

Marcelo da Silva Pires

Cônicas: uma abordagem utilizando planilhas eletrônicas

Vitória da Conquista

maio/2015

Marcelo da Silva Pires

Cônicas: uma abordagem utilizando planilhas eletrônicas

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Departamento de Ciências exatas e tecnológicas - DCET

Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Orientador: Dr. Júlio César dos Reis

Vitória da Conquista

maio/2015

Marcelo da Silva Pires

Cônicas: uma abordagem utilizando planilhas eletrônicas/ Marcelo da Silva Pires. – Vitória da Conquista, maio/2015-
108 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr. Júlio César dos Reis

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
Departamento de Ciências exatas e tecnológicas - DCET
Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, maio/2015.

1. Tecnologia. 2. Planilhas eletrônicas. 3. Cônicas. I. Dr. Júlio César dos Reis. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB. III. Cônicas: Uma abordagem utilizando planilhas eletrônicas.

CDU 02:141:005.7

Marcelo da Silva Pires

Cônicas: uma abordagem utilizando planilhas eletrônicas

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

Trabalho aprovado. Vitória da Conquista, maio/2015:

Dr. Júlio César dos Reis - UESB
Orientador

Dr. André Nagamine - UESB
Convidado 1

Dra. Sandra Rêgo de Jesus - UFBA
Convidado 2

Vitória da Conquista
maio/2015

Dedico este trabalho a minha amada família: minha esposa Claudinéia e meus filhos Tales e Ana Emily. Sem o amor de vocês, não chegaria a este momento especial.

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados à Deus que me permitiu chegar aqui, meu sustentáculo e fonte de bênçãos em todos os momentos.

Ao meu orientador Dr. Júlio César dos Reis por sua paciência, incentivo e grande contribuição neste trabalho.

Aos meus pais e toda minha família pelo apoio nas horas difíceis.

Aos meus amigos e colegas pelo incentivo e motivação.

Finalmente, À minha esposa Claudinéia, e filhos Tales e Ana Emily, pela compreensão e amor incondicional.

*Felizes os de conduta íntegra,
que andam na lei do Senhor!
Felizes os que observam suas leis
e o procuram de todo coração.
(Salmos 119 vs. 1-2)*

Resumo

Nesta dissertação é apresentada uma proposta de trabalho em sala de aula para o estudo das cônicas: elipse, hipérbole e parábola utilizando planilhas eletrônicas. Objetivando apresentar ao professor uma ferramenta que possa servir de apoio pedagógico para as aulas de geometria analítica, de forma a tornar as aulas mais dinâmicas, as atividades propostas têm como base a manipulação de planilhas eletrônicas - desenvolvidas no CALC - onde foram implementados os gráficos destas curvas. Por acreditar que o presente trabalho pode atuar promovendo o processo de inserção das tecnologias na sala de aula, neste estudo apresentamos também tutorial para o desenvolvimento das planilhas com todo o passo-a-passo para a construção destas curvas. Além disso, fazemos um breve passeio pela história das cônicas, bem como uma revisão dos seus principais conceitos matemáticos, apresentando seus principais elementos e equações, relacionando com as suas respectivas representações geométricas.

Palavras-chaves: Tecnologia. Planilhas eletrônicas. Cônicas.

Abstract

In this thesis is presented a proposal for the work in the classroom for the study of conics: ellipse, hyperbola and parabola using spreadsheets. Aiming to present for teacher a tool that could serve as a pedagogical support for the classes of analytical geometry, In such a way as to make the classes more dynamic, the proposed activities are based on the manipulation of spreadsheets - developed in CALC - where were implemented the graphics of these curves. Believing that the present work can promote the process of integration of technology in the classroom, in this study we have also presented tutorial for the development of spreadsheets with all the step-by-step for the construction of these curves. Also, we take a brief stroll through history of conics, as well as a review of its main mathematical concepts, presented its main elements and equations, relating with their respective geometric representations.

Key-words: Technology. Spreadsheets. Conics.

Sumário

	Sumário	9
	Lista de ilustrações	11
	Introdução	14
1	A TECNOLOGIA NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM	17
2	USO DE PLANILHAS ELETRÔNICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	23
3	AS CÔNICAS	26
3.1	Um pouco de história	26
3.2	Elipse	28
3.2.1	Elementos da elipse	28
3.2.2	Forma canônica da elipse	29
3.2.3	Elipse com centro fora da origem do plano OXY	30
3.2.3.1	Translação de eixos	30
3.2.4	Equação geral de uma elipse	31
3.3	Parábola	33
3.3.1	Elementos da parábola	33
3.3.2	Equação canônica da parábola com vértice na origem	33
3.3.3	Parábola com vértice fora da origem do plano OXY	36
3.3.4	Caso I: Eixo de simetria paralelo ao eixo OX e foco F à direita da diretriz d	36
3.3.5	Caso II: Eixo de simetria paralelo ao eixo OX e foco F à esquerda da diretriz d	37
3.3.6	Caso III: Eixo de simetria paralelo ao eixo OY e foco F acima da diretriz d	38
3.3.7	Caso IV: Eixo de simetria paralelo ao eixo OY e foco F abaixo da diretriz d	38
3.3.8	Equação geral da parábola	39
3.4	Hipérbole	40
3.4.1	Equação canônica da hipérbole com centro no ponto $O = (x_0, y_0)$	43
4	ATIVIDADES PROPOSTAS	45
4.1	Atividade 01 - Estudo da elipse e seus elementos	45
4.2	Atividade 02 - Estudo da excentricidade da elipse	48
4.3	Atividade 03: Determinando elementos e forma canônica	50
4.4	Atividade 04 - Estudo da elipse com centro fora da origem	51
4.5	Atividade 05 - Estudo da hipérbole	54

4.6	Atividade 06 - Estudo da hipérbole - eixo focal paralelo ao eixo OY	56
4.7	Atividade 07 - Assíntotas da hipérbole	57
4.8	Atividade 08: Estudo da Hipérbole de Centro (x_0, y_0)	59
4.9	Atividade 09 - Elipse X Hipérbole	60
4.10	Atividade 10 - Estudo da parábola	63
4.11	Atividade 11 - O vértice da parábola	64
5	PASSO-A-PASSO: DESENVOLVIMENTO DAS PLANILHAS	67
5.1	Planilha 01: Elipse gráfico	71
5.2	Planilha 02: Planilha: Elipse forma canônica	74
5.3	Planilha 03: Elipse.Elementos	76
5.4	Planilha 04: Planilha Elipse-centro	80
5.5	Planilha 05: Elipse-Excentricidade	83
5.6	Planilha 06: Planilha - Hipérbole forma canônica	86
5.7	Planilha 07: Hipérbole: Eixo focal paralelo ao eixo OY	89
5.8	Planilha 08: Assintota da hipérbole	92
5.9	Planilha 09: Elipse X Hipérbole	95
5.10	Planilha 10: Parábola Eixo focal OY	97
5.11	Planilha 11: Parábola - eixo focal OX	99
5.12	Planilha 12: Hipérbole - centro (x_0, y_0)	100
5.13	Planilha 13: Parábola - vértice não coincidente com a origem	103
	Conclusão	105
	Referências	107

Lista de ilustrações

Figura 1 – Tipos de cônicas	27
Figura 2 – Elipse	28
Figura 3 – Elementos da elipse	29
Figura 4 – Sistema eixos	31
Figura 5 – Parábola: elementos	33
Figura 6 – Parábola: $P : x^2 = 4py$	34
Figura 7 – Parábola: $P : x^2 = -4py$	35
Figura 8 – Parábola: $P : y^2 = 4px$	35
Figura 9 – Parábola: $P : y^2 = -4px$	36
Figura 10 – Parábola $P : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$	37
Figura 11 – Parábola $P : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$	37
Figura 12 – Parábola $P : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$	38
Figura 13 – Parábola: $P : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$	39
Figura 14 – Hipérbole	40
Figura 15 – Excentricidade da hipérbole	41
Figura 16 – Hipérbole-Forma canônica	41
Figura 17 – Assíntotas da hipérbole	43
Figura 18 – Hipérbole reta focal paralela ao eixo OX	43
Figura 19 – Elipse forma canônica	47
Figura 20 – Excentricidade da elipse	49
Figura 21 – Definindo gráfico	50
Figura 22 – Elipse.Elementos	51
Figura 23 – Elipse centro $(x_0, y_0) = (0, 0)$	52
Figura 24 – Elipse centro $(-3, 2)$	53
Figura 25 – Elipse gráfico incompleto	53
Figura 26 – Hipérbole - excentricidade	55
Figura 27 – Hipérbole eixo focal OY	57
Figura 28 – Assíntota - hipérbole	59
Figura 29 – Elipse X hipérbole 01	61
Figura 30 – Elipse X hipérbole 02	62
Figura 31 – Elipse X hipérbole 03	63
Figura 32 – Parábola - eixo OX	64
Figura 33 – Parábola vértices (x_0, y_0)	66
Figura 34 – Parábola vértices $(1, -4)$	66
Figura 35 – Protegendo uma planilha a	68
Figura 36 – Protegendo uma planilha b	69

Figura 37 – Protegendo uma planilha c	69
Figura 38 – Desprotegendo uma planilha a	70
Figura 39 – Desprotegendo uma planilha b	70
Figura 40 – Planilha 01: passo 1 à 4	71
Figura 41 – Planilha 01: passo 10	72
Figura 42 – Planilha 01: passo 12	72
Figura 43 – Planilha 01: passo 21	73
Figura 44 – Planilha 01: passo 23	73
Figura 45 – Planilha 01: passo 25	74
Figura 46 – Planilha 01: passo 26 e 27	74
Figura 47 – Planilha 02: passo 01 e 06	75
Figura 48 – Planilha 02: passo 07-Desproteger célula (a)	76
Figura 49 – Planilha 02: passo 08-Desprotege célula (b)	76
Figura 50 – Planilha 03: passo 24	78
Figura 51 – Planilha 03: passo 45-Inserindo caixa de texto	79
Figura 52 – Planilha 03: passo 48	79
Figura 53 – Planilha 03: passo 49a	80
Figura 54 – Planilha 03: passo 49b	80
Figura 55 – Planilha 04: passo 06a	81
Figura 56 – Planilha 04: passo 06b	81
Figura 57 – Planilha 04: passo 12	81
Figura 58 – Planilha 04: passo 13	82
Figura 59 – Planilha 04: passo 31	83
Figura 60 – Planilha 05: passo 09	84
Figura 61 – Planilha 05: passo 10	84
Figura 62 – Planilha 05: passo 11	85
Figura 63 – Planilha 05: passo 12	85
Figura 64 – Planilha 05: passo 17	86
Figura 65 – Planilha 06: passo 20	87
Figura 66 – Planilha 06: passo 21	88
Figura 67 – Planilha 06: passo 22	88
Figura 68 – Planilha 06: passo 24	89
Figura 69 – Planilha 07: passo 20	90
Figura 70 – Planilha 07: passo 22	91
Figura 71 – Planilha 07: passo 23	91
Figura 72 – Planilha 07: passo 25	92
Figura 73 – Planilha 08: passo 12	93
Figura 74 – Planilha 08: passo 24	94
Figura 75 – Planilha 08: passo 27	94

Figura 76 – Planilha 08: passo 34	95
Figura 77 – Planilha 09: passo 08	96
Figura 78 – Planilha 09: passo 29	97
Figura 79 – Planilha 10: passo 06	98
Figura 80 – Planilha 10: passo 09	98
Figura 81 – Planilha 11: passo 06	99
Figura 82 – Planilha 11: passo 10	100
Figura 83 – Planilha 12: passo 20	101
Figura 84 – Planilha 12: passo 23	102
Figura 85 – Planilha 12: passo 26	102
Figura 86 – Planilha 13: passo 12	104

Introdução

Um dos principais objetivos da matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimulando a criatividade do aluno, bem como desenvolver sua capacidade de assimilar os conteúdos matemáticos. Ocorre que muitos são os problemas de aprendizagem no ensino da matemática e estes problemas não são novos, sendo observados, desde os anos iniciais até o ensino médio. Esta problemática inquieta tanto os professores quanto os alunos. Como professor da Educação Básica, tenho observado que os alunos do ensino médio não têm evoluído no processo de minimizar a dificuldade no aprendizado, isto se deve, entre outros fatores, ao fato da maioria dos alunos estarem alheios ao processo. Além disso, uma grande parcela dos professores ainda trabalha de forma tradicional e conteudista, tratando os conteúdos de forma abstrata e totalmente fora da realidade destes alunos.

Hoje em dia, com o advento tecnológico, todos nós, principalmente nossos alunos, passamos horas por dia envolvidos com algum tipo de tecnologia, seja em casa, no trabalho ou nas ruas. Com todo esse avanço tecnológico em que vivemos, fica fatigante para o professor convencer seus alunos da importância de se aprender a efetuar os cálculos se eles têm acesso às calculadoras que fazem as contas em frações de segundos. Assim, fica o questionamento: por que não inserir essas tecnologias na escola? Esta que deveria ser o ambiente mais democrático e agradável para os nossos alunos! Surge aí duas situações de despreparo: 1. Os alunos que não estão preparados para usar as tecnologias de forma objetiva. [Moran, Masetto e Behrens \(2013\)](#) refletindo sobre o papel do aluno diz:

"A discussão sobre a mediação pedagógica envolve, como já anunciamos anteriormente e como aprofundaremos adiante, uma nova postura do professor. No entanto, isso exige que se trabalhe também uma mudança na postura do aluno.

O desenvolvimento da mediação pedagógica se inicia no trabalho com o aluno, para que esse assuma um papel de aprendiz ativo e participante (não mais passivo e repetidor), de sujeito de ações que o levem a aprender a mudar o seu comportamento. ([MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2013](#), p. 150)

2. E o professor que geralmente tem dificuldade em lidar com tanta tecnologia, não tendo portanto a mesma habilidade que o jovem, que interage diariamente com as novas tecnologias com tanta naturalidade. Segundo [Moran \(2007\)](#).

Os alunos estão prontos para a multimídia, os professores, em geral, não. Os professores sentem cada vez mais claro o descompasso no domínio das tecnologias e, em geral, tentam segurar o máximo que podem, fazendo pequenas concessões, sem mudar o essencial. Creio que muitos professores têm medo de revelar sua dificuldade diante do aluno. Por isso e pelo hábito mantêm uma estrutura repressiva, controladora, repetidora. Os

professores percebem que precisam mudar, mas não sabem bem como fazê-lo e não estão preparados para experimentar com segurança. (MORAN, 2007, p. 162)

Sabe-se que uma parcela dos professores estão, aos poucos, inserindo os recursos tecnológicos na sala de aula, mas como apontou Moran, em geral, há uma insegurança o que por vezes impede que se insira tais recursos no processo de ensino/aprendizagem. É nesse contexto que surgiu a proposta de se trabalhar o desenvolvimento de um material didático com as planilhas eletrônicas objetivando elucidar a questão: como trabalhar com planilhas eletrônicas de forma a contribuir com a construção e o desenvolvimento dos conceitos inerentes às cônicas? Considerando que se trata de um programa há muito difundido, e bastante conhecido, temos a perspectiva de que a insegurança do professor em relação a utilização dessa tecnologia seja minimizada e assim contribuir para a inserção de outras tecnologias por parte do docente. O material consiste de planilhas eletrônicas, em que utilizamos o CALC¹, pode-se também utilizar Excel², onde implementamos as equações das cônicas com suas respectivas representações gráficas. Neste material a proposta é trabalhar manipulando as planilhas, objetivando contribuir com a aprendizagem dos conceitos relacionados às cônicas. Com o apoio da informática, nutrimos a perspectiva de tornar a aula mais dinâmica e interessante para o aluno, contribuindo para que consigam assimilar os conceitos relacionado às cônicas e, ao mesmo tempo, fomentar o interesse pelo uso das planilha eletrônicas de forma a apontar seu potencial prático.

O estudo das cônicas têm vasta aplicabilidade na óptica, na acústica, na engenharia e na arquitetura, como por exemplo, os refletores dos dentistas e as *salas de sussurros das catedrais*³, telescópios, antenas parabólicas, na engenharia de construção de usinas atômicas, pontes, entre outras. Apesar destas aplicações tratar-se de um conteúdo que fica um pouco a margem dos estudos no 3º ano do ensino médio. Aqui na Bahia a atual conjuntura é de apenas 03 (três) aulas semanais da disciplina matemática, tempo insuficiente para o programa do Ensino Médio e, por conseguinte, o professor se vê obrigado a selecionar os conteúdos a serem trabalhados com sua turma. Com uma revisão dos planos de curso e dos livros didáticos indicados vemos que um dos estudos a ficar pelo caminho é justamente o das cônicas. Com o alcance do ENEM⁴, a situação de descaso com o tema se agrava, pois é pouco cobrado neste exame. Isto pode ser observado com uma rápida revisão nas provas aplicadas nos anos de 2010 à 2015, não há uma situação que envolva o estudo das cônicas, temos apenas na prova de 2013 uma parábola abordada na forma de função quadrática, veja as provas pelo link <<http://portal.inep.gov.br/web/>

¹ Calc é um software de planilha eletrônica multiplataforma de código aberto

² Editor de planilhas de código fechado produzido pela Microsoft cujas licenças de uso são pagas

³ Salas especialmente construídas que dão condições acústicas especiais em auditórios, teatros, catedrais

⁴ Exame Nacional do Ensino Médio: prova realizada pelo Ministério da Educação. Ela é utilizada para avaliar a qualidade do ensino médio no Brasil. Seu resultado serve para acesso ao ensino superior em universidades públicas brasileiras, para ganhar bolsa integral ou parcial em universidade particulares e ainda para obtenção de financiamento estudantil.

[nem/edicoes-antiores/provas-e-gabaritos](#)> . É um tema relevante, portanto não deveria ser negligenciado.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. No primeiro, discutimos sobre o uso da tecnologia no processo de ensino/aprendizagem, tendo como objetivo destacar a importância de se trabalhar com tais recursos tentando mostrar que não se pode ficar alheio aos avanços tecnológicos para não nos distanciarmos cada vez mais dos nossos alunos.

No segundo capítulo, fazemos uma breve definição do que seria planilha eletrônica e apresentamos um breve relato do uso das planilhas eletrônicas no ensino da matemática, refletindo sobre as contribuições deste recurso no processo de ensino/aprendizagem, elencando alguns trabalhos relevantes sobre o tema, tentando elucidar suas potencialidades e contribuições para o desenvolvimento do ensino da matemática.

O terceiro capítulo, inicia-se com um breve resumo histórico, na sequência estudaremos os conceitos inerentes as cônicas, focando na relação geométrica de cada cônica com as suas respectivas formas canônicas.

No quarto capítulo, apresentamos uma sequência de 11 (onze) atividades com o uso das planilhas que propomos ao professor aplicar no ensino médio. Em cada atividade elencamos o objetivo e a metodologia apresentando todo um roteiro a ser observado durante a aplicação da atividade.

Por fim, no quinto capítulo, apresentamos um tutorial com todo o passo-a-passo do desenvolvimento de cada planilha de forma que o leitor possa, com um mínimo de conhecimento de planilhas eletrônicas, implementar as planilhas que são necessárias para desenvolver as atividades propostas.

1 A tecnologia no processo de Ensino Aprendizagem

O ser humano desde o seu nascimento, vive numa incessante busca, apropriação, troca e descoberta. O homem esta sempre interagindo com o ambiente ao seu redor, dessa forma aprende coisas novas, este aprendizado e descoberta se dá através do contato com os seus semelhantes e da busca pelo domínio sobre o meio em que vive. Nós viemos ao mundo com o propósito de evoluir, aprender, fazer descobertas e apropriar-se de todos os conhecimentos, desde os mais simples até os mais complexos, isso nos possibilita a garantia da sobrevivência e a participação na sociedade como ser que aspira por novos conhecimentos de forma crítica e criativa. Atualmente, quando se fala em integração com o ambiente, descoberta e domínio do meio em que vive estamos sem dúvidas falando também em aprender, descobrir e dominar as tecnologias.

Vivemos no que se denomina *sociedade da informação* este modelo de organização das sociedades que baseia-se num modo de desenvolvimento da sociedade onde a informação atua como meio de criação de conhecimento, exercendo um papel fundamental na produção de riqueza e qualidade de vida dos cidadãos. Os jovens adquirem vários conhecimentos, através dos novos meios de comunicação, pois eles se reconhecem nesse mundo, eles nasceram neste novo paradigma de sociedade, dessa forma, por vezes, preferem o aconchego do lar, com todas as tecnologias à disposição, à escola que para eles se torna enfadonha e obsoleta. É importante a escola tornar-se mais atrativa para estes alunos e em sintonia com esta *sociedade da informação*.

Diante disso, há uma pressão muito grande sobre as escolas, no que se refere a inserção das tecnologias no processo de ensino. Observa-se isso no ensino fundamental do 6º ao 9º ano e, em especial, no ensino médio. Nossos jovens têm desde cedo acesso a todo tipo de tecnologia: televisão, computador, tablet e principalmente celulares, geralmente com acesso a internet. Moran, Masetto e Behrens (2013) destacam que a relação que se faz hoje com a mídia é prazerosa, é feita através da sedução da exploração sensorial. Os nossos jovens ficam fascinados com tanto apelo, a juventude, hoje, quer estar o tempo todo em contato com os vários tipos de tecnologias. Com o passar do tempo, e o avanço tecnológico, a pressão sobre o professor fica cada dia maior, pois os alunos não querem ficar num ambiente no qual o uso de tais tecnologias é vetado e, para não ter que lutar muito contra isto o professor é compelido a utilizar alguma tecnologia nas suas aulas. Na medida em que o tempo passa e as tecnologias avançam e se diversificam, a pressão aumenta, no entanto, sabe-se que a maioria dos professores não estão preparados para utilizar essas

novas tecnologia na sua aula.

Convém observar que no passado a conjuntura de ensino era o aluno se deslocar até a escola para passar um tempo diário e determinado, onde boa parte dedicava-se a desenvolver as aprendizagens diversas e, conseqüentemente, à sua formação escolar, neste tempo, frequentava a escola aquele que queria ou os pais exigiam por conhecerem a importância da educação na vida dos filhos. Contudo, como observa [Prensky \(2001\)](#) os alunos de hoje não são mais as pessoas para as quais o nosso sistema educacional foi projetado para ensinar e alguns professores assumem que seus alunos são as mesmas pessoas que eles foram no passado e os métodos de ensino que funcionaram quando eles estavam na posição de seus alunos vão funcionar ainda hoje. Nessa perspectiva, a grande preocupação das escolas era levar informação aos alunos, o professor e o livro didático eram os grandes meios para o sucesso do processo de ensino/aprendizagem. Contudo, não é mais possível conceber uma prática pedagógica em que o professor atua como há 20 anos, conhecendo-se a concorrência pela atenção do aluno que é intensa. Hoje vivemos num ambiente altamente tecnológico onde nossos jovens só concebem viver numa cultura digital, se comunicam e se expressam mais digitalmente que pessoalmente. Não é rara as vezes que se usa uma imagem que substitui várias palavras, por exemplo, uma garota consegue expressar seus sentimentos ao enviar uma imagem pelas redes sociais, porém é bem possível que talvez não conseguisse se tivesse que usar as palavras. Sobre isto [Valente \(nov 2007/jan 2008\)](#) comenta:

... as tecnologias digitais estão introduzindo novos modos de comunicação, como a criação e o uso de imagens, de som, de animação e a combinação dessas modalidades. Tais facilidades passam a exigir o desenvolvimento de diferentes habilidades, de acordo com as diferentes modalidades utilizadas, criando uma nova área de estudo, relacionada com os diferentes tipos de letramento. ([VALENTE, nov 2007/jan 2008](#), p. 13)

O desafio, agora posto, é garantir que as tecnologias, se utilizada de forma correta, possibilitem ou potencializem o processo de aprendizagem, não somente, aprender a utilizá-las, mas fazerem-nas atuantes no processo de construção do conhecimento. É importante observar que a cognição de boa parte dos nossos educandos hoje está pautada em mais de um sentido, com efeito, eles estudam com o notebook ligado, navegando, relacionando-se através das redes sociais, com a televisão ligada e ainda conseguem aprender. Porém, de forma alguma, a escola deve se tornar um ambiente desprezioso, um parque de diversões, um local para se mergulhar nas redes sociais e esquecer da vida, [Abreu \(dez 2014/fev 2015\)](#) salienta que se a tecnologia não for bem-ordenada prestará um imenso desserviço aos usuários e que é importante que procuremos compreender suas possibilidades e limitações de seu uso. Observando estes aspectos e considerando que os nossos alunos gostam da tecnologias e sabem utilizá-las, por que não explorar as suas potencialidades? Nessa perspectiva, [Oliveira \(2012\)](#) aponta quatro formas universais de uso do computador

na escola, são elas: instrução programada, simulações, aprendizagem por descoberta e pacotes de aplicativos.

- Instrução programada: nessa forma de uso do computador a máquina é preparada e colocada para “ensinar” conteúdos pré-determinados através de exercícios repetitivos e de demonstrações.
- Simulações: Nessa forma de uso do computador o aluno atua manipulando situações desenvolvidas, o estudante deve manipular as variáveis e observar resultados das suas manipulações.
- Aprendizagem por descoberta: Nessa forma, o aluno é o centro do processo de aprendizagem e aprende no processo exploratório/investigativo – através de uma interação com a máquina.
- Pacotes integrados: Apesar de não ter sido desenvolvido com qualquer objetivo educacional os pacotes integrados (editores de textos, planilhas e banco de dados) se utilizados de forma pensada, são excelentes recursos para o processo de aprendizagem, podendo desenvolver o interesse pela leitura e escrita, desenvolver habilidades ligadas à matemática, física, química, geografia, entre outras.

Contudo, como já dissemos, muitos profissionais da educação que estão em sala de aula evitam fazer o uso das tecnologias em seu trabalho pedagógico, estando inseguros diante dos seus alunos que conhecem e conhecem muito bem as novas tecnologias. Almeida (2000) debatendo sobre a relação dos professores e tecnologia diz:

Mesmo o professor preparado para utilizar o computador para a construção do conhecimento é obrigado a questionar-se constantemente, pois com frequência se vê diante de um equipamento cujos recursos não consegue dominar em sua totalidade. Além disso, precisa compreender e investigar os temas ou questões que surgem no contexto e que se transformam em desafios para sua prática – uma vez que nem sempre são de seu pleno domínio, tanto no que diz respeito ao conteúdo quanto à sua estrutura. (ALMEIDA, 2000)

De fato, o professor deve estar sempre antenado com as novas tecnologias, não é preciso inserir no processo de ensino/aprendizagem cada nova tecnologia que apareça, mas tendo em vista a fascinação por tais tecnologias, torna-se necessário conhecer e utilizar este mundo de inovações em nossas aulas. Quanto ao questionamento que por vezes permeia a mente do professor sobre qual será o seu papel no processo de aprendizagem diante destes novos modelos de educação, penso como Faria (2015) numa perspectiva de que o educador atue como mediador de todo processo de construção do conhecimento, propiciando a interação, a autonomia e a cooperação auxiliando assim na construção do conhecimento. Como cita Almeida (2015).

Ensinar é organizar situações de aprendizagem, criando condições que favoreçam a compreensão da complexidade do mundo, do contexto, do grupo, do ser humano e da própria identidade. Diz respeito a levantar ou incentivar a identificação de temas ou problemas de investigação, discutir sua importância, possibilitar a articulação entre diferentes pontos de vista, reconhecer distintos caminhos a seguir na busca de sua compreensão ou solução, negociar redefinições, incentivar a busca de distintas fontes de informações ou fornecer informações relevantes, favorecer a elaboração de conteúdos e a formalização de conceitos que propiciem a aprendizagem significativa (ALMEIDA, 2015).

Portanto, o questionamento acima não deve intimidar o professor, pois é certo que o papel será o mesmo de sempre - mediador do processo. Desse ponto de vista, hoje é preciso que o professor esteja preparado uma vez que as tecnologias, sobretudo o computador, deverá estar sempre presente nesta mediação. Paralelamente, cabe ao professor desenvolver as competências matemáticas básicas de forma que seus educandos sejam matematicamente competentes o que envolve um conjunto de capacidades, atitudes e de conhecimentos relativo à esta disciplina. Essas competências que todos devem desenvolver ao longo de seu processo de formação inclui, entre outras, o de acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico promovendo o contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento, a fim de se posicionar frente às questões de nossa atualidade e a partir daí utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos. Na medida que o professor insere em suas aulas atividades que atraem a atenção e o interesse dos jovens este pode de fato tomar gosto e adquirir confiança pessoal em desenvolver atividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático. Nesse sentido, é importante que o professor busque se aperfeiçoar e estude o recurso que pretende utilizar, organizando bem a atividade que vai propor para que o aluno não se desvie do objetivo como enfatizam Gladcheff, Zuffi e Silva (2001): *É preciso que o professor defina objetivos e domine bem as atividades que propõe, seja qual for o recurso escolhido para utilizar em sua aula.*

Diante de tudo isso, o professor precisa dialogar com o processo e atuar de forma a desenvolver uma parceria do aluno com o conhecimento, sendo ele quem vai fazer as honras de intermediar este processo. Daga (2006) observa que:

A aprendizagem é um processo de construção do aluno – autor de sua aprendizagem –, mas nesse processo o professor, além de promover a participação, a comunicação, a interação e o confronto de ideias dos alunos, também tem sua autoria. Ele deve atuar como mediador, facilitador, incentivador, desafiador e promotor do processo de aprendizagem do aluno, investigador do conhecimento, da própria prática e do processo de aprendizagem individual e grupal. (DAGA, 2006, p. 33)

Nessa perspectiva, embora o processo de aprendizagem dependa do empenho e energia desprendida do aluno, o professor, nesse processo, é a mola mestra; cabe ao docente, criar ambientes de aprendizagem que favoreçam o processo de interação e participação

do aluno. O professor deve desenvolver atividades que estimulem o envolvimento do aluno, levando-o a uma participação mais ativa através do confronto de ideias, o que é determinante para o desenvolvimento do aluno de forma que adquira novos conhecimentos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

Um aspecto relevante na relação professor-aluno é a criação de um novo ensinar, a instalação de uma nova forma de comunicação educacional, a construção da nova identidade do professor que, de transmissor de informações prontas e de verdades inquestionáveis, torna-se um mediador. No contexto educacional, entende-se a mediação como intervenção do professor para desencadear o processo de construção do conhecimento (aprendizagem) de forma intencional, sistemática e planejada, potencializando ao máximo as capacidades do aluno. (BRASIL, 2000)

Assim, cabe também ao professor orientar os alunos no que se refere ao uso do recurso que pretende explorar, como aponta Faria (2015):

Planejar uma aula com recursos de multimeios exige preparo do ambiente tecnológico, dos materiais que serão utilizados, dos conhecimentos prévios dos alunos para manusear estes recursos, do domínio da tecnologia por parte do professor, além de seleção e adequação dos recursos à clientela e aos objetivos propostos pela disciplina. (FARIA, 2015)

Em decorrência, buscando preparar os profissionais da educação para desenvolverem atividades mediadoras através das tecnologias, os governos têm atuado para oferecer cursos de formações, buscando melhor preparar os professores para a inserção dos diversos recursos tecnológicos em suas aulas, a exemplo, o curso Mídias na Educação: programa de educação a distância, que visa a formação continuada, buscando desenvolver o uso pedagógico das diferentes tecnologias da informação e da comunicação, curso que tem como público alvo os professores da educação básica. Além desses cursos de formação continuada, há também a disponibilização de um aparato de ferramentas e materiais de apoio, como os disponibilizado no portal do professor, <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/index.html>>. Todos estes recursos procuram ajudar os educadores a romper com as antigas práticas, buscando redecorar a atuação do professor, pois hoje diante de grande velocidade que as informações são trabalhadas, é quase impossível manter uma dinâmica de sala de aula numa perspectiva tradicional.

