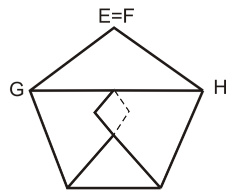
Passo 4: Dobre o lado IF sobre a linha inferior, determinando o ponto H. Fça o mesmo com EJ, determinando o ponto G.
Determine GH.



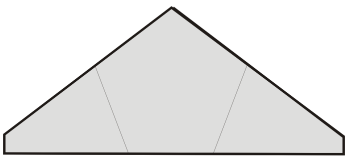
Passo 5: Dobre levando o vértices I J ao ponto P.



Passo 6: Dobre levando o vértice J ao ponto P.

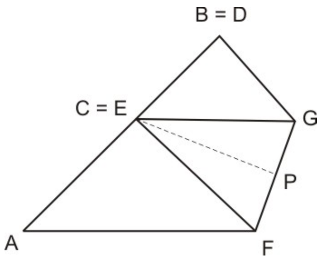


Passo 7: Módulo pronto.



vii - Algumas demonstrações

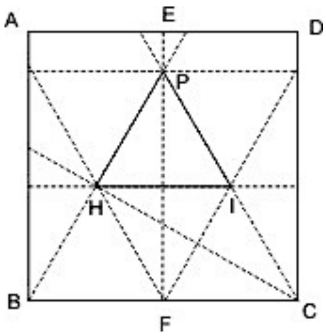
- **Módulo copo é um triângulo isósceles**



Verifique que o triângulo CGF formado é isósceles, pois como $\overline{AC}$ é bissetriz do ângulo reto, o ângulo F$\hat{C}$G mede 45° e $\overline{EC}$ é bissetriz do mesmo. No triângulo CGF temos que $\overline{CP}$ é bissetriz e mediatriz, logo EG = EF e portanto, o triângulo CGF é isósceles.

- **Módulo do triângulo equilátero**

Desfazendo o módulo, temos as seguintes marcas:



Queremos provar que o triângulo HIP é equilátero.

Note que por construção ΔBFP é retângulo em F que é ponto médio de BC = CP.

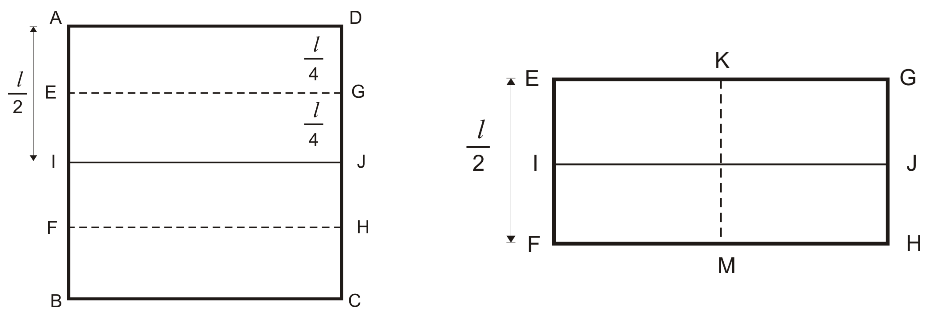
O triângulo FCP, retângulo em F, tem P$\hat{C}$F medindo 60° , pois $\overline{FC}$ é metade do segmento $\overline{PC}$.

Como ΔBCP é isósceles, pois PC = CB, então os ângulos da base $\overline{PB}$ são congruentes e medem 60° , portanto o Δ PCB é equilátero e semelhante ao triângulo PHI, podemos concluir que PHI é equilátero.

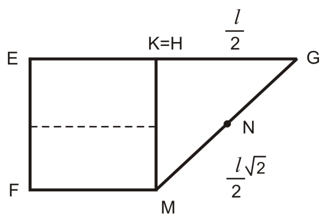
- **Módulo face quadrada – 4**

Considerando o quadrado inicial de lado l, temos:

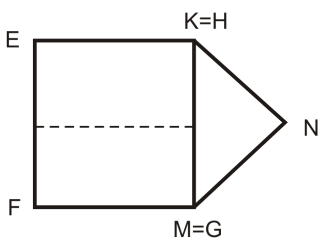
Na 1ª dobra, por construção obtemos AI= l/2 e com a segunda dobra EF = l/2



