UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIA NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: USO DO APLICATIVO *GRAFEQ* NA REPRODUÇÃO DE OBRAS DE ARTE

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Joseane Fiegenbaum

Santa Maria, RS, Brasil

2015

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: USO DO APLICATIVO *GRAFEQ* NA REPRODUÇÃO DE OBRAS DE ARTE

Joseane Fiegenbaum

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientadora: Professora Dra. Carmen Vieira Mathias

Santa Maria, RS, Brasil

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Fiegenbaum, Joseane
Elementos de Geometria Analítica: Uso do aplicativo GrafEq na reprodução de obras de arte / Joseane Fiegenbaum.-2015.
141 p.; 30cm

Orientadora: Carmen Vieira Mathias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2015

1. Tecnologias 2. Geometria Analítica 3. Relato de experiência I. Mathias, Carmen Vieira II. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a dissertação de Mestrado

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: USO DO APLICATIVO GRAFEQ NA REPRODUÇÃO DE OBRAS DE ARTE

elaborada por
Joseane Fiegenbaum

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Carmen Vieira Mathias, Dra.
(Presidente/Orientador)

Alice de Jesus Kozakevicius, Dra. (UFSM)

Rosane Rossato Binotto, Dr. (UFFS)

Cláudia Candida Pansonato, Dra. (UFSM)
(Suplente)

Santa Maria, 16 de Julho de 2015.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela força e sabedoria nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional, pelo carinho e pela compreensão. Pela preocupação com cada longa viagem para as aulas em Santa Maria e pelos almoços nos domingos de estudos.

Às minhas irmãs, pelo incentivo e torcida em cada etapa enfrentada.

Às meninas Luisa e Amanda, pela luz e alívio de seus abraços.

Ao Márcio, pelo amor e carinho nessa etapa final.

Aos amigos que estiveram por perto nesses últimos anos, me apoiando e incentivando, e que compreenderam minha ausência em muitos momentos.

Aos colegas professores nesses anos de docência, da Escola Estadual Madre Benícia e da Escola Estadual Dom Pedro I, de Novo Hamburgo e do Instituto de Educação Cenecista General Canabarro, de Teutônia. As aprendizagens e desafios do caminho da docência foram motivação para essa busca.

Aos amigos e colegas da Escola Municipal D. Pedro II de Lajeado, pelo apoio, compreensão, trocas de horários, incentivos e abraços.

A todos professores da UFSM que fizeram parte desses anos de PROFMAT, e nos auxiliaram muito nessa caminhada.

Agradeço em especial à professora Carmen Vieira Mathias, pela orientação, dedicação, apoio e paciência. Também pela excelente coordenação do curso durante os anos de 2013 e 2014.

Agradeço aos colegas da turma de 2013, em especial aos colegas Gustavo e Adilson, pelo companheirismo, conversas, caronas e momentos de estudos e trocas.

À direção do IFRS – Instituto Federal do Rio Grande do Sul – Campus Ibirubá, pela concessão de horário e incentivo à capacitação.

Aos colegas do Campus Ibirubá, principalmente aos professores da sala da Matemática, pelas ajudas, aprendizagens e pela compreensão.

Aos alunos dos terceiros anos do Ensino Médio de 2015 do IFRS – Campus Ibirubá, pela participação e dedicação nesse trabalho.

À SBM por oferecer este curso, e à CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

ELEMENTOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: USO DO APLICATIVO *GRAFEQ* NA REPRODUÇÃO DE OBRAS DE ARTE

AUTORA: Joseane Fiegenbaum
ORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias.
Data e local da defesa: Santa Maria, 16 de Julho de 2015.

Este estudo aborda o uso das tecnologias no ensino da Matemática, mais especificamente, o software *GrafEq* para desenvolver atividades de Geometria Analítica. Para tal, foram aplicadas atividades ao longo de 5 semanas a duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio do Instituto Federal Rio Grande do Sul, Campus Ibirubá. A análise qualitativa dos dados foi obtida relacionando-se o relato de experiência das atividades realizadas referentes aos conteúdos matemáticos com os registros apresentados pelos alunos no desenvolvimento de uma atividade final que envolvia a reprodução de uma obra de arte. Os resultados apresentados apontam que o uso das tecnologias pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Além disso, esta pesquisa deixa a disposição as atividades elaboradas sobre o conteúdo de Geometria Analítica, para que possam ser utilizadas, modificadas ou servir de inspiração a outros professores.

Palavras-chave: Tecnologias; Geometria Analítica; Relato de experiência.

ABSTRACT

Master´s Essay
Post Graduation Program in Mathematic in National Network - PROFMAT

ANALYTICAL GEOMETRY ELEMENTS: APPLICATION GRAFEQ USE IN WORKS OF ART REPRODUCTION

AUTHOR: Joseane Fiegenbaum
INSTRUCTOR: Carmen Vieira Mathias.
Date and defense site: Santa Maria, July 16, 2015.

This study addresses the use of technologies in the teaching of mathematics, more specifically, the *GrafEq* software in order to develop analytic geometry activities. For this purpose, activities have been applied for five weeks to two classes of the third year of high school at the Federal Institute of Rio Grande do Sul, Ibirubá Campus. The qualitative analysis of the data was obtained relating the experience report of the activities related to mathematical content to the records presented by the students in the development of a final activity that involved the reproduction of a work of art. The results presented show that the use of technology can contribute to the mathematics teaching-learning process. In addition, this research makes the elaborate activities on the content of analytical geometry available, so they can be used, modified, or serve as inspiration to other teachers.

Keywords: Technology; Analytic Geometry; Experience report.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A elaboração dessa dissertação busca apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem de elementos da Geometria Analítica usando um software que permite a construção de elementos geométricos, associando o estudo de Matemática e Artes, oportunizando aos alunos um olhar diferente para esses conteúdos e ampliando sua percepção sobre a matemática presente no nosso cotidiano.

No constante trabalho em sala de aula percebemos a dificuldade que alguns alunos possuem para se adaptar ao uso de ferramentas de aprendizagem que ainda hoje prevalecem em nossas salas de aula, como o quadro e o giz, ou o seu caderno e o lápis. Além disso, num momento de extrema modernidade, com uso de tecnologias cada vez mais avançadas, em geral, os laboratórios de informática não funcionam adequadamente ou os alunos não têm acesso com frequência ao mesmo, ou ainda não há disposição para levar material multimídia para a sala de aula.

Mas é realidade que nossos alunos estão constantemente conectados. Por conta disso são crescentes as ideias e propostas que envolvem as tecnologias no ensino. Proporcionar aos alunos trabalhos que os desafiem e que estejam interligados com uso de tecnologias, proporciona um maior interesse e permite a construção do seu próprio conhecimento.

A ideia de unir Matemática e Artes é proveniente do período em que realizei o curso de graduação de Licenciatura em Matemática, no qual atuei como monitora da disciplina de Educação Matemática e Tecnologia Informática. A graduação foi realizada na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, entre os anos de 2003 e 2007. Esta monitoria, que ocorreu durante o ano de 2007, foi a primeira experiência com o uso de softwares e desenvolvimento de propostas para ensino-aprendizagem de Matemática que fizessem uso de tecnologia. Foi praticamente um ano de atividades junto com a orientadora, onde a atividade que mais exploramos foi uma proposta de releitura de obras de arte usando o software *GrafEq*.

Após essa experiência como monitora, lecionei na Rede Estadual de Educação em Novo Hamburgo por 2 anos, na rede Municipal de Educação de Lajeado por 3 anos e meio (ambas experiências apenas com Ensino Fundamental), concomitantemente com uma escola da rede privada de Teutônia por 2 anos e meio. E recentemente, venho atuando com turmas de Ensino Médio e com turmas de Ensino Superior, especificamente, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Rio Grande do Sul, Campus Ibirubá. Nesses anos que trabalhei com Ensino Fundamental da rede pública, em nenhum momento foi desenvolvida uma proposta de atividade que envolvesse o uso de laboratório de informática, pela precariedade das salas ou pelo número excessivo de alunos na turma. Apenas foi feito uso desses recursos e de softwares enquanto trabalhei na escola particular, principalmente para construção de gráficos no estudo de Funções e de curvas no estudo de Geometria Analítica.

A proposta de explorar o software *GrafEq* com os alunos, explorando conteúdos de Geometria Analítica e motivando-os ao final a reproduzirem obras de arte, foi escolhida não somente pelo constante debate sobre tecnologias na escola, como também por apresentar um outro ponto de vista aos conteúdos estudados, em que os alunos precisam descobrir as relações que irão fazer uso.

Pensando nisso tudo, são apresentadas algumas questões: Como as tecnologias podem auxiliar na proposta de ensino-aprendizagem de matemática? O software é adequado para o ensino desses conteúdos? A proposta desafiante serviu de motivação aos alunos? Quais foram as principais dificuldades durante o desenvolvimento da atividade?

E a partir disso, a motivação foi a questão central que direciona esse trabalho: É proveitoso fazer uso do software *GrafEq* ao aplicar essa proposta no Ensino Médio, visando uma nova abordagem para a compreensão de alguns elementos de estudos da Geometria Analítica?

Guiado por esses questionamentos, o trabalho aqui desenvolvido é apresentado da seguinte forma: No primeiro capítulo, são vistas algumas informações sobre o uso das tecnologias na educação e o uso do software *GrafEq*, além dos conteúdos que esta proposta irá abordar no âmbito da Geometria Analítica. Uma breve discussão teórica é apresentada sobre o uso de tecnologias, a opinião de alguns pesquisadores e o motivo da escolha do software utilizado, as possibilidades de abordagem com o estudo de Artes e uma análise de dissertações recentes em relação a esses temas. Para o estudo dos conteúdos envolvidos, são analisados alguns livros didáticos trazendo a sua abordagem para os diferentes itens que compõem nossa proposta.

No segundo capítulo, são apresentados de forma breve o contexto de aplicação das atividades e a metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa. No terceiro capítulo, a proposta criada para abordar conteúdos de Geometria Analítica fazendo uso do software *GrafEq* é apresentada, assim como sugestões para sua aplicação e o relato de como se efetivou a aplicação dessas atividades. No quarto capítulo, são analisados, junto com as obras de artes reproduzidas pelos alunos, os resultados obtidos com a apresentação dessa proposta. Por fim, são apresentadas as conclusões, onde pretendemos responder as perguntas elencadas nessa introdução.

1 REFERENCIAIS TEÓRICOS

1.1 Uso de tecnologias e software *GrafEq*

Remetendo-nos ao estudo da evolução do uso de tecnologias relacionadas à educação, é importante ressaltar, que a forma como a sociedade tem se desenvolvido nos últimos anos exige que a educação se reinvente, se adapte às novas tecnologias muito presentes e acessíveis a toda população. São inúmeras situações de conflito perceptíveis no contexto escolar em virtude da dificuldade dos alunos se desligarem de seus aparelhos eletrônicos, onde muitas vezes estão conectados virtualmente e se comunicando com outras pessoas, para reservarem atenção suficiente para a fala do professor em uma sala de aula. Podemos perceber algumas evoluções surgidas com o desenvolvimento da informática, quando refletimos sobre o texto de Tajra,

> Podemos verificar que nos últimos anos surgiram, de forma nunca vista antes, inclusive nos aspectos quantitativo e qualitativo, grandes mudanças tecnológicas, principalmente no campo da microeletrônica e das telecomunicações, as quais proporcionaram o desenvolvimento em diversas áreas: economia – inclusive na vasta expansão do capitalismo; industrial – com a gama de processos que passaram a ser automatizados e robotizados; engenharia – possibilitando cada vez mais segurança à construção de máquinas e edificações complexas; telecomunicações – a possibilidade de nos comunicarmos com celulares; medicina – com a precisão dos resultados dos diagnósticos de doenças antes não detectadas em tempo hábil; aeroespacial – a criação do ônibus espacial, possibilitando levar as pessoas à órbita da Terra e seu devido retorno. Todas essas evoluções científicas foram também favorecidas pela informática, que possibilita o embasamento e aprimoramento dos processos de produções e pesquisas. (TAJRA, 2013, p.24)

É angustiante, porém motivador o questionamento do lugar da escola nesse contexto. Acreditamos que a escola precisa aparecer como um cenário de transformações por conta das grandes mudanças tecnológicas. Nessa perspectiva de mudanças, Gravina e Basso apontam que

> Hoje, a variedade de recursos que temos a nossa disposição permite o avanço na discussão que trata de inserir a escola na *cultura do virtual*. A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam *sistemas dinâmicos de representação* na forma de objetos *concreto-abstratos*. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados, e abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais. (GRAVINA, BASSO, 2012, p.14)

A disponibilidade de recursos presente na fala dos autores citados nos faz perceber que uma das necessidades na educação é rever algumas práticas em sala de aula, buscando aprimorar o currículo, aproximando-o da realidade dos alunos. Segundo Pais (2010, p.29) “No plano didático, o uso da informática traz também desafios de diferentes ordens, envolvendo a necessidade de rever princípios, conteúdos, metodologias e práticas compatíveis com a potência dos instrumentos digitais.”.

Encontramos aqui, um dos pontos de conflito na ação de inserção das novas tecnologias nos processos de ensino-aprendizagem: os desafios dos professores de aprenderem, adaptarem e utilizarem as novas tecnologias em sua prática em sala de aula. Professores estes, que tiveram praticamente todas suas experiências educacionais de forma tradicional, num sistema educacional no qual todo esse processo encontra-se enraizado há muitos anos. Para agora, terem que se adaptar a um sistema que se encontra sempre em mudanças e aperfeiçoamentos, onde a cada momento é possível inserir um novo conhecimento, uma nova variável, uma outra dificuldade.

> A rapidez das inovações tecnológicas nem sempre correspondem à capacitação dos professores para a sua utilização e aplicação, o que muitas vezes, resulta no uso inadequado ou na falta de criação diante dos recursos tecnológicos disponíveis, mas não tendo mais o monopólio da transmissão de conhecimentos, exige-se à escola e ao professor, em particular, a função social de orientar os percursos individuais no saber e contribuir para o desenvolvimento de competências, habilidades e cidadania. (SERAFIM, SOUZA, 2011, p. 24)

Percebemos uma necessidade de rever a atuação do professor, na qual ele aparece com uma nova função, de administrar o processo de ensino-aprendizagem do aluno, diante das inúmeras informações que chegam até ele pelos diferentes meios tecnológicos. Nesse contexto, Pais também destaca que

> Conhecer não deve mais ser confundido com a posse de uma coleção de dados; tudo deve ter um significado, uma operacionalidade para o aluno.

> Destacamos esse aspecto em virtude dos recursos digitais, tal como a Internet, se constituírem em um importante meio para a obtenção de informações, sendo estas entendidas como matéria prima para a elaboração do conhecimento. (PAIS, 2010, p.20)

Pais (2010) ainda fala sobre a necessidade do docente de trabalhar com as informações à disposição, e de ter a competência de pesquisar, associar e aplicar essas informações às situações de interesse do aluno. Diante dessas colocações, ao planejarmos a atividade, na proposta aqui apresentada, certamente buscamos refletir sobre os interesses dos alunos em cada item a ser desenvolvido. E o fato de fazer uso das tecnologias vem para aproximar o processo de ensino-aprendizagem de sua realidade, pelas diferentes possibilidades que esse processo permite, como colocam Gravina e Basso,

> A tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam na tela do computador objetos dinâmicos e manipuláveis. E isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente naquelas que têm foco nos imbricados processos de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo nos quais aspectos individuais e sociais se fazem presentes. (GRAVINA, BASSO, 2012, p.13)

Para facilitar essa ligação entre o uso da informática no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, muitos softwares educacionais foram desenvolvidos. Dentre eles, na área da Matemática, podemos citar *Geogebra, Winplot*, Régua e Compasso, *S-Logo* e *GrafEq*. O último foi o utilizado para a atividade proposta.

A escolha do software *GrafEq* se deve a dois motivos: primeiramente, ao fato da nossa experiência no uso desse software, no sentido de conhecermos suas funções e possibilidades. Além disso, acreditamos que as atividades que iremos desenvolver se enquadram de diversas formas nas possibilidades citadas acima, como para ensinar, aprender e estimular a criatividade. Destacamos ainda, o que Gravina e Basso apresentam sobre o *GrafEq*:

> Para trabalhar com funções $y = f(x)$ de uma variável real, com equações de geometria plana e com conjuntos de pontos que satisfazem desigualdades no plano, temos o software *GrafEq*. A sua interface de trabalho é bastante simples e tem recursos de cores que produzem efeitos interessantes. Com esse software podemos, por exemplo, desenhar paisagens e essa atividade exige associar "formas" a relações matemáticas. Para fazer isso, tomamos como ponto de partida uma função bastante simples e aplicamos operações algébricas sobre a sua expressão, assim produzindo diferentes transformações no seu gráfico – translações,

> reflexões, dilatações, contrações – de modo a obter a "forma" desejada. (GRAVINA, BASSO, 2012, p.25).

Apesar de usarmos a ferramenta de forma um pouco diferenciada do que propõem os autores acima, uma vez em que utilizamos do ponto de vista da Geometria Analítica, e não a partir de funções, concordamos que este software apresenta uma interface simples e seus recursos de cores permitem, por exemplo, a reprodução das obras de arte.

Sobre o uso de softwares, destacamos inicialmente, segundo Tajra que

> A utilização de um software está diretamente relacionada à capacidade de percepção do professor em relacionar a tecnologia à sua proposta educacional. Por meio dos softwares podemos ensinar, aprender, simular, estimular a curiosidade ou, simplesmente, produzir trabalhos com qualidade. (TAJRA, 2013, p. 65)

Dentro do contexto da proposta que vamos apresentar, cabe destacar ainda a opção por trabalhar com obras de arte. Frequentemente encontramos nas escolas um incentivo a desenvolver atividades interdisciplinares. E sabemos que muitos conteúdos matemáticos dificultam essa interação. Nesse sentido, realizar o estudo de elementos da Geometria Analítica a partir de obras de arte pode apresentar muitas possibilidades, podendo-se inclusive ampliar o contexto da abordagem, integrando estudos históricos e filosóficos a partir das obras estudadas. Percebemos essa possibilidade no texto de Fainguelernt e Nunes,

> A matemática e a arte nunca estiveram em campos antagônicos, pois desde sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade. Na verdade, podemos observar a influência mútua de uma sobre a outra desde os primeiros registros históricos que temos de ambas. Essas duas áreas sempre tiveram intimamente ligadas, desde as civilizações mais antigas, e são inúmeros os exemplos de sua interação. Muitos povos utilizaram elementos matemáticos na confecção de suas obras: os egípcios com suas monumentais pirâmides e gigantescas estátuas; os gregos com o famoso Parthenon e com seus belíssimos mosaicos, os romanos com suas inúmeras construções em formas circulares, entre elas o Coliseu. (FAINGUELERNT, NUNES, 2007, p.18).

A partir dessa abordagem, procuramos nos ambientar um pouco mais com os temas tratados nessa dissertação, buscando pesquisas em nível de mestrado que tratam desses temas, e que acreditamos possam enriquecer a proposta a ser posteriormente apresentada.

1.2 Trabalhos acadêmicos relacionados ao tema

Na busca por trabalhos referentes ao tema, realizamos inicialmente uma pesquisa nas dissertações defendidas por discentes do Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT. Pesquisando por trabalhos que envolvem obras de arte, encontramos a dissertação de Segura (2013). As demais, que de alguma forma envolveram arte, tratavam de origamis, do número de ouro, ou outros, não possuindo relações com nossa proposta.

Em seu trabalho, Segura (2013), desenvolveu atividades relacionadas à Geometria Analítica fazendo uso do software *Geogebra*, guiando suas atividades, para ao final ter obtido a releitura de uma obra Kandinsky. Na oportunidade, a autora abordou temas sobre o Ensino de Matemática, o uso de tecnologias e do *Geogebra*, Abstracionismo e Releituras de Obras de Arte, método convencional do ensino de Geometria Analítica, e trouxe propostas para uma nova abordagem usando o software *Geogebra*. De forma muito interessante em seu trabalho, a autora buscou não apenas usar o software para mostrar as propriedades da Geometria Analítica, mas também usar algumas de suas ferramentas para fazer um estudo mais aprofundado dessas propriedades, além de trazer fortemente a ideia da interdisciplinaridade.

Ao encerrar sua pesquisa, Segura apresenta numa de suas conclusões, em relação ao uso de tecnologias para desenvolver sua aula, a seguinte consideração:

> Considerando a aceitação por parte dos alunos, não restam dúvidas de que o ensino da Matemática com a utilização da tecnologia não apenas desperta um maior interesse pela aprendizagem, mas possibilita a aquisição da aprendizagem de forma mais efetiva, uma vez que o aluno não é apenas ouvinte, ou mero reprodutor do conhecimento, mas tem participação ativa, questionando, conjecturando, criando, pensando nos conceitos de maneira mais ampla e construindo seu conhecimento. (SEGURA, 2013, p.83)

Levamos em conta os apontamentos da autora uma vez que iremos, da mesma forma que ela, trabalhar com a reprodução de obras de arte, utilizando recursos tecnológicos. Acreditamos que seja possível criar esse mesmo envolvimento dos alunos com a proposta que trazemos nesse texto. Diferenciamos nosso trabalho, trazendo a proposta de reprodução de diferentes obras de arte nas atividades, e motivando os alunos a relacionarem os elementos de estudo da

Geometria Analítica com formas geométricas que essas obras apresentam, permitindo que eles criem autonomia e consigam reproduzir outras obras de arte.

Ainda investigando os trabalhos recentemente publicados pelos discentes do PROFMAT, buscamos por aqueles que tratavam do uso das tecnologias no Ensino da Matemática. Muitos trabalhos abordam esse tema, mostrando como temos possibilidades de trabalhar com as tecnologias atualmente. Um deles é o trabalho de Oliveira (2014), que criou propostas de ensino de alguns conteúdos de Geometria Analítica fazendo uso do software *Geogebra*. O autor traz inicialmente uma abordagem histórica sobre a Geometria Analítica, e menciona os Parâmetros Curriculares Nacionais ao discutir o uso de softwares na Educação Matemática. O trabalho possui uma seção especialmente dedicada ao software *Geogebra*, onde explora suas funcionalidades, e em seguida, apresenta as propostas de atividades. Percebemos aqui, que as propostas são basicamente construções, seguidas de questionamentos que induzem as tradicionais explicações sobre Geometria Analítica.

Acreditamos, que ao introduzirmos as reproduções de obras de arte em nossa proposta, e não apenas trabalhar os conceitos em algum software adequado, como na proposta de Oliveira (2014), estamos motivando os alunos a utilizarem sua criatividade na aprendizagem dos conteúdos.

Na perspectiva de fazer uso das tecnologias, destacamos o trabalho de Navarro (2013) que trouxe uma proposta para o ensino de Ponto e Reta (na perspectiva da Geometria Analítica) fazendo uso do software *Geogebra*. Ele inicialmente traz uma breve discussão sobre o Ensino da Matemática e o uso de tecnologias, além de uma pesquisa com professores sobre sua formação e sobre hábitos no processo de ensino-aprendizagem (quanto ao uso ou não de laboratório de informática, softwares e livros didáticos).

O texto de Navarro (2013) não apresentou a aplicação da proposta criada em nenhuma turma com alunos. O autor incentiva que os professores busquem esse tipo de alternativas em suas aulas, atitude com a qual concordamos, visto que acreditamos que é um trabalho diferenciado que pode atrair a atenção dos alunos. Para nosso trabalho, achamos relevante que seja feita essa aplicação, para verificarmos se realmente o ensino de um conteúdo muitas vezes complexo em sala de aula possa ser facilitado e compreendido mesmo sendo estudado numa diferente perspectiva.

Além dos trabalhos citados, provenientes de dissertações do PROFMAT, ampliamos nossa busca por trabalhos que envolvessem arte, uso de recursos tecnológicos e/ou o ensino de Matemática. Um dos trabalhos que encontramos foi a dissertação de mestrado de Antoniazzi (2005), que mostra em seu trabalho que é possível uma associação entre a Matemática e a Arte. Segundo a autora

> Através da história, percebe-se que Matemática e Arte andaram juntas e, no decorrer dos tempos, essa união se apresentou de tal forma que, muitas vezes, estão implícitos conceitos matemáticos nas experiências artísticas e vice-versa. (ANTONIAZZI, 2005, p.24)

A autora aborda em seu texto, críticas ao sistema convencional de ensino, onde as disciplinas que geralmente são vistas como importantes são aquelas mais exigentes e maçantes, enquanto que disciplinas como Artes que envolvem outro tipo de formação do ser humano, ficam “exprimidas” entre as demais, e muitas vezes são consideradas sem relevância. Desenvolveu com alunos do Ensino Fundamental, atividades utilizando o Tangram (quebra-cabeça a partir de um quadrado), ao longo do ano letivo em que foi realizada a aplicação. De fato, existem muitas possibilidades de inserir atividades interessantes no ensino da Matemática, como a utilização do Tangram. O que percebemos, é que a autora não trabalhou nenhum conteúdo específico com os alunos. Acreditamos que o que difere nosso trabalho do de Antoniazzi (2005) , é que pretendemos mostrar que essa associação entre Arte e Matemática pode sim ser trabalhada em sala de aula (e no nosso caso, no laboratório de informática) incrementando os conteúdos.

Ainda em trabalhos provenientes da conclusão de mestrado, encontramos o trabalho de Santos (2008), que utiliza o *GrafEq* para desenvolver atividades sobre Geometria Analítica. Para desenvolver seu trabalho, o autor trouxe alguns exemplos de demonstrações relacionando ao estudo de Geometria com o estudo da Álgebra, mostrando, dessa forma, a relevância da Geometria Analítica que permite essa conexão. Além disso, o autor traz o estudo das relações entre as tecnologias digitais e a educação Matemática, citando em seu texto características importantes sobre o software *GrafEq*, que também utilizamos em nosso trabalho. Segundo Santos,

> A diferença entre o *GrafEq* e outros softwares existentes no mercado para engenheiros e matemáticos (puros e aplicados), como o Derive e o Maple, é que este foi projetado para fins educacionais, com um layout e ferramentas que se adaptam a matemática estudada do ensino básico. (SANTOS, 2008, p.34)

As atividades desenvolvidas pelo autor não foram aplicadas aos alunos como conteúdo previsto na grade curricular, mas sim, para uma turma de Ensino Médio que ainda não havia tido contato com a Geometria Analítica. As atividades foram desenvolvidas de forma que os conteúdos aparecessem para resolver os desafios que os problemas apresentavam, e nesse momento o professor intermediava com os conceitos matemáticos.

Consideramos a forma como a proposta anterior foi desenvolvida muito interessante, e comparamos com a proposta que desenvolvemos. Em alguns momentos elas se tornam parecidas, pois as atividades são propostas para que os alunos percebam os conceitos. Diferenciamos em nossas atividades o fato de que procuramos formalizar o conceito matemático envolvido logo que ele era percebido pelos alunos.

Finalizando, consideramos ainda o trabalho de Goulart (2009), cuja proposta foi muito próxima do trabalho que estamos desenvolvendo. Inicialmente, Goulart (2009) traz em seu texto um pouco das relações entre as tecnologias digitais e o ensino de Matemática, após, traz as demonstrações dos conteúdos matemáticos sobre Geometria Analítica envolvidos na proposta que irá apresentar. Por fim a proposta de atividades, onde trabalha os conteúdos a partir de obras de arte escolhidas para esse fim.

Uma das diferenças entre o trabalho de Goulart (2009) e a proposta que desenvolvemos, é referente a alguns conteúdos. Nessa dissertação foram abordados os conteúdos de plano cartesiano, equação reduzida da reta, condições de paralelismo e perpendicularismo. Em nosso trabalho, além dessas abordagens, buscamos incentivar os alunos a descobrirem a equação da reta (geral ou reduzida), através das informações provenientes da representação dessa obra no plano cartesiano. Além disso, a autora aborda com detalhes o estudo das cônicas, conteúdo que não abordamos em nossa proposta, por não constar na grade curricular das turmas onde foi realizada a aplicação das atividades.

Certamente, nossa proposta segue ao encontro das propostas apresentadas nessa seção. Mas para que o leitor tenha uma maior compreensão do que apresentaremos, é fundamental compreender alguns conceitos do conteúdo de Geometria Analítica, como segue na próxima seção.

1.3 Geometria Analítica

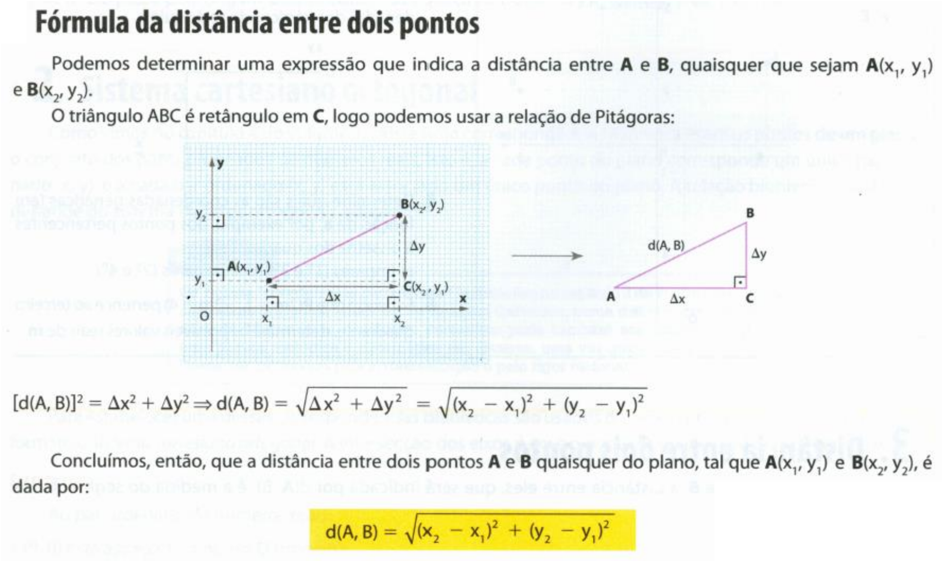
Nessa seção, realizaremos uma apreciação da forma como são trabalhados alguns conteúdos de Geometria Analítica em três diferentes livros didáticos disponíveis para o Ensino Médio, além de trazer explicações sobre os principais itens a serem abordados nas propostas de atividades aos alunos. Serão consideradas três obras: Conexões com a Matemática, organizado por Juliane Matsubara Barroso (Barroso, 2013), Matemática: contexto e aplicações, de Luiz Roberto Dante (Dante, 2010) e Matemática: ciências e aplicações, de Gelson Iezzi e outros (Iezzi,2013).

1.3.1 Conceitos iniciais

Os itens abordados nesta seção foram trabalhados com os alunos em sala de aula, antes de iniciarem a proposta de ensino-aprendizagem que apresentamos em nosso trabalho. Consideramos importante trazer um pouco desse contexto, para que tenhamos um embasamento aos demais conteúdos de Geometria Analítica.

A introdução ao conteúdo de Geometria Analítica nos livros didáticos aparece de duas formas diferentes. Em Barroso (2010), foi usada uma situação problema para contextualizar o plano cartesiano e a distância entre dois pontos. Já nos demais livros foi usada uma introdução histórica, mencionando contribuições de René Descartes e Pierre de Fermat para a Matemática. Em comum, todos eles apresentam em suas primeiras falas a organização no sistema de coordenadas cartesianas, seguido de exercícios de localização e identificação de pontos, distribuição em quadrantes e deduções lógicas quanto à posição dos pontos.

Em seguida, todos os livros didáticos considerados apresentam o item distância entre dois pontos, expondo exemplos. Na figura 1.1 podemos observar a apresentação desse ponto por Dante (2013).



Fórmula da distância entre dois pontos

Podemos determinar uma expressão que indica a distância entre **A** e **B**, quaisquer que sejam **A**(x_1, y_1) e **B**(x_2, y_2).

O triângulo ABC é retângulo em **C**, logo podemos usar a relação de Pitágoras:

$$[d(A, B)]^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Concluímos, então, que a distância entre dois pontos **A** e **B** quaisquer do plano, tal que **A**(x_1, y_1) e **B**(x_2, y_2), é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

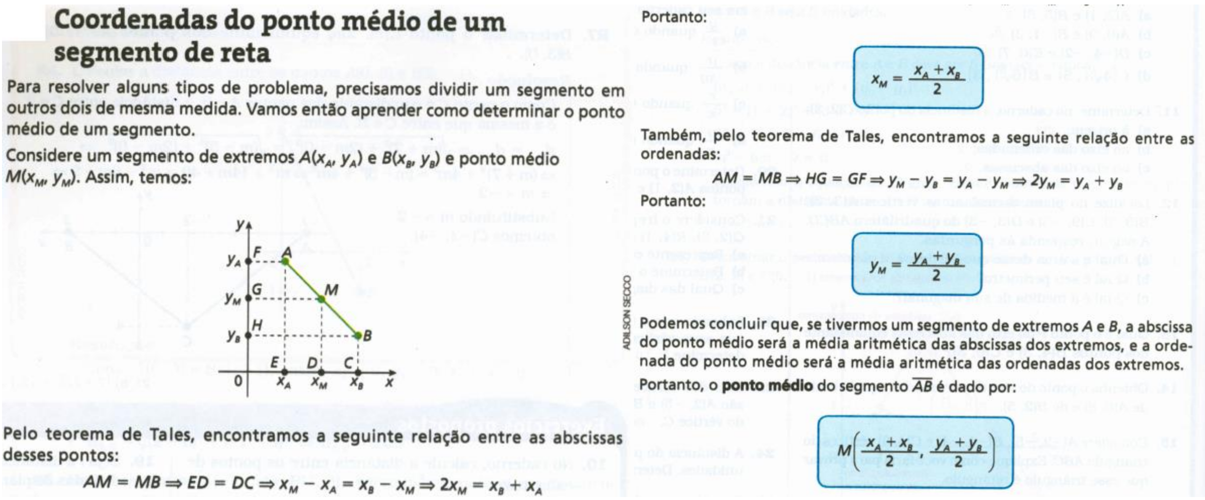
Figura 1.1: Dedução de fórmula de distância entre dois pontos.

Fonte: Dante, 2013, p.52

No material de Iezzi (2013) e Dante (2013), observamos que os autores atentam para a distância entre dois pontos localizados sobre uma reta paralela aos eixos coordenados, onde não se faz necessário o uso da fórmula para calcular a distância. Nos exercícios, são apresentadas situações para cálculo de distâncias, problemas onde se deve descobrir alguma coordenada do ponto, conhecendo-se a distância, e problemas para identificação dos triângulos formados a partir de três pontos.

Após essa abordagem inicial, é apresentado o conceito de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. Todos os autores optam por mostrar a situação para pontos A e B quaisquer, deduzir as fórmulas e apresentar exemplos. Na figura 1.2 observamos a forma como Barroso (2010) apresenta o item citado.

Nos exercícios, são propostas atividades que podem ser consideradas simples, onde é necessário encontrar o ponto médio, e exercícios mais complexos, envolvendo outros conhecimentos de Geometria. Em Iezzi (2013), são apresentadas explicações adicionais sobre mediana e baricentro.



Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Para resolver alguns tipos de problema, precisamos dividir um segmento em outros dois de mesma medida. Vamos então aprender como determinar o ponto médio de um segmento.

Considere um segmento de extremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e ponto médio $M(x_M, y_M)$. Assim, temos:

Pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as abscissas desses pontos:

$$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A$$

Portanto:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

Também, pelo teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as ordenadas:

$$AM = MB \Rightarrow HG = GF \Rightarrow y_M - y_B = y_A - y_M \Rightarrow 2y_M = y_A + y_B$$

Portanto:

$$\boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$$

Podemos concluir que, se tivermos um segmento de extremos *A* e *B*, a abscissa do ponto médio será a média aritmética das abscissas dos extremos, e a ordenada do ponto médio será a média aritmética das ordenadas dos extremos.

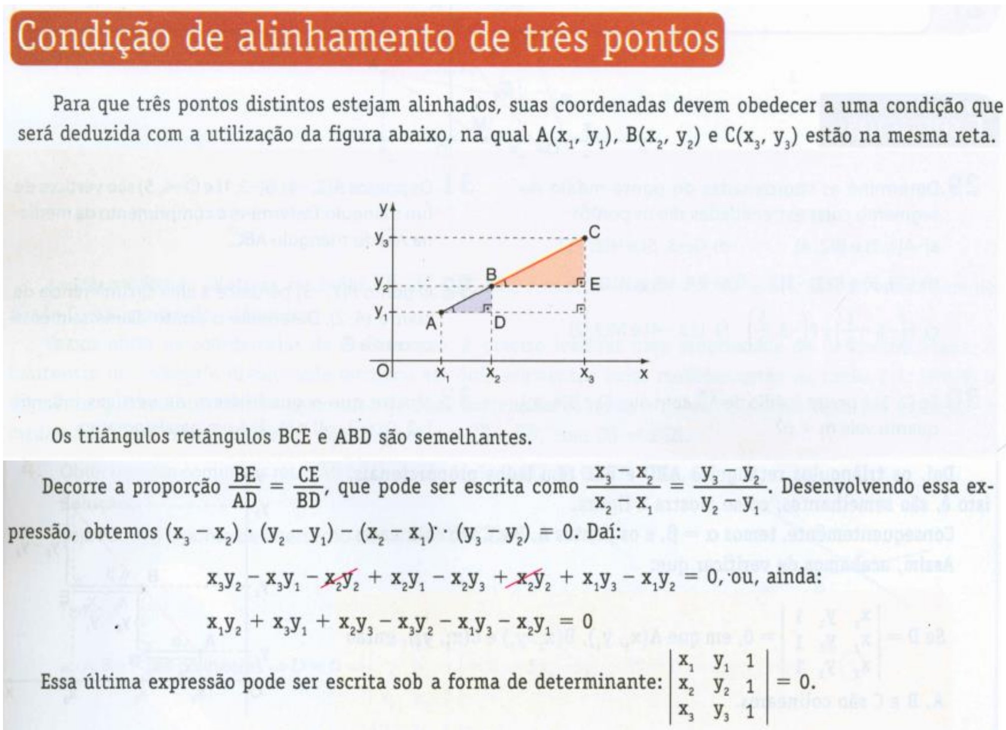
Portanto, o **ponto médio** do segmento $\overline{AB}$ é dado por:

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Figura 1.2: Abordagem para compreensão das coordenadas do ponto médio.

Fonte: Barroso, 2010, p.90

Ainda na parte inicial, sobre pontos, é apresentado um item denominado condição de alinhamento de três pontos. Esse conteúdo é explorado usando semelhança de triângulos, comparando com o resultado do cálculo do determinante de uma matriz, para dessa forma apresentar um “método fácil” de calcular e decidir se três determinados pontos estão alinhados. Podemos observar a sequência acima na figura 1.3, de Iezzi (2013).



Condição de alinhamento de três pontos

Para que três pontos distintos estejam alinhados, suas coordenadas devem obedecer a uma condição que será deduzida com a utilização da figura abaixo, na qual $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ estão na mesma reta.

Os triângulos retângulos BCE e ABD são semelhantes.

Decorre a proporção $\frac{BE}{AD} = \frac{CE}{BD}$, que pode ser escrita como $\frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}$. Desenvolvendo essa expressão, obtemos $(x_3 - x_2) \cdot (y_2 - y_1) - (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_2) = 0$. Daí:

$$x_3y_2 - x_3y_1 - \cancel{x_2y_2} + x_2y_1 - x_2y_3 + \cancel{x_2y_2} + x_1y_3 - x_1y_2 = 0, \text{ ou, ainda:}$$

$$x_1y_2 + x_3y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 = 0$$

Essa última expressão pode ser escrita sob a forma de determinante: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Figura 1.3: Condição de alinhamento de 3 pontos.

Fonte: Iezzi, 2013, p.20

Os conteúdos apresentados a partir desse ponto serão abordados na sequência didática proposta aos alunos, que mostraremos no capítulo 3.

1.3.2 Estudo de retas

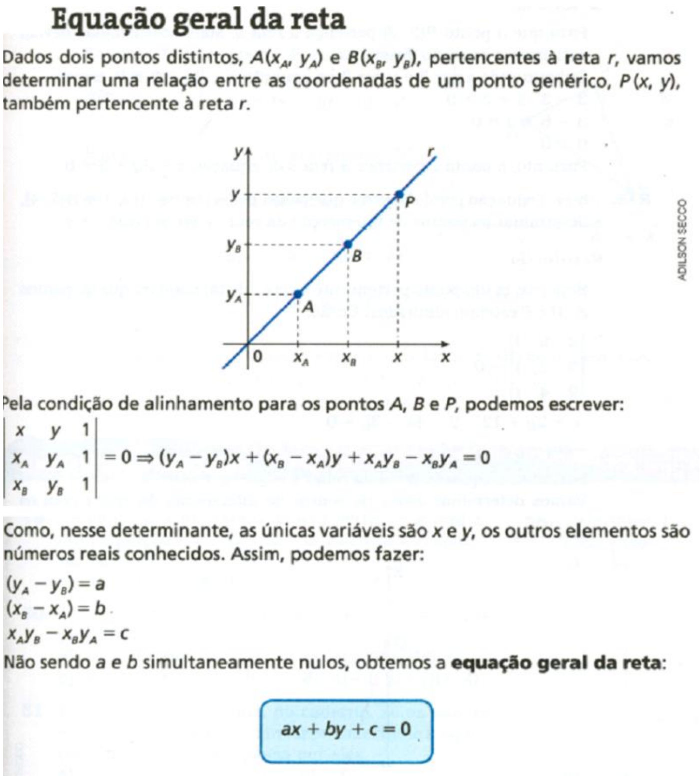
Sobre o estudo de retas, os autores percorrem caminhos diferentes para conduzir o conteúdo. Barroso (2010) inicia construindo a equação geral da reta, usando a relação com determinantes, anteriormente abordada na condição de alinhamento de 3 pontos. Em seguida, faz o estudo da inclinação e coeficiente angular da reta, estudo das equações reduzida, segmentária e paramétrica, e ainda traz uma proposta para posição relativa entre duas retas no plano, analisando condições de paralelismo e perpendicularismo. O autor finaliza a seção trabalhando com distância entre ponto e reta, inequações de primeiro grau e área de superfícies triangulares no plano.

Iezzi (2013) inicia da mesma forma que Barroso (2010), mas apresenta em seguida uma seção sobre interseção de retas, resolvendo sistemas de equações. Em seguida, apresenta a definição de inclinação de uma reta, a equação reduzida, conceitos de paralelismo, perpendicularidade, equações segmentárias e paramétricas. Encerra a seção conceituando distância entre ponto e reta, área de triângulos, inequações do 1º grau e ângulo entre retas.

Dante (2013) inicia com os conceitos de inclinação de uma reta e coeficiente angular. Em seguida apresenta as equações reduzidas, geral e segmentária da reta, posições relativas entre duas retas no plano (retas paralelas e concorrentes), intersecção de duas retas, perpendicularidade, distância de um ponto a uma reta, ângulo entre duas retas e área de uma região triangular.

Percebemos que os conteúdos trabalhados em todos os livros didáticos considerados são muito parecidos, inclusive na forma como são abordados.

Dentro do estudo de retas, um dos primeiros itens a ser abordado nas atividades propostas aos alunos, e, portanto um dos primeiros conceitos que esperamos que os alunos compreendam, é sobre a equação geral da reta. A figura 1.4, apresenta a abordagem realizada por Barroso (2010) para tratar desse tema.



Equação geral da reta

Dados dois pontos distintos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, pertencentes à reta r, vamos determinar uma relação entre as coordenadas de um ponto genérico, $P(x, y)$, também pertencente à reta r.