Como foi exposto anteriormente, o grande desafio de ser educador nos dias atuais, é estar a frente de uma sala lotada de mentes inquietas que, em sua maioria pretendiam estar longe dali, preferiam estar dormindo, assistindo televisão imersos nas redes sociais, namorando, enfim, uma grande possibilidade de coisas para fazer, menos estar em uma sala ouvindo um professor tentando falar sobre algo que não querem ouvir. Essa situação é a que se encontra na maioria das escolas públicas do Brasil. Diante de tal situação, os professores se veem na necessidade de se aperfeiçoar, mudar sua práxis pedagógica, afim

de tornar sua aula um pouco menos entediante e enfadonha para esses educandos. Os profissionais de educação buscam especializações, cursos de aperfeiçoamento e até mesmo cursos de mestrado. Sabe-se que alguns estão buscando outras formações desiludidos com a docência.

É importante expor que não há magia no uso do computador e de novas tecnologias, mas, seguramente, no processo educacional o professor tem nessas ferramentas um importante instrumento pedagógico. Sabendo explorar esses recursos na sala e fora dela, o educador será capaz de promover uma aprendizagem muito mais significativa.

Dessa forma, como docentes, devemos estar sempre numa busca incessante de melhorar a forma de trabalhar os conteúdos para que os nossos educandos desenvolvam conhecimentos através da participação e interação, devemos criar condições para que o aluno investigue, discuta, busque, construa hipóteses e assim, se possível, formalize conceitos, visando a apreensão de novos conhecimentos, mesmo que, por vezes, levante hipóteses equivocadas e conceitos errôneos, isto faz parte do aprendizado.

2 Uso de planilhas eletrônicas no ensino de matemática

Planilha eletrônica ou planilha de cálculo é um tipo de programa computacional que utiliza tabelas para realização de cálculos ou apresentação de dados, onde cada tabela é formada de uma espécie por matriz constituída de grade composta de linhas e colunas. As planilhas eletrônicas tem sido há muito tempo utilizadas no ensino de matemática, sobretudo no ensino de funções, elaboração e análise de gráfico e no estudo da matemática financeira. Porém quando falamos em uso de softwares no ensino de matemática, voltamos nosso olhar logo para programas desenvolvidos para tal fim como *Máxima*, *Geogebra*, *Winplot*, *Logo* entre outros. No entanto, penso como [Menezes e Valli \(1997\)](#), além dos softwares desenvolvidos para fins pedagógicos, outros, como as planilhas eletrônicas, são dignos de uso na sala de aula como ferramentas que apresentam grandes possibilidades de uso pedagógico.

Para garantir o sucesso de certa atividade pedagógica, empregando algum tipo de tecnologia, deve-se estar atento que, mais importante que o tipo de tecnologia utilizada, é a adequação à atividade e o uso planejado do instrumento. Além disso, a escolha de se trabalhar com planilha decorre da popularidade do programa e dado que é um software de compreensão relativamente fácil. Ademais, temos várias possibilidades quando queremos trabalhar com planilhas, as livres como CALC da LibreOffice, Calc da OpenOffice e as pagas como Excel ® da Microsoft, esta é mais conhecida e utilizada. O CALC chama a atenção pela qualidade, onde se pode salvar suas planilhas em formato OpenDocument, o novo padrão internacional para documentos de escritório. Este formato baseado em XML significa que o usuário não está preso ao CALC sendo necessário apenas a utilização de programas compatíveis, independente de sistema operacional ou plataforma. Assim, pode-se acessar suas planilhas de qualquer software compatível com OpenDocument, mas se o objetivo é apenas apresentar os seus resultados, então, podemos exportar para Portable Document Format (. Pdf) - não há necessidade de comprar qualquer software extra. Por tudo isso, e principalmente por ser gratuito, o CALC foi o escolhido para ser utilizado nesse trabalho.

Este tipo de software constitui um recurso interessante, criando-se tabelas, utilizando fórmulas prontas ou desenvolvendo fórmulas pode-se explorar muito do recurso de forma a desenvolver o processo dos alunos. [Morgado \(2003\)](#), refletindo sobre a importância do uso das planilhas no processo de ensino/aprendizagem, observa:

As planilhas se constituem num meio dinâmico, pois possibilitam a ma-

nipulação direta sobre as representações matemáticas que se apresentam na tela do computador. É um meio de múltiplas representações do objeto em estudo, como fórmulas, tabelas, gráficos, macros (programas). Além disso, o programa permite a inserção de dados de outros aplicativos. É também um meio propício à modelagem e à simulação, uma vez que se pode explicitar, manipular e compreender as relações entre as variáveis que controlam determinado fenômeno e pode-se explorar qualitativamente as relações matemáticas que são evidenciadas no dinamismo da representação visual. (MORGADO, 2003, P.26)

O processo de apropriação do conhecimento é favorecido por essa ferramenta, pois a criação de uma planilha substitui o processo de cálculo manual ou mental, de forma que podemos chegar a um certo resultado rapidamente. E como a ferramenta pode nos oferecer uma opção de plotar os gráficos dos dados, pode-se analisar visualmente esses dados bem como projetar e inferir resultados, além disso, é possível alterar facilmente estes dados sem que se perca o trabalho anterior. Com as planilhas eletrônicas podemos, de forma rápida, elaborar tabelas e gráficos com qualidade excelente e boa apresentação, o que nos permite dispor de maior tempo para o processo educativo na tarefa de interpretação dos resultados, bem como, testar diferentes hipóteses. ATE AQUI.....

Dentre os trabalhos realizados com planilhas, destacamos a Dissertação de Mestrado: *Cônicas: uma proposta de estudo através de planilhas do Excel* desenvolvida por [Lagdem \(2011\)](#) e *Uso da tecnologia da informática no ensino superior: um estudo da aplicação da planilha eletrônica Excel na disciplina de matemática financeira* trabalho de [Stieler \(2007\)](#).

No trabalho de [Lagdem \(2011\)](#) desenvolveu-se um produto para o estudo de cônicas que incluiu roteiros de aplicação e o programa computacional, onde, utilizando a linguagem de programação Visual Basic for Applications (VBA) – Microsoft [®] Excel, construiu diversas funções e formulários que deram suporte à atividades propostas com o uso associado às planilhas eletrônicas. Na atividade, a autora trabalhou, além dos conceitos das curvas, aspectos históricos e utilidades. Um dos aspectos interessantes deste trabalho foi a apresentação da biblioteca que facilitou os cálculos pouco explorados no ensino atual, tornando o processo mais dinâmico e permitindo que o professor possa transpor o uso de fórmulas ou métodos de forma a explorar características e peculiaridades do tema proposto.

[Stieler \(2007\)](#), através da metodologia da engenharia didática, explorou-se o Excel para introduzir os conceitos de capitalização simples e composta e desconto simples. A preocupação maior do autor foi elaborar atividades em que não houvesse apenas transmissão de conhecimento, mas sim produção de conhecimento. Procurou dar significado aos conteúdos estudados de forma que os principais conceitos de matemática financeira fossem lapidados e consolidados.

No contexto sublime em que vivemos, numa sociedade da tecnologia, propostas de atividades em que se insere recursos tecnológicos no processo de ensino, são de grande

importância, pois mostram para os nossos alunos que estamos atentos com o novo modelo de sociedade. E ao usar planilhas, evidenciamos que tecnologia, às vezes, consideradas obsoletas, são muito poderosas quando observadas, e nos servimos de suas aplicações.

Portanto, a contribuição do uso de planilhas eletrônicas para o processo de ensino/aprendizagem pode ser valiosa desde que o professor esteja preparado, atuando de forma mediadora a oportunizar a integração do aluno com o computador, levando-o a reflexão, a fim de fomentar a construção dos conceitos matemáticos pretendidos. É claro que o professor deve conhecer não só as potencialidades do recurso utilizado, mas também propor atividades que levem o aluno a se servir delas para o desenvolvimento próprio.

3 As cônicas

3.1 Um pouco de história

Segundo (EVES, 1995), o estudo das seções cônicas iniciou-se na busca pela solução do problema da duplicação do cubo¹, um dos grandes problemas da geometria grega, na busca pela solução Hipócrates de Quio² estudando o tema reduziu o problema da duplicação do cubo ao de achar duas meias proporcionais x e y entre 1 e 2. Onde num caso geral, se x e y são meias proporcionais entre a e b , tem-se $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, pode-se chegar a $x^2 = ay$ donde: $\frac{x^3}{a^3} = \frac{a^2b}{a^3} = \frac{b}{a}$ inicia-se assim o estudo das cônicas. Entre 360a.C. e 350a.C., na busca pela solução do problema, Menaecmo³ esboçou a curva expressa por $y^2 = 2ax$, ele percebeu que havia uma família de curvas que poderiam ser obtidas seccionando um cone reto. A solução se daria então através das seções de um cone reto de revolução por planos perpendiculares a alguma das geratrizes, o que definiria a curva como elipse, hipérbole ou parábola seria o ângulo do vértice (agudo, reto ou obtuso, respectivamente), veja figura [1]. Por seu estudo, é atribuído a Menaecmo, a descoberta das seções cônicas. (BOYER, 1974)

Contudo, o primeiro estudo sistemático das cônicas é atribuído ao chamado de *O Grande Geômetra*, Apolônio⁴. Este estudo encontra-se na sua obra principal **As Cônicas**, obra composta por oito livros, dos quais um se perdeu. Neste primoroso trabalho, Apolônio, trata das seções cônicas, promovendo grandes avanços no estudo destas curvas. Apesar das seções cônicas serem conhecidas há mais de um século **As Cônicas** tiveram grande influência no estudo destas curvas (EVES, 1995).

Até Apolônio, como dissemos, cada cônica era seção de um tipo de cone:

- A elipse era obtida a partir de um cone acutângulo;
- A parábola era obtida a partir de um cone retângulo;
- A hipérbole através de um cone obtusângulo.

¹ O problema consiste em determinar a aresta de um cubo de forma que este tenha o dobro do volume de um outro cubo dado

² Matemático grego que viveu entre 460 a.C. e 370 a.C e se estabeleceu em Atenas, onde ensinava. Hipócrates dedicou-se a estudar os problemas clássicos gregos: a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo

³ Matemático da Grécia antiga, discípulo de Eudoxo de Cnido que viveu entre os anos de 380 a.C. a 320 a.C

⁴ Astrônomo e matemático grego da escola de Alexandria, nasceu em Perga na Asia Menor viveu entre 262 a.C. e 194 a.C.

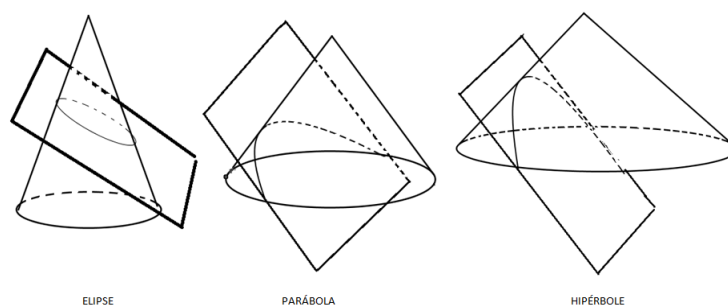


Figura 1: Tipos de cônicas

Uma das mais importantes inovações que Apolônio concebeu para as cônicas foi trabalhar com um cone de duas folhas, com isso, as secções cônicas passaram a ser consideradas da seguinte forma:

- Se um plano intersecta o cone paralelamente a uma geratriz obtêm-se uma parábola;
- Se a intersecção do plano se dá nas duas folhas do cone obtemos uma hipérbole;
- Se o plano corta todas as geratrizes de uma mesma folha obtemos uma elipse.

Dessa forma unificou-se estas cônicas e tornou-as uma família de curvas.

Já no século XVII, o desenvolvimento da geometria analítica, propicia que Fermat⁵ descubra as equações cartesianas da reta e da circunferência, e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole. Ele aplicou uma transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2º grau à sua forma mais simples.

Com a criação da geometria analítica muitos optaram por essa nova metodologia, outros continuaram preferindo a abordagem sintética de Apolônio, então a partir deste século a geometria analítica e a sintética, destas curvas, começam a conviver de forma harmônica. Porém, atualmente a geometria analítica sobrepõe-se à sintética, observa-se ainda fazendo-se uma análise dos livros didáticos, que a abordagem dada às cônicas no ensino moderno é meramente analítica.

Vamos agora rever algumas conceitos e definições sobre a elipse, a hipérbole e a parábola. Como referência para estes conceitos e definições estudamos [Iezzi \(2005\)](#) em Fundamentos da matemática elementar vol. 7 e [Delgado, Frensel e Crissaff \(2013\)](#) Geometria analítica da Coleção PROFMAT. (As imagens foram desenvolvidas com os software *Geogebra* e o *Libreoffice Draw*).

⁵ Matemático e cientista francês, nasceu em Castres, viveu entre 1601 e 1665, Fermat é considerado um dos desenvolvedores da Geometria Analítica.

3.2 Elipse

Definição 1 Dados dois pontos F_1 e F_2 uma elipse ϵ é o conjunto de pontos P do plano tal que a soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a$ (com $a > 0$) maior que a distâncias entre os dois focos $2c$, (com $2c > 0$).

Podemos escrever: $\epsilon = \{P; d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$, com $0 < a < c$ e $d(F_1, F_2) = 2c$.

Assim, se P e Q pertencem a elipse ϵ então $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a = d(Q, F_1) + d(Q, F_2)$, veja a figura [2] abaixo.

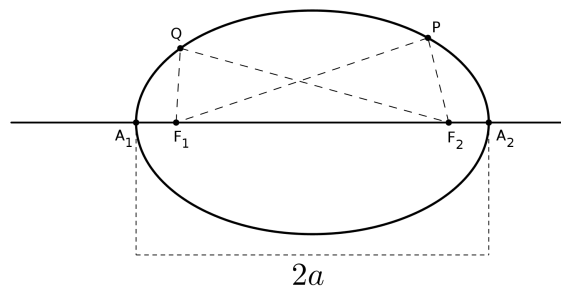


Figura 2: Elipse

3.2.1 Elementos da elipse

Observe a figura [3] nela destacamos os elementos da elipse

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da elipse, a distância entre eles é igual a $2c$, denominada de distância focal;
- O ponto O é o centro da elipse - é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$;
- Os pontos A_1, A_2, B_1, B_2 são os vértices da elipse;
- $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse, com $d(A_1A_2) = 2a$;
- $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse, com $d(B_1B_2) = 2b$.

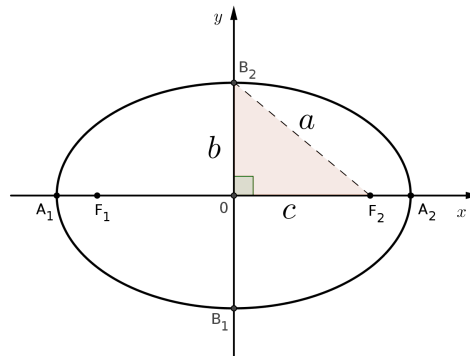


Figura 3: Elementos da elipse

Observe que do triângulo retângulo ΔB_2OF_2 obtemos a relação $b^2 + c^2 = a^2$, veja ainda que, $\overline{B_2F_2} \cong \overline{OA_2}$. Para provar isto observe que $\overline{B_1B_2}$ pertence a mediatriz do segmento $\overline{F_1F_2}$ e daí $d(B, F_1) = d(BF_2) = a$.

Observação: A reta que contém os focos é chamada reta focal e a reta que contém os pontos B_1 e B_2 é chamada reta não focal.

Excentricidade: A excentricidade é dada pelo número $e = \frac{c}{a}$ e indica o quanto a elipse se aproxima de um segmento ou de uma circunferência quando e se aproxima respectivamente de 1 ou de 0.

3.2.2 Forma canônica da elipse

Inicialmente vamos considerar a elipse com centro na origem do plano cartesiano $(0, 0)$ e eixo maior (eixo focal) coincidente com o eixo OX . Como os focos pertencem ao eixo OX temos então que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse, pela definição temos: $d(PF_1) + d(PF_2) = 2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - x^2 - 2xc - c^2$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2xc - 2xc$$

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$$

$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{4a^2 - 4xc}{4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - xc \\ \Rightarrow a^2[(x-c)^2 + y^2] &= (a^2 - xc)^2 \\ \Rightarrow a^2[x^2 - 2xc + c^2 + y^2] &= a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \end{aligned}$$

Organizando e agrupando temos:

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (3.1)$$

Pela relação da elipse $b^2 + c^2 = a^2$ temos $b^2 = a^2 - c^2$ substituindo em 3.1 temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Uma vez que $ab \neq 0$, podemos dividir toda a expressão por ab , daí

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.2)$$

A equação [3.2] é chamada equação reduzida ou canônica da elipse com eixo focal sobre o eixo OX .

Se os focos estão sobre o eixo OY e o centro está na origem, a equação reduzida da elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (3.3)$$

O que se demonstra de forma análoga àquela apresentada para os focos sobre o eixo OX .

3.2.3 Elipse com centro fora da origem do plano OXY

Para estudarmos equação de uma cônica com centro (x_0, y_0) fora da origem do sistema cartesiano vamos rever um pouco de translação de eixos.

3.2.3.1 Translação de eixos

Translatar um eixo é movimentá-lo paralelamente ao sistema OXY , na verdade translata-lo é criar um novo sistema de eixos ordenados, onde o centro passa a ser um ponto $O'(x_0, y_0)$. Se translataremos os eixos ordenados para uma nova origem $O'(x_0, y_0)$, sendo $P(x, y)$ e $P'(x', y')$ as coordenadas de um ponto nos sistemas OXY e $O'X'Y'$ respectivamente, então as equações de translação de coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

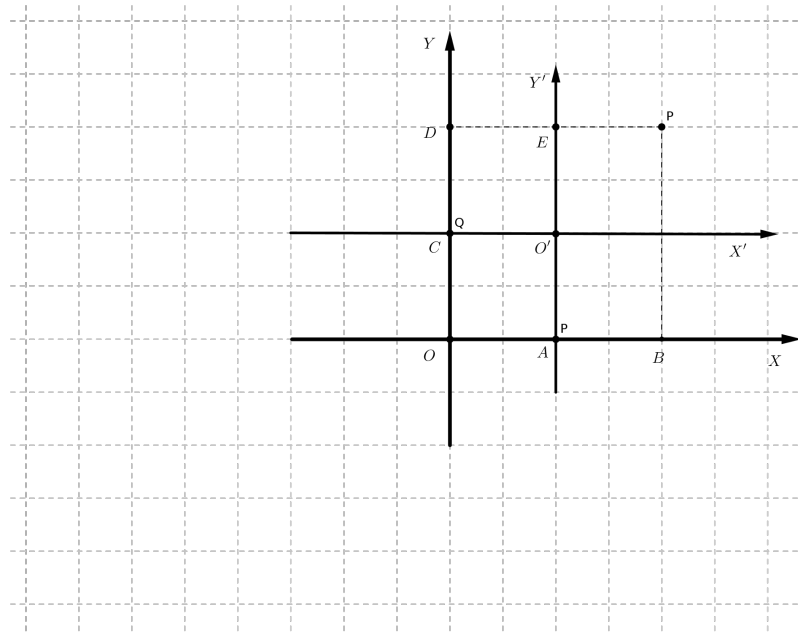


Figura 4: Sistema eixos

Observe na figura [4] acima que:

$$\begin{cases} x = \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = x_0 + x' \\ y = \overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = y_0 + y' \end{cases}$$

donde:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

A equação da elipse num sistema de eixos $O'X'Y'$, com eixo focal paralelo ao eixo OY , é dada por:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad (3.5)$$

Substituindo [3.4] em [3.5] temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.6)$$

Da mesma forma pode-se determinar a equação da elipse com eixo focal paralelo ao eixo OY . Obtém-se então a equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (3.7)$$

3.2.4 Equação geral de uma elipse

Desenvolvendo a equação [3.6] obtemos a expressão

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Fazendo $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$, podemos escrever a expressão assim,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.8)$$

Observe que A e C tem o mesmo sinal e $B = 0$. O mesmo vale para elipses com eixo focal paralelo ao eixo OY com centro no ponto (x_0, y_0) .

Dada a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se A e C tem o mesmo sinal, então a equação pode representar:

- Uma elipse com eixo paralelos aos eixos ordenados
- Um ponto
- Um conjunto vazio

Vejam como determinar a forma canônica de uma elipse à partir da sua equação geral.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.9)$$

Dividindo a equação [3.9] por AC , obtemos: $\frac{Ax^2}{AC} + \frac{Cy^2}{AC} + \frac{Dx}{AC} + \frac{Ey}{AC} + \frac{F}{AC} = 0$, podemos escrever:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}$$

Completando os quadrados temos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} &= -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4C^2A} \\ &= \frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = \frac{-4FAC^2 + D^2C^2 + E^2A^2}{4A^2C^3} \end{aligned}$$

Seja $M = -4FAC^2 + D^2C^2 + E^2A^2$ escrevemos,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = \frac{M}{4A^2C^3} \quad (3.10)$$

Se $M \neq 0$ podemos dividir a equação [3.10] por $\frac{M}{4A^2C^3}$, obtendo,

$$\frac{(x + \frac{D}{2A})^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{(y + \frac{E}{2C})^2}{\frac{M}{4AC^3}} = 1 \quad (3.11)$$

Como $AC > 0$ então a equação [3.11] representa uma elipse com centro em $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C})$, Se $M = 0$ a equação [3.11] representa o ponto $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C})$

3.3 Parábola

Dante (2013) define uma parábola assim:

Definição 2 *Parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de uma reta fixa d , chamada diretriz, e de um ponto fixo F , chamado de foco, com $F \notin d$.*

3.3.1 Elementos da parábola

Observe a figura [5], nela destacamos os elementos da parábola.

- O ponto F , é o foco da parábola;
- A reta d é a diretriz da parábola;
- O ponto V , ponto médio de \overline{FD} distância de F a d é o vértice da parábola;
- A reta que passa por F , perpendicular a d é o eixo de simetria da parábola;
- A medida $\frac{\overline{FD}}{2}$ é o parâmetro p da parábola.

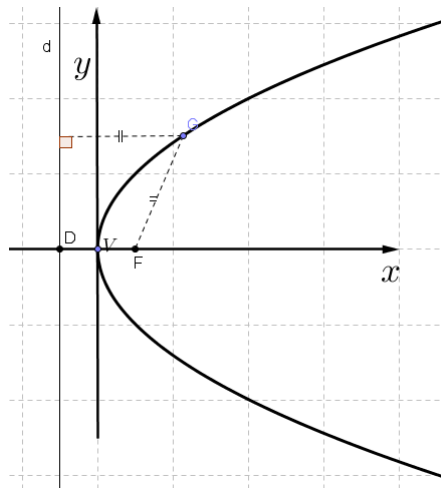


Figura 5: Parábola: elementos

3.3.2 Equação canônica da parábola com vértice na origem

Vamos considerar uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano $V = (0,0)$ e o foco F . Tomando um ponto $P(x,y)$ qualquer da parábola sabemos que a distância entre P e o foco F é igual a distância entre o ponto P e a diretriz d , isto é $d(P, F) = d(P, d)$.

Com o vértice na origem há quatro casos a se estudar.

- 1º Parábola com eixo de simetria sobre o eixo OY e foco acima de V ;
- 2º Parábola com eixo de simetria sobre o eixo OY e foco abaixo de V ;
- 3º Parábola com eixo de simetria sobre o eixo OX e foco à direita de V ;
- 4º Parábola com eixo de simetria sobre o eixo OX e foco à esquerda de V .

1º caso: tomando $F(0, p)$ e diretriz $y = -p$, temos:

$$d(P, F) = d(P, d) \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}$$

Elevando ao quadrado:

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \Rightarrow x^2 - 2yp = 2yp$$

↓

$$x^2 = 4py$$

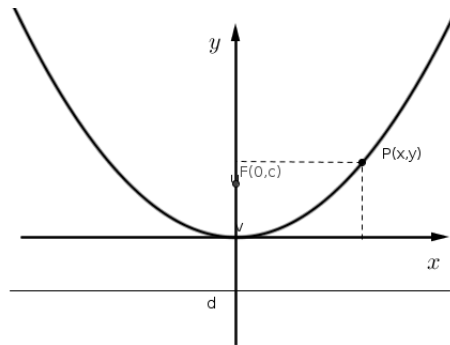


Figura 6: Parábola: $P : x^2 = 4py$

2º caso: temos $F(0, -p)$ e diretriz $y = p$, de forma análoga demonstramos que a equação da parábola é:

$$x^2 = -4py$$

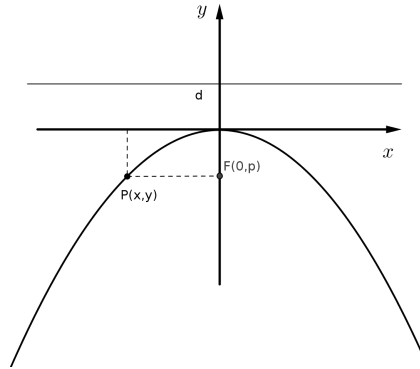


Figura 7: Parábola: $P : x^2 = -4py$

3º caso: tomando o foco $F(p, 0)$ e diretriz $x = -p$

Temos:

$$d(P, F) = d(P, d) \Rightarrow \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \sqrt{(x + p)^2}$$

Elevando ao quadrado,

$$x^2 - 2yp + p^2 + y^2 = x^2 + 2yp + p^2 \Rightarrow -2yp + y^2 = 2yp$$

↓

$$y^2 = 4px$$

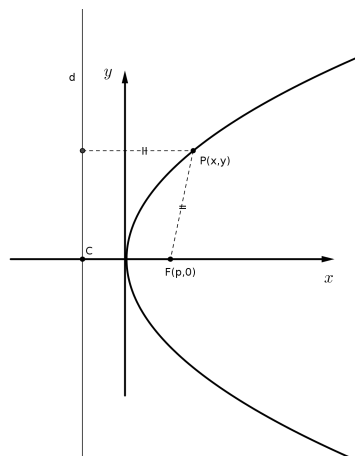


Figura 8: Parábola: $P : y^2 = 4px$

4º caso: temos $F(-p, 0)$ e diretriz $x = p$. Novamente a demonstração é feita de forma análoga a anterior.

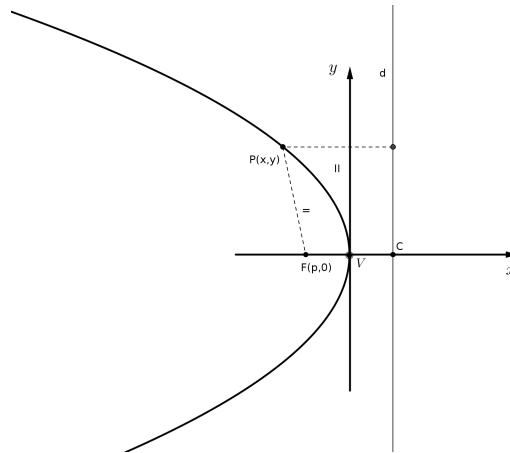


Figura 9: Parábola: $P : y^2 = -4px$

3.3.3 Parábola com vértice fora da origem do plano OXY

Assim como para a elipse, para obtermos a forma canônica de uma parábola P com vértice $V(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, utilizaremos a translação de eixo, criando um novo sistema de eixos $O'X'Y'$, onde as equações de translação de coordenadas são dadas por:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

3.3.4 Caso I: Eixo de simetria paralelo ao eixo OX e foco F à direita da diretriz d

Sabemos que no sistema de coordenadas $O'X'Y'$ a parábola é dada por $(y')^2 = 4p(x')$, figura [10]. A partir das equações de translação acima determinamos a equação da parábola $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$, onde:

- Foco: $F = (x_0 + p, y_0)$;
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$;
- Diretriz: $d = x_0 - p$;
- Eixo de simetria: $y = y_0$.

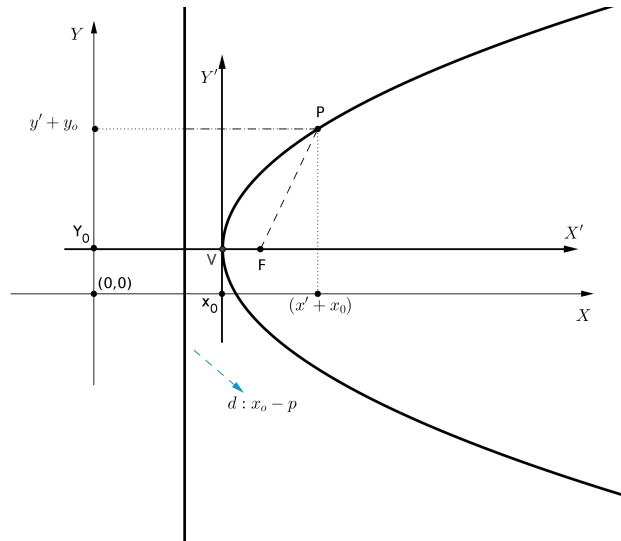


Figura 10: Parábola $P : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

3.3.5 Caso II: Eixo de simetria paralelo ao eixo OX e foco F à esquerda da diretriz d

Sabemos que no sistema de coordenadas $O'X'Y'$ a parábola é dada por $(y')^2 = -4p(x')$, figura [11]. À partir das equações de translação determina-se a equação da parábola $P : (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ no sistema OXY .

Neste caso temos:

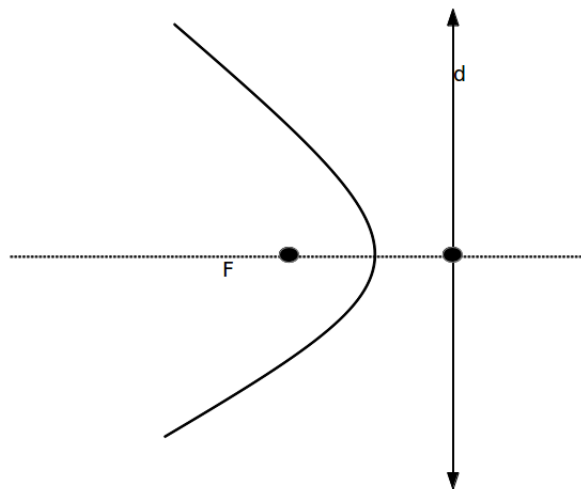


Figura 11: Parábola $P : (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$

- Foco: $F = (x_0 - p, y_0)$;
- Vértice: $V = (x_0, y_0)$;
- Diretriz: $d = x_0 + p$;
- Eixo de simetria: $y = y_0$.

3.3.6 Caso III: Eixo de simetria paralelo ao eixo OY e foco F acima da diretriz d

Neste caso o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$, a diretriz é $d : y = y_0 - p$, o eixo de simetria é $x = x_0$ e a equação da parábola é $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. Veja figura [12].

