UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MÁRCIO ANTÔNIO MOTA PINTO

MMC E MDC: abordagem e resolução de problemas

São Luís
2015

MÁRCIO ANTÔNIO MOTA PINTO

MMC E MDC: abordagem e resolução de problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva

São Luís

2015

Pinto, Márcio Antônio Mota.

MMC E MDC: abordagem e resolução de problemas /Márcio Antônio Mota Pinto. - São Luis, 2015.

55f.

Impresso por computador (fotocópia).

Orientador: João de Deus Mendes da Silva.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1.Conjuntos 2. Múltiplos 3. Divisores 4. Euclides 5. MMC 6. MDC 7. Problemas I.Título.

CDU 517.272

MÁRCIO ANTÔNIO MOTA PINTO

MMC E MDC: abordagem e resolução de problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em de de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva (Orientador)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Prof. Dr. José Cloves Verde Saraiva
UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

Aos meus pais Genésio da Cunha Pinto e Antônia Cândida Mota Pinto, à minha esposa Cristiane e as minhas filhas Andressa e Alana.

AGRADECIMENTOS

″Ó Pai que estás no Céu, Venho Te agradecer Por Teu cuidado e amor, Ao dirigir meu ser. Graças a Ti, Senhor. Meus lábios em louvor Não podem expressar Quão grato sou a Ti. Graças a Ti, Senhor! Por Tua proteção E bençãos de Tua mão, Graças a Ti, Senhor! Graças a Ti, Senhor.″ Hino 245 - Hinário Adventista do Sétimo Dia.

A Deus, por sempre me ajudar nas horas mais difíceis.

Aos meus pais, Genésio e Antônia Cândida, pelo carinho e dedicação dados a mim e aos meus irmãos.

Ao professor João de Deus Mendes da Silva, pela sua ajuda e dedicação, sendo para todos um grande exemplo de luta e dedicação ao trabalho e a sociedade.

Aos meus amigos do PROFMAT turma 2013, os quais sempre me ajudaram e que contribuíram para a minha formação, em especial a Raimundo, Patrício, Ednaldo, Gilfraine, Leandro, Evaldo, Segundo e outros os quais tenho bastante admiração e por ter me ajudado na elaboração deste trabalho.

A minha esposa Cristiane pelo incentivo, apoio e companheirismo que me deste ao longo desta jornada. Ao professor Saraiva por fazer o meu sonho acordar.

Enfim, a todos aqueles que contribuem de forma direta ou indireta na minha vida pessoal e profissional.

As coisas encobertas pertencem ao Senhor nosso Deus, mas as reveladas pertencem a nós e a nossos filhos para sempre, para que obedeçamos a todas as palavras desta lei.

Deuteronômio 29.29

RESUMO

A proposta deste trabalho é fazer uma abordagem sobre o mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum e o uso na resolução de problemas na educação básica, em que procurou-se expor o tema de maneira simples, objetiva e contextualizada e ver como isto interfere na aprendizagem dos discentes. Iniciamos fazendo uma abordagem sobre noções de conjuntos visando mostrar que esta linguagem é fundamental. Em seguida apresentamos os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros com suas operações e propriedades e também definições e teoremas, como divisores e múltiplos, números primos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Finalmente introduzimos vários problemas que são resolvidos utilizando mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum e o algoritmo de Euclides.

Palavras-chaves: conjuntos. Múltiplos. Divisores. Euclides. MMC. MDC. Problemas.

ABSTRACT

The purpose of this work is to approach the least common multiple and greatest common divisor and the use to solve problems in basic education, in which we tried to expose the theme of simple, objective and context and see how it interferes with learning of students. We started making a joint approach on notions of order to show that this language is fundamental. The following are the set of natural numbers with their operations and property and also definitions and theorems, as dividers and multiple, prime numbers, least common multiple and greatest common divisor. Finally we introduce several problems that are solved using least common multiple and greatest common divisor and the Euclidean algorithm.

Keywords: sets. Multiple. Dividers. Euclid. MMC. MDC. Problems.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Geralmente, os discentes da educação básica têm o primeiro contato com o estudo de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros a partir do 6º Ano do ensino fundamental. Mas, é possível encontrar autores (Exemplo, Dante (2014)) que, inclusive tem reservado espaço para esses assuntos já no livro indicados ao 5º Ano, o que prova a percepção de que o tema é bem acessível ao público e pode ser introduzido desde o 5º ano.

A abordagem e a definição de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros são geralmente feitos de modo bem sucinto buscando colocar os dois tópicos de maior interesse, que são, a determinação do mínimo múltiplo comum (mmc) e máximo divisor comum (mdc) de números inteiros, aos quais docentes e autores costumam dispensar maior atenção. Ocorre que, além da abordagem se limitar basicamente a determinação de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros, muitos dedicam-se a procurar as diversas relações (algébricas) existentes entre esses números e na exploração de casos particulares. Dispensam pouca atenção aos fatos históricos e na resolução de problemas relacionados com a contextualização e a interdiplicinaridade, o que não estimula o raciocínio, pode prejudicar o entendimento do discente e não o encaminha a conhecer a vastidão de aplicação em que o assunto pode ser útil. Desta maneira, entende-se que o professor de matemática deve estar atento ao que explorar e como explorar no processo de ensino e aprendizagem de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros.

Observar-se uma intenção em orientar os professores de matemática quanto ao modo de exploração do assunto. Assim, não é possível concluir que o tema é sempre explorado da forma apresentada acima, é certo que encontramos na maioria dos textos um ou outo exemplo relacionado à geometria ou outras de conhecimento, mas é pouco provável que existem notas históricas, informações relacionadas à origem do problema ou a que outra área de matemática ou da ciência que está relacionado, ou seja, problemas assim não estabelecem uma ideia de aplicação de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros, parecem que foram criados propositalmente pelo autor ou pelo professor somente para ilustrar numericamente o que pedem.

Para o PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais),

> Conceitos como os de ″múltiplos e divisor″ de um número natural ou o conceito de ″número primo″ podem ser abordados neste ciclo como uma aplicação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construídos em ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar mecanicamente, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum sem compreender as situações - problemas que esses conceitos permitem resolver.

Isto direciona ao objetivo deste trabalho, que é abordar o estudo de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros de forma contextualizada e interdisciplinar, explorando o assunto e resolvendo problemas.

Sendo assim, o tema foi organizado da seguinte maneira: Inicia-se com uma abordagem sobre conjuntos falando a notação, representação e operações com conjuntos, depois apresentamos os conjuntos dos números naturais e inteiros com suas propriedades de seus elementos e suas operações estendendo ao conceito de divisibilidade, onde definimos múltiplos e divisores, números primos, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros onde apresentaremos de determinação e por fim propomos problemas que são resolvidos com o uso dos conceitos, teoremas e métodos posto neste trabalho.

2 CONJUNTOS

2.1 Noções de conjuntos

Uma coleção ou classe de objetos e símbolo é um conjunto.

São exemplos de conjuntos, as letras do alfabeto, um time de futebol, os dias da semana, etc.

Os objetos ou símbolos que formam o conjunto são chamados de *elementos*.

Notação: os conjuntos são geralmente indicados por letras maiúsculas do alfabeto $(A, B, C, \ldots)$.

2.1.1 Representação de um conjunto

Para representar um conjunto, usamos $\{\ \}$ (duas chaves), escrevendo entre elas uma propriedade característica de seus elementos ou escrevendo cada um desses elementos.

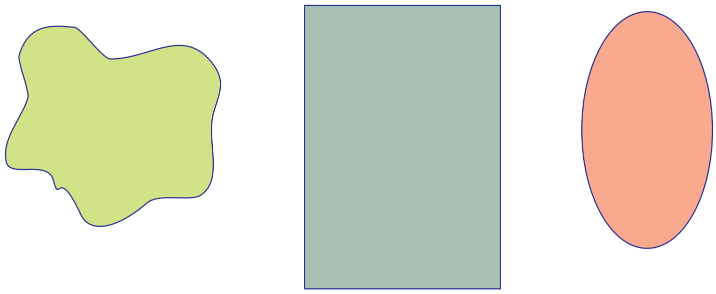
Exemplo 1. $V = \{\text{vogais do alfabeto}\}$ ou $V = \{a, e, i, o, u\}$.

Num conjunto é permitido substituir elementos por reticências $(\ldots)$, desde que isto não prejudique a compreensão.

Exemplo 2. O conjunto de letras do alfabeto

$$A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}.$$

Podemos, ainda, representar um conjunto colocando os seus elementos dentro de uma linha fechada que não se entrelaça (Diagrama de Venn).



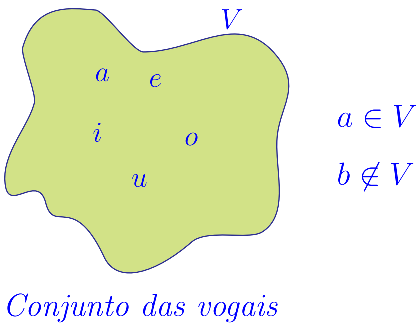
Conjunto vazio é aquele que não possui elemento. É representado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Exemplo 3. $V = \{\text{dia da semana que começa com a letra x}\}$ ou $V = \emptyset$.

