UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

NOÇÕES DE PROBABILIDADE POR MEIO DE JOGOS DE AZAR

José William de Souza Prado

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana

Agosto de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

NOÇÕES DE PROBABILIDADE POR MEIO DE JOGOS DE AZAR

José William de Souza Prado

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana

21 de Agosto de 2015

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Prado, José William de Souza
917n Noções de probabilidade por meio de jogos de azar / José William de Souza Prado. – Feira de Santana, 2015.
52 f. : il.

Orientador: Haroldo Gonçalves Benatti.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Probabilidade (Matemática) – Estudo e ensino. 2. Jogos de azar – Probabilidade – Aplicações. I. Benatti, Haroldo Gonçalves, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 519.2

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente José William de Souza Prado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte e um dias dias do mês de agosto de dois mil e quinze às 11:00 horas no Auditório PPGM - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Noções de Probabilidade por meio de Jogos de Azar"**, do discente **José William de Souza Prado**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Haroldo Gonçalves Benatti (Orientador, UEFS), Eleazar Gerardo Madriz Lozada (UFRB) e Ademakson Souza Araújo (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 21 de agosto de 2015.

Haroldo G. Benatti

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)
Orientador

Eleazar

Prof. Dr. Eleazar Gerardo Madriz Lozada (UFRB)

Ademakson S Araújo

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Mauricio de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado força, saúde e perseverança para estar aqui.

Tenho que agradecer a Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), local onde concluí minha graduação, que me concedeu a oportunidade ingressar ao Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) agradeço pelo apoio financeiro concedido através de bolsa, importante para aquisição de livros necessários para a conclusão deste curso.

A todos os meus professores por todos os conhecimentos passados e principalmente o meu orientador, professor Dr. Haroldo Gonçalves Benatti pelo apoio, dedicação, disponibilidade, correções, cobranças, paciência e incentivo na elaboração deste trabalho.

Tenho também que agradecer a Juliano (pai) e Júlia (mãe) pela vida, todos os familiares pelas orações e em especial a minha avó dona Vani por todos os ensinamentos, caráter, carinho e amor necessário para que uma pessoa cresça cheia de virtudes. Sem esquecer a minha esposa Graciela e minhas filhas Ana Clara e Ana Júlia por estarem sempre presentes, mesmo nos momentos em que estive longe me dedicando aos estudos.

Agradecer aos residentes da CESG-FSA - Casa Estudantil de São Gabriel - Feira de Santana, lugar onde passei essa jornada de estudos e a todos os amigos de curso, em especial, Pedro, Amarildo e Ariana pela amizade e pelos momentos de estudos coletivos, e a Ana Paula pelo suporte dado nas horas de desespero com a construção deste trabalho.

Resumo

Observamos que o conteúdo de probabilidade é trabalhado de forma contextualizada por parte dos livros didáticos do ensino médio e, mesmo assim, não é de fácil entendimento por parte do alunado. Nosso objetivo é abordar o ensino de probabilidade, mostrando os conteúdos relevantes e exemplificando com questões que envolvam jogos de azar, com o objetivo de ajudar na ajudem na percepção do conteúdo. Por isso, para se tornar mais atrativo, buscamos jogos conhecidos nacionalmente por pagarem prêmios milionários e jogos fictícios que evidenciam a aplicação de tais conteúdos.

Palavras-chave: Probabilidade, jogos de azar.

Abstract

We note that the content of probability is worked in context by the textbooks of high school and still it is not easy understanding by the student. Our aim is to approach the teaching of probability, showing relevant content and exemplifying with questions involving gambling, with the of helping in the perception of the content. So, to make it more attractive, we seek gambling nationally known for paying millionaires awards and fictional gambling that demonstrate the application of such contents.

Keywords: probability, gambling.

Sumário

Agradecimentos **i**

Resumo **ii**

Abstract **iii**

Sumário **v**

Introdução **1**

1 Análise Combinatória **3**

1.1 Fatorial de um Número Natural 4

1.2 Princípio Fundamental da Contagem 4

1.3 Permutações 6

1.4 Arranjos 8

1.5 Combinação 9

2 Probabilidade **14**

2.1 Espaço Amostral e Eventos 16

2.2 Definição Clássica 17

2.3 Definição Frequentista 18

2.4 Definição Axiomática 18

2.5 Probabilidade Condicional 20

2.6 Eventos Independentes 21

3 Variável Aleatória **22**

3.1 Definição de Variável Aleatória 22

3.2 Esperança Matemática 23

3.3 Variável de Bernoulli 24

3.4 Variável Binomial 25

3.5 Variável Geométrica 26

4 Aplicações **27**

4.1 Jogo do Carro 27

4.2 Mega-Sena 32

4.3 Lotofácil 37

4.4 Jogo de Roleta 39

4.5 Atividades Propostas 41

Referências Bibliográficas **43**

Introdução

Este trabalho consiste em apresentar tópicos de análise combinatória e probabilidade de forma sucinta e clara, sempre procurando exemplificar os conteúdos com jogos de azar. Por último, buscamos aplicar tais conteúdos em simulações de jogos conhecidos e fictícios mostrando reais chances de ganhar ou perder em determinados jogos.

No capítulo 1 explanaremos a Análise Combinatória, trazendo inicialmente uma breve abordagem histórica e dois conceitos relevantes para sua estruturação: fatorial de um número, conceito importante para realização de cálculos na analise combinatória, e princípio fundamental da contagem (PFC) que é o alicerce para a formatação das permutações, arranjos, e combinações.

Ainda no primeiro capítulo estudaremos as permutações, ou seja, trocas de posição de elementos de um conjunto, que podem vir na forma simples (conjunto com elementos distintos) ou com repetição (existe(m) elemento(s) repetido(s) no conjunto), mostrando como calcular o número total de permutações em cada caso. Calcularemos também a quantidade de arranjos de um conjunto com n elementos tomados k a k, que são sequências de k objetos retirados dos n elementos deste conjunto. Apresentamos através de exemplos como obter uma expressão para o número de subconjuntos que podem ser extraídos de um conjunto finito dado, que são conhecidos como combinação. Finalizamos esse capítulo com algumas indagações sobre um dos jogos abordados nesse trabalho, a Mega-Sena.

O capítulo 2 começa com um breve relato histórico da probabilidade, do surgimento até sua forma axiomática, citando os principais responsáveis por tal evolução e definimos conceitos importantes, tais como, fenômenos, variável, espaço amostral e eventos.

As definições de probabilidade são elencadas de forma evolutiva, começando com a definição clássica, a frequentista e em seguida introduzimos a abordagem axiomática de probabilidade.

Apresentamos a definição de probabilidade condicional, variável aleatória e esperança matemática. Como exemplos de variáveis aleatórias abordamos a de Bernoulli, a Binomial e a Geométrica.

No último capítulo, trazemos algumas aplicações do conteúdo estudado com alguns jogos das loterias da Caixa Econômica Federal (Mega-Sena, Lotofácil, Quina e Lotomania), jogos conhecidos nacionalmente por distribuírem prêmios milionários. A intenção é de fazer com que o leitor aplique os conhecimentos adquiridos com o estudo da teoria explanada. O uso dos jogos é um recurso para motivar o leitor a despertar sua atenção. Os exemplos extraídos de situações reais envolvendo os jogos citados acima são úteis para ilustrar a noção de probabilidade abordada nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Análise Combinatória

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos sobre Análise Combinatória baseados nas seguintes referências: [3], [7], [11] e [18].

Um dos principais motivos que levaram ao estudo e desenvolvimento da Análise Combinatória foram os Jogos de Azar. A necessidade de calcular as finitas possibilidades de jogadas, geraram os métodos de contagens. Há relatos de problemas envolvendo Combinatória desde o século XII A.C. na China, mas os primeiros a desenvolverem a curiosidade de estudar e formalizar o assunto foram os Matemáticos dos séculos XVI e XVII, como Niccollo Fontana (1500-1557), italiano, conhecido como Tartaglia e os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A Análise Combinatória visa definir métodos para a contagem de elementos de um conjunto devidamente agrupados sob certas condições. A construção desses agrupamentos são fundamentais para o processo da contagem. Para estruturação da Análise Combinatória, dois conceitos são de suma importância: Fatorial de um número e o Princípio Fundamental da Contagem.

Serão abordados os agrupamentos denominados Permutações, Arranjos e Combinações.

Faremos uma apresentação destes agrupamentos nas seções seguintes recorrendo a jogos bastante conhecidos que possam ajudar na compreensão dos processos de contagem referente aos mesmos.

1.1 Fatorial de um Número Natural

O fatorial de um número natural n, indicado por $n!$, é definido como o produto do número natural n pelos seus antecedentes até chegar à unidade.

$n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1$

Essa definição é válida para $n \geq 1$. Para $n = 0$, convenciona-se que $0! = 1$. Por exemplo,

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

$3!.4! = 3.2.1.4.3.2.1 = 144$

Em problemas de contagem, expressões envolvendo fatoriais surgem com frequência, como por exemplo:

$\frac{8!-6!}{5!} = \frac{8.7.6.5!-6.5!}{5!}$

$= \frac{5!(8.7.6-6)}{5!}$

$= 330$

De modo geral, temos expressões da seguinte forma:

$\frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!p!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}$, $n \geq p$.

1.2 Princípio Fundamental da Contagem

Pensaremos nas seguintes situações:

1. Numa lanchonete há 10 tipos de sucos e 6 tipos de salgados. De quantas formas diferentes podemos nos deliciar escolhendo um suco e um tipo de salgado?

Encontrar essa resposta é um tanto simples, basta multiplicarmos o número de sucos pela quantidade de salgados existentes no bar. Portanto, haverá 10.6=60 modos de escolha.

2. Se lançássemos uma mesma moeda 4 vezes consecutivamente, qual seria o número total de possíveis resultados, ou seja, de quantas formas diferentes poderíamos dispôr as sequências de caras(c) e coroas(k) nesses lançamentos?

Os possíveis resultados são: (c, c, c, c), (c, c, c, k), (c, c, k, k), (c, k, k, k), (c, k, c, k), (c, k, k, c), (c, k, c, c), (c, c, k, c), (k, c, c, c), (k, k, c, c), (k, k, k, c), (k, c, k, c), (k, c, k, k), (k, k, c, k), (k, c, c, k), (k, k, k, k).

Para resolvermos esse tipo de problema, devemos analisar os possíveis resultados para o lançamento das quatro moedas, considerando a ordem relevante. Sabe-se que existem 2 possibilidades (cara ou coroa) para cada jogada. Logo, para 4 jogadas, teremos $2.2.2.2 = 16$ possíveis resultados.