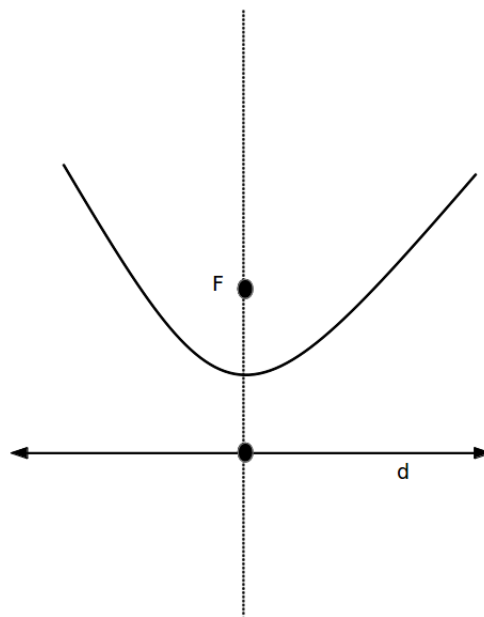


Figura 12: Parábola $P : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$

3.3.7 Caso IV: Eixo de simetria paralelo ao eixo OY e foco F abaixo da diretriz d

Neste caso o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$, a diretriz é $d : y = y_0 + p$, o eixo de simetria é $x = x_0$ e a equação da parábola é $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$, figura [13].

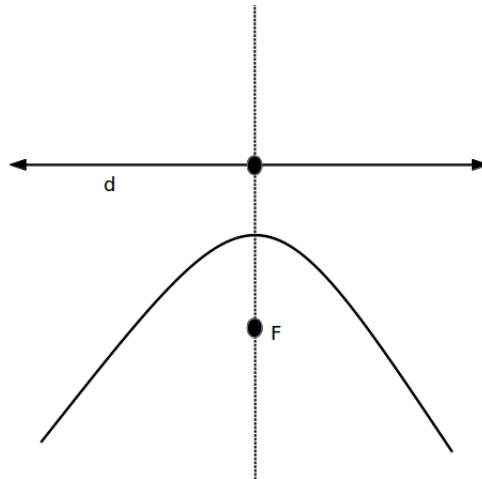


Figura 13: Parábola: $P : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$

3.3.8 Equação geral da parábola

Tomando a equação canônica da parábola $(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$ de vértice $V = (x_0, y_0)$, desenvolvendo temos:

$$y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \pm 4px \mp 4px_0$$

$$y^2 \mp 4px - 2y_0y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0$$

A equação acima é da forma [3.8] $(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0)$, com $A = 0, B = 0, C = 1, D = \mp 4p, E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

De forma análoga pode-se desenvolver a equação $(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)$ obtendo:

$$x^2 - 2x_0x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0$$

Que é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $A = 1, B = 0, C = 0, D = -2x_0, E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

Seja a equação do segundo grau [3.8] com $B = 0$. Se $A = 0$ e $C \neq 0$, então a equação representa:

- Uma parábola com reta focal paralela ao eixo OX , se $D \neq 0$;
- Um par de retas paralelas ao eixo OX , se $D = 0$ e $E^2 - 4CF > 0$;
- Uma reta paralela ao eixo OX , se $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$;
- O conjunto vazio, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF < 0$.

Caso $A \neq 0$ e $C = 0$ temos os mesmos conjuntos com a reta focal paralela ao eixo OY .

3.4 Hipérbole

Definição 3 *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cujo módulo da diferença de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é igual a uma constante, menor que a distância entre estes focos.*

Em notação matemática:

$$H = \{P; |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, 0 < a < c, d(F_1, F_2) = 2c$$

Na figura [14] abaixo destacamos os elementos da *hipérbole H*

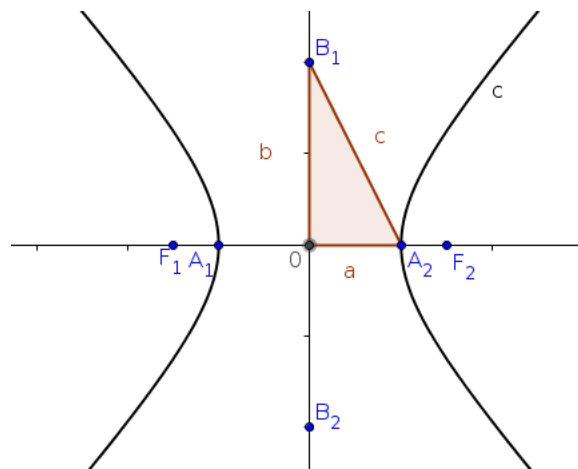


Figura 14: Hipérbole

- Os pontos F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, sendo $\overline{F_1F_2} = 2c$ a distância focal;
- A_1 e A_2 são os vértices da hipérbole, com $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1F_2} - \overline{A_2F_1} = 2a$;
- O ponto O é o centro da hipérbole ponto médio de $\overline{A_1A_2}$ e de $\overline{F_1F_2}$;
- O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da hipérbole onde $e > 1$, pois $c > a$.

Observe que se $\overline{F_1F_1} = 2c$, então $\overline{OF_2} = c$ e como $\overline{A_1A_2} = 2a$, então $\overline{OA_2} = a$, tomando um ponto B_1 , na mediatriz de $\overline{A_1A_2}$, como na figura acima, tal que o triângulo OA_2B_1 seja retângulo em O , observe que $\overline{OA_2}$ mede a e B_1 mede b , assim pelo teorema de Pitágoras temos $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2$.

No que se refere a excentricidade $e = \frac{c}{a}$ temos que:

- 1) Se e for um número próximo de 1, os ramos da hipérbole são mais fechados;
- 2) Quanto maior for o número e , isto é, tender ao infinito, os ramos da hipérbole são cada vez mais abertos.

A figura 15 representa a excentricidade da hipérbole.

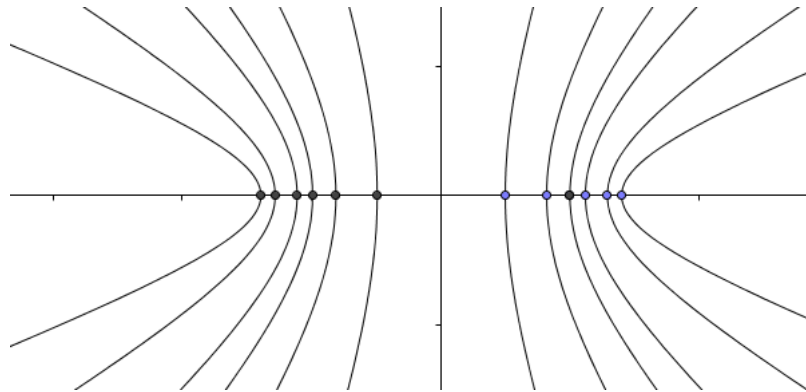


Figura 15: Excentricidade da hipérbole

- Forma canônica da hipérbole centrada na origem do sistema cartesiano

Consideremos a hipérbole, representada na figura 16, com centro O , vértices em $A_1(-a, 0)$ e $A_2(a, 0)$ e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Um ponto $P(x, y)$ qualquer da hipérbole, por definição, deve satisfazer a seguinte condição:

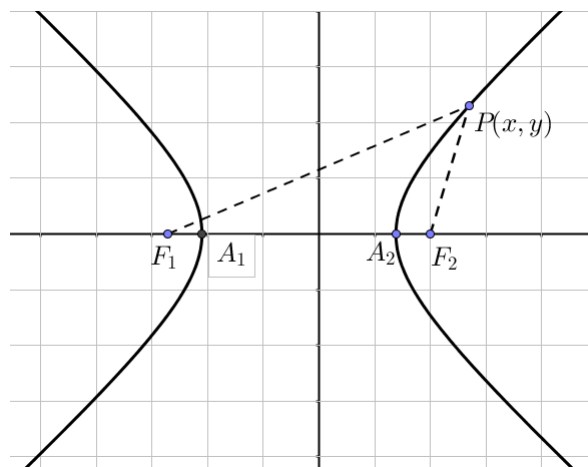


Figura 16: Hipérbole-Forma canônica

$$|d(PF_2) - d(PF_1)| = 2a$$

Como $d(PF_2) = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$ e $d(PF_1) = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$, temos: $|d(PF_2) - d(PF_1)| = 2a$

$$\Rightarrow |\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}| = 2a$$

\Rightarrow

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

\Rightarrow

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 - y^2 - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 = 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Fazendo os cancelamentos temos:

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado, obtemos:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \Rightarrow x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2[x^2 - 2xc + c^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Fatorando temos:

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Mas na hipérbole temos a seguinte relação $b^2 = c^2 - a^2$, substituindo na expressão acima: $x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, como $ab \neq 0$ podemos dividir tudo por a^2b^2 , daí:

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa fórmula é denominada equação canônica da hipérbole que tem focos sobre o eixo x e equidistantes da origem do sistema.

Caso os focos estejam sobre o eixo OY e equidistantes da origem pode-se demonstrar de forma análoga que a forma canônica da hipérbole é dada por

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

- Assíntotas da hipérbole

Observe a figura [17] abaixo. Nela destacamos o retângulo $RSTU$ de lados medindo $2a$ e $2b$ em que os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são os pontos médios dos seus lados.

As retas que contém as diagonais deste retângulo são as assíntotas da hipérbole. Portanto as assíntotas de uma hipérbole são as retas que passam pelo centro da hipérbole com inclinação $\pm \frac{b}{a}$. Para determinar a inclinação basta observar que ela passa pela origem e tem inclinação $m = tg(A_2\widehat{OT}) = \frac{b}{a}$.

As assíntotas são excelentes guias para se traçar o gráfico da hipérbole: o esboço de uma hipérbole pode ser feito traçando-se o retângulo e as retas assíntotas. O ramo de cada hipérbole tem vértice tangente ao lado do retângulo e a curva desta hipérbole se aproxima cada vez mais das assíntotas.

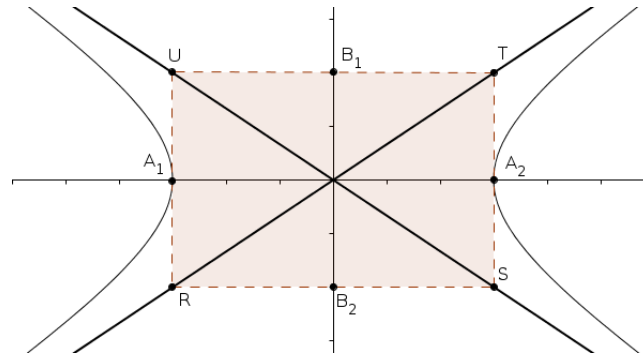


Figura 17: Assíntotas da hipérbole

3.4.1 Equação canônica da hipérbole com centro no ponto $O = (x_0, y_0)$

- **Reta focal paralela ao eixo OX**

Num sistema de eixo $X'O'Y'$ A equação da hipérbole é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \tag{3.12}$$

Sabemos que da translação de eixo que:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Veja figura 18 Substituindo [3.12] em [3.13], temos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

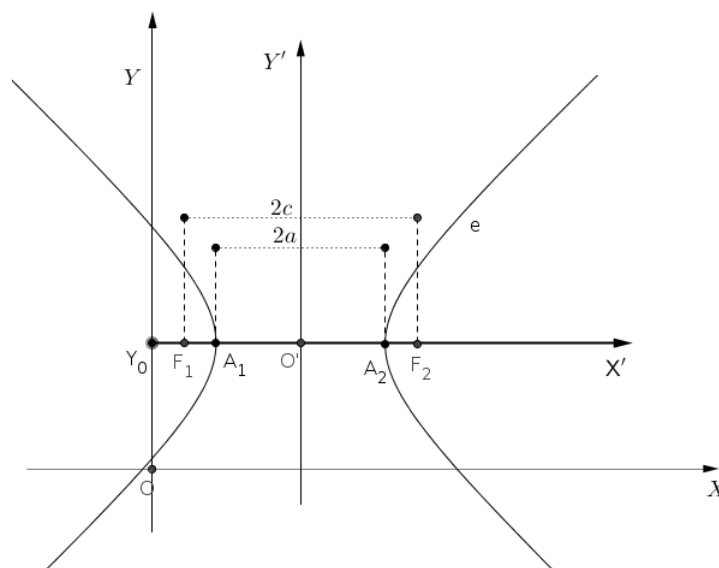


Figura 18: Hipérbole reta focal paralela ao eixo OX

- **Reta focal paralela ao eixo OY**

Adotando um raciocínio análogo ao caso anterior obtemos a equação:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

As assíntotas destas hipérbolas passarão pelo centro $O = (x_0, y_0)$ e terá equação,

$$(y - y_0) = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

caso a reta focal seja paralela ao eixo OX , e equação,

$$(y - y_0) = \pm \frac{a}{b}(x - x_0)$$

caso a reta focal seja paralela ao eixo OY .

4 Atividades propostas

A seguir apresentaremos algumas atividades voltadas à aprendizagem das cônicas onde o papel do aluno não será apenas, ou tão somente, responder exercícios algébricos, é que o professor considere associar situações geométricas com suas formas algébricas, fazer correspondências e estabelecer conexões, como aponta os (BRASIL, 2000): O professor deve desenvolver as seguintes habilidades:

- Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos.
- Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características.
- Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
- Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles. (PCNs, 2000. P.125)

É preciso que o professor trabalhe os conceitos teóricos sobre a geometria analítica, em especial sobre Elipse, Hipérbole e parábola, de forma a levar o aluno a refletir buscando a discussão dos conceitos envolvidos através da interação entre os alunos.

Através da geometria analítica o aluno deve ser capaz de tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. Assim, como já dissemos, o enfoque será em relacionar a sua representação algébrica com a geométrica buscando fazer as interpretações a partir dos modelos geométricos, caracterizando as suas formas algébricas e estabelecendo conexões com situações problemas. As planilhas propostas podem ser desenvolvidas pelo leitor através do tutorial apresentado no capítulo 5 (cinco), onde apresentamos todos os passos para construção de cada uma. Caso não queira, ou ainda não tenha a habilidade para sua construção, o leitor pode fazer download através do link <<http://www.4shared.com/folder/vjlyM20o/PLANILHAS-CNICAS.html>>

4.1 Atividade 01 - Estudo da elipse e seus elementos

A proposta para esta atividade é trabalhar com a elipse e seus principais elementos relacionando a equação geral $Ax^2 + Cy^2 = F$ com a sua forma canônica, dessa forma é importante que os alunos tenham o conhecimento prévio da forma canônica, os parâmetros a e b e eixo focal.

OBJETIVOS

- Relacionar os valores de a^2 e b^2 com a interseção do gráfico da elipse com os eixos cartesianos;
- Determinar a forma canônica de uma elipse a partir da equação geral;
- Associar os valores dos parâmetros a e b com a interseção do gráfico da elipse com os eixos cartesianos;
- Relacionar os parâmetros a com o eixo maior da elipse.

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Para esta atividade o professor deve inicialmente implementar nos computadores a planilha *elipse equação geral/forma canônica*, fica a opção para o professor, como já dissemos, baixar a planilha pronta da internet ou seguir os passos em anexo afim de criar sua planilha, seguindo a roteiro:

- Na planilha, já mencionada, temos a representação de uma elipse na forma de uma equação geral $4x^2 + 25y^2 = 100$, veja figura 19. Solicite aos alunos que efetue as divisões $100/4$ e $100/25$, (caso queira usar a planilha para os cálculos as células das linhas 29, 30 e 31 das colunas J a N estão desprotegidas) e observe os resultados comparando com a forma canônica da elipse; Espera-se que os alunos identifiquem os valores encontrados como a metade das distâncias entre os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$. Eles (os alunos) devem observar que 4 é o coeficiente de x^2 , 25 é o coeficiente de y^2 e 100 é o termo independente, fique atento: para efetuar a divisão $100/4$ na planilha, deve-se digitar $=100/4$, vale o mesmo para quaisquer outras divisões que pretende-se fazer.
- Comparar os valores de a^2 e b^2 com as intersecções do gráfico da elipse com os eixos x e y ; Neste ponto é importante o professor lembrar que esta elipse está centrada no ponto $(0, 0)$.

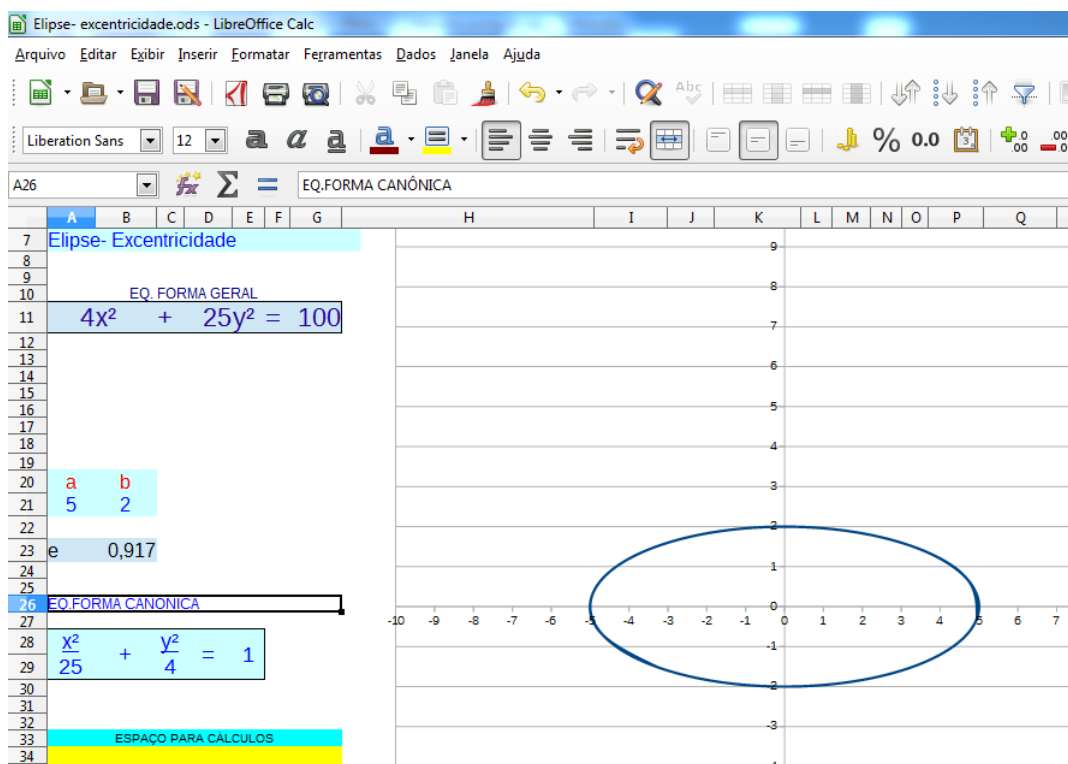


Figura 19: Elipse forma canônica

- Mudar a equação de $4x^2 + 25y^2 = 100$ para $5x^2 + 16y^2 = 80$ alterando dessa forma os valores dos coeficientes de x^2 e y^2 ; Responder as seguintes perguntas:

Qual é o valor a^2 e b^2 agora?

Como você faria para determinar estes valores no seu caderno?

Qual o valor das intersecções da elipse com os eixos OX e OY ?

Sem alterar os valores na planilha, diga em que pontos a elipse $16x^2 + 4y^2 = 64$ interceptará os eixo OX e OY .

- Alterar a equação geral para $x^2 + 5y^2 = 45$, respondendo:

Qual o valor de a^2 e b^2 ?

Quais os pontos de intersecção?

As situações apresentadas acima tem por objetivo levar o aluno a relacionar os valores de a^2 e b^2 com a intersecção do gráfico com os eixos cartesianos e que ele consiga determinar estes valores somente com divisões simples quando a equação é da forma $Ax^2 + Cy^2 = -F$. Veja a questão da Fundação Getúlio Vargas de São Paulo (FGV-SP): Dada uma elipse de equação $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$, quais são as coordenadas dos seus

focos? A questão da FGV pode ser resolvida de forma relativamente rápida seguindo o que se estudou acima. O aluno que entendeu o conceito estudado poderá dividir os coeficientes por 144 determinando a equação canônica, assim encontra $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$ e através da fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ obtêm-se o parâmetro $c = \sqrt{7}$, temos então os focos: $F_1(-\sqrt{7}, 0)$ e $F_2(0, \sqrt{7})$.

Cabe aqui a seguinte observação: É possível, a partir desta planilha, trabalhar eixo focal relacionando a equação geral com o eixo focal, também podemos estudar a excentricidade da elipse – pode-se alterar também o termo independente para analisar a elipse.

4.2 Atividade 02 - Estudo da excentricidade da elipse

Nesta proposta de atividade vamos trabalhar com a excentricidade da elipse relacionando com sua forma canônica e geral será observado também a relação de comparação dos parâmetros a e b com o eixo focal.

OBJETIVOS

- Relacionar os valores de a^2 e b^2 com o eixo focal e o eixo não focal da elipse;
- Estudar a relação entre o valor da excentricidade o "achatamento", ou não, da elipse;
- Verificar que quanto mais próximo de 1 é a excentricidade mais a elipse se aproxima de uma circunferência, e quanto mais próximos de 0 mais a elipse se "achata".

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Para esta atividade o professor deve inicialmente implementar nos computadores a planilha *elipse- excentricidade*, rever a definição de excentricidade é importante também lembrar a equação de uma circunferência, em seguida seguir a sequência de passos abaixo:

- Na planilha temos a representação de uma elipse na forma de uma equação geral $4x^2 + 9y^2 = 100$, como pode ser visto na figura [20]. Solicite aos alunos que observem a forma canônica, os valores de a e b , bem como o valor da excentricidade;
- Alterar a equação geral para $25x^2 + 4y^2 = 100$, peça para observar as mudanças na forma canônica e o valor da excentricidade; respondendo:

Que mudança houve nos valores dos parâmetros a e b ?

Que mudança observou no gráfico da elipse?

Que mudança houve no valor da excentricidade? Por quê?

- Mudar a equação para $30x^2 + 10y^2 = 100$, observar o valor da excentricidade após isto mudar a equação para $30x^2 + 10y^2 = 50$ responder os seguintes questionamentos:

O gráfico mudou?

A excentricidade mudou? Por quê?

Qual será o valor da excentricidade ao mudar a equação geral para $30x^2 + 10y^2 = 200$?

- Alterar a equação para $1x^2 + 100y^2 = 100$, mudando o valor do coeficiente de y^2 para valores cada vez maiores, e responder:

O que muda no gráfico da elipse?

Para qual valor está se aproximando a excentricidade?

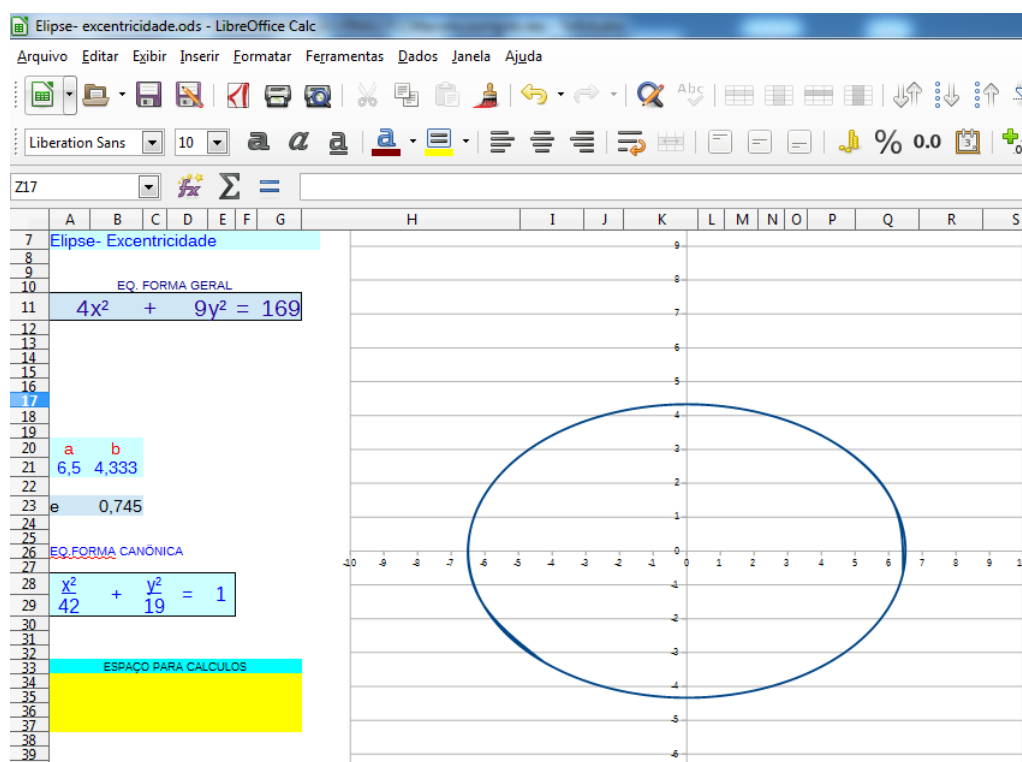


Figura 20: Excentricidade da elipse

A partir da atividade apresentada pretende-se que os alunos reflitam sobre a relação entre o valor da excentricidade e o *achatamento* da elipse. É imprescindível que os alunos saibam que a excentricidade é dada por $e = \frac{c}{a}$, ou seja, o quociente entre a semi-distância focal e o semieixo maior.

4.3 Atividade 03: Determinando elementos e forma canônica

Na atividade proposta abaixo pretende-se levar o aluno a analisar o gráfico de uma elipse de forma a consolidar o que se aprendeu sobre a elipse e seus elementos.

OBJETIVOS

- Relacionar o gráfico da elipse com a sua forma canônica;
- Perceber que a intersecção do gráfico de uma elipse com centro em $(0, 0)$ com os eixos cartesianos determina os seus parâmetros a e b ;
- Associar os focos da elipse com o eixo focal;
- Obter a equação canônica a partir do seu gráfico.

DURAÇÃO

- 30 min

PROCEDIMENTOS

Para esta atividade o professor deve utilizar a planilha *Elipse.Elementos*, iniciar com o **gráfico 1** como indica a figura [21]. Proponha aos alunos seguir o roteiro:

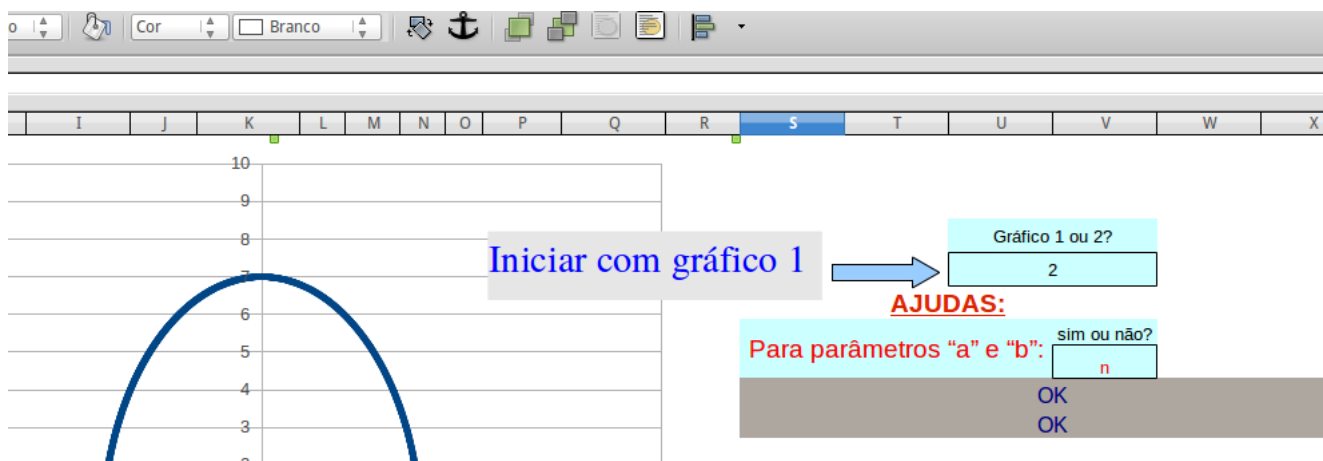


Figura 21: Definindo gráfico

- Preencher as células $B10$ e $B11$ com os valores dos parâmetros a e b ;
- Preencher as células $A17$ e $B17$ com as coordenadas do foco F_1 e $D17$ e $E17$ com as do foco F_2 ;

- Preencher as células A25 e C25 de forma que obtenha-se a equação canônica da elipse representada pelo gráfico.

Observe que na atividade a planilha informa ao aluno se a solução apresentada por ele está correta ou não. O professor deve orientar os alunos que: se precisarem de ajuda eles podem consegui-la indicando com um "sim" a célula indicada para tal ajuda no canto esquerdo da planilha, como pode ser visto na figura [51].

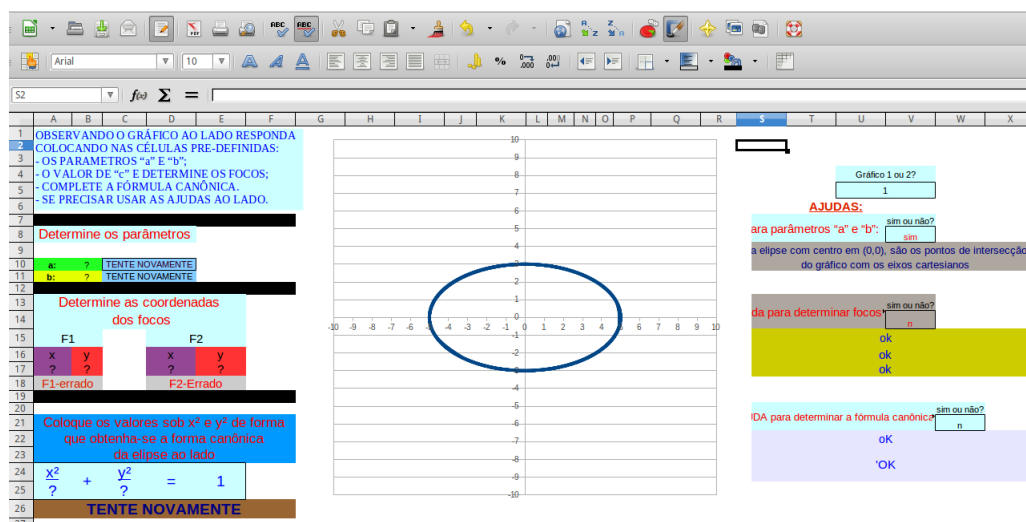


Figura 22: Elipse.Elementos

Respondida as colocações para o gráfico 1 os alunos devem alterar para **gráfico 2** refazendo todos os passos novamente.

4.4 Atividade 04 - Estudo da elipse com centro fora da origem

Na atividade proposta agora vamos estudar a forma canônica da elipse centrada no ponto (x_0, y_0) . Pretende-se, através da visualização do gráfico, ilustrar a translação sofrida pelo gráfico ao se alterar o centro da elipse.