2.1.2 Relação de pertinência

Se um objeto qualquer faz parte de um conjunto, isto é, é um elemento de um conjunto, dizemos então que o objeto pertence ao conjunto, e usamos o símbolo $\in$ para indicar esse fato, caso contrário usamos o símbolo $\notin$ (não pertence).

Exemplo 4.



2.1.3 Subconjunto

Um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B, se todos os elementos de A forem também elementos de B.

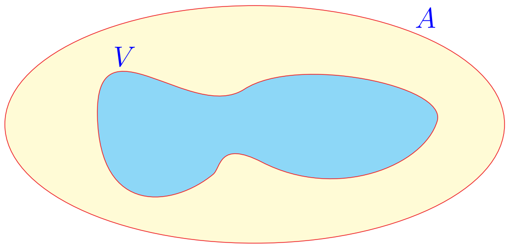
Dizemos, então, que A é subconjunto de B, ou que A está contido em B e indicamos por $A \subset B$.

Exemplo 5. Se $A = \{\pi, 2\}$ e $B = \{2, 3, \pi, 4\}$ então $A \subset B$, pois todos os elementos de A pertencem a B.

Indicaremos que um conjunto de A não está contido em B por $A \not\subset B$.

Se A está contido em B, podemos então dizer que B contém A, e indicamos por $B \supset A$, caso contrário dizemos que B não contém A e indicamos por $B \not\supset A$.

Exemplo 6. Seja $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ o alfabeto e $V = \{a, e, i, o, u\}$, temos que $A \supset V$.



2.1.4 União de conjuntos

Dados os conjuntos A e B, a união $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B ou a ambos.

O símbolo $\cup$ indica união.

Exemplo 7. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 5\}$, então

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

2.1.5 Intersecção de conjuntos

Dados os conjuntos A e B, a intersecção $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e também a B.

O símbolo $\cap$ indica intersecção.

Exemplo 8. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 0\}$, então

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

Exemplo 9. Se $V = \{\text{vogais}\}$ e $C = \{\text{consoantes}\}$, então

$$V \cap C = \emptyset.$$

2.2 Conjunto dos números naturais

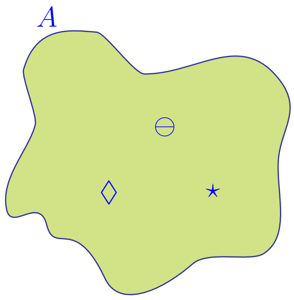
Número é uma ideia de quantidade.

Numeral é um símbolo que representa a ideia de quantidade.

Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir.

Notação: o número de elementos de um conjunto A é indicado por $n(A)$.

Observamos o conjunto:



Número de elementos de A: três

Um símbolo que representar esse número: 3

Os números naturais formam um conjunto que se indica por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

"A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra "sucessor". Intuitivamente quando $n, n' \in \mathbb{N}$, dizer que n' é sucessor de n, significa que n' vem logo depois de, ou melhor, que a quantidade que n' representa tem um elemento a mais que a quantidade que n representa".Referência [10]

Essa caracterização dos número naturais é graças ao matemático italiano *Giuseppe Peano*.

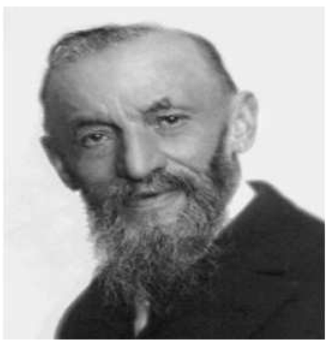
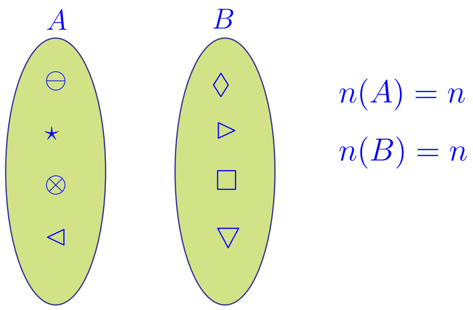


Figura 2.1: Giuseppe Peano

2.2.1 Igualdade e desigualdade

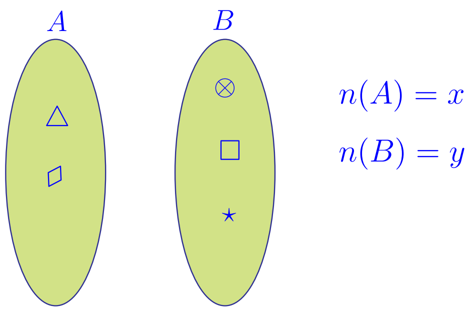
Observe:

1. Sejam os conjuntos



   Então o número de elementos de A é igual ao número de elementos de B, representamos esse fato pelo símbolo $=$, assim $n = n$.

2. Sejam os conjuntos



   Então o número de elementos de A é diferente do número de elementos de B, representamos esse fato pelo símbolo $\neq$, assim $x \neq y$.

No caso (2) dizemos que:

- O número de elementos de A é menor que o número de elementos de B, e indicamos por $x < y$.

- O número de elementos de B é maior que o número de elementos de A, e indicamos por $y > x$.

Propriedades da igualdade

Se $a, b, c \in \mathbb{N}$, então

- *Reflexiva:* $a = a$;
- *Simétrica:* se $a = b$, então $b = a$;
- *Transitiva:* se $a = b$, e $b = c$, então $a = c$.

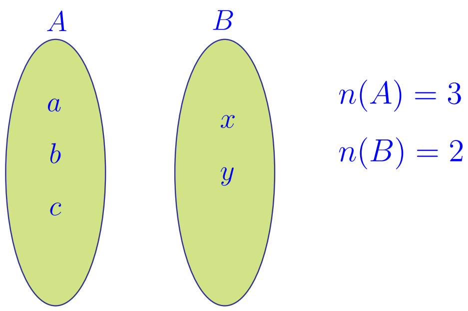
Propriedades de desigualdades

- *Transitiva:* se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$. Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$;
- *Tricotomia:* vale uma, e somente uma, das alternativas: $a = b, a < b$ ou $b < a$;
- *Boa ordenação:* todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.

2.2.2 Operações no conjunto dos números naturais

1. **Adição**

   Sejam A e B dois conjuntos disjuntos



   Vamos unir esses dois conjuntos

$$A \cup B = \{a, b, c, x, y\}.$$

Verifique que

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B)$$

então, $2 + 3 = 5$.

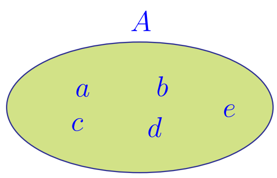
Essa operação chama-se *adição* e é indicada pelo sinal ″+″.

Dizemos que 2 e 3 são as parcelas e 5 é a soma total.

2. **Subtração**

   Esta relacionada a ideia de tirar uma quantidade da outra.

   Seja o conjunto A abaixo



$n(A) = 5$

   Vamos tirar 2 elementos de A, então temos

$$5 - 2 = 3.$$

   Essa operação chama-se *subtração* e é indicada pelo sinal ″-″.

   Na subtração $5 - 2 = 3$, dizemos que:

   - 5 é o minuendo;
   - 2 é o subtraendo;
   - 3 é a diferença.

3. **Multiplicação**

   A multiplicação é uma adição de parcelas iguais.

   Veja

$$3 + 3 + 3 + 3 = 12.$$

   Podemos representar a mesma igualdade por

$$4 \times 3 = 12 \text{ ou } \ 4 \cdot 3 = 12.$$

   Essa operação chama-se *multiplicação* e é indicada pelo sinal ″$\cdot$″ ou ″$\times$″.

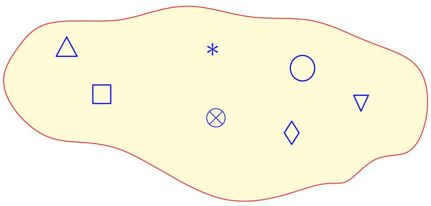
   Na operação $4 \cdot 3 = 12$, dizemos que

- 4 e 3 são os fatores;
- 12 é o produto.

4. **Divisão**

   Está relacionada a ideia de distribuir os elementos de um conjunto.

   Seja o conjunto A abaixo

   $n(A) = 7$

   Vamos distribuir esses elementos em subconjuntos que contenha dois elementos, por exemplo $\{\triangle, \square\}$, $\{\bigcirc, *\}$ e $\{\bigtriangledown, \otimes\}$, obtemos três subconjuntos e sobra um elemento $(\Diamond)$.

   Essa operação chama-se divisão e é indicada pelos sinais $:$, $/$, $\div$.