Pela condição de alinhamento para os pontos A, B e P, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_Ay_B - x_By_A = 0$$

Como, nesse determinante, as únicas variáveis são x e y, os outros elementos são números reais conhecidos. Assim, podemos fazer:

$(y_A - y_B) = a$
$(x_B - x_A) = b$
$x_Ay_B - x_By_A = c$

Não sendo a e b simultaneamente nulos, obtemos a **equação geral da reta**:

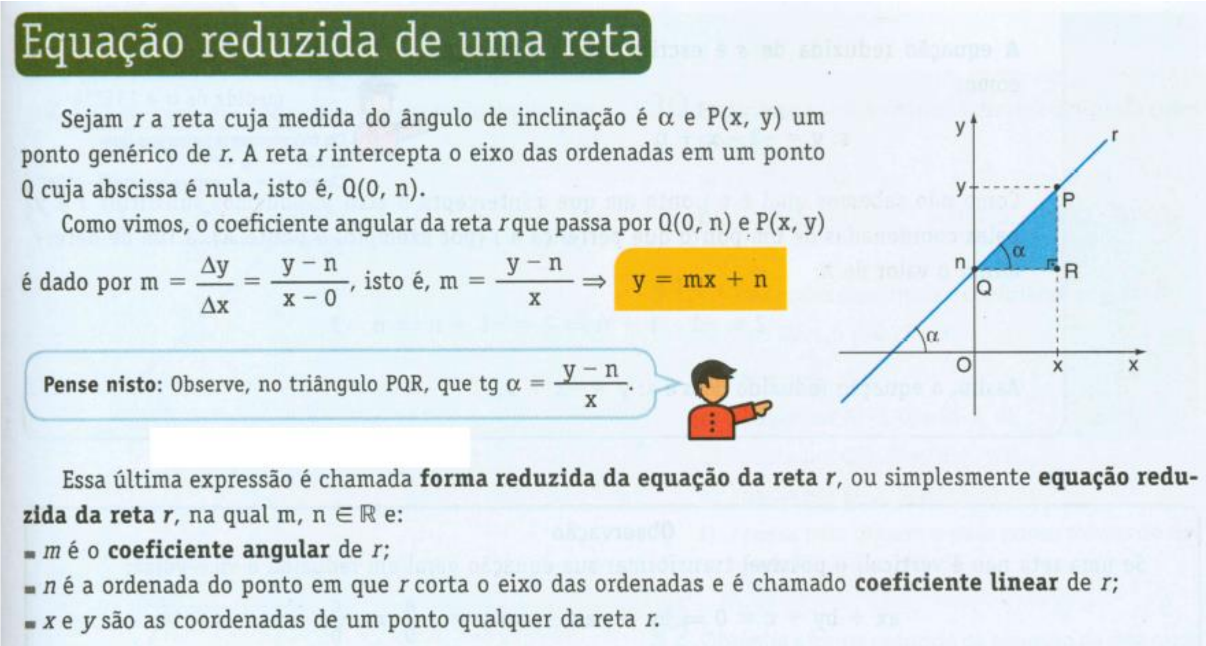
$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Figura 1.4: Abordagem para encontrar equação reduzida a partir de dois pontos.

Fonte: Barroso, 2010, p.95

Em nossa proposta de ensino-aprendizagem, abordaremos a equação geral da reta da mesma forma que nos apresentou Barroso (2010). Após trabalharmos a equação geral da reta, iremos sugerir a equação reduzida como outra forma de escrever a equação geral, apenas isolando a variável y. Essa abordagem não está presente em nenhuma das bibliografias consideradas. Porém, pela nossa experiência, acreditamos que nessa sequência, os alunos conseguirão compreender a relação entre essas duas formas de identificar uma reta mais facilmente. Mostraremos, que a partir da equação geral $ax + by + c = 0$, isolando a variável y, encontramos $y = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}$, que é a reta escrita na forma reduzida. Como essa transformação será feita apenas numericamente, não nos prenderemos aos formalismos e nomenclaturas diferentes que os livros abordam. Consideramos a equação geral da reta como tendo a forma $ax + by + c = 0$, e a equação reduzida como $y = mx + n$, sendo m o coeficiente angular e n o coeficiente linear.

Na figura 1.5, podemos observar como Iezzi (2013) inicia a seção que trata da equação reduzida de uma reta.



Equação reduzida de uma reta

Sejam r a reta cuja medida do ângulo de inclinação é α e $P(x, y)$ um ponto genérico de r. A reta r intercepta o eixo das ordenadas em um ponto Q cuja abscissa é nula, isto é, $Q(0, n)$.

Como vimos, o coeficiente angular da reta r que passa por $Q(0, n)$ e $P(x, y)$ é dado por $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - n}{x - 0}$, isto é, $m = \frac{y - n}{x} \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$

Pense nisto: Observe, no triângulo PQR, que $\text{tg}\ \alpha = \frac{y - n}{x}$.

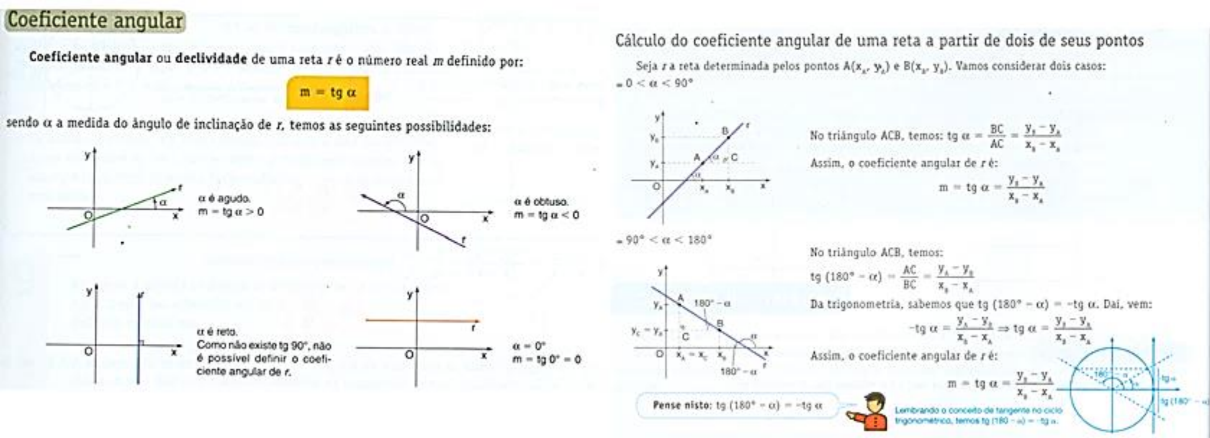
Essa última expressão é chamada **forma reduzida da equação da reta r**, ou simplesmente **equação reduzida da reta r**, na qual $m, n \in \mathbb{R}$ e:

- m é o **coeficiente angular** de r;
- n é a ordenada do ponto em que r corta o eixo das ordenadas e é chamado **coeficiente linear** de r;
- x e y são as coordenadas de um ponto qualquer da reta r.

Figura 1.5: Fórmula da equação reduzida da reta.

Fonte: Iezzi, 2013, p.35

Na abordagem dos conteúdos, iremos explicar do que tratam os coeficientes angular e linear presente na equação reduzida da reta, desenvolvendo atividades diferenciadas para que sejam compreendidos. A definição seguinte a ser compreendida pelos alunos é relacionada ao coeficiente angular das retas. Na figura 1.6 podemos observar como Iezzi (2013) apresenta essa definição.



Coeficiente angular

Coeficiente angular ou **declividade** de uma reta r é o número real m definido por:

$$\boxed{m = \text{tg}\ \alpha}$$

sendo α a medida do ângulo de inclinação de r, temos as seguintes possibilidades:

α é agudo. $m = \text{tg}\ \alpha > 0$

α é obtuso. $m = \text{tg}\ \alpha < 0$

α é reto. Como não existe tg 90°, não é possível definir o coeficiente angular de r.

$\alpha = 0°$ $m = \text{tg}\ 0° = 0$

Cálculo do coeficiente angular de uma reta a partir de dois de seus pontos

Seja r a reta determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Vamos considerar dois casos:

- $0 < \alpha < 90°$

No triângulo ACB, temos: $\text{tg}\ \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Assim, o coeficiente angular de r é:

$$m = \text{tg}\ \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

- $90° < \alpha < 180°$

No triângulo ACB, temos:

$\text{tg}\ (180° - \alpha) = \frac{AC}{BC} = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$

Da trigonometria, sabemos que $\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$. Daí, vem:

$$-\text{tg}\ \alpha = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, o coeficiente angular de r é:

$$m = \text{tg}\ \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Pense nisto: $\text{tg}\ (180° - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$

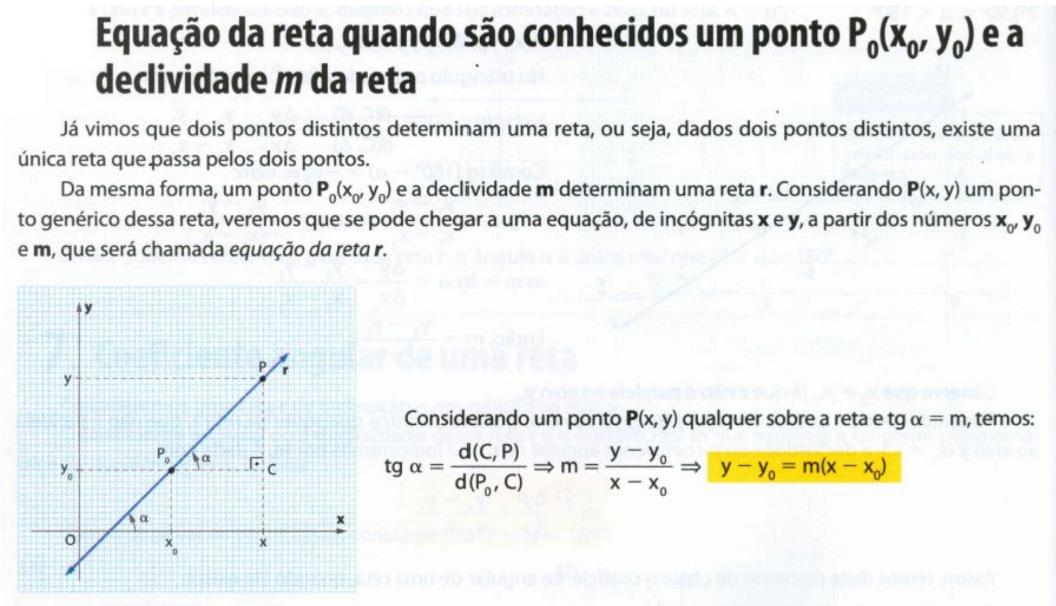
Lembrando o conceito de tangente no ciclo trigonométrico, temos $\text{tg}\ (180 - \alpha) = -\text{tg}\ \alpha$.

Figura 1.6: Formas para encontrar o coeficiente angular da reta.

Fonte: Iezzi, 2013, p. 33 e 34

Em nossa proposta didática, faremos uso dessa abordagem de Iezzi, 2013. Mostrando que o coeficiente angular pode ser determinado calculando-se a tangente do ângulo de inclinação da reta.

Na sequência dos conteúdos que trabalharemos com os alunos, encontramos uma abordagem para determinar a equação da reta quando conhecido apenas um ponto e o coeficiente angular da reta. Para essa seção, consideramos interessante a forma como Dante (2013) introduziu o assunto. A figura 1.7 apresenta essa abordagem.



Equação da reta quando são conhecidos um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e a declividade *m* da reta

Já vimos que dois pontos distintos determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa pelos dois pontos.

Da mesma forma, um ponto $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ e a declividade **m** determinam uma reta **r**. Considerando **P**(x, y) um ponto genérico dessa reta, veremos que se pode chegar a uma equação, de incógnitas **x** e **y**, a partir dos números $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ e **m**, que será chamada *equação da reta r*.

Considerando um ponto **P**(x, y) qualquer sobre a reta e tg α = m, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{d(C, P)}{d(P_0, C)} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

Figura 1.7: Fórmula para encontrar equação reduzida quando conhecido um ponto e a declividade.

Fonte: Dante, 2013, p.60

Em nossa abordagem, iremos apresentar aos alunos a fórmula que poderá ser usada para encontrar a equação reduzida a partir de um ponto e do coeficiente angular conhecidos, assim como Dante (2013), por meio da ideia da tangente do ângulo de inclinação da reta.

1.3.3 Condição de paralelismo e perpendicularismo

Dentro do estudo de retas, pensando na proposta de ensino-aprendizagem que elaboramos, consideramos relevante que o aluno compreenda quando duas retas são paralelas ou perpendiculares, e qual a relação desse fato com o coeficiente angular na equação reduzida da reta. Novamente, ressaltamos que as abordagens dos livros didáticos considerados são muito parecidas. Escolhemos para que possamos compreender esse assunto, a abordagem de Barroso (2010), conforme a figura 1.8. Barroso destaca que quando, além do coeficiente angular, os coeficientes lineares também forem iguais, então teremos retas coincidentes.

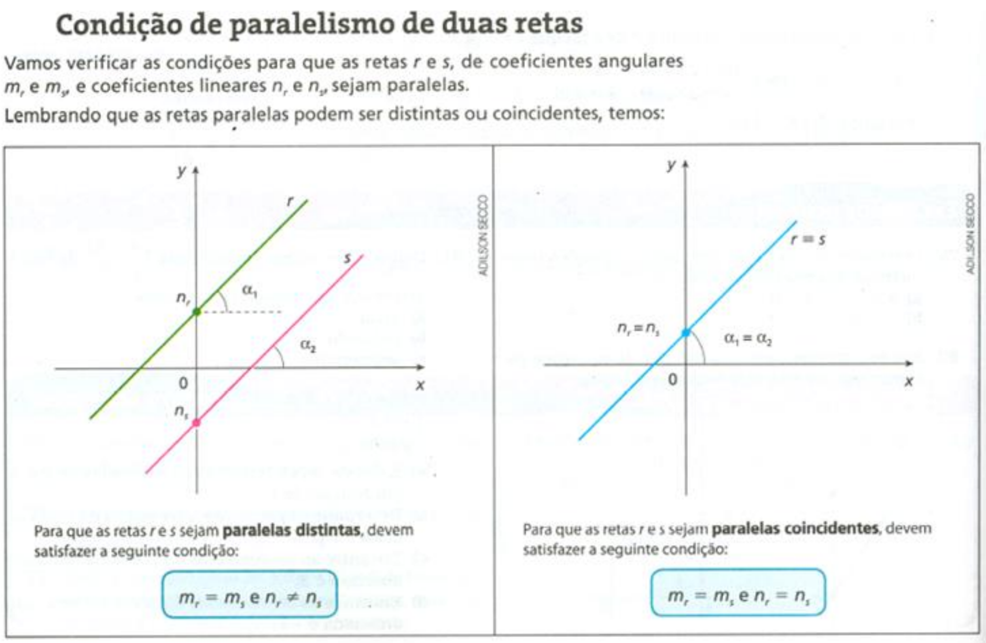
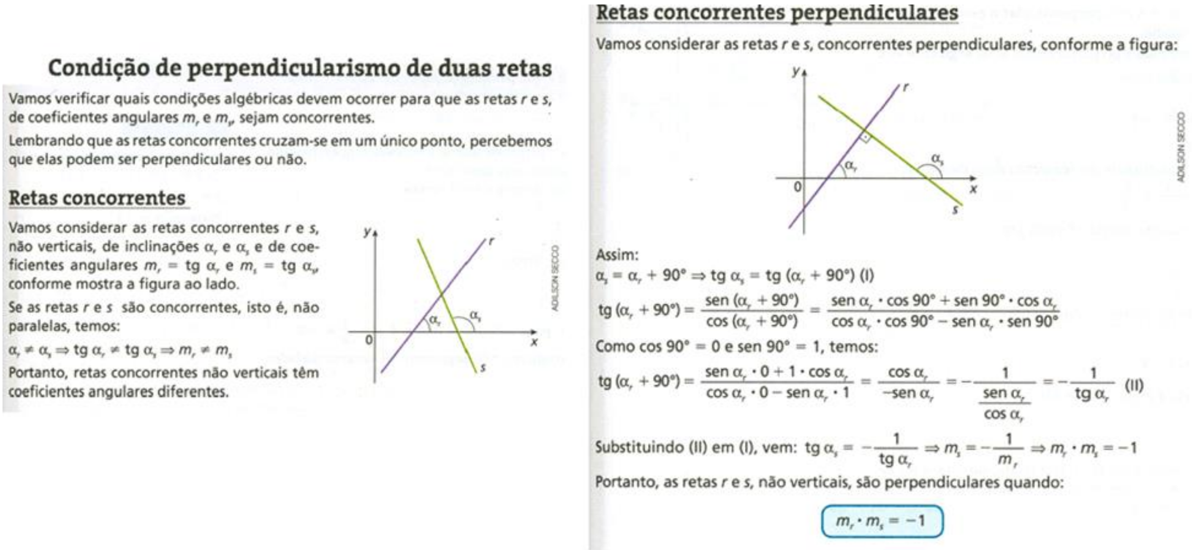


Figura 1.8: Paralelismo de duas retas.

Fonte: Barroso, 2010, p.108

Na sequência didática que iremos propor, serão oferecidas atividades para que os alunos percebam a condição descrita acima.

Além disso, temos a importante condição das retas quando elas formam entre si um ângulo de 90º. Barroso (2010) apresenta primeiramente duas retas quando são apenas concorrentes, e logo em seguida a condição de perpendicularismo. Podemos acompanhar na figura 1.9.



Condição de perpendicularismo de duas retas

Vamos verificar quais condições algébricas devem ocorrer para que as retas *r* e *s*, de coeficientes angulares m_r e m_s, sejam concorrentes.

Lembrando que as retas concorrentes cruzam-se em um único ponto, percebemos que elas podem ser perpendiculares ou não.

Retas concorrentes

Vamos considerar as retas concorrentes *r* e *s*, não verticais, de inclinações α_r e α_s e de coeficientes angulares $m_r = \text{tg}\ \alpha_r$ e $m_s = \text{tg}\ \alpha_s$, conforme mostra a figura ao lado.

Se as retas *r* e *s* são concorrentes, isto é, não paralelas, temos:

$\alpha_r \neq \alpha_s \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_r \neq \text{tg}\ \alpha_s \Rightarrow m_r \neq m_s$

Portanto, retas concorrentes não verticais têm coeficientes angulares diferentes.

Retas concorrentes perpendiculares

Vamos considerar as retas *r* e *s*, concorrentes perpendiculares, conforme a figura:

Assim:

$\alpha_s = \alpha_r + 90° \Rightarrow \text{tg}\ \alpha_s = \text{tg}\ (\alpha_r + 90°)$ (I)

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ (\alpha_r + 90°)}{\cos\ (\alpha_r + 90°)} = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot \cos 90° + \text{sen}\ 90° \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot \cos 90° - \text{sen}\ \alpha_r \cdot \text{sen}\ 90°}$$

Como $\cos 90° = 0$ e $\text{sen}\ 90° = 1$, temos:

$$\text{tg}\ (\alpha_r + 90°) = \frac{\text{sen}\ \alpha_r \cdot 0 + 1 \cdot \cos \alpha_r}{\cos \alpha_r \cdot 0 - \text{sen}\ \alpha_r \cdot 1} = \frac{\cos \alpha_r}{-\text{sen}\ \alpha_r} = -\frac{1}{\frac{\text{sen}\ \alpha_r}{\cos \alpha_r}} = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem: $\text{tg}\ \alpha_s = -\frac{1}{\text{tg}\ \alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$

Portanto, as retas *r* e *s*, não verticais, são perpendiculares quando:

$$\boxed{m_r \cdot m_s = -1}$$

Figura 1.9: Condição de perpendicularismo.

Fonte: Barroso, 2010, p.108

Comparando o que abordamos na sequência didática que iremos propor com as expostas nos livros considerados, reforçamos que alguns conteúdos não foram abordados, como a distância entre reta e ponto, ângulo formado entre duas retas, estudo da área do triângulo conhecidos seus três vértices e a equação paramétrica da reta. Dentre esses conteúdos, aqueles que estavam presentes na grade curricular das turmas, foram trabalhados posteriormente.

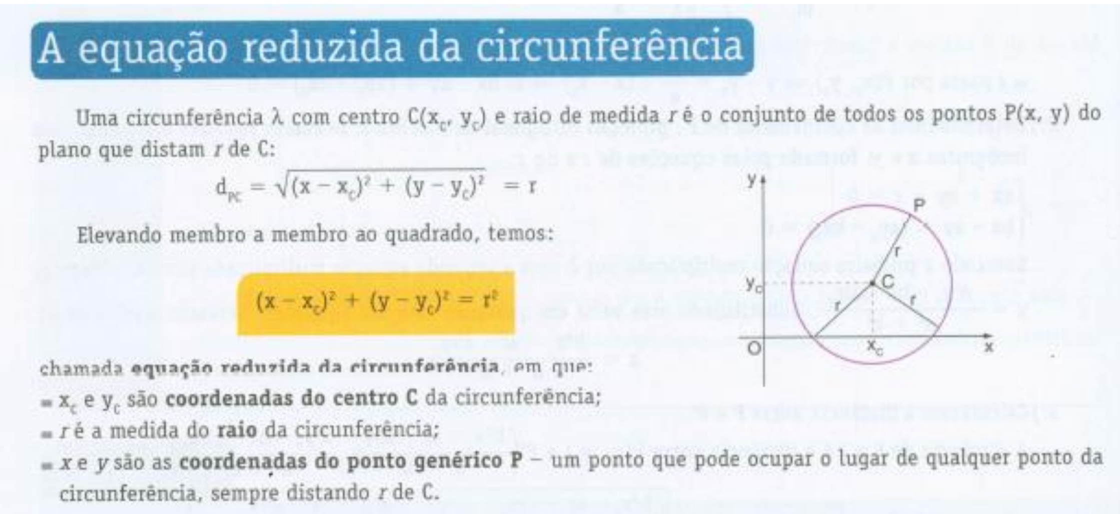
1.3.4 Circunferência e elipse

Ainda, dentro do estudo de Geometria Analítica, temos a abordagem realizada para os conceitos, propriedades de circunferências e de cônicas. Os livros didáticos analisados expõem as sequências que detalhamos a seguir.

Dante (2013) apresenta, no capítulo sobre estudo de circunferências, o conceito (definição) e equação reduzida e geral. Após, trabalha a ideia de posições relativas entre reta e circunferência, problemas de tangência, posições relativas de duas circunferências e aplicações à Geometria Plana.

Já Barroso (2010) apresenta uma sequência muito parecida com a do autor citado anteriormente, apenas acrescenta uma seção de posição relativa entre ponto e circunferência, e não apresenta a seção de aplicações na Geometria Plana. Por fim, Iezzi (2013), apresenta a mesma sequência que Barroso (2010), porém inclui uma seção do inequações de 2º grau com duas incógnitas.

No estudo de cônicas percebemos que os três autores apresentam uma mesma abordagem, começando com uma introdução mostrando todas as cônicas, e em seguida trabalhando cada uma delas em seções individuais. Nas atividades que propomos, iremos fazer uso principalmente da equação reduzida e geral da circunferência e da equação da elipse. Sobre a equação reduzida da circunferência, apresentaremos a abordagem de Barroso (2010), mostrando segundo a definição de circunferência, que são todos os pontos equidistantes do centro. Na figura 1.10 podemos observar a abordagem dessa autora:


A equação reduzida da circunferência

Uma circunferência λ com centro $C(x_c, y_c)$ e raio de medida r é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano que distam r de C:

$$d_{PC} = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} = r$$

Elevando membro a membro ao quadrado, temos:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

chamada **equação reduzida da circunferência**, em que:

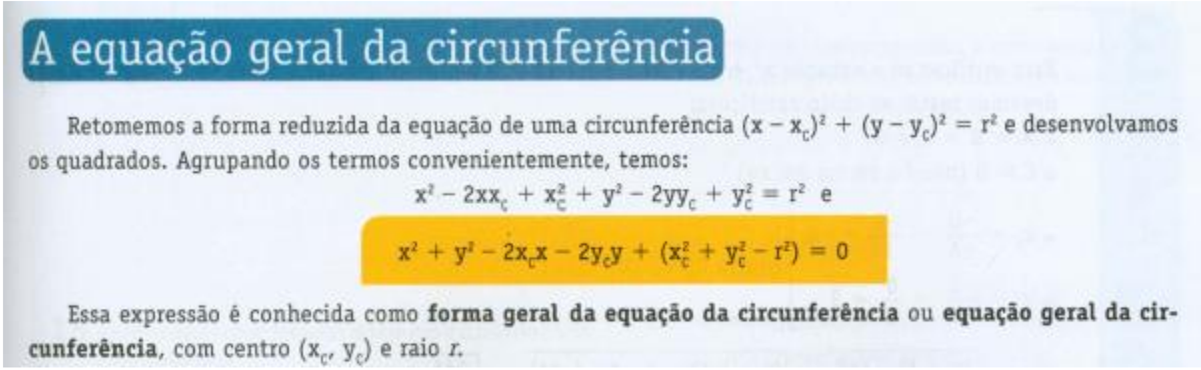
- x_c e y_c são **coordenadas do centro C** da circunferência;
- r é a medida do **raio** da circunferência;
- x e y são as **coordenadas do ponto genérico P** – um ponto que pode ocupar o lugar de qualquer ponto da circunferência, sempre distando r de C.

Figura 1.10: Dedução da equação geral da circunferência.

Fonte: Barroso, 2010, p. 66

Na figura 1.11 podemos observar a abordagem dessa mesma autora para tratar a equação geral da reta. Ela também apresenta as duas maneiras para transformar a equação geral em equação reduzida, completando quadrados ou comparando coeficientes.

Assim como no estudo de retas, o estudo da circunferência no âmbito das atividades elaboradas utilizando o software *GrafEq* é reduzida. Não propomos atividades para as seções de posições relativas entre ponto, reta e circunferências. O mesmo podemos dizer sobre o estudo de elipses, que foram abordadas apenas em atividades superficiais para que os alunos pudessem descobrir a equação das elipses e reproduzi-las no software.



A equação geral da circunferência

Retomemos a forma reduzida da equação de uma circunferência $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ e desenvolvamos os quadrados. Agrupando os termos convenientemente, temos:

$$x^2 - 2xx_c + x_c^2 + y^2 - 2yy_c + y_c^2 = r^2 \text{ e}$$

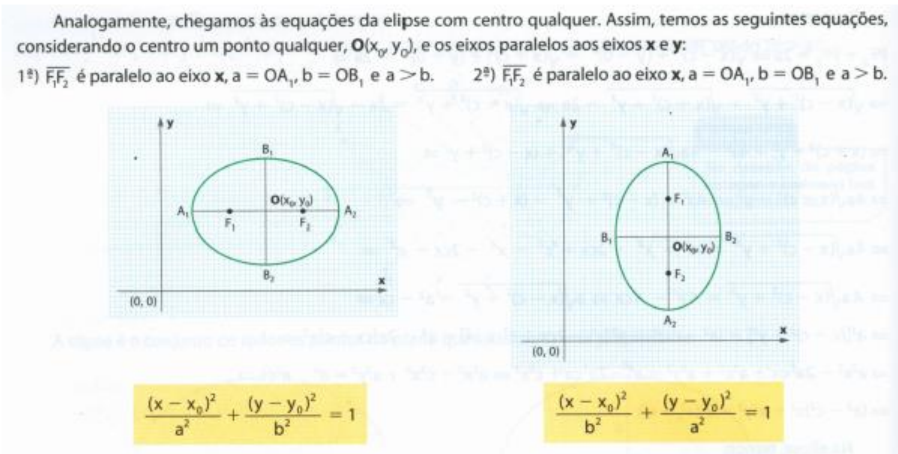
$$x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + (x_c^2 + y_c^2 - r^2) = 0$$

Essa expressão é conhecida como **forma geral da equação da circunferência** ou **equação geral da circunferência**, com centro (x_c, y_c) e raio r.

Figura 1.11: Equação geral da circunferência

Fonte: Barroso, 2010, p. 69.

A figura 1.12 apresenta um recorte de Dante (2013), que traz as equações das elipses de centro qualquer.



Analogamente, chegamos às equações da elipse com centro qualquer. Assim, temos as seguintes equações, considerando o centro um ponto qualquer, $O(x_0, y_0)$, e os eixos paralelos aos eixos **x** e **y**:

1ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo **x**, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.

2ª) $\overline{F_1F_2}$ é paralelo ao eixo **x**, $a = OA_1$, $b = OB_1$ e $a > b$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Figura 1.12: Fórmula das elipses

Fonte: Dante, 2013, p. 116

Finalizando, reforçamos aqui que a proposta que iremos desenvolver, irá contemplar, dentro da Geometria Analítica, alguns itens do estudo de retas, circunferências e elipses. Portanto, existem alguns conteúdos que deverão ser abordados previamente, assim como alguns tópicos serão trabalhados de forma tradicional, paralelamente ou ao final das atividades no Laboratório de Informática. Os conteúdos abordados na proposta serão apenas aqueles que interferem para o desenvolvimento de um trabalho final do qual trataremos mais tarde.

2 METODOLOGIA

2.1 Introdução

Para o desenvolvimento das atividades propostas usaremos aulas expositivas sobre alguns conteúdos de Geometria Analítica, mas principalmente atividades sugestivas, desenvolvidas no laboratório de informática, que levem o aluno a intuitivamente deduzir alguns conceitos utilizando experimento com o software *GrafEq*uation (*GrafEq*). Previamente, os alunos já deverão ter estudado conteúdos sobre plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento e condições de alinhamento de três pontos. E, como não abordaremos todos os tópicos de Geometria Analítica, será necessário complementar posteriormente, com o estudo de alguns itens como distância entre ponto e reta e posições relativas entre reta e circunferência. As atividades sugeridas no capítulo 3 estão disponíveis no anexo, para os professores que desejarem aplicar a sequência. Tais questões foram aplicadas em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, Campus Ibirubá.

2.2 Sobre as turmas

A primeira turma para a qual foi aplicada a atividade foi do Curso Técnico em Informática, composta por 19 alunos. Salientamos que visto esse número reduzido, todos puderam trabalhar individualmente no laboratório de informática. Consideramos importante ressaltar algumas impressões preliminares dessa turma, destacando a facilidade com que os alunos compreenderam a operacionalidade dos aplicativos, tais como encontrar e abrir o software, copiar e colar figuras, salvar arquivos de forma correta. Identificaremos essa turma como turma A, no decorrer do trabalho.

A segunda turma em que propomos as atividades para o estudo de Geometria Analítica foi a turma do Curso Técnico em Mecânica, identificada nesse trabalho por turma B. Por se tratar de uma turma com apenas 15 alunos, destacamos principalmente a tranquilidade nos momentos de aplicação das tarefas, e o fato de todos alunos terem trabalhado individualmente e se ajudarem quando encontravam dificuldades relacionadas à operacionalidade dos aplicativos ou aos conteúdos trabalhados.

2.3 Acompanhamento das atividades realizadas pelos alunos

As atividades foram propostas ao longo de 5 semanas, com 3 períodos semanais, de 50 minutos cada um. Como as atividades realizadas tratavam de um conteúdo presente nos programas disciplinares do 3º ano do Ensino Médio, as atividades desenvolvidas pelos alunos formaram parte de suas avaliações do semestre.

Para um controle de realização das atividades e para a avaliação dos alunos, eles receberam as atividades impressas, com instruções para que salvassem em um único arquivo as imagens dos gráficos que plotaram no *GrafEq*, e o enviassem posteriormente via e-mail para a professora. Assim como, também entregassem a atividade impressa com as respostas que elaboraram. As atividades foram avaliadas levando em conta o desenvolvimento de todos os itens, entrega das atividades, participação, questionamentos durante a aplicação e a realização da atividade final.

No caso dos alunos que não concluíram as atividades dentro do período da aula no qual elas foram propostas, eles puderam concluir as mesmas em casa até a semana seguinte, ou utilizar os computadores do laboratório de matemática, que estavam disponíveis para esse fim. Assim como havia horários disponíveis para que os alunos procurassem auxílio da professora quando havia dúvidas.

3 PROPOSTA DE ABORDAGEM E RELATO DE EXPERIÊNCIA

3.1 Introdução

Nesse capítulo, apresentaremos as atividades desenvolvidas pelos alunos, acompanhadas de seus objetivos, de uma sugestão para seu desenvolvimento e do relato da experiência nas turmas onde foram aplicadas. Conforme descrito no capítulo 1, as atividades serão desenvolvidas a partir dos conceitos apresentados por Barroso (2013), Dante (2010) e Iezzi (2013).

Todas as figuras contidas nesse capítulo, cuja fonte não foi apresentada, são da autora.

3.2 Primeiras atividades

Nesta seção, abordaremos as três primeiras atividades, que podem ser trabalhadas na sequência, e levam em torno de 2 períodos.

Atividade 1:

a) Abra o software *GrafEq*, e digite uma equação de duas variáveis de sua escolha.

b) Após discussão em grupo, registre a equação que você escolheu, e reproduza o gráfico no plano cartesiano da figura 3.1.

Objetivos: Conhecer algumas funções do software *GrafEq*, especialmente as ferramentas que o aplicativo tem disponível. Sondar o conhecimento dos alunos para realizar a plotagem de equações com duas variáveis.

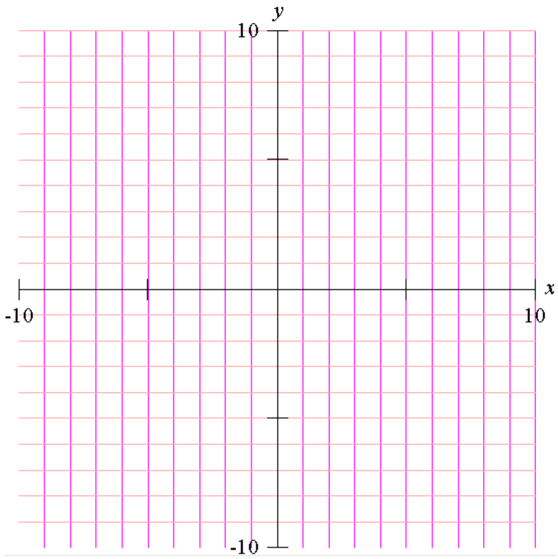


Figura 3.1: Plano cartesiano para desenvolver algumas das atividades.

Tempo esperado: Deverá contemplar em torno de 30 minutos.

Sugestões de aplicação: Para abordar essa atividade, sugerimos inicialmente que o professor realize uma introdução a cerca do conteúdo que será trabalhado (equações), principalmente equações de duas variáveis. Realizada essa conversa, o professor deve incentivar os alunos na plotagem de gráficos de relações, conforme o item a) da atividade 1. A partir das equações escolhidas pelos alunos, o professor poderá selecionar algumas e plotar em um mesmo gráfico, utilizando projetor multimídia.

Tomando como ponto de partida os diferentes gráficos que surgirem, o professor pode gerar uma discussão sobre as equações e as formas desenhadas. Alguns questionamentos possíveis são:

a) Quais foram as formas geométricas que apareceram?

b) Se aparecerem apenas retas, o professor pode questionar se outras formas são possíveis de serem desenhadas usando equações.

c) Se não aparecerem retas, pode questionar como elas poderiam ser desenhadas usando equações de duas variáveis, tentando lembrá-los dos gráficos de funções de 1º grau. E a partir da discussão e propostas que forem surgindo, o professor poderá digitar algumas equações para plotar algumas retas no *GrafEq*.

<u>Relato da aplicação:</u> Percebemos na turma A um grande entusiasmo de acordo com as diferentes figuras que eles descobriram. Previamente, discutimos que uma relação deveria estar apresentando uma igualdade, e como poderíamos colocar as variáveis nessa relação. Como esperávamos, alguns alunos optaram por equações simples, que acabaram gerando uma reta. Na figura 3.2, apresentamos o resultado das equações escolhidas por dois alunos, onde um deles encontrou uma reta, e o outro uma diferente forma geométrica.

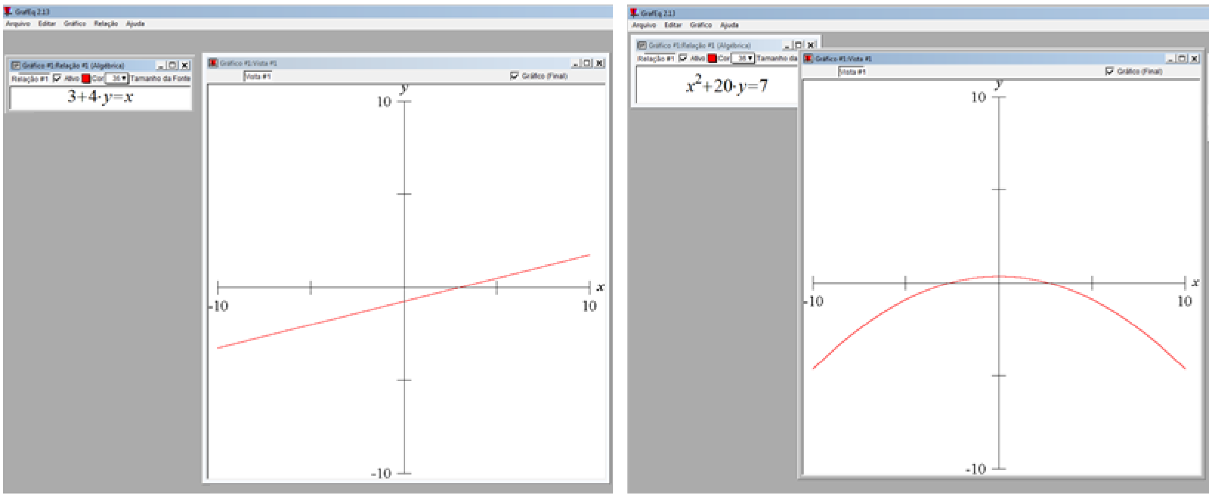


Figura 3.2: Atividade desenvolvida pelos alunos da turma A.

Para que todos pudessem visualizar os diferentes resultados de acordo com cada equação, utilizamos o projetor multimídia, para plotar todas as equações em um plano cartesiano. A partir dessa plotagem questionamos os alunos como são as equações das retas. Numa resposta inicial, apareceu que são aquelas equações que não são elevadas ao quadrado ou ao cubo, que não possuem raiz de qualquer ordem nas equações que eles haviam plotado. Por fim, todos criaram uma diferente equação de reta e concluíram a atividade.

No desenvolvimento da atividade 1 com a turma B, percebemos que os alunos tiveram uma certa resistência em escrever relações matemáticas no *GrafEq*. Em certo momento, um dos alunos questionou se poderia ser da forma $2x + y = 3$. Concordamos que sim, e sugerimos que eles poderiam usar também potências ou raízes. A partir destas falas, muitos acabaram plotando gráficos de retas, e poucos tiveram formas diferentes. Questionamos sobre como deve ser a equação para que fosse desenhada uma reta, uma das alunas respondeu que seria de primeiro grau.

Solicitamos que ela explicasse, e ela acabou dizendo que deveriam ser sem potências. Os demais colegas concordaram, e a partir disso concluíram a atividade plotando, cada um, uma reta diferente. Na figura 3.3 podemos visualizar retas que dois alunos da turma B, escolheram e desenharam nas folhas de orientações das atividades, após terem plotado seu gráfico no *GrafEq*.

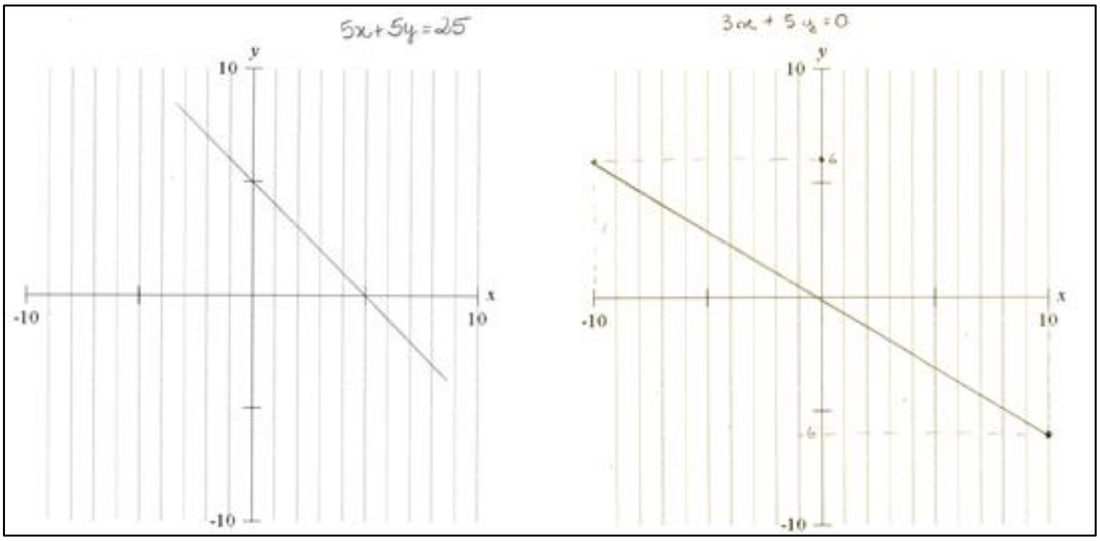


Figura 3.3: Atividade desenvolvida pelos alunos da turma B

Atividade 2:

a) Plote o gráfico da equação: $y = 3$. Qual o gráfico obtido?

b) Plote o gráfico da inequação $y < 3$. Qual a diferença entre esse e o anterior?

c) Você consegue imaginar o que irá acontecer ao plotar os gráficos $x = 3$ e $x > 3$? Desenhe no plano cartesiano (figura 3.1) e após verifique plotando os gráficos no *GrafEq*.

d) Embasado nas ideias anteriores descubra quais devem ser as inequações usadas para representar o retângulo abaixo (figura 3.4):

<u>Objetivo:</u> Relacionar as equações com as inequações, a fim de permitir que os alunos percebam o espaço determinado no plano cartesiano pelos sinais de desigualdades.

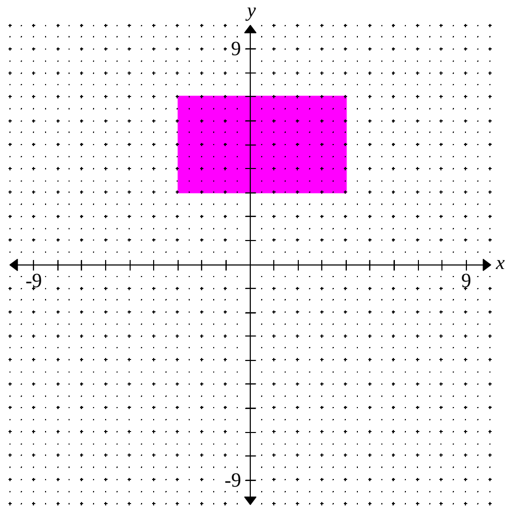


Figura 3.4: Imagem para resolver o item d) da atividade 2.

Tempo esperado: Essa atividade pode ser realizada na sequência da atividade 1, e deve levar em torno de 20 minutos.

Sugestões de aplicação: O professor pode permitir que os alunos realizem a atividade individualmente, e apenas auxilie quando eles apresentarem dúvidas. Ao final, o professor pode fazer algumas observações, sugerindo aos alunos algumas formas para facilitar o seu trabalho. Por exemplo, pode observar que a atividade será realizada de forma mais simples, se fizer uso das relações que aparecem na figura 3.5, ou então usar inequações compostas, como $-3 < x < 4$ e $3 < y < 7$.