OBJETIVOS

- Relacionar as coordenadas do centro (x_0, y_0) com a translação no gráfico de a^2 e b^2 da elipse;
- Perceber que mudanças nos valores dos parâmetros a e b não altera o centro da elipse;
- Obter a equação canônica a partir do centro e parâmetros a e b ;

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Para esta atividade o professor deve utilizar a planilha *Elipse-centro*, inicialmente com centro $(0,0)$, parâmetros $a = 3$ e $b = 5$, como mostra a figura [23] acima. Proponha aos alunos seguir o seguinte roteiro:

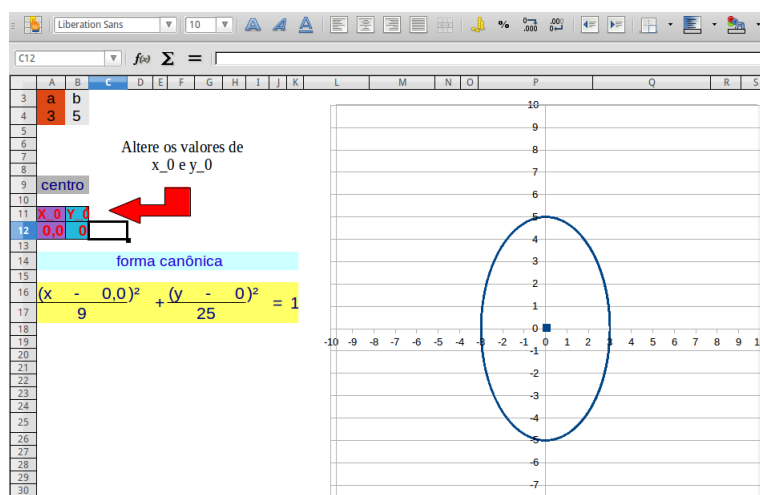


Figura 23: Elipse centro $(x_0, y_0) = (0, 0)$

- Mudar os valores das entradas x_0 e y_0 (coordenadas do centro) para $x_0 = 2$ e $y_0 = 3$. Respondendo: que mudança ocorre no gráfico da elipse?

- Alterar os valores do centro para $x_0 = -3$ e $y_0 = 2$ observando as mudanças no gráfico e na equação canônica e responda:

Que relação há entre os sinais das coordenadas do centro e os sinais de "+" e "-" que aparecem na forma canônica?

- Mudar os valores de $A4$ e $B4$ para 5 e 3 respectivamente, como na figura [24] abaixo e responda;

Qual o efeito das mudanças nos parâmetros a e b ? E no gráfico? Há mudanças no centro da elipse?

Os alunos podem fazer outras mudanças nestes parâmetros desde que fique no intervalo de 1 a 90 por conta da programação feita.

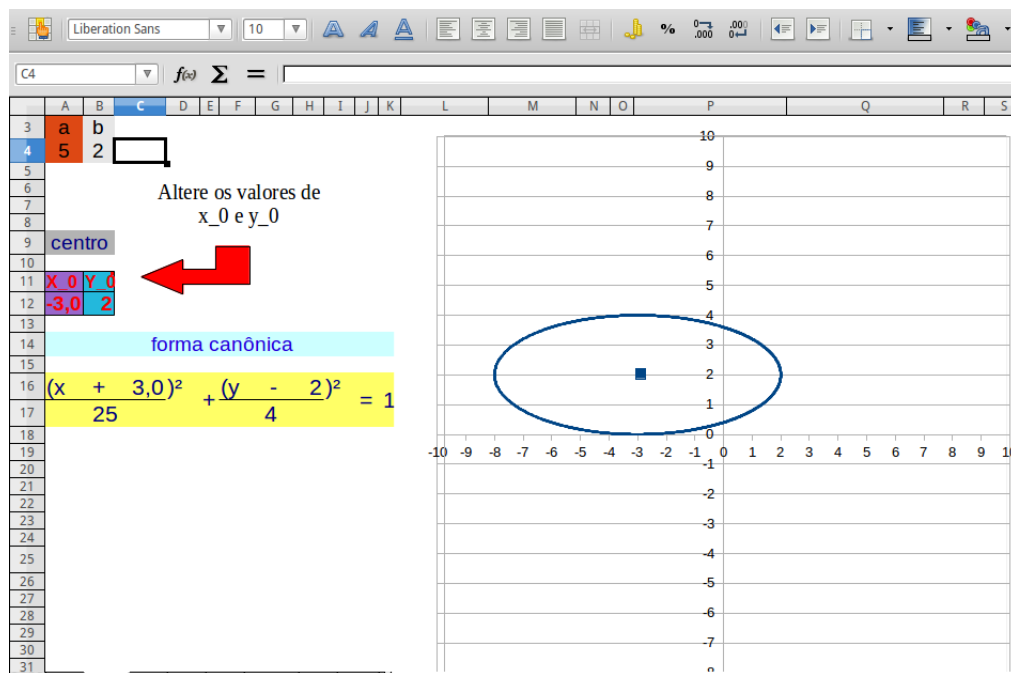


Figura 24: Elipse centro $(-3, 2)$

- Alterar os valores de $A4$ e $B4$ para 20 e 3 respectivamente, veja figura [25] Arguir os alunos: Por que o gráfico está incompleto? Você consegue explicar? O gráfico não representa a elipse da equação?

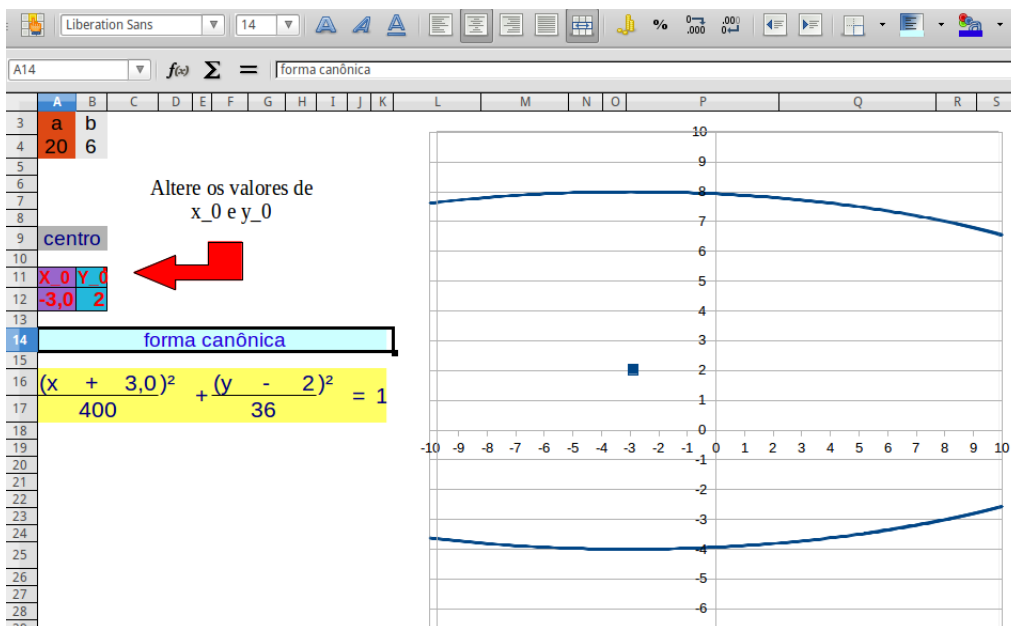


Figura 25: Elipse gráfico incompleto

É importante que os alunos façam outras mudanças nos valores do centro e das células $A4$ e $B4$ que apresentam os valores de a e b . Esperamos que os estudantes percebam

que os valores x_0 e y_0 , observados na forma paramétrica da elipse, representam o centro da elipse com os sinais trocados, além disso, o centro não se altera ao mudar os parâmetros a e b . É oportuno, ainda, que insira valores não inteiros para as coordenadas do centro, inclusive valores irracionais a exemplo de $\sqrt{5}$ e $\sqrt{20}$ entre outros.

4.5 Atividade 05 - Estudo da hipérbole

Uma hipérbole pode ser definida como o conjunto de todos os pontos coplanares para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos (chamados de focos) é constante. Na atividade que propomos agora estudaremos as hipérbolas com eixo focal paralelo ao eixo OX .

OBJETIVOS

- Associar os parâmetros a e b com a representação gráfica da hipérbole;
- Diferenciar as equações canônicas da hipérbole e da elipse;
- Estudar as variações que ocorrem no gráfico de uma hipérbole quando altera-se os parâmetros a e b ;
- Relacionar a abertura dos ramos da hipérbole com a valor de excentricidade;

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Para o estudo da hipérbole apresentamos a planilha *hipérbole - forma canônica*, aqui, como na elipse, pretende-se que o aluno perceba a relação entre os parâmetros a e b com a sua representação gráfica, A fim de se levantar a questão: como se comporta o gráfico com valores maiores ou menores de a e b ? É importante lembrar que o sinal entre $\frac{x^2}{a^2}$ e $\frac{y^2}{a^2}$ é negativo.

Iniciando com $a = 2$ e $b = 3$ deve-se seguir o roteiro abaixo:

- Alterar o valor de a para 1, observando e anotando a modificações que ocorrem no gráfico;
- Mudar o valor de a para $a = 2; 3; 4; 5; 6$ e observa a representação gráfica procurando registrar que variações ocorrem no gráfico;

- Retomar o valor de a para 1 e alterar agora o valor de b fazendo $b = 1; 2; 3; 4; 8$, respondendo: quais alterações foram provocadas no gráfico da hipérbole com essas mudanças?;
- Após os passos anteriores, observações e anotações, os alunos devem escolher uma célula denominá-la *excentricidade*, e na célula ao lado ou abaixo, digitar $= (RAIZ(A5^2 + B5^2))/A5$;

Veja que $A5$ é a célula onde está o valor de a e $B5$ o valor de b figura [??], caso os valores não estejam nas células mencionadas deve mudar a coordenada da célula para a localização correta. Na prática o que está sendo feito aqui nada mais é que $\frac{c}{a}$. Para refletir o professor deve levar os alunos a pesquisar, caso necessário, que valor se determina calculando $\sqrt{a^2 + b^2}$. Feita todas estas reflexões alterar novamente os valores de a e b observando as mudanças no gráfico relacionando com a excentricidade.

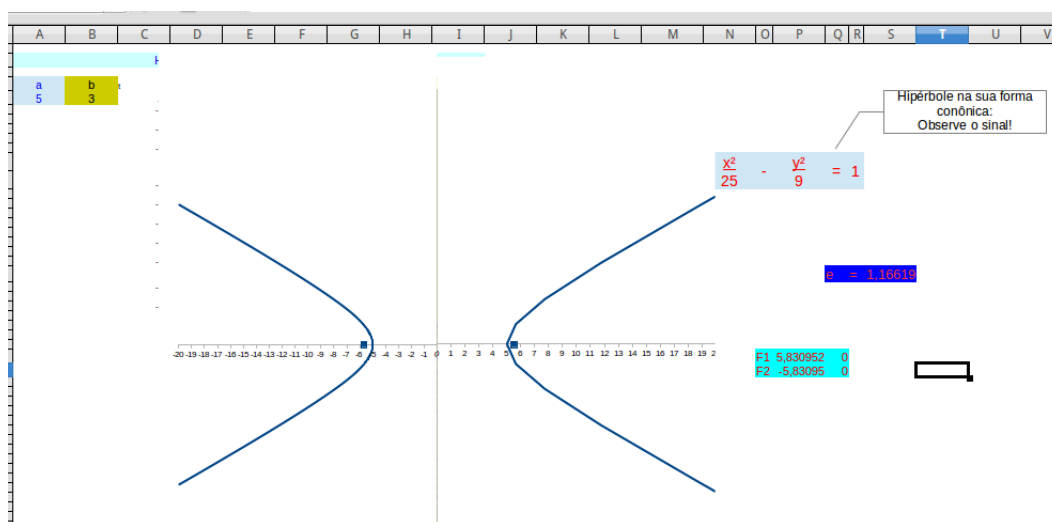


Figura 26: Hipérbole - excentricidade

Após realizar os passos acima os alunos devem responder as seguintes questões:

- Que mudanças ocorrem no gráfico da hipérbole ao se alterar o valor dos parâmetros a ?
- Quando se altera o valor de b o que observa-se no gráfico?
- Por que a excentricidade nunca é inferior a 1?
- Quando a excentricidade fica próximo de 1 como fica o gráfico da hipérbole?
- Mantendo-se o valor de a fixo e aumentando o valor de b a excentricidade aumenta o que ocorre com o gráfico?

4.6 Atividade 06 - Estudo da hipérbole - eixo focal paralelo ao eixo

OY

Esta atividade, ora apresentada, está focada no estudo da hipérbole onde o eixo focal é paralelo ao eixo OY . Neste caso os ramos da hipérbole são como parábolas, uma ramo como parábola com concavidade para baixo e o outro ramo como parábola com concavidade para cima.

OBJETIVOS

- Relacionar os parâmetros \mathbf{a} e \mathbf{b} com a forma canônica da hipérbole com eixo focal sobre o eixo OY ;
- Determinar os focos de uma hipérbole do tipo $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$;
- Estudar as variações que ocorrem no gráfico de uma hipérbole quando altera-se os parâmetros \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
- Relacionar a abertura dos ramos da hipérbole com a valor de excentricidade;
- Associar as mudanças no parâmetro \mathbf{b} com a excentricidade da hipérbole.

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Iniciar com uma rápida introdução dos conceitos de uma hipérbole com eixo focal sobre eixo OY , após analisar as diferenças em relação à hipérbole com eixo focal sobre o eixo OX , o professor apresenta a planilha **hipérbole eixo OY** , inicialmente com $a = 1$ e $b = 2$. Peça para observarem as informações constantes na planilha, veja figura [27], em seguida seguir o roteiro:

- Alterar os valores de a e b para 3 e 5 respectivamente, que mudanças ocorrem no gráfico da hipérbole?
- Alterar os valores de b para 2 em seguida faça mudanças no valor do parâmetro a , para 2; 4; 5; 6;
- Faça $a = 4$, mude o valor de b para 2; 3; 4; 5; 6; 7; 0,5 e 0,1, observando o gráfico e o valor da excentricidade. Procurando responder: Quando as folhas da hipérbole tende a fechar para qual valor tende a excentricidade?

- Selecione a célula com o valor do parâmetro c e observe no campo de entrada que aparece $=RAIZ(A19 + C19)$, relacionar esta entrada com a fórmula $b^2 = c^2 - a^2$, associando o valor de c com as coordenadas dos focos da hipérbole.

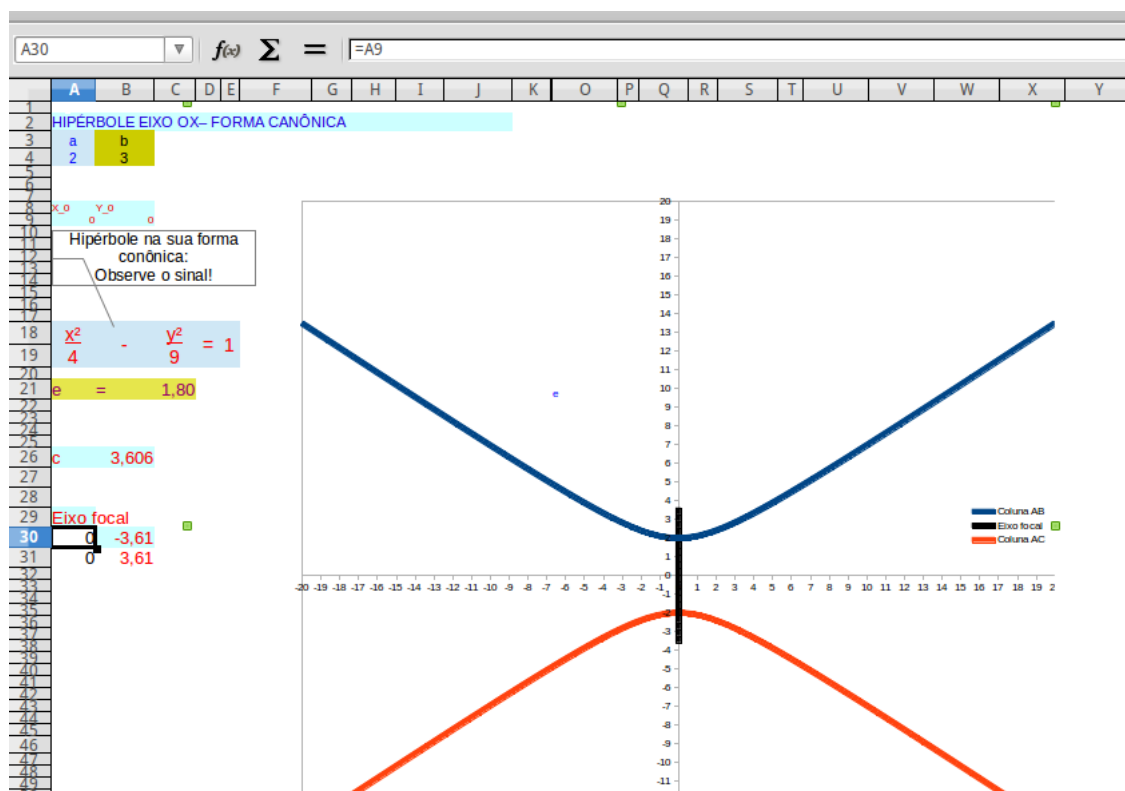


Figura 27: Hipérbole eixo focal OY

Para esta atividade pode-se fazer os mesmos questionamentos feitos para a atividade anterior.

4.7 Atividade 07 - Assíntotas da hipérbole

Conforme já vimos no capítulo anterior a medida que a distância dos pontos de cada ramo da hipérbole aos focos aumenta esses pontos começam a se aproximar de duas retas chamadas *assíntotas da hipérbole*. Na atividade proposta em seguida buscamos levar o aluno a estudar a utilidade dessas assíntotas.

OBJETIVOS

- Conhecer a equação das assíntotas de uma hipérbole;
- Explorar o traço das assíntotas para se esboçar o gráfico de uma hipérbole;

- Estudar que mudanças no gráfico de uma hipérbole ocorrem quando se altera-se o centro e os valores dos parâmetros **a** e **b**;

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Verificar se os alunos têm o conceito de assíntotas, caso contrário, deve-se definir e tentar conceituar assíntotas mas de forma breve. Para a atividade utilizar a planilha *Assíntotas - hipérbole*. A atividade é tomada com os parâmetros $a = 2$ e $b = 2$ e onde está escrito **Gráfico da hipérbole** tem-se a letra **N**, então seguir o roteiro:

- Alterar os valores dos parâmetros a e b , entre 1 e 7, verificando como se comportam as assíntotas;
- Com os valores de $a = 2$ e $b = 2$ pedir aos alunos para imaginarem como seria o gráfico da hipérbole;
- Alterar de **N** para **S** a entrada da célula B36 (**Gráfico da hipérbole**) observando agora como efetivamente é o gráfico com $a = 2$ e $b = 2$;
- Voltar o valor da célula B36 para **N** em seguida alterar o valor dos parâmetros a e b com valores entre 1 e 7 e a cada mudança mudar a célula **Gráfico da hipérbole** observando como as assíntotas ajudam a traçar os ramos da hipérbole;
- Fazer $a = 0,5$; $b = 2$ e $a = 1$; $b = 0,5$. Ora apresentando o gráfico da hipérbole ora ocultando o gráfico da hipérbole. Veja figura [28].

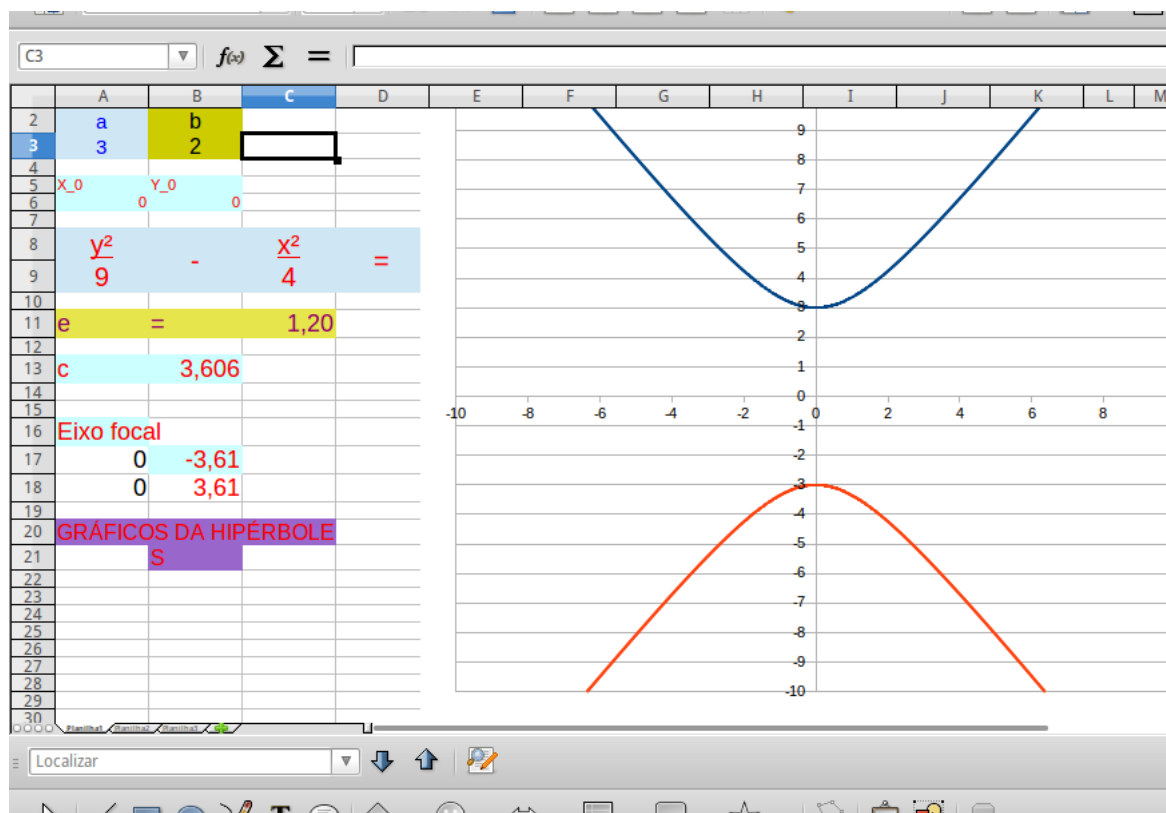


Figura 28: Assíntota - hipérbole

4.8 Atividade 08: Estudo da Hipérbole de Centro (x_0, y_0)

Iniciar com uma rápida introdução dos conceitos de uma hipérbole com centro diferente de $(0,0)$, feito isso apresentar a planilha *Hipérbole - centro (x_0, y_0)*

OBJETIVOS

- Identificar na equação canônica as coordenadas do centro de uma hipérbole;
- Relacionar as mudanças na coordenada x_0 com a translação horizontal no gráfico da hipérbole, verificando que esta mudança não interfere na abertura da mesma;
- Relacionar as mudanças na coordenada y_0 com a translação vertical no gráfico da hipérbole, verificando que esta mudança não interfere na abertura da mesma;
- Observar que as variações nos parâmetros a e b não interferem nas coordenadas do centro da hipérbole;

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Para esta atividade deve-se usar a planilha *Hipérbole - centro* (x_0, y_0) . Inicialmente com parâmetros $a = 2$, $b = 3$, $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$, deve-se propor o seguinte roteiro para os alunos:

- Alterar os valores de a e b para 3 e 5 respectivamente;
- Alterar os valores de x_0 e y_0 para -1 e 1 respectivamente;
- Mudar o valor de x_0 para 3; 4; 5; -1 ; -2 e 6. Anotando o que observa no gráfico;
- Fixar o valor de $x_0 = 1$, alterar os valores de y_0 para -4 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 e 4 . O que isso altera no gráfico?
- Peça para os alunos definirem uma coordenada para o centro (x_0, y_0) e depois faça variações nos valores dos parâmetros a e b observando as alterações promovidas no gráfico.

A partir das variações feitas os alunos devem responder as seguintes proposições:

- Que mudanças ocorrem no gráfico da hipérbole ao se alterar os valores dos parâmetros a e b ?
- Quando se altera o valor de x_0 o que observa no gráfico? E quando se muda o valor de y_0 ?
- O centro da hipérbole interfere na abertura desta hipérbole?

Após esta atividade questione seus alunos se eles seriam capazes de identificar na forma canônica da hipérbole as coordenadas do centro. Peça para que eles façam um esboço da hipérbole com as coordenadas $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$. Como vimos no capítulo anterior a equação reduzida da hipérbole com centro na origem do plano cartesiano e focos sobre o eixo Y será:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

4.9 Atividade 09 - Elipse X Hipérbole

Se na equação geral $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ os coeficientes A e C tem o mesmo sinal então a equação representa uma elipse com eixos paralelos ao sistema cartesiano, um ponto ou um conjunto vazio. Caso A e C tenham sinais opostos então a equação representa uma hipérbole com eixo paralelos aos eixos coordenados ou um par de

retas concorrentes. Quando a equação está representada na forma canônica o que diferencia uma elipse de uma hipérbole é apenas um sinal. É o que vamos ver na atividade proposta.

OBJETIVOS

- Diferenciar a forma canônica da elipse com a forma canônica da hipérbole;
- Estudar a diferença entre os parâmetros b da elipse e da hipérbole;
- Observar a diferença entre os focos da elipse e da hipérbole;

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Inciar a aula sondando os alunos sobre os seus conhecimentos sobre as formas canônicas e sobre os parâmetros a e b tanto da elipse quanto da hipérbole. Para esta atividade será utilizada a planilha *Elipse X Hipérbole.ods*, peça aos alunos para abrirem a planilha e seguir o roteiro:

- Os alunos devem verificar se $a = 2, b = 2$ e se o sinal indicado, como na figura [29] abaixo está -;

3			
4	a	b	
5	2	2	
6			
7			
8			
9			
10	Forma canônica - Elipse ou Hipérbole?		
11	Mude o sinal "-" ou "+"!		
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18	$\frac{x^2}{4}$	-	$\frac{y^2}{4} = 1$
19			
20			
21			

Figura 29: Elipse X hipérbole 01

- Os alunos devem mudar os parâmetros a e b . Não defina valores, recomende que fique no intervalo de 1 a 9; observando as mudanças que ocorrem no gráfico;
- Peça para mudarem o sinal indicado, como na figura [29] acima, para $+$. Que mudança ocorre no gráfico?;
- Mantendo o sinal $+$ alterar os valores dos parâmetros a e b ; Que mudanças observa-se no gráfico?;
- Fixando alguns valores para os parâmetros a e b alterne o sinal em $+$ e em $-$ observando as coordenadas dos focos, veja figuras [30] e [31]; O que se pode dizer sobre as coordenadas dos focos de uma elipse e de uma hipérbole?

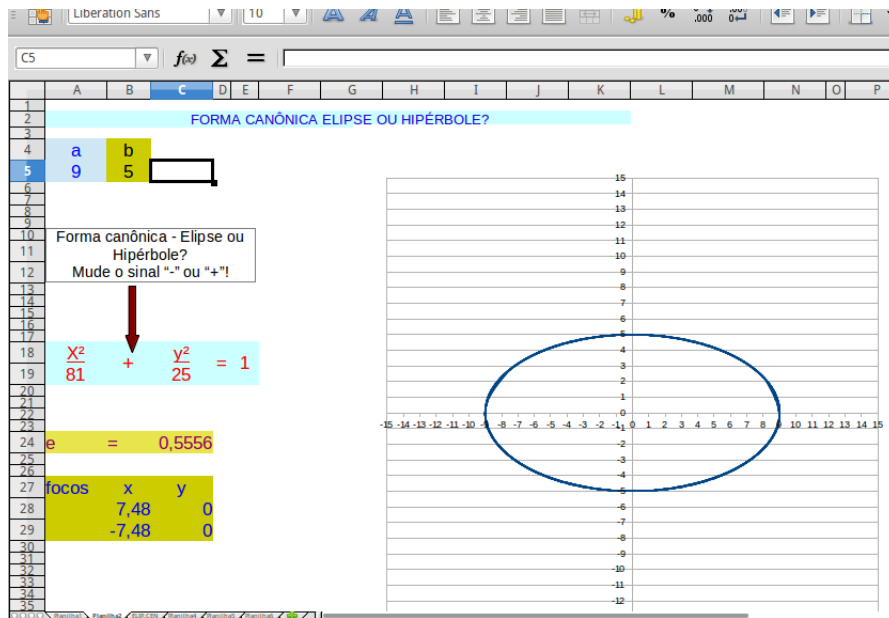


Figura 30: Elipse X hipérbole 02

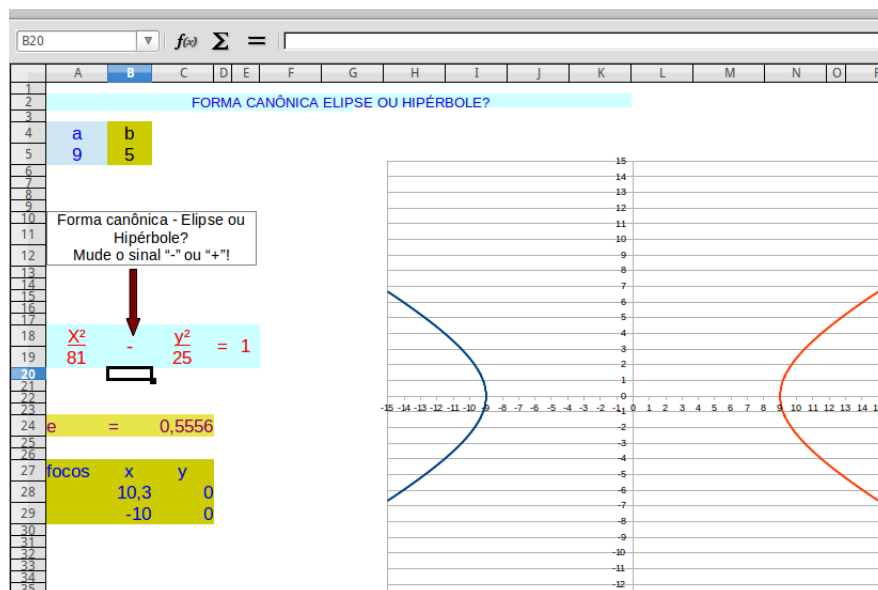


Figura 31: Elipse X hipérbole 03

4.10 Atividade 10 - Estudo da parábola

Para o estudo da parábola iniciaremos com uma atividade que visa estudar o comportamento do gráfico da parábola ao se alterar o parâmetro p da equação $y^2 = 4px$ que tem eixo de simetria coincidente com eixo OX . Em seguida faremos mesma análise para equação $x^2 = 4py$ que tem eixo de simetria coincidente com eixo OY .