Podemos então enunciar o Princípio Fundamental da Contagem.

Se um experimento é realizado em duas etapas e existem m resultados possíveis para a primeira etapa e, para qualquer um destes resultados, há n resultados possíveis para a segunda etapa, então o número de resultados possíveis para o experimento é $m \cdot n$.

Note que, embora o enunciado do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) tenha sido formulado para experimentos com duas etapas, a afirmação permanece válida quando o número de etapas é finito. Logo, se determinado experimento ocorre em n etapas diferentes e, quaisquer que tenham sido os resultados nas etapas anteriores, cada etapa i ocorre em k_i maneiras distintas $(i = 1, 2, 3..., n)$, o Princípio Fundamental da Contagem afirma que o númeto total N de ocorrer o experimento será $N = k_1.k_2.k_3.....k_n$.

Apesar de sua simplicidade, o Princípio Fundamental da Contagem, constitui-se como a principal base da Análise Combinatória. Vejamos mais alguns exemplos para ilustrar a aplicação deste princípio:

1. Existe um jogo com baralhos chamado de Buraco. Nesse jogo um dos objetivos é montar uma canastra real, que nada mais é do que sequenciar 7 cartas com mesmo naipe. Se tomarmos as cartas de uma canastra real, de quantas formas distintas podemos ordenar sequencialmente essas 7 cartas?

Esse resultado é simples de ser encontrado, pois temos 7 possibilidades para arrumarmos a primeira carta, 6 para a segunda, 5 para a terceira, 4 para a quarta, 3 para a quinta, 2 para a sexta e 1 para a sétima. Assim o resultado será 7.6.5.4.3.2.1=7!=5040.

2. Deseja-se sortear um celular e um tablet numa rifa em que serão vendidos 200 bilhetes a pessoas diferentes. Serão sorteadas duas pessoas, onde a primeira ganhará o celular e a segunda o tablet. De quantas maneiras diferentes podemos formar a dupla ganhadora?

Observando que a ordem dos ganhadores é decisiva para a distribuição dos prêmios, basta pensar que teremos 200 possibilidades para o primeiro sorteio e 199 para o segundo. Portanto, serão $200 \cdot 199 = 39800$ maneiras distintas de formar esse par de ganhadores.

1.3 Permutações

Agora, suponhamos que queremos formar e contar todas as maneiras possíveis de arrumarmos as letras da palavra JOGA. Facilmente ordenamos essas letras e encontramos:

$JOGA$, $JOAG$, $JGAO$, $JGOA$, $JAOG$, $JAGO$, $OGAJ$, $OAGJ$, $OJGA$, $OJAG$, $OAJG$, $OGJA$, $AJOG$, $AJGA$, $AOJG$, $AGOJ$, $AOGJ$, $AGJO$, $GJAO$, $GJOA$, $GOJA$,GOAJ, $GAJO$, $GAOJ$. Portanto, são 24 maneiras diferentes de arrumar as letras da palavra JOGA e cada sequência formada pelas letras J, O, G e A é chamada de anagrama da palavra JOGA.

Cada sequência formada a partir de uma coleção inicial de objetos trocando-os de posição, chama-se permutação. A permutação é considerada simples se todos esses objetos forem distintos uns dos outros, como é o caso do exemplo que acabamos de expôr.

Escreveremos P_n para indicar o número de permutações obtidas a partir de n objetos distintos.

Para calcular o número de permutações do exemplo dado acima, recorremos ao PFC, que nos garante o seguinte resultado: $P_4 = 4.3.2.1 = 4! = 24$ maneiras de arrumarmos essas letras. Generalizando esse tipo de situação é possível concluir que utilizando n objetos distintos podemos obter $P_n = n!$ sequências.

Observando o exemplo acima, notamos que há 12 anagramas que começam por consoante. Como poderíamos encontrar esse valor sem ter que escrever todos?

Temos duas consoantes na palavra JOGA e a palavra iniciará com uma consoante, das duas que temos (J e G), uma ocupará a primeira posição do anagrama, restando três letras para serem alocadas em três posições (calculado por 3!). Portanto, o número de anagramas começados por consoantes da palavra $JOGA$ será 2.3!=12.

Mas, podemos nos deparar com coleções que possuam elementos repetidos, por exemplo, se quisermos saber o número de anagramas que podemos formar com as letras da palavra JOGO?

Para facilitar nossa percepção, consideremos inicialmente $O \neq o$, sendo assim a palavra $JOGO \neq JOGo$ e os possíveis anagramas serão:

$JOGo$, $JOoG$, $JGoO, JGOo, JoOG$, $JoGO, OGoJ$, $OoGJ, OJGo, OJoG, OoJG, OGJo$, $oJOG, oJGA, oOJG, oGOJ$, $oOGJ, oGJO, GJoO$, $GJOo, GOJo, GOoJ, GoJO, GoOJ$. Temos $P_4 = 4!$ anagramas. Descartando a hipótese que $O \neq o$, teremos anagramas repetidos, a exemplo de JGOo e JGoO. Pares deste tipo dão origem a uma única sequência quando consideramos letras maiúsculas e minúsculas idênticas, ou seja, cada sequência foi contada 2! vezes, que é o número de permutações obtidas a partir de O e o. Para corrigir esta contagem repetida faremos a divisão por 2!. Logo, a palavra $JOGO$ possui $\frac{4!}{2!}$=12 anagramas.

Se tivermos n objetos, sendo α objetos idênticos, então o número de permutações que podem ser obtidos com estes n objetos pode ser calculado usando o raciocínio análogo ao exposto, levando-nos ao total de $\frac{n!}{\alpha!}$.

De modo geral teremos o seguinte:

$P_n^{\alpha,\beta...,\gamma} = \frac{n!}{\alpha!\beta!...\gamma!}$, onde $\alpha, \beta, ..., \gamma$ expressam quantidades de objetos repetidos e n é o número total de objetos.

Exemplos:

1. Quantos são os anagramas da palavra JOGADA?

Observamos que apenas a letra A aparece 2 vezes na palavra e as outras letras aparecem apenas uma vez. Logo, a quantidade de anagramas será $P_6^2 = \left(\frac{6!}{2!}\right) = 360$.

2. Suponhamos que você tenha uma nota de 100 reais, uma nota de 50 reais, duas notas de 10 reais, três nota de 5 reais e uma nota de 1 real.

Colocando-as lado a lado, de quantas maneiras diferentes elas podem ser dispostas, apenas mudando as posições entre elas?

Nesse caso, temos um total de oito notas com duas notas de 10 reais e três notas de 5 reais. Logo, poderemos dispor as notas lado a lado de:

$P_8^{2,3} = \left(\frac{8!}{2!3!}\right) = \left(\frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.3.2.1}\right) = 3360$ maneiras distintas.

1.4 Arranjos

Imaginemos a seguinte situação. Tem-se um sofá de 2 lugares e 4 pessoas disponíveis para sentar. De quantas maneiras diferentes podemos acomodar 2 destas 4 pessoas no sofá?

Para responder questões deste tipo, um dos recursos é nomear essas 4 pessoas (A, B, C e D) e arrumá-las nesses 2 assentos. Uma enumeração de todas as possibilidades pode ser representada por AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB e DC. Note que AB é diferente de BA, ou seja, leva-se em consideração a ordem dos elementos nesse tipo de sequência.

Nem sempre será fácil resolver problemas desse tipo listando todas as possibilidades, pois podemos nos deparar com um número maior de pessoas e de lugares disponíveis. Portanto, veremos como fazer a contagem sem recorrer a uma enumeração exaustiva.

Tendo à disposição n objetos, as sequências de k objetos ($k \leq n$) são denominadas de arranjos de n objetos tomados k a k. O número total destes arranjos é indicado por $A_{n,k}$.

O Princípio Fundamental da Contagem nos permite calcular essa quantidade de arranjos de forma simples, pois temos n escolhas para o primeiro objeto, $(n-1)$ para o segundo, ..., $(n-k+1)$ para o k-ésimo objeto, sendo assim

$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$

Multiplicando e dividindo o resultado acima por $(n-k)!$, temos o seguinte resultado:

$A_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1).(n-k)!}{(n-k)!}$

$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exemplos:

1. De quantas maneiras 8 pessoas podem sentar-se num sofá que comporta apenas 3 pessoas?

$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1} = 336$ maneiras.

2. Deseja-se sortear um celular e um tablet numa rifa que serão vendidos 200 bilhetes a pessoas diferentes. Serão sorteadas duas pessoas, onde a primeira ganhará o celular e a segunda o tablet. De quantas maneiras diferentes podemos formar a dupla ganhadora?

Basta pensar que teremos 200 possibilidades para o primeiro sorteio e 199 para o segundo. Portanto, serão 200.199=39800 maneiras distintas de formar esse par de ganhadores.

Pela fórmula $A_{200,2} = \frac{200!}{(200-2)!} = A_{200,2} = \frac{200.199.198!}{(198)!} = 200.199 = 39800$.

Observemos que o exemplo 2 já foi resolvido de forma mais direta usando PFC. Citamos a terminologia arranjo neste trabalho, por ser de uso corrente nos livros didáticos de Ensino Médio.

1.5 Combinação

Até este momento, os agrupamentos que contamos eram sequências. A ordem intrínseca às sequências facilitaram bastante o processo de contagem.

A partir de agora, contaremos agrupamentos que podem ser representados por subconjuntos. A ausência de ordem nos elementos dos subconjuntos fará com que o processo de contagem seja um pouco mais elaborado.

Como veremos, faremos uma contagem inicial envolvendo sequências, que leva a uma contagem com repetição. Em seguida, será feita uma correção dessa contagem para obtermos o número de subconjuntos que representamos agrupamentos que estamos contando. Para tornar clara a estratégia adotada, recorreremos ao exemplo a seguir.

Há um jogo conhecido no Brasil por pagar prêmios consideráveis em dinheiro, a Mega-Sena. Nesse jogo, existem 60 números e você pode optar por apostar em jogos de 6 até 15 números, ganha quem acertar 4, 5 ou 6 dezenas das 6 que são sorteadas. Uma questão deve ser observada nesse jogo, a ordem de sorteio dos números não influencia no resultado.

Algumas perguntas pertinentes em relação à Mega-Sena:

1. Quantos jogos serão necessários, de modo que eu tenha a certeza que irei ganhar?

2. Financeiramente, será vantajoso investir nesse jogo? O retorno é promissor?

Essas e outras respostas serão discutidas ao longo desse trabalho.