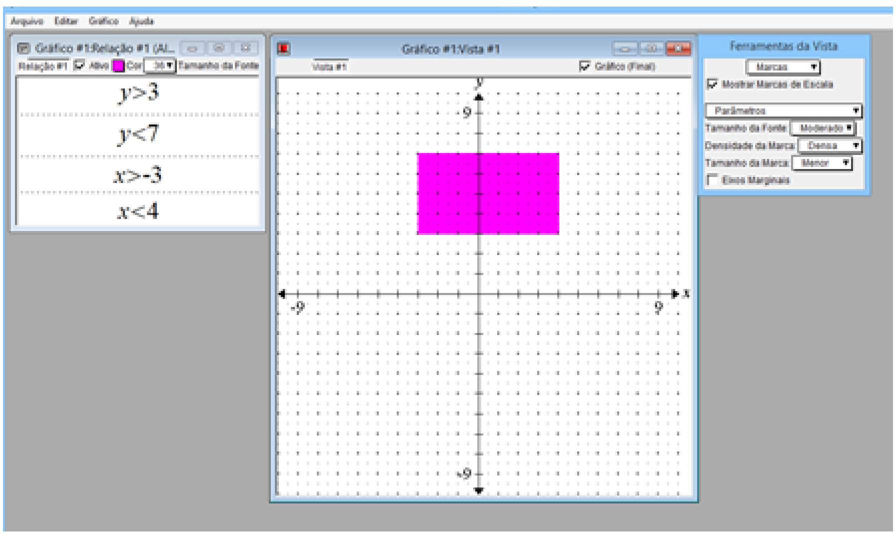
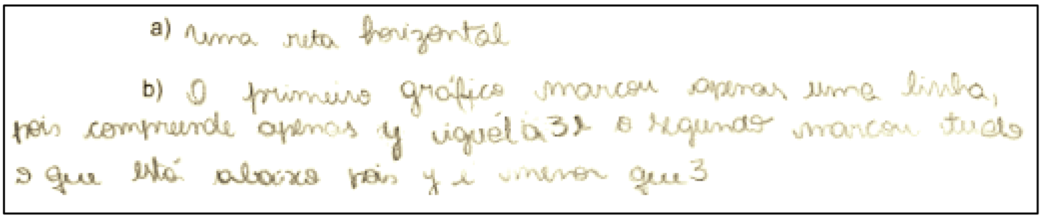


Figura 3.5: Uma possível solução para o item d da atividade 2.

<u>Relato da aplicação:</u> Ao trabalhar essa atividade com a turma A, percebemos que os alunos conseguiram compreender e explicar facilmente o uso das desigualdades. Além disso, verificamos que eles compreenderam como fazer uso de inequações compostas (conceito necessário para realizar o item d). A figura 3.6, apresenta a resposta dada por um aluno aos questionamentos iniciais.


a) uma reta horizontal

b) O primeiro gráfico marcou apenas uma linha, pois compreende apenas y igual a 3 e o segundo marcou tudo o que está abaixo pois y é menor que 3

Figura 3.6: Resposta de um aluno aos itens a) e b).

Na turma B, nos deparamos com a dificuldade dos alunos para explicar o que acontecia no uso da desigualdade. Mas logo que alguns alunos falaram sobre pintar “tudo”, os demais conseguiram compreender, e após as demais atividades foram desenvolvidas de forma muito tranquila. Na figura 3.7 podemos observar o desenvolvimento de um aluno desta turma para os itens c) e d).

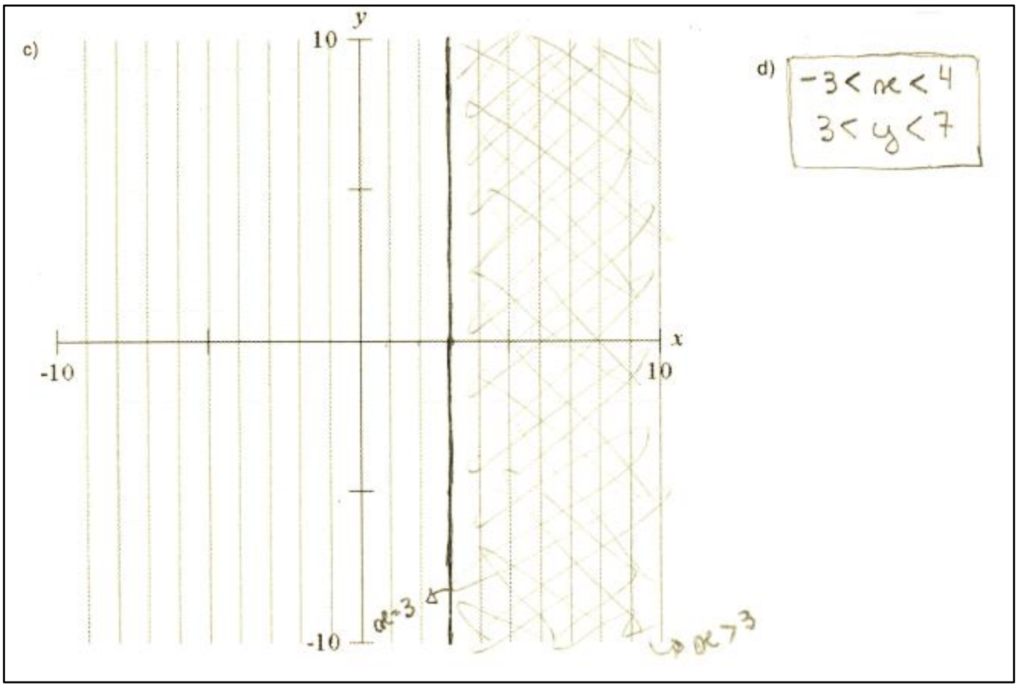


Figura 3.7: Resposta de um aluno aos itens c) e d).

Atividade 3:

Realizando algumas pesquisas na rede mundial de computadores (internet), podemos encontrar muitas obras de artes que apresentam elementos como os que acabamos de desenhar. Um exemplo são algumas obras de Piet Cornelis Mondrian, um pintor neerlandês modernista. A figura 3.8, apresenta uma de suas obras. Perceba que ela é formada apenas por retas!

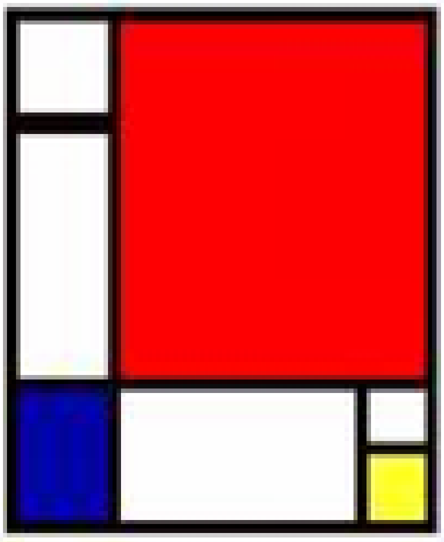


Figura 3.8: Obra de Piet Mondrian

Fonte: CAVALCANTI, 2013.

Uma pergunta que surge é a seguinte: Será que conseguimos reproduzir essa obra utilizando o aplicativo *GrafEq*?

a) Registre no plano cartesiano (figura 3.1) um esboço da obra de arte acima para construí-la posteriormente usando o *GrafEq*.

b) Quais são as relações que possibilitam construir a obra no *GrafEq*?

Objetivo: Introduzir a relação de obras de arte com elementos geométricos e possíveis desenhos a serem realizados no *GrafEq*.

Tempo previsto: Esta atividade está planejada para levar em torno de 50 minutos.

Sugestões de aplicação: Na abordagem, ao apresentar a proposta sobre reproduzir a obra de arte no software *GrafEq* aos alunos, o professor pode solicitar que eles realizem a atividade do item a) e reproduzam a obra inicialmente no plano cartesiano, para que tenham uma aproximação nas medidas utilizadas. Ainda, pode sugerir as dimensões da obra de arte, e a partir disso permitir que cada um desenvolva sua atividade.

<u>Relato da aplicação:</u> Essa atividade nos proporcionou iniciar as relações de obras de arte com o estudo de retas no âmbito da Geometria Analítica. A obra de arte de Mondrian foi escolhida, pois possui apenas retângulos e prevíamos que isso seria fácil, visto que os alunos tinham pouca prática no *GrafEq*. Além disso, essa obra possui elementos cujas relações são simples de compreender.

Ao realizar a atividade com a turma A, muitos alunos não acharam importante ou não realizaram o desenho no plano cartesiano, e conseguiram boas réplicas usando diretamente o *GrafEq*. Para que os alunos reproduzissem a obra de Mondrian, foi proposto que usassem um fundo preto e após desenhassem os demais retângulos sobre esse fundo. Ainda, foram sugeridos limites, para que eles pensassem em como fazer o desenho naquele espaço. Nem todos os alunos seguiram esta sugestão, alguns ampliaram o espaço de visualização e realizaram a atividade de forma mais independente. A figura 3.9 apresenta a construção dessa atividade por um aluno da turma A.

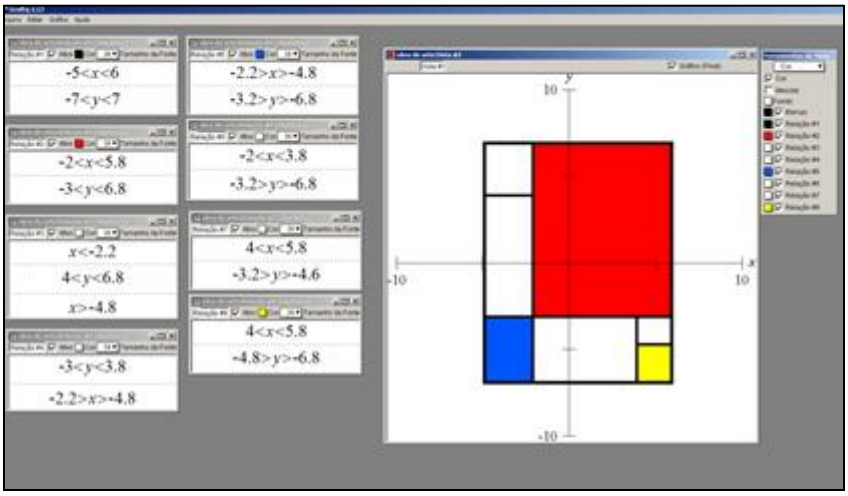


Figura 3.9: Atividade desenvolvida pelos alunos da turma A.

Ao trabalhar com a turma B, inicialmente houve uma certa resistência, porém no decorrer da atividade existiu um envolvimento por parte dos alunos, que se animaram gradativamente conforme iam concretizando aquela obra de arte no *GrafEq*. Em torno de 50% dos alunos concluíram a atividade em aula. Os demais, concluíram a atividade e enviaram posteriormente. A figura 3.10 apresenta o esboço que um aluno construiu antes da construção no *GrafEq* e as relações que utilizou, e a figura 3.11 apresenta a obra de arte reproduzida.

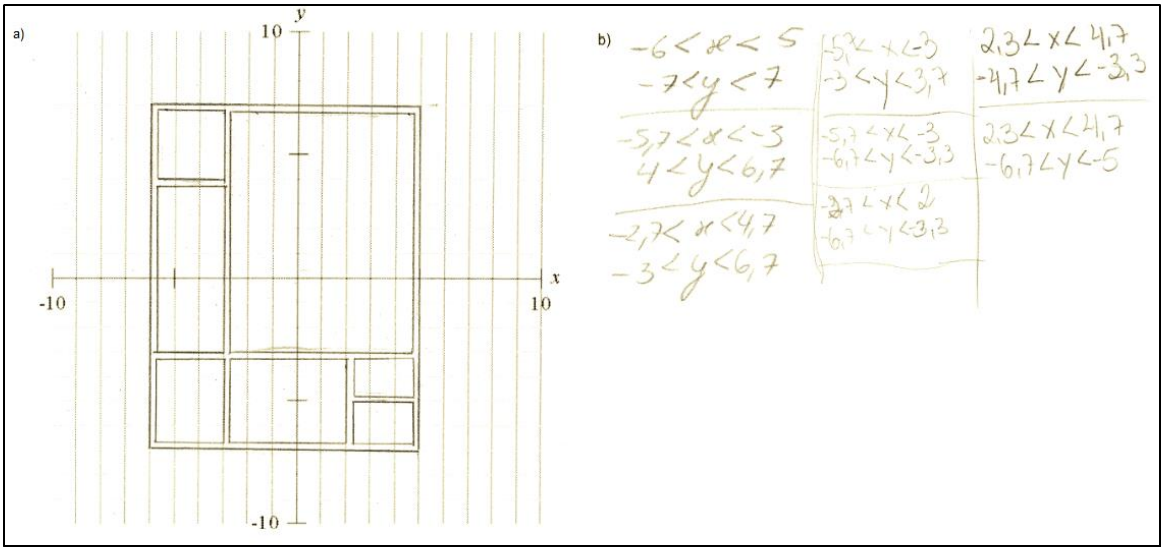


Figura 3.10: Esboço da obra de arte desenhado por um aluno da turma B.

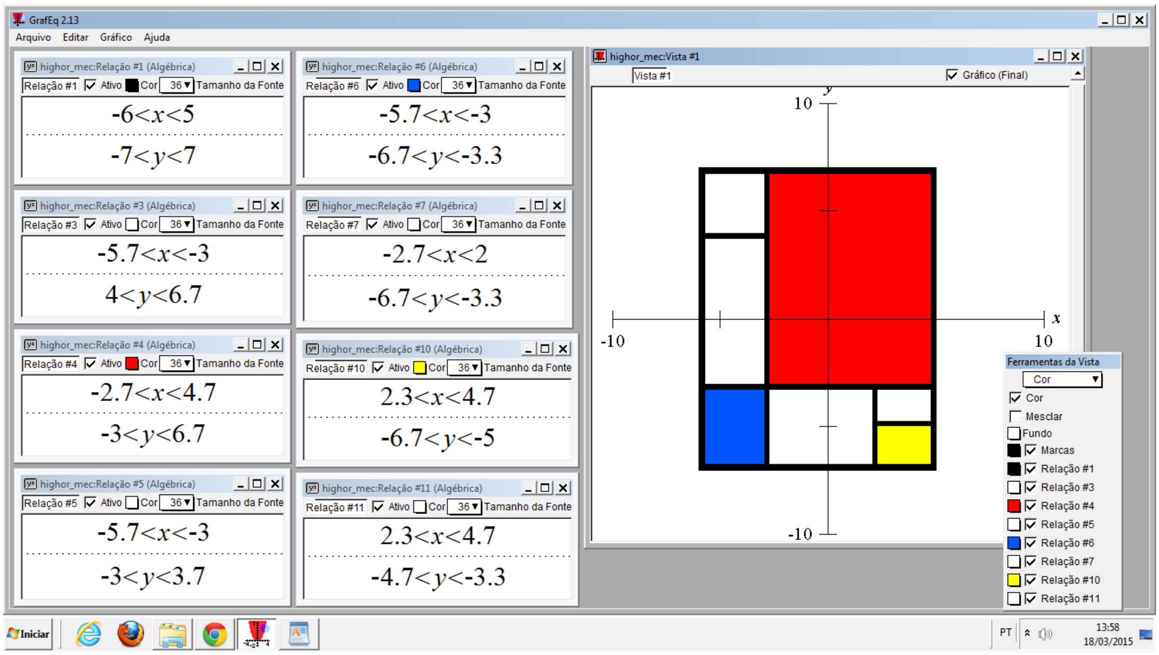


Figura 3.11: Obra de arte reproduzida por um aluno da turma B.

3.4 Estudo de retas no plano

O conjunto de atividades seguintes visa o estudo de retas no plano e principalmente compreender a equação reduzida e a equação geral da reta.

Atividade 4:

Além de Piet Cornelis Mondrian, outro artista que contribui na nossa proposta, por apresentar em suas obras elementos geométricos é Rubem Valentim. Um baiano que foi pintor, escultor, gravador e professor, além de ser considerado um dos grandes pintores construtivistas brasileiros. A obra na figura 3.12 é desse artista. A proposta dessa atividade é representar essa obra, utilizando o aplicativo *GrafEq*.

Figura 3.12: Obra de Rubem Valentim

Fonte: VALENTIM (2008a)

a) Como realizado anteriormente, em um primeiro momento, reproduza a obra no plano cartesiano (figura 3.1).

b) Quais relações da obra você consegue identificar? E os demais itens, como podemos representar?

Objetivo: Provocar os alunos para avançar no estudo e identificação de retas no plano. As atividades anteriores trabalharam a ideia das desigualdades, retas verticais e horizontais. Aqui, teremos que nos aprofundar no estudo de retas diversas para sanar os desafios propostos.

Tempo esperado: A proposta pode ser desenvolvida em duas etapas: a primeira, que levará em torno de 50 minutos, onde os alunos irão conhecer a obra de arte escolhida, e serão estimulados a reproduzí-la primeiramente no plano cartesiano, e após no *GrafEq*. Com essa atividade, aguçamos a curiosidade e criatividade dos alunos.

Sugestão de aplicação: Pensamos que a maneira natural é que os alunos utilizem a ideia de tentar encontrar intuitivamente as retas, visto que a atividade 1 abordou isso. Pode-se conduzir essa atividade trabalhando em conjunto, reproduzindo a obra no quadro, aproveitando as ideias lançadas pelos alunos. Caso eles não busquem as informações da atividade 1, podemos questioná-los, sobre a forma que terá a equação de uma reta. Partindo das dificuldades que acreditamos que os alunos irão enfrentar, pode-se "suspender" temporariamente a atividade 4 e trabalhar com as atividades seguintes. A ideia ao fazer isso é motivarmos os alunos, mostrando-lhes algumas aplicações interessantes de equações.

Relato da aplicação: Em um primeiro momento, na turma A, a atividade 4 foi conduzida na sala de aula, e não no laboratório de informática como pensado inicialmente. Dessa forma, aproveitamos para conversar sobre a obra de arte de Rubem Valentim de uma forma mais geral, e não foi possível permitirmos aos alunos um início da reprodução com suas ideias. Devido a isso, os alunos concluíram a atividade em tempo inferior ao previsto, e dessa forma aproveitamos para concluir atividades pendentes de aulas anteriores.

Na turma B, distribuímos a atividade 4 e juntamente com os alunos, desenhamos a obra sobre o plano cartesiano, fazendo uso do projetor multimídia. Discutimos sobre as possíveis relações que podemos usar nessa obra de arte, e logo eles perceberam que precisaríamos de equações de retas, com exceção do fundo, que era um retângulo. Permitimos que durante alguns minutos eles pensassem se conseguiriam fazer, relembrando que nas primeiras atividades já havíamos desenhado retas. Encerramos esse momento conversando e decidimos que partiríamos dessa obra para fazer o estudo de retas no encontro seguinte.

Ao realizar a atividade na turma A, conseguimos explorar os elementos, visto que os alunos mostraram interesse em saber como poderiam desenhar aquela reta, e perguntaram se testando valores eles chegariam nas equações esperadas. Desafiamos os alunos a testarem, até a próxima aula, observando que iríamos aprender uma forma de encontrar a equação adequada com elementos disponíveis, como alguns pontos que passam pela reta, por exemplo. A figura 3.13 apresenta o esboço da obra de arte segundo um dos alunos.

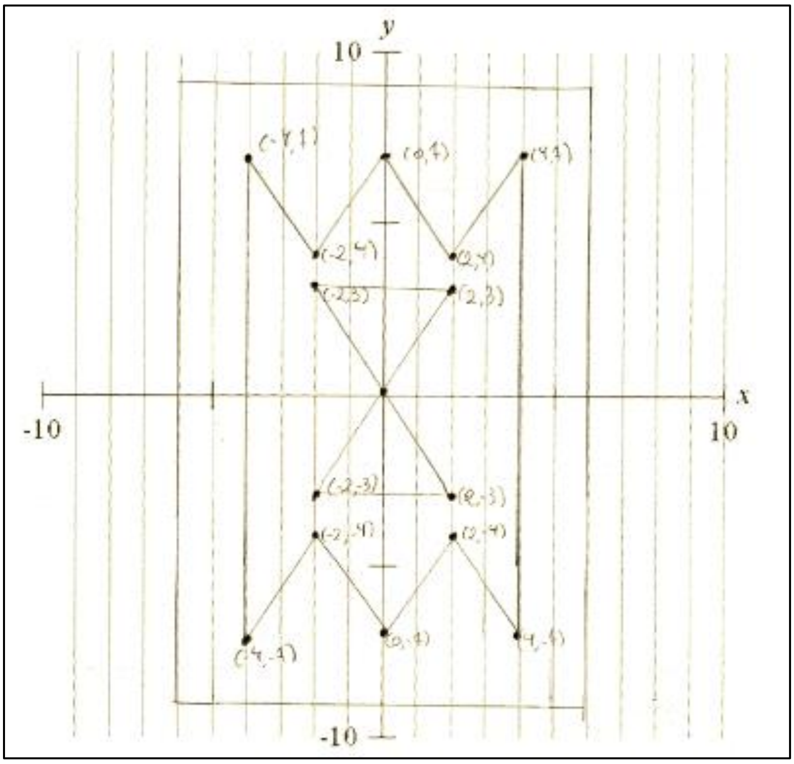


Figura 3.13: Esboço da obra de Rubem Valentim construída por um aluno da turma A.

A segunda etapa dessa atividade foi posterior ao desenvolvimento das atividades 5 e 6, quando esperamos que eles já tenham compreendido a equação da reta, e estejam prontos para reproduzir a obra de arte no *GrafEq*. Assim, após esse primeiro momento, foram trabalhadas as atividades 5 e 6, sobre equação geral e equação reduzida da reta. Dessa forma, o relato da aplicação, aparece após as considerações sobre a atividade 6.

Atividade 5

Utilizando o aplicativo *GrafEq*, plote as seguintes retas:

a) $\mathrm{x} - 2\mathrm{y} - 3 = 0$

b) $3\mathrm{x} - \mathrm{y} + 4 = 0$

c) Responda: Por que e quando é fácil usar a equação geral da reta?

Objetivo: Fazer com que os alunos entendam e saibam determinar a equação geral da reta.

Tempo esperado: Essa atividade deve levar em torno de 50 minutos, visto que deveremos retomar a condição de alinhamento de três pontos e mostrar como encontrar a equação geral da reta que passa por dois pontos dados, usando o determinante.

Sugestões de aplicação: Para abordar essa atividade, sugerimos que inicialmente seja retomada a importância da equação geral da reta relacionando-a com a reprodução da obra de arte do artista Rubem Valentim. Após, sugere-se retomar a explicação da condição de alinhamento de três pontos, e a partir dela explicar como é possível obter a equação geral da reta. Também é importante ressaltar que as equações plotadas nos itens a) e b) representam retas e já estão escritas na forma da equação geral da reta, bem como destacar que uma reta na forma geral sempre terá a forma $\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{c} = 0$, onde a, b e c são números reais.

Atividade 6

1. Desenhe no *GrafEq* as seguintes equações:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = 3x + 4$

2. Plote no *GrafEq* as seguintes retas, num mesmo sistema de eixos cartesianos:

$y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$, $y = 4x + 1$, $y = 10x + 1$.

3. Responda as seguintes perguntas:

a) O que acontece quando mudamos na equação reduzida o valor de m?

b) Plote no *GrafEq* as retas para valores de $\mathrm{m} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{10}$. O valor de m está aumentando ou diminuindo? O que aconteceu com a reta?

c) Plote no *GrafEq* as retas para valores de $\mathrm{m} = -1, -2, -3 \text{ e } -4$. O que aconteceu para valores de m negativos?

4. Plote no *GrafEq* as seguintes retas, num mesmo sistema de eixos cartesianos:

$y = x - 2$, $y = x - 1$, $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$.

5. Responda: O que você observa ter acontecido ao variarmos o valor de n da equação reduzida nas retas plotadas no exercício anterior?

<u>Objetivo:</u> Fazer com que os alunos entendam e saibam determinar a equação reduzida da reta e compreender o significado dos coeficientes angular e linear da reta.

<u>Tempo previsto:</u> A atividade 6 deve levar em torno de 50 minutos.

<u>Sugestões de aplicação:</u> Para trabalhar com essa atividade, por se tratar de exercícios nos quais o aluno precisa perceber o que se altera nos gráficos conforme a inclinação ou deslocamento, sugerimos que seja dado um tempo, para eles plotarem os gráficos e responderem às perguntas, e após seja feita uma discussão com os alunos para cada item desenvolvido. Também destacamos a necessidade de que seja relacionada a equação reduzida com a equação geral da reta. Assim o aluno poderá, a partir de uma equação encontrada na atividade 5, efetuar as operações necessárias para encontrar a equação reduzida da reta. Ainda, é importante que o professor enfatize que a equação reduzida da reta terá sempre a

forma $y = mx + n$, e levante uma discussão sobre a diferença entre o coeficiente angular e o coeficiente linear, de forma que possam identifica-los corretamente.

Relato da aplicação das atividades 5 e 6: As atividades foram aplicadas em dois períodos de 50 minutos consecutivos, conforme estava previsto, e após, foi realizado o encaminhamento para que os alunos concluíssem a atividade 4.

Na turma A, inicialmente retomamos o que conversamos no período anterior em aula, sobre a obra de arte que possui retas com inclinações. A partir disso, mostramos como determinar a equação geral quando conhecidos dois pontos dessa reta, fazendo o uso da condição de alinhamento de 3 pontos através do cálculo com determinantes. Na figura 3.14 podemos observar os registros dessa explicação por parte de um aluno.

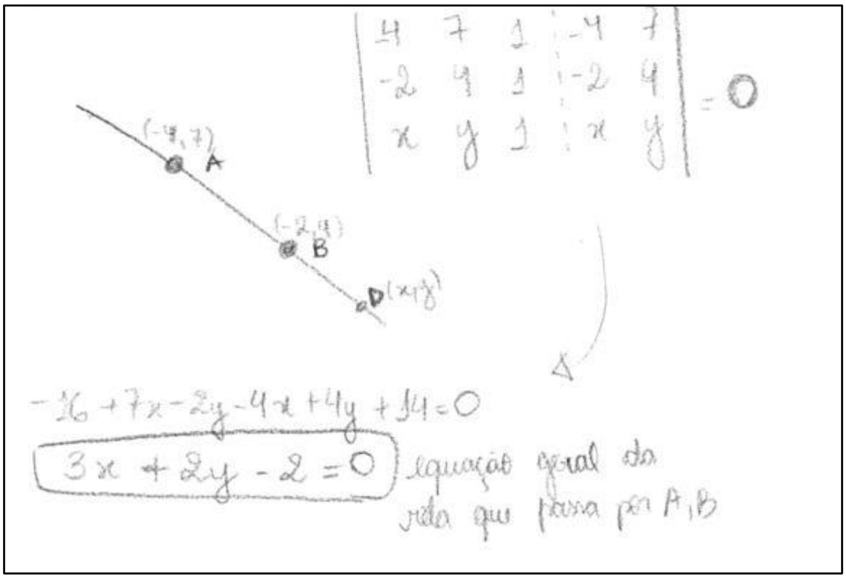
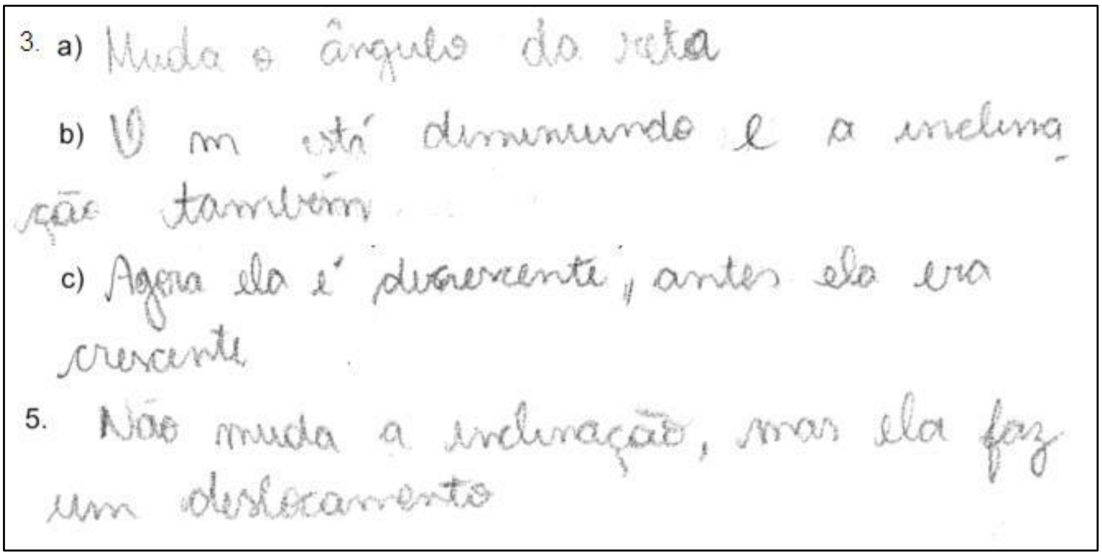


Figura 3.14: Registros de um aluno da turma A sobre equação geral da reta.

Distribuímos então as atividades 5 e 6, para que os alunos trabalhassem um pouco as ideias de equação geral e equação reduzida da reta. Nesse encontro, solicitamos que os alunos enviassem todas as construções do *GrafEq* realizadas até o momento via e-mail. Percebemos que os alunos conseguiram compreender com facilidade como determinar a equação geral da reta, e a partir dela, a equação reduzida. Na figura 3.15 observamos as respostas referentes a atividade 6 realizada por um aluno da turma A.


3. a) Muda o ângulo da reta

b) O m está diminuindo e a inclinação também

c) Agora ela é decrescente, antes ela era crescente

5. Não muda a inclinação, mas ela faz um deslocamento

Figura 3.15: Respostas dadas por um aluno da turma A na atividade 6.

Na turma B, organizamos a partir da imagem da obra que iremos reconstruir no *GrafEq* a ideia de equação geral da reta e equação reduzida da reta. Explicamos, assim como na turma anterior, a forma para eles encontrarem a equação geral.

No desenvolvimento dessas atividades, percebemos que eles muitas vezes não conseguiam explicar os questionamentos que estavam nas atividades, então, tentamos fazer com que eles explicassem e partindo de suas falas completávamos as ideias, que então eles registravam. Todos os alunos concluíram as atividades 5 e 6. E no final do período foi solicitado que eles concluíssem a atividade 4, ou seja, a construção da obra de arte de Rubem Valentim no *GrafEq*.

Na figura 3.16, observamos os gráficos plotados no *GrafEq*, referentes aos itens 2 e 4 da atividade 6.

Concluídas as atividades 5 e 6, a aula seguinte (um período de 50 minutos) foi destinada à realização da construção da obra de arte de Rubem Valentim proposta na atividade 4. Nesse momento, os alunos trabalharam no laboratório de informática, individualmente. Em ambas turmas, algumas vezes surgiram dúvidas sobre o sinal da desigualdade, e também sobre a construção dos triângulos centrais. Muitos dos alunos concluíram as atividades nesse período, porém alguns concluíram em momentos posteriores, e enviaram a atividade via e-mail conforme combinado.

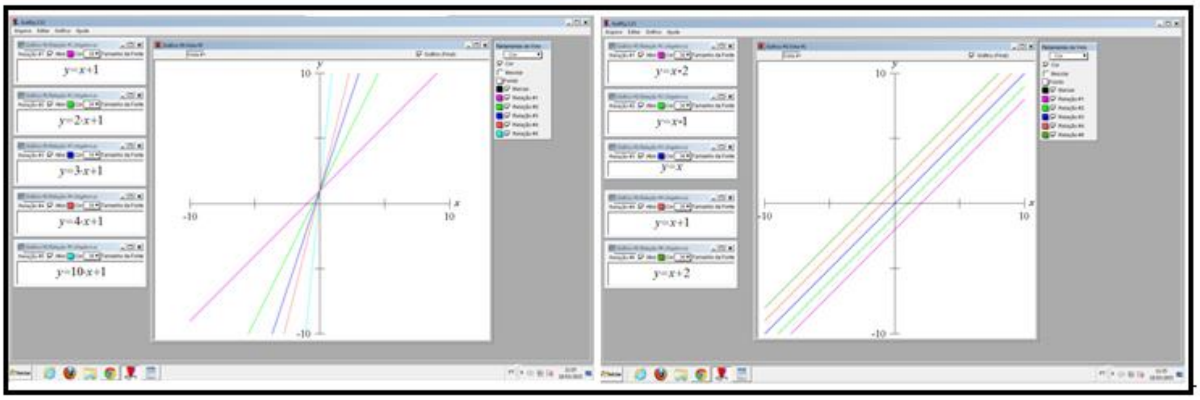


Figura 3.16: Gráficos plotados pelos alunos da turma B para a atividade 6.

Destacamos, na figura 3.17 a atividade de um aluno da turma A, que utilizou as relações testando valores, a partir do cálculo de apenas uma parte. Esse aluno percebeu que havia simetria e relação entre os coeficientes angulares e deduziu boa parte das relações.

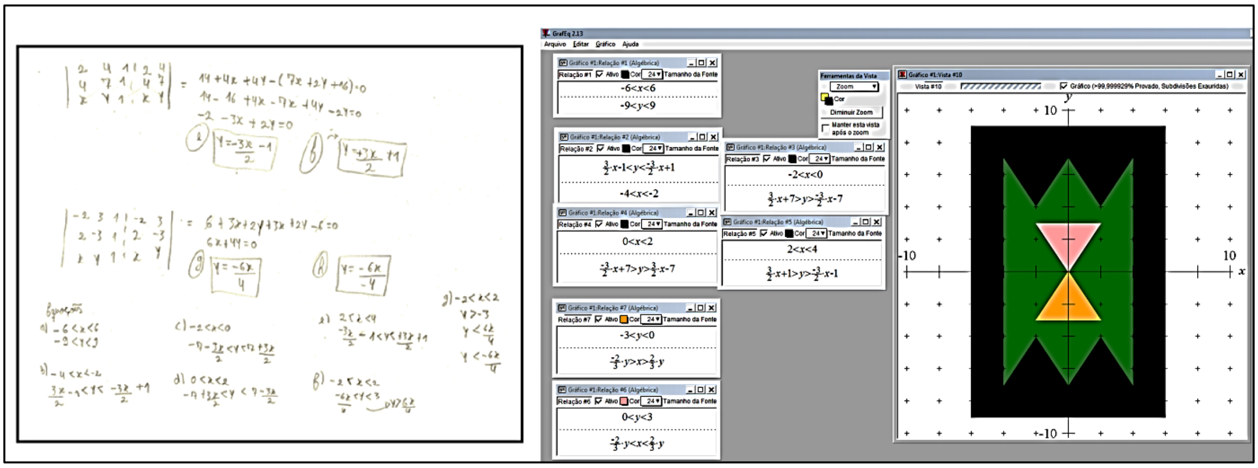


Figura 3.17: Atividade 4 concluída por um aluno da turma A.

Encerramos com essa atividade, a parte inicial do estudo de retas. A próxima seção tratará ainda sobre o estudo de retas, porém a partir de uma outra obra de arte.

3.5 Sobre a equação reduzida da reta, paralelismo e perpendicularismo

As atividades seguintes, que inicialmente não serão realizadas no laboratório de informática, visam que o aluno consiga determinar o coeficiente angular da reta, a equação reduzida da reta quando conhecido o coeficiente angular e um ponto da referida reta. Além de trabalhar com as condições de paralelismo e perpendicularismo.

Assim como nas atividades 5 e 6, as atividades 7 e 8 foram propostas em um mesmo momento e por isso, iremos apresentar primeiramente as atividades com seus objetivos e uma sugestão de abordagem, e após o relato da aplicação contemplando as duas atividades.

Atividade 7

Na obra de arte da figura 3.18, de Luiz Roberto Lopreto, podemos identificar diferentes retas. Entre elas, algumas que são paralelas, ou seja, que possuem a mesma inclinação.

a) Faça um esboço da obra de arte acima no plano cartesiano da figura 3.1.

b) Identifique usando duas cores diferentes, na representação da obra de arte acima, pelo menos dois pares de retas paralelas.

c) Determine a equação reduzida das retas que você identificou na atividade anterior.

d) Quando você analisa os pares de retas acima, e suas equações reduzidas, o que você pode perceber?

e) Identifique, usando a fórmula $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, o coeficiente angular de todas as retas da obra de arte anterior.

Figura 3.18: Obra de arte de Luiz Roberto Lopreto

Fonte: MIZRAHI, 2001

Objetivos: Permitir que o aluno perceba as diferentes maneiras de determinar o coeficiente angular, usando a equação reduzida e as relações entre retas paralelas, a partir da obra do pintor Luiz Roberto Lopreto.

Tempo previsto: A atividade 7 deve levar em torno de um período de 50 minutos, e não faz uso do *GrafEq*. Por isso, pode ser realizada na sala se aula sem uso de laboratório de informática.

Sugestão de aplicação: Para a proposta de abordagem dessa atividade, inicialmente o professor pode construir em grupo o esboço da obra de arte no plano cartesiano, e a partir disso explicar as duas formas de encontrar o valor do coeficiente angular. Levando em conta as conclusões dos alunos frente aos itens de a) a d), o professor poderá introduzir a definição de retas paralelas na perspectiva da Geometria Analítica (duas retas são paralelas quando possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja, $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_2$, sendo m_1 o coeficiente angular de uma das retas e m_2 o da outra). Da mesma forma, pode abordar que uma das maneiras de encontrar o coeficiente angular é utilizando a fórmula $\mathrm{m} = \tan \alpha$, onde α é o ângulo formado entre a reta em questão e o eixo x e que outra forma possível é encontrar o coeficiente angular a partir de dois pontos dessa reta. Suponhamos conhecidos os pontos A $(\mathrm{x_A}, \mathrm{y_A})$ e B $(\mathrm{x_B}, \mathrm{y_B})$ da reta. Então, para encontrar o coeficiente angular, podemos usar a fórmula $\mathrm{m} = \frac{\mathrm{y_B} - \mathrm{y_A}}{\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A}}$. Ao abordar essa explicação, o professor pode fazer a demonstração de que esta última forma é na verdade exatamente o valor da tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x, quando aplicada a dois pontos da reta.

Atividade 8

Uma condição muito especial de retas ocorre quando elas são perpendiculares, ou seja, quando formam entre si um ângulo de 90º.

a) Você reconhece na obra de arte da atividade anterior, retas perpendiculares? Identifique na obra de arte (figura 3.18) os pares de retas perpendiculares que você encontrou.

b) Verifique se a condição apresentada pela professora se satisfaz nos pares de retas perpendiculares que você encontrou no item anterior.

Objetivos: Explicar a condição de perpendicularidade e reconhecer duas retas perpendiculares.

Tempo previsto: A atividade 8 pode ser realizada num período de 50 minutos, e assim como a atividade anterior, não precisa do laboratório de informática.

Sugestão de aplicação: Essa atividade o professor poderá resolver junto aos alunos. Inicialmente, pode deixar eles sugerirem os pares de retas que consideram perpendiculares, e somente depois explicar e demonstrar a condição de perpendicularidade, segundo a qual, tem-se que se duas retas r e s são perpendiculares entre si, então $\mathrm{m_r} . \mathrm{m_s} = -1$ (onde m_r e m_s são respectivamente os coeficientes angulares das retas r e s). Certamente, alguns alunos podem sugerir pares de retas que na obra acima parecem, mas não são perpendiculares. Como os alunos terão calculado todos os coeficientes angulares pela atividade 7, ficará fácil para o professor convencê-los quais pares são de fato perpendiculares.

Relato da aplicação das atividades 7 e 8: Sobre a aplicação dessas atividades, destacamos inicialmente que elas foram realizadas dentro do tempo previsto em todas as turmas, e foram realizadas em sala de aula com auxílio do projetor multimídia.

No desenvolvimento das atividades, iniciamos desenhando a obra de arte sobre um plano cartesiano projetado no quadro. Como realizamos muitos cálculos a partir da obra (de equações gerais das retas e dos coeficientes angulares), sugerimos que eles utilizassem os mesmo pontos para fazer seus esboços, pois dessa forma poderiam conferir seus cálculos com os colegas. Inicialmente, solicitamos aos alunos que fizessem o esboço da obra de arte da atividade 7 no plano cartesiano, e após, as demais atividades até o item d), para então explicarmos as formas de como encontrar o coeficiente angular, de quando as retas serão de fato paralelas e a condição de perpendicularismo, para posteriormente eles resolveram o item e) e a atividade 8.

Na turma A, os alunos conseguiram compreender facilmente o desenvolvimento das atividades 7 e 8. Destacamos que ao realizar o item e) da atividade 7, muitos alunos não queriam fazer todos os cálculos, visto que retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular. Foi então sugerido que eles fizessem as contas em alguns casos, para se certificarem que essas retas seriam realmente paralelas. A figura 3.19 apresenta o desenvolvimento de parte da atividade 7, realizada por uma aluno da turma A.

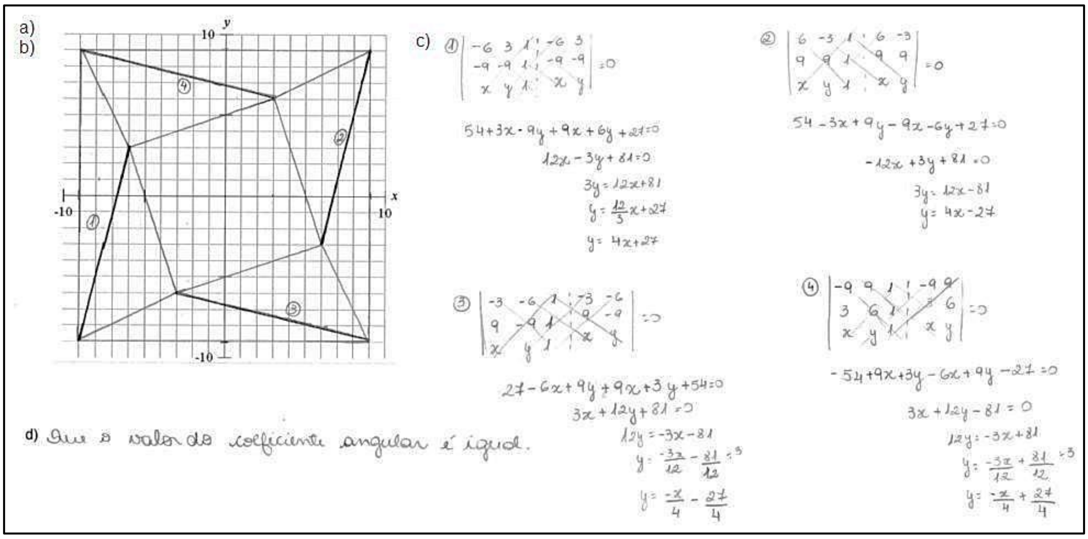


Figura 3.19: Atividade 7 desenvolvida por um aluno da turma A.

Na turma B, houve um pouco de dificuldade para reproduzir a obra no plano cartesiano, sendo esse problema resolvido com atendimentos individualizados, onde apontamos os pontos que não estavam de acordo. Percebemos que alguns alunos apresentaram dificuldades nos cálculos, errando sinais ou apresentando algumas dificuldades na escolha dos pontos para realizar os cálculos. Quando necessário, auxiliamos nas dúvidas. Mas nessa turma, enquanto eles realizavam as atividades e as dúvidas apareciam, muitas vezes já eram esclarecidas por algum colega que estava sentado próximo, ou por algum outro que ouvia a dúvida. A figura 3.20

mostra o desenvolvimento do item e) da atividade 7 desenvolvida por um aluno da turma B.