OBJETIVOS

- Estudar a variação no gráfico da parábola quando se altera o módulo do parâmetro p ;
- Relacionar o sinal do parâmetro p com a concavidade da parábola;
- Analisar o comportamento e a representação gráfica da parábola quando o parâmetro p se aproxima de zero;

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Ao iniciar a aula retomar com os alunos os conceitos relacionados à parábola principalmente no que se refere a sua forma canônica e a sua relação com o parâmetro p . Veja figura [32]

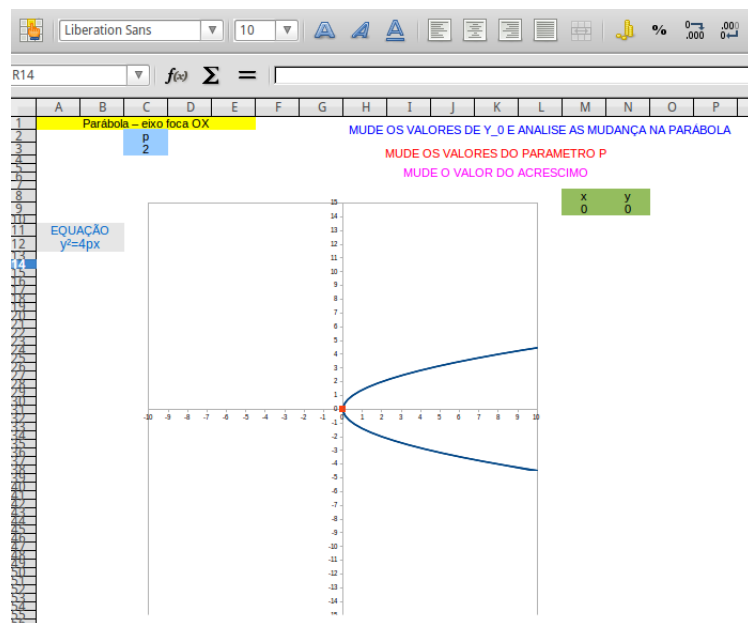


Figura 32: Parábola - eixo OX

Após ter a planilha *Parábola - eixo de simetria OX* salva nos computadores seguir o roteiro abaixo:

- Os alunos devem mudar o valor de p , faça $p = 2, p = 3, p = -2, p = -4, p = 7, p = 9$ e finalmente $p = 20$, anotar as observações e a que conclusões chegaram a partir das mudanças;
- Mudar o valor de p para $0, 2; 0, 5; -0, 3; 6, 5$ e $3, 2$;
- Abrir a planilha *Parábola eixo de simetria OY* e para esta refazer os dois passos anteriores;

Assim que realizar os passos acima tentar responder as seguintes questões:

- O que se observa no gráfico quando aumenta-se o módulo de p ?
- Que mudança temos se fazemos $p = m$ e em seguida $p = -m$?
- Como se comporta a representação gráfica da parábola quando fazemos o parâmetro p se aproximar de zero?

4.11 Atividade 11 - O vértice da parábola

Nesta atividade pretende-se que os alunos assimilem o conceito de vértice de uma parábola. E reforce o estudo sobre a relação do parâmetro p com a representação gráfica da parábola.

OBJETIVOS

- Relacionar as coordenadas do vértice com a forma canônica da parábola;
- Relacionar as coordenada x_0 com a translação horizontal no gráfico da parábola;
- Relacionar as coordenada y_0 com a translação vertical no gráfico da parábola;
- Estudar as variações gráficas à partir da mudança de sinal no parâmetro p .

DURAÇÃO

- 1h/aula

PROCEDIMENTOS

Após ter a planilha *Parábola - vértice não coincidente com a origem*. salva nos computadores os estudantes devem seguir o roteiro abaixo:

- Começamos pedindo para que os alunos verifique se as coordenadas são $x_0 = -1$ e $y_0 = -1$ e o parâmetro $p = 1$, feito isso peça aos alunos que mudem o valor de x_0 para 2 e anotem quais mudanças são observadas;
- Mudar o valor de y_0 , fazendo $y_0 = -3$, $y_0 = 2$ e $y_0 = 1$. Anota-se o que observou;
- Mantendo o valor de y_0 em 1, alterar o valor de x_0 para $x_0 = -3$, $x_0 = 1$ e $x_0 = 5$. Anotar as observações que achar relevante;
- Refazer as mudanças dos passos anteriores agora observando também a equação da parábola;
- Mudar o valor de y_0 , fazendo $y_0 = -3$, $y_0 = 2$ e $y_0 = 1$ e para cada situação alterar o valor do parâmetro p para 2, 3, -1 e -3 ;
- Mantendo o valor de y_0 em 1, alterar o valor de x_0 para $x_0 = -3$, $x_0 = 1$ e $x_0 = 3$ e para cada situação alterar o valor de p para -1 , 2 e -2 ;

Assim que realizar os passos acima tentar responder as seguintes questões:

- O que se observa no gráfico quando altera-se o valor de y_0 ? E o de x_0 ?
- Com se apresenta na forma canônica o valor da coordenada do vértice (x_0, y_0) ?
- Mudanças no valor do parâmetro p altera as coordenadas do vértice?
- Mudanças no valor da coordenada e do vértice altera a abertura da parábola?

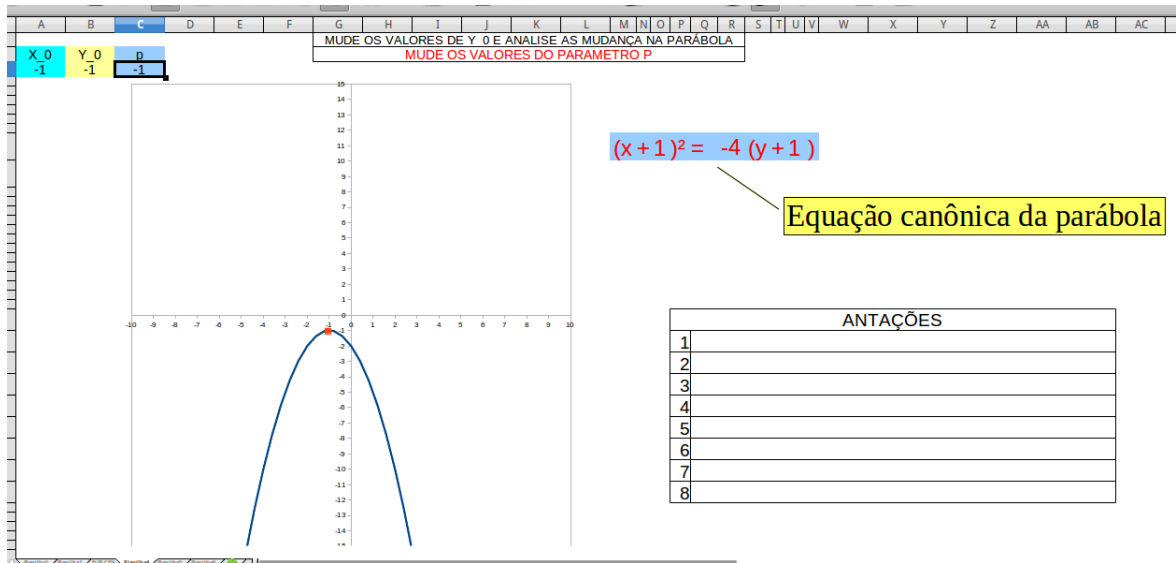


Figura 33: Parábola vértices (x_0, y_0)

A figura [34] representa a situação em que faz-se $x_0 = 1$ e $y_0 = -4$ mantendo-se $p = -1$

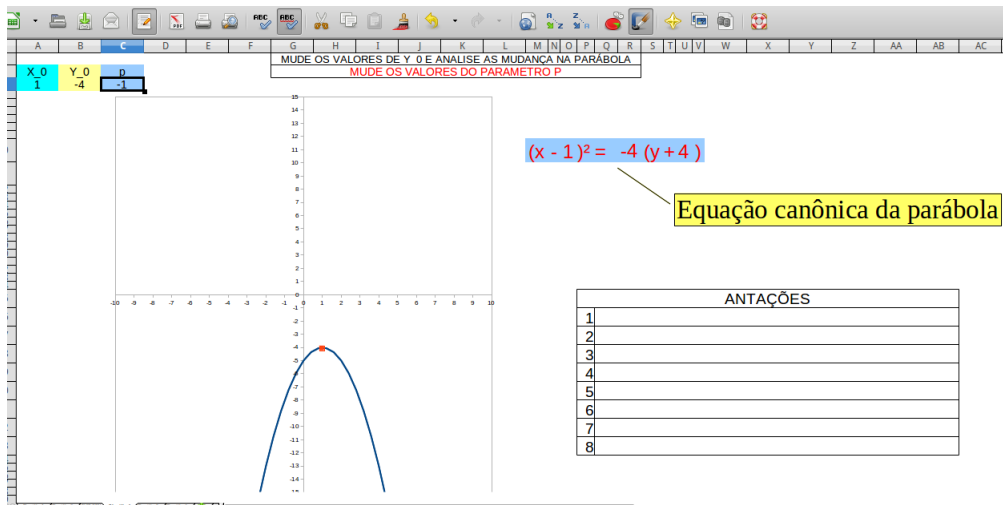


Figura 34: Parábola vértices $(1, -4)$

5 Passo-a-passo: Desenvolvimento das planilhas

Neste capítulo vamos apresentar um tutorial com o passo-a-passo para o processo de implementação das planilhas necessárias à aplicação das atividades propostas no capítulo anterior. Admite-se que o leitor tenha um conhecimento prévio do aplicativo e seja capaz de realizar a entrada de dados e fórmulas, como por exemplo, saber o que é uma entrada, selecionar um conjunto de células, proteger uma planilha, renomear uma planilha, etc, caso não tenha este conhecimento deve-se pesquisar para executar a ação desejada. Para os leigos em trabalho com as planilhas eletrônicas aconselhamos estudar os documentos encontrados nos seguintes endereços eletrônicos: <<http://www.inf.unioeste.br/guardamirim/apostilas/calc.pdf>>, <http://sites.unifra.br/Portals/13/CD_Recursos/CD_Eugenio/apostila_excel.pdf> e <http://dgp.ifrs.edu.br/comum/arquivos/textos/Curso_Basico_de_Calc_LibreOffice.pdf>.

Como vamos proteger e desproteger planilhas várias vezes vamos apresentar como fazer este processo: Para proteger uma planilha posicione o cursor no canto inferior esquerdo da janela, veja figura [35].

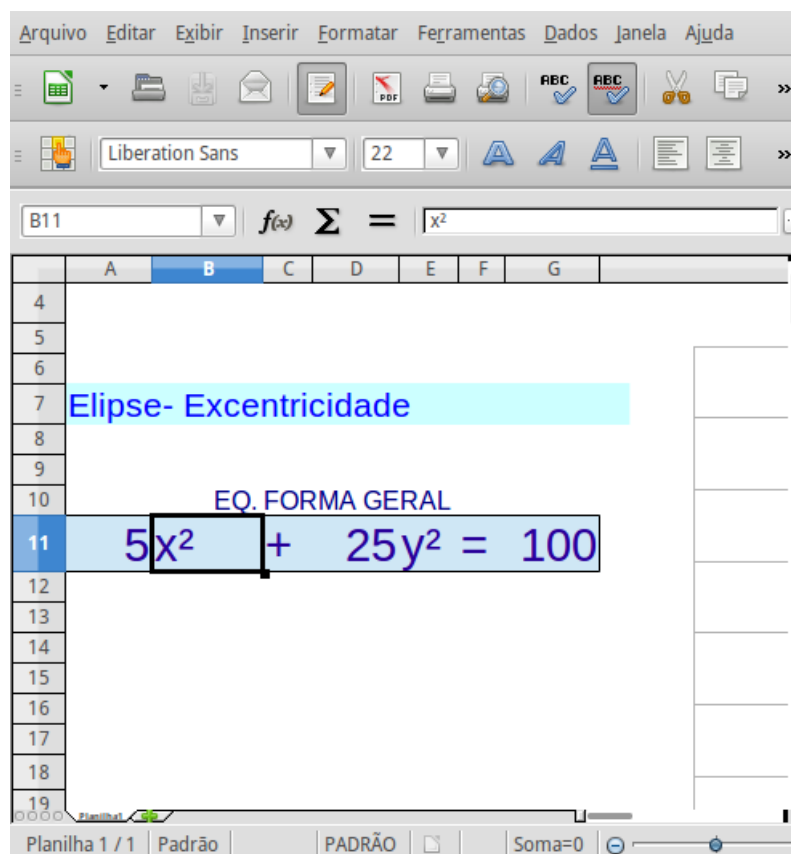


Figura 35: Protegendo uma planilha a

Clique com o botão direito do mouse e selecione a opção *Proteger planilha*, veja figura [36].

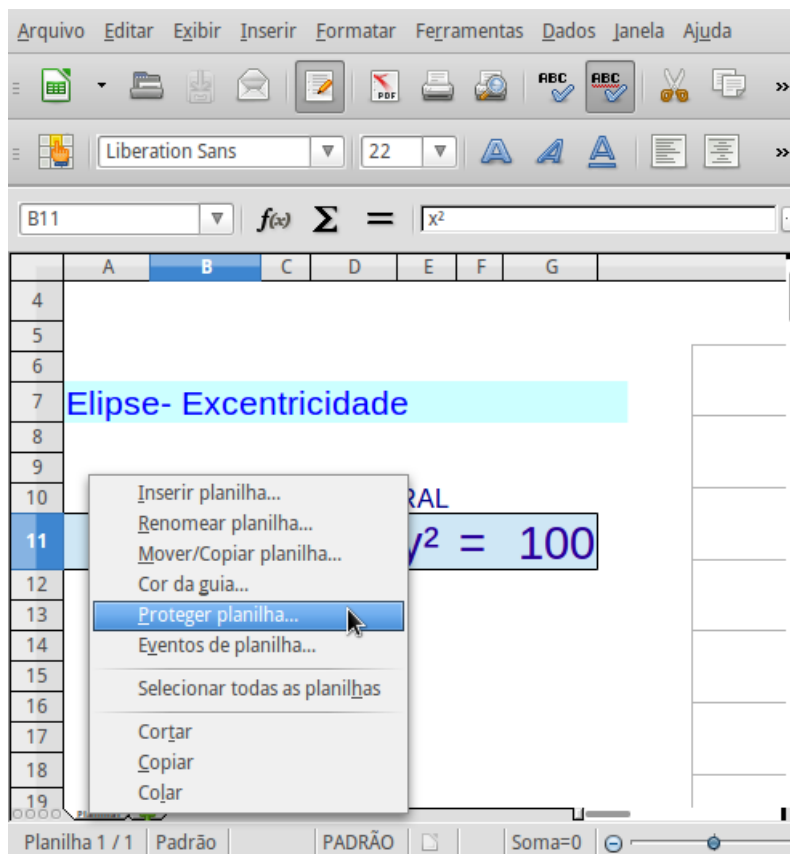


Figura 36: Protegendo uma planilha b

Escolha uma senha, figura [37] abaixo.

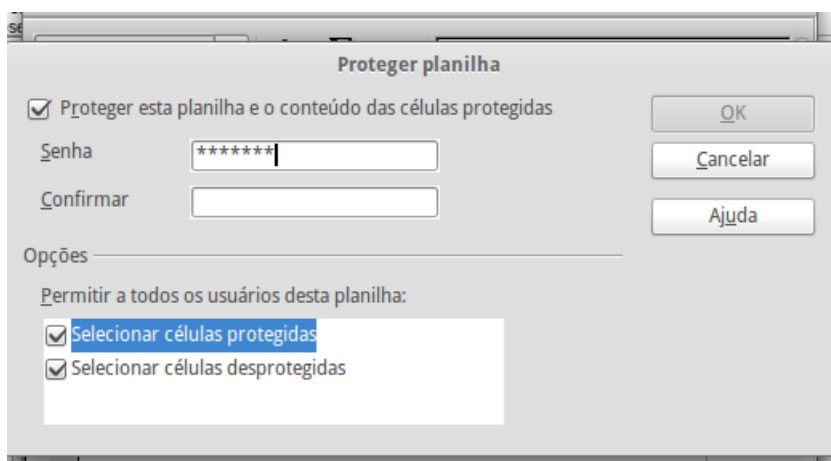


Figura 37: Protegendo uma planilha c

Para desproteger: Clique com o botão direito do mouse sobre a planilha (canto inferior esquerdo) desmarque a opção *proteger planilha*, veja figura [38]

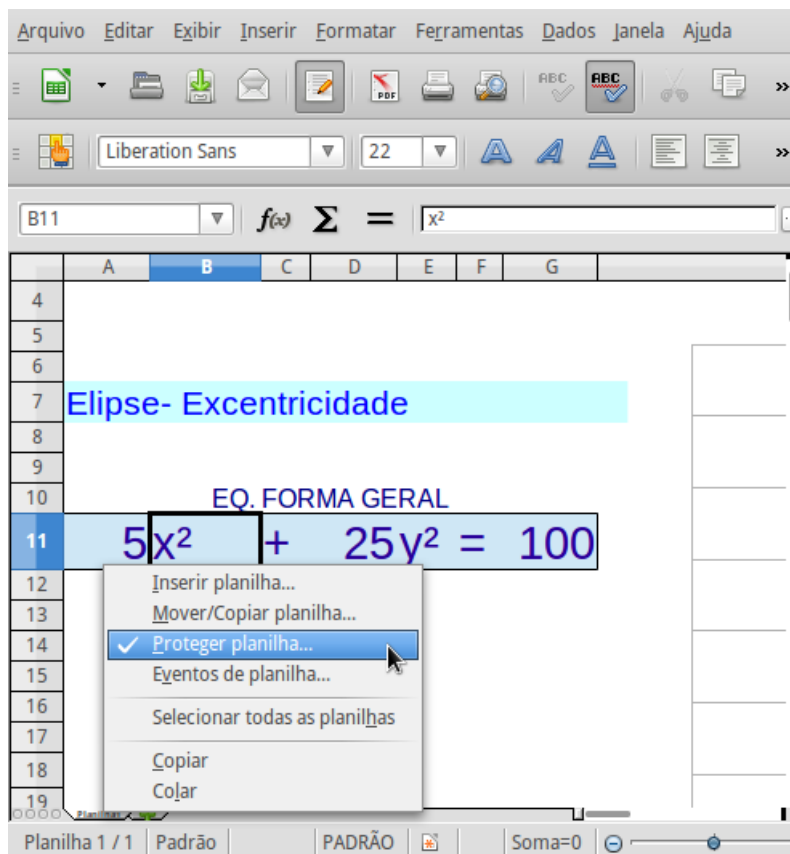


Figura 38: Desprotegendo uma planilha a

Digite a senha definida, veja figura [39].

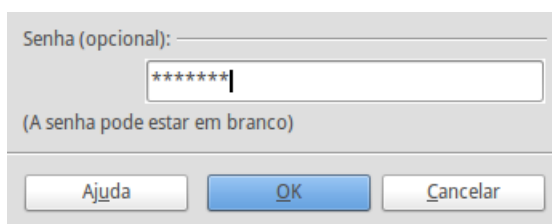


Figura 39: Desprotegendo uma planilha b

Com o desenvolvimento destas planilhas espera-se que a atividade de implementação dê um pouco de segurança e estimule o professor a pesquisar sobre o software possibilitando o desenvolvimento de novos trabalhos e pesquisas com as planilhas eletrônicas. Veja abaixo o passo-a-passo para construção das planilhas.

5.1 Planilha 01: Elipse gráfico

Para fazer a planilha **Elipse gráfico**

Renomear a planilha como *elipse1*, nosso primeiro trabalho.

- 1) Defina uma célula para o acréscimo que quer para o parâmetro t ;
- 2) Defina uma coluna para inserirmos as entradas do parâmetro t , no meu trabalho a célula $c3=t$, para nomear o que tenho na coluna.
- 3) Defina uma célula para o acréscimo que quer para o parâmetro t , no meu caso defini a célula $j5$;
- 4) Em seguida na célula $C4$ digite **-19**, na célula $C5$ digite **=C2+\$j\$5**, (o símbolo \$ fixa a entrada, no caso fixou tanto a coluna J quanto a linha 5. (Digitar $c4$ ou $C4$ é indiferente) veja figura [40].

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Elipse equação geral/forma canônica										
2											
3			t								
4			-19								acrécimo
5			=C4+\$j\$5								0,5
6											

Figura 40: Planilha 01: passo 1 à 4

- 5) Com o cursor no canto inferior direito da célula $C5$ espere aparecer um sinal $+$ depois com o botão esquerdo do mouse segure e arraste para baixo até que os valores da célula cheguem a 16, 17 ou pouco menos. (isto será mais ou menos na célula $C80$);
- 6) Na célula $A3$ digite $=SE(A4 < B4; "b"; "a")$ abaixo na $A4$ digite **3** (este será o valor inicial do parâmetro " a ");
- 7) Na $B3$ digite $=SE(B4 > A4; "b"; "a")$ abaixo na $B4$ digite **2** (este será o valor inicial do parâmetro " b ");
- 8) Na célula $E3$ digite x , na $F3$ digite y ;
- 9) Na célula $E4$ digite $=\$A\$4*\text{COS}(C3)$ (observe que a célula $A4$ deve ser a que você definiu como sendo a entrada do parâmetro " a ").
- 10) Novamente com o cursor no canto inferior esquerdo da célula $E4$ espere aparecer o sinal $+$, Veja figura [41] em seguida segure e arraste até mais ou menos a linha 80 (a mesma linha onde parou os parâmetros t).
- 11) Na célula $F4$ digite $=\$B\$4*\text{SEN}(C3)$ (observe que a célula $B4$ deve ser a que você definiu como sendo a entrada do parâmetro " b ").
- 12) Repita o passo 10 para a célula $F4$, veja figura [42];

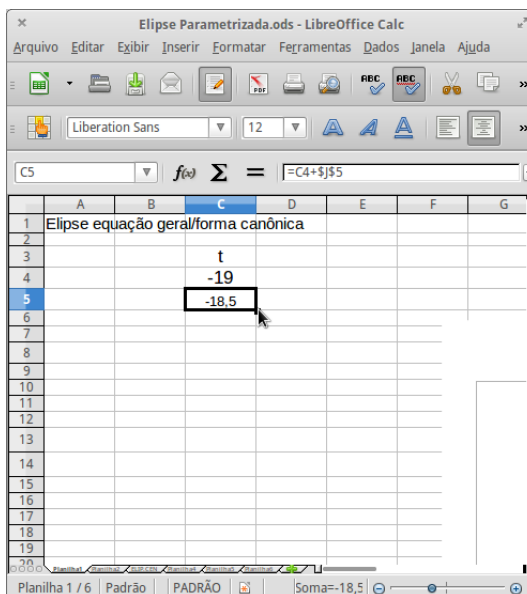


Figura 41: Planilha 01: passo 10

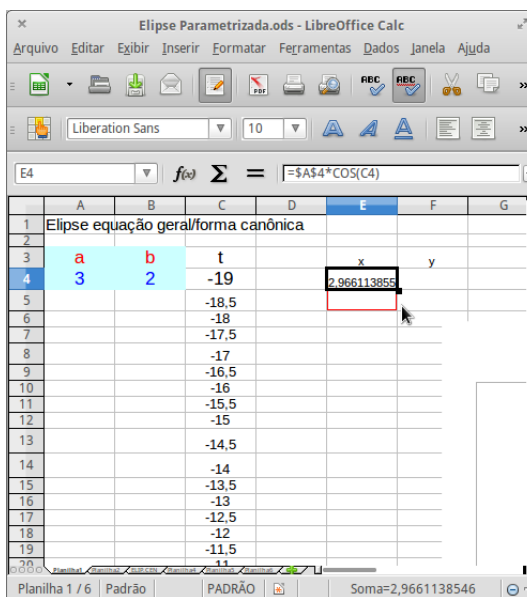


Figura 42: Planilha 01: passo 12

Forma canônica da elipse

- 13) Na célula J12 escreva FORMA CANÔNICA DA ELIPSE;
- 14) Na célula J13 digite x^2 (no CALC basta digitar sem espaço x^2);
- 15) Na K13 digite +;
- 16) Na L13 digite y^2 ;
- 17) Na M13 =;

- 18) Na $N13$ **1**;
- 19) Na $J14 = A4 \wedge 2$;
- 20) Na $L14 = A5 \wedge 2$;
- 21) Mesclar as células $K13$ com $K14$ e $N13$ com $N14$. Para isto selecione as células à mesclar e clique no ícone, veja figura [43].



Figura 43: Planilha 01: passo 21

- 22) Para o visual ficar bom selecione todas as células dos passos 16 à 23 e retire as bordas, coloque um pano de fundo (preenchimento) e mude a cor da fonte. Em seguida coloque sublinhado os textos x^2 e y^2 . GRÁFICO
- 23) Selecione os valores numéricos das colunas **E** e **F**. Veja figura [44]:

	A	B	C	D	E	F	G
3	a	b	t		x	y	
4	3	2	-19		2,995112955	-0,29975442	
5			-18,5		2,818574681	0,684961237	
6			-18		1,989560125	1,501974484	
7			-17,5		0,65831989	1,951252011	
8			-17		-0,82549001	1,922794984	
9			-16,5		-2,10719117	1,423570885	
10			-16		-2,87297844	0,578006633	
11			-15,5		-2,93536039	-0,41293496	
12			-15		-2,27906374	-1,30057568	
13			-14,5		-1,0647728	-1,86979011	
14			-14		0,410211655	-1,98121471	
15			-13,5		1,78476199	-1,60756885	
16			-13		2,722340344	-0,84033407	
17			-12,5		2,99394838	0,132643795	
18			-12		2,531561876	1,07145638	
19			-11,5		1,449914276	1,750904349	
20			-11		0,013277094	1,99980413	
21			-10,5		-1,42861078	1,75899152	

Figura 44: Planilha 01: passo 23

- 24) Clique em *inserir* → *objeto* → *gráfico*, ou no ícone **inserir gráfico**;
- 25) Selecione *dispersão, somente linha*, marque *linhas suaves*. Veja figura [45].

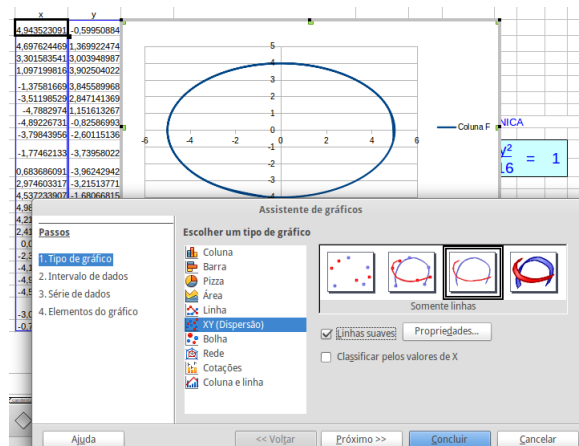


Figura 45: Planilha 01: passo 25

- 26) Retire a legenda. Com o botão direito do mouse clique sobre o eixo **x** → formatar eixo → escala, no mínimo, máximo e intervalo desmarque automático e coloque **-10, 10, 1** respectivamente. Veja figura [46];
- 27) Botão direito sobre o gráfico selecione **posição e tamanho** fixe o tamanho em: largura **20**, altura **20**. Marque a **proteger tamanho**.

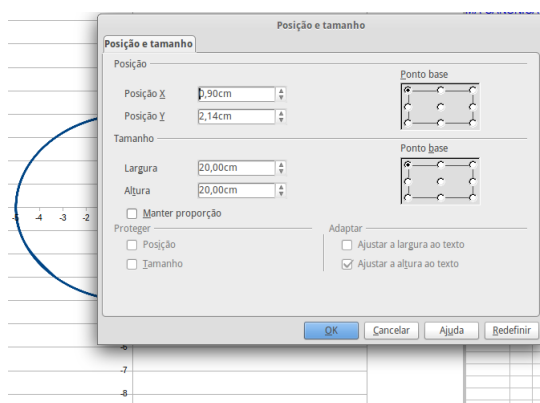


Figura 46: Planilha 01: passo 26 e 27

- 28) Seguindo os passo do início deste capítulo proteja a planilha.

5.2 Planilha 02: Planilha: Elipse forma canônica

Para reduzirmos o trabalho vamos tomar como base a planilha 01 da seção anterior. Copie a planilha 01 para uma nova planilha e após desprotegê-la (segundo os passo do início deste capítulo) permitindo edição, siga os passos abaixo.

- 1) Mesclar as células de *J23* à *O23* e digitar *Eq. Forma Geral*;
- 2) Nas Células *J25*, *K25*, *L25*, *M25*, *N25*, *O25* e *P25* digitar 4, x^2 , +, 25, y^2 , = e 100

- respectivamente. Para melhorar o visual selecione todas as células indicadas: coloque bordas externas e uma cor de fundo, mude a cor da fonte se achar interessante);
- 3) Altere a entrada das células $J14$ e $L14$ para $=P25/J25$ e $=P25/M25$ respectivamente;
 - 4) Altere as entradas das células $A4$ e $B4$ para $=RAIZ(J14)$ e $=RAIZ(L14)$, respectivamente;
 - 5) Digite e , para representar a excentricidade na célula $J8$;
 - 6) Digite na célula $K8$ a fórmula $=SE(J14 > L14; RAIZ(J14 - L14)/A4; RAIZ(L14 - J14)/B4)$;

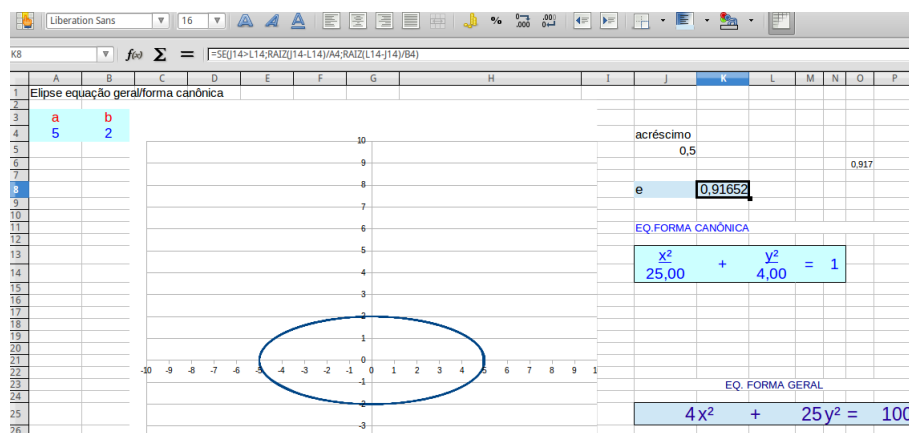


Figura 47: Planilha 02: passo 01 e 06

- 7) Clique com o botão direito sobre a célula $J25$ selecione a opção *Formatar célula* veja figura [48] abaixo;

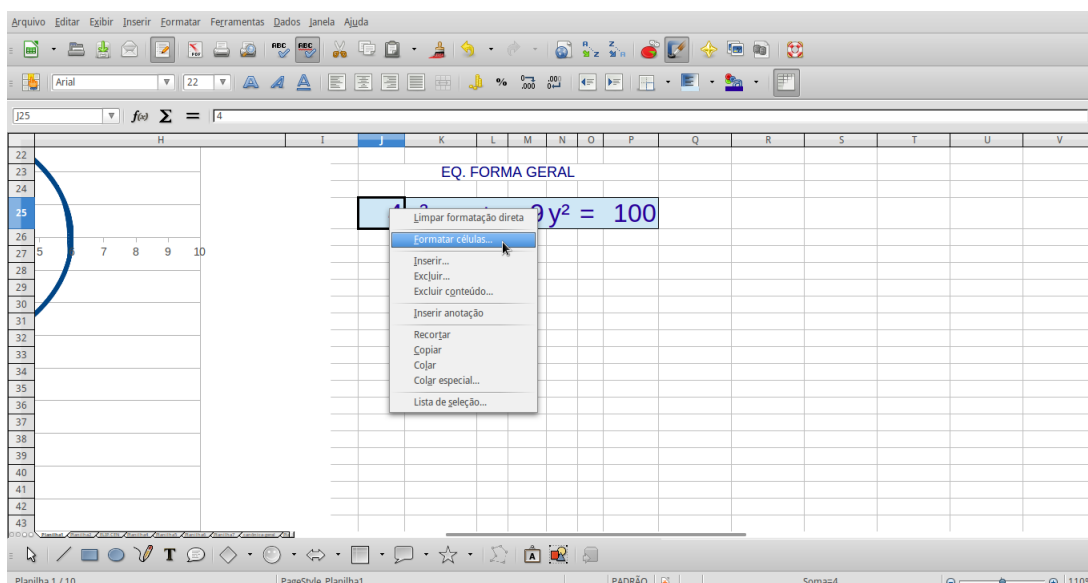


Figura 48: Planilha 02: passo 07-Desproteger célula (a)

8) Selecione a opção *Proteção de célula* e desmarque a opção *Protegida*, veja figura [49] abaixo;

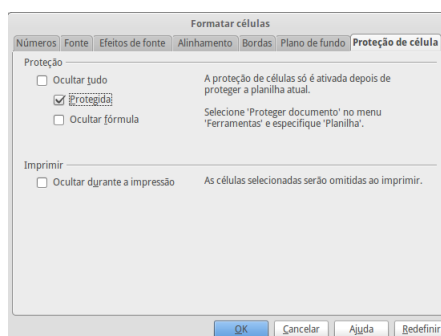


Figura 49: Planilha 02: passo 08-Desprotege célula (b)

9) Repita o procedimento dos passos 07 e 08 para as células $M25$ e $P25$. Selecione as células das linha 29, 30 e 31 das colunas J a N e desproteja elas também. Estas células são destinadas a cálculos que se queira fazer;

10) Proteja a planilha, siga os passos como instruído no início do capítulo.