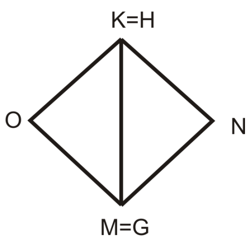
Levando o vertice H até o ponto K, o triângulo KGM é isósceles, pois KG = KM e é retângulo em K. Por Pitágoras, temos que MG=$l\sqrt{2}/2$



Também por Pitágoras, KN = NM = $l\sqrt{2}/4$

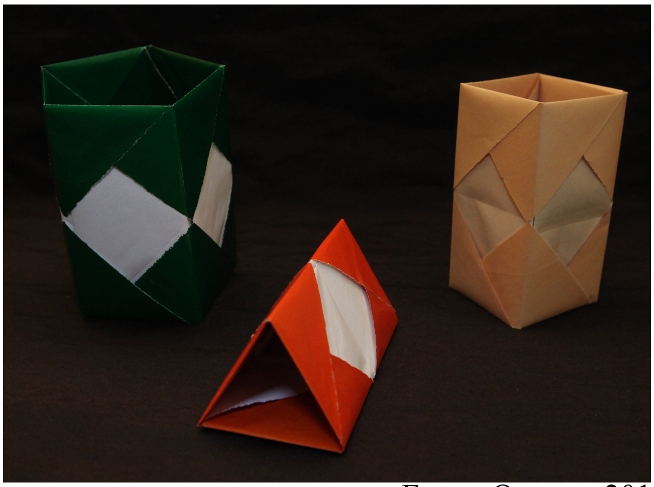


E de maneira análoga repetindo os mesmos passos nos vértices do lado esquerdo, concluímos que KO = OM = KN. Portanto, KOMN é um quadrado.