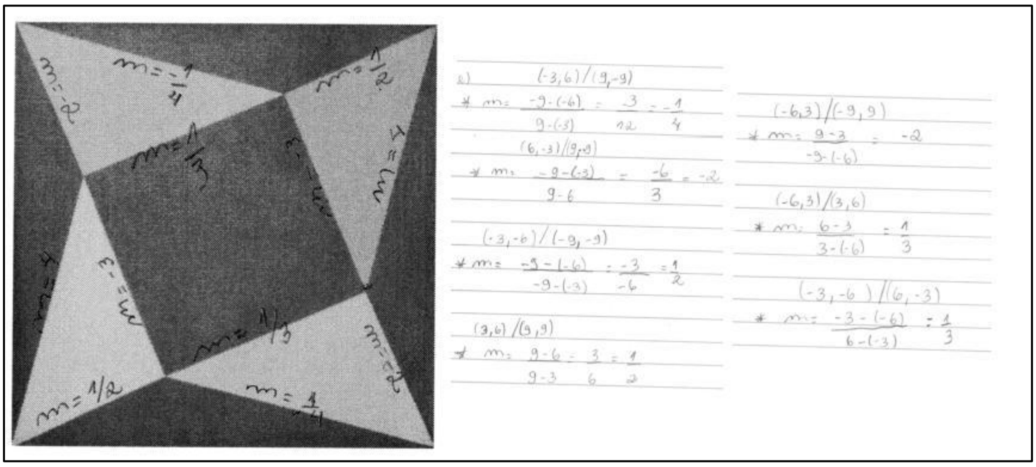


Figura 3.20: Atividade 7, item e), desenvolvido por um aluno da turma B.

Na aplicação da atividade 8, em ambas turmas vimos que muitos alunos indicaram pares de retas que não eram perpendiculares (mas que na obra acima, pareciam ser). Ao realizarem o item b) da atividade, alguns alunos se pronunciaram afirmando que então aquelas retas que eles haviam escolhido não eram perpendiculares. Afirmamos que para se certificar, bastaria verificar a condição de perpendicularidade. A partir disso, eles arrumaram suas atividades para que estivessem com a escolha correta das retas perpendiculares. A figura 3.21 apresenta o desenvolvimento de um aluno da turma B para a atividade 8.

Apresentamos em seguida, a atividade 9, ainda sobre a obra de arte de Luis Roberto Lopreto.

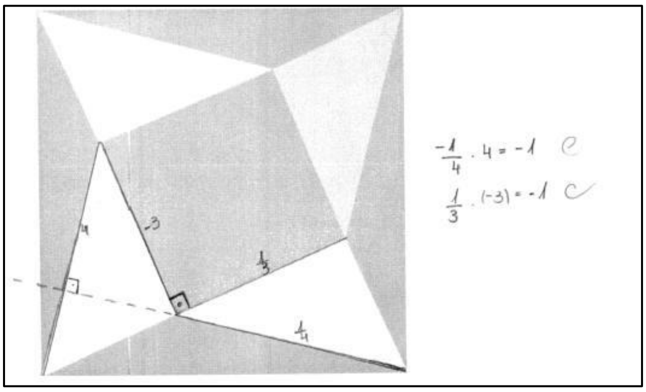


Figura 3.21: Atividade mostrando retas perpendiculares, desenvolvida por um aluno da turma B.

Atividade 9

a) Refaça no plano cartesiano (figura 3.1) o esboço da obra de arte de Luiz Roberto Lopreto, e identifique a equação reduzida de todas as retas da imagem. Os cálculos devem ser registrados junto com essa atividade.

b) Reproduza a obra de arte acima no *GrafEq*.

Objetivos: Mostrar como encontrar a equação reduzida da reta quando conhecido o coeficiente angular e um ponto dessa reta, e após reproduzir no *GrafEq* a obra de arte citada na atividade.

Tempo previsto: A atividade deve levar em torno de dois períodos de 50 minutos, e será desenvolvida no laboratório de informática.

Sugestão de aplicação: Para a abordagem dessa atividade, o professor pode inicialmente explicar a origem e utilização da fórmula $y - y_0 = m.(x - x_0)$, usada para encontrar a equação reduzida da reta quando conhecemos o coeficiente angular e um ponto dessa reta. Após, pode utilizar alguns elementos da obra de arte e mostrar a aplicação dessa fórmula. Concluído o item a), onde os alunos terão encontrado as equações reduzidas de todas as retas da obra de arte, o restante do tempo será destinado a reprodução desta obra no *GrafEq*.

Relato da aplicação: A aplicação dessa atividade foi no laboratório de informática com ambas as turmas, sendo realizada dentro do tempo previsto, pela maior parte dos alunos. Alguns, não concluíram a atividade, e a enviaram posteriormente. Conforme o previsto, explicamos inicialmente a fórmula para encontrar a equação reduzida da reta quando conhecemos o coeficiente angular e um determinado ponto dessa reta, e após os alunos realizaram os cálculos solicitados e iniciaram a reprodução da obra de arte.

Na turma A, ao explicarmos essa nova forma de encontrar a equação reduzida, percebemos um pouco de resistência dos alunos, que questionaram porque não poderiam apenas utilizar a forma anterior, com o desenvolvimento do determinante a partir de dois pontos. Esclarecemos que poderiam fazer dessa maneira, mas que em alguns casos não conhecemos dois pontos da reta, conhecemos apenas um ponto e podemos encontrar o coeficiente angular a partir do ângulo que essa reta forma com o eixo x, por exemplo. Para o desenvolvimento da obra de arte no *GrafEq*, alguns alunos não conseguiram fazer uso das desigualdades para desenhar os triângulos, assim os atendemos individualmente, mostrando no esboço construído a relação de maior ou menor que deveria ser utilizada. A figura 3.22 apresenta o cálculo das equações reduzidas das retas por parte de um aluno da turma A.

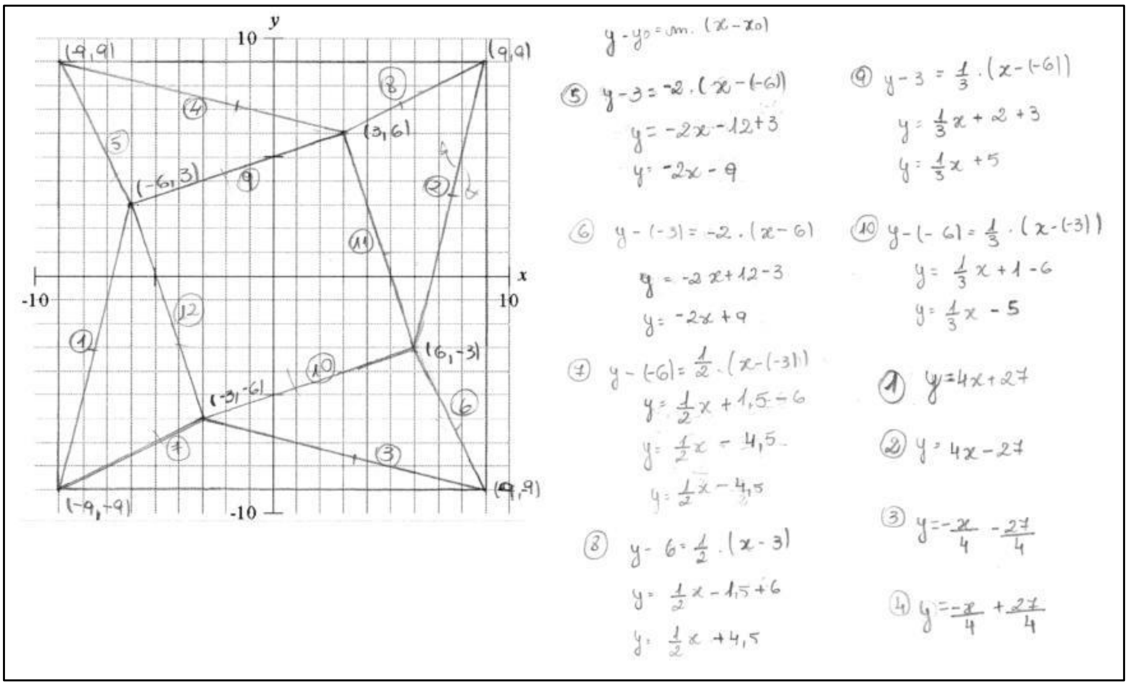


Figura 3.22: Cálculos referente à atividade 9, realizados pelos alunos da turma A.

Na turma B, os alunos não apresentaram dificuldades de encontrar a equação reduzida da reta com o uso da fórmula. Porém, quando foram desenvolver a obra de arte no *GrafEq*, perceberam que haviam utilizado pontos ou coeficiente angulares incorretos, ou que haviam errado alguns cálculos, já que a obra não estava sendo reproduzida como eles esperavam. A figura 3.23 apresenta a obra de arte desenvolvida por um aluno da turma B, usando o software *GrafEq*. Observamos que foi permitido aos alunos que usassem cores de sua preferência.

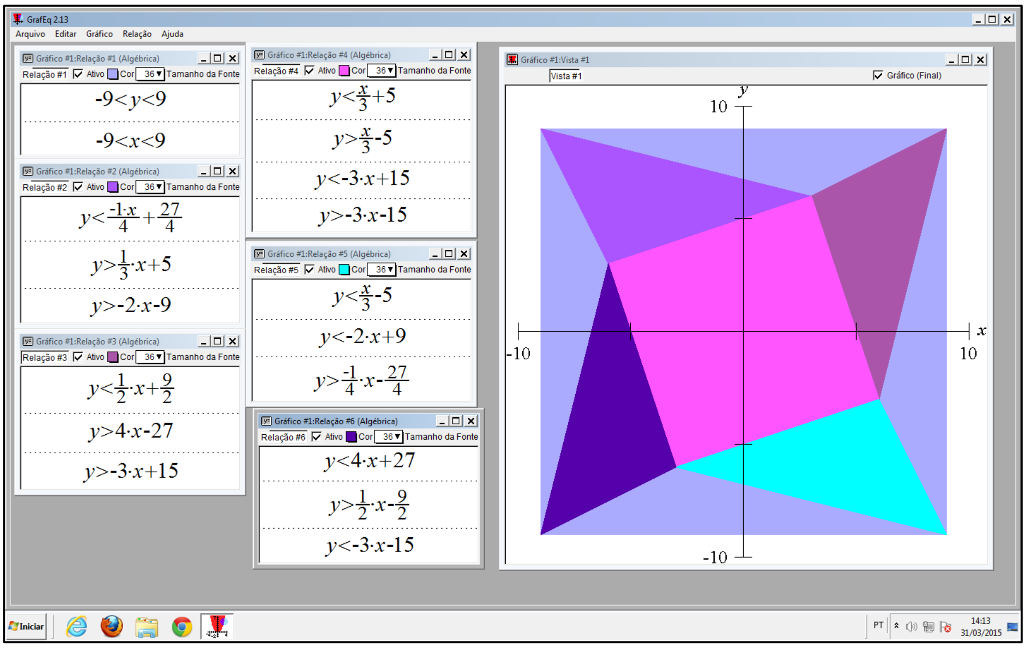


Figura 3.23: Reprodução da obra de Luis Carlos Lopreto no *GrafEq*.

Ao concluir a atividade 9, concluímos as atividades que envolvem o estudo de retas. A seguir, teremos o estudo da circunferência e da elipse.

3.6 Equação da circunferência e da elipse

As atividades a seguir abordam o estudo da equação geral da circunferência, mas não expande o conteúdo no sentido de trabalhar questões de posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre circunferências. Entendemos que estes conteúdos não são relevantes para a proposta final de reproduzir uma obra de arte, portanto, serão abordados em sala, quando finalizadas as atividades aqui propostas. Certamente no momento em que for realizada a abordagem desses conteúdos, serão relacionados às situações trabalhadas na reprodução de obras de arte com o GrafEq. Mostrando dessa forma, como as possibilidades que essa proposta apresenta poderiam ser ampliadas.

Da mesma forma, abordaremos o estudo da equação da elipse de forma que os alunos a percebam e a conheçam, explicando inclusive sua origem e falando um pouco sobre as demais cônicas (parábola e hipérbole), mas sem aprofundamentos. Observamos que optamos por fazer dessa maneira, visto que esse conteúdo não faz parte da grade curricular das turmas.

Atividade 10

1. Fazendo uso do software *GrafEq*, plote a equação da circunferência em cada item, após desenhe-a no plano cartesiano correspondente e preencha os demais dados da tabela, conforme apresenta a figura 3.24. Observamos que esse item apresenta 6 subitens, mas para simplificar aqui apresentaremos apenas um, os demais encontram-se no anexo C.

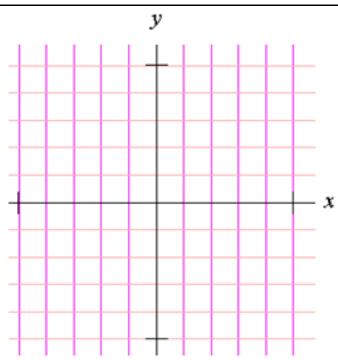
	Equação reduzida	Plano cartesiano
a)	$(x-2)^2+(y+1)^2=9$ Raio: ________ Centro: ________	

Figura 3.24: Espaço para resolução da atividade 10.

2. Escreva com as suas palavras o que você pode perceber em relação ao centro e ao raio da circunferência na equação reduzida da circunferência.

3. Faça seus registros sobre a explicação da professora referente a equação reduzida da circunferência.

4. Faça seus registros sobre a explicação da professora referente a equação geral da circunferência.

5. Encontre, para cada item da atividade 1 a equação geral da circunferência.

6. Identifique a equação reduzida e a equação geral correspondente das circunferências abaixo (apresente o cálculo). Observamos que a atividade é composta de 3 itens como podemos encontrar no Anexo C, na figura 3.25 apresentamos um deles.

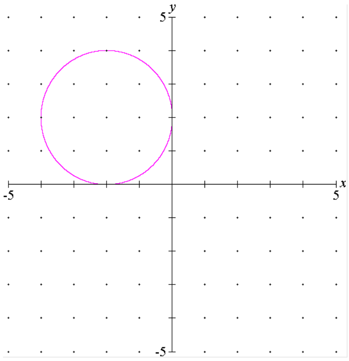
	Circunferência	Equação reduzida e Equação geral
a)		

Figura 3.25: Espaço para resolução da atividade 10.

7. Algumas vezes somente ao olhar a equação geral da circunferência, não conseguimos identificar de qual circunferência estamos tratando. Para isso, precisamos transformar a equação geral da circunferência em equação reduzida. Acompanhe o exemplo com a professora, após realize o mesmo com os itens abaixo.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$

<u>Objetivos:</u> Compreender a equação reduzida e a equação geral da circunferência, saber transformá-la de uma em outra quando necessário e identificar o centro e o raio da circunferência da equação em questão.

<u>Tempo previsto:</u> A atividade 10 deve levar em torno de 2 períodos de 50 minutos, e será desenvolvida no laboratório de informática.

<u>Sugestão de aplicação:</u> Para a abordagem dessa atividade, o professor pode propor aos alunos trabalhar individualmente as questões 1 e 2 do roteiro da página anterior. A partir das conclusões dos alunos na questão 2, pode explicar a equação reduzida da circunferência, partindo da fórmula da distância entre dois pontos. Após, poderá mostrar como encontrar a equação geral a partir do desenvolvimento da equação reduzida, e como encontrar a equação reduzida a partir da equação geral.

<u>Relato da aplicação:</u> Na aplicação dessa atividade com as turmas A e B, destacamos inicialmente que elas foram desenvolvidas dentro do tempo previsto e aplicadas segundo a sugestão dada anteriormente.

Na turma A, as atividades foram distribuídas e os alunos trabalharam individualmente na questão 1. Para responder o segundo item, nem todos perceberam de imediato o que acontecia em relação à equação reduzida, ao centro e ao raio da equação. Para incentivá-los a responderem com suas próprias palavras, apontamos que eles deveriam observar o raio e o centro, e verificar qual a relação desses dados com a equação. Após, discutimos a percepção dos alunos sobre a equação reduzida, explicando sua origem, além de explicarmos a equação geral, e como encontramos a equação reduzida completando quadrados a partir da equação geral. Após, os alunos concluíram a atividade 10.

Na turma B, a aplicação foi de forma semelhante. Destacamos novamente, que nessa turma as interferências foram menores por conta da interatividade entre os alunos em esclarecerem suas dúvidas. Apareceram algumas dificuldades por conta de transformar a equação geral em equação reduzida, solicitada no item 7. Por conta dessa dificuldade, houve uma nova explicação com abordagem de mais um exemplo além daquele inicialmente planejado.

Abaixo, observamos a figura 3.26 que apresenta o desenvolvimento de parte do item 1 e 5 da atividade 10 por um aluno da turma A.

A figura 3.27 apresenta duas respostas para a questão 2 da atividade 10, com duas explicações diferenciadas. Chamamos atenção que, pelas respostas, os alunos compreenderam a relação entre o gráfico da circunferência e a equação reduzida.

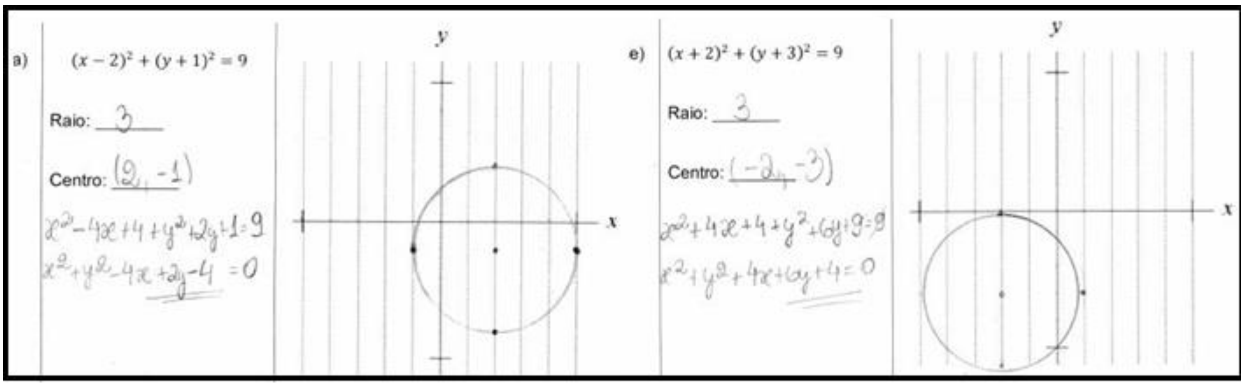
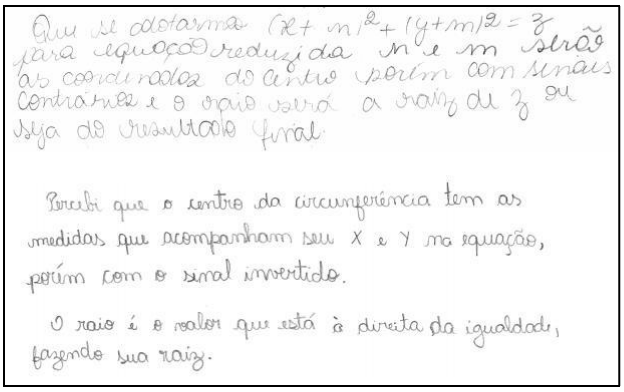


Figura 3.26: Atividade 10 desenvolvida por um aluno.



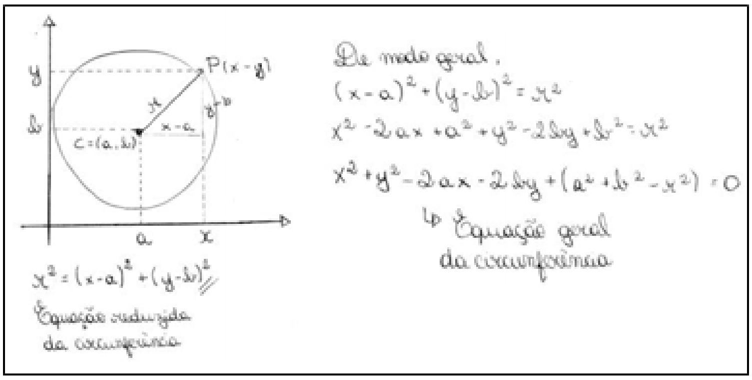
Que se adotarmos $(x+n)^2+(y+m)^2=z$ para equação reduzida n e m serão as coordenadas do centro porém com sinais contrários e o raio será a raiz de z ou seja do resultado final.

Percebi que o centro da circunferência tem as medidas que acompanham seu X e Y na equação, porém com o sinal invertido.

O raio é o valor que está à direita da igualdade, fazendo sua raiz.

Figura 3.27: Respostas dos alunos para a questão 2 da atividade 10.

Na figura 3.28 (esquerda) podemos observar os registros de um aluno da turma A sobre as explicações referente a equação reduzida e equação geral da circunferência. Uma das maiores dificuldades dos alunos, como já mencionamos anteriormente, foi de encontrar a equação reduzida da circunferência, quando apresentada a equação geral da circunferência. Na figura 3.29(esquerda) observamos o registro de um aluno da turma B referente a essa transformação na resolução do exemplo explicado referente à questão 7, utilizando o método de completar quadrados.



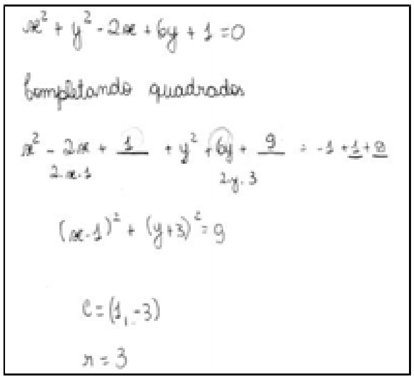


Figura 3.28: Registros de um aluno da turma A. Figura 3.29: Resgistro da transformação de equação geral em equação reduzida da circunferência.

Na atividade a seguir, mostraremos um pouco da equação da elipse e de seu gráfico.

Atividade 11

1. Plote no *GrafEq* as seguintes equações, e relacione as colunas identificando o gráfico correto da figura 3.30 com cada equação.

(A) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (B) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$ (C) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$ (D) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1$ (E) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$

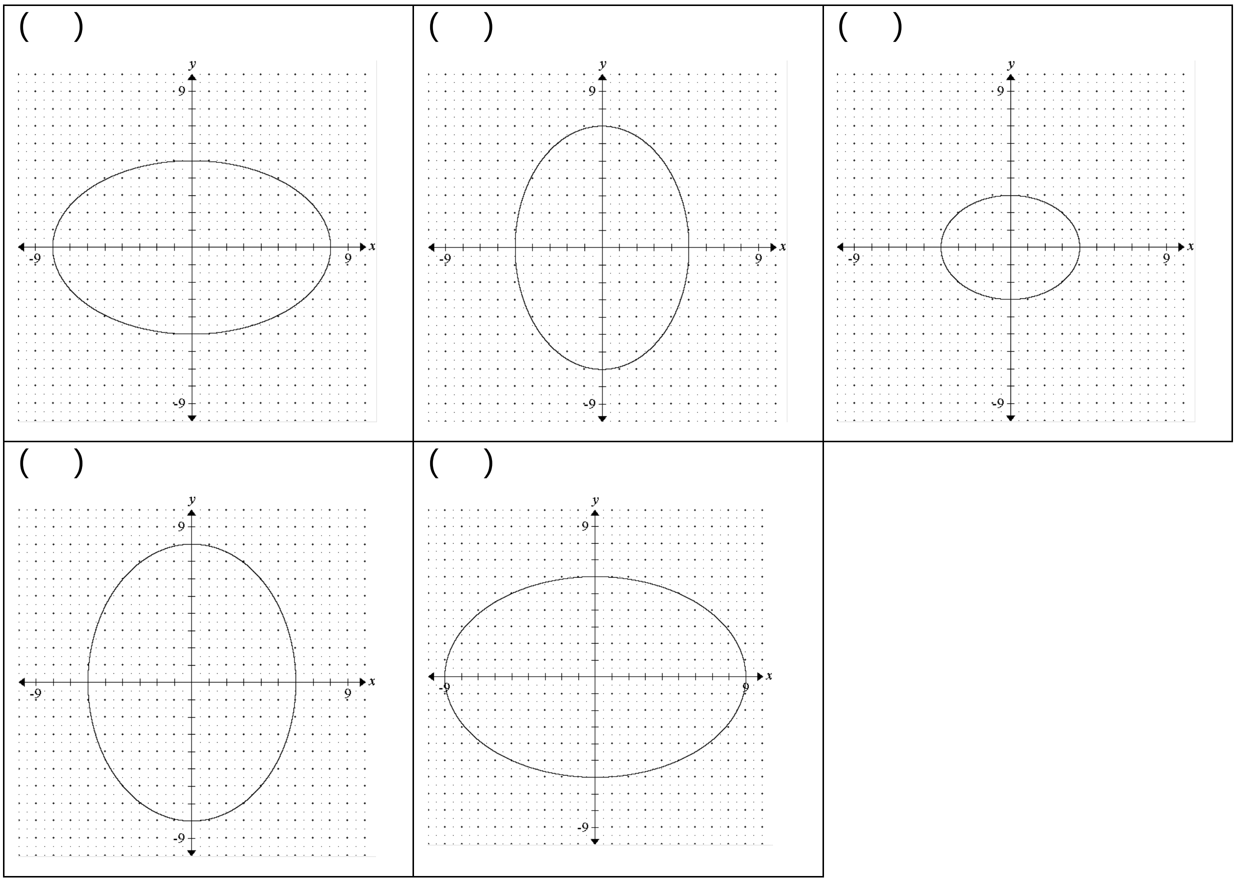


Figura 3.30: Espaço para resolução da atividade 11.

2. Relate com as suas palavras o que você observou a respeito dos valores que se encontram nos denominadores das equações em relação ao gráfico obtido.

3. Plote no *GrafEq* as seguintes equações, e relacione as colunas identificando o gráfico correto da figura 3.31 com cada equação.

(A) $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$ (B) $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ (C) $\frac{(x+1)^2}{49}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$ (D) $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{49}=1$

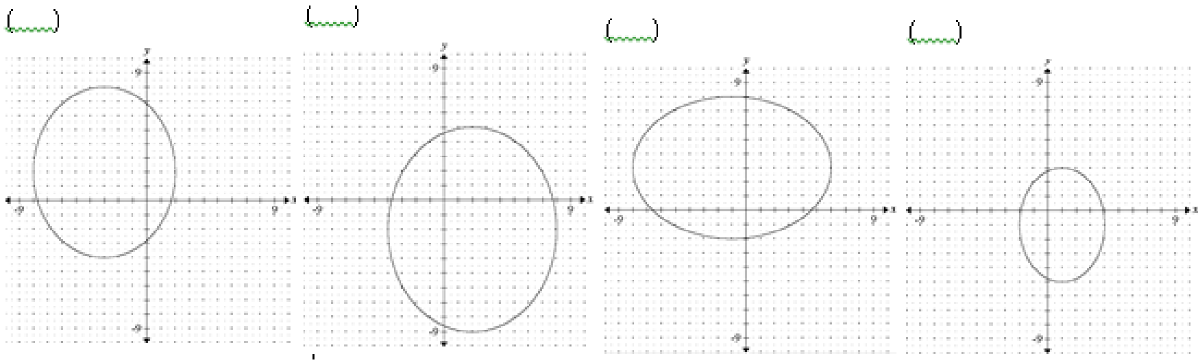


Figura 3.31: Espaço para resolução da atividade 11.

4. O que você pode perceber sobre a equação reduzida da elipse?
5. Escreva a equação das seguintes elipses da figura 3.32:

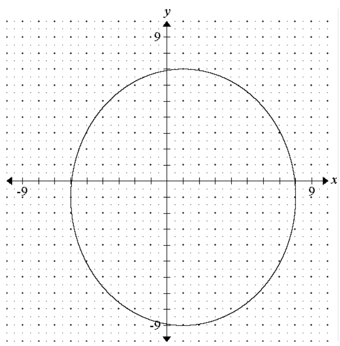
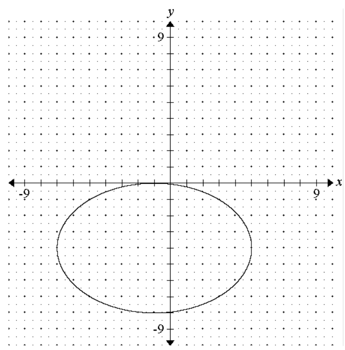
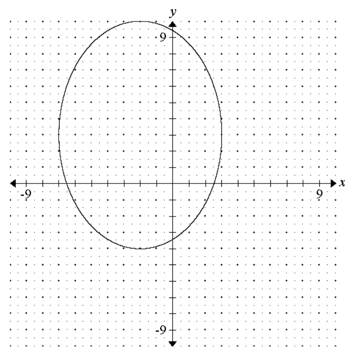
a)	b)	c)
		

Figura 3.32: Espaço para resolução da atividade 11.

<u>Objetivos:</u> Reconhecer e construir a equação reduzida nas elipses. (Destacamos aqui que as cônicas não fazem parte da ementa da disciplina de Matemática, logo, o objetivo de investigar cônicas será reduzido, apontando apenas para as objetividades da atividade final.).

<u>Tempo previsto:</u> A atividade 11 deve levar em torno de 1 período de 50 minutos, e será desenvolvida no laboratório de informática.

<u>Sugestão de aplicação:</u> Inicialmente, o professor pode orientar os alunos a desenvolverem as atividades 1 a 4, e dependendo das respostas, explicar do que se trata exatamente a elipse. Sugerimos que o professor defina a elipse na percepção

de lugar geométrico e também aborde as demais cônicas de forma simples, a partir das seções de um cone, por exemplo.

Relato da aplicação: Ao aplicarmos a atividade 11 nas turmas A e B, as atividades foram realizadas dentro do tempo previsto. Como os alunos já haviam realizado o exercício de percepção da equação do círculo, nessa atividade conseguiram facilmente perceber que os vértices da elipse representavam os denominadores na equação. Para compreenderem do que estavam falando, muitos usaram a expressão “raio do x” e “raio do y”. A figura 3.33 apresenta as respostas a algumas questões da atividade 11 por um aluno da turma B:

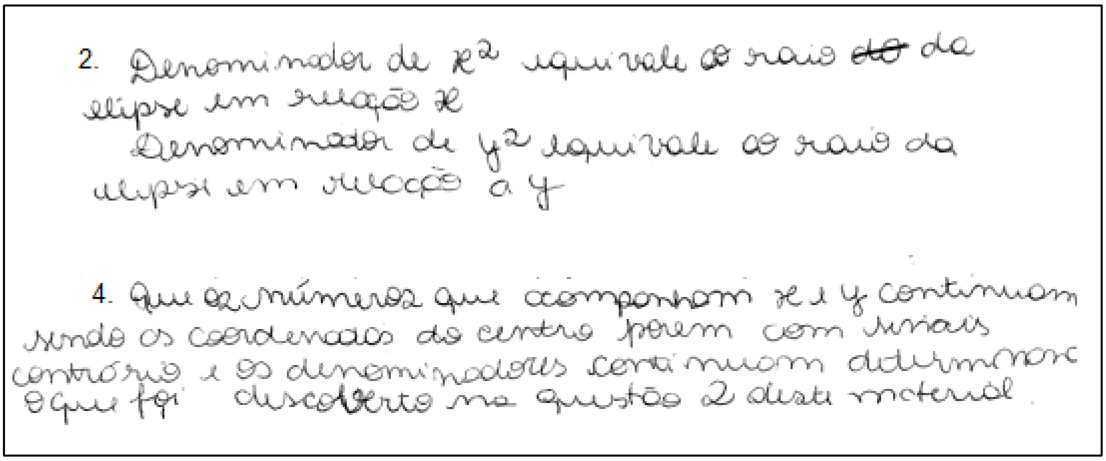


Figura 3.33: Desenvolvimento da atividade 11 por um aluno da turma B.

3.7 Atividade final

Por fim, será proposta uma atividade para encerrar o conjunto de atividades realizadas fazendo uso do *GrafEq* no ensino de itens da Geometria Analítica.

Atividade 12

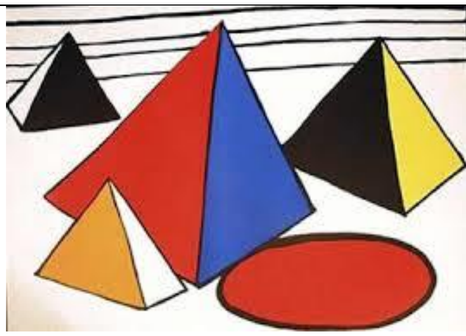
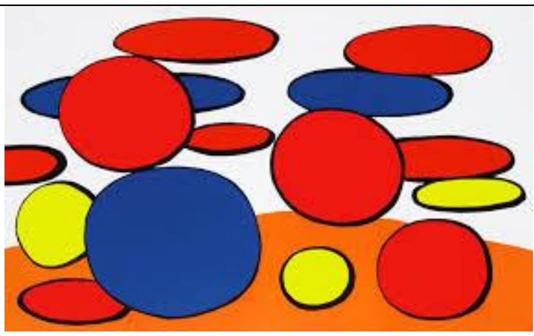
Pesquise, ou escolha uma dentre as obras de arte sugeridas pela professora, e reproduza-a no software *GrafEq*. Não se esqueça de registrar seus cálculos e as relações que foram utilizadas.

<u>Objetivo:</u> Desafiar os alunos a aplicarem os conhecimentos adquiridos nas atividades propostas e reproduzirem uma obra de arte no *GrafEq*.

<u>Tempo previsto:</u> O tempo previsto para essa atividade será um período de 50 minutos, e após mais 2 períodos de 50 minutos.

<u>Sugestão de aplicação:</u> Para desenvolver a atividade, os alunos poderão pesquisar obras de arte com elementos geométricos, ou ainda escolher uma das obras de arte do quadro 1.

Quadro 1 : Obras de arte selecionadas pela professora.

 Alexander Calder CALDER (2013)	 Alexander Calder CHAMPETIER (2013)
 Alexander Calder PABST (2009a)	 Alexander Calder PABST (2009b)

 August Herbin PERMANN (1997)	 Auguste Herbin MACHE (2014)
 August Herbin ROGAL (2014)	 Wassily Kandinsky WRIGHT (2012)
 Rubem Valentim GUTEMBERG (2012)	 Rubem Valentim CRUVINEL (2001)

 Rubem Valentim VALENTIM (2014)	 Auguste Herbin NUDE, 2014
 Auguste Herbin BLANC, 2014.	 Rubem Valentim VALENTIM (2008b)
 Rubem Valentim TIMM (2011)	

Na aplicação da atividade final, percebemos um grande empenho por boa parte dos alunos em realizar o solicitado. Alguns iniciaram a obra desenhando-a no plano cartesiano, outros riscaram um plano sobre a obra, e ainda aqueles que aproximaram os valores medindo apenas com régua.

Os alunos trabalharam os três períodos previstos em aula, onde puderam solicitar ajuda, rever contas, explicações, e posteriormente concluíram a atividade em casa ou nos laboratórios disponíveis. A turma A realizou a atividade em duplas e a turma B individualmente.

Trataremos mais sobre as obra de arte, e apresentaremos o produto final das reproduções no próximo capítulo, pois os principais pontos fazem parte da análise do nosso ponto de vista sobre a aprendizagem dos alunos.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Observações gerais

Apresentamos a análise para as atividades realizadas com os alunos, baseada nas observações realizadas, nas atividades feitas pelos alunos, no material impresso a eles repassado, nas construções realizadas no *GrafEq*, que foram enviadas por e-mail, e principalmente, na reprodução da obra de arte que os alunos produziram na atividade final. No capítulo anterior relatamos o desenvolvimento das atividades em sala de aula. Por isso, tentaremos, dentro do possível, mostrar a atividade final, buscando observar o desenvolvimento do aluno nos itens relativos aos conteúdos trabalhados nas atividades anteriores.

Verificamos inicialmente que os resultados obtidos na atividade final estão dentro do esperado, e dessa forma, os consideramos satisfatórios. Avaliamos se o aluno manteve as proporções da obra original, se reproduziu todos elementos da obra, se foi fiel aos detalhes, se apresentou os cálculos necessários para encontrar as equações que foram utilizadas e se apresentou de maneira organizada a atividade.

Este trabalho, além de compilar uma grande parte dos conteúdos vistos nas atividades anteriores, também contribuiu para analisarmos o envolvimento, a criatividade e a capacidade de aplicar os conhecimentos obtidos.

Para o desenvolvimento da atividade final, alguns procuraram identificar um plano cartesiano sobre a obra de arte que iriam construir. Fizeram isso definindo o eixo x e y e graduando-os, traçando retas paralelas aos eixos como uma malha quadriculada, e assim identificando facilmente os pontos. Um aluno utilizou recursos de softwares fotográficos e conseguiu colocar sobre sua obra uma malha quadriculada diretamente na tela do computador. Também houve alunos que optaram por reproduzir a obra em uma folha de papel milimetrado. Acreditamos que eles tenham feito isso, porque todas as obras de arte que trabalhamos nas atividades anteriores foram desenhadas no plano cartesiano para desenvolver as demais questões.

As obras escolhidas são, em sua maioria de Rubem Valentim, Auguste Herbin e Alexander Calder. Como elas possuem entre si, similaridades, abordaremos os trabalhos dentro destes grupos. Apenas uma das obras não é desses pintores. Ela será abordada no final.

4.2 Obras de Rubem Valentim

Vamos analisar inicialmente as obras de Rubem Valentim. Procuramos, dentre as inúmeras obras desse pintor, escolher 5 que apresentassem os principais elementos abordados nas atividades desenvolvidas com os alunos: triângulos (onde é muito usada a equação da reta), retângulos (que apresentam o mais básico da localização no plano cartesiano) e circunferências (onde basta ter compreendido a sua equação reduzida).

A reprodução da primeira obra foi desenvolvida por uma dupla da turma A, e individualmente por um aluno da turma B. Na figura 4.1 podemos observar a obra e suas reproduções.

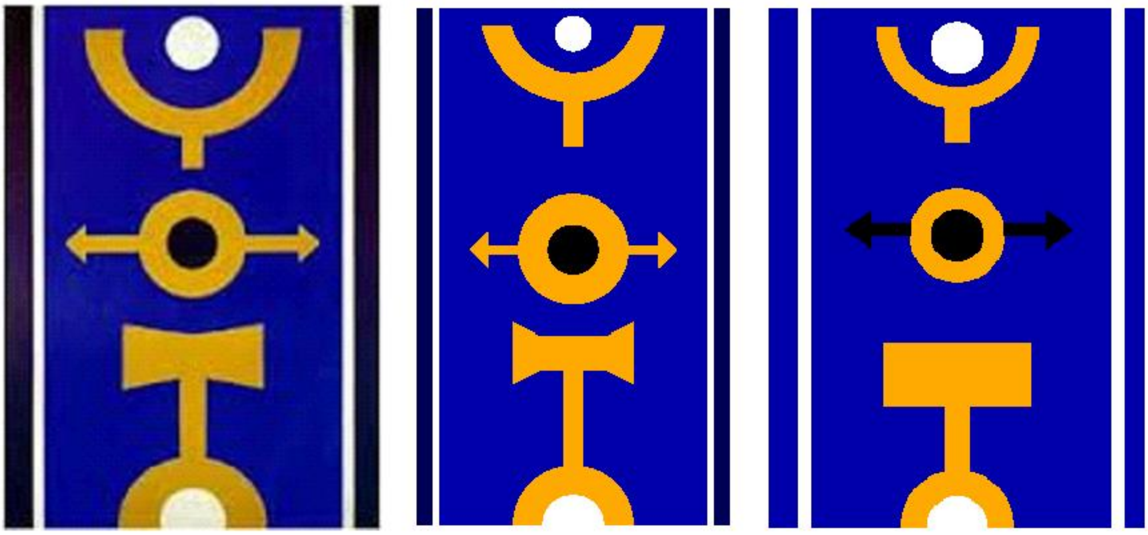


Figura 4.1: Obra de Rubem Valentim (à esquerda), reproduções de alunos da turma A (meio) e da turma B (à direita).

Na reprodução da obra de arte citada, podemos perceber inicialmente que na execução da atividade da dupla de alunos da turma A, não foi respeitada a devida proporção das medidas. De fato, ao analisar os registros escritos, percebe-se que a dupla que colocou um eixo vertical e horizontal sobre a obra, mas não o graduou, apenas mediu as distâncias que necessitava. Nesse processo, certamente alguns elementos se perderam. Achamos interessante a estratégia dessa dupla para construir um dos itens da obra, como acompanhamos com as relações na figura 4.2.

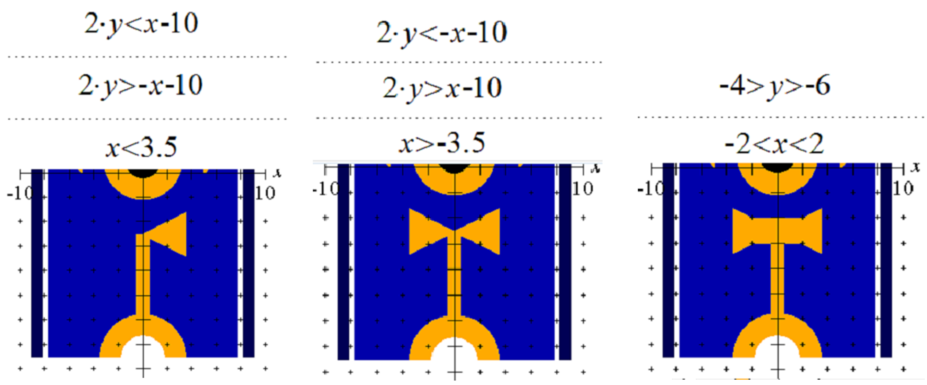


Figura 4.2: Relações para construir uma parte da obra.

A outra reprodução, realizada por um aluno da turma B, apresentou algumas inconsistências em relação ao retângulo laranja (mesmo item que destacamos na figura 4.2), que na obra de arte original não é um retângulo, e nas setas que estavam com outra cor. Percebemos com isso, alguns sinais de que esse aluno pode não ter compreendido como encontrar as equações de retas. Porém, ao analisar os registros escritos por esse aluno, percebemos que o mesmo não realizou os registros sobre o “retângulo laranja”, fez os cálculos de forma correta para desenhar os triângulos das setas, conforme a figura 4.3.

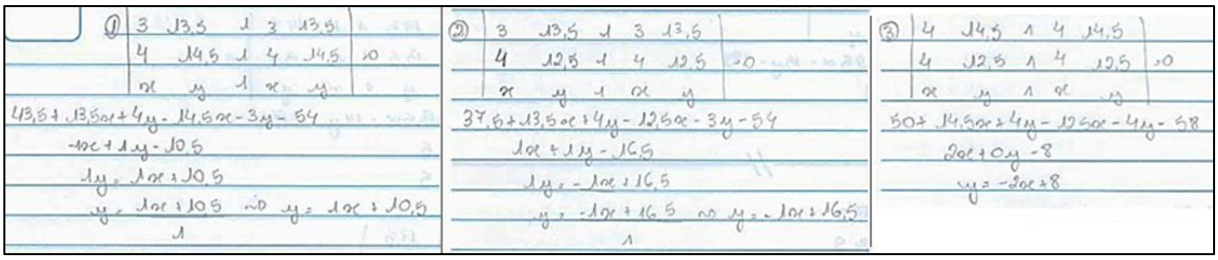


Figura 4.3: Cálculos para construção das setas na figura.

Observamos, que no desenvolvimento do determinante à direita na figura 4.3, todos os cálculos estão corretos, porém na equação final o aluno apresentou um erro. Acreditamos que por conta desse erro, optou por desenhar as setas. O aluno descobriu uma ferramenta que faz o desenho de setas no próprio *GrafEq*. Porém, não é possível alterar a cor dessas setas, ficando então sua reprodução final diferente da obra original. A figura 4.4 mostra onde é encontrada a ferramenta acima citada.

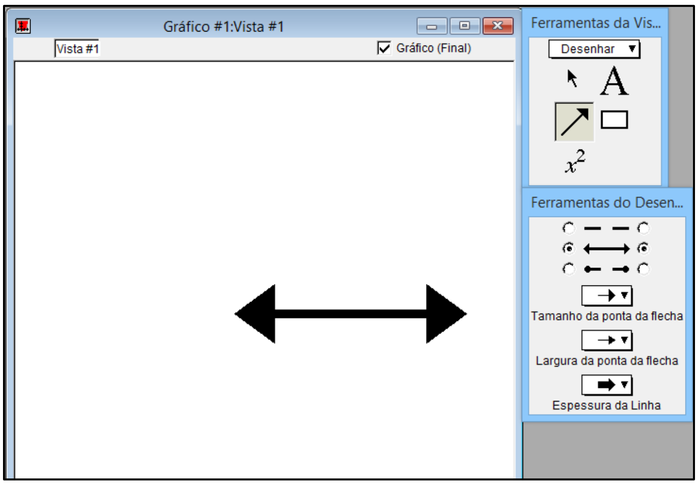


Figura 4.4: Ferramenta utilizada pelo aluno para construção das setas.