5.3 Planilha 03: Elipse.Elementos

Para fazer a planilha **Elipse.Elementos** siga o roteiro abaixo.

1) Abrir a planilha *Elipse-gráfico* ou seguir os passos da sua construção. Caso for utilizar como base a planilha já pronta é necessário desproteger a planilha.

- 2) Salve a planilha como *Elipse.Elementos*.
- 3) Clique com botão direito do mouse sobre a coluna *C* e selecione *Inserir colunas*, repita isso 4 vezes;
- 4) Com o mouse sobre o gráfico clique e segure e o posicione a partir da coluna *G*;
- 5) Com o botão direito clique sobre o gráfico, selecione *posição e tamanho*, defina **Largura=19** e **Altura=19**;
- 6) Selecione e mescle as células *U4* e *V4* em seguida digite *Gráfico 1 ou 2?*;
- 7) Selecione e mescle as células *U5* e *V5* em seguida digite 1;
- 8) Mescles as células *S6, T6, U6* e *V6* e digite AJUDAS;
- 9) Selecione as células *S7, T7, U7, S8, T8* e *U8* mescle e digite *Para parâmetros "a" e "b":*;
- 10) Na célula *V7* digitar *Sim ou Não?*;
- 11) Na célula *V8* digitar **N**;
- 12) Selecionar e mesclar as células da linha 9, da coluna *S* até a coluna *X* em seguida digitar o comando = *SE(V8="sim";"Na elipse com centro em (0,0), são os pontos de intersecção";"OK")*;
- 13) Selecionar e mesclar as células da linha 10, da coluna *S* até a coluna *X* em seguida digitar o comando = *SE(V8="sim";"do gráfico com os eixos cartesianos";"OK")*;
- 14) Selecionar e mesclar as células *S13, T13, U13, S14, T14* e *U14* e digitar *Ajuda para determinar focos:*;
- 15) Na célula *V13* digitar *Sim ou Não?* e na *V14* digitar **N**;
- 16) Na linha 15 selecionar e mesclar da coluna *S* até a *X* e digitar o comando = *SE(V14="sim";"Detemine o valor de 'c' pela fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ observando";"ok")*;
- 17) Na linha 16 selecionar e mesclar da coluna *S* até a *X* e digitar o comando =*SE(V14="sim";"se o EIXO FOCAL está sobre o eixo OX ou OY";"ok")*;
- 18) Na linha 17 selecionar e mesclar da coluna *S* até a *X* e digitar o comando = *SE(V14="sim";"para determinar as coordenadas x e y";"ok")*;
- 19) Selecionar e mesclar as células *S20, T20, U20, V20, S21, T21, U21* e *V21* e digitar *Ajuda para determinar a fórmula canônica:*;
- 20) Na célula *W20* digitar *Sim ou Não?*;
- 21) Na célula *W21* digitar **N**;
- 22) Na linha 22 selecione e mescle as células da coluna *S* até a coluna *X* e digite o comando = *SE(W21="sim";"A forma canônica deve se escrita";"oK")*;
- 23) Na linha 23 selecione e mescle as células da coluna *S* até a coluna *X* e digite o comando = *SE(W21="sim";"x²/a² + y²/b² = 1 ou x²/b² + y²/a² = 1";"OK")*;
- 24) Para destacar e ter um visual melhor pode-se colocar uma cor no plano de fundo e na fonte, observe a figura [50].

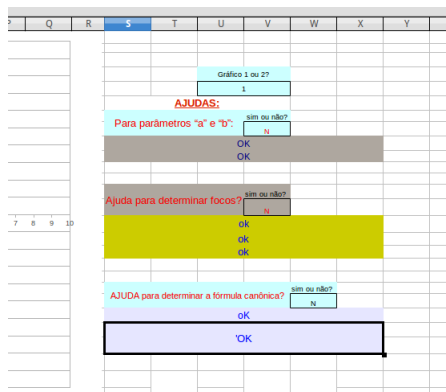


Figura 50: Planilha 03: passo 24

- 25) Na célula $A4$ digitar o comando $=SE(U5 = 1; 5; 4)$;
- 26) Na célula $B4$ digitar o comando $=SE(U5 = 1; 3; 7)$;
- 27) Na célula $A5$ digitar o comando $=SE(A4 > B4; A4; B4)$;
- 28) Na célula $B5$ digitar o comando $=SE(B4 < A4; B4; A4)$;
- 29) Selecionar e mesclar as células $A8, B8, C8$ e $D8$, digite *Determine os parâmetros*;
- 30) Nas células $A10$ e $A11$ digitar respectivamente a : e b :;
- 31) Nas células $B10$ e $B11$ digitar ?;
- 32) Mesclar as células $A13, B13, C13, D13$ e $E13$ e digitar *Determine as coordenadas*;
- 33) Mesclar as células $A14, B14, C14, D14$ e $E14$ e digitar *dos focos*::;
- 34) Mesclar as células $A15$ e $B15$ e digite $F1$;
- 35) Mesclar as células $D15$ e $E15$ e digite $F2$;
- 36) Nas células $A16, B16, D16$ e $E16$ digite respectivamente x, y, x, y ;
- 37) Nas células $A17, B17, D17$ e $E17$ digite ?;
- 38) Mesclar as células $A18$ e $B18$ e digitar o comando $=SE(E(A17 = A76; B17 = B76); "F1 certo"; ("F1-errado"))$;
- 39) Mesclar as células $D18$ e $E18$ e digitar o comando $=SE(E(D17 = D76; E17 = E76); "F2 certo"; "F2-Errado")$;
- 40) Selecione e mescle as células $A21, B21, C21, D21, E21$ e $F21$ e digite *Coloque os valores sob x^2 e y^2 de forma*;
- 41) Selecione e mescle as células $A22, B22, C22, D22, E22$ e $F22$ e digite *que obtenha-se a forma canônica*;
- 42) Selecione e mescle as células $A23, B23, C23, D23, E23$ e $F23$ e digite *da elipse ao lado*;
- 43) Nas células $A24, B24, C24, D24$ e $E24$ digite nesta ordem $x^2 +, y^2, =, 1$;
- 44) Nas células $A25$ e $C25$ digite ?;
- 45) Mesclar as células $A26, B26, C26, D26$ e $F26$ e digitar o comando $=SE(E(A25 = A4^2; C25 = B4^2); "MUITO BEM-forma canônica certa"; "TENDE NOVAMENTE")$;
- 46) Com um clique sobre o ícone indicado na figura [51] abaixo insira uma caixa de texto;

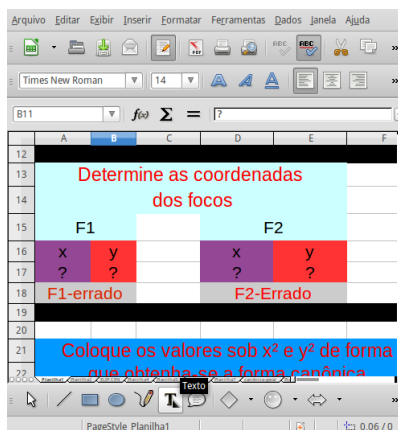


Figura 51: Planilha 03: passo 45-Inserindo caixa de texto

47) Digite o texto abaixo;

OBSERVANDO O GRÁFICO AO LADO RESPONDA COLOCANDO NAS CÉLULAS PRÉ-DEFINIDAS:

- OS PARÂMETROS “a” E “b”;
- O VALOR DE “c” E DETERMINE OS FOCOS;
- COMPLETE A FÓRMULA CANÔNICA.
- SE PRECISAR USAR AS AJUDAS AO LADO.

48) Para destacar, ter um visual melhor facilitando o entendimento da atividade deve-se colocar uma cor no plano de fundo e na fonte, observe a figura [52].

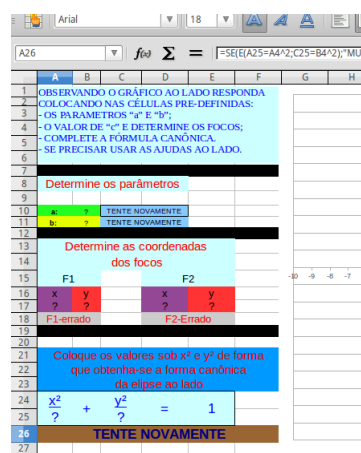


Figura 52: Planilha 03: passo 48

49) Desproteger as células B10, B11, A17, B17, D17, E17, A25, C25, U5, V8, V14 e W21. Para desproteger uma célula deve-se clicar sobre ela com o botão direito do mouse, selecionar *Formatar célula*, clique em *Proteção de célula* e desmarque a opção *Protegida*. Vejam as figuras [53] e [54] abaixo.

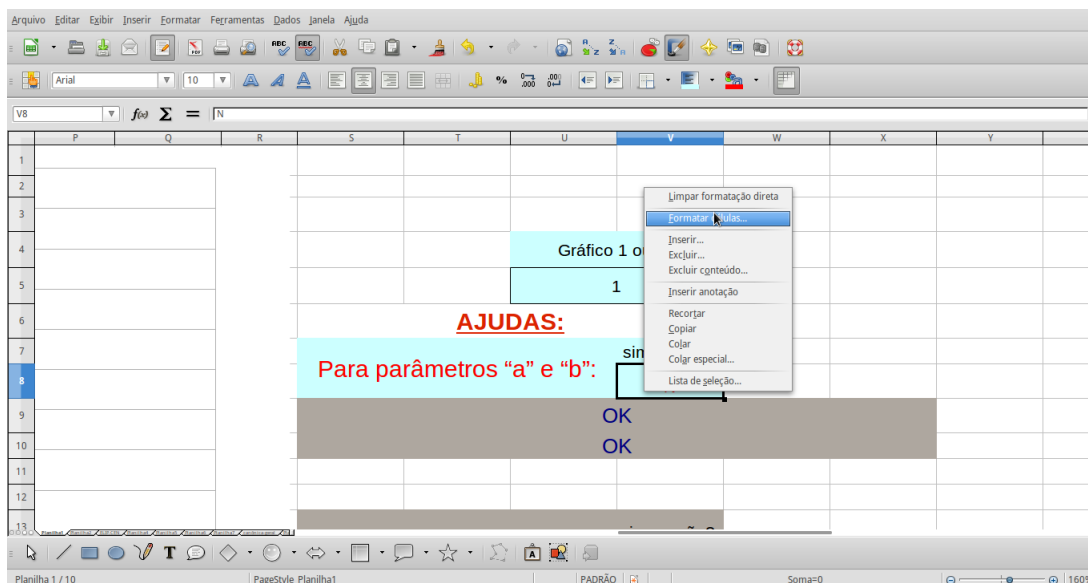


Figura 53: Planilha 03: passo 49a

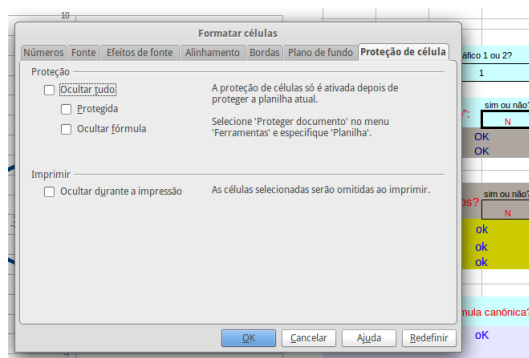


Figura 54: Planilha 03: passo 49b

50) Proteger a planilha.

5.4 Planilha 04: Planilha Elipse-centro

Seguir os seguintes passos:

- 1) Sigas todos os passos (01 ao 27) feitos para a planilha *Elipse gráfico*;
- 2) Altere a entrada informada no passo 09 para $=R\$9 + \$A\$4 * COS(C3)$;
- 3) Refaça o passo 10;
- 4) Altere a entrada informada no passo 11 para $=S\$9 + \$B\$4 * SEN(C3)$;
- 5) Repetir o passo 10 para a célula F4;

Para mostrar o centro da elipse devemos criar um novo gráfico com o centro e sobrepôr ao gráfico já plotado da elipse.

6) Selecione as células R9 e S9 que contém o centro → **inserir gráfico** → **tipo dispersão** → **somente pontos**, em intervalo de dados marcar *serie de dados em colunas*.

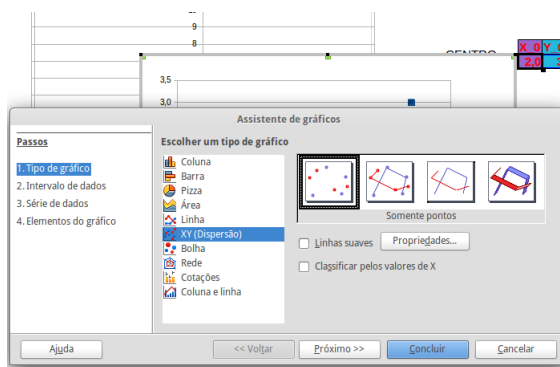


Figura 55: Planilha 04: passo 06a

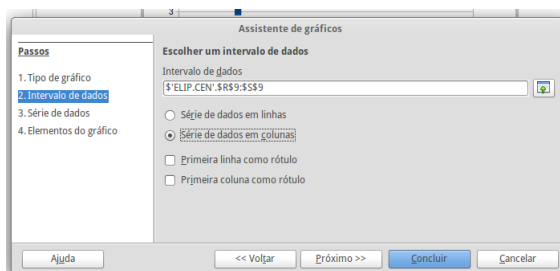


Figura 56: Planilha 04: passo 06b

- 7) Para sobrepor os gráficos deve-se verificar a posição e o tamanho do gráfico da elipse, o gráfico do centro deve estar na mesma posição e ter as mesmas dimensões do outro gráfico;
- 8) Com o botão direito do mouse sobre o gráfico do centro selecione posição e tamanho defina a posição e tamanho de acordo o que foi observado para o gráfico da elipse;
- 9) Verificar se os eixos dos dois gráficos se confundem, movendo com as setas para baixo/cima, esquerda/direita, figura [57];

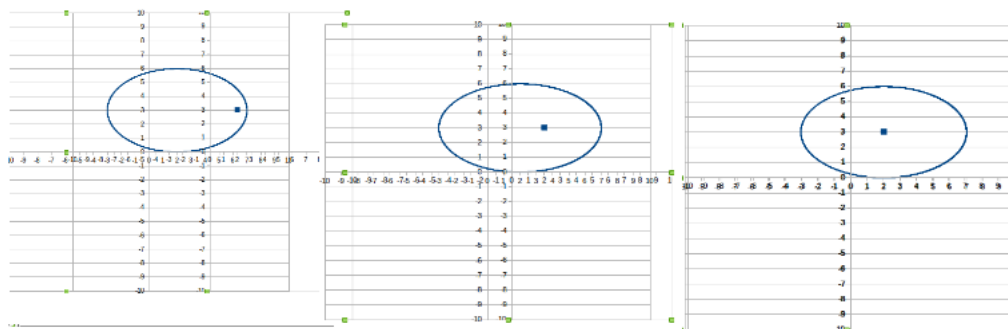


Figura 57: Planilha 04: passo 12

10) Após seleccionar o gráfico do centro com o botão direito do mouse selecione inserir/excluir eixos desmarque os eixos x e y ;

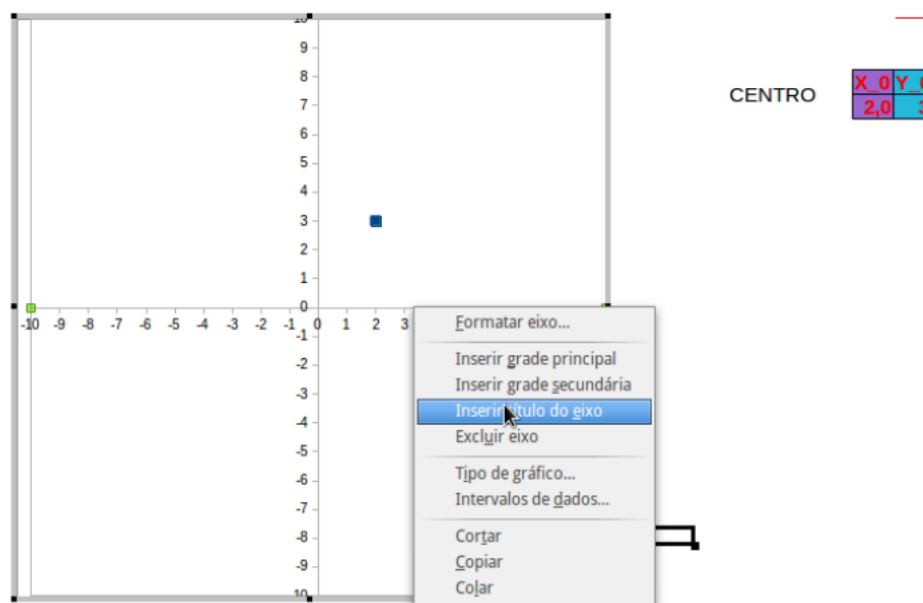


Figura 58: Planilha 04: passo 13

- 11) Selecione as colunas C, D, E e F recorte e cole nas colunas J, K, L e M ;
- 12) Selecione as células $A9$ e $B9$ mescle-as e digite *Centro*;
- 13) Nas células $A11$ e $B11$ digite x_0 e y_0 respectivamente;
- 14) Nas células $A12$ e $B12$ digite 0 em ambas;

MONTANDO A FORMA CANÔNICA.

- 15) Mesclar as células da linha 14 da coluna A até a J ;
- 16) Na célula $A16$ digite $(x$;
- 17) Na célula $B16$ digite $=SE(R9<0;"+";"-")$;
- 18) Na célula $C16$ digite $=ABS(R9)$;
- 19) Na célula $D16$ digite $)^2$;
- 20) Na célula $E16$ digite o símbolo $+$;
- 21) Na célula $F16$ digite $(y$;
- 22) Na célula $G16$ digite $=SE(S9<0;"+";"-")$;
- 23) Na célula $H16$ digite $=ABS(S9)$;
- 24) Na célula $I16$ digite $)^2$;
- 25) Na célula $J16$ digite o símbolo $=$;
- 26) Na célula $K16$ digite 1 ;
- 27) Mesclar as células $A17, B17$ e $C17$ e digite $= A4^2$;
- 28) Mesclar as células $F17, G17$ e $H17$ e digite $= B4^2$;

- 29) Selecione todas as células dos passos 16 ao 28, coloque uma cor clara para pano de fundo, retire todas as bordas;
- 30) Selecione as células A16, B16 e C16 coloque borda inferior; faça o mesmo para as células F16, G16 e H16.
- 31) Pode-se criar uma caixa de texto e inserir uma seta como na figura [59] abaixo.

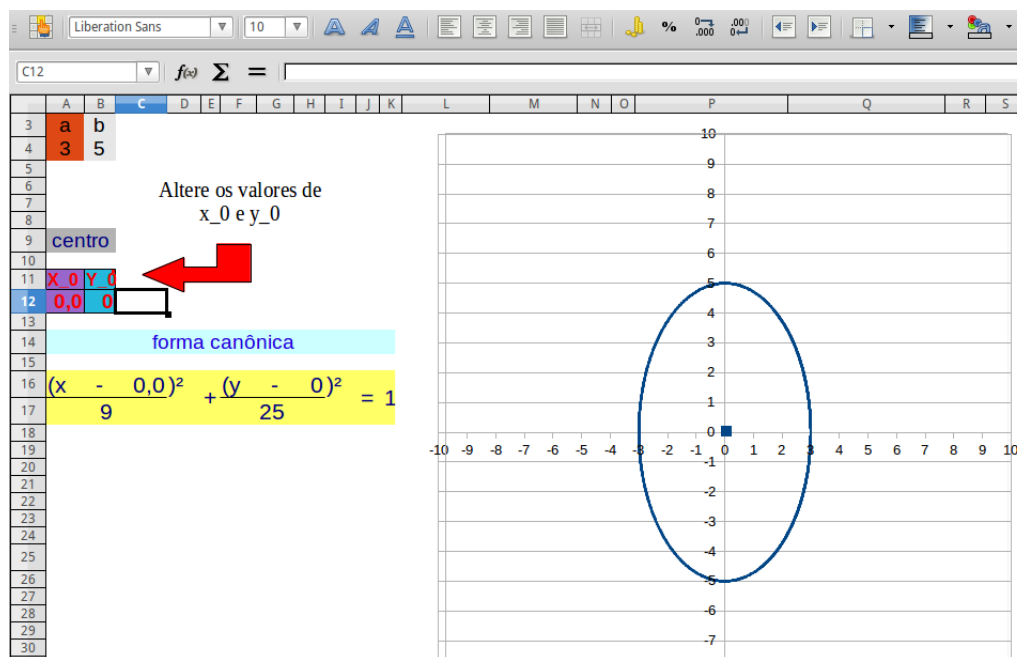


Figura 59: Planilha 04: passo 31

- 32) Desproteger as células A12, B12, A4 e B4, veja os passos 06, 07 e 08 da planilha 02;
- 33) Proteger a planilha.

5.5 Planilha 05: Elipse-Excentricidade

Os passos são os seguintes:

- 1) Copiar a planilha *Elipse forma canônica* ou refazer seu passo-a-passo;
- 2) Utilizando as teclas de atalho *Ctrl+x* (recortar) e *Ctrl+v* (colar), selecione as colunas C, D, E e F recorte e selecione as colunas V, W, X, Y e Z e cole;
- 3) Recortar o conteúdo das células A3, A4, B3 e B4, (as células que tem os parâmetros a e b) selecione a célula A20 e cole;
- 4) Na célula A1 digitar *EQ. FORMA GERAL*;
- 5) Copiar o conteúdo das células J25 a P25 e colar na célula A9;
- 6) Na célula A8 digitar *EXCENTRICIDADE*;
- 7) Na célula A9 digitar a letra e;

- 8) Na célula B9 digitar = SE(J14 > L14; RAIZ(J14-L14)/A23; RAIZ(L14-J14)/B23);
- 9) Na célula A26 digitar EQ. FORMA CANÔNICA, figura [60];

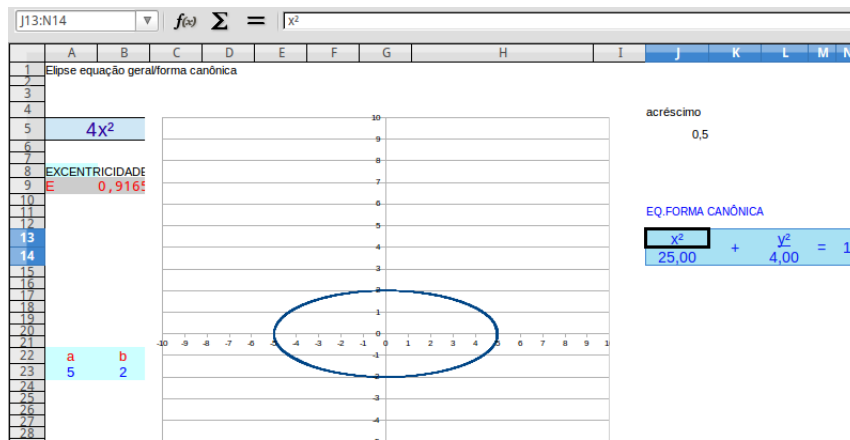


Figura 60: Planilha 05: passo 09

- 10) Selecione as colunas J, K, L, M e N das linha 13 e 14, recorte e cole na célula A27, veja figura [61];

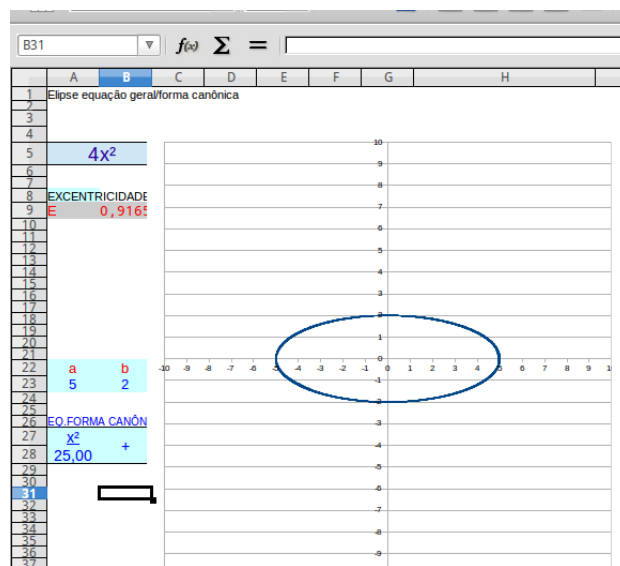


Figura 61: Planilha 05: passo 10

- 11) Selecione o gráfico e mova-o ajuste a largura das colunas para uma melhor visualização, veja a figura [62] abaixo;

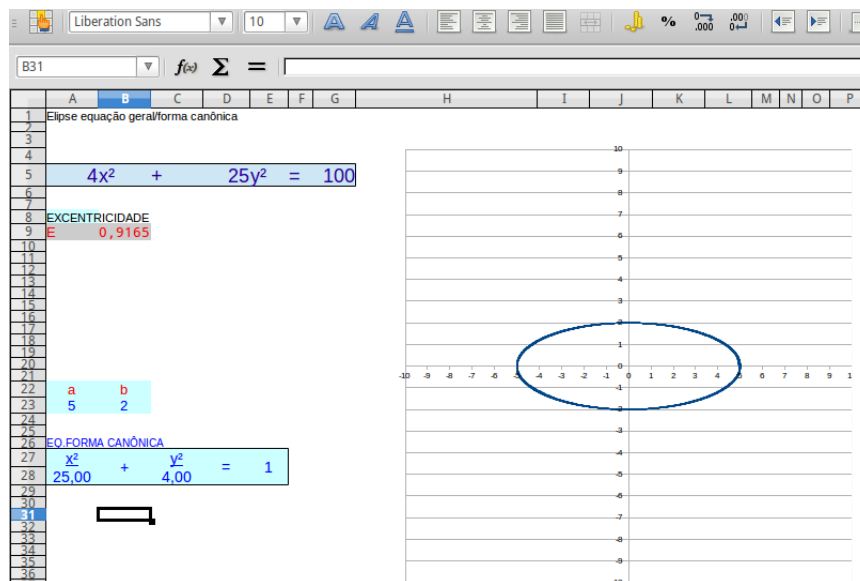


Figura 62: Planilha 05: passo 11

12) Na célula A1 digitar **Elipse-Excentricidade**, defina fonte 22 e mude para uma cor mais chamativa, vermelha como no exemplo da figura [63];

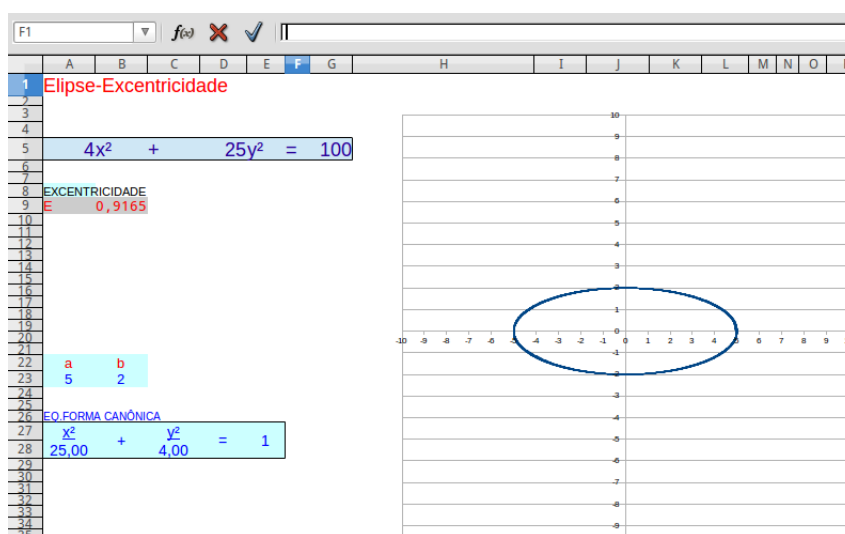


Figura 63: Planilha 05: passo 12

- 13) Clique com o botão direito do mouse sobre a célula A5, selecione a opção *Formatar célula*, na opção *Proteção de célula* desmarque a opção *Protegida*;
- 14) Repita o processo acima para as células D5 e G5;
- 15) Copiar o conteúdo das células J25, K25, L25, M25, N25, O25 e P25 e colar na célula A5;
- 16) Selecione algumas células em branco mude o pano de fundo e desproteja seguindo os passos já explicados (estas células poderão ser usadas para cálculos caso haja necessidade);

17) Com o botão direito sobre a planilha selecione a opção *Proteger planilha*. Veja figura [64].

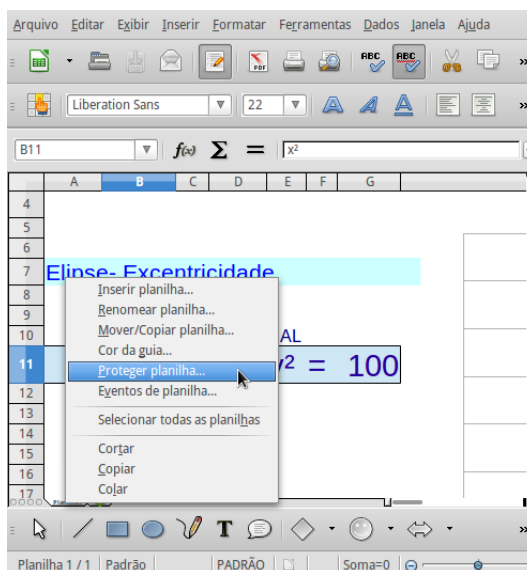


Figura 64: Planilha 05: passo 17

5.6 Planilha 06: Planilha - Hipérbole forma canônica

- 1) Na 1ª linha coloque o nome da atividade *hipérbole – forma canônica*
- 2) Na célula *A4* e *B4* inserir os valores dos parâmetros **a** e **b**; (iniciar com **a=2** e **b=3**);
- 3) Na célula *C4* inserir o valor **-10**;
- 4) Na célula *C5* inserir **=C4+0,5**;
- 5) Selecione a célula *C5* posicione o mouse no canto inferior direita até aparecer o sinal **+** com o botão esquerdo do mouse segure e arraste para baixo até aparecer o valor **16**;
- 6) Na célula *F4* digitar **=\$A\$4*COSH(C4)**;
- 7) Repita o passo **5** para a célula *F4*;
- 8) Na célula *G4* inserir **=-F4**;
- 9) Repita o passo **5** para a célula *G4*;
- 10) Na célula *H4* inserir o comando **=\$B\$4*SENH(C5)** e repita o passo **5** para a célula *H4*;
- 11) Na célula *I4* digitar **= F5** e repetir o passo **5**;
- 10) Nas células *K10*, *L10*, *M10*, *N10* e *O10* insira x^2 , **-**, y^2 , **=**, **1**, nesta ordem (observe que x^2 e y^2 estão sublinhados);
- 11) Nas células *K11* e *M11* digite nesta ordem **=A4^2** e **=B4^2**;
- 12) Mesclar as células *L10* com *L11*, *N10* com *N11* e *O10* com *O11*;
- 13) Selecione todas as células mencionadas nos passos 9, 10 e 11 e marque a opção sem borda;

- 14) *EXCENTRICIDADE*: Na célula *O18* digite e para representar excentricidade, na célula *P18* digitar o símbolo = e, na célula *Q18* digitar $=\text{(RAIZ(N12+P12))}/A4$;
- 15) *FOCOS*: Na célula *O22* digitar *F_1* para o primeiro foco, na célula *P22* digitar $=\text{RAIZ(N12+P12)}$,
- 16) Na célula *O23* digitar *F_2* para o segundo foco, na célula *P23* digitar $-\text{P22}$;
- 17) Nas células *Q22* e *Q23* digitar **0** (coordenada y dos focos, pois o eixo focal está sobre o eixo **x**).