   Na divisão $7 : 2 = 3$ e sobra um elemento, dizemos que

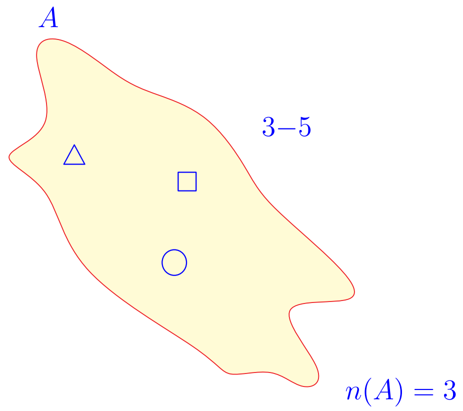
   - 7 é o dividendo;
   - 2 é o divisor;
   - 3 é o quociente;
   - 1 é o resto.

   Observação 1. Quando o resto da divisão for zero dizemos que a divisão é exata.

2.3 Conjunto de números inteiros

O conjunto dos números naturais possui a propriedade do fechamento em relação a adição e a multiplicação, mas não possui esta propriedade em relação à subtração. Vejamos:

Dado o conjunto abaixo com 3 elementos e desejamos retirar 5 elementos.



Para realizar essa operação será neessário pelo menos mais dois elementos ao conjunto A, isto é, falta dois elementos. Para representar essa ideia um novo número que vem ser a ser indicado por -2. De maneira análoga, podemos introduzir os números $-1, -2, -3, -4, \cdots$ que são chamados de negativos.

Os número naturais juntamente com os números negativos formarão um novo conjunto que chamaremos de conjuntos dos números inteiros e indicamos por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

3 DIVISIBILIDADE

Dados dois números inteiros a e b com $a \neq 0$, diremos que a divide b ou que b é divisível por a, escrevemos $a \mid b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$.

Exemplo 10.

a) $2 \mid 10$, pois $10 = 2 \cdot 5$;

b) $3 \mid 12$ pois $12 = 3 \cdot 4$;

c) $4 \nmid 15$, pois não existe $c \in \mathbb{Z}; 15 = 4 \cdot c$.

3.1 Critérios de divisibilidade

Seja dado um número $\underline{a}$, representado na base 10, isto é, no sistema de numeração decimal, por $a = a_n a_{n-1} \cdots a_0$; temos que:

1) a é divisível por 2 quando a_0 for 0, 2, 4, 6 ou 8.

2) a é divisível por 5 quando a_0 for 0 ou 5.

   Prova: Pondo $a = 10 \cdot (a_n a_{n-1} \cdots a_1) + a_0$, temos que a é divisível por 2 quando $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e divisível por 5 quando $a_0 \in \{0, 5\}$.

   Exemplo 11. O número 136 é divisível po 2, pois o últimos algarismo é 6, assim como 248, 352, 1904 e 50 também são divisíveis por 2.

   O número 600 e 325 são divisíveis por 5, pois o último algarismo é 0 e 5.

3) a é divisível por 3 quando $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ é divisível por 3.

   Prova: Referência [6].

   Exemplo 12. O número 3480 é divisível por 3, pois 3+4+8+0=15 que é divisível por 3.

3.2 Múltiplos e divisores

Sendo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, definimos que a é múltiplo de b ou de c se $a = b \cdot c$; nestas condições os números b e c são chamados de divisores de a.

Exemplo 13.

a) $15 = 3 \cdot 5$, então 15 é múltiplo de 3 e 5 e estes são divisores de 15;

b) $8 = 2 \cdot 4$, então 2 e 4 são divisores de 8 e 8 é múltiplo de 4 e de 2.

O conjunto de todos os múltiplos de um inteiro $a \neq 0$ indica-se por $M(a)$, onde $M(a) = \{a \cdot q;\ q \in \mathbb{Z}\}$.

Exemplo 14. $M(4) = \{4 \cdot q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \cdots\}$.

Definição 1. Sejam a e b dois números inteiros diferentes de zero. Chama-se múltiplo comum de a e b todo número inteiro x tal que $a \mid x$ e $b \mid x$.

Em outras palavras, múltiplo comum de a e b é todo inteiro que pertence simultaneamente aos conjuntos $M(a)$ e $M(b)$.

O conjunto de todos os múltiplos comuns de a e b indica-se por $M(a, b)$. Assim,

$M(a, b) = \{x \in \mathbb{Z};\ a \mid x \text{ e } b \mid x\}$, ou seja, $M(a, b) = \{x \in \mathbb{Z};\ x \in M(a) \text{ e } x \in M(b)\}$ e portanto, $M(a, b) = M(a) \cap M(b)$.

Exemplo 15.

$$\begin{aligned} M(4) &= \{4q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \cdots\}; \\ M(5) &= \{5q;\ q \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \cdots\}; \\ M(4, 5) &= M(4) \cap M(5b) = \{0, \pm 20, \pm 40, \cdots\}. \end{aligned}$$

3.3 Mínimo múltiplo comum

Diremos que um número natural $m \neq 0$ é mínimo múltiplo comum (m.m.c) de $a, b \in \mathbb{Z}^*$ se possuir as seguintes propriedades:

i) m é um múltiplo comum de a e b;

ii) se c é um múltiplo comum de a e b, então $m \mid c$.

O mínimo múltiplo comum de a e b indica-se pela notação $mmc(a, b)$.
Pelo "Princípio da Boa Ordenação", o conjunto dos múltiplos comuns positivos de a e b possui o elemento mínimo e, portanto, o $mmc(a, b)$ existe sempre e é único.

Exemplo 16. Se $M(4, 5) = \{0, \pm 20, \pm 40, \ldots\}$, então $mmc(4, 5) = 20$.

Diremos que um número natural m é um mmc dos inteiros não nulos $a_1, a_2, \cdots a_n$, se m é um múltiplo comum de $a_1, a_2, \cdots a_n$, e, se para todo múltiplo comum m' desses números, tem -se que $m \mid m'$.
O conjunto de todos os divisores de um inteiro qualquer a indica-se por $D(a)$, onde $D(a) = \{x \in \mathbb{Z}^*;\ x \mid a\}$.

Exemplo 17. $D(8) = \{x \in \mathbb{Z}^*;\ x \mid 8\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Definição 2. Chama-se divisor comum de dois inteiros a e b de todo inteiro $d \neq 0$ tal que $d \mid a$ e $d \mid b$.

Em outras palavras, divisor comum de dois inteiros a e b é todo inteiro $d \neq 0$ que pertence simultanêamente aos conjuntos $D(a)$ e $D(b)$.

O conjunto de todos os divisores comuns de dois inteiros a e b indica-se por $D(a, b)$, simbolicamente, temos

$D(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}^*;\ x \mid a \text{ e } x \mid b\}$, ou seja, $D(a, b) = \{x \in \mathbb{Z}^*;\ x \in D(a) \text{ e } x \in D(b)\}$, e portanto $D(a, b) = D(a) \cap D(b)$.

Exemplo 18.

$$\begin{aligned} D(8) &= \{x \in \mathbb{N}^*;\ x \mid 8\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}; \\ D(12) &= \{x \in \mathbb{N}^*; x \mid 12\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}; \\ D(8, 12) &= D(8) \cap D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}. \end{aligned}$$

3.4 Números primos

Definição 3. Um número natural maior que 1 que admite apenas como divisores inteiros positivos o 1 e ele próprio é chamado de número primo.

Exemplo 19. Os números 2, 3, 5, 7 e 11 são primos.

Os números que tem mais de dois divisores são chamados números compostos.

Exemplo 20. O número 12 é composto, pois $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Um número composto pode ser indicado como um produto de fatores primos. Ou melhor, um número que pode ser fatorado.

Exemplo 21. O número $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Aritmética). Todo número natural maior que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Prova da existência: se n for primo, então a prova está feita. Senão, seja $p_1(p_1 > 1)$ o menor dos divisores de n. p_1 é primo. Isso é verdade, pois, caso não fosse, existiria p, $1 < p < p_1$, com $p \mid p_1$. Logo, $p \mid n$. Isso é um absurdo, pois p_1 é o menor natural com tal propriedade.

Sendo assim, $n = p_1 \cdot n_1$. Se n_1 for primo, então a prova está encerrada. Caso contrário, seja p_2 o menor fator de n_1. Usando o mesmo argumento anterior, p_2 é primo e temos $n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$. Repetindo esse processo, obtemos uma sequência decrescente de naturais $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Como todos eles são naturais maiores que 1, este processo finaliza. Já que os primos na sequência $p_1, p_2, \ldots, p_k$ não são necessáriamente distintos, n terá, em geral, a forma

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Prova da unicidade: sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \cdots, q_m$ primos tais que $p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = q_1 \cdot q_2 \ldots q_m$. Deve-se ter $m = n$, pois de outro modo, por exemplo, se $n < m$, ter-se-ia $p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = q_1 \cdot q_2 \ldots q_n \ldots q_m$. Desde que p_1 é primo e divide $q_1 \cdot q_2 \ldots q_n \ldots q_m$, aplicando o fato de $p \mid p_1 \ldots p_n$ então $p = p_i$ várias vezes e reordenando os fatores no produto $q_1 \cdot q_2 \ldots q_n \ldots q_m$, se necessário, pode-se supor que p_1 divide q_1. Uma vez que p_1 divide q_1 e ambos p_1 e q_1 são primos, tem-se $p_1 = q_1$. Como $p_1 = q_1$ e $p_1 \cdot p_2 \ldots p_n = q_1 \cdot q_2 \ldots q_n \ldots q_m$, então $p_2 \cdot p_3 \ldots p_n = q_2 \cdot q_3 \ldots q_n \ldots q_m$. Repetindo o mesmo argumento com p_2, conclui-se que $p_2 = q_2$ e $p_3 \cdot p_4 \ldots p_n = q_3 \cdot q_4 \ldots q_n \ldots q_m$.