Em ambos trabalhos, os alunos apresentaram dúvidas para desenhar as circunferências e principalmente semicircunferências. Então, explicamos que bastava limitar o espaço do eixo y em que gostaria que a circunferência aparecesse. Nas reproduções, percebemos que apesar de alguns elementos estarem em desacordo com as medidas, (por exemplo, raio maior do que na obra de arte original) nos dois trabalhos os alunos conseguiram uma boa reprodução.

Seguiremos, analisando a reprodução da segunda obra de Rubem Valentim. Esta foi uma das obras de resolução mais simples, pois continha apenas retângulos e circunferências. A figura 4.5 apresenta a reprodução desenvolvida por uma dupla da turma A, e a reprodução de um aluno da turma B, ao lado da obra original.

Inicialmente, destacamos que o aluno da turma B, construiu a obra invertida, mas apresenta todos os elementos se aproximando muito da obra original.

Realizando a análise nas duas obras, destacamos dois itens: O primeiro, diz respeito à largura das barras retangulares. Na reprodução da dupla da turma A (figura 4.5), apesar dos alunos terem construído um plano cartesiano para guiar as suas relações (figura 4.6), elas não estão com larguras equivalentes à figura original, porém, se manteve uma proporção na diminuição das barras.

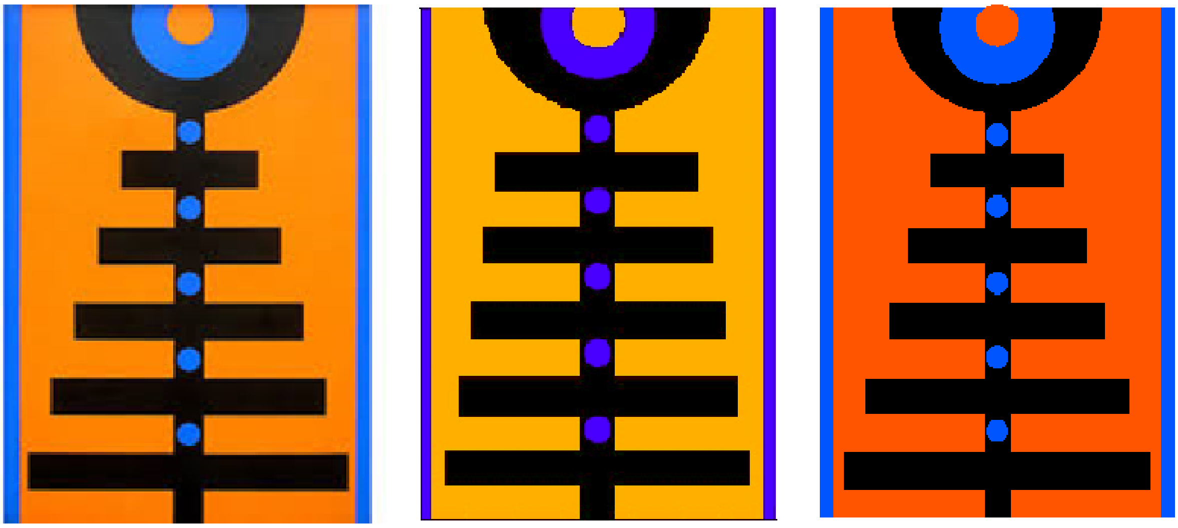


Figura 4.5: Obra de Rubem Valentim (à esquerda), reproduções de alunos da turma A (meio) e da turma B (à direita).

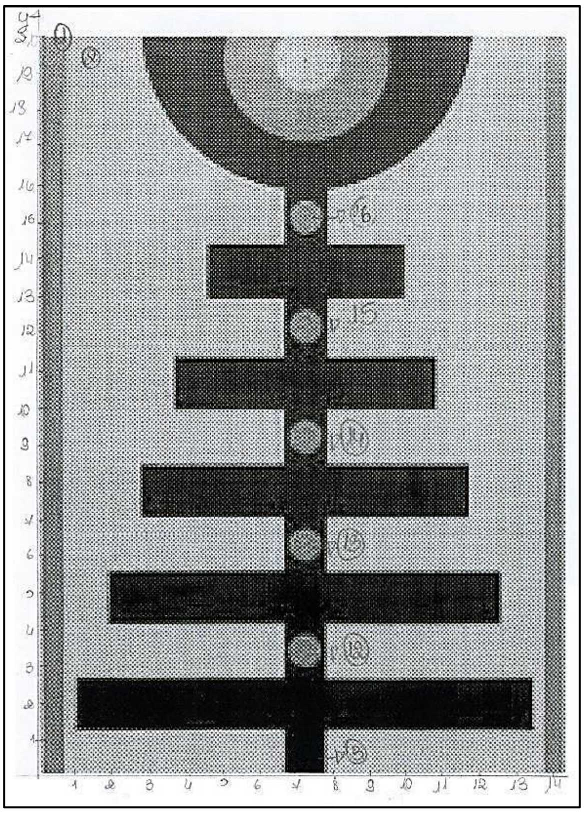


Figura 4.6: Plano cartesiano desenhado para guiar na escolha das relações.

A segunda observação é sobre a circunferência laranja, na parte superior da figura. Na réplica produzida pelo aluno da turma B, percebemos que não foi limitado o valor do y, como deveria ser feito para ficar como na obra original. Observando a figura 4.7, podemos verificar como a dupla da turma A escreveu as relações que utilizou.

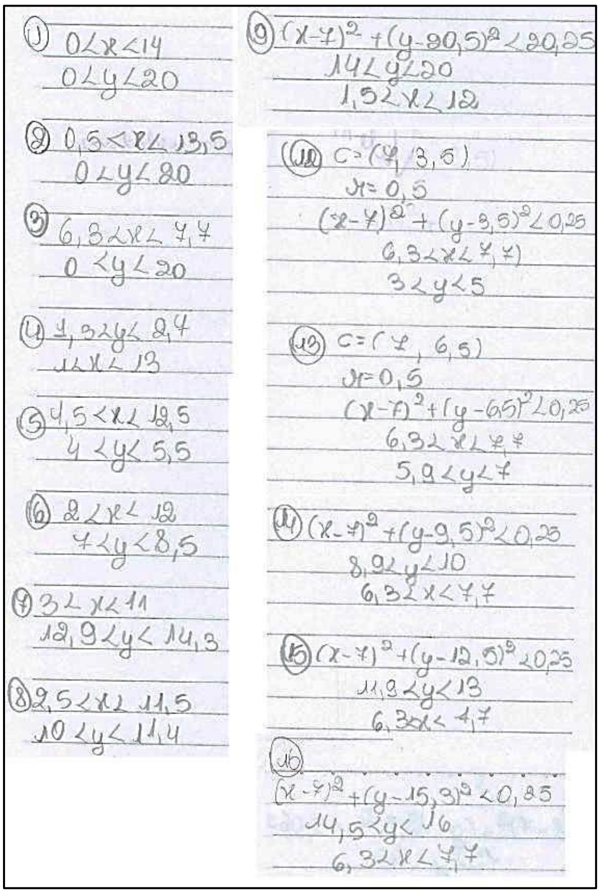


Figura 4.7: Registro da dupla da turma A no desenvolvimento da obra.

Na terceira obra de arte do mesmo autor, encontramos retângulos, triângulos e circunferências. Nessa obra, além de analisar a forma escolhida dos alunos trabalharem, verificamos nos seus registros se os alunos fizeram uso das condições de paralelismo, presentes nas atividades 7 e 8, que poderiam ser usadas nos triângulos vermelhos e pretos. Na figura 4.8, podemos observar a obra e as réplicas.

Apresentamos primeiramente alguns aspectos da dupla de alunos da turma A. Destacamos a forma como esses alunos se organizaram. Para manterem em ordem suas relações, os alunos desenharam os elementos gráficos e numeraram conforme os iam desenvolvendo. Na figura 4.9 podemos observar essa organização e algumas das relações desenvolvidas.

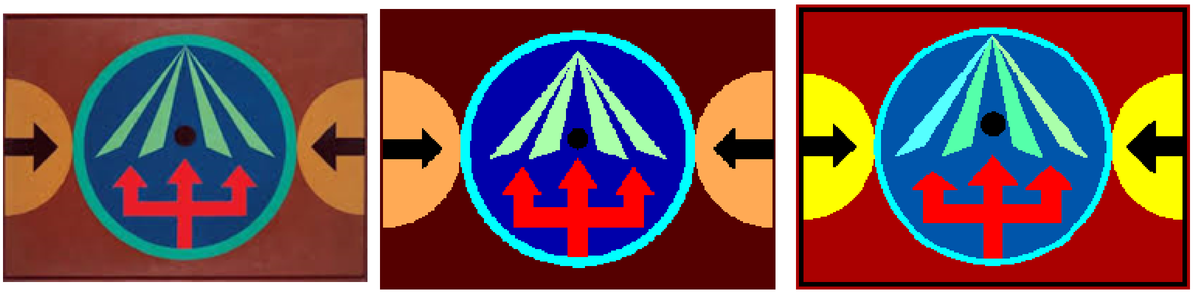


Figura 4.8: Obra de Rubem Valentim (à esquerda), reproduções de alunos da turma A (meio) e da turma B (à direita).

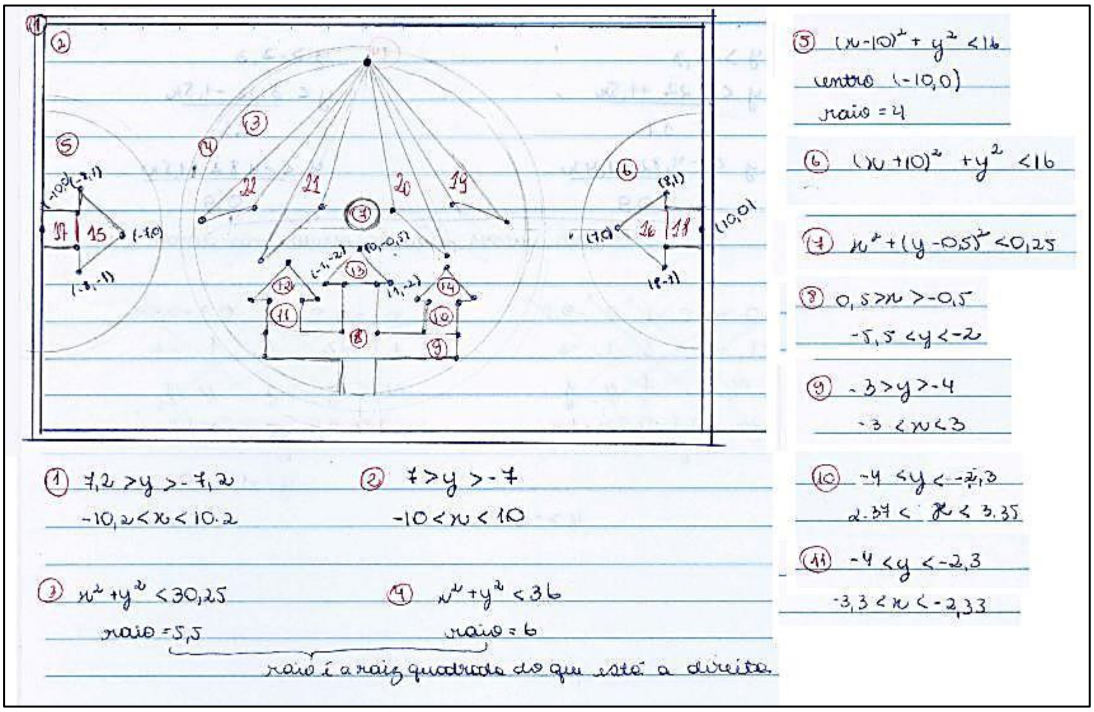


Figura 4.9: Organização dos alunos da turma A e registro de algumas relações para reprodução da obra anterior.

Ao analisar essas equações, percebemos que as semicircunferências numeradas na figura 4.9 como 5 e 6 não estavam com a limitação correta para serem de fato semicircunferências. Buscamos então no arquivo do *GrafEq* a atividade desenvolvida pelos alunos, e descobrimos que, de fato, essa relação estava errada, como podemos observar diminuindo o tamanho da figura no software, conforme mostra a figura 4.10.

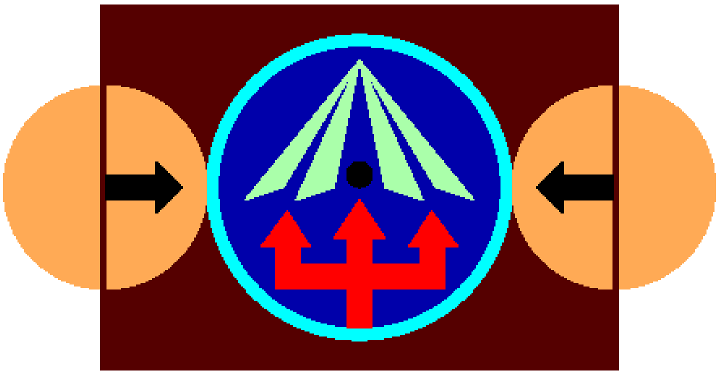
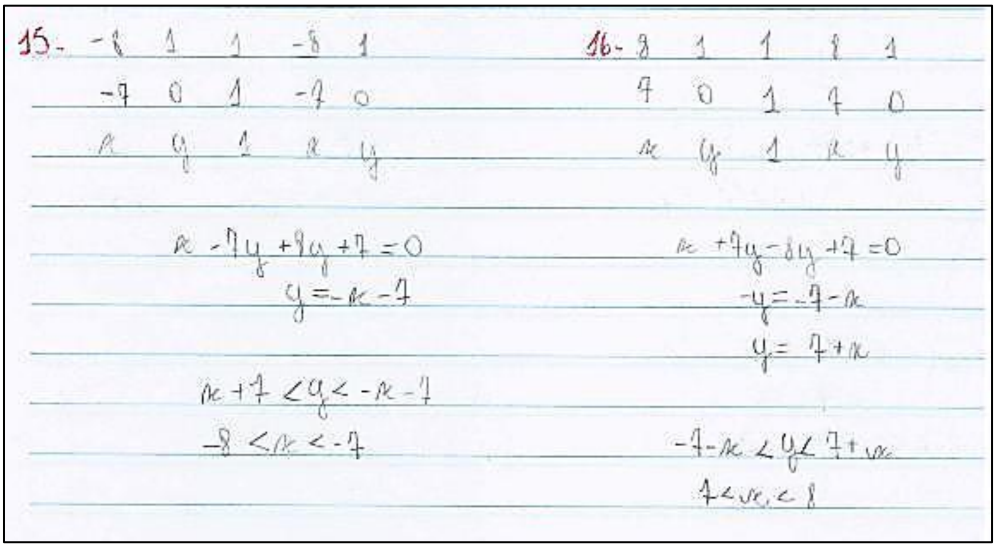


Figura 4.10: Obra dos alunos da turma A, onde não limitaram corretamente a semicircunferência.

Como a dupla apresentou seu trabalho limitando no software as dimensões da obra, não perceberam o erro que vemos na figura acima.

Sobre o desenho de triângulos nessa obra, destacamos que a maior parte deles foi desenhada a partir das equações reduzidas das retas, com as quais os alunos desenvolviam determinantes e igualavam a zero com dois pontos da reta conhecidos, como havíamos trabalhado nas atividade 5. O que percebemos, é que algumas vezes, mesmo sem ter mencionado no registro escrito das relações, os alunos utilizaram intuitivamente as relações de paralelismo (figura 4.11).



15- -8 1 1 -8 1
-7 0 1 -7 0
x y 1 x y

x -7y +8y +7 = 0
y = -x -7

x +7 < y < -x -7
-8 < x < -7

16- 8 1 1 8 1
7 0 1 7 0
x y 1 x y

x +7y -8y +7 = 0
-y = -7 -x
y = 7 +x

-7 -x < y < 7 +x
7 < x < 8

Figura 4.11: Relações para construção dos triângulos onde os alunos utilizaram intuitivamente as relações de paralelismo.

Do trabalho desenvolvido pela turma B, mostramos os cálculos realizados para determinar um dos triângulos na figura 4.12, onde o aluno fez uso do mesmo método que os alunos da turma A.

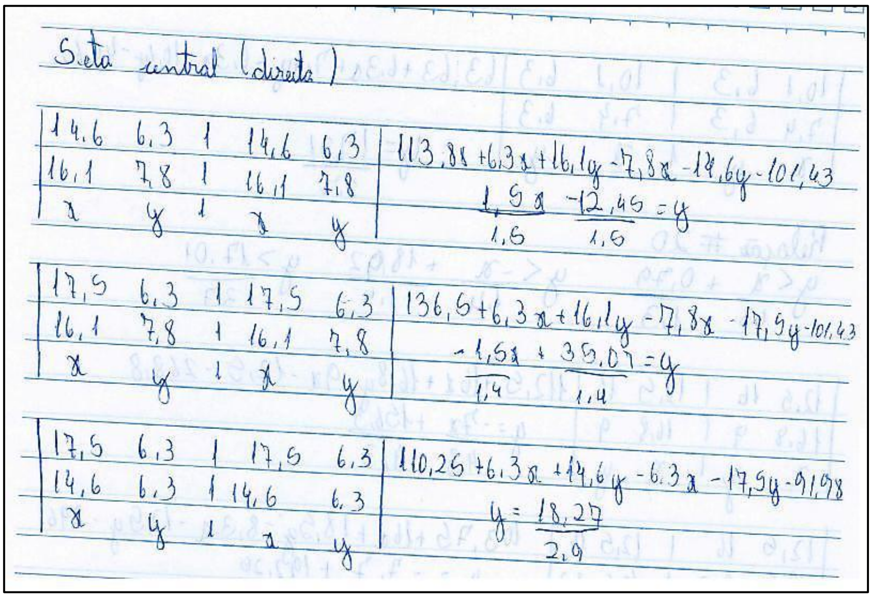


Figura 4.12: Cálculos referentes a um triângulo para reprodução da obra pelo aluno da turma B.

Além disso, observamos que esse aluno conseguiu fazer corretamente as relações da semicircunferência. Na figura 4.13 podemos observar como o aluno da turma B escreveu essa relação.

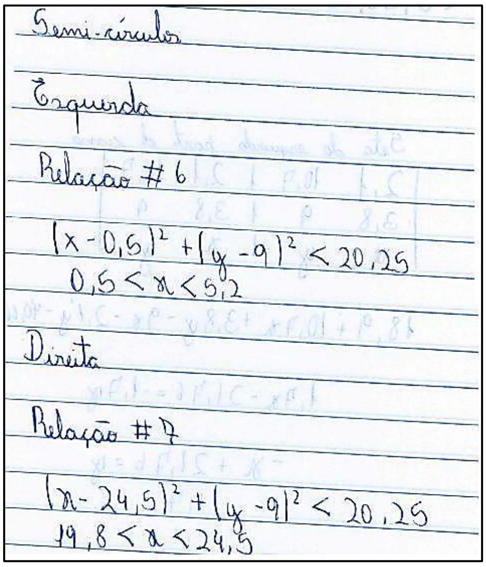


Figura 4.13: Relação para o desenho da semicircunferência pelo aluno da turma B.

Percebemos que de fato as atividades estudadas anteriormente guiaram os alunos a conseguirem essa boa reprodução da obra de arte.

A quarta obra de Rubem Valentim, apresenta um grau de dificuldade maior. Analisando com cuidado, percebemos que cada elemento da obra possui uma fina borda da cor branca. A maior dificuldade foi manter esse elemento na reprodução. Na figura 4.14 podemos observar que os alunos de fato mantiveram esses elementos, e conseguiram reproduções que foram consideradas ótimas.

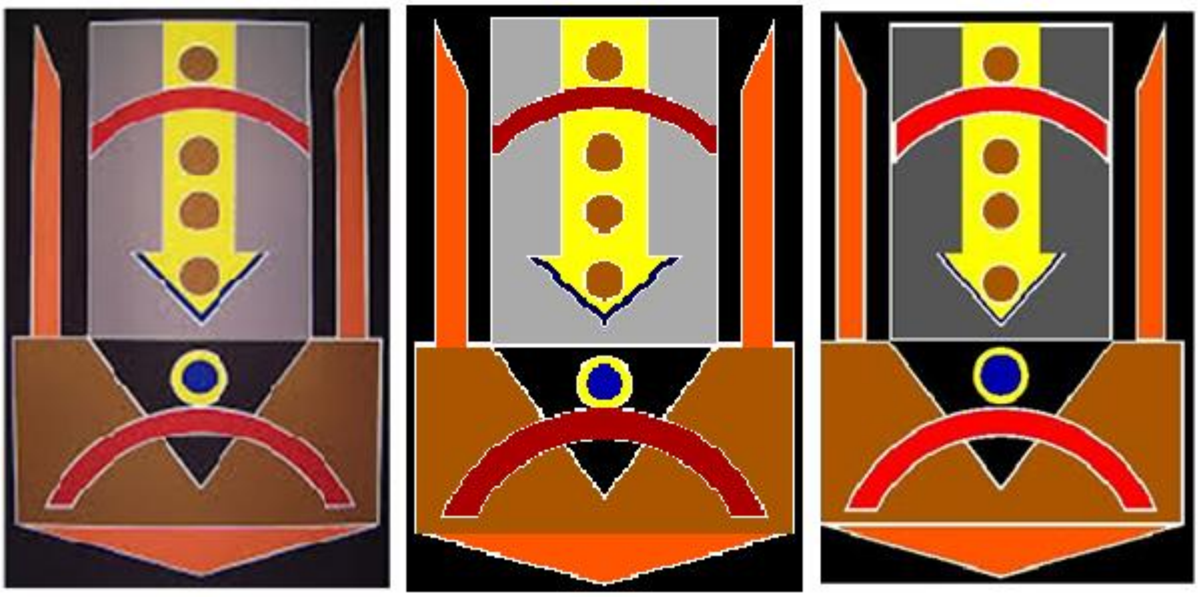


Figura 4.14: Obra de Rubem Valentim (à esquerda), reproduções de alunos da turma A (meio) e da turma B (à direita).

Nessa obra, estão envolvidos os conhecimentos de equações de retas, para construção das partes retangulares e triangulares, e conhecimento sobre equações de circunferências. Na análise do material da turma A, percebemos que eles conseguiram desenvolver a atividade de forma rápida, e fizeram uso de poucos cálculos, pois perceberam a simetria nas retas que possuem inclinações. A figura 4.15 mostra que para desenhar um triângulo, os alunos apenas calcularam uma das retas, e deduziram por simetria a outra, fato que funcionou por localizarem o eixo das abscissas e ordenadas bem no centro da figura.

Destacamos, na figura 4.15, que o aluno da turma A escreveu a relação matemática de uma forma não usual. Como o software *GrafEq* aceitou esse comando, interpretando como duas desigualdades diferentes e realizando o desenho da forma esperada, o aluno acabou por fazê-las dessa forma, como podemos ver algumas na figura 4.16.

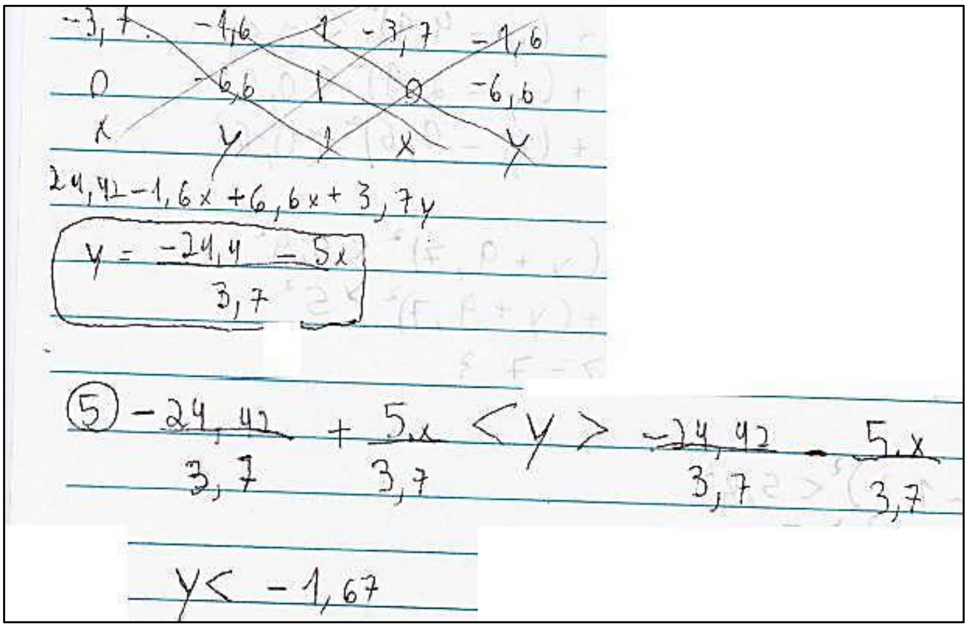
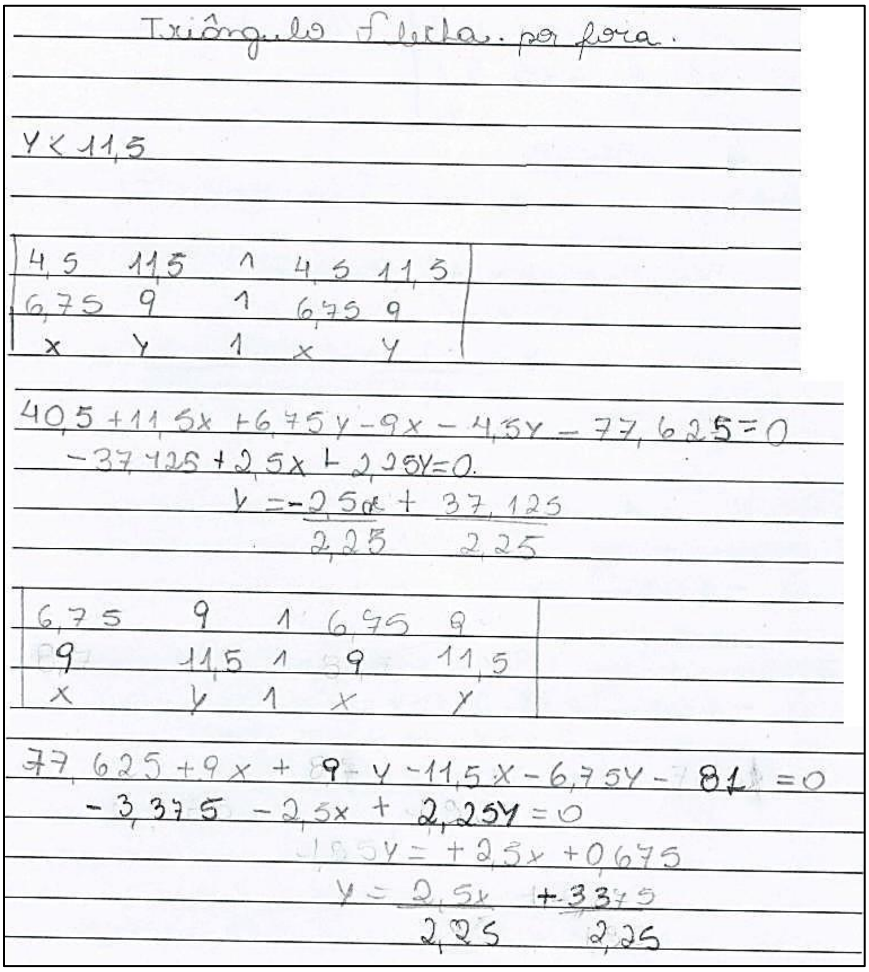


Figura 4.15: Cálculos e relação para o desenho de um triângulo pelos alunos da turma A.

$\frac{-25}{3.7}+\frac{5\cdot x}{3.7}<y>\frac{-25}{3.7}-\frac{5\cdot x}{3.7}$ $y<-1.6$	$\frac{-24.42}{3.7}+\frac{5\cdot x}{3.7}<y>\frac{-24.42}{3.7}-\frac{5\cdot x}{3.7}$ $y<-1.67$
$\frac{-1.8}{6.4}\cdot x-9.7<y>\frac{1.8}{6.4}\cdot x-9.7$ $y<-7.9$	$\frac{-1.8}{6.4}\cdot x-9.6<y>\frac{1.8}{6.4}\cdot x-9.6$ $y<-8$
$0.9\cdot x-0.5<y>-0.9\cdot x-0.5$ $y<1.4$	$0.9\cdot x-0.8<y>-0.9\cdot x-0.8$ $y<1.4$

Figura 4.16: Algumas relações usadas pelo aluno da turma A no aplicativo *GrafEq*.

O trabalho desenvolvido pelo aluno da turma B, em comparação ao dos alunos da turma A, apresentou todos os cálculos necessários. Como podemos observar na figura 4.17 abaixo.



Triângulo flecha por fora.

Y < 11,5

4,5	11,5	1	4,5	11,5
6,75	9	1	6,75	9
x	y	1	x	y

40,5 + 11,5x + 6,75y − 9x − 4,5y − 77,625 = 0

−37,125 + 2,5x + 2,25y = 0.

y = −2,5x/2,25 + 37,125/2,25

6,75	9	1	6,75	9
9	11,5	1	9	11,5
x	y	1	x	y

77,625 + 9x + 9y − 11,5x − 6,75y − 81 = 0

−3,375 − 2,5x + 2,25y = 0

2,25y = +2,5x + 0,675

y = 2,5x/2,25 + 3,375/2,25

Figura 4.17: Cálculos do aluno da turma B.

Destacamos, com relação a reprodução da obra, além do fato dos alunos terem contemplado todos os itens na reprodução, a riqueza presente nos detalhes. Consideramos que os alunos que reproduziram essa obra de arte tenham atingido os objetivos da atividade.

Por fim, dentre as obras de arte de Rubem Valentim, apresentamos a obra que foi reproduzida por um aluno da turma B (Figura 4.18).

Comparando a obra com sua reprodução no *GrafEq*, percebemos imediatamente algumas diferenças. No momento da aula, o aluno que apresentou o trabalho acima solicitou ajuda na construção dos triângulos. Percebendo sua dificuldade com os pontos, auxiliamos o aluno a construir a obra em uma folha de papel milimetrado para que dessa forma identificasse os pontos e pudesse compreender as relações. A figura 4.19 apresenta a construção realizada.

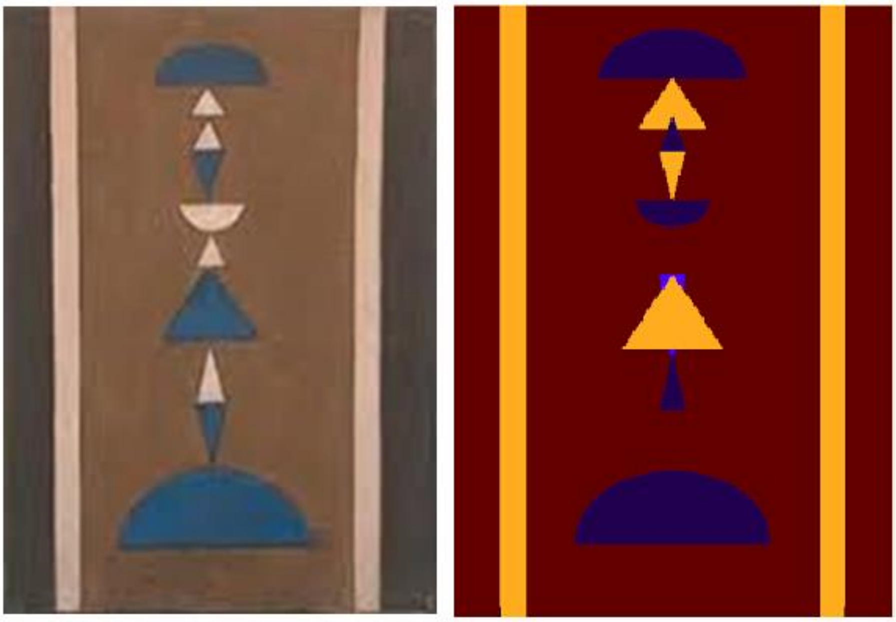


Figura 4.18: Obra de Rubem Valentim (à esquerda) e reprodução do aluno da turma B (à direita)

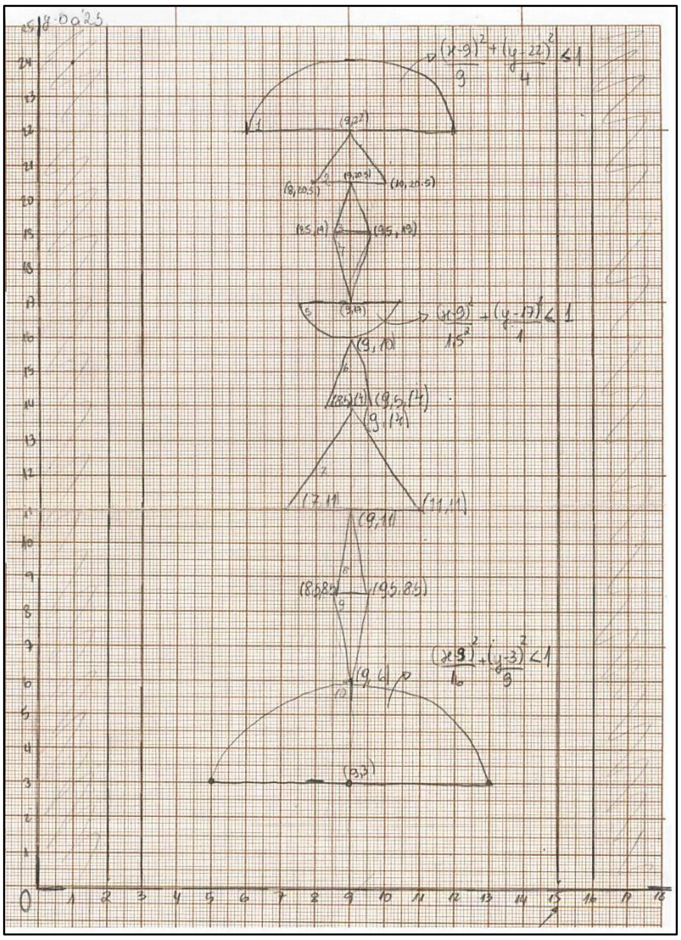


Figura 4.19: Construção da obra de Rubem Valentim na folha milimetrada, pelo aluno da turma B.

O aluno que desenvolveu essa atividade não enviou o arquivo do *GrafEq* para que pudéssemos analisar as suas relações (enviou apenas a imagem). Mas na parte escrita, observamos que ele desenvolveu as equações das retas fazendo uso dos determinantes e apresentou algumas relações, conforme apresenta a figura 4.20.

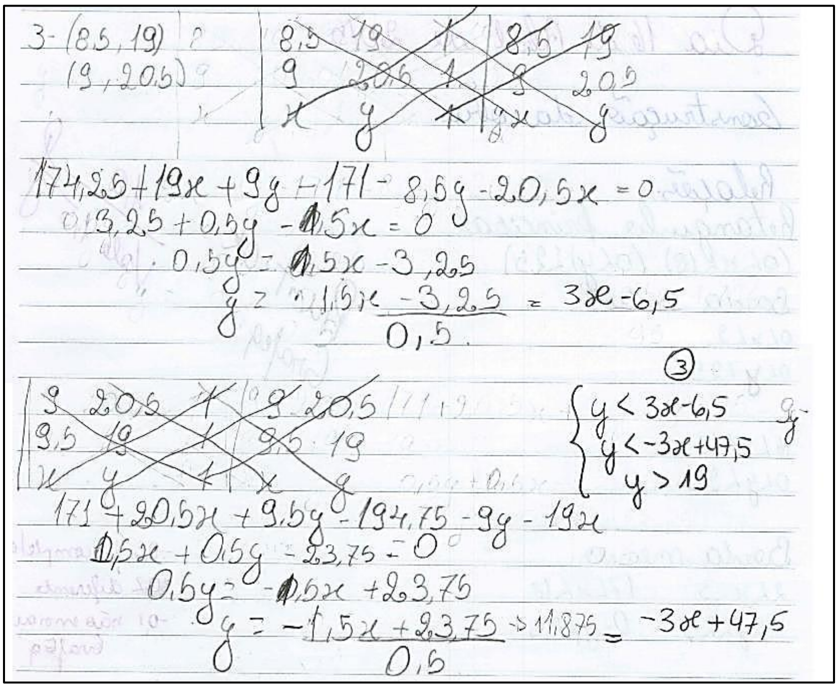


Figura 4.20: Cálculos para relação de um triângulo, por um aluno da turma B.

Porém, em outros casos, o aluno apresentou as contas corretamente, e acreditamos que ele não tenha concluído a atividade com êxito por ter usado as desigualdades de forma errada. Por exemplo, as contas para determinar o último triângulo azul, estão corretas, como podemos observar na figura 4.21, mas a relação não está correta na imagem que o aluno enviou.

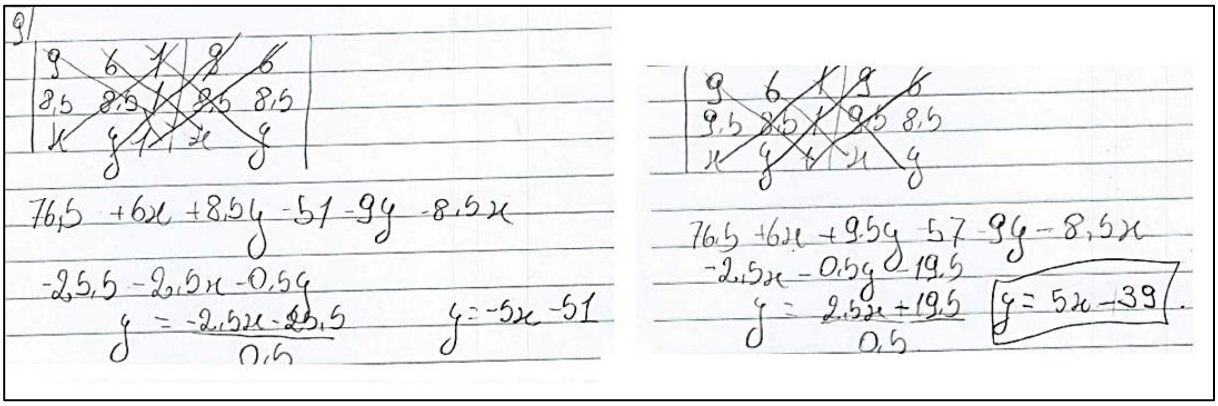


Figura 4.21: Cálculos para encontrar a equação da reta do último triângulo.

Nesse caso, percebemos que o aluno desenvolveu com facilidade o cálculo das equações gerais da reta, que reconheceu todas circunferências, porém não fez uso correto das desigualdades e dessa forma não completou a atividade final.

Seguimos agora com as obras do pintor Auguste Herbin.

4.3 Obras de Auguste Herbin

Seguimos com as obras de arte do artista Auguste Herbin. Escolhemos, 5 obras desse autor, sendo 3 delas reproduzidas apenas por alunos da turma B, e duas delas por alunos das duas turmas.

Analisando a primeira das obras de arte de Auguste Herbin, podemos perceber que ela apresenta retângulos, triângulos e circunferências. A figura 4.22 apresenta a obra do artista e a reprodução desta realizada por dois alunos, um da turma A e outro da turma B.

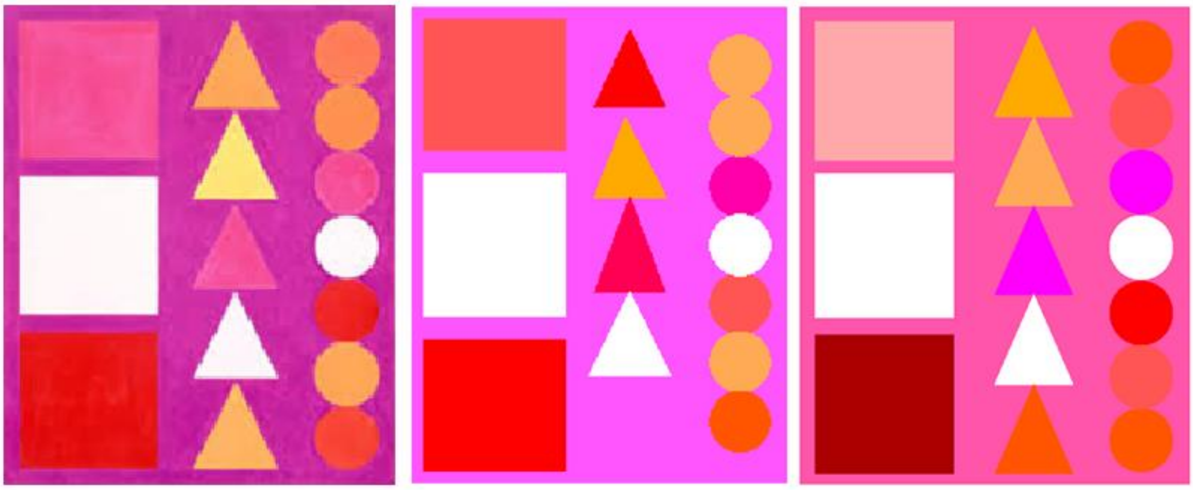


Figura 4.22: Obra de arte de Auguste Herbin (à esquerda), reproduções da obra no *GrafEq* por um aluno da turma A (meio) e um aluno da turma B (à direita).

Percebemos que ambos os alunos conseguiram identificar retângulos, triângulos e as circunferências em suas reproduções. Analisando os cálculos e anotações do aluno da turma A, podemos perceber que ele fez uso das duas maneiras de calcular a equação da reta: utilizando dois pontos, desenvolvendo o determinante, e calculando o coeficiente angular a partir de dois pontos e após utilizando a fórmula $y - y_0 = m(x - x_o)$, conforme apresenta a figura 4.23.

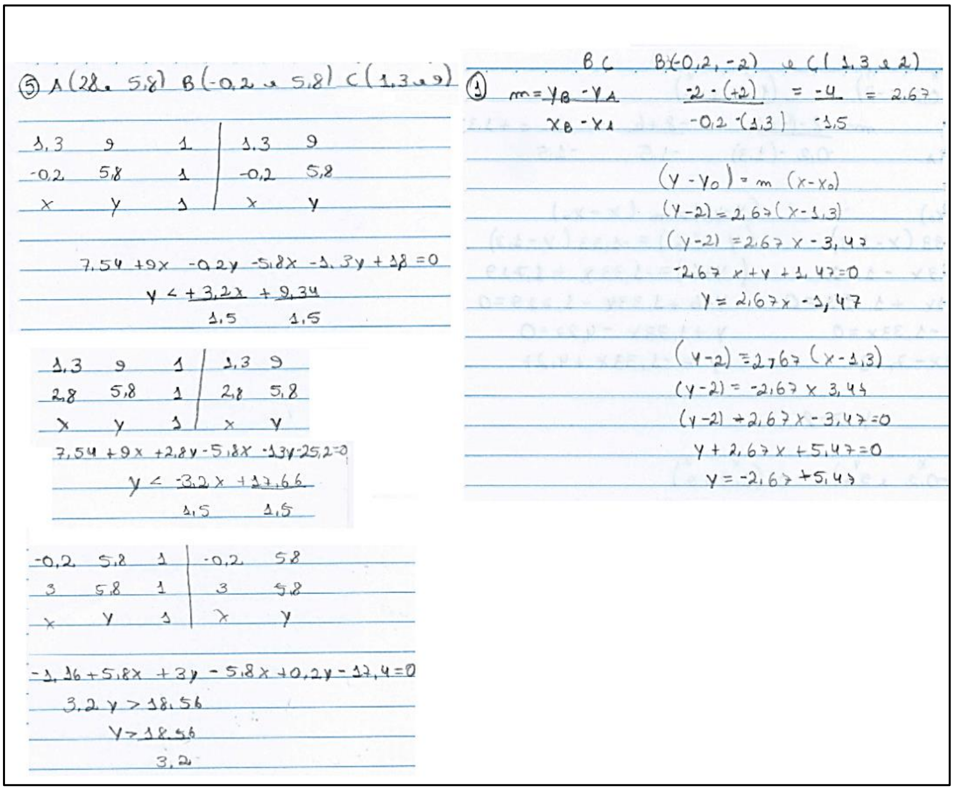


Figura 4.23: Alguns cálculos utilizados pelo aluno da turma A

Na figura 4.24 apresentamos a forma como esse aluno organizou o plano cartesiano para a reprodução da obra. Percebemos que mesmo sem a presença de simetrias na figura, o aluno optou por localizar o centro do plano cartesiano no centro do seu espaço destinado à reprodução.