Se dispormos de um conjunto, não vazio, com n elementos e necessitarmos dividi-los em subconjuntos com k elementos, distintos pelos objetos e não pela ordem, será natural perguntar quantos subconjuntos com k elementos sob essas condições podemos formar. Cada um destes subconjuntos é uma combinação de n objetos tomados k a k. Representamos por $C_{n,k}$ o número de combinações de n objetos tomados k a k.

Tomando o exemplo da Mega-Sena, vejamos quantas sequências distintas com seis objetos podem ser formadas a partir dos 60 disponíveis. Para efetuar esse cálculo recorremos ao PFC mais uma vez. Serão 60 números para a primeira escolha, 59 para a segunda, 58 para a terceira, 57 para a quarta, 56 para a quinta e 55 para a sexta escolha dos números. Portanto, realizando esse produto teremos:

$60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55$ sequências.

Esse produto representa todas as sequências de 6 números formadas a partir dos 60 disponíveis na Mega-Sena. Entretanto, devemos observar que várias sequências dão origem a um mesmo jogo. Por exemplo, as sequências (A, B, C, D, E, F), (A, B, C, D, F, E), (B, A, C, D, E, F), (A, C, B, D, E, F) entre outras, dão origem ao jogo $\{A, B, C, D, E, F\}$, que está sendo representado por um conjunto, pois a ordem dor números não altera o jogo. Pelo PFC, conclui-se: com esses 6 números representados por A, B, C, D, E e F teremos $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ jogos iguais.

Enfim, o número de jogos distintos de 6 números que se obtêm com os 60 números disponíveis será:

$\frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6!}$

Se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração acima por 54! teremos:

$\frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot 54!}{54! 6!} = \frac{60!}{(60-6)! 6!}$

Resumindo, a maneira mais direta de calcularmos, $C_{n,k}$ (também indicado por $\binom{n}{k}$), o número de combinações de n objetos tomados k a k, $C_{n,k}$, é:

$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Exemplos :

1. De quantas maneiras diferentes uma pessoa poderá retirar três cartas de um baralho com 52 cartas?

Respondemos essa pergunta combinando 52 cartas 3 a 3,

$C_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!3!} = \frac{52.51.50.49!}{(49)!6} = \frac{52.51.50}{6} = 22100.$

2. Retomando o jogo da Mega-Sena, as seguintes questões surgem:

a. Quantos jogos devemos apostar para ter certeza de que iremos ganhar o prêmio máximo?

A resolução dessa questão será combinando as 60 dezenas, 6 a 6, daí teremos o número exato de apostas que deveríamos fazer para garantir o prêmio.

Para se ter certeza de ganhar é preciso jogar todas as combinações possíveis, $C_{60,6} = \frac{60!}{(60-6)!6!}$=50063860 apostas.

b. Quantas quinas podem ser contempladas quando uma sena é sorteada?

Teremos que acertar 5 em 6 números sorteados e errar apenas 1.

Dos 6 números sorteados, teremos $C_{6,5}$ coleções com 5 dezenas distintas, ou seja,

$C_{6,5} = \frac{6!}{(6-5)!5!} = 6$

Para 1 erro, teremos $C_{60-6,1}$ coleções com 1 número, ou seja, $C_{54,1} = \frac{54!}{(54-1)!1!} = 54$.

O número de quinas possíveis num jogo com 6 números será $6.54 = 324$, ou seja, 324 quinas podem ser contempladas no sorteio de uma sena.

c. Quantas quadras podem ser contempladas quando uma sena é sorteada? Dos 6 números sorteados, teremos $C_{6,4}$ coleções com 4 dezenas distintas, ou seja, $C_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$.

Para 2 erros, teremos $C_{60-6,2}$ coleções com 2 número distintos, ou seja, $C_{54,2} = \frac{54!}{(54-2)!2!} = 1431$.

O número de quadras possíveis num jogo com 6 números será $15.1431 = 21465$, ou seja, podemos ser contemplado em 21465 quadras no sorteio de uma sena.

3. Na Tabela 1.1 é relacionaado o valor pago por jogo de 6 a 15 dezenas na Mega-Sena

Tabela 1.1: Nº de dezenas x Valor a pagar(Reais) x Nº de jogos com 06 dezenas

Nº de dezenas	Valor a pagar(Reais)	Nº de jogos com 06 dezenas
06	2,50	1
07	17,50	7
08	70,00	28
09	210,00	84
10	525,00	210
11	1155,00	462
12	2310,00	924
13	4290,00	1716
14	7507,50	3003
15	12512,50	5005

com o número de jogos de 6 dezenas que teriam a mesma probabilidade de acerto.

a. Observe na tabela que fazendo uma aposta com 6 dezenas, pagamos 2,50 reais. Mostraremos que uma aposta com 7 dezenas equivale a 7 apostas com 6 dezenas e que uma aposta com 8 dezenas equivale a 28 apostas com 6 dezenas.

Para resolvermos problemas desse tipo, usaremos combinação simples, ou seja, 7 dezenas combinadas 6 a 6 e 8 dezenas combinadas 6 a 6.

$C_{7,6} = \frac{7!}{(7-6)!6!}$=7

$C_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)!6!}$=28

Podemos concluir que apostando em 1 jogo com 7 dezenas corresponde a 7 jogos com 6 dezenas e financeiramente falando, 1 jogo com 7 dezenas, que custa 17,50 reais, é o mesmo que apostar em 7 jogos com 6 dezenas, que custa $7 \cdot 2,50 = 17,50$.

De modo análogo, temos que 1 jogo com 8 dezenas que equivale a 28 jogos com 6 dezenas e financeiramente falando, 1 jogo com 8 dezenas, que custa 70,00 reais, é o mesmo que apostar em 28 jogos com 6 dezenas, que custa $28 \cdot 2,50 = 70,00$. .

b. Deixamos como exercício verificar a equivalência entre o número de dezenas apostadas e a quantidade de jogos com 6 dezenas que podem ser formados, verificando a equivalência de preços apontada acima.

Capítulo 2

Probabilidade

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos sobre Probabilidades baseados nas seguintes referências: [1], [4] , [5], [8], [9], [12] e [14]. Retrataremos tópicos de história da probabilidade baseado em [10].

Pinturas encontradas em tumbas egípcias em 3500 a.C mostram os primeiros indícios de jogos de azar por meio de um dado feito de osso. Esse dado tinha quatro faces não equiprováveis, sendo as probabilidades de saídas dessas faces numa jogada, aproximadamente, 0,39, 0,37 ,0,12 e 0,12. Já para os dados de seis faces há relatos de serem oriundos do Iraque por volta de 3000 a.C.

Somente em 1654 apareceram os primeiros trabalhos formalizados da teoria matemática de probabilidade de forma que fosse definida como uma medida da chance de ocorrêencia de um evento sujeito ao acaso. Esses estudos foram motivados por um problema deixado pelo monge franciscano Luca Paccioli (1445-1514).

O "Problema dos Pontos" (Paccioli 1494) pode ser enunciado da seguinte forma: Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo da balla. Quando o primeiro jogador tinha 5 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?

O francês Chevalier de Méré, jogador profissional, influente na corte de Luís XIV será conhecido eternamente na criação da Teoria da Probabilidade apenas por apresentar o problema de Paccioli (Problema dos Pontos) a Blaise Pascal (1623-1662) que decidiu compartilhar e discutir, em 1654, através de correspondências com o advogado apaixonado por Matemática, Pierre Fermat (1601-1665). Unidos, os dois conseguiram sistematizar um método para cálculos de probabilidades e consequentemente resolveram o problema proposto a eles, o problema dos pontos.

Antes da sistematização do estudo da probabilidade iniciada por Pascal e Fermat, as contribuições mais notáveis foram dos matemáticos Girolamo Cardano (1501-1576), apaixonado por jogos de azar, que escreveu "Liber de Ludo Aleae" (Livro de Jogos de Azar), Niccolo Tartaglia (1499-1557), em seu trabalho "Tratado Geral Sobre Números e Medidas", e Galileo Galilei (1564-1642) com "Soprale Scorpeta dei Dadi" (Sobre o Jogo de Dados).

Após passar essa gênese da teoria da probabilidade, matemáticos importantes como J. Bernoulli, DeMoivre e Laplace incrementaram suas descobertas nos trabalhos já existentes, reforçando ainda mais essa importante teoria.

No livro "Ars Conjectandi" (A Arte da Conjectura), escrito pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1654-1705) editado, concluído e publicado após sua morte por Nicolaus(I) Bernoulli (1687-1759), marcou uma nova era na teoria da probabilidade com a prova do Teorema dos Grandes Números.

Com o passar do tempo, a Probabilidade tornou-se um ramo da Matemática, não somente ligada aos jogos de azar. Suas aplicações estendem-se às ciências de um modo geral e, seguindo uma linhagem histórica de contribuidores, podemos citar ainda, dentre vários, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Thomas Bayes (1702-1761), George Boole (1815-1864), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), até chegar no final do século XIX com as contribuições do russo Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1884) e outros da chamada Escola de São Petesburgo.

Já no século XX, destacaremos a atuação de Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), que em 1929 havia publicado seu trabalho "Teoria geral de medidas e teoria de probabilidade", onde foi apresentada a primeira descrição de uma construção axiomática da teoria da probabilidade.

Nosso objetivo é mostrar aos leitores desse trabalho noções básicas de probabilidade com aplicações, em especial, aos jogos de azar. Enfatizando que a teoria exposta adiante nos permite resolver questões corriqueiras do Ensino Médio. Utilizaremos os jogos de azar por serem mais conhecidos e mais acessíveis no cotidiano de cada um.

Definiremos conceitos relevantes no estudo de probabilidade, tais como: Fenômenos Aleatórios e Determinísticos, Espaço Amostral e Eventos.

Um fenômeno será considerado determinístico se o resultado é o mesmo em cada ocorrência. Exemplo: a temperatura de fusão da água.

Um fenômeno é será considerado aleatório se, observado repetidamente sob as mesmas condições, não for possível prever um resultado.

Os fenômenos aleatórios são os objetos de estudo da teoria da probabilidade. Para o desenvolvivento desta teoria alguns conceitos relevantes como espaço amostral de um fenômeno aleatório e eventos de um espaço amostral são necessários e serão introduzidos nas seções seguintes.