Executando várias vezes o mesmo processo, conclui-se que $p_3 = q_3, \ldots, p_n = q_n$ e $1 = q_{n+1} \ldots q_m$, o que não é verdade, pois q_m, sendo primo, não pode ser divisor de 1. Assim, de fato, $n = m$ e, após uma possível reordenação dos fatores em $q_1 \cdot q_2 \ldots q_n$, tem-se $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_n$.

Exemplo 22. Decomponha em fatores primo o número 140, obtemos

$$140 = 2 \cdot 70 = 2 \cdot 2 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7.$$

3.5 Método prático para decomposição de um número natural em fatores primos

Realizamos o seguinte procedimento.

- Escrevemos o número dado à esquerda de uma barra vertical.
- Dividimos o número pelo menor número primo possível.
- Voltamos a dividir o quociente obtido no item anterior pelo menor primo possível.
- O processo se repete, até que o quociente seja 1.
- A decomposição será o produto dos números primos à direita da barra vertical.

Exemplo 23. Decomponha em fatores primo o número 420, temos

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

3.6 Máximo divisor comum

Diremos que um número natural $d \neq 0$ é um máximo divisor comum (mdc) de a e b dois inteiros não conjuntamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$) se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e de b;

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

A condição (ii) acima pode ser reenunciado como se segue.

ii') Se c é um divisor comum de a e b, então $c \mid d$.

Portanto, se d é um mdc de a e b e c é um divisor comum desses números, então $c \leqslant d$. Isto mostra que o máximo divisor comum de dois números é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números.

Em particular, isto nos mostra que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então $d \leqslant d'$ e $d' \leqslant d$, e, consequentemente, $d = d'$. Ou seja, o mdc de dois números é único.

O mdc de a e b será denotado por $mdc(a, b)$.

Exemplo 24. Como $D(8, 12) = D(8) \cap D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$, então o $mdc(8, 12) = 4$.

Um número natural d será dito mdc de dados números inteiros $a_1, a_2, \cdots a_n$, não todos nulos, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de $a_1, a_2, \cdots a_n$;

ii) Se c é um divisor comum de $a_1, a_2, \cdots a_n$, então $c \mid d$

3.7 Métodos de determinação do mdc e do mmc

Inicialmente apresentamos a versão histórica do método de determinar o mínimo múltiplo comum de dois números e do algoritmo de Euclides para determina o máximo divisor comum conforme registrado na obra Os Elementos de Euclides. Como relata ROQUE (2012).

> As técnicas de medida que ocupam um lugar prepoderante nas práticas euclidianas sobre números eram realizadas pelo método da antifairese que no caso dos números é conhecido hoje como "algoritmo de Euclides".Veremos como este método era utilizado para encontrar a medida comum de dois números(ou seja, o mdc entre eles).(ROQUE, 2012. p 107)

Proposição 1 (Proposição 34 do Livro VII). Encontrar o menor número que dois números dados medem.

"Esta proposição apresenta um método para determinar o mínimo múltiplo comum entre dois números a e b, que é o mesmo que encontrar o menor número que ambos dividem". Referência [15]

Proposição 2 (Proposição 1 do Livro VII). Dados dois números diferentes, se o menor é continuamente subtraído ao maior e se o número que sobra nunca mede o anterior, até sobrar uma unidade, então os números originais são primos entre si.

"Nesta proposição, Euclides usa um algoritmo (atualmente conhecido como algoritmo de Euclides) para verificar se dois números diferentes são primos entre si". Referência [15]

Proposição 3 (Proposição 2 do Livro VII). Encontar a maior medida comum entre dois números que não sejam primos entre si.

Corolário 1. Se um número mede dois números, então também mede a maior medida comum entre eles.

"Nesta proposição, Euclides utiliza novamente o seu algoritmo, desta vez para encontrar o máximo divisor comum entre dois números que não são primos entre si". Referência [15]

Exemplo 25. Encontre, por este método, o mdc de 15 e 24.
Começamos por retirar 15 de 24 uma vez, obtendo resto 9. Em seguida retira 9 de uma vez de 15, obtemos resto 6. Agora retiramos 6 de 9, temos resto 3 e por fim retiramos duas vezes o 3 de 6 e temos o resto zero. Logo o máximo divisor comum de 15 e 24 é 3.

Para números pequenos, podemos listar em ordem os primeiros múltiplos dos números no caso de cálculo do mmc e no caso do mdc listar todos seus divisores, identificando os comuns e dentre estes estará o *mmc* ou *mdc*.

Exemplo 26. Determinar o *mmc* de 3 e 4.
Resolução: sejam

$$\begin{aligned} M(3) &= \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \pm 21, \pm 24, \pm 27, \pm 30, \pm 33, \pm 36, \pm 39, \ldots\}; \\ M(4) &= \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \pm 20, \pm 24, \pm 28, \pm 32, \pm 36, \pm 40, \ldots\}; \\ M(3,4) &= \{0, \pm 12, \pm 24, \pm 36, \ldots\}. \end{aligned}$$

Então, o $mmc(3,4) = 12$.

Exemplo 27. Determinar o *mdc* de 18 e 24.
Resolução: sejam

$$\begin{aligned} D(18) &= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}; \\ D(24) &= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}; \\ D(18,24) &= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}. \end{aligned}$$

Então, o $mdc(18,24) = 6$.

Lema 1. Seja $n = p_1^{\alpha_1}.\ p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ um número natural. Se d é um divisor de n, então $d = p_1^{\beta_1}.\ p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$, onde $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$; para $i = 1, 2, \ldots, r$.
Prova: seja d um divisor de n e seja p^β a potência de um número primo p que figura na decomposição de d em fatores primos. Como $p^\beta \mid n$, segue que p^β divide algum $p_i^{\alpha_i}$ por ser primo com os demais $p_j^{\alpha_j}$, e, consequentemente, $p = p_i$ e $\beta \leqslant \alpha_i$.

Teorema 2. Sejam $a = p_1^{\alpha_1}.\ p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ e $b = p_1^{\beta_1}.\ p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$ números naturais nas condições do lema anterior. Pondo $\gamma_i = min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e $\delta_i = max\{\alpha_i, \beta_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se que $mdc(a,b) = p_1^{\gamma_1}.\ p_2^{\gamma_2} \ldots p_n^{\gamma_n}$ e $mmc(a,b) = p_1^{\delta_1}.\ p_2^{\delta_2} \ldots p_n^{\delta_n}$.

Prova: pelo lema anterior é claro que $p_1^{\gamma_1}.\ p_2^{\gamma_2} \ldots p_r^{\gamma_r}$ é um divisor comum de a e b. Seja c um divisor comum de a e b; logo $c = p_1^{k_1}.\ p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, onde $k_i \leqslant min\{\alpha_i, \beta_i\}$ e, portanto, $c \mid p_1^{\gamma_1}.\ p_2^{\gamma_2} \ldots p_n^{\gamma_n}$.

Do mesmo modo, pelo lema anterior, $p_1^{\delta_1}.\ p_2^{\delta_2} \ldots p_r^{\delta_r}$ é um divisor comum de a e b. Seja m um múltiplo comum de a e b; logo $m = p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdots p_r^{h_r}$, onde $h_i \geqslant max\{\alpha_i, \beta_i\}$ e, portanto, $p_1^{\delta_1}.\ p_2^{\delta_2} \ldots p_n^{\delta_n} \mid m$, o que acarreta $p_1^{\delta_1}.\ p_2^{\delta_2} \ldots p_n^{\delta_n} \leqslant m$, assim $p_1^{\delta_1}.\ p_2^{\delta_2} \ldots p_n^{\delta_n} = mmc(a,b)$.

Exemplo 28. Calcular o *mmc* de 120 e 80.

Resolução: usando o dispositivo prático para decomposição em fatores primos, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 80 = 2^4 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Logo, $mmc(80, 120) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15 = 240$.

Resolução: Decomposição simutânea

Neste método iremos decompor simutaneamente os números em fatores primos:

- Colocamos lado a lado e separando por vírgula os números e a direita deles traçamos uma linha vertical.
- Apartir daí dividiremos cada número pela sucessão dos números primos, enquanto pelo menos um deles for divisível a operação deve ser continuada, e neste caso repetiremos o número não divisível até que não seja mais possível também para o outro, ou nenhum dos outros, a divisão.
- Quando cada coluna a esquerda apresentar a unidade, o produto de todos os fatores primos a direita da linha será o mmc.