O aluno da turma B aproximou os pontos dos vértices dos triângulos por pares ordenados com números inteiros, como podemos observar na figura 4.24, pois dessa forma resolveu os determinantes de maneira mais simples. Na figura 4.25 observamos os cálculos para a construção do primeiro triângulo da obra, a relação referente a essa figura do *GrafEq*, e as relações que foram utilizadas para os retângulos.

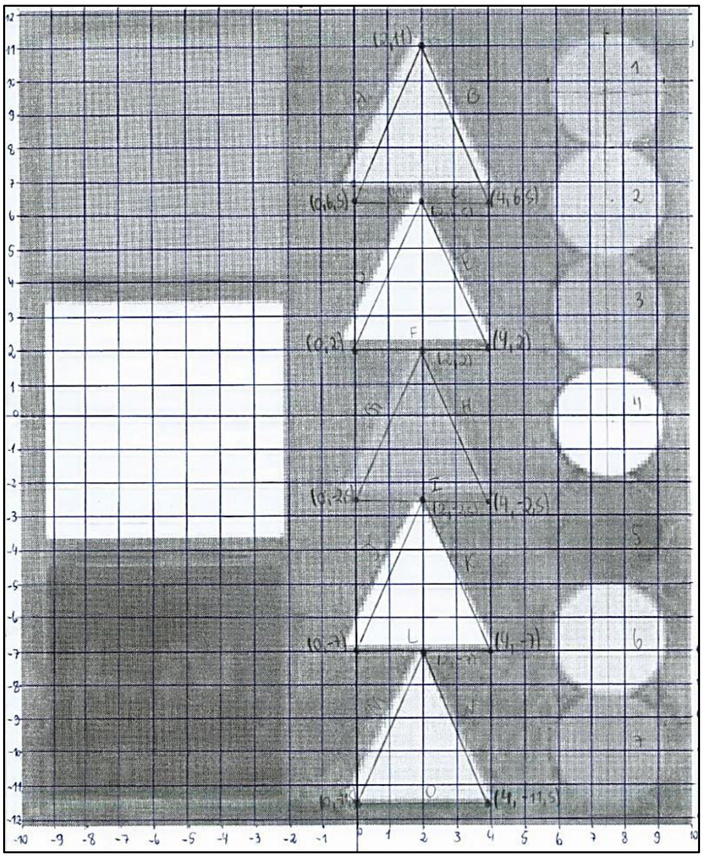


Figura 4.24: Organização do aluno da turma B para reprodução da obra de arte.

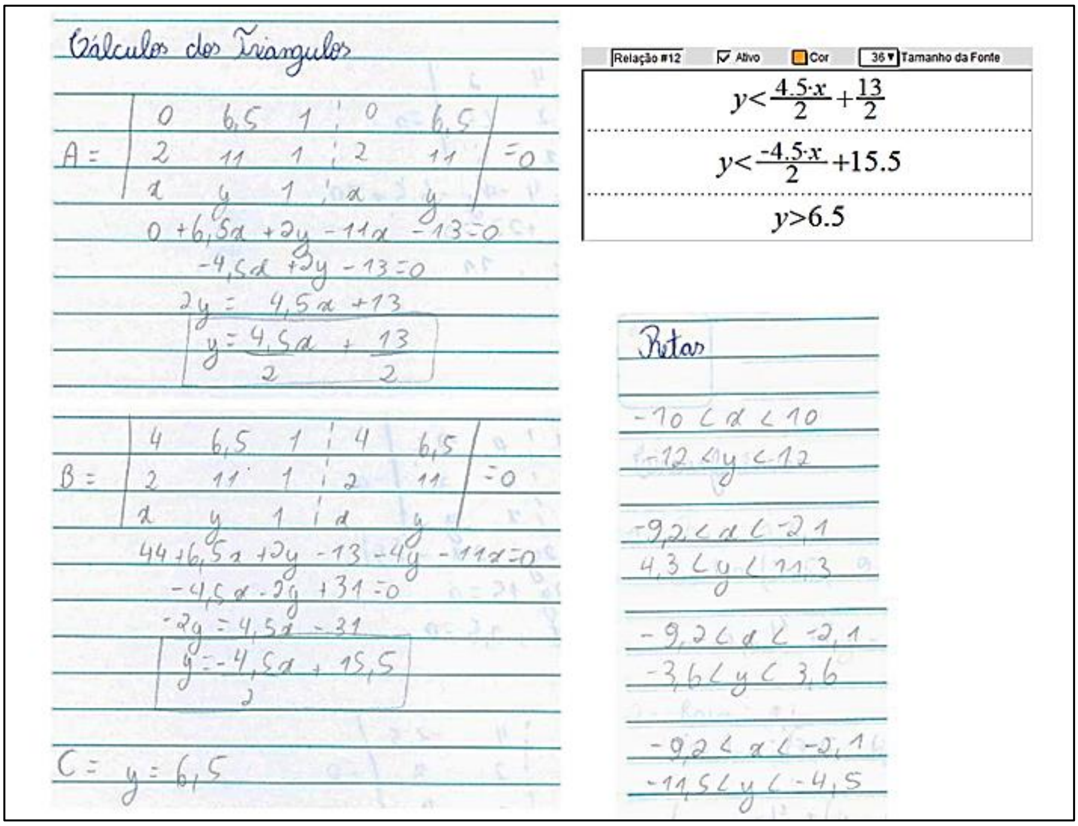


Figura 4.25: Alguns cálculos do aluno da turma B.

O aluno em questão solicitou auxílio quando foi realizar a parte da atividade exposta na figura 4.25. Nosso auxílio foi no sentido de organizar os triângulos localizando os vértices em pontos que o aluno poderia usar. alunos Os alunos das turmas A e B não fizeram uso da relação de paralelismo que poderia ser utilizada, e diminuído a quantidade de cálculos, já que os lados equivalentes dos triângulos são paralelos. No trabalho do aluno da turma A, percebemos inclusive que ele não conseguiu manter o paralelismo com os pontos que escolheu, além de não conseguir desenhar o último triângulo. Sobre as circunferências, acreditamos que eles tiveram certa facilidade em construí-las. Não solicitaram ajuda, e as desenvolveram corretamente. Apenas, podemos perceber que o aluno da turma A não observou o alinhamento superior e inferior com os triângulos e retângulos, diferente do aluno da turma B, conforme a figura 4.26.

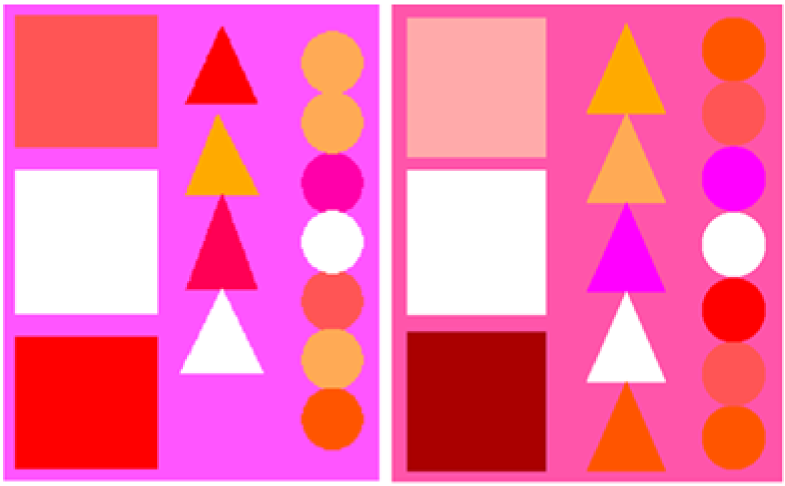


Figura 4.26: Imagem para ressaltar os detalhes não observadas na primeira reprodução, do aluno da turma A, em relação à segunda reprodução, do aluno da turma B.

A segunda obra que apresentamos do artista Auguste Herbin, foi reproduzida por um aluno da turma B, conforme a figura 4.27.

Para desenvolver a obra da figura 4.27, o aluno desenhou sobre a imagem um plano cartesiano, de forma que a obra pertencesse toda ao primeiro quadrante. Nos registros que ele apresentou, percebemos que houve facilidade para desenvolver os retângulos e circunferências. Para o desenvolvimento dos triângulos, o aluno utilizou determiantes para encontrar a equação geral da reta, como mostra a figura 4.28.

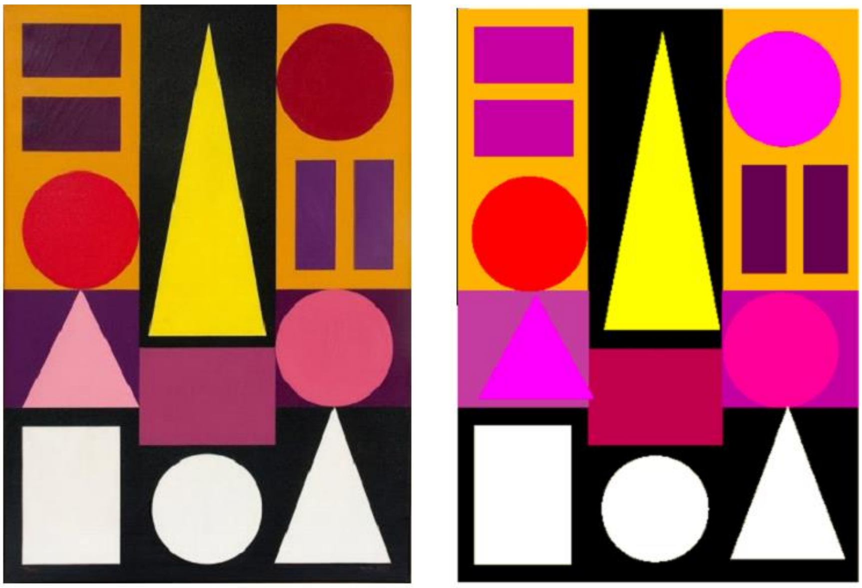
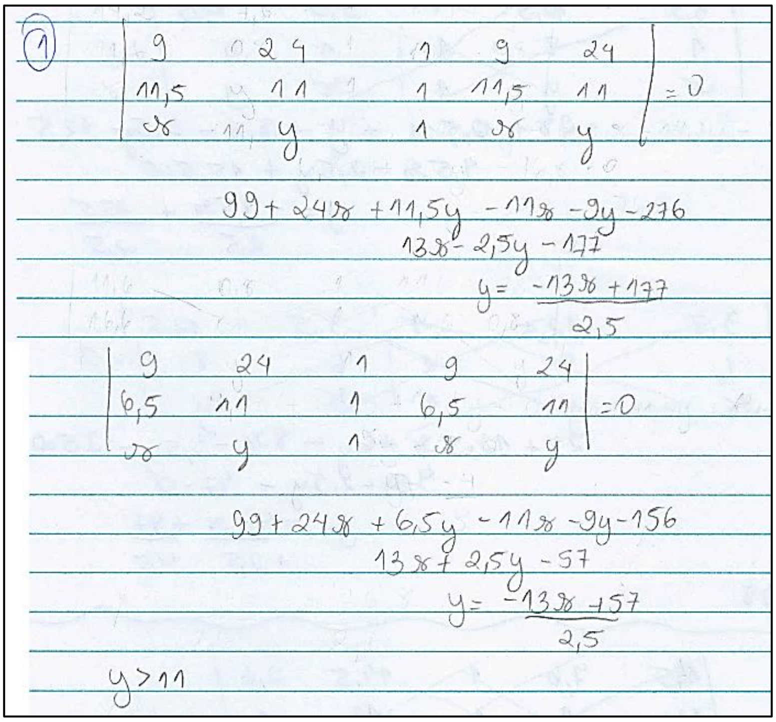


Figura 4.27: Obra de Auguste Herbin (à esquerda) e reprodução do aluno da turma B (à direita).



1

$$\begin{vmatrix} 9 & 24 & 1 & 9 & 24 \\ 11,5 & 11 & 1 & 11,5 & 11 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$$

$99 + 24x + 11,5y - 11x - 9y - 276$

$13x - 2,5y - 177$

$y = \dfrac{-13x + 177}{2,5}$

$$\begin{vmatrix} 9 & 24 & 1 & 9 & 24 \\ 6,5 & 11 & 1 & 6,5 & 11 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$$

$99 + 24x + 6,5y - 11x - 9y - 156$

$13x + 2,5y - 57$

$y = \dfrac{-13x + 57}{2,5}$

$y > 11$

Figura 4.28: Cálculos do aluno para o desenho de um triângulo no *GrafEq*.

As equações da figura 4.28 resultam no triângulo amarelo da obra que foi reproduzida. Para resolver os cálculos de forma mais simples, percebemos que o aluno aproximou os pontos da figura a pares ordenados com números inteiros sempre que possível. Consideramos que o aluno que reproduziu essa obra de arte atingiu os objetivos propostos pela atividade.

A obra seguinte do mesmo artista, também foi reproduzida por um aluno da turma B. A figura 4.29 mostra a reprodução ao lado da obra do artista.

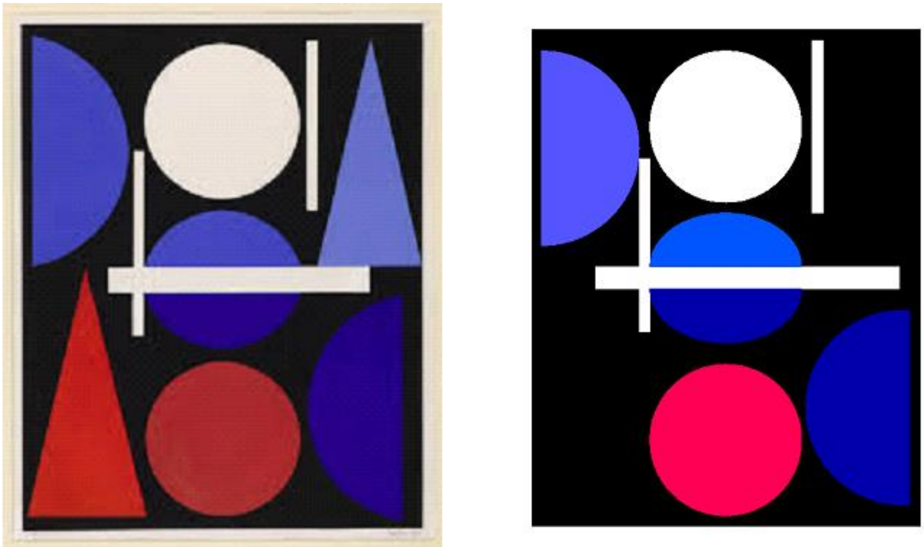
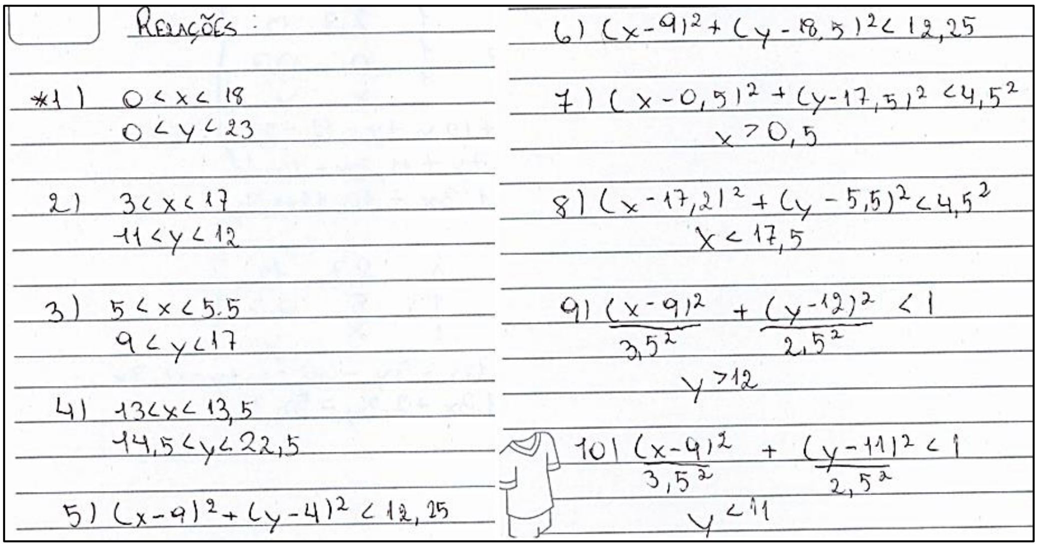


Figura 4.29: Obra de Auguste Herbin (à esquerda) e reprodução do aluno da turma B (à direita).

O primeiro aspecto que observamos na reprodução da obra, é a ausência de triângulos. Acreditamos que o aluno não tenha compreendido como podemos encontrar a equação da reta, uma vez que sequer encontramos registros de tentativas dos cálculos. Ressaltamos que esse aluno em nenhum momento das aulas ou dos atendimentos extraclasse procurou ajuda para completar a obra. Destacamos na figura 4.30, as demais relações que esse aluno utilizou.

Pelo desenvolvimento apresentado pelo aluno, percebemos que ele compreendeu a localização da obra no plano cartesiano, o desenho de retângulos e das circunferências. Porém, consideramos insuficiente o esboço sem a presença dos triângulos, pois mostra que o aluno não compreendeu alguns itens das atividades realizadas anteriormente.



Relações:

*1) $0 < x < 18$
$0 < y < 23$

2) $3 < x < 17$
$11 < y < 12$

3) $5 < x < 5.5$
$9 < y < 17$

4) $13 < x < 13,5$
$14,5 < y < 22,5$

5) $(x-9)^2 + (y-4)^2 < 12,25$

6) $(x-9)^2 + (y-18,5)^2 < 12,25$

7) $(x-0,5)^2 + (y-17,5)^2 < 4,5^2$
$x > 0,5$

8) $(x-17,2)^2 + (y-5,5)^2 < 4,5^2$
$x < 17,5$

9) $\frac{(x-9)^2}{3,5^2} + \frac{(y-12)^2}{2,5^2} < 1$
$y > 12$

10) $\frac{(x-9)^2}{3,5^2} + \frac{(y-11)^2}{2,5^2} < 1$
$y < 11$

Figura 4.30: Relações que o aluno utilizou para reproduzir retângulos, circunferências e semicircunferências da obra anterior.

A figura 4.31 apresenta uma outra obra de arte do mesmo artista, sendo que ela foi desenvolvida por uma dupla na turma A e um aluno da turma B.

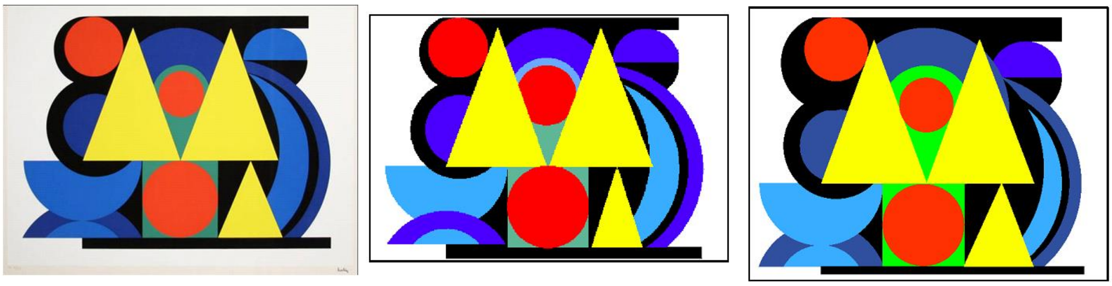


Figura 4.31: Obra de arte de Auguste Herbin (à esquerda), reproduções da obra no *GrafEq* por um aluno da turma A (meio) e um aluno da turma B (à direita).

Destacamos inicialmente que essa obra apresenta uma quantidade maior de elementos gráficos em comparação com as obras anteriores. Por isso, consideramos que ela apresenta um maior grau de dificuldade para reprodução. No trabalho da dupla da turma A, verificamos em seus registros escritos que para encontrar a equação da reta, os alunos não utilizaram determinante, mas sim, a fórmula para encontrar o coeficiente angular e em seguida a fórmula para encontrar a equação reduzida, como mostra a figura 4.32.

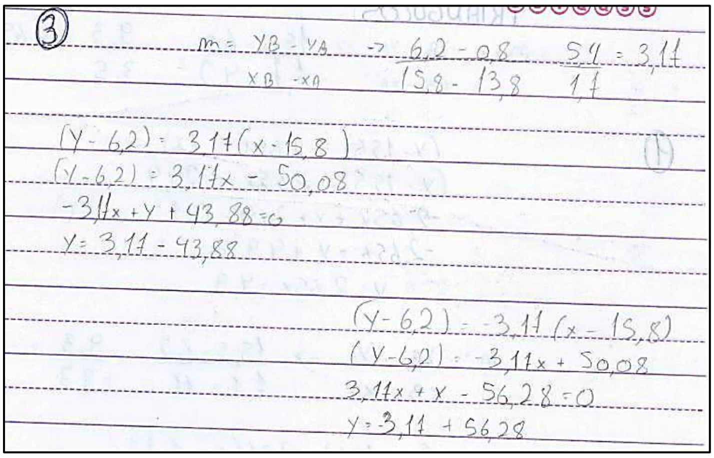


Figura 4.32: Cálculos dos alunos da turma A para encontrar a equação reduzida da reta.

As relações da figura 4.32 se referem ao triângulo amarelo menor. Destacamos que o aluno percebeu a relação do coeficiente angular das retas dos triângulos que desenhou.

Os alunos da turma B resolveram todos os cálculos utilizando o processo por determinantes, através do qual encontraram a equação geral da reta, e após a equação reduzida. Para os demais elementos da reprodução da obra, podemos observar na figura 4.33 que os alunos não apresentaram dificuldades.

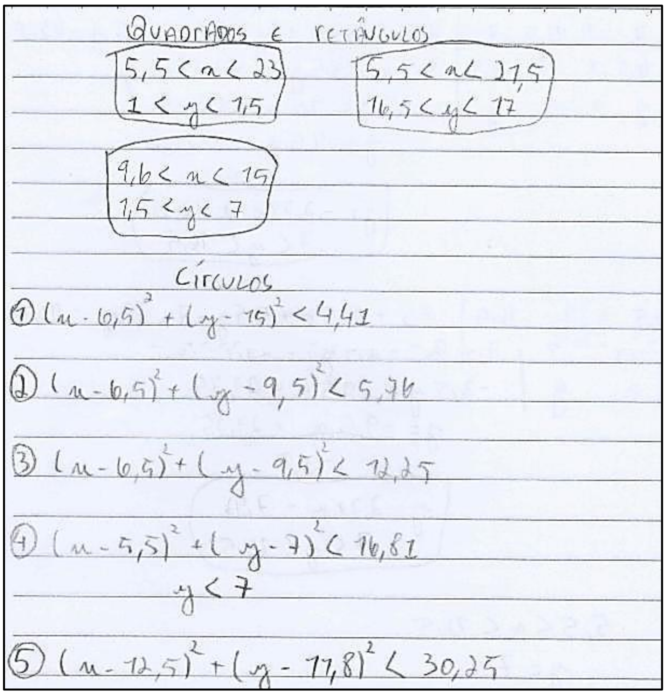


Figura 4.33: Relações utilizadas pelos alunos da turma B para retângulos e circunferências.

Referente ao desenvolvimento dessa atividade consideramos que os alunos obtiveram boas reproduções da obra original. A última obra de Auguste Herbin que apresentamos na figura 4.34 foi reproduzida por um aluno da turma B. Assim como as demais obras desse artista, são obras que contemplam retângulos, circunferências e triângulos.

Figura 4.34: Obra de Auguste Herbin (à esquerda) e reprodução do aluno da turma B (à direita).

Analisando a figura 4.34, consideramos que o aluno conseguiu uma boa reprodução da obra, uma vez que percebemos que ele apresentou uma reprodução rica em detalhes, com todos elementos da obra original, apresentando cálculos e uma ótima organização no trabalho. Nos registros escritos apresentados pelo aluno verificamos que para encontrar a equação geral da reta, ele fez uso do método com resolução de determinantes. Percebemos que o aluno não fez uso da condição de paralelismo e perpendicularismo, como poderia ter feito nas retas que destacamos na figura 4.35.

Na figura 4.35, as retas brancas são paralelas e as amarelas são perpendiculares às retas brancas. As retas que o aluno encontrou não são paralelas, provavelmente devido à escolha dos pontos para encontrar a equação e por arredondamentos realizados no processo. A figura 4.36 apresenta os cálculos do aluno para as equações dos quadriláteros verde-escuros, onde destacamos as retas na figura 4.35.

Figura 4.35: Retas paralelas e perpendiculares em destaque na obra de Auguste Herbin.

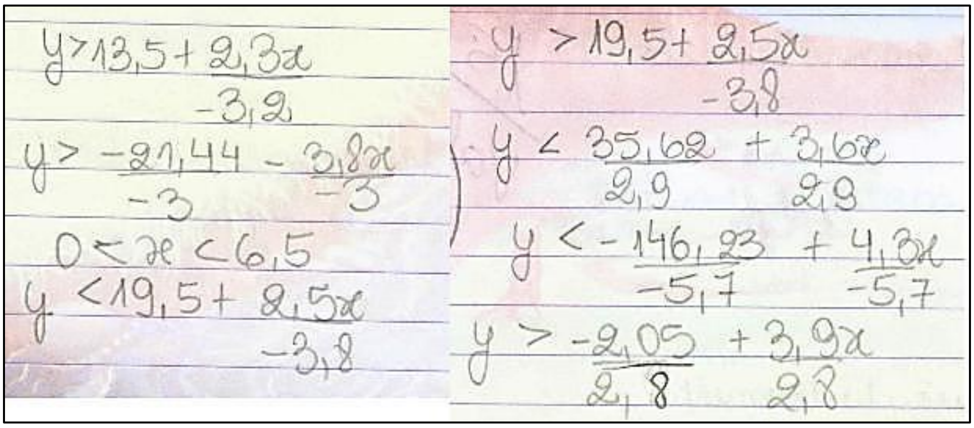


Figura 4.36: Relações que o aluno encontrou para os quadriláteros verde-escuro da obra.

Analisando os coeficientes angulares das retas, verificamos que nas retas brancas, o aluno encontrou valores aproximados a -0,72, -0,66 e -0,75. Assim como, encontrou para as retas amarelas com valores aproximados a 1,24, 1,39 e 1,27. Caso o aluno percebesse as relações entre retas paralelas e perpendiculares, poderia ter realizado um número menor de cálculos, e teria corrigido pequenas diferenças do original.

4.4 Obras de Alexander Calder

As obras seguintes, de Alexander Calder, também apresentam elementos gráficos como retângulos, triângulos e circunferências. São 4 obras que apresentam poucas situações de simetrias, apresentando dessa forma um desafio maior aos alunos que irão reproduzi-las. Todas as obras foram reproduzidas por uma dupla de alunos da turma A e por um aluno da turma B. Na figura 4.37 a seguir, apresentamos a primeira obra.

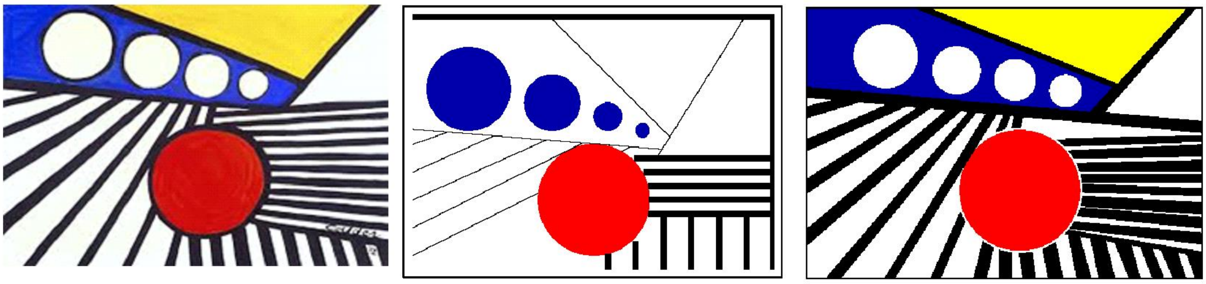
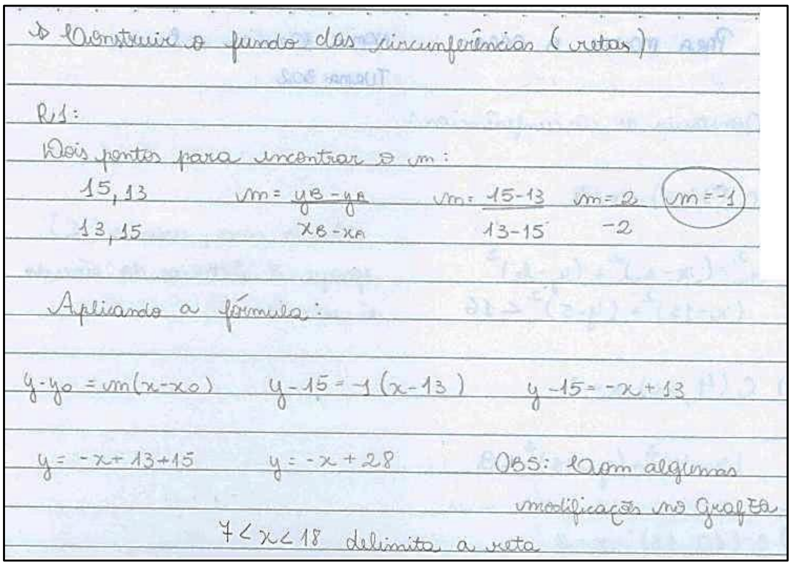


Figura 4.37: Obra de arte de Alexander Calder (à esquerda), reproduções da obra no *GrafEq* por uma dupla da turma A (meio) e um aluno da turma B (à direita).

O primeiro aspecto que destacamos é o fato de que a reprodução apresentada pela dupla da turma A está incompleta, e os elementos gráficos apresentados são diferentes que os da obra original. É importante ressaltar que durante as aulas reservadas para realizar a atividade eles não procuraram auxílio ou esclareceram dúvidas referente aos conteúdos.

Uma observação do trabalho dessa dupla, é que eles não localizaram adequadamente um plano cartesiano sobre a obra, apenas fizeram retas verticais e horizontais, mas não equidistantes. Assim, não conseguiram boas aproximações para reprodução. Verificando no trabalho escrito, percebemos que eles conheciam o conteúdo em si, porém não souberam aplicar de forma eficiente. A figura 4.38 apresenta detalhadamente alguns cálculos.

No trabalho do aluno da turma B, percebemos que houve uma maior aproximação com a obra original. O aluno dessa turma organizou a obra sobre uma folha de papel milimetrado, conforme a figura 4.39.



→ Construir o fundo das circunferências (retas)

R1:

Dois pontos para encontrar o m:

15,13 $\quad m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad m = \frac{15-13}{13-15} \quad m = \frac{2}{-2} \quad m = -1$

13,15

Aplicando a fórmula:

$y - y_0 = m(x - x_0) \quad y - 15 = -1(x - 13) \quad y - 15 = -x + 13$

$y = -x + 13 + 15 \quad y = -x + 28$ OBS: Com algumas modificações no GrafEq

$7 < x < 18$ delimita a reta

Figura 4.38: Cálculos apresentados pela dupla da turma A.

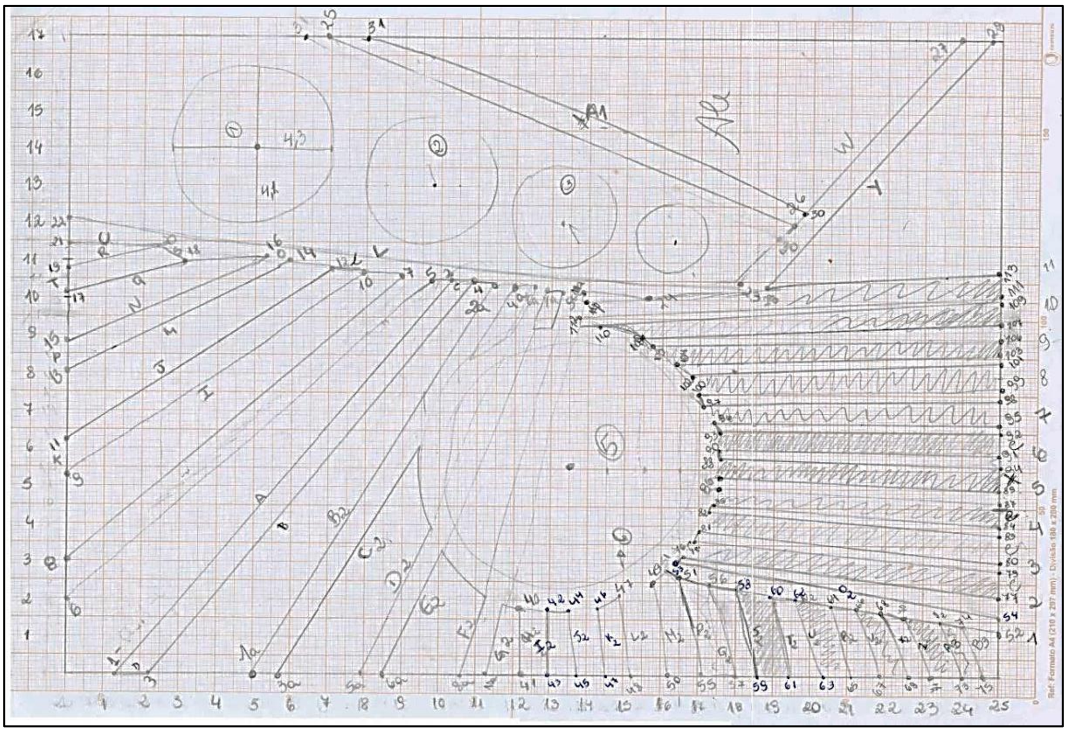


Figura 4.39: Esboço construído antes de reproduzir a obra no *GrafEq*.

Nos cálculos, esse aluno selecionou os pontos conforme a figura acima, e utilizando determinantes, encontrou as equações das retas que possibilitaram a construção da maior parte dos elementos da obra. Consideramos, que os alunos da turma A não atingiram os objetivos da atividade, pois os alunos não apresentaram corretamente todos os elementos da obra, assim como deixaram de manter proporções e as devidas inclinações das retas desenhadas. Diferente do aluno da turma B, que apresentou a obra de forma mais completa.

A segunda obra de Alexander Calder foi reproduzida por uma dupla da turma A e um aluno da turma B, como mostra a figura 4.40.

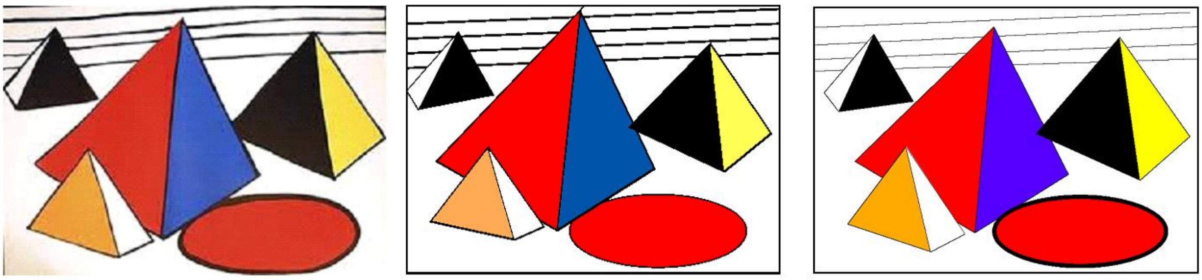


Figura 4.40: Obra de arte de Alexander Calder (à esquerda), reproduções da obra no *GrafEq* por uma dupla da turma A (meio) e um aluno da turma B (à direita).

Nas reproduções da figura 4.40 podemos observar que os dois trabalhos tiveram boas aproximações com a obra de arte original. A dupla da turma A, usou no *GrafEq* medidas obtidas com a régua, e dessa forma localizou exatamente os pontos necessários para cada item. Optaram também, por calcular as retas com o uso da fórmula de coeficiente angular e da fórmula para encontrar a equação reduzida com um ponto e o valor do coeficiente angular, como mostra a figura 4.41.

* RETA A → (3,4; 16) (0,12)

$m = \frac{16-12}{3,4-0} = \frac{4}{3,4} = 1,1765$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 12 = 1,1765(x-0)$

$y = 1,1765x + 12$

* RETA B → (0,12) (1; 10,7)

$m = \frac{12-10,7}{0-1} = \frac{1,3}{-1} = -1,3$

$y - 12 = -1,3(x-0)$

$y = -1,3x + 12$

* RETA C → (3,4; 16) (1; 10,7)

$m = \frac{16-10,7}{3,4-1} = \frac{5,3}{2,4} = 2,21$

$y - 16 = 2,21(x - 3,4)$

$y = 2,21x - 7,514 + 16$

$y = 2,21x + 8,486$

Figura 4.41: Cálculos desenvolvidos pelos alunos da turma A.

Para a construção da elipse, os alunos identificaram as medidas dos eixos menor e maior da curva, em $\overrightarrow{Ox}$ e em $\overrightarrow{Oy}$, e também qual deveria ser o centro da elipse. Com essas informações, deduziram a equação reduzida, apresentada na figura 4.42.

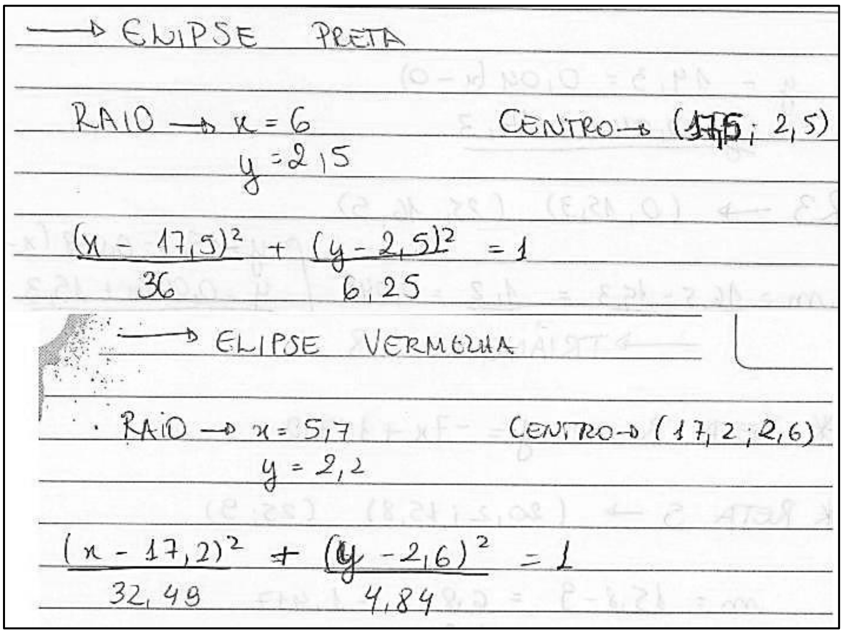


Figura 4.42: Organização de um alunos da turma A para desenhar a equação da elipse.

Um aluno da turma B, optou por esboçar o plano cartesiano sobre a obra, aproximando o valor dos pontos para medidas com até uma casa decimal. Ele, diferente dos alunos da turma A, calculou as retas resolvendo os determinantes. Na figura 4.43, estão os cálculos desse aluno para um dos triângulos da obra de arte anterior.

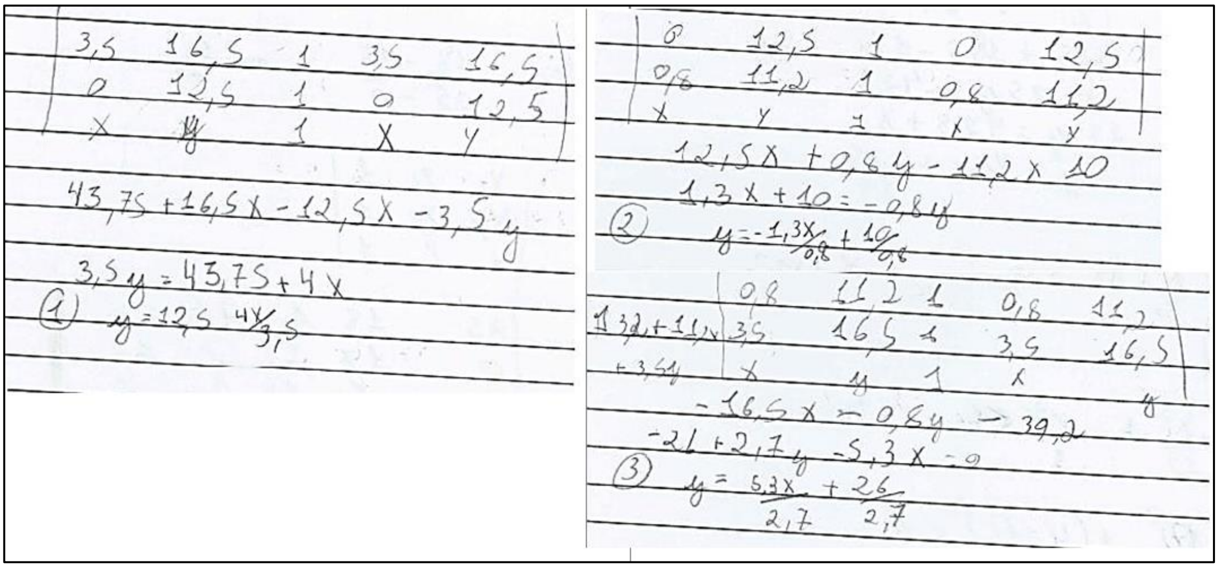


Figura 4.43: Cálculos do aluno da turma B, com determinantes, para encontrar a equação reduzida da reta.

Destacamos que este aluno, conseguiu calcular as equações de retas, porém procurou ajuda no atendimento extraclasse para organizar as relações e construir os triângulos. A figura 4.44, apresenta um desenho esboçado para a explicação de como usar as desigualdades e a relação que gera um dos triângulos.

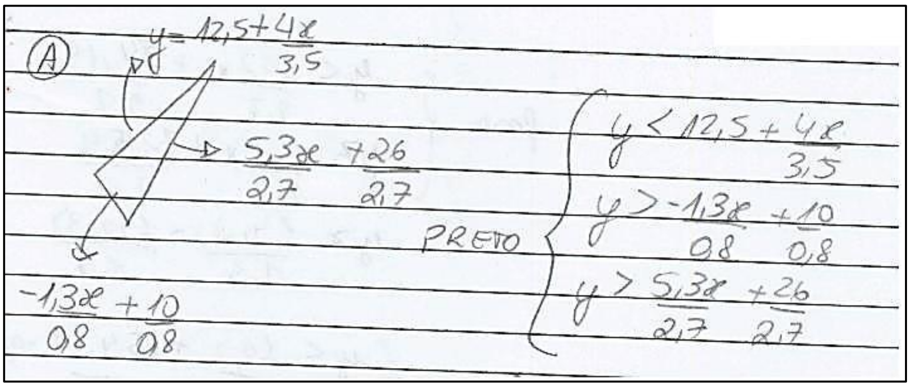


Figura 4.44: Explicação ao aluno para desenhar triângulos.