2.1 Espaço Amostral e Eventos

Imaginemos um lançamento de um dado, os resultados possíveis são: $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6. Se lançarmos uma moeda, teremos cara ou coroa. Se escolhermos uma carta num baralho, teremos 4 opções de naipes: copas, paus, ouro ou espadas. Ou seja, dado um experimento cujo resultado não se pode prever com certeza, mas no qual todos os resultados possíveis são conhecidos, dá-se o nome de Espaço Amostral (S), ao conjunto de todos os resultados possíveis.

Tomando o conjunto S como espaço amostral, cada subconjunto extraído de S chamaremos de Evento. Por exemplo, se tomarmos como espaço amostral S os naipes de um baralho, S=$\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, podemos concluir que são exemplos de eventos de S: $\varnothing$, $\{\clubsuit\}$, $\{\diamondsuit\}$, $\{\heartsuit\}$, $\{\spadesuit\}$, $\{\clubsuit, \diamondsuit\}$,...$\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

Os eventos que são formados por um único elemento do espaço amostral, classificamos como evento simples.

Seja A um evento de S, chamamos de evento complementar de A, indicamos A^C, ao evento que possui todos os elementos de S que não estão em A, ou seja, se $A \cap A^C = \varnothing$ e $A \cup A^C = S$.

É notório que o conjunto vazio ($\varnothing$) é um evento de S (evento impossível) e o próprio S também será um evento, pois ambos são subconjuntos de S. Observe também que a união e intersecção de eventos é um evento.

2.2 Definição Clássica

Considere um dado, com faces numeradas de 1 a 6. Suponha que esse dado não seja viciado, ou seja, todas as faces tenham a mesma chance de sair. Se lançarmos esse dado um número finito de vezes, suficientemente grande, podemos notar que a proporção de vezes que sai cada uma das faces converge para o mesmo valor, no caso $\frac{1}{6}$.

Essas e outras situações podem ser analisadas da seguinte forma: um jogador analisa todos os casos possíveis de um jogo e separa os casos favoráveis dos não favoráveis. Sendo assim, pela Definiçao Clássica (ou de Laplace) de probabilidade, a provável chance de ganho do jogador se dará por: $\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$

Para o funcionamento dessa definição, devem ser observados duas propriedades:

i. todos os casos possíveis devem ter a mesma probabilidade.

ii. número finito de casos possíveis.

Como foi dito acima, tudo isso é válido em espaços finitos onde exista a equiprobabilidade dos eventos simples, ou seja , todos os eventos simples tenham a mesma chance de acontecer.

Se adotarmos um espaço amostral onde isso não ocorra, por exemplo, se lançarmos um dado "não honesto", onde a chance de sair um 6 é maior do que achance de sair um 5, como calcular essa probabilidade? Questões como essas motivaram o surgimento de uma nova abordagem da noção de probabilidade conhecida como Frequentista.

2.3 Definição Frequentista

Pensaremos em espaços onde não se aplica a equiprobabilidade. Uma maneira de calcular probabilidades em situações desta natureza é repetindo o experimento um número suficientemente grande de vezes, sob condições rigorosamente idênticas, de modo que façamos a extração das frequêcias relativas atribuídas a cada evento. Segundo um dos resultados mais importantes da Teoria da Probabilidade, conhecida como Lei dos Grandes Números, a aproximação da probabilidade pela frequência relativa aumenta quando o número de observações do experimento aumenta, com poucas observações esse número pode divergir, enquanto com uma quantidade crescente de observações a estimativa tende a convergir para um valor cada vez mais preciso.

Seja A um evento simples cuja probabilidade se deseja calcular. Após um número suficientemente grande de realizações do experimento, na abordagem frequentista, a probabilidade deste evento é estabelecida através da frequência em que este evento ocorreu.

Destacamos alguns matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria, James Bernoulli(1654-1705), Pafnut L. Chebyshev (1821-1894), Richard von Mises(1883-1953), dentre outros.

2.4 Definição Axiomática

A Matemática e a Geometria passaram por um processo de axiomatização a partir do início do século XX. Andrei Nikolaevich Kolmogorov foi responsável por essa mudança na teoria das probabilidades.

A abordagem axiomática estabelece um conjunto de propriedades que uma função de probabilidades deve satisfazer. Estas propriedades são relativamente diretas e fáceis de serem compreendidas a partir da noção intuitiva de probabilidade.

A estruturação axiomática de probabilidade proposta por Kolmogorov envolve espaços finitos e infinitos, em nosso trabalho abordaremos apenas os espaços finitos.

Seja S um conjunto, onde $S \neq \emptyset$ e finito. Uma probabilidade em S é uma função de conjunto P que associa a subconjuntos A de S um número real $P(A)$ que satisfaz:

i. Se A$\subseteq S$ então $0 \leq P(A) \leq 1$

ii. $P(S) = 1$

iii. Se $A \subseteq S$, $B \subseteq S$ e $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Observando que essa propriedade pode ser generalizada:

iii'. Se $A_1, A_2, ...A_n \subseteq S$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ então
$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

A partir dos axiomas listados acima outras propriedades podem ser derivadas e uma teoria bastante sofisticada é construída. Veremos aqui apenas algumas propriedades mais simples.

Seja S um conjunto, onde $S \neq \emptyset$. Então, são verdadeiras as sentenças abaixo:

1. $P(\emptyset) = 0$. Ou seja, a probabilidade do evento impossível é zero.

Demonstração: $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$, ou seja, $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$, então $P(\emptyset) = 0$;

2. $P(A^c) = 1 - P(A)$. Esta igualdade mostra que a probabilidade de um evento não ocorrer é 1 menos a probabilidade do evento ocorrer.

Demonstração: $S= A \cup A^c$ e $A \cap A^c = \emptyset$, então $P(A \cup A^c) = 1$ e daí $P(A^c) = 1 - P(A)$;

3. Se A$\subseteq$B $\Rightarrow$P(A)$\leq$ P(B) e $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Demonstração: Se $A \subseteq B$ então $B = A \cup (B - A)$, portanto, $P(B) = P(A) + P(B - A)$; desta última igualdade decorrem $P(A) \leq P(B)$ e $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

4. $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$.

Demonstração: De $B - A = B - (B \cap A)$ obtém-se $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$, aplicando (3).

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração: Temos $A \cup B = A \cup (B - A)$, sendo $A \cap (B - A) = \emptyset$. Do axioma (iii) segue que $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$. Aplicando a propriedade (4) concluímos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$.

2.5 Probabilidade Condicional

Para introduzir a noção de probabilidade condicional analisemos a seguinte situação.

Tendo sido retirada uma carta de um baralho, qual a probabilidade de ter sido um oito, sabendo que a carta foi preta?

Observe a situação acima e veja que existe uma informação parcial (carta preta) a respeito do resultado do experimento.

Detalharemos essa situação da seguinte forma:

Espaço Amostral: 52 cartas possíveis do baralho.

Evento A: sair oito.

Evento B: sair carta preta.

Precisamos calcular a probabilidade de sair um oito dado que saiu uma carta preta que será representada por $P(A \mid B)$, lê-se, probabilidade de A, dado que B ocorreu. Recorrendo à probabilidade clássica $P(A \mid B) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$, pois, nesse caso podemos raciocinar com o espaço amostral constituído apenas pelas 26 cartas pretas do baralho já que a carta sorteada é uma destas cartas pretas. Além disso, como é nosso interesse que a carta seja um oito, poderá ser o oito de espadas ou oito de paus e, portanto, o número de casos favoráveis é 2.

Dividindo o numerador e o denominador por 52 que é o número de cartas no baralho temos:

$P(A \mid B) = \frac{\frac{2}{52}}{\frac{26}{52}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Observe que essa essa definição não se aplica quando $P(B) = 0$.

Em resumo, para calcular a probabilidade do evento A ocorrer, dado que o evento B ocorreu, recorreremos à fórmula:

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Vale destacar ainda que esta fórmula é mais utilizada na forma $P(A \cap B) = P(A)P(A \mid B)$ para cálculo da probabilidade de A e B ocorrerem simultaneamente. Um exemplo desta situação ocorre na seção seguinte.

2.6 Eventos Independentes

Informalmente, dois eventos A e B são independentes se a ocorrência de B não altera a probabilidade da ocorrência de A e a ocorrência de A não altera a probabilidade de ocorrência de B.

No exemplo da seção anterior temos:

$P(A) = \frac{4}{52} = P(A \mid B)$, já calculado anteriormente,

$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ e

$P(B \mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{52}}{\frac{4}{52}}=\frac{1}{2}$.

Assim, $P(A \mid B) = P(A)$ (o conhecimento de que B ocorreu não afeta a probabilidade de A ocorrer) e $P(B \mid A) = P(B)$ (o conhecimento de que A ocorreu não afeta a probabilidade de B ocorrer). Em casos como este, diz-se que os eventos A e B são independentes.

Para calcular $P(A \cap B)$ recorremos a igualdade $P(A \cap B) = P(A)P(A \mid B)$, que neste caso particular, é reduzida a $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. Então $P(A\cap B) = \frac{1}{13}.\frac{1}{2} = \frac{1}{26}$. De fato, a probabilidade de retirar um oito preto pode ser calculada diretamente por $\frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

Se dois eventos A e B são independentes então a probabilidade destes eventos ocorrerem simultaneamente $P(A \cap B)$ é igual ao produto das probabilidades $P(A)$ e $P(B)$. Portanto a expressão $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ é muito útil para calcular a probabilidade de dois eventos independentes ocorrerem simultaneamente.

Não abordaremos neste trabalho a definição mais geral de eventos independentes para $k \geq 3$. O leitor interessada pode consultar [12].

Antes de encerrar esta parte, consideremos os eventos B (carta preta) e C (carta vermelha) para apresentar uma situação em que os eventos não são independentes:

$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$,

$P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ e

$P(C \mid B) = \frac{P(C\cap B)}{P(B)} = 0 = \frac{P(C\cap B)}{P(C)} = P(B \mid C)$

Assim, $P(B) \neq P(B \mid C)$ e $P(C) \neq P(C \mid B)$. Logo, B e C não são eventos independentes.

Capítulo 3

Variável Aleatória

3.1 Definição de Variável Aleatória

Nesta seção apresentamos uma noção de variável aleatória, que informalmente podemos descrever como um correspondente numérico do resultado de um experimento.

Recorreremos a um exemplo para tentar explicar de forma mais clara o que é uma variável aleatória.