MONTANDO OS GRÁFICOS.

- 18) Para a primeira folha da hipérbole selecione as células da coluna *F* e *G* da linha 08 até a linha 42;
- 19) Selecione *inserir* → *gráfico*;
- 20) Selecione *dispersão* → *somente linha*, marque a opção linhas suaves; terá algo como a figura [65];

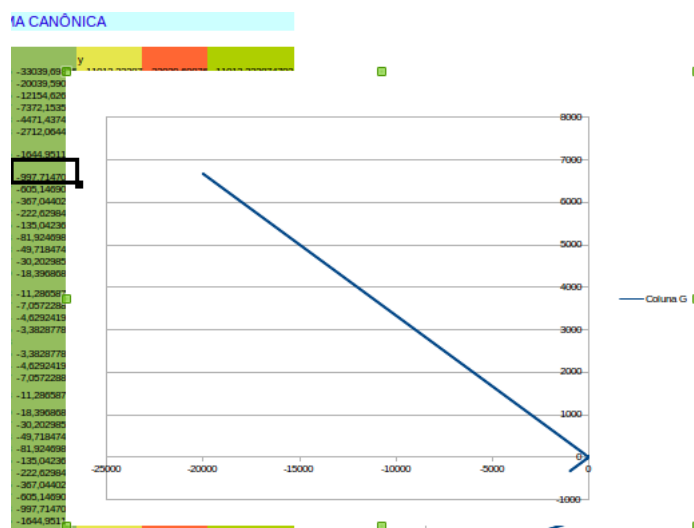


Figura 65: Planilha 06: passo 20

- 21) Sobre o eixo **X** Selecione formatar eixo defina mínimo **-20**, máximo **20** e intervalo de **1**, Veja a figura [66]. Faça o mesmo para o eixo **Y**;

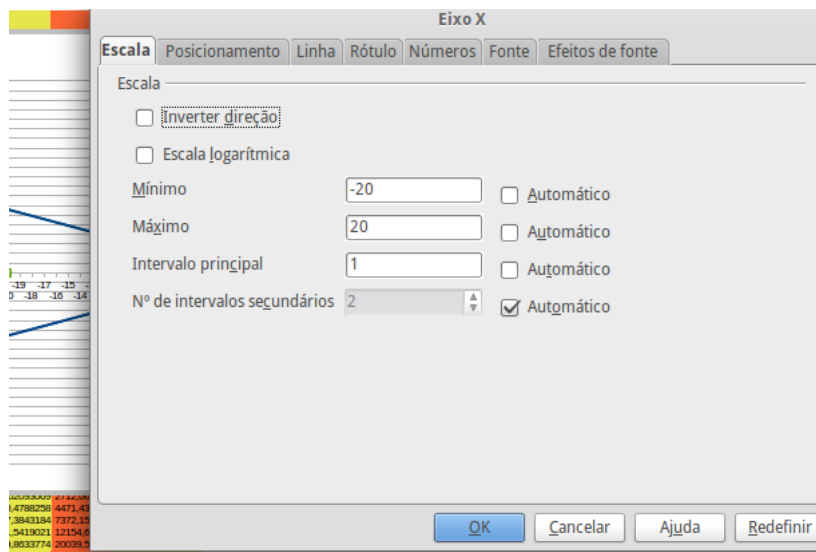


Figura 66: Planilha 06: passo 21

22) Com o gráfico selecionado dê um clique sobre ele com o botão direito do mouse e selecione **intervalo de dados**;

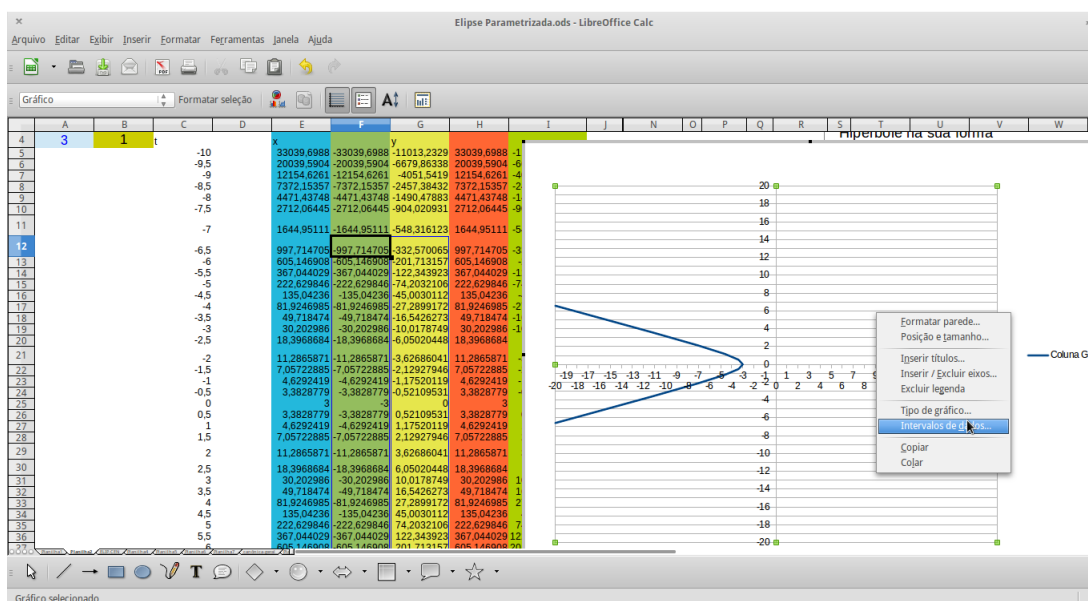


Figura 67: Planilha 06: passo 22

23) Selecione *Adicionar*;

24) Selecione *Valores de X*, → *Intervalo para valores de X* através do ícone, como na figura 68 abaixo;

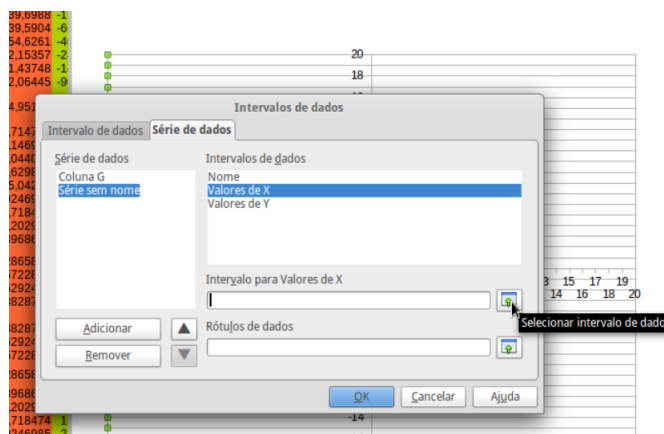


Figura 68: Planilha 06: passo 24

- 25) Selecione a coluna **H** da linha 08 até a linha 42;
- 26) Selecione *Valores de Y*, → *Intervalo para valores de Y*;
- 27) Selecione a coluna **I** da linha 08 à 42;
- 28) Para mostrar os focos Repita os passos de 21 à 23;
- 29) Selecione as células *P22* e *P23*, na sequência clique em *Valores de Y* e selecione as células *Q22* e *Q23*;
- 30) Desproteger as células *A4* e *B4*;
- 31) Proteja a planilha.

5.7 Planilha 07: Hipérbole: Eixo focal paralelo ao eixo OY

- 1) Na célula *A1* digitar *HIPÉRBOLE: EIXO FOCAL PARALELO AO EIXO OY*;
- 2) Na célula *A3* digitar *a*, na célula *B3* digitar *b*;
- 3) Nas células *A4* e *B4* digitar 2;
- 4) Selecione as células *A3*, *B3*, *A4* e *B4* mude a cor de fundo, a cor da fonte e coloque fonte 16;
- 5) Digite nas células *A6* e *B6*, x_0 e y_0 respectivamente;
- 6) Nas células *A7* e *B7* entre com o valor 0; em seguida selecione as células *A6*, *B6*, *A7* e *B7* mude a cor de fundo a cor da fonte e defina fonte 16;
- 7) Digite na célula *A9* "**c**" e na célula ao lado *B9* o comando $=RAIZ(A4 \wedge 2 + B4 \wedge 2)$;
- 8) Digite *FOCOS* na célula *A12* e nas células *A13* e *A14* digite F_1 e F_2 , pode-se mudar a cor e o tamanho da fonte para um melhor visual;
- 9) Nas células ao lado *B13* e *B14* digite o comando $= A7$ e nas células *C13* e *C14* entre com o comando $= B7 + B9$ e $= -C13$ respectivamente;
- 10) Na célula *A18* digite *acréscimo* e na célula ao lado *B18* digite 0,3;

- 11) Na célula V1 digite t , abaixo na célula V2 entre com -10 ;
- 12) Digite na célula V3 o comando $= V2 + B18$;
- 13) Selecione a célula V3, encoste com o mouse no canto inferior direito da célula, assim que aparecer o sinal $+$ clique com o mouse segure e arraste até a linha 70;
- 14) Digite X na célula W1, e logo abaixo na célula W2 entre com o comando $= \$A\$7 + \$B\$4 * SENH(V2)$;
- 15) Selecione a célula W2, posicione o mouse no canto inferior direito e quando aparecer o sinal $+$ clique com o botão esquerdo e arraste até a linha 70;
- 16) Digite Y na célula X1, abaixo na célula X2, digite o comando $= \$A\$7 + \$A\$4 * COSH(V2)$;
- 17) Selecione a célula X2, posicione o mouse no canto inferior direito e quando aparecer o sinal $+$ clique com o botão esquerdo e arraste até a linha 70;
- 18) Na célula Y1 digite X , na X2 abaixo digite o comando $= W2$, selecione a célula faça o procedimento do passo anterior;
- 19) Digite Y na célula Z1 e na célula Z2 digite o comando $= -X2$, selecione a célula e repita os procedimentos citados no passo 17.

GRÁFICOS

- 20) Selecione as colunas W e X da linha 2 a 70, selecione *inserir* \rightarrow *gráficos* \rightarrow *dispersão*, veja figura [69] abaixo;

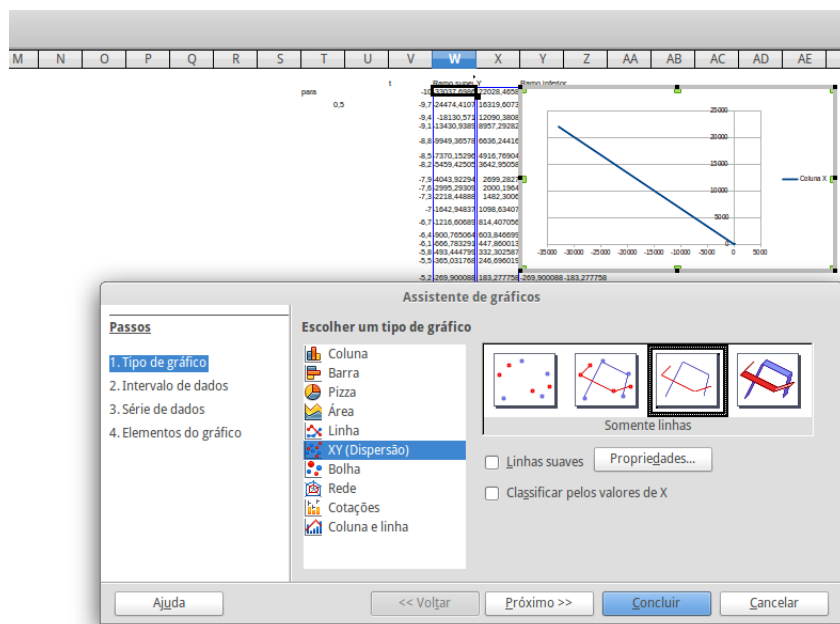


Figura 69: Planilha 07: passo 20

- 21) Selecione a opção *somente linha* e marque em *linhas suaves*;
- 22) Selecione o gráfico com o botão direito do mouse clique sobre ele selecione a opção

posição e tamanho, defina tamanho para largura 30 e altura 30;

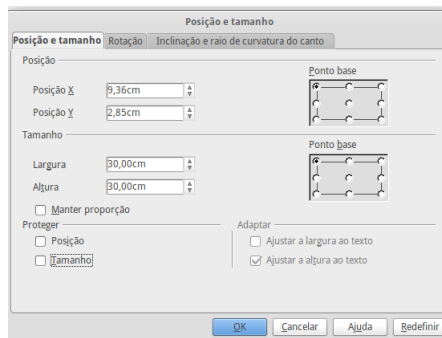


Figura 70: Planilha 07: passo 22

23) Clique duas vezes seguidas sobre o gráfico, com o botão esquerdo selecione a opção *Intervalo de dados*

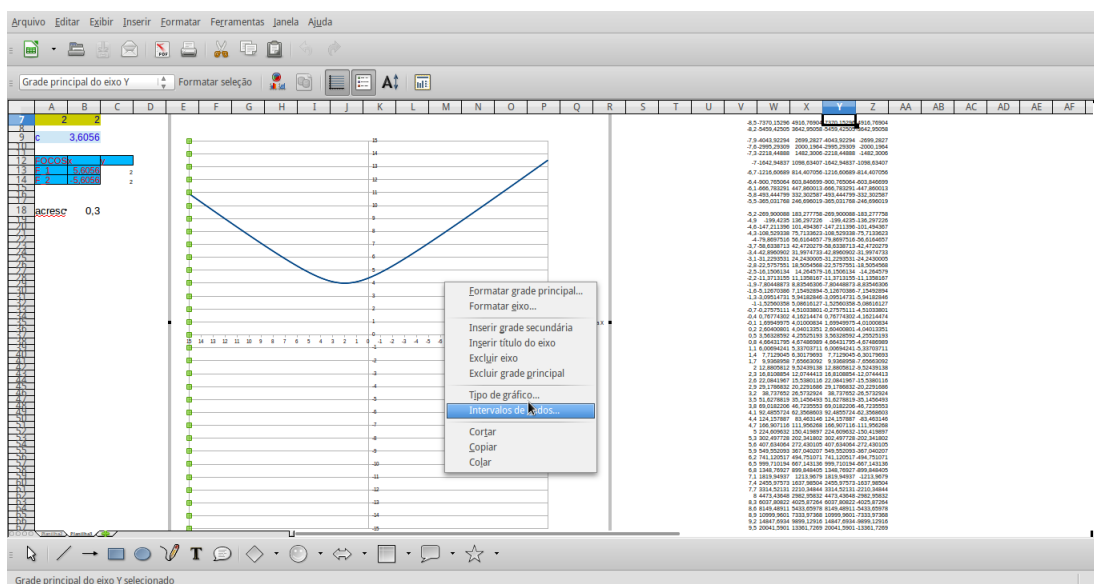


Figura 71: Planilha 07: passo 23

24) Selecione a opção *Série de dados* → *Adicionar* → *Valres de X*;

25) Clique no ícone para selecionar *Intervalos para valores de X*, veja figura [72];

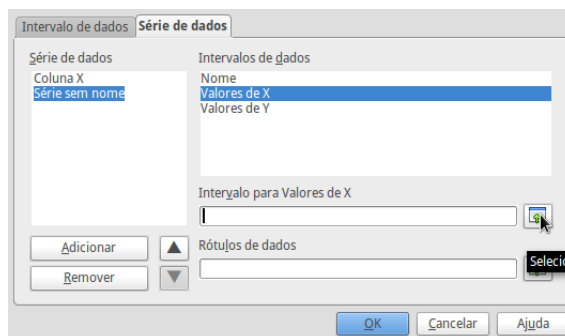


Figura 72: Planilha 07: passo 25

- 26) Selecione a coluna *Y* da linha 2 até a linha 70;
- 27) Selecione *Valores para Y*. Clique no ícone *Intervalo para valores de Y*;
- 28) Selecione a coluna *Z* da linha 2 até a 70;
- 29) Repetir os passos 23 e 24;
- 30) Selecione as células *B13* e *B14*;
- 31) Repita o passo 27;
- 32) Selecione as células *C13* e *C14*;
- 33) Para finalizar selecione as colunas *V, W, X, Y* e *Z* e defina cor da fonte como branca, assim não veremos os valores isto, melhora a aparência da planilha;

5.8 Planilha 08: Assintota da hipérbole

- 1) Na célula *A1* digitar *Assintotas da hipérbole*;
- 2) Nas células *A2* e *B2* digitar *a* e *b* respectivamente abaixo, nas células *A3* e *B3*, digitar 2;
- 3) Nas células *A5* e *B5* digitar X_0 e Y_0 respectivamente;
- 4) Nas células *A6* e *B6* entrar com o valor 0;
- 5) Nas células *A8, B8, C8, D8* e *E8* digitar $x^2, -, y^2, =$ e 1 respectivamente;
- 6) Na célula *A9* entrar com o comando $= A3 \wedge 2$ e na *C9* com o comando $B3 \wedge 2$, mesclar as células *B8* e *B9*, bem como as células *D8* com *D9* e *E8* com *E9*;
- 7) Digitar nas células *A11, B11* e *C11*: $e, =, = (RAIZ(A9 + C9))/A3$ nesta ordem;
- 8) Digitar nas células *A13, B13* e *C13*: $c, =, = RAIZ(A9 + C9)$ nesta ordem;
- 9) Na célula *A16* digitar *FOCOS*;
- 10) Nas células *A17* e *A18* digitar o comando $= -A6$;
- 11) Nas células *B17* entrar com o comando $= B6 - B13$ e na *B18* com o comando $= B6 + B13$;
- 12) Na célula *A35* digitar *GRÁFICO DA HIPÉRBOLE?* e na célula *B36* digitar **S**. Após

estes passos teremos o visual da figura [73]:

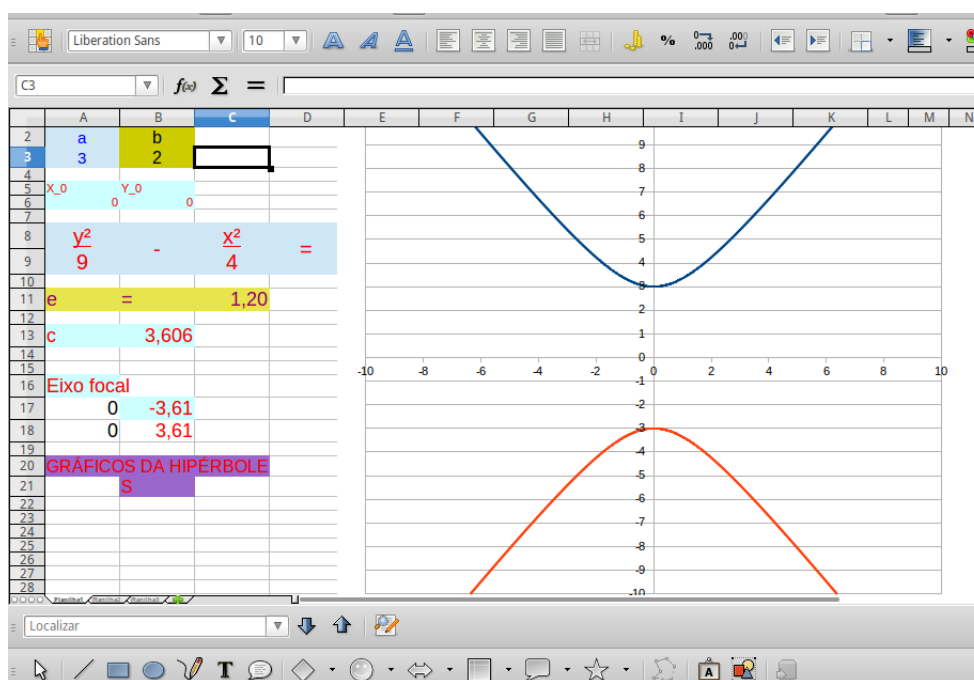


Figura 73: Planilha 08: passo 12

- 13) Na célula T1 digitar $y = (b/a)x$, abaixo na célula T2 entre com o valor -10 ;
- 14) Na célula T3 entre com o comando $= T2 + 0,5$, selecione esta célula posicionando o cursor no canto inferior direito aguarde aparecer o sinal $+$ clique, segure e arraste até a linha 60;
- 15) Na célula U1 digitar $y = -(b/a)x$, abaixo na célula U2 entre com o comando $= T2 * \$A\$3 / \$B\3 ;
- 16) Selecione a célula U2 posicionando o cursor no canto inferior direito da célula espere aparecer o sinal $+$ arraste até a linha 60;
- 17) Na célula V2 digite o comando $= -T2$, novamente posicione o curso no canto inferior direito e repita o procedimento anterior;
- 18) Na célula W1 digitar X e na célula X2 digitar o comando $= (\$A\$6 + \$B\$3 * SENH(T2)) * \$A\200 ;
- 19) Selecione a célula X2, posicione o mouse no canto inferior direito aguarde até o simbolo $+$ aparecer então clique e arraste até a linha 60;
- 20) Na célula X1 digitar Y e, abaixo, na célula X2 entrar com o comando $= (\$B\$6 + \$A\$3 * COSH(T2)) * \$A\200 , da mesma forma que no passo anterior faça aparecer o símbolo $+$, então segure e arraste até a linha 60;
- 21) Na célula Y2 digite $= -X2$ e repita o processo de arrastar até a linha 60;
- 22) Na célula A200 digitar o comando $= SE(B36 = "S"; 1; 0)$;

GRÁFICOS

- 23) Selecionar as colunas *W*, *X* e *Z* clique em *Inserir* → *Gráfico*;
 24) Escolher a opção *Dispersão* → *Somente linhas*, marcar a opção *Linhas suaves*, Veja figura [74];

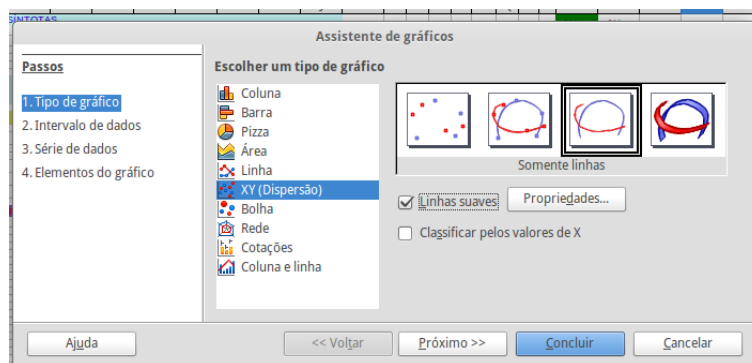


Figura 74: Planilha 08: passo 24

- 25) Selecione o gráfico: como botão direito do mouse clique sobre ele escolha a opção *Posição e tamanho* defina o tamanho *Largura: 30* e *Altura: 30*;
 26) Clique duas vezes seguidas sobre o gráfico: novamente com o botão direito escolha *Formatar eixo*, agora sobre um dos eixo defina o *Máximo: -15*, *Mínimo: 15*, *Intervalo: 1* tanto para o eixo *X* quanto para o eixo *Y*;
 27) Clique novamente com o botão direito do mouse sobre o gráfico selecione *Intervalo de dados* → *Adicionar*, clique no ícone para selecionar o *Intervalo para nomes*, veja figura 75 abaixo;

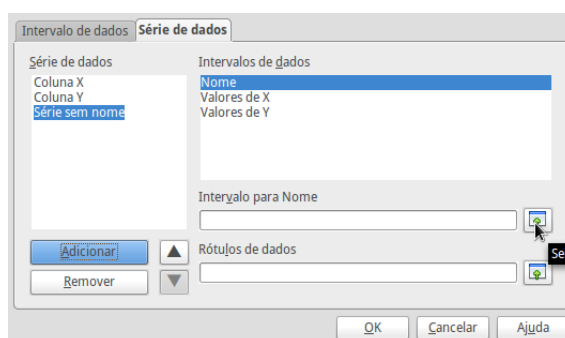


Figura 75: Planilha 08: passo 27

- 28) Selecione a célula *T1*;
 29) Clique em *Valores de X*, clique no ícone como na figura acima para definir o *Intervalo para valores de X*,

- 30) Selecione a coluna T da linha 2 até a linha 60, repetindo o processo para *Valores de Y*, neste caso a coluna será a U da linha 2 até a linha 60;
- 31) Novamente selecione *Adicionar* → clique no ícone para selecionar o *Intervalo para nomes* e selecione a célula $U1$;
- 32) Clique em *Valores de X*, clique no ícone como na figura acima para definir o *Intervalo para valores de X*;
- 33) Selecione a coluna V da linha 2 até a linha 60, repetindo o processo para *Valores de Y*, novamente a coluna será a U da linha 2 até a linha 60;
- 34) Para melhorar o visual pode-se selecionar as colunas T, U, W, X, Y e Z definindo cor da fonte *branca*, assim não se vê os dados;
- 35) Mudar a entrada da célula $B36$ para \mathbf{N} e em seguida desproteger as células $A3, B3, B36$. Pronto veja a figura [76] abaixo;

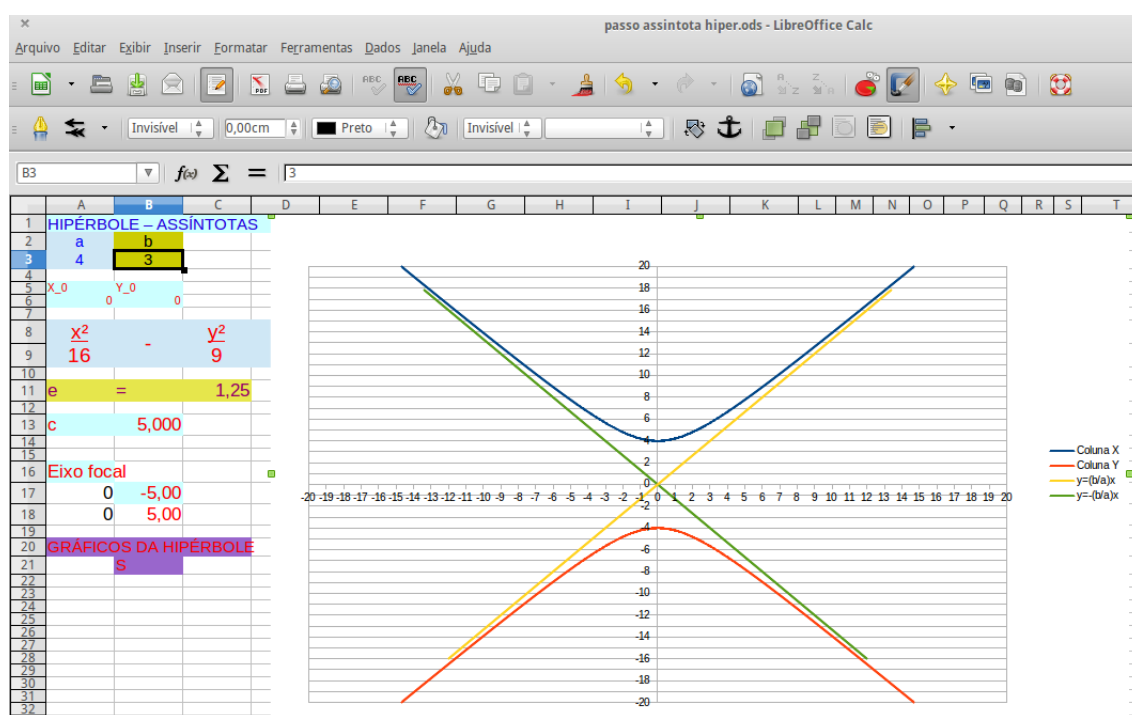


Figura 76: Planilha 08: passo 34

5.9 Planilha 09: Elipse X Hipérbole

- 1) Na célula $A1$ entre com *FORMA CANÔNICA ELIPSE OU HIPÉRBOLE?*
- 2) Na célula $A4$ entre com $=SE((B18 = " + ")E(A5 > B5); "b"; "a")$ e na $B4$ entre com $=SE((B18 = " + ")E(A5 > B5); "a"; "b")$;
- 3) Na célula $A5$ e $B5$ entre com 2;
- 4) Nas células $A18, B18, C18, D18$ e $E18$ digite respectivamente $x^2, -, y^2, =$ e 1;
- 5) Nas células $A19$ e $C19$, digite nesta ordem $A5 \wedge 2$ e $B5 \wedge 2$;

- 6) Mesclar as células $B18$ com $B19$, $D18$ com $D19$ e $E18$ com $E19$;
- 7) Na barra de ferramenta de desenho selecione a opção inserir texto, crie uma caixa de texto e digite **Elipse ou Hipérbole? Mude o sinal: "+" ou "-"**;
- 8) Na barra de ferramenta de desenho selecione a figura de uma seta para baixo e insira-a, faça como na figura [77] abaixo;
- 9) Nas células $A27$ digite *Focos*;

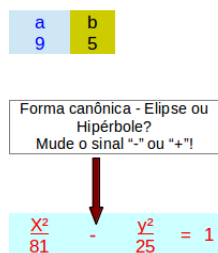


Figura 77: Planilha 09: passo 08

- 10) Nas células $B27$ e $C27$ entre com x e y , respectivamente;
- 11) Na célula $B28$ entre com o comando $=SE(B18="-";D89;D84)$;
- 12) Na célula $C28$ entre com o comando $=SE(B18="-";E89;E84)$;
- 13) Nas células $B29$ e $C29$ entre com os comandos $=-B28$ e $=-C28$, respectivamente;
- 14) Na célula $S1$ digite t , abaixo na $S2$ entre com comando $=S1+0,5$;
- 15) Selecione a célula $S2$, com o cursor na parte inferior direita, aguarde aparecer o sinal $+$, clique e arraste até a linha 50;
- 16) Na célula $T1$ entre com x , abaixo na célula $T2$ entre com o comando $=\$A\$5 * COS(T2)$ e repita para esta célula o procedimento do passo 15;
- 17) Na célula $U1$ digite y , abaixo na célula $U2$ entre com o comando $=\$B\$5 * SEN(T2)$, e repita o procedimento do passo 15;
- 18) Na célula $W1$ digite $x - hiperbole$, abaixo na $W2$ entre com o comando $=\$A\$5 * COSH(S2)$ e repita o passo 15;
- 19) Na célula $X1$ digite y , abaixo na célula $X2$, entre com comando $=\$B\$5 * SENH(S2)$, selecione e repita o passo 15;
- 20) Na célula $Y1$ digite x , abaixo na $Y2$ entre com o comando $=W2$, selecione e repita o passo 15;
- 21) Na célula $Z1$ digite y , abaixo na $Z2$ entre com o comando $=X2$, selecione e repita o passo 15;
- 22) Na célula $M2$ entre com o comando $=SE(\$B\$18="-";W7;T7)$, selecione e repita o passo 15;
- 23) Na célula $N2$ entre com o comando $=SE(\$B\$18="-";X7;U7)$, selecione e repita o passo 15;
- 24) Na célula $O2$ entre com o comando $=SE(\$B\$18="-";Y7;V7)$, selecione e repita o passo 15;

- 25) Na célula *P2* entre com o comando $=SE(\$B\$18 = -"; Z7; V6)$, selecione e repita o passo 15;
- 26) Selecione a coluna *M* e *N* da linha 2 a 50 e selecione *Inserir gráfico* \rightarrow *Dispersão* escolha *Somente linha*, marque a opção *Linhas suaves*;
- 27) Clique sobre o gráfico, com o botão direito do mouse clique e selecione *Posição e tamanho* defina *Largura: 25* e *Altura: 25*;
- 28) Clique duas vezes seguidas sobre o gráfico, com o botão direito escolha a opção *Formatar eixo X* defina: *Mínimo: -20*, *Máximo: 20*, *Intervalo: 1*. Faça o mesmo para o eixo *Y*;
- 29) Novamente com o botão direito do mouse selecione a opção *Intervalo de dados*, clique em *Adicionar* \rightarrow *Intervalos para valores de X*, veja a figura [78];

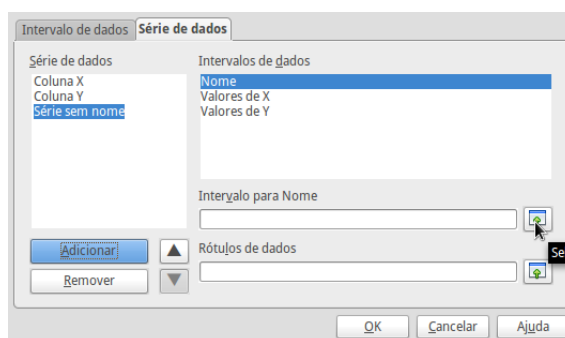


Figura 78: Planilha 09: passo 29

- 30) Selecione a coluna *O* da linha 2 até a 50. Repita o processo para *Intervalos para valores de Y* agora selecione a linha *P* da linha 2 até a 50;
- 31) Para melhorar o visual posicione o gráfico ao lado da fórmula canônica, selecione as colunas de *M* à *Z* e defina a cor da fonte como branca, assim os dados não ficam visíveis.