A obra seguinte (figura 4.45), do mesmo artista, apresenta na maioria de seus elementos gráficos elipses e circunferências. A obra foi reproduzida por uma dupla de alunos da turma A e um aluno da turma B.

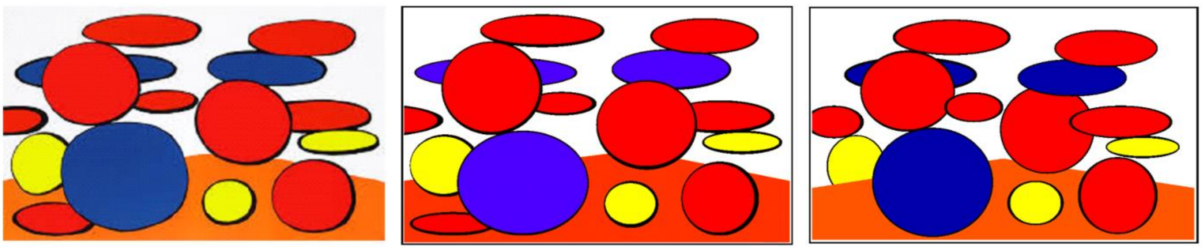


Figura 4.45: Obra de arte de Alexander Calder (à esquerda), reproduções da obra no *GrafEq* por uma dupla da turma A (meio) e um aluno da turma B (à direita).

No desenvolvimento da atividade, o aluno da turma B, para auxiliar na escolha dos pontos, desenhou a obra de arte sobre uma folha de papel milimetrado, conforme a figura 4.46.

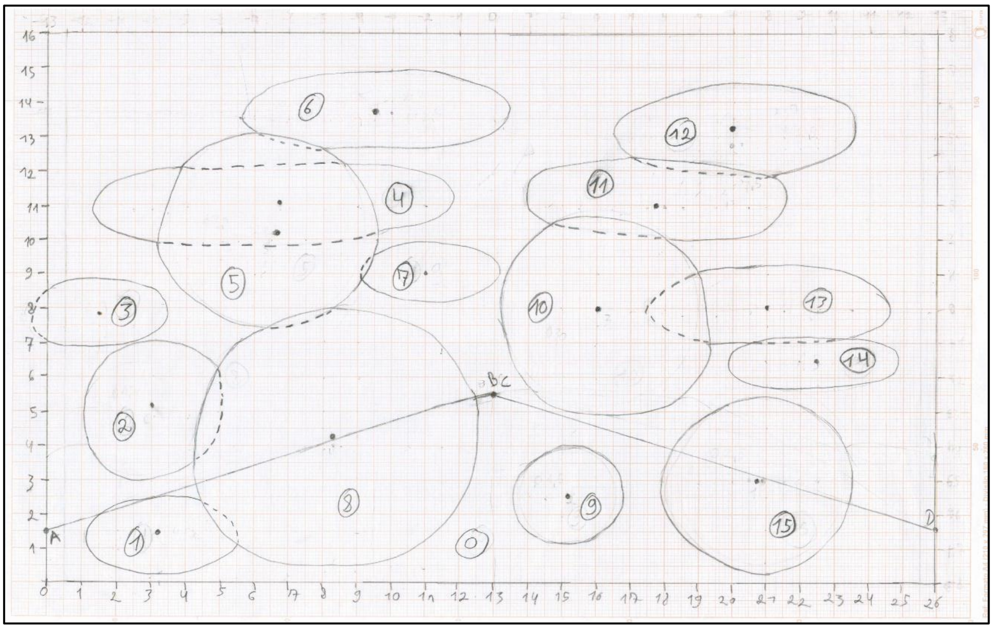


Figura 4.46: Reprodução da obra de arte na folha de papel milimetrado por um aluno da turma B.

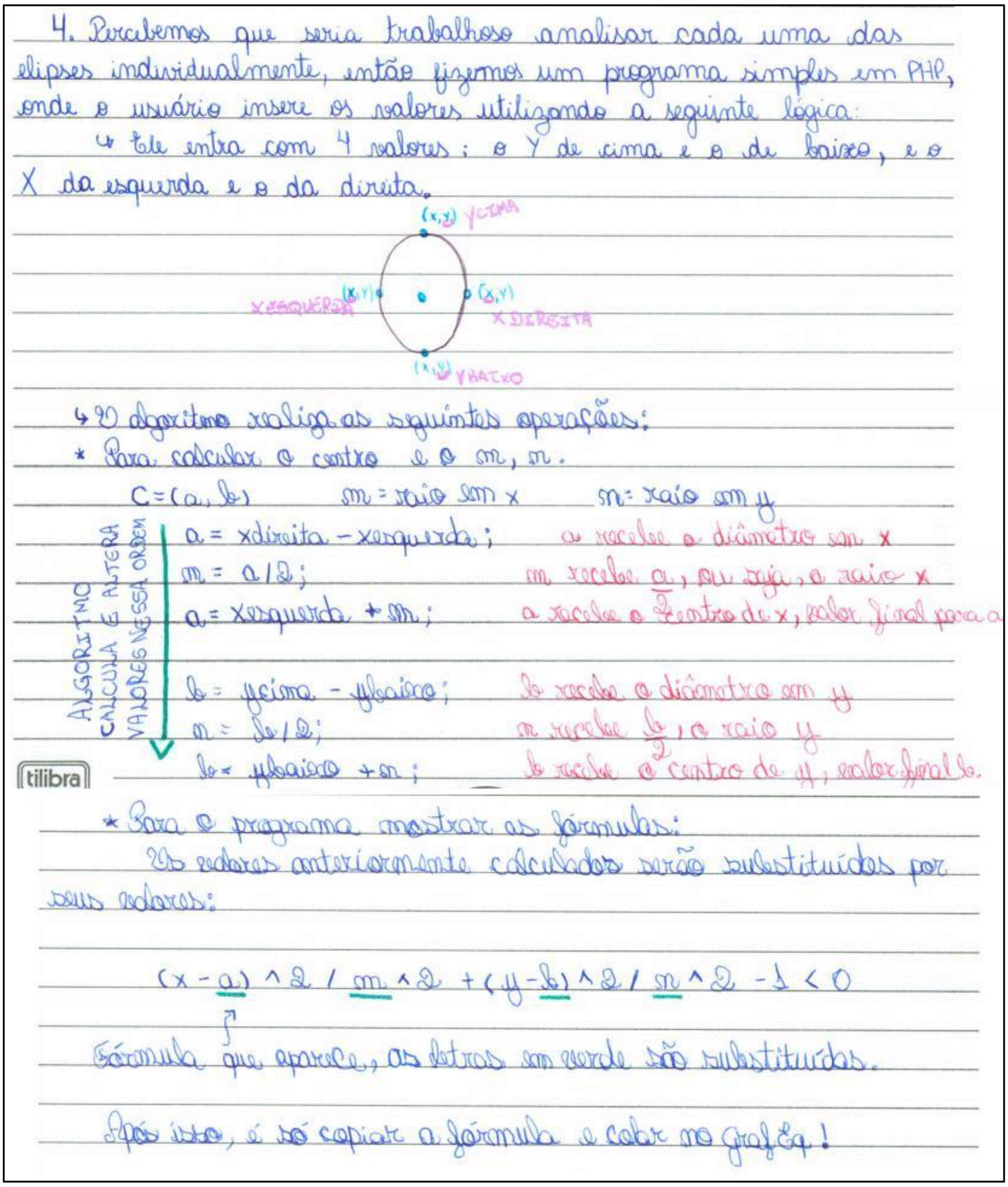
Nos seus registros escritos, percebemos que o aluno utilizou somente a ideia de elipses, escrevendo também aquelas que poderiam ser vistas como circunferência na forma de elipses. Tomou ainda o cuidado, para desenhar as bordas das elipses, fazendo uma preta ao fundo, e a colorida por cima, apenas diminuindo os valores dos denominadores da equação da elipse. A figura 4.47 mostra as relações que o aluno usou para a elipse que identificou na figura anterior como número 1.

1) $$\frac{(x-3,25)^2}{5} + \frac{(y-1,5)^2}{1,4} < 1$$

$$\frac{(x-3,25)^2}{4,6} + \frac{(y-1,5)^2}{1,1} < 1$$

Figura 4.47: Relações para uma das elipses utilizadas pelo aluno da turma B.

A dupla da turma A que reproduziu esta obra, desenhou sobre a folha com o desenho da obra, um plano cartesiano, para dessa forma, escolher os pontos. Apresentamos na figura 4.48, em destaque uma parte do trabalho. Os alunos, que são do curso técnico em informática, criaram um aplicativo que facilitou os cálculos, apresentando a equação da elipse, levando em conta os extremos superiores e laterais de cada elipse.



4. Percebemos que seria trabalhoso analisar cada uma das elipses individualmente, então fizemos um programa simples em PHP, onde o usuário insere os valores utilizando a seguinte lógica:

↳ Ele entra com 4 valores: o Y de cima e o de baixo, e o X da esquerda e o da direita.

↳ O algoritmo realiza as seguintes operações:

* Para calcular o centro e o m, n.

C=(a,b)   m = raio em x   n: raio em y

ALGORITMO CALCULA E ALTERA VALORES NESSA ORDEM

a = xdireita − xesquerda;   a recebe o diâmetro em x
m = a/2;   m recebe a, ou seja, o raio x
a = xesquerda + m;   a recebe o centro de x, valor final para a

b = ycima − ybaixo;   b recebe o diâmetro em y
n = b/2;   n recebe b/2, o raio y
b = ybaixo + n;   b recebe o centro de y, valor final b.

* Para o programa mostrar as fórmulas:

Os valores anteriormente calculados serão substituídos por seus valores:

(x − a) ^ 2 / m ^ 2 + (y − b) ^ 2 / n ^ 2 − 1 < 0

Fórmula que aparece, as letras em verde são substituídas.

Após isso, é só copiar a fórmula e colar no GrafEq!

Figura 4.48: Programação criada pela dupla da turma A para gerar a equação da elipse.

Consideramos que os alunos que reproduziram essa obra atingiram os objetivos da atividade, pois mostraram todos os elementos da obra original, mantendo a proporção e localização de todos os itens, bem como apresentaram de forma clara seus raciocínios na parte escrita. Além disso, percebemos o interesse e criatividade dos alunos da turma A, por envolverem no desenvolvimento da atividade conhecimentos próprio do seu curso, Técnico em Informática.

Algo muito importante a acrescentar aqui é que houve um início de estruturação de raciocínio em forma de algoritmo. Ou seja, os alunos perceberam os parâmetros necessários para se executar comandos repetitivos para produzir elementos distintos de uma mesma família geradora, no caso, das elipses.

Acreditamos que a última obra de Alexander Calder, reproduzida pelos alunos, seja a com elementos gráficos mais complexos, como mostra a figura 4.49. A obra foi reproduzida por uma dupla de alunos da turma A e um aluno da turma B.

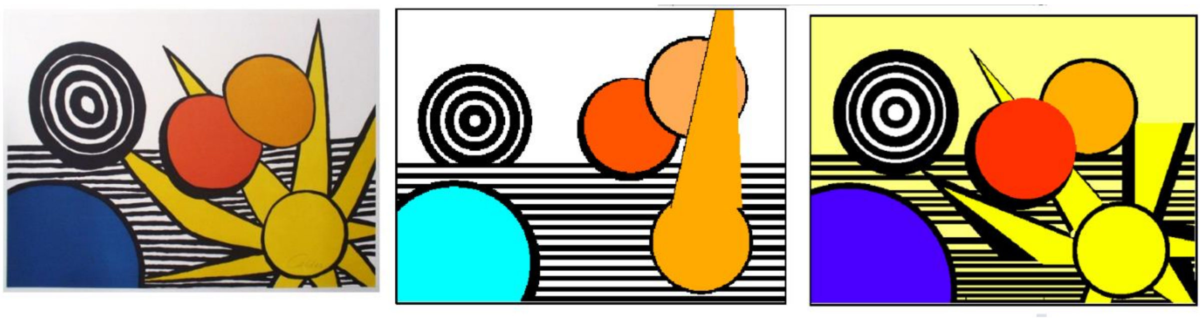
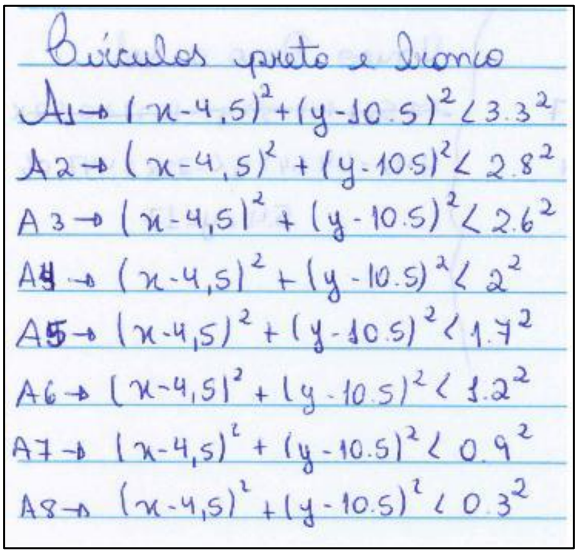


Figura 4.49: Obra de arte de Alexander Calder (à esquerda), reproduções da obra no *GrafEq* por uma dupla da turma A (meio) e um aluno da turma B (à direita).

Nas reproduções acima, percebemos que nenhum dos trabalhos ficou completo. Do trabalho da turma A, que foi desenvolvido por uma dupla, destacamos que, já nos momentos de aula, os alunos não conseguiram trabalhar bem juntos, pois “dividiram” tarefas e não conseguiram gerenciar e se comunicar suficientemente para concluir a atividade. Acreditamos que, para um trabalho como esse, é necessário que juntos os alunos pensem nas relações e nos valores que devem ser utilizados.

No registro escrito da atividade dessa dupla, percebemos que faltou uma organização da imagem no plano cartesiano, embora os alunos tenham registrado alguns valores, provavelmente medidos com régua. Para o único raio do sol que tentaram fazer, percebemos que as contas estavam corretas, mas que não usaram pontos adequados. Percebemos ainda que as circunferências laranjas estão posicionadas de forma diferente que na obra original. A figura 4.50 traz os registros desses alunos para círculos concêntricos pretos e brancos que representaram na obra.



Círculos preto e branco

$A1 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 3.3^2$

$A2 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 2.8^2$

$A3 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 2.6^2$

$A4 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 2^2$

$A5 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 1.7^2$

$A6 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 1.2^2$

$A7 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 0.9^2$

$A8 \rightarrow (x-4,5)^2+(y-10.5)^2 < 0.3^2$

Figura 4.50: Relações para círculos concêntricos da obra anterior, realizadas pelos alunos da turma A.

Mesmo que nem todos os círculos possuam a mesma variação do raio, como os alunos desenharam, é interessante observar nas relações da figura acima que a única mudança de uma relação para outra são as medidas à direita da desigualdade, que equivalem ao raio. Apesar dos alunos da turma A não terem desenvolvido toda a atividade, percebemos que eles dominam o conteúdo necessário. Mas, não atingiram o objetivo da atividade na reprodução da obra.

O trabalho do aluno da turma B está mais completo do que o anterior, mas ainda assim, o aluno apresentou dificuldades no desenvolvimento dos raios do sol. Destacamos que para encontrar as equações das retas, esse aluno primeiramente o fez desenvolvendo determinantes, e após alguns cálculos passou a usar as fórmulas para encontrar o coeficiente angular e a equação reduzida. Na figura 4.51 podemos observar os dois tipos de resoluções do mesmo aluno.

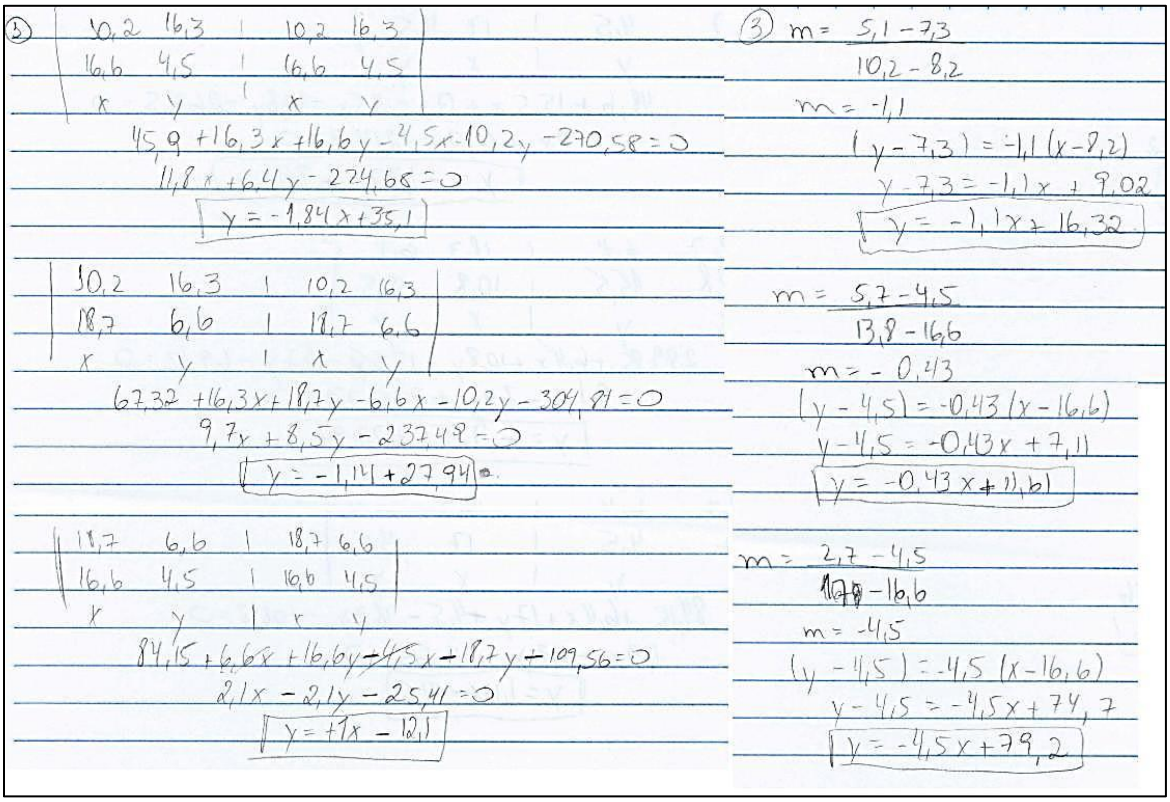


Figura 4.51: Duas formas usadas para encontrar equações reduzidas.

Consideramos que o trabalho da turma B atingiu os objetivos, mesmo com a falta de alguns elementos gráficos.

4.5 Obra de Kandinsky e finalização

Finalizamos a análise de dados apresentando uma única obra selecionada do artista Wassily Kandinsky. Escolhemos essa obra, pois ela apresenta todos elementos que estudamos em nossas atividades, e tem um grau de dificuldade um pouco maior. Na figura 4.52 podemos observar a obra e a reprodução obtida por um aluno da turma B.

Consideramos a reprodução dessa obra de arte completamente satisfatória, pois o aluno que a reproduziu apresentou todos os elementos da obra original de tal forma que poderíamos inclusive confundi-las. Como essa obra é mais rica em detalhes, o aluno optou por graduar a imagem da obra a cada 0,5cm, como mostra a figura 4.53.

Figura 4.52: Obra de Kandinsky (à esquerda) e reprodução do aluno da turma B (à direita).

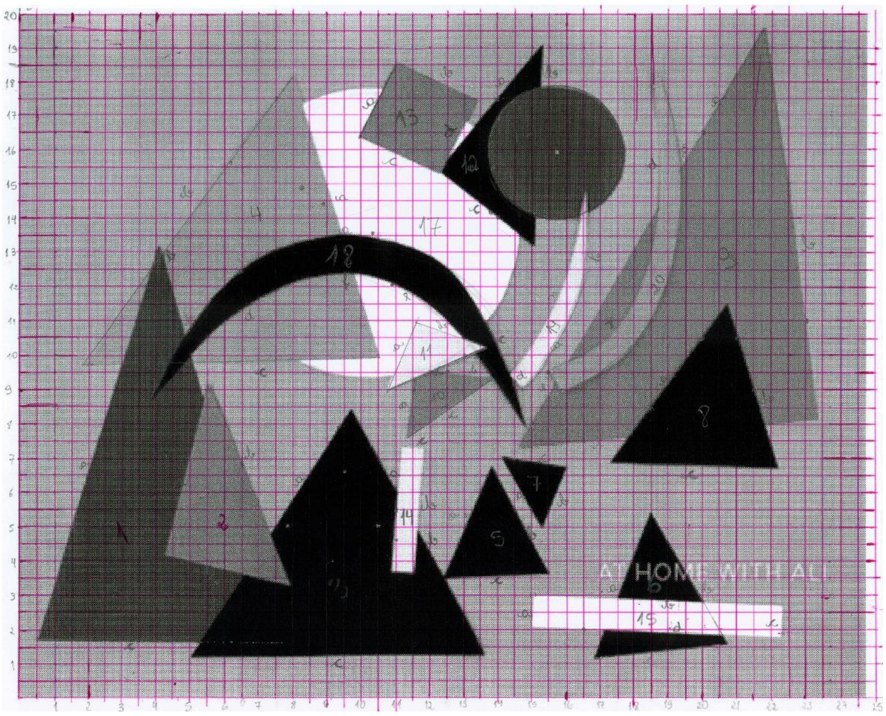
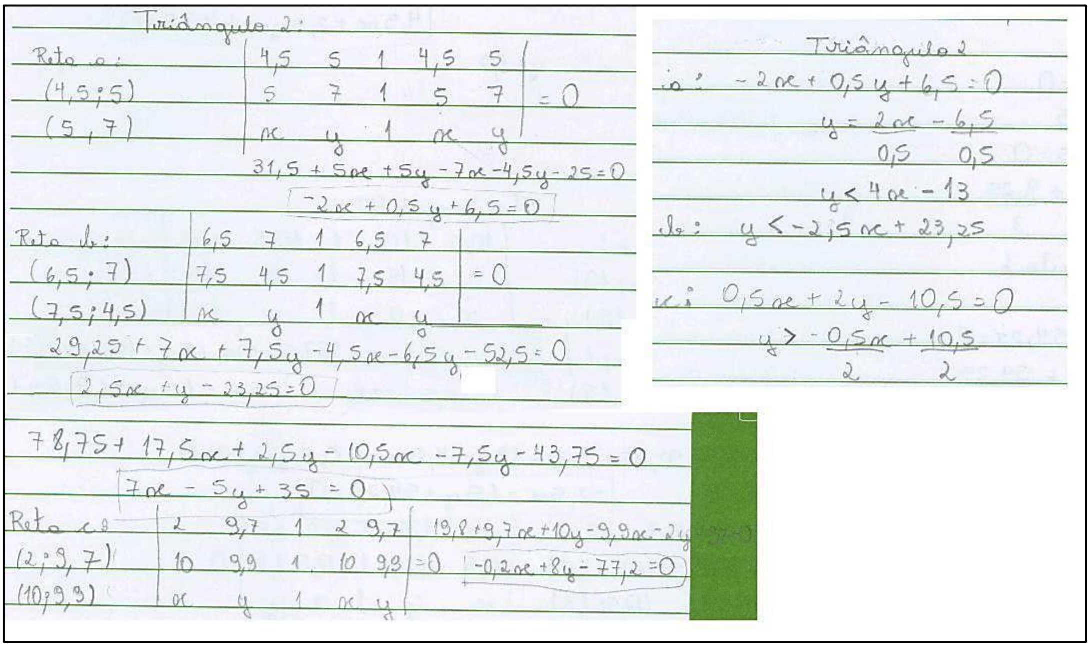


Figura 4.53: Organização do aluno com a obra de arte no plano cartesiano.

Podemos observar na figura 4.53, que o aluno também numerou os elementos que desenhou. Vamos mostrar as relações que ele encontrou para o triângulo 2 e para o arco de circunferência numerado como relação 18.

Para o triângulo, podemos observar na figura 4.54 que o aluno utilizou o método para encontrar a equação geral pelo cálculo de determinantes, a após, organizou as relações com a equação reduzida.



Triângulo 2:

Reta a: (4,5;5) (5,7)

$$\begin{vmatrix} 4,5 & 5 & 1 & 4,5 & 5 \\ 5 & 7 & 1 & 5 & 7 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$$

$31,5 + 5x + 5y - 7x - 4,5y - 25 = 0$

$\boxed{-2x + 0,5y + 6,5 = 0}$

Reta b: (6,5;7) (7,5;4,5)

$$\begin{vmatrix} 6,5 & 7 & 1 & 6,5 & 7 \\ 7,5 & 4,5 & 1 & 7,5 & 4,5 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$$

$29,25 + 7x + 7,5y - 4,5x - 6,5y - 52,5 = 0$

$\boxed{2,5x + y - 23,25 = 0}$

$78,75 + 17,5x + 2,5y - 10,5x - 7,5y - 43,75 = 0$

$\boxed{7x - 5y + 35 = 0}$

Reta c: (2;9,7) (10;9,9)

$$\begin{vmatrix} 2 & 9,7 & 1 & 2 & 9,7 \\ 10 & 9,9 & 1 & 10 & 9,9 \\ x & y & 1 & x & y \end{vmatrix} = 0$$

$19,8 + 9,7x + 10y - 9,9x - 2y \ldots$ $\boxed{-0,2x + 8y - 77,2 = 0}$

Triângulo 2

a: $-2x + 0,5y + 6,5 = 0$

$y = \frac{2x}{0,5} - \frac{6,5}{0,5}$

$y < 4x - 13$

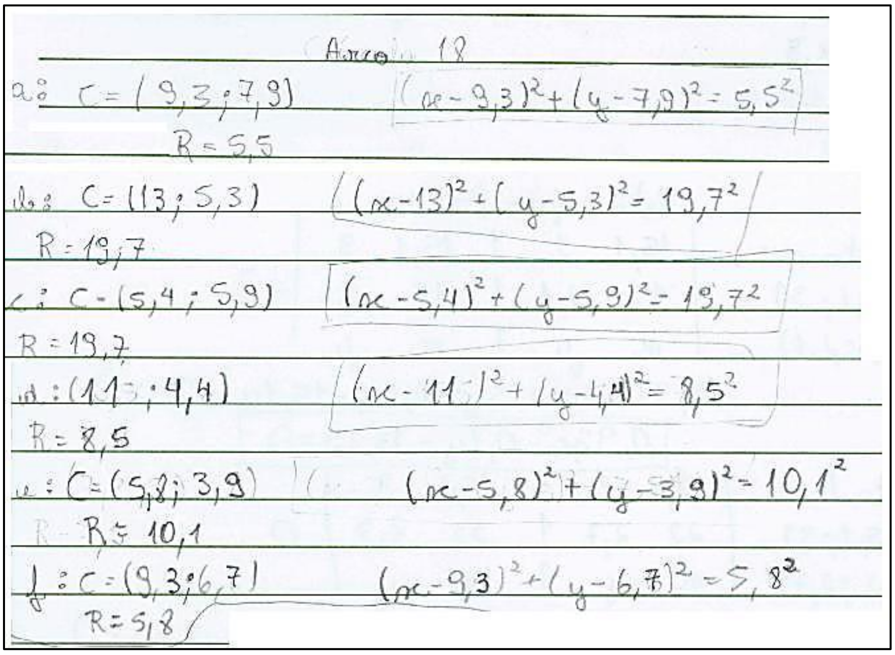
b: $y < -2,5x + 23,25$

c: $0,5x + 2y - 10,5 = 0$

$y > -\frac{0,5x}{2} + \frac{10,5}{2}$

Figura 4.54: Relações para encontrar um triângulo da obra.

Observamos que o aluno demostrou facilidade no desenvolvimento da atividade, apresentando clareza nas demais relações escritas. As relações para o arco, estranhamos inicialmente nos registros escritos a presença de 6 equações, onde a princípio acreditamos que apenas 2 fossem suficientes. A figura 4.55 mostra as relações que o aluno escreveu.



Arco 18

a: C = (9,3;7,9) R = 5,5 $\quad (x-9,3)^2 + (y-7,9)^2 = 5,5^2$

b: C = (13;5,3) R = 19,7 $\quad (x-13)^2 + (y-5,3)^2 = 19,7^2$

c: C = (5,4;5,9) R = 19,7 $\quad (x-5,4)^2 + (y-5,9)^2 = 19,7^2$

d: (11;4,4) R = 8,5 $\quad (x-11)^2 + (y-4,4)^2 = 8,5^2$

e: C = (5,8;3,9) R = 10,1 $\quad (x-5,8)^2 + (y-3,9)^2 = 10,1^2$

f: C = (9,3;6,7) R = 5,8 $\quad (x-9,3)^2 + (y-6,7)^2 = 5,8^2$

Figura 4.55: Relações do aluno para construir uma arco.

Investigando o motivo de tantas relações no arquivo do aplicativo *GrafEq*, descobrimos que o aluno, provavelmente para obter uma aproximação maior em relação a obra original, dividiu o arco em segmentos e os desenhou separadamente, como mostramos na figura 4.56.

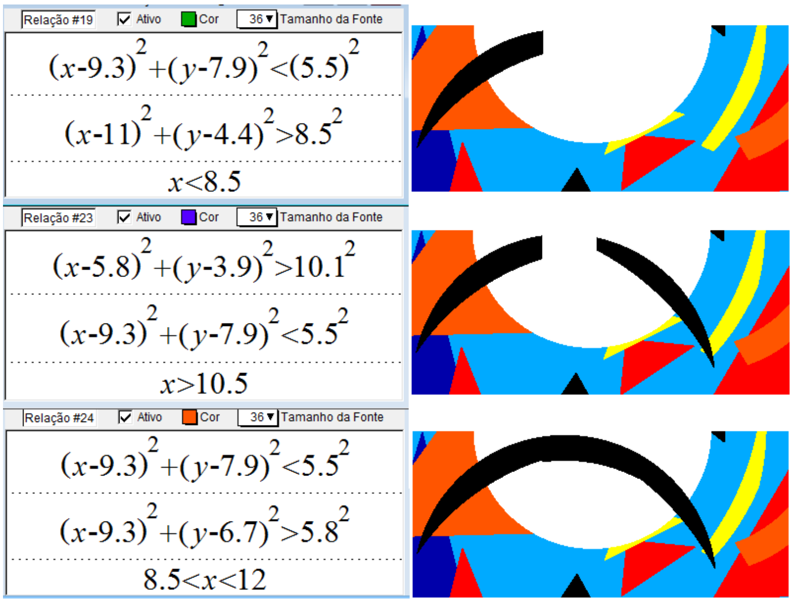


Figura 4.56: Relações do arco no aplicativo *GrafEq*.

Encerramos nossa análise, observando que a atividade final abrangeu os itens que abordamos nas atividades anteriores do conteúdo de Geometria Analítica. Observamos o desenvolvimento de retângulos, triângulos, circunferências e elipses, para os quais os alunos individualmente organizaram suas relações.

Destacamos também que percebemos um entusiasmo na maioria dos alunos em concluir a atividade proposta, e ao conversarmos com eles no final das atividades, relataram que gostaram principalmente da forma diferenciada de ver os conteúdos.

Apresentamos ainda, o quadro 2, que apresenta um resumo dos itens avaliados e o comportamento dos alunos em relação a cada um desses itens, dividindo conforme o autor de cada obra.

Quadro 2 – resumo das avaliações realizadas, segundo o autor e número de reproduções obtidas.

Autor	Proporção	Fidelidade	Cálculos	Organização
Rubem Valentim 5 obras 9 reproduções	7 reproduções mantiveram a proporção.	7 reproduções apresentaram todos elementos da obra original.	8 trabalhos apresentaram todos os cálculos.	6 trabalhos estavam bem organizados.
Auguste Herbin 5 obras 7 reproduções	7 reproduções mantiveram a proporção.	5 reproduções apresentaram todos elementos da obra original.	5 trabalhos apresentaram todos os cálculos.	6 trabalhos estavam bem organizados.
Alexander Calder 4 obras 8 reproduções	7 reproduções mantiveram a proporção.	5 reproduções apresentaram todos elementos da obra original.	6 trabalhos apresentaram todos os cálculos.	5 trabalhos estavam bem organizados.
Kandinsky 1 obra 1 reprodução	Manteve a proporção.	Apresentou todos elementos.	Apresentou todos os cálculos.	Estava bem organizado.
TOTAL 15 obras 25 reproduções	22 mantiveram a proporção com a obra original. (88%)	18 apresentaram todos elementos da obra original. (72%)	20 apresentaram todos os cálculos. (80%)	18 estavam bem organizados. (72%)

Dessa forma, seguimos com as conclusões a respeito de toda análise aqui desenvolvida.

CONCLUSÃO

O objetivo principal desse trabalho foi verificar a aplicação de uma proposta de atividades sobre Geometria Analítica a alunos do Ensino Médio, através da reprodução de obras de arte com o software *GrafEq*. Para essa averiguação, pesquisamos sobre o uso de tecnologias e as influências da Arte na Matemática. Também realizamos um levantamento de trabalhos acadêmicos que tratavam a cerca desse assunto e sobre os conteúdos de Geometria Analítica que poderíamos adequar à proposta. E, a partir desses dados criamos as atividades que foram aplicadas em duas turmas de 3º ano do Ensino Médio, com 34 alunos no total.

As atividades foram aplicadas ao longo de 5 semanas e abordavam a compreensão do plano cartesiano, o estudo de retas, as condições de paralelismo e perpendicularismo e a equação reduzida da circunferência e da elipse. A maior parte das atividades foi abordada a partir de uma obra da arte, que ao final de cada etapa, era reproduzida no aplicativo *GrafEq*. Após o desenvolvimento das atividades relacionadas aos conteúdos, os alunos foram desafiados a reproduzirem uma obra de arte diferente das trabalhadas anteriormente, sem muitas interferências.

No capítulo 3, apresentamos resultados relevantes sobre o tipo de raciocínio empregado pelos alunos para resolver a atividade proposta. Além disso, o relato das aplicações com os alunos. No capítulo 4 analisamos a atividade final, de reproduzir uma obra de arte, proposta aos alunos.

Nossa intenção ao iniciar esse trabalho foi de responder as seguintes questões: Como as tecnologias podem auxiliar na proposta de ensino-aprendizagem de matemática? O software é adequado para o ensino desses conteúdos? A proposta desafiante serviu de motivação aos alunos? Quais foram as principais dificuldades durante o desenvolvimento da atividade?

Assim, após a aplicação da proposta didática, podemos concluir que os alunos tiveram êxito ao reproduzir uma obra de arte, apresentando trabalhos ricos em detalhes e réplicas cujos elementos geométricos foram muito próximos das obras originais. O fato de, em sua maioria, os alunos terem alcançado os objetivos propostos, nos leva a pensar que as atividades previamente realizadas foram importantes para compreensão dos conteúdos trabalhados.

E a partir disso, percebemos, concordando com os autores citados no referencial, que as tecnologias podem auxiliar em propostas de ensino-aprendizagem na disciplina de Matemática. Nossa sugestão abordou os conteúdos tradicionais utilizando o software *GrafEq*, e esse fato facilitou aos alunos a sua compreensão, e ainda a relação e localização de diferentes itens no plano cartesiano. Passados os primeiros momentos enquanto os alunos se adaptaram ao software, eles criaram certa autonomia em responder as questões das atividades e principalmente em desenvolver a atividade final.

O fato dos alunos não apresentarem dificuldades ao utilizarem o software *GrafEq*, nos faz concluir também que esse software é adequado para o ensino desse conteúdo. Também destacamos que por ser um aplicativo executável, é de fácil acesso e instalação, e acreditamos que esse motivo foi um facilitador, visto que muitos alunos realizaram parte das atividades de reprodução das obras de arte em casa.

Conforme já analisamos no capítulo anterior, os trabalhos apresentados pelos alunos para a atividade final foram em sua maioria muito satisfatórios. Acreditamos que por mostrarem tal envolvimento, os alunos se sentiram de fato motivados e desafiados com a atividade.

Certamente, nem todos os momentos foram fáceis. Percebemos dificuldades nos primeiros encontros, até que os alunos se acostumassem com a nova dinâmica das aulas, que acabava por ser diferente em cada encontro. Algumas vezes eles trabalhavam sozinhos, outras eles tinham que ouvir explicações para compreender os conteúdos envolvidos nas atividades, e muitas vezes tiveram que aguardar até que pudessem ser atendidos e ter suas dúvidas sanadas. Também encontramos resistências nos alunos a sair da rotina, assim como, quando finalizamos as atividades, alguns alunos comentavam que gostariam de continuar a ir ao laboratório de informática para “aula de *GrafEq*”, como denominaram esses encontros na sala de informática.

Um fato que ressaltamos ao concluir essa pesquisa, é que não é suficiente apenas levar os alunos ao laboratório de informática. Para obtermos sucesso, as atividades foram planejadas para envolver os alunos e contar com a participação e com as ideias deles. Aqui encontramos uma das dificuldades, algumas vezes repetimos explicações individualmente, mostrando para cada um as relações necessárias. É um trabalho diferente, mais exigente que aqueles que geralmente desenvolvemos na sala de aula. O trabalho aqui realizado traz uma nova possibilidade para o trabalho dos professores com alunos do Ensino Médio. Deixamos nossa atividade a disposição para que colegas professores busquem, modifiquem e melhorem essa proposta, de forma que cada vez mais possamos melhorar o processo de ensino-aprendizagem nas nossas escolas.

Salientamos que a proposta também precisa ser adaptada conforme o grupo de alunos com os quais ela será desenvolvida. Em grupos maiores, por exemplo, a dinâmica talvez não possa ser realizada da forma que fizemos aqui, pelo fato de que com poucos alunos, sempre que surgia alguma dúvida estávamos atentos para auxiliar. Esperamos ainda, que nosso trabalho possa colaborar com as discussões sobre o Ensino de Matemática, incentivando outros professores a fazer uso de tecnologias para o ensino.

REFERÊNCIAS

ANTONIAZZI, H. M. **Matemática e arte: uma associação possível**. 2005. 135 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2005.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática.** Vol. 3. São Paulo: Moderna, 2013.

BLANC. In: **Wikipédia: a enciclopédia livre. Wikiart**, 2014. Disponível em http://www.wikiart.org/en/auguste-herbin/blanc-1947. Acesso: novembro de 2014.

CALDER, A. **EL ARTE COM ALEXANDRE CALDER**, 2013. Disponível em http://arablogs.catedu.es/blog.php?id_blog=1594&id_articulo=160413. Acesso: novembro de 2014.

CAVALCANTI, J.D. **Mondrian: a aventura espiritual da pintura**, 2013. Disponível em http://www.digestivocultural.com/colunistas/coluna.asp?codigo=3676&titulo=Mondrian:_a_aventura_espiritual_da_pintura. Acesso: novembro de 2014

CHAMPETIER, M. **Gallerie Michele Champetier**. 2003. Disponível em: http://www.mchampetier.com/oeuvres-vendues-de-Alexander-Calder-10-3-art-et-estampes.html. Acesso: novembro de 2014.

CRUVINEL, L.C.C. **Revista O Caixote**, 2001. Disponível em http://www.ocaixote.com.br/galeria1/GrubemValentm.html. Acesso: novembro de 2014.

DANTE, L. R. **Matemática, Contexto e Aplicações.** Vol. 3. São Paulo: Ática, 2010.

FAINGUELERNT, E.K.; NUNES, K.R.A. **Fazendo arte com matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

GOULART, J.B. **O estudo da equação $Ax^2 + By^y + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ utilizando o software *GrafEq* – uma proposta para o Ensino Médio**. 2009. 160 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

GRAFEQ, Pedagoguery Software Inc. Disponível em http://www.peda.com/*GrafEq*/. Acesso: março de 2014.

GRAVINA, M.A.; BASSO, M.V.de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, et al. (Orgs.) **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para a formação de professor.** Porto Alegre: Evangraf, 2012, p. 11-35.

GUTEMBERG, Blog do. **Rubem Valentim: 90 anos de nascimento**, 2012. Disponível em: http://blogdogutemberg.blogspot.com.br/2012/11/rubem-valentim-90-anos-de-nascimento-1.html. Acesso: Novembro, 2014.

IEZZI, G. et al. **Matemática, ciência e aplicação.** Vol. 3. São Paulo: Saraiva, 2013.

MACHE I, Die. In: **Wikipédia: a enciclopédia livre: Wikiart**, 2014. Disponível em: http://www.wikiart.org/en/auguste-herbin/di-mache-1-1950 Acesso: novembro de 2014.

MIZRAHI, M. **Galeria Espaço Arte M. Mizrahi**, 2001. Disponível em http://www.espacoarte.com.br/artistas/luiz-roberto-lopreto?id=647. Acesso: novembro de 2014.

NAVARRO, E. P. **O uso do *Geogebra* no Ensino da Matemática com atividades de aplicação em Geometria Analítica: O ponto e a reta.** 2013. 60 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Fundação Universidade Federal de Rondônia. Porto Velho, 2013.

NUDE. In: **Wikipédia: a enciclopédia livre. Wikiart**, 2014. Disponível em: http://www.wikiart.org/en/auguste-herbin/nude-1960. Acesso: novembro de 2014.

OLIVEIRA, F. D. M. **O software *Geogebra* como ferramenta para o ensino da Geometria Analítica.** 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Mossorá, 2014.

PABST, J. **Artnet Wordwibe Corporation**, 2009a. Disponível em: http://www.artnet.com/artists/alexander-calder/bulles-rouge-et-blue-red-and-blue-bubbles-a-HoNZtBOm_EKne9XfsNsoCw2. Acesso: novembro de 2015.

PABST, J. **Artnet Wordwide Corporation**, 2009b. Disponível em: http://www.artnet.com/artists/alexander-calder/star-a-6XNGqWxD7fF4p2oNF69Y2g2

PAIS, L.C. **Educação Escolar e as Tecnologias da Informática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

PEARMAN, E. **Abacus Galerry**, 1997. Disponível em http://www.abacus-gallery.com/cgi-bin/shop/shop.pl?fid=1303968380&cgifunction=form. Acesso: novembro de 2014.

ROGAL, R. **Rogallery**, 2014. Disponível em http://rogallery.com/Herbin_Auguste/Herbin_Auguste-plastiqueII.html. Acesso: novembro de 2014.

SANTOS, R.de S. **Tecnologias digitais na sala de aula para aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica: manipulações no software *GrafEq*.** 2008. 137 p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008.

SEGURA, C.S.C. **Releitura de obras de arte pelo viés da Geometria Analítica: uma proposta interdisciplinar para o ensino da Matemática**. 2013. 111 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2008.

SERAFIM, M.L.; SOUSA, R.P.de S. Multimídia na Educação: o vídeo digital integrado ao contexto escolar. In: SOUSA, R.P. de; MOITA, F.M.C. da S.C.; CARVALHO, A.B.G. **Tecnologias Digitais na Educação.** Campinas Grande: EDUEPB, 2011. Disponível em http://static.scielo.org/scielobooks/6pdyn/pdf/sousa-9788578791247.pdf, acessado em 14/12/14.

TAJRA, S.F. **Informática na Educação**. São Paulo: Érica, 2013.

TIMM, N. **Rubem Valentim**, 2011. Disponível em http://www.nadiatimm.com/nt01/index.php?option=com_content&view=article&id=204:rubem-valentim&catid=38:artemania&Itemid=57. Acesso: novembro de 2014.