Lançaremos dois dados não-viciados. O espaço amostral S possui 36 pares ordenados:

$S =\{ (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),$
$(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),$
$(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \}$

Definiremos a variável aleatória X como a soma das faces resultantes no lançamento dos dados. Assim, X levará (a,b) ao número real $a+b$. O domínio da variável aleatória X é o espaço amostral S e o contra-domínio é $\mathbb{R}$.

Portanto, uma variável aleatória X é uma regra que associa um valor numérico a cada resultado de um espaço amostral S. Para ilustrar como calcular a probabilidade de situações descritas por variáveis aleatórias recorremos ao seguinte exemplo:

Qual é a probabilidade de que, no lançamento de dois dados, a soma das faces obtidas seja 5? Ou seja, quanto é a probabilidade de X ser igual a 5? Indicaremos esta probabilidade por $P(X = 5)$.

Observe que teremos $X = 5$ se o resultado do lançamentodos dados for um dos seguintes: $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$. Assim, $P(X = 5) = P(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Usaremos $[X = 5]$, para indicar o evento $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$.

3.2 Esperança Matemática

A Esperança Matemática de uma variável aleatória X, também conhecida como Valor Médio ou Valor Esperado, nada mais é do que uma média aritmética ponderada dos valores que uma variável aleatória assume.

Se essa variável aleatória X assume valores x_1, x_2, ..., x_n e possui uma função de probabilidade $P(x_i)$ (que indica a probabilidade $P(X = x)$), tem-se que a esperança de X, denotada por $E(X)$, é calculada por:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(x_i)$$

Vejamos algumas propriedades da esperança matemática:

i) $E(a) = a$

ii) $E(bX) = bE(X)$

iii) $E(X + a) = E(X) + a$

iv) $E(a + bX) = a + bE(X)$

v) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

vi) $E(XY) = E(X)E(Y)$

As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas em [12].

Exemplo:

Numa rifa são vendidos 50 bilhetes por 4,00 reais cada. O ganhador receberá 124,00 reais de premiação. Qual a Esperança de ganho nessa rifa?

Considere a variável aleatória X que representa o lucro do jogador. Temos nesse problema que X será a variável aleatória "ganhar" com probabilidade $P(X = 120,00) = \frac{1}{50} = 0,02$ e $P(X = -4,00) = \frac{49}{50} = 0,98$. De posse dessas informações, calcularemos $E(X)$:

$E(X) = P(120,00) \cdot 120,00 + P(-4,00) \cdot (-4,00)$

$E(X) = 0,02.120 + 0,98.(-4)$

$E(X) = 2,4 - 3,92$

$E(X) = -1,52$

Se a situação acima se repetir um número suficientemente grande de vezes, na média o prejuízo do jogador tenderia a -1,52 reais por aposta realizada. Portanto, concluímos que não é promissor investir nesse jogo.

3.3 Variável de Bernoulli

Criaremos um jogo fictício, o qual batizaremos como JOGO DO CARRO, que funcionará da seguinte forma:

Associaremos nomes de carros aos números de 1 a 100, onde cada veículo será representado por 4 dezenas consecutivas de modo que cada um aposte no automóvel que tiver mais afinidade. Após as realizações das apostas, será sorteado um número contido no intervalo descrito, todos os dias no mesmo horário, sendo divulgado o nome do carro associado a este número. Ganhará quem escolher o carro sorteado e o prêmio será 13 vezes o valor apostado.

Queremos que seja observado que nesse jogo existem apenas dois resultados possíveis, ganhar ou perder.

A probabilidade de ganhar, P(ganhar)=$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$, e a de perder P(perder)=$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}=\frac{96}{100}=\frac{24}{25}$, ou seja, $P(ganhar) = 1 - P(perder)$. Assumimos que estas probabilidades mantêm-se constantes de ensaio para ensaio.

Dá-se o nome de ensaios de Bernoulli a experimentos em que só há dois resultados possíveis, mutuamente exclusivos, denominados sucesso e fracasso.

A probabilidade de sucesso (S) é designada por p. A probabilidade de fracasso (F) é designada por $q = 1 - p$.

Seja X uma variável associada a um ensaio de Bernoulli com $X(S) = 1$ e $X(F) = 0$. Temos $P(X = 0) = 1 - p$ e $P(X = 1) = p$. Podemos então escrever $P(X = x) = p^x \cdot (1 - p)^{1-x}$, onde $x = \{0, 1\}$. Uma variável com estas caraterísticas é denominada variável de Bernoulli.

3.4 Variável Binomial

Tomando o Jogo do Carro como ponto de partida, pense qual seria sua chance de ganhar 1,2 ,3...x vezes, jogando por n dias seguidos, apostando no mesmo carro. Para descobrirmos tal resultado recorremos à variável Binomial.

A variável binomial assenta também no conceito de provas de Bernoulli e é sem dúvida uma das variáveis aleatórias discretas mais largamente utilizada como modelo teórico adequado a uma grande variedade de situações observáveis na prática.

A variável binomial aparece associada ao seguinte tipo de problema: determinar a probabilidade de serem obtidos x sucessos em n provas de Bernoulli (correspondendo à realização de um certo acontecimento A) e portanto (n - x) fracassos (não realização de A).

Para calcular o número x de sucessos em n ensaios observe que temos $\binom{n}{x}$ diferentes sequências de $(n - x)$ fracassos e x sucessos sendo a probabilidade de cada uma dessas sequências dada por $p^x q^{n-x}$. Logo, a probabilidade de obter x sucessos em n ensaios de Bernoulli, é:

$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$, para $0 \leq x \leq n$.

Exemplo:

1. Retomando o JOGO DO CARRO levantamos o seguinte questionamento: qual a probabilidade de ganharmos 2 vezes apostando no mesmo carro por 10 dias consecutivos?

Este problema seria uma aplicação direta da distribuição binomial, onde teríamos $x = 2$ e $n = 10$ portanto:

$P(2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{1}{25})^2 \cdot (\frac{24}{25})^{10-2}$

$P(2) = 45 \cdot 0,0016 \cdot 0,7214$

$P(2) = 0,0519$

3.5 Variável Geométrica

Uma Variável Aleatória Geométrica ocorre quando estamos interessados no número de ensaios realizados em uma sucessão de ensaios de Bernoulli, independentes com probabilidade de sucesso p em cada ensaio, até que ocorra o primeiro sucesso. O evento $[X = x]$ (evento formado pelos pontos do espaço amostral para os quais a variável X assume o valor x) ocorre se, e somente se, ocorrem fracassos nos $x - 1$ primeiros ensaios e sucesso no x-ésimo ensaio. Portanto, a probabilidade de que ocorra o primeiro sucesso x-ésimo ensaio de Bernoulli é dado por $P(X = x) = p \cdot (1 - p)^{x-1}$, para $x \geq 1$.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Jogo do Carro

Já citamos anteriormente o Jogo do Carro no capítulo 2, nesse capítulo explicaremos como apostar, simulando alguns modelos de jogadas e sempre retomando aos capítulos anteriores para nos ajudar a responder algumas indagações.

O Jogo do Carro consiste em escolher um ou mais carros para serem efetuadas apostas de quaisquer valores. O resultado será dado sorteando um número de 1 a 100 e, em seguida, associando-o ao carro correspondente, de acordo com a tabela 3.1. Ganhará quem apostar no carro sorteado e o prêmio será de 13 vezes o valor da aposta.

Esse jogo acontecerá diariamente, sendo os sorteios realizados todos os dias às 17:00hs.

Agora, iremos fazer alguns questionamentos.

1. Que chance eu tenho, se eu apostar uma única vez na Caravan?

Sendo que os carros são equiprováveis, recorreremos a definição clássica de probabilidade para resolver esse problema.

Calculamos essa probabilidade dividindo a quantidade de números que representa a caravan (4) pelo total de números existentes no jogo (100):

$P(Caravan) = \frac{1}{25}$=0,04 ou $P(Caravan) = \frac{4}{100}$=0,04.

2. Qual a probabilidade de sair Caravan no segundo dia, considerando que uma pessoa

Tabela 4.1: Tabela do jogo do carro

Grupo	Carro	Números
01	Amarok	01,02,03,04
02	Astra	05,06,07,08
03	Besta	09,10,11,12
04	Brasília	13,14,15,16
05	Camaro	17,18,19,20
06	Celta	21,22,23,24
07	Civic	25,26,27,28
08	Caravan	29,30,31,32
09	Cobalt	33,34,35,36
10	Corolla	37,38,39,40
11	Corsa	41,42,43,44
12	Escort	45,46,47,48
13	Gol	49,50,51,52
14	Golf	53,54,55,56
15	Jeep	57,58,59,60
16	Kadet	61,62,63,64
17	Monza	65,66,67,68
18	Palio	69,70,71,72
19	Punto	73,74,75,76
20	Pajero	77,78,79,80
21	Saveiro	81,82,83,84
22	Strada	85,86,87,88
23	Uno	89,90,91,92
24	Vectra	93,94,95,96
25	Veraneio	97,98,99,100

irá jogar por dois dias seguidos e já saiu Caravan no primeiro dia?

Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair Caravan no segundo dia será também $0,04$.

3. Quais as chances dia a dia de ganhar nesse jogo, apostando em um dos carros da tabela todos os dias o mesmo valor? Faça o estudo financeiro da situação.

Observamos que nossa probabilidade p de sucesso (ganhar) e q de fracasso (perder) em um jogo será p=$\frac{1}{25}$=0,04 e q=1-0,04=0,96.

Seja X o número de jogos até o primeiro sucesso. Note que X é uma variável aleatória geométrica. Temos que: $P(X = x) = q^{1-x}.p$ e $P(X \leq x) = \sum_{j=1}^{x} q^{1-j} \cdot p$.

Observe que essa expressão corresponde à soma dos x primeiros termos de uma P.G. de razão q e primeiro termo igual a p. Logo, $P(X \leq x)$ pode ser calculado por:

$P(X \leq x) = \sum_{j=1}^{x} q^{1-j} \cdot p = p\frac{1-q^x}{1-q}$.

Com o auxílio desta fórmula calculamos a probabilidade de ganharmos jogando consecutivamente até o 12º dia ($P(X \leq 12)$) e até o 13º dia ($P(X \leq 13)$):

$P(X \leq 12) = 0,04\frac{1-0,96^{12}}{1-0,96} = 0,387$

$P(X \leq 13) = 0,04\frac{1-0,96^{13}}{1-0,96} = 0,411$

Tendo em vista que o prêmio será de treze vezes o valor apostado, só ganhamos dinheiro se acertarmos até o 12° dia, mas a probabilidade desse período não é favorável $P(X \leq 12)$=$0,387 \leq 0,5$, ou seja, ainda há maior possibilidade de perder do que de ganhar. Como $P(X \leq 13) = 0,411$ temos aproximadamente 40% de chance de recuperar o dinheiro investido nas sucessivas apostas. Logo, chegamos a conclusão que não vale a pena insistir nessa estratégia de jogo.