viii- Alguns sólidos construídos a partir dos módulos

- **Módulo face quadrada 2**

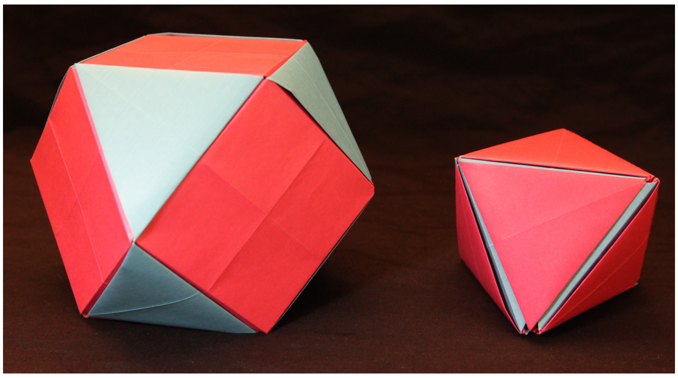


Fonte: O autor, 2015

- **Módulo triângulo euqilátero**

Fonte: O autor, 2015

- **Módulo face quadrada 3 e triângulo equilátero**

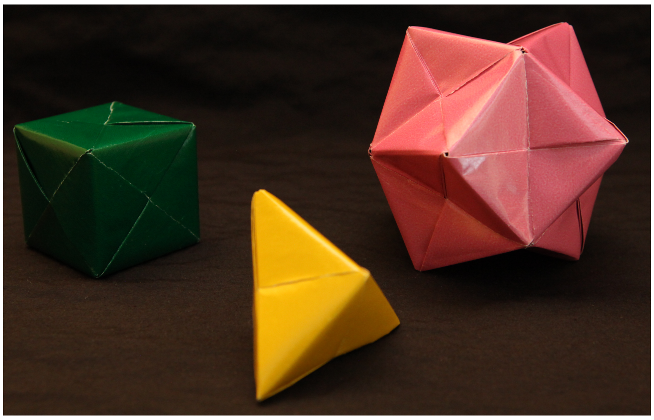


Fonte: O autor, 2015

- **Módulo face quadrada 1**

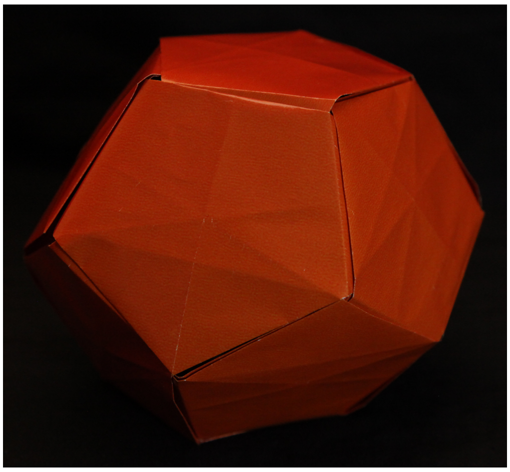
Fonte: O autor, 2015

- **Módulo face quadrada 4**



Fonte: O autor, 2015

- **Módulo face pentagonal**

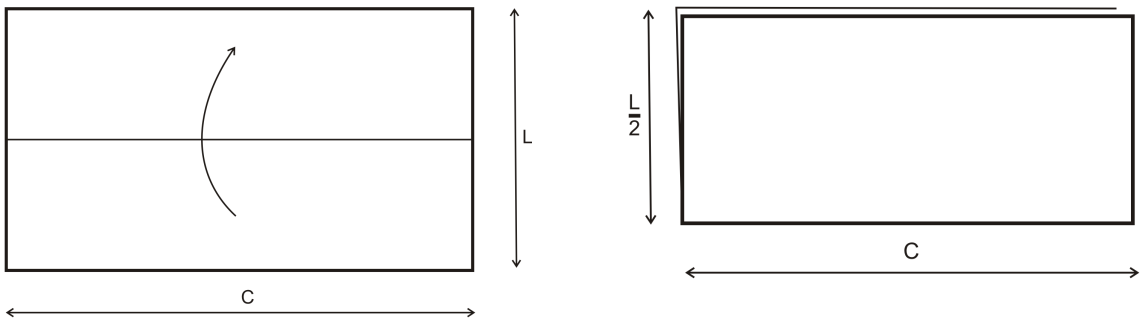


Fonte: O autor, 2015

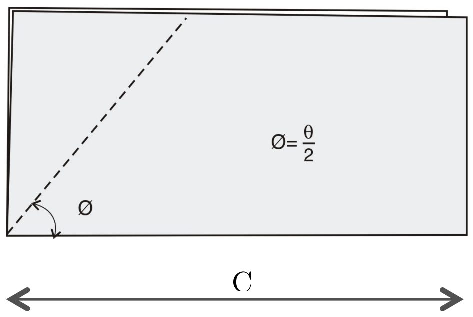
ix - Diagramas para construção das caixas da oficina 3.

Construção da caixa

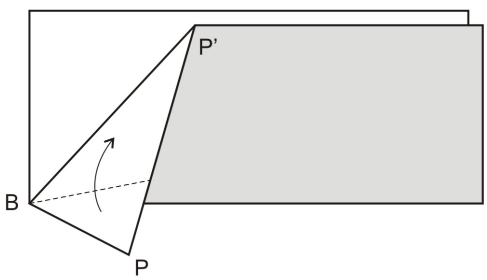
Passo 1: Dobrar a folha retangular ao meio



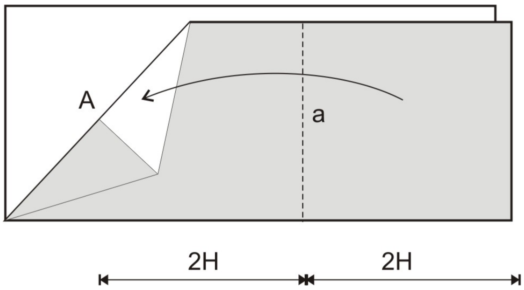
Passo 2: Fazer uma dobra vale determinando o ângulo ø = 30º.



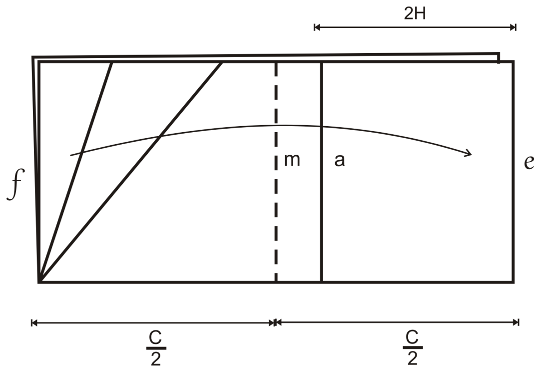
Passo 3: Fazer outra dobra de modo que BP coincida com BP'.