Exemplo 29. Calcular o *mmc* de 120 e 80.

$$\begin{array}{c|l} 80, 120 & 2 \\ 40, 60 & 2 \\ 20, 30 & 2 \\ 10, 15 & 2 \\ 5, 15 & 3 \\ 5, 5 & 5 \\ 1, 1 & \end{array}$$

Logo, $mmc(80, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 15 = 240$.

Exemplo 30. Calcular o mdc de 36 e 90.

Resolução: decompondo em fatores primos, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Logo, $mdc(36, 90) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$.

Embora pareça ser mais simples, esse método deixa de ser útil quando os números envolvidos são grandes. Nesse caso, descobrir quais são os fatores primos dos mesmos é trabalhoso e leva muito tempo.

3.8 Algoritmo de Euclides

Lema 2 (Lema de Euclides). Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$ com $a < na < b$. Se existe $(a, b - na)$, então (a, b) existe e $(a, b) = (a, b - na)$.

Demonstração: seja $d = (a, b - na)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b - na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b; logo, c é um divisor comum de a e $b - na$ e, portanto, $c \mid d$. Assim, prova que $d = (a, b)$. O lema de Euclides é efetivo para calcular mdc, e será fundamental para estabelecermos o algorítmo de Euclides, que permitirá, com muita eficiência, calcular o mdc de dois números naturais quaisquer.

Algoritmo de Euclides

A seguir, apresentaremos a prova construtiva da existência do mdc dada por Euclides (Os Elementos, livro VII, Proposição 2). O método chamado de algorítmo de Euclides, é um esplendor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios.

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, podemos supor $a \leqslant b$. Se $a = 1$ ou $a = b$, ou ainda $a \mid b$, já vimos que $(a, b) = a$. Suponhamos, então, que $1 < a < b$ e que $a \nmid b$. Logo, pela divisão euclidiana,

Figura 3.1: Euclides

podemos escrever

$$b = aq_1 + r_1, \text{ com } r_1 < a.$$

Temos duas possibilidades:

a) $r_1 \mid a$, e, em tal caso, pelo *mdc* e pelo lema de Euclides

$$r_1 = (a, r_1) = (a, b - q_1 a) = (a, b)$$

e termina o algorítmo, ou

b) $r_1 \nmid a$, e, em tal caso, podemos efetuar a divisão de a por r_1, obtendo $a = r_1 q_2 + r_2$, com $r_2 < r_1$.

Novamente temos duas possibilidades:

a') $r_2 \mid r_1$, e, em tal caso, novamente, pelo *mdc* e pelo lema de Euclides

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, a - q_2 r_2) = (r_1, a) = (b - q_1 a, a) = (b, a) = (a, b)$$

e paramos, pois termina o algoritimo, ou

b') $r_2 \nmid r_1$, e, em tal caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, com $r_3 < r_2$.

Este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > \cdots$ que não possui menor elemento, o que não é possível pela propriedade da boa ordem. Logo, para algum n, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, o que implica que $(a, b) = r_n$.

O algoritmo acima pode ser sintetizado e realizado na prática que se traduz na seguinte regra:

Para se achar o *mdc* de dois naturais, divide-se o maior pelo menor, este pelo primeiro resto obtido, o segundo resto pelo primeiro, e assim sucessivamente até se encontrar um resto nulo. O último resto não nulo é o máximo divisor comum procurado.

	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
b	a	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-2}	r_{n-1}	$r_n = (a,b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\dots$	r_n		

Exemplo 31. Calcular o *mdc* de 153 e 69.

Resolução: note que

$$\begin{array}{c|c} 153 & 69 \\ \hline 15 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} 69 & 15 \\ \hline 9 & 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} 15 & 9 \\ \hline 6 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} 9 & 6 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|c} 6 & 3 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Logo,

	2	4	1	1	2
153	69	15	9	6	3
15	9	6	3	0	

Portanto, o $mdc(153, 69) = 3$.

O algoritmo de Euclides nos fornece, portanto, em meio prático de escrever o *mdc* de dois números como soma entre dois múltiplos dos números em questão, para o isso basta eliminar sucessivamente os restos $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_3, r_2, r_1$.

Exemplo 32. Escrver o $mdc(16, 10)$ como soma de um múltiplo de 16 com um múltiplo de 10.

Resolução: apicando o algoritmo de Euclides temos que:

	1	1	1	2
16	10	6	4	2
6	4	2	0	

$$\begin{aligned} 2 &= 6 - 4.1 \\ 4 &= 10 - 6.1 \\ 6 &= 16 - 10.1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 &= 6 - 10 + 6 \\ 2 &= 2.(16 - 10) - 10 \\ 2 &= 2.16 - 3.10 \end{aligned}$$

Portanto, o $mdc(16, 10) = 2 = 2.16 - 3.10$

3.9 Relação entre mmc e mdc

Teorema 3. Dados dois números inteiros a e b, temos que $mmc(a, b) = \dfrac{a.b}{mdc(a, b)}$

Prova: Referência [5]

Este teorema é muito importante principalmente para o calculo de $mmc(a, b)$, pois as vezes devemos listar uma quantidade imensa de múltiplos de a ou de b para encontrar o $mmc(a, b)$, porém o $mdc(a, b)$ pode ser calculado facilmente pelo Algoritmo de Euclides e com isso o $mmc(a, b)$ é encontrado pela divisão do produto de a e b pelo $mdc(a, b)$

Exemplo 33. Determinar o $mmc(963, 657)$.

Pelo Algoritmo de Euclides, temos que o $mdc(963, 657) = 9$. Sendo assim :

$$mmc(963, 657) = \frac{963.657}{9} = \frac{632691}{9} = 70299$$

3.10 Divisão euclidiana

Mesmo quando um número natural a não divide o número natural b, Euclides, nos seus Elementos, utiliza, sem enunciá-lo explicitamente, o fato de que é sempre possível efetuar a divisão de b por a, com resto. Este resultado, cuja demosntração daremos abaixo, não só é um instrumento na obra de Euclides, como tambem é um resultado central da teoria.

Teorema 4 (Divisão euclidiana). Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$.

Prova: suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números $b, b - a$, $b - 2a, \ldots, b - n \cdot a, \ldots$. Pela propriedade da boa ordem, o conjunto S formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q \cdot a$. Vamos provar que r tem a propriedade requerida, ou seja, que $r < a$.

Se $a \mid b$, então $r = 0$ e nada temos a provar. Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq a$, e portanto, basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$. Consequentemente, sendo $r = c + a = b - q \cdot a$, teríamos $c = b - (q+1) \cdot a \in S$, com $c < r$, contradição com o fato de r ser o menor elemento de S.

Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$ com $r < a$, o que prova a existência de r e q.

Agora vamos provar a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de S, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a. Logo, se $r = b - a \cdot q$ e $r' = b - a \cdot q'$, com $r < r' < a$, teríamos $r' - r \geqslant a$, o que acarretaria $r' \geqslant r + a \geqslant a$, absurdo. Portanto $r = r'$, daí segue que $b - a \cdot q = b - a \cdot q'$, o que implica que $a \cdot q = a \cdot q'$ e, portanto, $q = q'$.

Aparentemente, não havia necessidade de provar a unicidade de q e r no teorema acima, já que o resultado da subtração a cada passo do algorítmo é único e, portanto, r e q têm valores bem determinados. O fato é que apresentamos um método para determinar q e r, satisfazendo as condições do teorema, mas nada nos garante que, utilizando um outro método, não obteríamos outros valores para q e r, daí a necessidade de se provar a unicidade.

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e de resto da divisão de b por a.

Exemplo 34. Determinar o quociente e o resto da divisão de 20 por 6.
Resolução: consideremos as diferenças sucessivas

$$\begin{aligned}
20 - 1 \cdot 6 &= 14; \\
20 - 2 \cdot 6 &= 8; \\
20 - 3 \cdot 6 &= 2 < 6.
\end{aligned}$$

obtemos, $q = 3$ e $r = 2$.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

4.1 Equações diofantinas lineares

... "Em particular, um símbolo para representar a quantidade desconhecida, que chamamos hoje de "incógnita".

Ainda no mundo grego, com os trabalhos de Diofanto, pode-se dizer que há uma abreviação simbólica das quantidades desconhecidas. Este matemático, que viveu no século III A.C. introduziu este novo modo de pensar, em um livro chamado Aritmético". Referência [14]

Figura 4.1: Diofanto

Para resolver vários problemas de aritmética, recaimos na resolução de equações do tipo $ax + by = c$, onde a, b e $c \in \mathbb{Z}$.

Equações assim, são chamadas equações diofantinas lineares com duas incógnitas em homenagem a Diofanto de Alexandria.