4. Se escolhermos 5 carros quaisquer e apostarmos sempre o mesmo valor, em qual dia a probabilidade de alcançarmos um sucesso será favorável ao apostador? Financeiramente, valerá a pena insistir nessa estratégia de jogo?

Teremos p=$\frac{5}{25}$=0,2 e q=1-0,2=0,8.

Recorrendo à fórmula $P(X \leq x) = p\frac{1-q^x}{1-q}$, calculamos que:

1^o dia: $P(X \leq 1) = 0,2\frac{1-0,8^1}{1-0,8} = 0,2$

Até o 2^o dia: $P(X \leq 2) = 0,2\frac{1-0,8^2}{1-0,8} = 0,36$

Até o 3^o dia: $P(X \leq 3) = 0,2\frac{1-0,8^3}{1-0,8} = 0,488$

Até o 4^o dia: $P(X \leq 4) = 0,2\frac{1-0,8^4}{1-0,8} = 0,59$

Até o 11^o dia: $P(X \leq 11) = 0,2\frac{1-0,8^{11}}{1-0,8} = 0,91$

Observemos a seguinte situação. O valor apostado D nesse jogo será dividido pelos 5 carros escolhidos, logo o prêmio será $P = 0,2.D.13$, ou seja, $P = 2,6D$. Se apostarmos todos os dias o mesmo valor D, até ganhar em x dias jogados, iremos gastar G nesse jogo, onde, $G = xD$. Para que tenhamos expectativa de lucro, terá que ocorrer a seguinte situação:

$P > G \Rightarrow 2,6D > xD \Rightarrow x < 2,6$, onde x é o número de dias. Portanto teremos lucro se acertarmos no 1° ou 2° dia de jogo. Mas, de acordo com os demostrativos acima, a probabilidade $P(X \leq 2) = 0,36$, que não favorece.

5. O que ocorre, se escolhermos 5 carros quaisquer e ao invés de apostarmos um valor fixo dia a dia, apostarmos um valor inicial (D) no 1° dia e a cada dia que não ganharmos dobrarmos o valor da aposta, até chegar ao sucesso? Financeiramente, é vantajoso?

Os valores apostados serão $D, 2D, 4D, 8D, 16D$,..., $2^{x-1}D$. Esses valores formam uma Progressão Geométrica (PG) com razão 2, 1° termo igual a D e x-ésimo termo (dia em que iremos ganhar) igual a $2^{x-1}D$. Para encontrar o valor gasto G, encontraremos a soma da PG descrita acima.

$S(x) = \frac{a_1(q^x-1)}{q-1}$

$G = \frac{D.(2^x-1)}{2-1}$

$G = D(2^x - 1)$, representa o valor apostado ao longo de x dias.

Calcularemos agora, quanto ganharemos P no decorrer de x dias, que será 13 vezes o valor apostado no x-ésimo dia dividido por 5.

$P = 13 \cdot 2^{x-1}D.\frac{1}{5}$

$P = 1,3D \cdot 2^x$

Agora, chamaremos de L, a diferença entre o valor ganho P e o valor gasto G. Se este valor for positivo, significa que teremos lucro com o jogo e se esse valor for negativo, prejuízo.

$L = 1,3D.2^x - D(2^x - 1)$

$L = 1,3D.2^x - 2^xD + D)$

$L = (0,3.2^x + 1)D$

Percebe-se que para qualquer valor positivo de x, L assumirá somente valores positivos. Veremos isso graficamente.

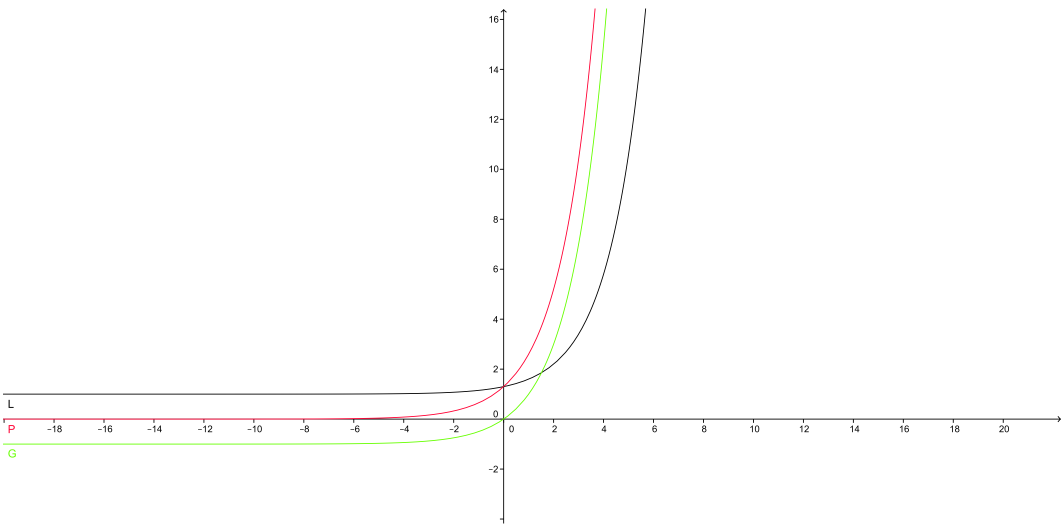

Figura 4.1: Aplicações

Observe que apesar do lucro ser positivo temos um risco de “quebrarmos” antes de sermos contemplados. Neste caso, o prejuízo será de $G = \frac{D(2^x-1)}{2-1}$, onde x é o número de dias em que repetimos a aposta e D é o valor inicial apostado.

5. Seguindo essa estratégia de jogo, escolheremos os cinco carros para apostarmos ($Caravan$, $Celta$, $Jeep$, Gol e Uno) e começaremos apostando $10,00$ reais no primeiro dia. Pergunta-se:

a. Quanto teremos que investir nesse jogo se formos premiados no décimo dia de apostas?

$G = D(2^x - 1)$

$G = 10(2^{10} - 1)$

$G = D(2^x - 1)$

$G = 10230,00$ reais seriam necessários para segurar o jogo até o décimo dia.

b. Ganhando no décimo dia de apostas, qual seria o prêmio?

$P = 1,3D \cdot 2^x$

$P = 1,3 \cdot 10 \cdot 2^10$

$P = 13D \cdot 1024$

$P = 13312,00$ reais de premiação.

c. Qual seria o lucro com essa sequência de jogos?

$L = (0,3 \cdot 2^x + 1)D$

$L = (0,3 \cdot 2^10 + 1)10$

$L = (0,3 \cdot 1024 + 1)10$

$L = 3082,00$ reais de lucro com essa estratégia de jogo, supondo que seremos premiados no décimo dia de apostas e começando com uma aposta inicial de $10,00$ reais.

d. Se apenas tivéssemos dinheiro para bancar uma sequência de sete dias, começando com $10,00$ reais, qual seria o prejuízo total, sabendo que um dos carros apostados só saiu no décimo dia?

$G = D(2^x - 1)$

$G = 10(2^7 - 1)$

$G = 1270,00$ reais de prejuízo.

4.2 Mega-Sena

A Mega-Sena paga milhões para o acertador dos seis números sorteados. Ainda é possível ganhar prêmios ao acertar quatro ou cinco números dentre os seis números que formam a sena premiada. Para realizar o sonho de ser o próximo milionário, você deve marcar de 6 a 15 números do volante e acertar a almejada sena.

Questionamentos:

1. Qual é a probabilidade de ganhar o prêmio máximo, realizando uma aposta mínima?

$P(SENA) = \frac{1}{C_{60,6}} = \frac{1}{50063860} = 0,00000002.$

Segundo consulta realizada ao site *www.sitedecuriosidades.com*, o Grupo de Eletricidade Atmosférica do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (ELAT/INPE) calculou que a probabilidade de sermos atingidos por um raio aqui no Brasil é de 1 para 2500000 e segundo Fernando Rebouças Stucchi, Engenheiro e Professor na Universidade de São Paulo (USP), a chance de sofrer um acidente fatal dirigindo uma carro nas estradas brasileiras é de 1 em 19000, de ser vítima de uma acidente de trem é de 1 em 5000000 e de cair de um avião é de 1 em 8500000 milhões. Estimando que a probabilidade de acertarmos na Mega-Sena, realizando uma aposta mínima, está por volta de 1 para 50000000, chegamos às seguintes conclusões:

-Você tem 20 vezes mais chances de morrer ou ficar todo lesado atingido por um raio do que ficar rico apostando nesse jogo.

- Agora, imagine que que você tenha realizado uma aposta mínima na Mega-Sena e que no momento do sorteio você esteja viajando de carro com seus amigos em direção a um lugar maravilhoso por nossas rodovias. Daí, do nada você comenta, posso estar milionário nesse momento, sem saber que as chances de vir a óbito sem ao menos conhecer o lugar de passeio é 2632 vezes maior do que estar cheio da grana.

Se observarmos, temos 10 vezes mais chances de sofrermos um acidente de trem ou ainda 6 vezes mais provável cair de um avião do que ficarmos ricos jogando na Mega-sena.

São questões como essas, apesar de serem trágicas, que prendem a atenção do alunado podendo instigá-los a querer conhecer mais sobre o assunto.

2. Rafael, que acabara de completar 18 anos, escolheu seus 16 números da sorte que estão dentro do intervalo de 1 a 60. O garoto quer fazer uma aposta mínima em cada concurso da Mega-Sena, de modo que nunca repita o mesmo jogo e que os números jogados sejam escolhidos dos seus 16 números da sorte. Supondo que Rafael começou jogar com exatos 18 anos e que são realizados 2 sorteios semanais, com qual idade, aproximada, ele não terá mais opções de escolha dos seus números da sorte?