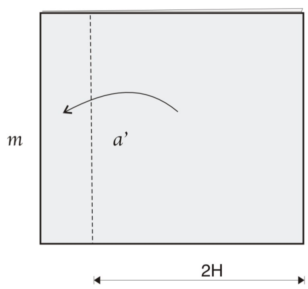
Passo 4: Leve o lado direito até o ponto A determinando a perpendicular “**a**”



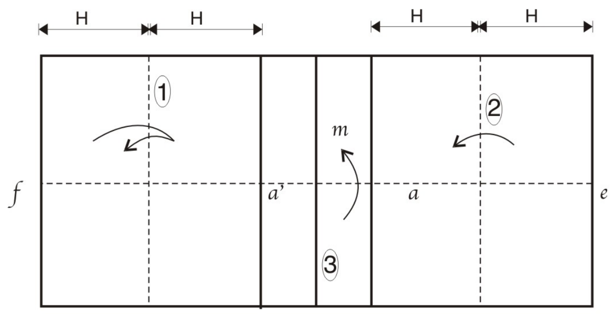
Passo 5: Desfaça as dobras dos passos 2 ao 4. Leve o lado esquerdo até o direito, determinando a metade de C, determinando **“m”.**



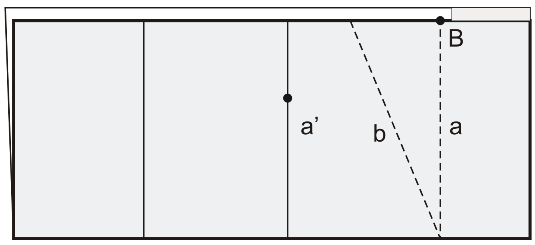
Passo 6: Fazer a dobra vale **a’** alinhado com a dobra **a**.



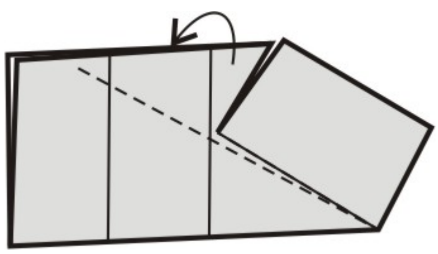
Passo 7: Abra o papel e faça a dobra 1 e desfaça, sucessivamente faça 2 e 3.



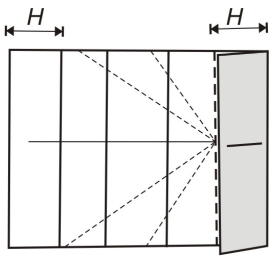
Passo 8: Faça uma dobra montanha **a** e uma dobra vale **c**, usando todas as camadas trazendo o ponto B para a linha **a'** enquanto gira DB no sentido anti-horário sobre o ponto D.



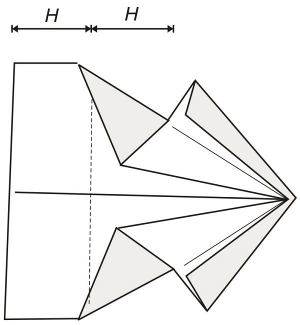
Passo 9: Fazer a dobra montanha indicada



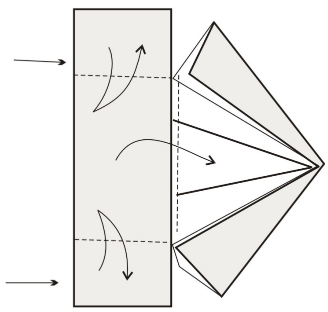
Passo 10: Abra o modelo até a dobra vale 2 do passo 7. Use os vincos existentes para para fazer as dobras montanhas e vales indicadas.



Passo 11: Fazer a dobra vale para formar a parede da base da caixa.



Passo 12: Fazer as duas dobras vale pelos vincos criados.



Passo 13: Esconder as guias dentro dos bolsos e a caixa estará completa.