Dado um par de inteiros, x_0, y_0 de modo que $ax_0 + by_0 = c$, dizemos que x_0 e y_0 é uma solução inteira ou apenas uma solução da equação $ax + by = c$.

Exemplo 35. A equação diofantina linear com duas incógnitas $3x + 2y = 15$, tem como uma solução $x_0 = 1$ e $y_0 = 6$, pois $3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 15$.

Mas a equação $4x + 2y = 19$, não tem solução inteira, pois $4x + 2y$ é um número par para quaisquer que sejam x e y inteiros.

Teorema 5. Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$, a equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se e somente se $\underline{d}$ divide c, sendo $d = mdc(a, b)$.

Prova: $\Rightarrow$) Suponhamos que a equação $ax + by = c$ tenha uma solução, isto é, que existe uma par de inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$.

Por ser o $d = mdc(a, b)$, existem inteiros r e s tais que $a = d \cdot r$ e $b = d \cdot s$, e temos

$$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0).$$

E como $rx_0 + sy_0$ é um inteiro, segue-se que d
$midc$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que d divide c, isto é, $c = d \cdot t$, onde $t \in \mathbb{Z}$. Por ser o $mdc(a, b) = d$, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$ o que implica $c = d \cdot t(ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$, isto é, o par de inteiros $x = t \cdot x_0 = (c \backslash d)x_0$ e $y = ty_0 = (c \mid d)y_0$ é uma solução da equação $ax + by = c$.

Teorema 6. Sendo $d = mdc(a, b)$, se $d \mid c$ e se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas: $x = x_0 + (b \mid d)t$ e $y = y_0 - (a \mid d)t$, onde $t \in \mathbb{Z}$.

Prova: suponhamos que o par de inteiros x_0 e y_0 é uma solução particular da equação $ax + by = c$, e sejam x_1 e y_1 uma outra solução qualquer desta equação. Então, temos $ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1$ e portanto,

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1).$$

Por ser $mdc(a, b) = d$, existem inteiros r e s tais que $a = d \cdot r$ e $b = d \cdot s$, com r e s primos entre si. Substituindo estes valores de $\underline{a}$ e $\underline{b}$ na igualdade anterior e cancelando o fator com $\underline{d}$, obtemos

$$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1).$$

Sendo assim, $r \mid s(y_0 - y_1)$, e como o $mdc(r, s) = 1$, segue-se que $r \mid (y_0 - y_1)$, isto é

$$y_0 - y_1 = r \cdot t \text{ e } x_1 - x_0 = s \cdot t, \text{ onde } t \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, temos as fórmulas

$$x_1 = x_0 + s \cdot t = x_0 + (b/d)t$$

$$y_1 = y_0 + r \cdot t = y_0 - (a/d)t$$

Esses valores de x_1 e y_1 satisfazem realmente a equação $ax + by = c$, qualquer que seja o inteiro t, pois, temos

$$ax_1 + by_1 = a[x_0 + (b/d)t] + b[y_0 - (a/d)t] = (ax_0 + by_0) + (ab/d - ab/d)t = c + 0 \cdot t = c.$$

Como se vê, se $d = mdc(a, b)$ divide c, então a equação diofantina linear $ax + by = c$ admite um número infinito de soluções, uma para cada valor do inteiro arbitrário t.

A seguir apresentamos três problemas que foram trabalhados em sala de aula.
O problema 1 encontra-se no livro didático Matemática: Ciências e aplicações volume 2 (referência 6) adotado no ano de 2015 na escola da rede estadual Centro de Ensino Cidade Operária I, localizada no bairro Cidade Operária na cidade de São Luís estado do Maranhão. Na resolução do autor as possíveis soluções do problema são encontradas testando alguns valores. Diante desta situação realizamos com os alunos da turma 202 vespertino o estudo do mdc, algoritmo de Euclides e equações diofantinas. Com o aprendizado destes conteúdos podemos concluir inicialmente que o problema tinha solução e verificamos que o número 6 não era possível ser uma solução inicial do problema. O passo seguinte era encontrar uma solução inicial para a equação, e isto foi feito usando o algoritmo de Euclides, mas essa não satisfazia os requisitos do problema. A partir dessa solução inicial veio os questionamentos: quais seriam as outras soluções? Então através do teorema 5 encontramos as soluções que satisfaziam o problema. Com essa atividade podemos concluir que houve aceitação pelos alunos em saber em que condições as equações diofantinas tem solução e a maneira de como encontrar uma solução inicial sem fazer testes. Observou-se ainda que a grande dificuldade em encontrar outras soluções se devia às dificuldades de resolver inequações.
No problema 2 após a abordagem do conteúdo mmc este problema foi proposto e resolvido para os alunos da turma da EJA 6º/7º Ano do turno noturno da escola da rede estadual Centro de Ensino Salustiano Trindade, localizada no bairro da Mata na cidade de São José de Ribamar estado do Maranhão. Com o objetivo de responder questões como para que serve Matemática? Onde é usado esse conteúdo? Abordando esse problema e durante a resolução também trabalhamos os temas transversais saúde e uso de drogas. Apresentamos três maneiras de resolver o problema. Na primeira maneira, percebeu-se que foi de fácil compreensão, mas esta maneira se torna inútil quando se trata de números muito grandes. Na segunda solução observou-se que alguns alunos tiveram dificuldades

possivelmente por se tratando de uma de EJA em que os alunos estavam há muito tempo sem contato com a escola, alguns de idade avançada e outros cansados devido o trabalho durante o dia. Já na última concluímos a importância da relação entre mmc e mdc, pois para números muito grande podemos encontrar o mdc usando o algoritmo de Euclides e com a relação entre mmc e mdc, calcular mmc com apenas uma multiplicação seguido de uma divisão.

O problema 3 foi proposto e resolvido para os alunos das turmas do 6º Ano A e B do turno matutino da escola da rede municipal Escola Municipal Gonçalves Dias, localizada no bairro Jardim Tropical na cidade de São José de Ribamar estado do Maranhão onde foi focalizado a aprendizagem em grupo e vericar que em atividades que aparentemente difícies se tornam faceis com o uso do máximo divisor comum.

Problema 1. Em um açougue, o quilograma do frango custa $R\$ \ 6,00$ e, o de filé, $R\$ \ 15,00$. Uma dona de casa adquiriu x quilos de frango e y quilos de filé, gastando $R\$ \ 99,00$. Sabe-se que x e y são números naturais.

a) Escreva uma equação linear relacionada as incógnitas x e y;

b) É possível que a dona de casa tenha comprado $6kg$ de filé?;

c) Quais são as possíveis soluções desse problema?

Solução:

a) Sendo x a quantidade de quilos de frango e y a quantidade de quilos de filé, temos a equação $6x + 15y = 99$.

b) De $6x + 15y = 99$ e sendo $y = 6$, teríamos

$$6x + 15 \cdot 6 = 99 \Longrightarrow 6x = 99 - 90 \Longrightarrow 6x = 9 \Longrightarrow x = \frac{9}{6} \Longrightarrow \text{x=1,5}$$

que não é um número natural.

Logo, não é possível que a dona de casa tenha comprado $6kg$ de filé.

c) Vamos encontrar o $mdc(6, 15)$ pelo algoritmo de Euclides

	2	2
15	6	3
3	0	

Temos que o $mdc(6, 15) = 3$ e a equação $6x + 15y = 99$ tem solução, pois $3 \mid 99$. Segue do algoritmo de Euclides que

$$15 \cdot 1 - 6 \cdot 2 = 3 \Longrightarrow 15 \cdot 1 \cdot 33 + 6 \cdot (-2) \cdot 33 = 3 \cdot 33 \Longrightarrow 6 \cdot (-66) + 15 \cdot 33 = 99.$$

Assim, $x_0 = -66$ e $y_0 = 33$ é uma solução particular da equação $6x + 15y = 99$, as outras soluções são dadas por $\begin{cases} x = -66 + \frac{15}{3}t \\ y = 33 - \frac{6}{3}t, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Sabe-se que, x e y são números naturais, devemos restringir nossa solução de modo que escolhamos t satisfazendo as desigualdades $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, sendo assim, temos que $-66 + 5t \geqslant 0$ e $33 - 2t \geqslant 0$, daí segue que $t \geqslant \frac{66}{5} = 13,2$ e $t \leqslant 16,5$. Sendo assim,

- Para $t = 14$, temos $x = 4$ e $y = 8$.
- Para $t = 15$, temos $x = 9$ e $y = 18$.
- Para $t = 16$, temos $x = 14$ e $y = 28$.

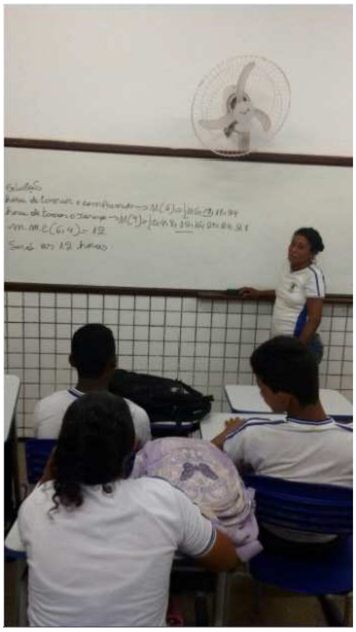
que são as possíveis soluções do problema.