$C_{16,6} = \frac{16!}{(16-6)!16!}$

$= \frac{16.15.14.13.12.11.10!}{10!6!}$

$= \frac{16.15.14.13.12.11}{720}$

$= 8008$

Num ano temos 52 semanas e são 2 sorteios semanais, sendo 104 por ano. Daí,

$\frac{8008}{104} = 77$

Como Rafael começou a jogar aos 18 anos e precisa de mais 77 anos para cumprir sua missão, portanto, somente com 95 anos de idade ele terá concluído seu objetivo. Rafael terá que se cuidar muito, fazer exercícios físicos regularmente, ter uma alimentação saudável, optar pelo ar puro do campo, não perder noites de sono em baladas, não fumar, não beber, não usar drogas, se for fazer uma viagem, preferir ir de trem ou de avião que as chances são menores de sofrer um acidente e mesmo assim, com todas essas precauções, não poderemos garantir os 95 anos de Rafael para que faça todas as apostas possíveis com os seus números da sorte. Ainda assim, a probabilidade de Rafael ser contemplado com o prêmio máximo deste jogo é $\frac{8008}{50063860} = 0,00016$.

Dificilmente Rafael ganhará o prêmio máximo deste jogo, só que, o garoto ainda concorre a dois outros prêmios, a quina e a quadra. Calcularemos suas chances de ser contemplado num destes dois prêmios.

Em um sorteio da Mega-Sena existem 324 possíveis quinas contempladas. Logo, a probabilidade de Rafael ganhar uma quina ($P(QUINA)$) será:

$P(QUINA) = \frac{8008 \cdot 324}{50063860}$.

Deixamos como exercício o cálculo da probabilidade de Rafael acertar uma quadra.

3. Apostando em todos os concursos da Mega-Sena qual o tempo médio, em semanas, para ganharmos o prêmio máximo desse jogo? Analisando esse valor, em anos, teremos chance de ganharmos jogando continuamente?

A esperança da variável aleatória geométrica X (número de apostas até a primeira contemplação) é dada por:

$E(X) = \frac{1}{p}$, onde $p = \frac{1}{50063860}$ é a probabilidade de ganhar na Mega-Sena com uma aposta simples.

O cálculo desta expressão para $E(X)$ pode ser encontrada nos livros de probabilidade, a exemplo de [12].

Como queremos esse valor em semanas e são realizados 2 concursos semanais, chamaremos de T o tempo decorrido até a contemplação, sendo $T = \frac{1}{2}X$ teremos:

$E(T) = E(\frac{1}{2}X) = \frac{1}{2}E(X) = \frac{1}{2p} = \frac{1}{2\frac{1}{50063860}} = 25031930$

São necessárias 25031930 semanas jogando para se ter o tempo médio de ganhar na Mega-Sena.

Analisando esse valor em anos, 25031930 : 52, teremos que viver, aproximados 481383 anos para conseguir alcançar o tempo esperado para ganhar o prêmio máximo desse jogo.

4. Na família *Impossible* é tradição o pai deixar em seu testamento de morte, 6 "números da sorte" para serem jogados, em todos os concursos, num jogo idêntico à Mega-Sena. Sabe-se que já existia o jogo desde os tempos de vida do iniciante dessa tradição e que todos os primogênitos terão filhos. Se a média de vida dos filhos primogênitos da família *Impossible* for de 75 anos, qual o número, aproximado, de gerações que terá que existir para alcançar o tempo médio de ganhar nesse jogo?

Vimos que o tempo médio aproximado para ganhar nesse jogo é de 481383 anos, se cada um dos jogadores dessa família viver em média 75 anos, serão necessários, aproximadamente, 6418 gerações da família *Impossible*.

5. Suponha que um milionário excêntrico tem o sonho de ganhar na Mega-Sena. Para isto, está disposto a fazer 10000 apostas simples em cada concurso. Vamos calcular a probabilidade e a esperança (em anos) deste milionário realizar o sonho de ganhar o prêmio máximo da Mega-Sena.

Seja $P(M)$ a probabilidade de acertar na Mega-Sena realizando 10000 apostas por concurso.

$P(M) = \frac{10000}{50063860} \cong 0,0002$

Como queremos esse valor em anos e são realizados 104 concursos por ano, chamaremos de H o tempo decorrido até a contemplação, sendo $H = \frac{1}{104}M$ teremos:

$E(H) = E(\frac{1}{104}M) = \frac{1}{104}E(M) = \frac{1}{104P(M)} = \frac{1}{104\frac{10000}{50063860}} \cong 48$ anos.

6. Um apostador tem mania de acompanhar o sorteio da Mega-Sena. No último sorteio, este apostador fez uma aposta simples e verificou o acerto dos três primeiros números sorteados. Ele está eufórico. Vamos verificar a probabilidade deste apostador ganhar o prêmio máximo.

Vamos chamar A_i o evento que o apostador acerta os i primeiros números sorteados $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Note que o evento de ganhar neste sorteio da Mega-Sena é A_6 e assumimos que ocorreu o evento A_3, ou seja, que o apostador acertou os três primeiros números sorteados. É do nosso interesse calcular a seguinte probabilidade:

$P(A_6 \mid A_3) = \frac{P(A_6 \cap A_3)}{A_3} = \frac{P(A_6)}{A_3} = \frac{\frac{1}{\binom{60}{6}}}{\frac{\binom{6}{3}}{\binom{60}{3}}}$=0,000034.

Podemos também calcular passo a passo:

Probabilidade de acertar o quarto número dado que acertou os três primeiros: $\frac{3}{57}$.

Probabilidade de acertar o quinto número dado que acertou os quatro primeiros: $\frac{2}{56}$.

Probabilidade de acertar o sexto número dado que acertou os cinco primeiros: $\frac{1}{55}$.

Logo, $P(A_6 \mid A_3) = \frac{3}{57} \cdot \frac{2}{56} \cdot \frac{1}{55} = 0,000034$.

O apostador ficou arrasado com a informação apresentada.

Vamos calcular a probabilidade de que ele acerte na quadra.

Calcularemos, inicialmente, a probabilidade do apostador não ganhar nem na quadra, ou seja, $P(Q^C)$.

Fazendo o cálculo passo a passo:

Probabilidade de não acertar o quarto número dado que acertou os três primeiros: $\frac{54}{57}$.

Probabilidade de não acertar o quinto número dado que acertou os três primeiros e errou o quarto número: $\frac{53}{56}$.

Probabilidade de não acertar o sexto número dado que acertou os três primeiros e errou o quarto e o quinto número: $\frac{52}{55}$.

Temos, $P(Q^C) = \frac{54}{57} \cdot \frac{53}{56} \cdot \frac{52}{55} \cong 0,85$. Logo, $P(Q) = 1 - P(Q^C) = 1 - 0,85 = 0,15$.

A probabilidade de que o apostador ganhe na quadra dado que ele acertou os três primeiros números é 15%.

4.3 Lotofácil

As informações seguintes foram extraídas de [20].

A Lotofácil é, como o próprio nome diz, fácil de apostar e principalmente de ganhar. Você marca entre 15 a 18 números, dentre os 25 disponíveis no volante, e fatura o prêmio se acertar 11, 12, 13, 14 ou 15 números.

Os valores dos prêmios para quem acertar 11, 12 ou 13 números são fixos para cada ganhador, conforme lista a seguir:

11 acertos: 4,00 reais

12 acertos: 8,00 reais

13 acertos: 20,00 reais

Os valores das apostas são 2,00 reais para apostar em 15 números, 32,00 reais em 16 números, 272,00 reais em 17 números e 1632,00 reais em 18 números.

Levantaremos alguns questionamentos sobre esse jogo.

1. É justo pagarmos 32,00 reais por um jogo com 16 dezenas se o jogo com 15 dezenas custa 2,00 reais? E 272,00 reais por um jogo com 17 dezenas?

Calcularemos quantos jogos de 15 números podemos formar com 16 números, ou seja, fazeremos uma combinação 16, 15 a 15. $C_{16,15} = \frac{16!}{(16-15)!15!}$=16. Logo, um jogo com 16 números equivale a 16 jogos de 15 números e como cada jogo de 15 números custa 2,00 reais, 16 jogos custarão $16.2,00 = 32,00$ reais.

De maneira análoga,

$C_{17,15} = \frac{17!}{(17-15)!15!}$=$\frac{17.16}{2}$=136, logo, um jogo com 17 números equivale a 136 jogos de 15 números e como cada jogo de 15 números custa 2,00 reais, 136 jogos custarão $136.2 = 272,00$ reais.

2. Deixamos como exercício verificar que é justo pagar 1632,00 reais para apostar num jogo com 18 dezenas.

3. Quantos jogos simples, com 15 números, devemos apostar de modo que tenhamos certeza que iremos faturar o prêmio máximo?

$C_{25,15} = \frac{25!}{(25-15)!15!} =$

$= \frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15!}{15!10!}$

$= \frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}$

=3268760 jogos para termos certeza do prêmio máximo.

Para termos certeza de que ganharemos o prêmio máximo neste jogo teremos que investir $3268760 \cdot R\$2,00 = R\$6537520,00$. Valor nada atrativo, pois o prêmio médio desse jogo é de $R\$1700000,00$ e ainda corre o risco de sair mais de um ganhador para dividir esse prêmio.

4. Supondo que a Lotofácil pague prêmios em média de 1700000,00 reais, seria vantajoso investir 1000000,00 de reais para tentar ganhar o prêmio máximo?

Com 1000000,00 de reais podemos realizar 500000 apostas simples. Calculando a probabilidade de ganhar o prêmio máximo jogando 500000 apostas simples, será:

$P = \frac{500000}{3268760} = 0{,}1530$

Não seria um bom investimento, já que tem-se pouco mais de 15% de chance de ganhar o prêmio máximo e o valor investido é aproximadamente 60% do prêmio médio do jogo.

4. Qual seria a probabilidade de acertar 11 números, realizando uma aposta simples?

Seja A_{11} o evento correspondente a 11 acertos em uma aposta simples.

O número de possibilidades de acertar 11 números é $C_{15,11} \cdot C_{10,4}$ e o número total de sorteios é $C_{25,15}$. Assim,

$P(A_{11}) = \frac{C_{15,11}.C_{10,4}}{C_{25,15}}$

$P(A_{11}) = \frac{\frac{15!}{(15-11)!11!}\frac{10!}{(10-4)!4!}}{\frac{25!}{(25-15)!15!}}$

$P(A_{11}) = \frac{286650}{3268760}$

$P(A_{11}) = \frac{1}{11}$

Deixamos como exercício verificar que as probabilidades de ocorrerem 12 e 13 acertos com uma aposta simples são $P(A_{12}) = \frac{1}{54}$ e $P(A_{13}) = \frac{1}{691}$, respectivamente.

5. Qual a esperança de premiação para 11, 12 ou 13 acertos?

Seja X a variável aleatória(ganho), temos que:

$P(A_{11}) = \frac{1}{11}$ e premiação de $R\$4,00$.