5.10 Planilha 10: Parábola Eixo focal *OY*

- 1) Na célula *A1* digite *Equação geral da parábola - eixo OY*;
- 2) Nas células *C2* digite *p*;
- 3) Nas células *C3* entre com o valor 1;
- 4) Na célula *A5* digite *y*, na *B5* digite $=$, na *C5* entre com o comando $= 4 * C3$, na *D3* digite x^2 ;
- 5) Na célula *W1* entre com -10 , abaixo na célula *W2* digite $= W1 + 0,3$;
- 6) Selecione *W2*, posicione o cursor no canto inferior direito da célula, assim que apa-

recer o sinal + clique com o botão esquerdo segure e arraste até a linha 60, veja a figura [79];

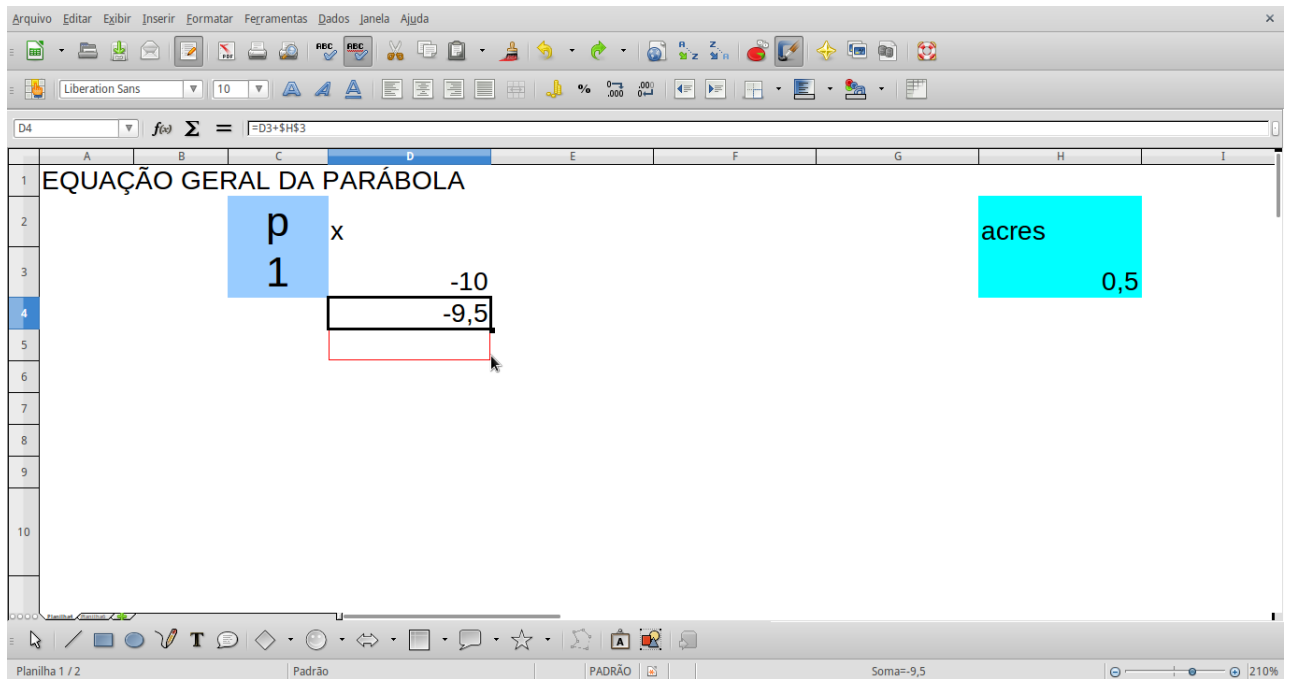


Figura 79: Planilha 10: passo 06

7) Na célula X1 entre com o comando $= (1/ \$C\$3) * (W1) \wedge 2$, selecione a célula e repita o passo 6;

GRÁFICO

8) Selecione as colunas W e X da linha 2 até a 60; 9) Selecione a opção *Inserir gráficos*, escolha *Dispersão* → *Somente linhas*, marque a opção *Linhas suaves*, veja figura 80;

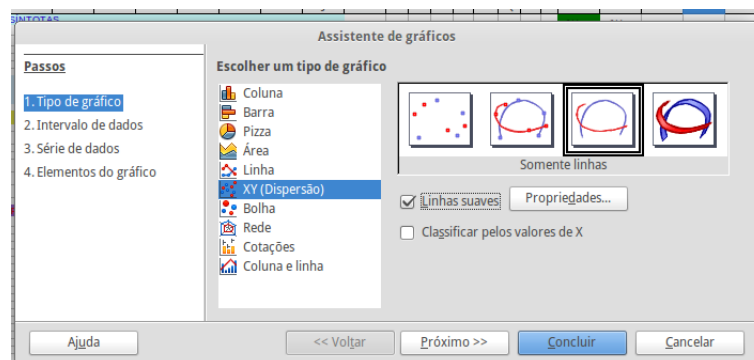


Figura 80: Planilha 10: passo 09

- 10) Selecione o gráfico, com o botão direito clique sobre o gráfico e selecione a opção *Posição e tamanho*, defina *Largura: 20* e *Altura: 20*;
- 11) Desproteger a célula *C3*;
- 12) Proteja a planilha.

5.11 Planilha 11: Parábola - eixo focal *OX*

- 1) Na célula *A1* digite *Equação geral da parábola - eixo OY*;
- 2) Nas células *C2* digite *p*;
- 3) Nas células *C3* entre com o valor 1;
- 4) Na célula *A5* digite *x*, na *B5* digite *=*, na *C5* entre com o comando $= 4 * C3$, na *D3* digite y^2 ;
- 5) Na célula *W1* entre com -10 , abaixo na célula *W2* digite $= W1 + 0,3$;
- 6) Selecione *W2*, posicione o cursor no canto inferior direito da célula, assim que aparecer o sinal $+$, clique com o botão esquerdo segure e arraste até a linha 60. Veja a figura 81;

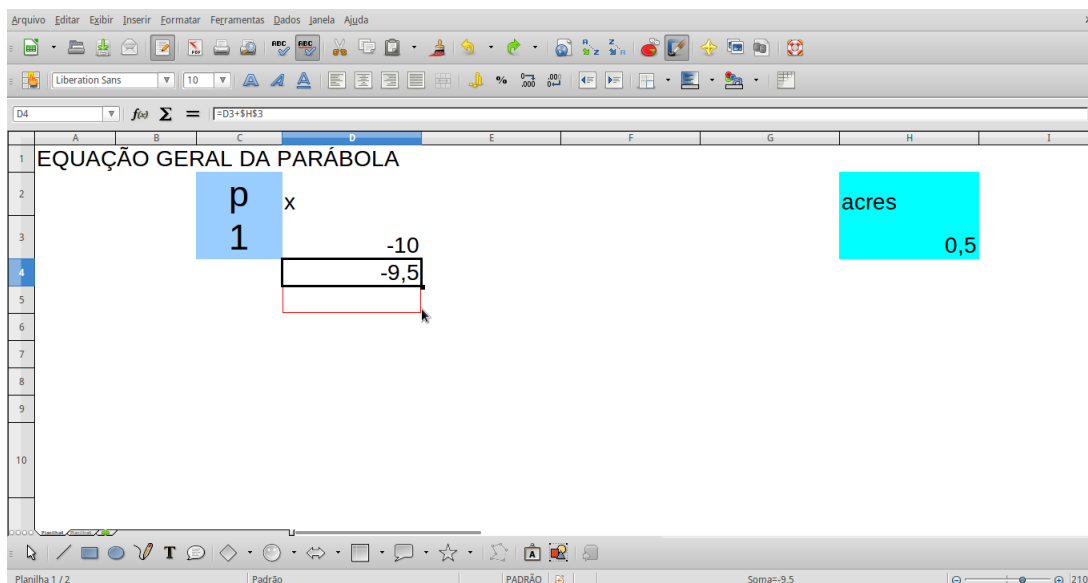


Figura 81: Planilha 11: passo 06

- 7) Na célula *X1* entre com o comando $= (1/ \$C\$3) * (W1) \wedge 2$, selecione a célula e repita o passo 6;

GRÁFICO

- 8) Selecione as colunas *W* e *X* da linha 2 até a 60;

- 9) Selecione a opção *Inserir gráficos*, escolha *Dispersão* → *Somente linhas*, marque a opção *Linhas suaves*, Selecione *Série de dados*, clique em *Valores de X* → *Intervalo para valores de X*, selecione a coluna *X* da linha 2 até a 60;
- 10) Selecione *Valores de Y* → *Intervalo para valores de Y*, selecione a coluna *W* da linha 2 até a 60;

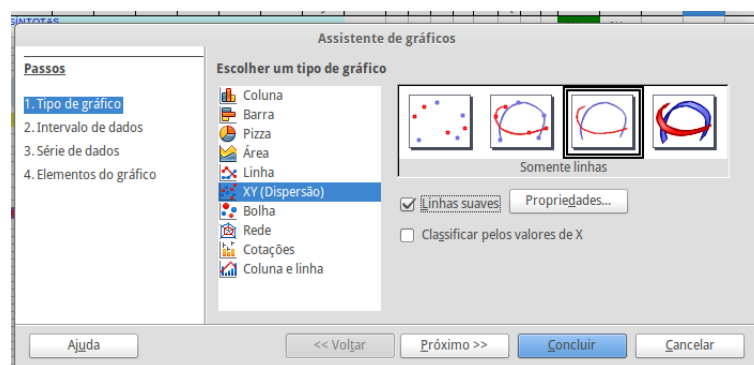


Figura 82: Planilha 11: passo 10

- 11) Selecione o gráfico, com o botão direito clique sobre o gráfico e selecione a opção *Posição e tamanho*, defina *Largura: 20* e *Altura: 20*;
- 12) Desproteger a célula *C3*;
- 13) Proteger a planilha.

5.12 Planilha 12: Hipérbole - centro (x_o, y_o)

- 1) Mesclar as células *A1, B1, C1, ... H1*;
- 2) Nas células *A3* e *B3* digitar *a* e *b* respectivamente;
- 3) Nas células *A4* e *B4* digitar 2;
- 4) Nas células *A8* e *B8* digitar x_o e y_o respectivamente;
- 5) Nas células *A9* e *B9* digitar 1;
- 6) Na célula *A12* digitar Focos;
- 7) Nas células *A13* e *A14* digitar respectivamente F_1 e F_2 ;
- 8) Nas células *B13* e *B14* digitar = *A9*;
- 9) Na célula *C13* digitar o comando = $B9 - RAIZ(A4 \wedge 2 + B4 \wedge 2)$;
- 10) Na célula *C14* digitar o comando = $B9 + RAIZ(A4 \wedge 2 + B4 \wedge 2)$;
- 11) Na célula *D3* digitar -10, abaixo, na célula *D4*, digitar = $D3 + 0,5$;
- 12) Clique sobre a célula *C4*, posicione o cursor do mouse no canto inferior direito, assim que aparecer o símbolo + clique e arraste até a linha 85;
- 13) Na célula *E3* digitar x , abaixo digite o comando = $\$A\$9 + \$B\$4 * SENH(D4)$;

- 14) Selecione a célula $E4$, posicione o cursor no canto inferior direito aguarde até aparecer o símbolo $+$, clique e arraste até a linha 85;
- 15) Na célula $F3$ digitar y , abaixo na célula $F4$ entrar com comando $=B\$9 - A\$4 * COSH(D4)$;
- 16) Repita o passo 14) para a célula $F4$;
- 17) Na célula $G4$ entrar com o comando $=E4$ e em seguida repetir o passo 14 para esta célula;
- 18) Na célula $H4$ entrar com comando $=B\$9 + A\$4 * COSH(C5)$, repetir o passo 14 para esta célula;
- 19) Selecione as colunas E e F da linha 4 até a linha 85;
- 20) Na opção inserir clique em *Gráficos* → *Dispersão* → *Somente linhas*, selecione *Linhas suaves* → *concluir*; veja 83

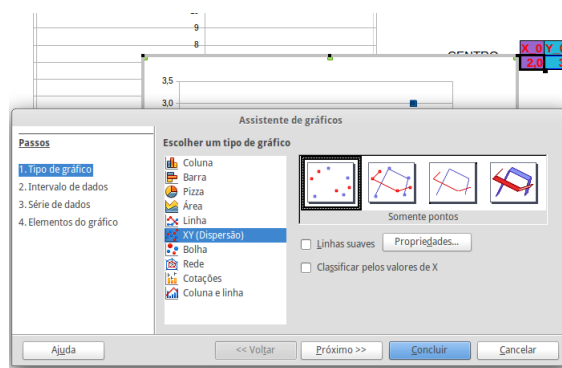


Figura 83: Planilha 12: passo 20

- 21) Clique sobre o gráfico com o botão direito do mouse clique sobre o eixo x , escolha a opção *Formatar eixo*, defina **Mínimo=-15**, **Máximo=15** e **Intervalo=1**;
- 22) Repita o passo anterior para o eixo y ;
- 23) Clique novamente sobre o gráfico com o botão direito do mouse e selecione *Intervalo de dados*. Veja a figura [84];

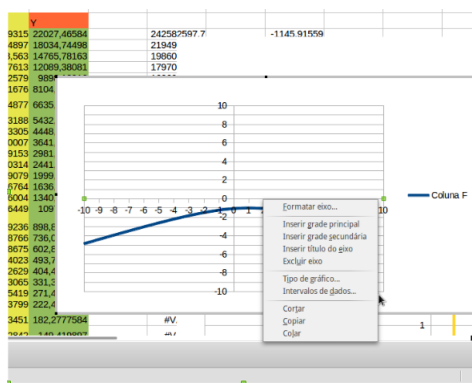


Figura 84: Planilha 12: passo 23

- 24) Clique em *Adicionar*;
- 25) Selecione *Valores de X*, clique no ícone para selecionar *Intervalos para valores de X* e selecione a coluna *G* da linha 4 até a linha 85;
- 26) Repita o passo acima para *Valores de Y* selecionando a coluna *H* da linha 4 até a 85, veja figura 85;

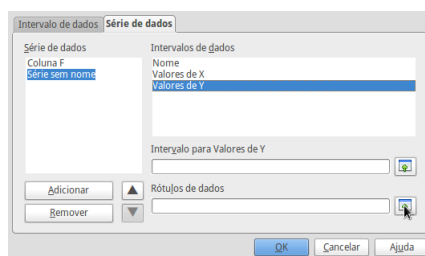


Figura 85: Planilha 12: passo 26

- 27) Clique em *Adicionar*;
- 28) Selecione *Valores de X*, clique no ícone para selecionar *Intervalos para valores de X* e selecione as células *B13* e *B14*;
- 29) Selecione *Valores de Y*, clique no ícone para selecionar *Intervalos para valores de y* e selecione as células *C13* e *C14*;
- 30) Com botão direito do mouse clique sobre o gráfico, selecione a opção *posição e tamanho*, defina **Largura=20** e **Altura=20**;
- 31) Na célula *A18*, *B18*, *C18*, *D18*, *E18* digite respectivamente x^2 , $-$, y^2 , $=$, 1 ;
- 32) Na célula *A19* digitar $= A3 \wedge 2$ e na *C19* digitar $B3 \wedge 2$;
- 33) Mesclar as células *B18* com *B18*, *D18* com *D19* e *E18* com *E19*;
- 34) Para melhorar o visual pode-se selecionar as células que têm os focos, os parâmetros, e a forma canônica e colocar uma cor de preenchimento;
- 35) Para finalizar posicionar o gráfico de forma que facilite a visão do gráfico e dos parâmetros.

5.13 Planilha 13: Parábola - vértice não coincidente com a origem

- 1) Na célula A1 digite *Equação geral da parábola - eixo OY*;
- 2) Nas células A2, B2 e C2 entre com x_0 , y_0 e p nesta ordem;
- 3) Nas células A3, B3 e C3 entre com o valor 1;
- 4) Na célula A5 digite $(3$, na B5 digite $= SE(A3 > 0; -"; " + ")$, na C5 entre com o comando $ABS(A3)$, na D5 entre com $)^2$, na E5 digite $=$, na F5 entre com o comando $= 4 * C3$, na G3 digite $(y$, na H3 entre com o comando $= SE(B3 > 0; -"; " + ")$, na I5 digite $= ABS(B3)$, e finalmente na J5 digite $)$;
- 5) Na célula W1 entre com -10 , abaixo na célula W2 digite $= W1 + 0, 3$;
- 6) Selecione W2, posicione o curso no canto inferior direito da célula, assim que aparecer o sinal $+$, clique com o botão esquerdo segure e arraste até a linha 60;
- 7) Na célula X1 entre com o comando $= (1/SC$3) * (D3 - SA$3)^2 + SB$3$, selecione a célula e repita o passo 6;

GRÁFICO

- 8) Selecione as colunas W e X da linha 2 até a 60;
- 9) Selecione a opção *Inserir gráficos*, escolha *Dispersão → Somente linhas*, marque a opção *Linhas suaves*. Selecione *Série de dados*, clique em *Valores de X → Intervalo para valores de X*, selecione a coluna X da linha 2 até a 60;
- 10) Selecione *Valores de Y → Intervalo para valores de Y*, selecione a coluna W da linha 2 até a 60;
- 11) Selecione o gráfico, com o botão direito clique sobre o gráfico e selecione a opção *Posição e tamanho*, defina *Largura: 20* e *Altura: 20*. Selecione o gráfico e clique com botão direito do mouse sobre o eixo Y e selecione *Formatar eixo*, desmarque **Automático** e defina *Mínimo=-20*, *Máximo=20*, *Intervalo=1*. Faça o mesmo para o eixo X
- 12) Selecione as células A3 e B3, clique em *Inserir gráficos*, selecione *Dispersão → Somente pontos → Série de dados*, veja a figura 86;

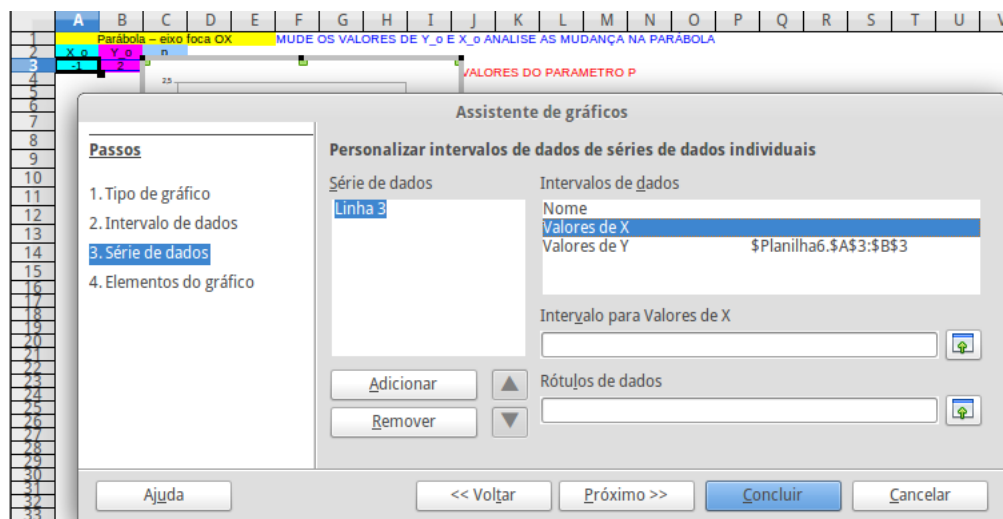


Figura 86: Planilha 13: passo 12

- 13) Clique no ícone do *Intervalo para valores de X* e selecione a célula A3, em seguida clique em *valores de Y* → *Intervalo para valores de Y* e selecione a célula B3;
- 14) Clique com botão direito do mouse sobre o eixo Y e selecione *Formatar eixo*, desmarque **Automático** e defina *Mínimo*=-20, *Máximo*=20, *Intervalo*=1;
- 15) Selecione o gráfico, com o botão direito clique sobre o gráfico e selecione a opção *Posição e tamanho*, defina *Largura*: 20 e *Altura*: 20;
- 16) Selecione o gráfico novamente, dê duplos cliques sobre a área e com botão direito do mouse clique e selecione *Formatar área do gráfico*, selecione *área* defina como *Nenhum*;
- 17) Posicione um gráfico sobre o outro de forma que os eixos se confundam, (observem que devem ter o mesmo intervalo);
- 18) Selecione o gráfico com duplo clique, clique sobre ele, com botão direito do mouse, selecione a opção *Inserir/excluir eixo* desmarque *Eixo X* e *Eixo Y*.

Conclusão

Diante da atual conjuntura de ensino de matemática na Bahia, no ensino médio, em que de um lado observa-se alunos na sua maioria desmotivados, com consideráveis falhas no aprendizado dos fundamentos matemáticos, e de outro uma carências de tempo de trabalho em sala de aula, com apenas três horas aulas semanais, percebe-se que os professores se vêem num dilema na hora de construir seu plano anual de curso, levando a uma certa frustração, quando é necessário suprimir alguns conteúdos do plano. Como relatamos anteriormente, geralmente o estudo das cônicas fica fora do planejamento. Esta conjuntura nos levou realizar este trabalho de estudo das cônicas com o uso de recursos tecnológicos. Considerando o os acesso e objetivos pedagógicos, estabelece-se assim a escolha do estudo através das planilhas eletrônicas. Nosso propósito era de contribuir com o professor no sentido de apresentar alternativas às aulas tradicionais de forma a elevar o interesse do aluno pelo conteúdo e pelas aulas.

Discutir sobre o uso dos recursos tecnológicos no processo de ensino/aprendizagem é examinar a realidade atual dos nossos alunos considerando os novos modelos de interação social. Ao abordar sobre o papel da tecnologia no processo pedagógico buscamos apontar quais são os aspectos positivos, mas, não deixando de mostrar que há os pontos negativos. Procuramos salientar que para a tecnologia contribuir na construção de conhecimento, o professor precisa conhecê-la, identificando a forma mais adequada para que se alcance os objetivos, e ainda compreender que tais recursos contribuem para o processo, mas é apenas parte dele, não é infalível, tão pouco completo. Cabe ao educador definir claramente seus objetivos a alcançar e por fim, planejar, buscando a metodologia e as estratégias mais adequadas.

Na nossa perspectiva, o educador deve esta numa constante busca por aperfeiçoamento, através de cursos de formação no uso das tecnologias no processo educacional com vistas a melhorar a sua práxis pedagógica, contribuindo para que suas aulas seja mais atrativa e dinâmicas de forma a integrar seus discente no processo de aprendizagem. Com esse objetivo o Ministério de Educação, as Secretarias Estaduais de Educação e até os municípios tem buscado promover cursos de inserção da tecnologia em sala de aula, visando uma melhoria no processo educacional, porém cursos pontais não são capazes de dar ao professor condições de uso das várias tecnologias, principalmente com a velocidade de seus avanços. Assim, cabe ao professor pesquisar e procurar se manter sempre atualizado, explorando novas metodologias e técnicas de inserção desses recursos em sala de aula.

As atividades propostas são situações de aprendizagem elaboradas de maneira que cada uma seja capaz de contribuir com o professor de forma a atender determinado objetivo.

Conhecendo a atividade o professor verifica se ela contempla os objetivos pretendidos, só então ele coloca os alunos diante de um problema a ser resolvido. Além disso, ao apresentarmos o passo-a-passo para construção das planilhas temos a perspectiva de que o professor pesquise o software e a partir daí busque se aprofundar no estudo desse de forma a desenvolver novos trabalhos com esta ferramenta ou outras similares e assim possa contribuir com o processo de ensino/aprendizagem. Os trabalhos de pesquisa publicados a respeito do uso das planilhas eletrônicas no ensino de matemática evidenciam as potencialidades e aplicações desse recurso para o desenvolvimento do processo de ensino/aprendizagem. O destaque fica para a larga aplicação no estudo da matemática financeira, observando-se muitos trabalhos publicados a respeito. Assim, para uma atividade significativa e um uso valioso das planilhas, o professor deve estudar o recurso a fim de conhecer suas potencialidades de forma a conseguir promover o desenvolvimento do aluno.

Dessa forma, entendemos que a partir deste trabalho foi possível perceber a relevância de se utilizar recursos tecnológicos no ensino de matemática em especial das planilhas eletrônicas. Destacou-se, no transcorrer deste trabalho, o grande potencial de recursos como o CALC no desenvolvimento de atividades voltadas para o ensino da matemática. Fica para reflexão do leitor as considerações sobre a importância de se conhecer a ferramenta que pretende utilizar em sua aula, bem como, de preparar o recurso tendo em vista o objetivo desejado.

Por fim, considerando as dificuldades encontradas e as potencialidades observadas no desenvolvimento deste trabalho ressaltamos a necessidade de se continuar os estudos sobre o uso da planilha eletrônica no ensino de matemática, buscando desenvolver novos trabalhos que venham a contribuir para uma aprendizagem mais significativa. Com isso, acreditamos ter fomentado no leitor o interesse pelo desenvolvimento de novos estudos sobre o tema, entendemos que a partir deste trabalho motivamos o desenvolvimento de novas pesquisas sobre o uso das tecnologias, em especial das planilhas eletrônica, no ensino de matemática.

Referências

ABREU, C. N. Foi mal!: Computadores abertos, cabeças fechadas. *Revista Pátio*, Porto Alegre, ano. IV, n. 23, p. 46–47, dez 2014/fev 2015. Citado na página 18.

ALMEIDA, M. E. B. *Informática e formação de professores*. 2000. Disponível em: <<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003148.pdf>>. Acesso em: 15 dez. 2014. Citado na página 19.

ALMEIDA, M. E. B. *Tecnologia na escola: criação de redes de conhecimentos*. 2015. Disponível em: <http://webeduc.mec.gov.br/midiaseducacao/material/introductorio/popups/m1_e2_pop_TecnologiaNaEscola.html>. Acesso em: 10 jan 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1974. Tradução Elza F. Gomide. Citado na página 26.

BRASIL. *Ensino médio, Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 45.

DAGA, A. F. B. *Educação continuada para professores: Integração da tecnologia de computadores por meio da aprendizagem colaborativa*. 60 p. Dissertação (Mestrado) — PUCPR, Curitiba, 2006. Citado na página 20.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e aplicações*. São Paulo: Ática, 2013. Citado na página 33.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (COLEÇÃO PROFMAT). Citado na página 27.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Higino H. [S.l.: s.n.], 1995. Citado na página 26.

FARIA, E. T. *O professor e as novas tecnologias*. 2015. Disponível em: <http://clিকেaprenda.uol.com.br/sg/uploads/UserFiles/File/O_professor_e_as_novas_tecnologias.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2015. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 21.

GLADCHEFF, A. P.; ZUFFI, E. M.; SILVA, D. M. da. Um instrumento para avaliação da qualidade de softwares educacionais de matemática para o ensino fundamental. In: *Anais do XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação*. Fortaleza: [s.n.], 2001. Citado na página 20.

IEZZI, G. *Fundamentos da matemática elementar: geometria analítica*. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005. Citado na página 27.

LAGDEM, V. *cônicas: Uma proposta de estudo através do EXCEL*. 72 p. Dissertação (Mestrado) — Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2011. Citado na página 24.

- MENEZES, C. S.; VALLI, M. C. P. *O Uso da Planilha Eletrônica como Instrumento de Apoio à Construção do Conhecimento*. 1997. Disponível em: <http://pead.faced.ufrgs.br/sites/arquiteturas_pedagogicas/textos_complementares/planilha.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2015. Citado na página 23.
- MORAN, J. M. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá*. Campinas: Papirus Editora, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 21. ed. Campinas: Papirus, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.
- MORGADO, M. J. L. *Formação de professores de matemática para o uso pedagógico de planilhas eletrônicas de cálculo: análise de um curso a distância via Internet*. 252 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, 2003. Citado na página 23.
- OLIVEIRA, R. de. *Informática educativa: Dos planos e discurso à sala de aula*. 17. ed. Campinas: Papirus, 2012. Citado na página 18.
- PRENSKY, M. *Digital natives, digital immigrants*. 2001. Disponível em: <http://www.albertomattiacci.it/docs/did/Digital_Natives_Digital_Immigrants.pdf>. Acesso em: 04 jan 2015. Citado na página 18.
- STIELER, C. *Uso da tecnologia da informática no ensino superior: um estudo da aplicação da planilha eletrônica EXCEL na disciplina de matemática financeira*. 85 p. Dissertação (Mestrado) — Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2007. Citado na página 24.
- VALENTE, J. A. As tecnologias digitais e os diferentes letramentos. *Revista Pátio*, Porto Alegre, v. 11, n. 44, p. 12–15, nov 2007/jan 2008. Citado na página 18.