Problema 2. Marcelo esta fazendo um tratamento médico no qual precisa tomar dois medicamentos. O médico receitou-lhe um comprimido de 6 em 6 horas e uma colher de xarope de 4 em 4 horas. Sabendo que Marcelo tomou os dois medicamentos à zero hora (meia noite). Qual é o primeiro horário em que Marcelo voltará a tomar os dois medicamentos ao mesmo tempo?

Solução 1: uma maneira de resolver este problema é escrever todos os horários e apontar aquele que dá a resposta desejada, então temos

- Horário de tomar o comprimido: $M(6) = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$.
- Horário de tomar o xarope: $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\}$.
- $M(6) \cap M(4) = \{0, 12, 24, \cdots\}$ e $mmc(6, 4) = 12$.

Logo, o horário será às 12 horas.



Solução 2: decompondo 6 e 4 em fatores primos, temos

$$6 = 2 \cdot 3 \text{ e } 4 = 2 \cdot 2 = 2^2 \text{ e assim, o } mmc(6,4) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Solução 3: temos que os divisores de 6 e 4 são

$$D(6) = \{1, 2, 3, 6\} \text{ e } D(4) = \{1, 2, 4\}.$$

Logo, o $mdc(4, 6) = 2$, pela relação $mmc(4, 6) = \dfrac{4 \cdot 6}{mdc(4, 6)} = \dfrac{24}{2} = 12$.

Problema 3. Na turma do 6º ano A de uma escola há 18 meninos e 24 meninas. Para realizar um trabalho, os alunos serão organizados em grupos, todos com o mesmo número de alunos, na maior quantidade possível e que tenham só os alunos do mesmo sexo. Qual é o número máximo de alunos que pode haver em cada grupo?

Solução 1: escrevendo as possibilidades de formação dos grupos, verificamos aqueles que tem a maior quantidade possível.

- Grupos de meninos: $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$.
- Grupo de meninas: $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
- $D(18) \cap D(24) = \{1, 2, 3, 6\}$ e $mdc(18, 24) = 6$.

Logo, o número máximo de alunos é 6.

Solução 2: decompondo 18 e 24 em fatores primos,temos

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \quad \text{e} \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3.$$

Assim, o $mdc(18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$.

Solução 3: usando o algoritmo de Euclides, temos

	1	3
24	18	6
6	0	

Então, o $mdc(18, 24) = 6$.

4.2 Problemas Propostos

1. Um terreno retangular de $108m \times 51m$ vai ser cercado com arame farpado fixado em estacas igualmente espaçadas. Se existe uma estaca em cada vértice, então o número de estacas é?

2. Três torneiras estão com vazamento. Da primeira cai uma gota de 4 em 4 minutos; da segunda uma de 6 em 6 minutos e da terceira, uma de 10 em 10 minutos. Exatamente às 2 horas cai uma gota de cada torneira. A Próxima vez que pingarão juntas novamente será às?

3. Um pai e um filho são pescadores. Cada um tem um barco e vão ao mar no mesmo dia. O pai volta para casa a cada 20 dias e o filho a cada 15 dias. Em quantos dias se encontrarão em casa pela primeira vez?

4. O senhor José toma um comprimido de 6 em 6 horas e uma colher de xarope de 8 em 8 horas. Às 10 horas da manhã ele tomou os dois remédios. A que horas ele voltará, novamente a tomar os dois remédios juntos?

5. Em certo trecho de uma rodovia, uma concessionária de pedágio instalou placas educativas a cada $12km$ e telefones a cada $16km$. Logo no início desse trecho da rodovia há uma dessas placas e um telefone juntos. A cada quantos quilômetros, a partir desse ponto , estarão instalados uma placa educativa e um telefone juntos?

6. Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 30 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de?

7. Suponhamos que o Presidente de uma multinacional tenha mandato de trabalho colocado por força maior, este tempo é de 4 anos, os assessores deles também tem este mandato que é de 6 anos e os auxiliares tem o mesmo mandato de 3 anos. Se em 2001 houve eleição interna nesta empresa, por voto de todos os colaboradores, para os 03 cargos, em que ano se realizarão novamente e simultaneamente as eleições para esses cargos?

8. Os planetas Júpiter, Saturno e Urano têm período de translação em torno do Sol de aproximadamente 12, 30 e 84 anos, respectivamente. Quanto tempo decorrerá, depois de uma observação, para que eles voltem a ocupar simultaneamente as mesmas posições em que se encontram no momento de observação?

9. De um aeroporto, partem todos os dias, 3 aviões que fazem rotas internacionais. O primeiro avião faz a rota de ida e volta em 4 dias, o segundo em 5 dias e o terceiro em 10 dias. Se num certo dia os três aviões partem simultaneamente, depois de quantos dias esses aviões partirão novamente no mesmo dia?

10. Nas últimas eleições, três partidos políticos tiveram direito, por dia, a $90s, 108s$ e $144s$ de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. A soma do número das aparições diárias dos partidos na TV foi de?

11. Dois rolos de corda, um de 200 metros e outro de 240 metros de comprimento, precisam ser cortados em pedaços iguais e no maior comprimento possível. Quanto medirá cada pedaço? Quantos pedaços serão obtidos?

12. Em uma mercearia o proprietário deseja estocar 72 garrafas de água, 48 de suco e 36 de mel em caixas com o maior número possível de garrafas, sem misturá-las e sem que sobre ou falte garrafa. Qual deve ser a quantidade de garrafas por caixa?

13. Um terreno retangular mede $75m$ por $45m$ e vai ser dividido em lotes quadrados do maior tamanho possível. Quantos metros terá cada lado do lote?

14. Laura tem $28m$ de fita verde e $20m$ de fita amarela para decorar pacotes de presente. Ela quer cortar essas fitas de modo que os pedaços tenham o mesmo tamanho, que

sejam o maior possível e que não haja sobras de fita. Quantos metros deve ter cada pedaço de fita?

15. Uma empresa de logística é composta de três áreas: administrativa, operacional e vendedores. A área administrativa é composta de 30 funcionários, a operacional de 48 e a de vendedores com 36 pessoas. Ao final do ano, a empresa realiza uma integração entre as três áreas, de modo que todos os funcionários participem ativamente. As equipes devem conter o mesmo número de funcionários com o maior número possível. Determine quantos funcionários devem participar de cada equipe e o número possível de equipes.

16. Um teatro está em fase final de construção. Ele terá três setores para acomodar o público: o setor A, de frente para o palco, com 135 lugares; o setor B, na lateral direita do palco, com 105 lugares; e o setor C, na lateral esquerda do palco, com 90 lugares. O número de poltronas por fileiras será o mesmo nos três setores e esse número deve ser o maior possível. Quantas fileiras de quantas poltronas haverá em cada setor?

17. Um laboratório dispõe de 2 máquinas para examinar amostras de sangue. Uma delas examina 15 amostras de cada vez, enquanto a outra examina 25. Pergunta-se: quantas vezes essas máquinas devem ser acionadas para examinar 2.000 amostras?

18. Se um trabalhador recebe 510 reais em tíquetes de alimentação, com valores de 20 reais ou 50 reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?

19. Se o custo de uma postagem é de 83 centavos e os valores dos selos são de 6 e 15 centavos, como podemos combinar os selos para fazer essa postagem?

20. O valor da entrada de um cinema é $R\$8,00$ e da "meia" entrada é de $R\$5,00$. Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de $R\$500,00$?

21. Uma caixa contém besouros e aranhas. Existem 46 patas na caixa; quantas são dos besouros?

22. Quando 100 alqueires (medida antiga para cereais) de grãos são distribuídos entre 100 pessoas, de modo que cada homem receba 3 alqueires, cada mulher 2 alqueires e cada criança meio alqueire, qual é o número de homens, mulheres e crianças que participou da distribuição?

23. Carlos obteve boas notas no bimestre escolar, por isso seu pai resolve gastar $R\$100,00$ com Carlos como forma de presente. É época de copa do mundo então Carlos quer muito figurinhas para seu álbum. Como estava muito quente, o pai de Carlos o convenceu a gastar $R\$4,00$ desses $R\$100,00$ em um belo sorvete completo. Do valor restante, Carlos queria gastá-lo inteiro com pacotes de figurinhas. Na loja, existiam pacotes de $R\$15,00$ e $R\$12,00$, com muitas figurinhas em cada um. De quantas formas o pai de Carlos consegue gastar todo o dinheiro que sobrou após a compra do sorvete?

24. Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café - tipo A (normal) e tipo B (descafeinado). Sabendo-se que ele gastou exatamente $R\$58,00$, quais são as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B? O preço do pacote da marca A é $R\$2,00$ e do pacote da marca B, $R\$3,00$.

25. Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês $R\$60,00$ para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa $R\$10,00$ e um DVD $R\$15,00$. Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente $R\$60,00$?

26. Um circo cobra $R\$6,00$ a entrada de crianças e $R\$11,00$ a de adultos. Qual é o menor número de pessoas que pode assistir a um espetáculo de maneira que a bilheteria seja $R\$350,00$?

27. Subindo uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau. Subindo a mesma escada de três em três degraus, sobram dois degraus. Determine quantos degraus possui a escada, sabendo que o seu número é múltiplo de 7 e está compreendido entre 40 e 100.

28. Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices; então, o número de faces triangulares é?

29. Anita comprou um número ímpar de canetas e algumas borrachas, gastando $R\$37,40$. Sabendo-se que os preços unitários das canetas e das borrachas são, respectivamente, $R\$1,70$ e $R\$0,90$, determine quantas canetas e quantas borrachas ela comprou.

30. Um grupo de 30 pessoas entre homens, mulheres e crianças foram a um banquete e juntos gastaram 30 patacas. Cada homem pagou 2 patacas, cada mulher meia pataca e cada criança um décimo de pataca. Quantos homens, quantas mulheres e quantas crianças havia no grupo?

31. Numa criação de galinhas e coelhos, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?

32. A secretaria de educação de um certo município dispõe de 5000 reais para gastar na compra de livros: o livro Tipo A, que custa 26 reais a unidade, e o livro Tipo B, que custa 24 reais a unidade. Encontre todas as possibilidades para a compra desses dois tipos de livros, gastando todo o valor disponível.

33. Determine duas frações positivas que tenham 17 e 23 como denominadores e cuja soma seja igual a $\dfrac{234}{391}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho foi apresentado como uma proposta de abordagem de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros e resolução de problemas para a educação básica, privilegiando as definições, principais propriedades e aplicação, ao contrário do que normalmente é feito em sala de aula quando as professores se limitam exclusivamente às técnicas de cálculo de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum de números inteiros de modo geral. Sugerimos a introdução do teorema fundamental da aritmética, o algoritmo de Euclides e equações diofantinas, assuntos que a grande maioria dos docentes e autores desse nível de ensino costuma-se abster-se. Além disso, o trabalho presou por um enfoque que possibilitou a noção intuitiva dos elementos matemáticos através de algoritmos, tabelas e figuras.

Em todos os tópicos, os elementos matemáticos foram conceituados e definidos visando a sua aplicabilidade em resolução de problemas do cotidiano, sendo assim a matemática fez-se presente para a quem estuda. Isto foi feito no trabalho todo, em que se utiliza o conhecimento mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum para resolver problemas práticos de matemática, sem necessariamente recorrer a vários cálculos e extensos. Desta forma, procurou-se estimar a percepção de mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum estão inteiramente relacionados a diversos acontecimentos da vida das pessoas e que podem ser ferramentas úteis na tomada de decisões.

Entre outros aspectos importantes já destacados, as aplicações de máximo divisor comum e algoritmo de Euclides nas resoluções de equações diofantinas possibilita a entrada deste conteúdo no currículo da educação básica. Entretanto, a sua inserção deve ser feita de acordo com a percepção do docente, respeitando, as características, as dificuldades e o objetivo do discente.

Concluímos que não podemos deixar de priorizar os conteúdos postos aqui e que este trabalho venha ser fonte de consulta para discentes e docentes que queiram aprofundar seu conhecimento sobre o tema.

APÊNDICE

Sejam $f(x), g(x) \in F[x]$, não ambos nulos, onde F é um corpo. Um elemento $d(x)$ em $F[x]$ é chamado de um máximo divisor comum de $f(x)$ e $g(x)$ se possuir as seguintes propriedades:

i) $d(x)$ é divisor comum de $f(x)$ e de $g(x)$, isto é, $d(x)$ divide cada um desses polinômios;

ii) Se $h(x) \in F[x]$ é um divisor comum de $f(x)$ e $g(x)$, então $h(x)$ divide $d(x)$.

Como o *mdc* de dois polinômios diferem por uma constante multiplicativa não nula, existe um único *mdc* mônico que será chamado de *mdc* de $f(x)$ e $g(x)$ e será denotado por $mdc(f(x), g(x))$.

Sejam $f(x), g(x) \in F[x]$, ambos não nulos. Um elemento $m(x)$ em $F(x)$ é chamado de mínimo múltiplo comum de $f(x)$ e $g(x)$, se possuir as seguintes propriedades:

i) $m(x)$ é um múltiplo comum de $f(x)$ e $g(x)$, isto é, $m(x)$ é múltiplo de $f(x)$ e $g(x)$;

ii) Se $h(x) \in F[x]$ é um múltiplo comum de $f(x)$ e $g(x)$, então $h(x)$ é múltiplo de $m(x)$.

Teorema 7. Seja F um corpo e seja $f(x) \in F[x]$ com grau maior ou igual a 1. Então, existem polinômios mônicos irredutíveis $p_1(x), \cdots, p_s(x)$ distintos, $a \in F\backslash\{0\}$ e números naturais $n_1, n_2, \cdots, n_s$, tais que $f(x) = ap_1(x)^{n_1} \cdot p_2(x)^{n_2} \cdots p_s(x)^{n_s}$ é única, a menor da ordem dos fatores.

Prova: REFERÊNCIA [8]

Para determinar o *mdc* ou *mmc* de dois polinômios, suponhamos que $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$. Escrevemos $f(x)$ e $g(x)$ como produto de potências de polinômios mônicos irredutíveis. Sejam $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ os polinômios mônicos que ocorrem na fatoração de $f(x)$ ou $g(x)$. Então, $f(x) = ap_1(x)^{r_1} \ldots p_n(x)^{r_n}$, onde $a \in F\backslash\{0\}$ e $r_j \geqslant 0$, para $j = 0, 1, \ldots, n-1$. $g(x) = bp_1(x)^{s_1} \ldots p_n(x)^{s_n}$, onde $b \in F\backslash\{0\}$ e $s_j \geqslant 0$, para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Para cada $j = 1, \ldots, n$, sejam $l_j = min\{r_j, s_j\}$ e $k_j = max\{r_j, s_j\}$. Então,

- $mdc(f(x), g(x)) = p_1(x)^{l_1} \ldots p_n(x)^{l_n}$.
- $mmc(f(x), g(x)) = p_1(x)^{k_1} \ldots p_n(x)^{k_n}$.

Exemplo 36. Determinar o *mmc* e o *mdc* dos polinômios $f(x) = 2(x-1)^3(x-\sqrt{2})^2$ $(x^2+1)^2$ e $g(x) = \sqrt{3}(x+2)(x-1)^2 \cdot (x-\sqrt{2})^3(x^2+1)$ em $\mathbb{R}[x]$.

Solução: temos que

$$f(x) = 2 \cdot (x+2)^0(x-1)^3(x-\sqrt{2})^2(x^2+1)^2 \text{ e}$$

$$g(x) = \sqrt{3} \cdot (x+2)(x-1)^2(x-\sqrt{2})^3(x^2+1).$$

Assim,

$$mmc(f(x), g(x)) = (x+2)(x-1)^3(x-\sqrt{2})^3(x^2+1)^2 \text{ e}$$

$$mdc(f(x), g(x)) = (x-1)^2(x-\sqrt{2})^2(x^2+1).$$

BIBLIOGRAFIA

1. BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução de Helena Castro. 2a ed. São Paulo: Blucher, 1996.

2. Congresso Nacional - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 1996.

3. DANTE, L. R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. São Paulo: Ática, 1997.

4. DANTE, Luis Roberto. ″Projeto Telaris - Matemática″. v.6º, 7º, 8º e 9º ano. Ática, 2012.

5. FILHO, Edgar de Alencar. Teoria Elementar dos Números. São Paulo 1981. Editora Nobel.

6. HEFEZ, Abramo. Aritmética. Coleção PROFMAT 1ª edição. Rio de janeiro 2013. Sociedade Brasileira de Matemática.

7. HEFEZ, Abramo. Elementos de aritmética. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

8. HEFEZ, Abramo, VILLELA, Maria Lucia Torres. Polinômios e Equações Algébricas. Coleção PROFMAT 1ª edição. Rio de janeiro 2012.

9. IEZZI, Gelson $\cdots$ et. al. Matemática: ciência e aplicações, - v.2 - 6. ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.

10. LIMA, Elon Lages. Números e Funções Reais. Coleção PROFMAT 1ª edição. Rio de janeiro 2013.

11. NETO, Antonio Caminha Muniz. Tópicos de Matemática Elementar. v.5. SBM, Col. do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2012.

12. OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNANDEZ, Adan José Corcho. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.- 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

13. PCN, Ensino Médio. Parâmetros Curriculares Nacionais-Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. In: Matemática 1998, p.108. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 25/01/2013.

14. ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT 1ª edição. Rio de janeiro 2012.

15. http://members.netmadeira.com/rafaelluis/documentos/euclides7e9.pdf