$P(A_{12}) = \frac{1}{54}$ e premiação de $R\$8,00$.

$P(A_{13}) = \frac{1}{691}$ e premiação de $R\$20,00$.

Portanto, a esperança do prêmio com 11, 12 ou 13 acertos será:

$E(X) = \frac{1}{11}4 + \frac{1}{54}8 + \frac{1}{691}20 = 0,53$, ou seja, ganharemos em média R$0,53 por jogada, mas temos que pagar R$2,00 para apostar.

4.4 Jogo de Roleta

Tudo começou com uma invenção do matemático, físico e filosófo francês Blaise Pascal. Com o objetivo de criar uma máquina em perpétuo movimento, Pascal deu a principal contribuição para a criação da roleta que é utilizada atualmente.

Até 1843 o jogo de roleta constituía em 38 números, sendo dois zeros (coloridos em verde) e o restante distribuídos de 1 a 36, sendo 18 desses números pintados de preto e os outros 18 pintados de vermelho. A partir dessa data, a roleta sofreu uma pequena alteração, foi retirado um zero e assim formalizada a roleta moderna com 37 números, sendo um desses números verde e os outros 36 distribuídos igualmente entre pretos e vermelhos.

Especula-se que o motivo da numeração da roleta ser de 0 a 36 seria por causa da soma desses números $0 + 1 + 2 + 3 + ... + 36$ que totaliza 666, número que trás uma série de curiosidades místicas, religiosas e matemáticas. Para maiores informações sobre o número 666, sugerimos [16] e [17].

Nossa intenção é mostrarmos como jogar na roleta e quais as possíveis probabilidades de ganhar em algumas modalidades desse jogo.

Uma das estratégias de jogar na roleta, a mais simples, é a escolha de um número dentre os 36 disponíveis. Sobre o prêmio pago, varia de cassino para cassino. Na melhor das hipóteses, alguns cassinos pagam até 35 vezes o valor apostado.

A probabilidade, $P(R)$, de ganhar no jogo de roletas apostando em apenas um número é dada recorrendo à probabilidade clássica. Assim, P(R)=$\frac{\text{número de casos favoráveis de R}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{37} =$ 0,027. Logo, são pequenas as chances de vencer nesse modelo de jogo.

Calcularemos a esperança da variável aleatória X (ganho) nesse tipo de jogo, apostando D em um único número.

Precisamos calcular a prababilidade de perder nesse jogo, que é dada por $P(R^C) = 1 - 0,027 = 0,973$. $P(X = 34D) = 0,027$ e $P(X = -D) = 0,973$ $E(X) = \sum_{n=1}^{n} x_i.P(x_i)$

$E(X) = 34D \cdot P(R) + (-D) \cdot P(R^C)$

$E(X) = 34D \cdot 0,027 + (-D) \cdot 0,973$

$E(X) = 0,918D + (-0,973D)$

$E(X) = -0,055D$

Logo, se apostarmos 10,00 reais em cada partida de roleta, após um número suficientemente grande de jogadas, o apostador perderá em média 55 centavos por partida.

Outra maneira de jogar na roleta é apostando em números pretos ou em números vermelhos, lembrando que existem 18 números de cada cor.

A probabilidade de ganhar, $P(C)$, apostando em uma das duas cores, é calculada mais uma vez recorrendo à probabilidade clássica. Assim, P(C)=$\frac{\text{número de casos favoráveis de C}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{18}{37}$ = 0,486. Logo, as chances de ganhar apostando numa cor são relativamente boas comparadas com apostar em apenas um número.

O prêmio pago nessa modalidade de jogo, em alguns cassinos, é duas vezes o valor apostado. Calcularemos a esperança de ganhar nesse tipo de jogo.

Precisamos calcular a prababilidade de perder nesse jogo, que é dada por $P(C^C) = 1 - 0,486 = 0,514$.

$E(X) = \sum_{n=1}^{n} x_i.P(x_i)$

$E(X) = D \cdot P(C) + (-D) \cdot P(C^C)$

$E(X) = D \cdot 0,486 + (-D) \cdot 0,514$

$E(X) = 0,486D + (-0,514D)$

$E(X) = -0,028D$

Assim, apostando 10,00 reais em cada partida de roleta nesse modelo de jogo, após um número suficientemente grande de jogadas, o apostador perderá em média 28 centavos por partida.

4.5 Atividades Propostas

Nesta seção deixaremos atividades que visam as aplicações de boa parte do conteúdo mostrado. Para contextualizar de forma mais agradável tais conteúdos, tomaremos mais dois jogos oferecidos pela Caixa Econômica Federal, a Quina e a Lotomania.

1. A Quina possui sorteios de segunda a sábado e para apostar, basta escolher de 5, 6 ou 7 números, entre os 80 disponíveis, ganha quem fizer 3, 4 ou 5 pontos. Em cada aposta premiada, será pago apenas a faixa de premiação de maior quantidade de acerto.

O preço da aposta com 5 números é de R$ 1,50, a com 6 números R$ 7,50, e R$ 20,00 para concorrer com 7 números.

De posse dessas informações, responda as seguintes questões:

a. Mostre que é justo pagar $R\$7,50$ para apostar com seis números e $R\$20,00$ com sete números.

b. Calcule quantos jogos (apostas simples) serão necessários para termos certeza de que ganharemos o prêmio máximo.

c. Qual a probabilidade de acertarmos uma quina, uma quadra ou um terno?

d. Sabendo que os sorteios são realizados de segunda a sábado, ou seja, seis sorteios semanais, calcule a esperança de ganho, em anos, realizando apenas uma aposta simples por concurso.

e. Se ao invés de realizar uma aposta simples, o jogador insistir em realizar uma aposta com sete números. Quantos anos diminuiria a esperança de ganho dele?

2. Para jogar na Lotomania basta escolher 50 números dentre 100 possíveis e então concorrer a prêmios para acertos de 20, 19, 18, 17, 16 ou nenhum número. Além da opção de marcar no volante, você ainda pode marcar menos que 50 números e deixar que o sistema complete o jogo para você; não marcar nada e deixar que o sistema escolha todos os números na Surpresinha e/ou concorrer com a mesma aposta por 2, 4 ou 8 concursos consecutivos com a Teimosinha. Outra opção é efetuar uma nova aposta com o sistema selecionando os outros 50 números não registrados no jogo original, através da Aposta-Espelho. Informações extraídas de [2].

a. Sabe-se que para realizar uma aposta pagamos $R\$1,50$. Quanto gastaríamos para termos certeza que iríamos ganhar o prêmio máximo?

b. Mostre que a probabilidade de acertar 20 números é igual a probabilidade de não acertar nenhum número.

c. Mostre que é mais fácil ganhar o prêmio acertando 16 números do que ser sorteado numa rifa com 500 pessoas.

d. Qual dos eventos possui maior probabilidade de acontecer: acertar uma quina na Mega-Sena ou acertar 19 pontos na Lotomania?

Referências Bibliográficas

[1] Gneri, Mario A. *Introdução à probabilidade.* Disponível em `http://www.ime.unicamp.br/~cnaber/APOSTILA\%20PROBABILIDADE.doc`.Acesso em: 15 abril 2015

[2] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo olhar matemática* - volume 3 - 2º ed. Ed. FTD, São Paulo, 320 pp.,(2013).

[3] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. *Matemática Completa*, 2ª série - 2ªed. renov.- FTD, São Paulo, 383pp., (2005).

[4] MAGALHÃES, Marcos Nascimento *Probabilidade e variáveis aleatórias* - 2º ed. - Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 428 pp.,(2006).

[5] HOEL, Paul G.; PORT, Sidney C.; STONE, Charles J. *Introdução à teoria da probabilidade*- tradução de Fernando T.Chiyoshi,- ed. Interciência, Rio de Janeiro, 269 pp.,(1978).

[6] BRASIL. Ministério da Educação - Secretaria da Educação Fundamental. *PCN's: parâmetros curriculares nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

[7] SCHEINERMAN, Edward R. *Matemática discreta: uma introdução*- tradução técnica Alfredo A. de Farias - Ed. Pioneira Thomsom Learning, São Paulo, 533 pp.,(2003).

[8] LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, Marc L. *Teoria e problemas de matemática discreta*- tradução de Heloisa B. Medeiros- 2ºed. Ed. Bookman, Porto Alegre, 511 pp.,(2004).

[9] FRANCO, T.; HILÁRIO, M.; SILVA, P. *Introdução à Probabilidade só com moedinhas*, Segundo Colóquio de Matemática da Região Nordeste, SBM, 2012.

[10] Gadelha, A. *Uma Pequena História da Probabilidade*. Disponível em http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf. Acesso em: 07 jul. 2015

[11] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. *Matemática: Uma nova abordagem*, vol. 2: versão trigonometria. São Paulo: FTD. 2000. p. 230-264.

[12] ROSS, Sheldon. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*- tradução de Alberto R. De Conti- 8º ed. Ed. Bookman, Porto Alegre, 608 pp.,(2010).

[13] *Mega-Sena*. Disponível em http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena. Acesso em: 10 nov. 2014.

[14] Lima, Camila M. *Esperança Matemática*. Disponível em http://www.uesc.br/arbelos/_borders/arquivo/monografias/2003.2/esperanca-matematica.pdf. Acesso em: 15 março 2015.

[15] PAIVA, M. *Matemática: Paiva*, vol. 2. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

[16] *Origem da Roleta*. Disponível em http://www.onlinecasinoadvice.com.pt/roleta/historia/. Acesso em: 01 ago. 2015.

[17] *Por que 666 é o número do Diabo*. Disponível em http://super.abril.com.br/blogs/oraculo/por-que-666-e-o-numero-do-diabo/. Acesso em: 01 ago. 2015.

[18] Afonso, Amintas P.*Análise Combinatória para Licenciatura em Matemática*. Disponível em http://www.matematiques.com.br/arquivos/doc_estatistica__129895785.doc. Acesso em: 01 jun. 2015

[19] *Probabilidades*. Disponível em sitedecuriosidades.com. Acesso em: 15 jul. 2015.

[20] *Lotofácil*. Disponível em http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotofacil. 10 nov. 2014

[21] *Quina.* Disponível em `http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/quina`.10 nov. 2014

[22] *Lotomania.* Disponível em `http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/lotomania`. 10 nov. 2014.

[23] LIMA, Elon L.; WAGNER, E.; CARVALHO,P.C.P.; MORGADO, A. C. O. *Matemática do Ensino Médio - vol. 2* - Editora SBM, Rio de Janeiro, 308 pp.,(2006).