VALEMTIM. **Guia de Brasília**, 2008a. Disponível em http://www.guiadebrasilia.com.br/cidade/letras/rubem/rio_01.html. Acesso: novembro 2014.

VALENTIM, Rubem. **Acervo da Arte**, 2008b. Disponível em http://www.acervodearte.com.br/acervo/ver_obra.php?acervo=2842. Acesso: novembro de 2014

VALENTIM, Rubem. **Contemporarte Galeria Online**, 2014. Disponível em http://www.contemporarte.com.br/loja/obras?manufacturer=78&mode=list. Acesso: novembro de 2014.

WRIGHT, A. **Kandinsky colagem**, 2012. Disponível em http://www.athomewithali.net/2012/05/kandinsky-collage.html. Acesso em Novembro de 2014.

ANEXOS

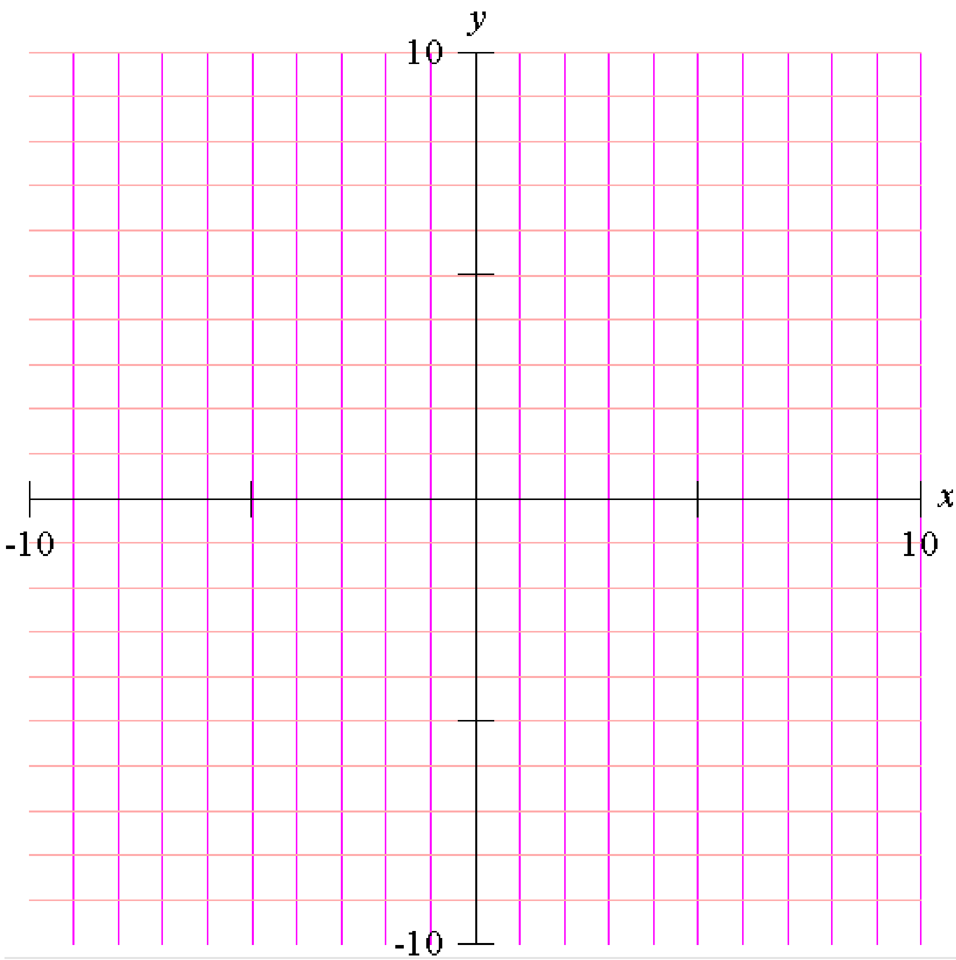
Anexo A – Atividades sobre o estudo de retas

Atividade 1:

a) Abra o software *GrafEq*, e digite uma equação de duas variáveis de sua escolha.

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades. O arquivo deve ser salvo com seu nome e turma)

b) Após discussão em grupo, registre a equação que você escolheu, e reproduza o gráfico no plano cartesiano abaixo.



Atividade 2:

a) Plote o gráfico da equação: $y = 3$. Qual o gráfico obtido?

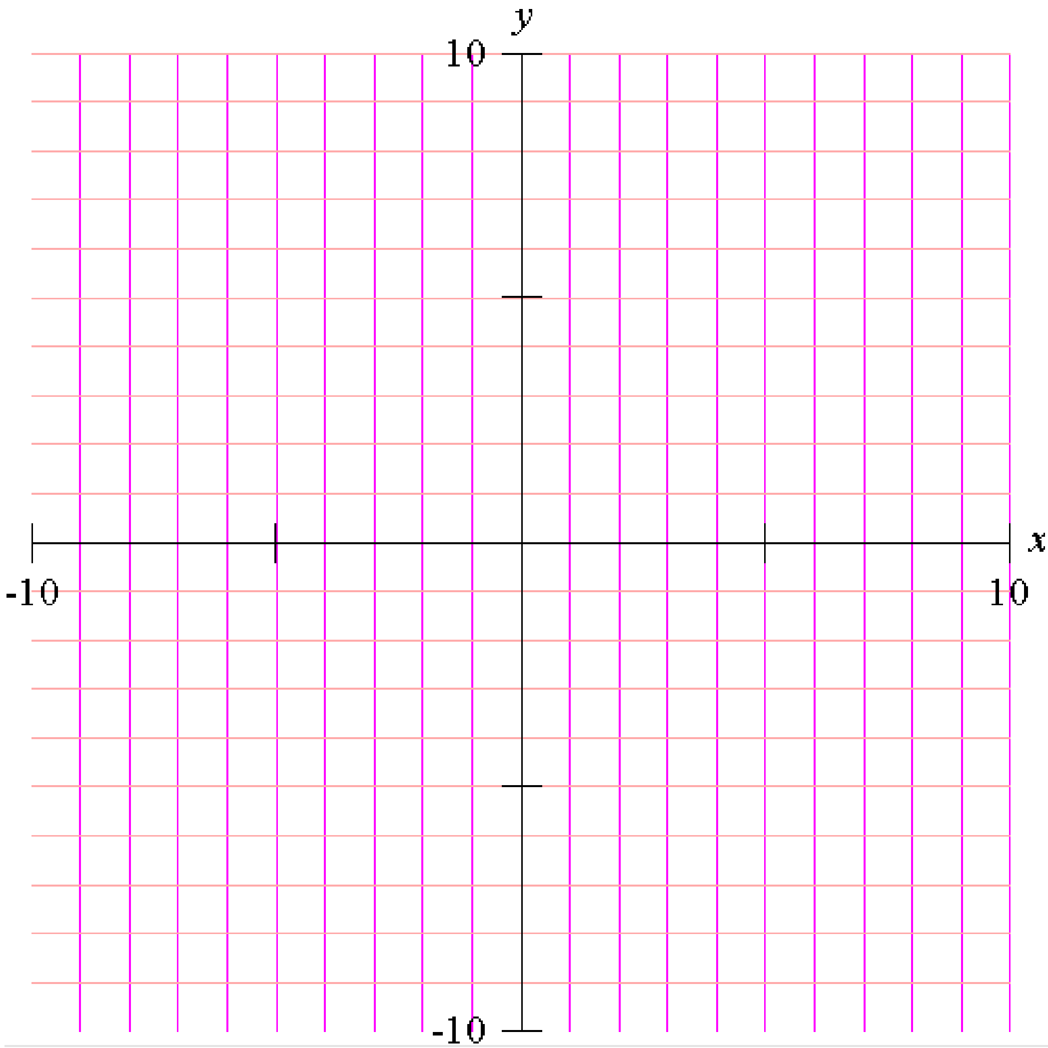
(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

b) Plote o gráfico da inequação $y < 3$. Qual a diferença entre esse e o anterior?

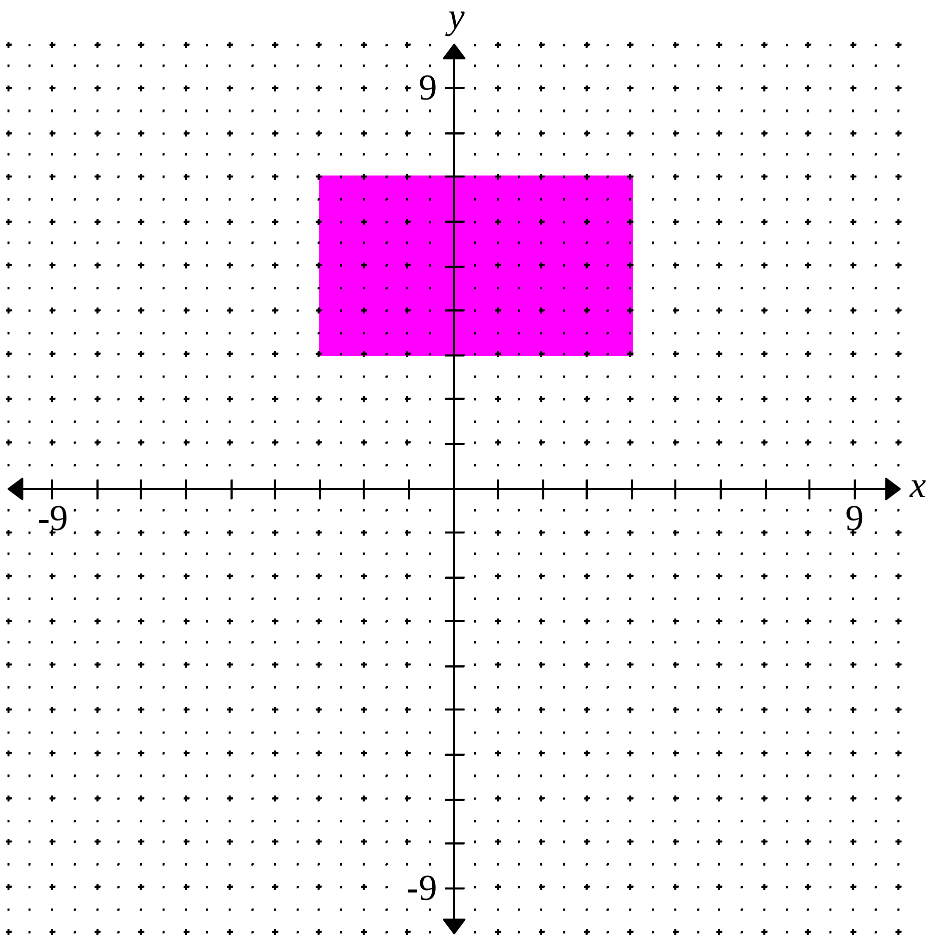
(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

c) Você consegue imaginar o que irá acontecer ao plotar os gráficos $x = 3$ e $x > 3$? Desenhe no plano cartesiano abaixo e após verifique plotando os gráficos no *GrafEq*.

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)



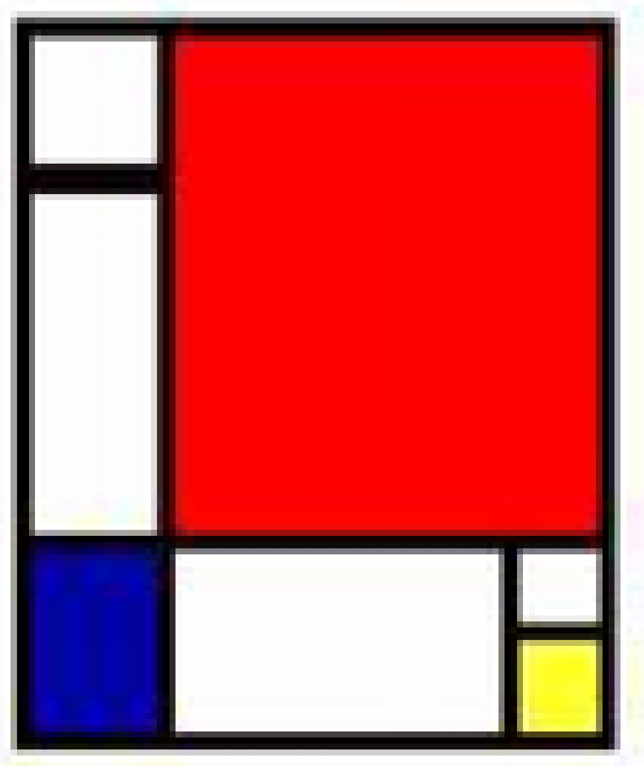
d) Com as ideias anteriores, descubra quais devem ser as inequações usadas para representar o retângulo abaixo:



Atividade 3:

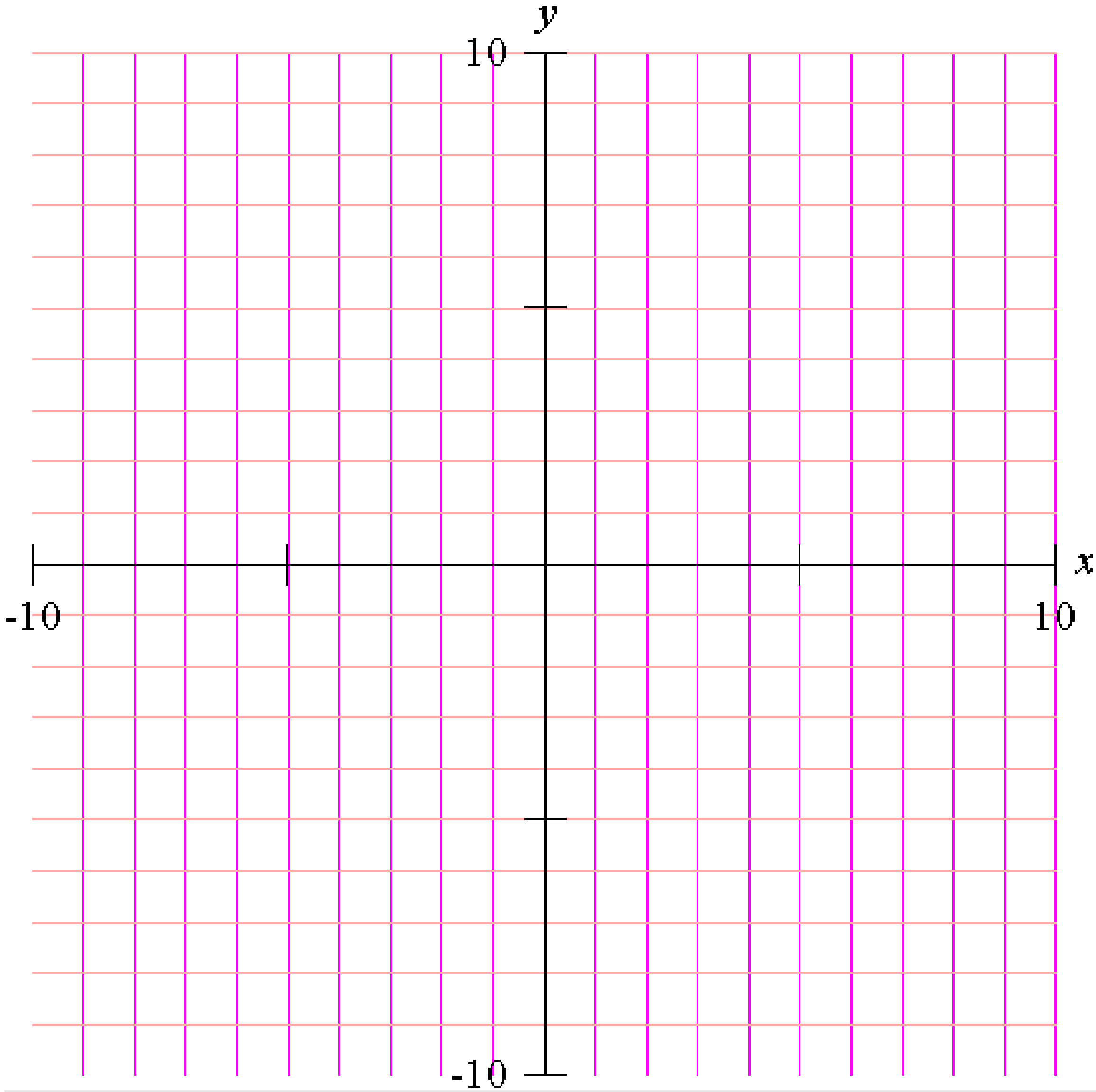
Realizando algumas pesquisas na rede mundial de computadores (internet), podemos encontrar muitas obras de artes que apresentam elementos como os que acabamos de desenhar.

Um exemplo são algumas obras de Piet Cornelis Mondrian, um pintor neerlandês modernista. Na figura abaixo, uma de suas obras, percebemos que ela é formada apenas por retas.



Uma pergunta que surge é a seguinte: Será que conseguimos reproduzir essa obra utilizando o aplicativo *GrafEq*?

a) Registre no plano cartesiano abaixo um esboço da obra de arte acima para construir posteriormente usando o *GrafEq*.



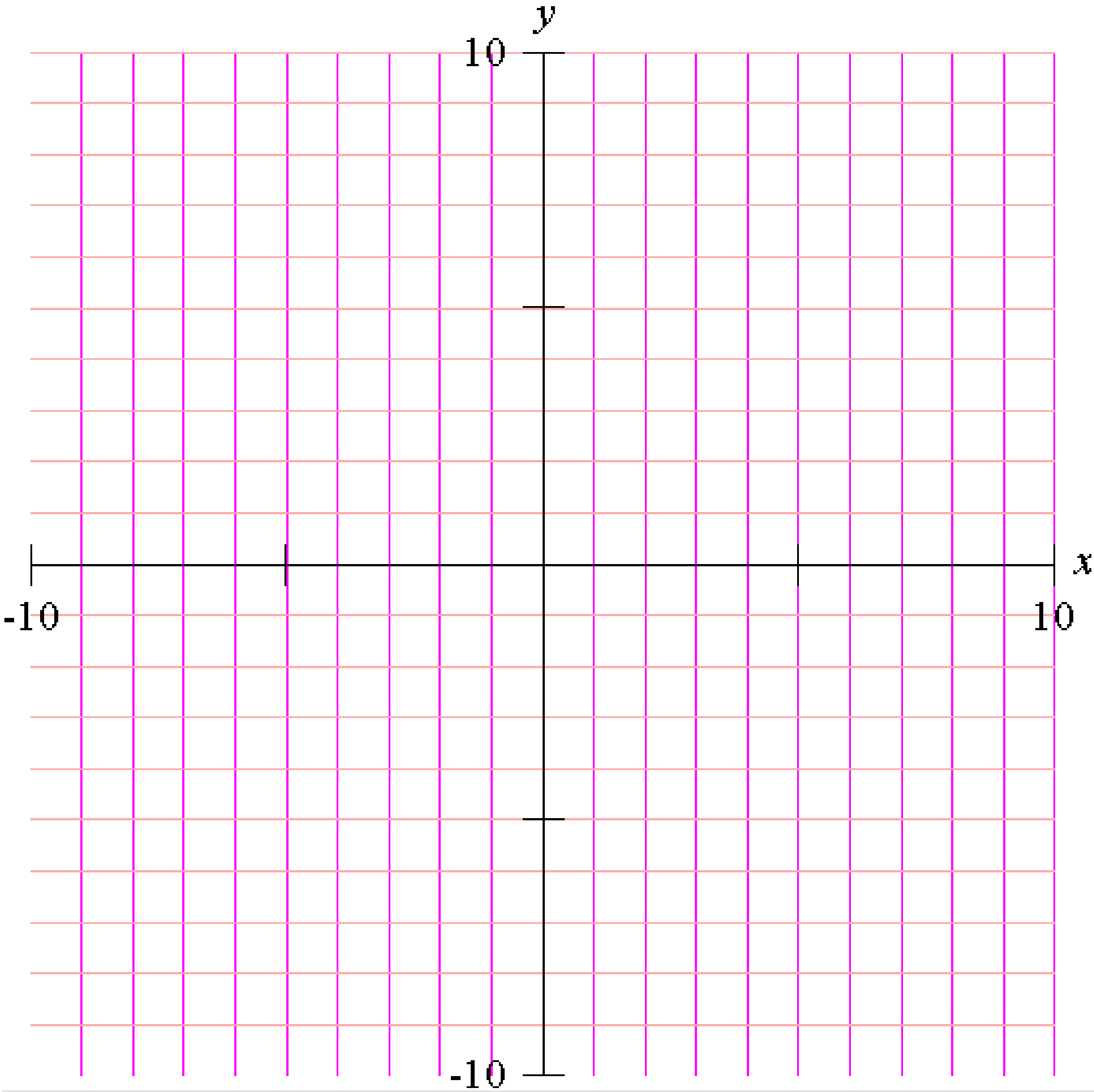
b) Usando as relações, reproduza a obra acima no *GrafEq*.

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

Atividade 4:

Além de Piet Cornelis Mondrian, outro artista que contribui na nossa proposta por apresentar em suas obras elementos geométricos é Rubem Valentim. Ele foi um pintor, escultor, gravador e professor baiano, além de ser considerado um dos grandes pintores construtivistas brasileiros. A obra na figura seguinte é desse artista. A proposta dessa atividade é representar essa obra, utilizando o aplicativo *GrafEq*.

a) Como realizado anteriormente, em um primeiro momento, reproduza a obra no plano cartesiano.



b) Quais relações da obra você consegue identificar? E os demais itens, como podemos representar?

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

Atividade 5:

Utilizando o aplicativo *GrafEq*, plote as seguintes retas:

a) $x - 2y - 3 = 0$

b) $3x - y + 4 = 0$

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

Observe que as equações acima representam retas, e ambas estão na forma geral. Uma reta na foram geral sempre terá a forma $ax + by + c = 0$, onde a, b e c são números reais.

c) Responda: Porque e quando é fácil de usar e equação geral da reta?

d) Conclua a atividade 4.

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

Atividade 6:

1. Desenhe no *GrafEq* as seguintes equações:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = 3x + 4$

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

As equações desenhadas acima representam retas, e estão representadas na forma reduzida. A equação reduzida da reta terá sempre a forma $y = mx + n$. Dessa forma, identificamos dois elementos importantes da reta: o m que é o coeficiente angular e o n que é o coeficiente linear.

2. Plote no *GrafEq* as seguintes retas, num mesmo sistema de eixos cartesianos:

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

$y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$, $y = 4x + 1$, $y = 10x + 1$.

3. Responda as seguintes perguntas:

a) O que acontece quando mudamos na equação reduzida o valor de m?

b) Plote no *GrafEq* as retas para valores de $\mathrm{m} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{10}$. O valor de m está aumentando ou diminuindo? O que aconteceu com a reta?

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

c) Plote no *GrafEq* as retas para valores de $\mathrm{m} = -1, -2, -3$ e -4. O que aconteceu para valores de m negativos?

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

4. Plote no *GrafEq* as seguintes retas, num mesmo sistema de eixos cartesianos:

(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

$y = x - 2$, $y = x - 1$, $y = x$, $y = x + 1$, $y = x + 2$.

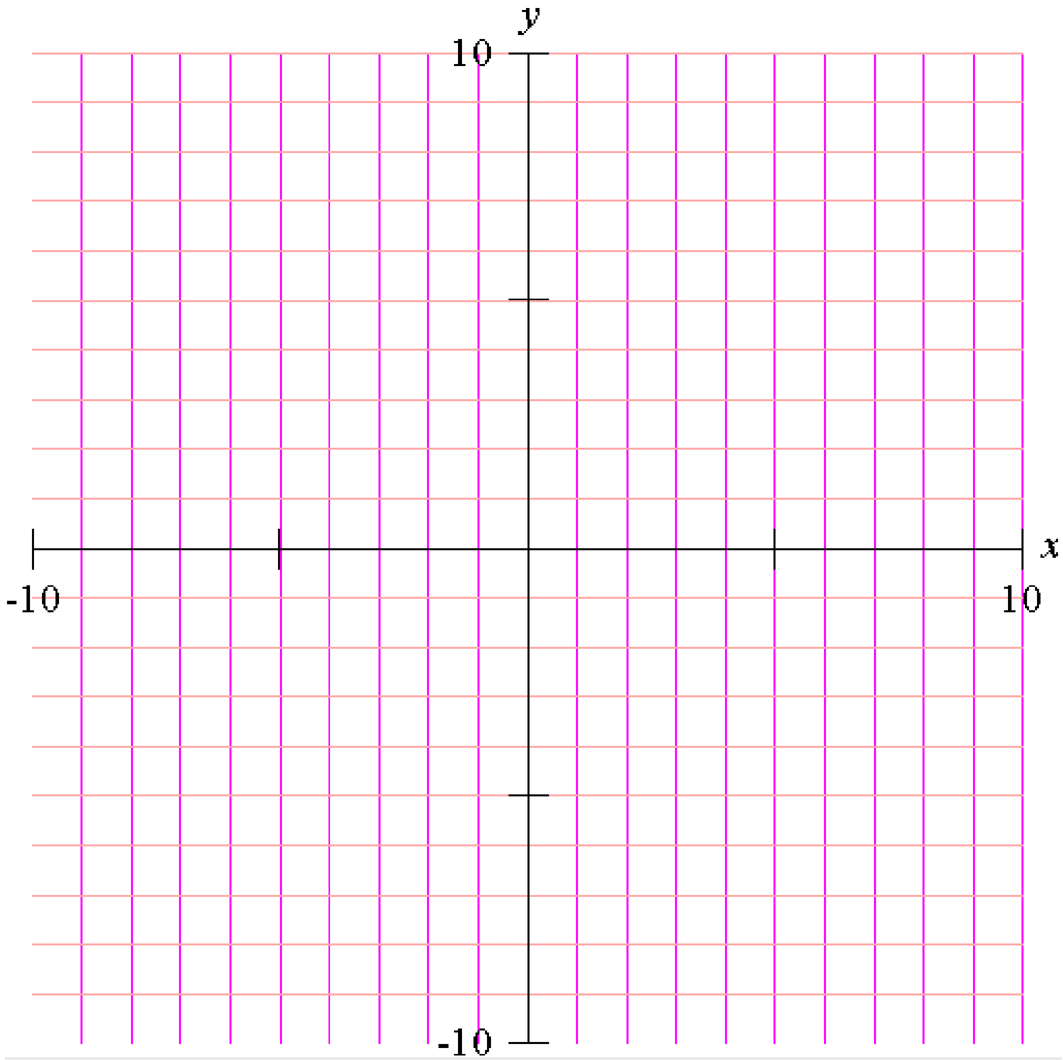
5. Responda: O que você observa ter acontecido ao variarmos o valor de n da equação reduzida nas retas plotadas no item 4?

Anexo B – Atividades sobre paralelismo e perpendicularismo

Atividade 7:

Na obra de arte seguinte, de Luiz Roberto Lopreto, podemos identificar diferentes retas. Entre elas, algumas que são paralelas, ou seja, que possuem a mesma inclinação.

a) Faça um esboço da obra de arte acima no plano cartesiano abaixo.



b) Identifique usando duas cores diferentes, na representação da obra de arte acima, pelo menos dois pares de retas paralelas.

c) Determine a equação reduzida das retas que você identificou na atividade anterior.

d) Quando você analisa os pares de retas acima, e suas equações reduzidas, o que você pode perceber?

Paralelismo: duas retas são paralelas quando possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja, $m_1 = m_2$ (sendo m_1 a inclinação de uma das retas e m_2 a inclinação da outra).

Quando trabalhamos com obras de artes mais complexas, muitas vezes não é possível identificar tão facilmente as equações que compõem seus elementos. Mas existem duas formas que permitem que possamos encontrar o coeficiente angular presente na equação reduzida.

Uma das formas de encontrar o coeficiente angular é utilizando a fórmula $m = \tan\alpha$, onde α é o ângulo formado entre a reta em questão e o eixo x. Logo, essa forma se torna interessante quando conhecemos o ângulo em questão.

Outra forma é a partir de dois pontos dessa reta. Suponhamos conhecidos os pontos A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) da reta. Então, para encontrar o coeficiente angular, podemos usar a fórmula $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

e) Identifique figura abaixo, usando a fórmula anterior, o coeficiente angular de todas as retas da obra de arte anterior. (Devem aparecer os cálculos!)

Atividade 8:

Uma condição muito especial de retas ocorre quando elas são perpendiculares, ou seja, quando formam entre si em ângulo de 90º.

a) Você reconhece na obra de arte da atividade anterior, retas perpendiculares? Identifique na figura abaixo os pares de retas perpendiculares que você encontrou.

Perpendicularidade: Se duas retas r e s são perpendiculares entre si, então $m_r . m_s = -1$.

b) Verifique, realizando os cálculos, se a condição descrita acima se satisfaz nos pares de retas perpendiculares que você encontrou na atividade anterior.

Atividade 9:

Algumas vezes conseguimos facilmente identificar ou aproximar o valor do coeficiente angular de uma reta, assim como um ponto qualquer dessa reta. Quando temos essas informações, podemos encontrar a equação reduzida da reta utilizando a seguinte fórmula: $y - y_0 = m.(x - x_0)$.

a) Refaça no plano cartesiano da figura 3 o esboço da obra de arte de Luiz Roberto Lopreto, e identifique a equação reduzida de todas as retas da imagem. Os cálculos devem ser registrados junto com essa atividade.

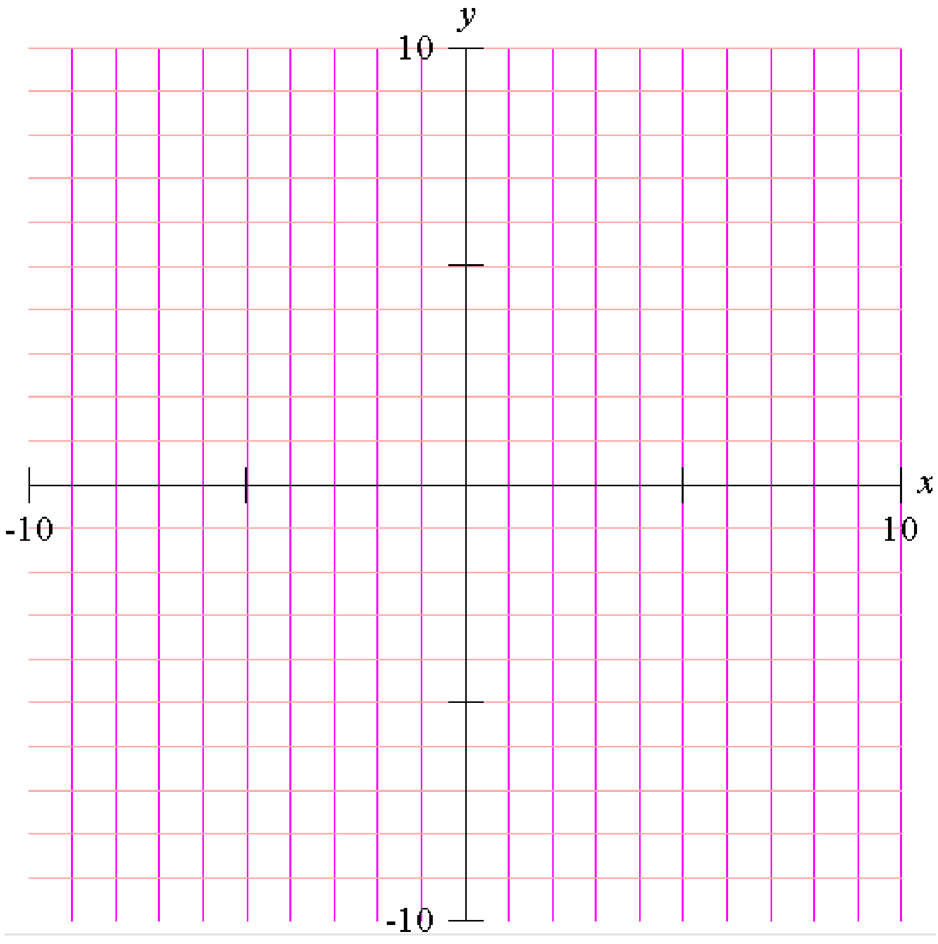


Figura 3: Plano cartesiano para realização da atividade 9.

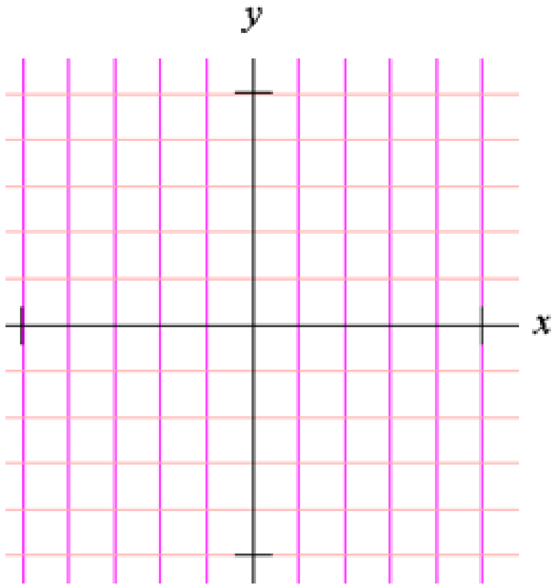
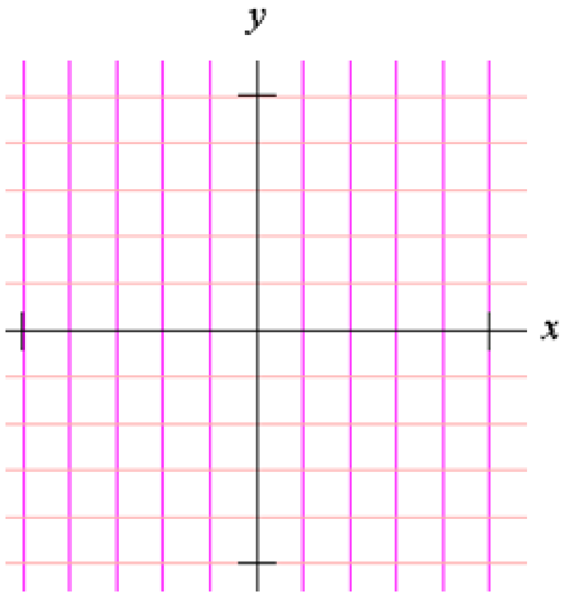
b) Reproduza a obra de arte acima no *GrafEq*.

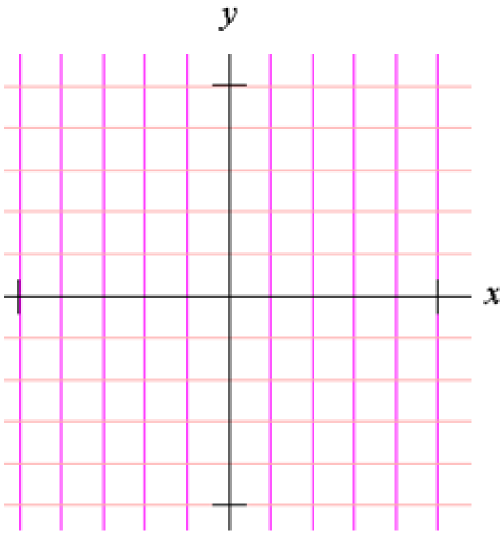
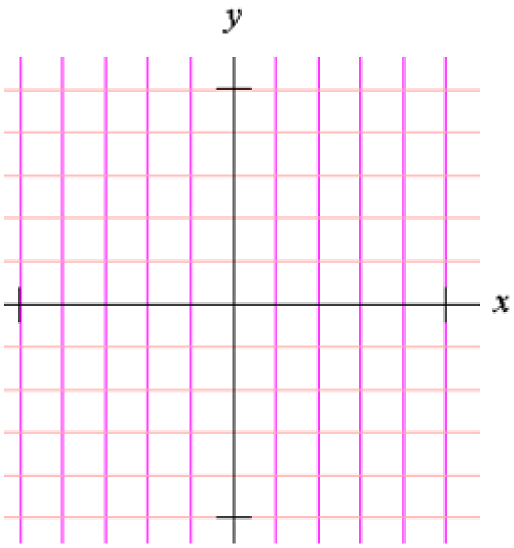
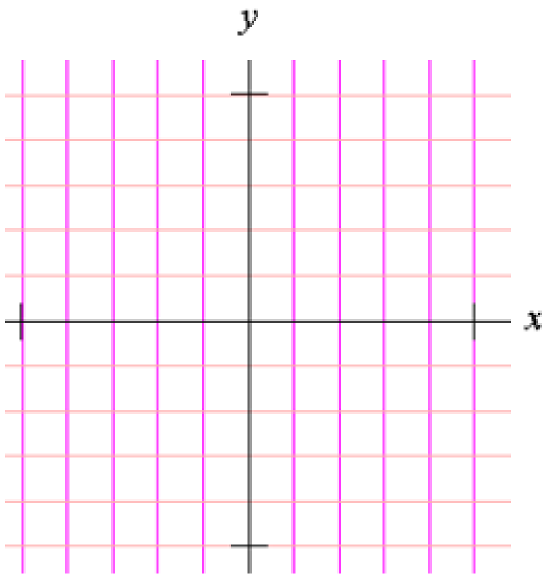
(Faça um print da tela com o gráfico que você plotou, e cole no arquivo das atividades.)

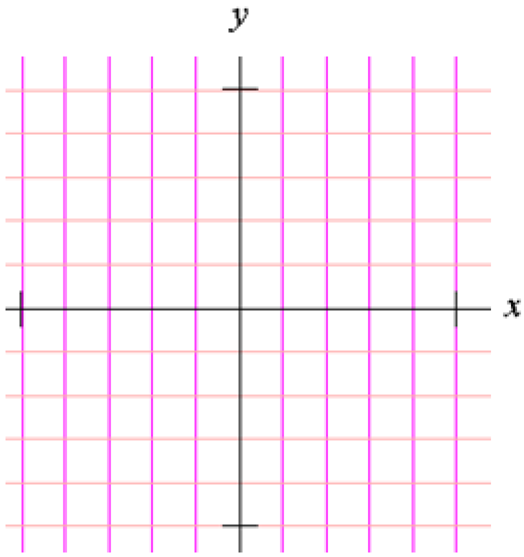
Anexo C – Atividades sobre circunferências

Atividade 10:

1. Fazendo uso do software *GrafEq*, plote a equação da circunferência em cada item abaixo, após desenhe-a no plano cartesiano correspondente e preencha os demais dados da tabela.

	Equação reduzida	Plano cartesiano
a)	$(x-2)^2+(y+1)^2=9$ Raio: _______ Centro: _______	
b)	$(x+1)^2+(y-3)^2=4$ Raio: _______ Centro: _______	

c)	$x^2 + (y-1)^2 = 16$ Raio: ________ Centro: ________	
d)	$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ Raio: ________ Centro: ________	
e)	$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 9$ Raio: ________ Centro: ________	

f)	$x^2 + y^2 = 25$	

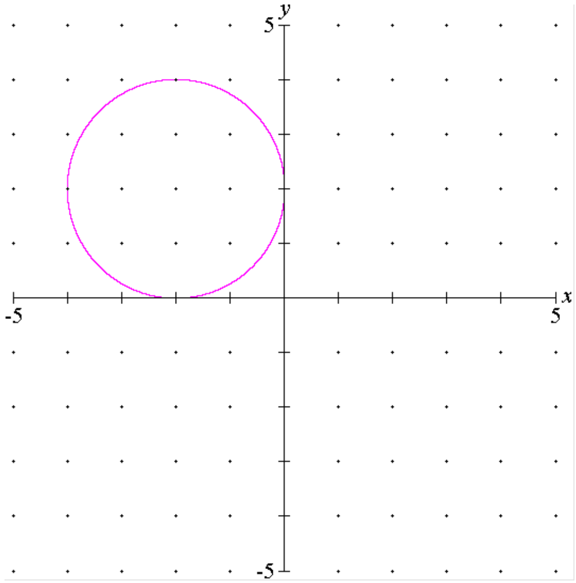
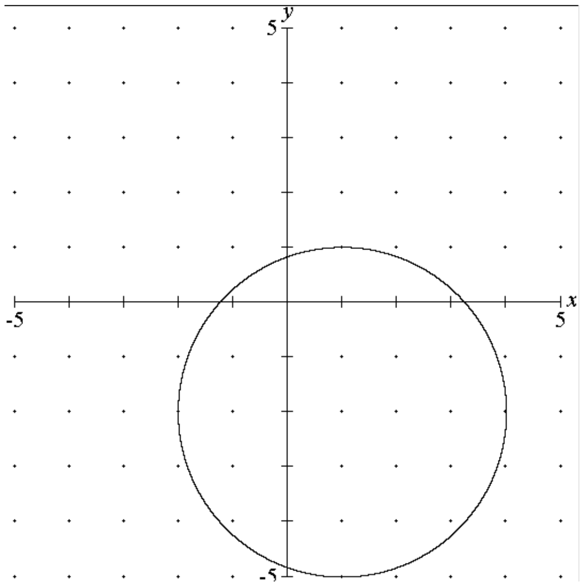
2. Escreva com as suas palavras o que você pode perceber em relação ao centro e ao raio da circunferência na equação reduzida da circunferência.

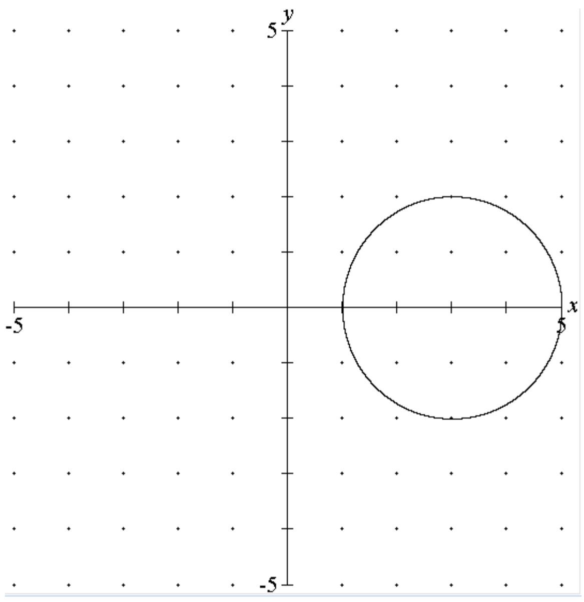
3. Faça seus registros sobre a explicação da professora referente a equação reduzida da circunferência.

4. Faça seus registros sobre a explicação da professora referente a equação geral da circunferência.

5. Encontre, para cada item da atividade 1 a equação geral da circunferência.

6. Identifique das circunferências abaixo a equação reduzida e a equação geral correspondente (apresente o cálculo).

Circunferência	Equação reduzida e Equação geral
	
	

7. Algumas vezes ao olhar somente a equação geral da circunferência, não conseguimos identificar de qual circunferência estamos tratando. Para isso, precisamos transformar a equação geral da circunferência em equação reduzida. Acompanhe o exemplo com a professora, após realize o mesmo com os itens abaixo.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$

Anexo D – Atividades sobre elipses

Atividade 11:

1. Plote no *GrafEq* as seguintes equações, e relacione as colunas identificando o gráfico correto com cada equação.

(A) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

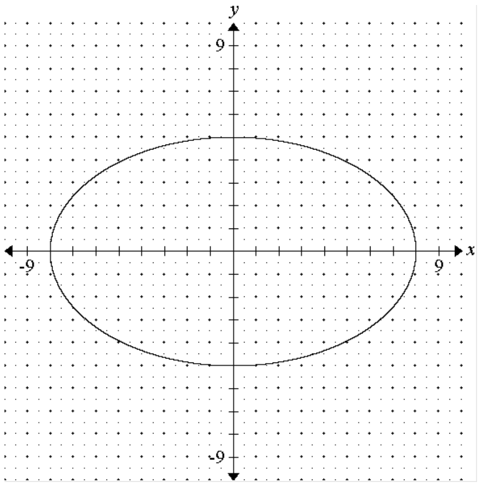
(B) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

(C) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$

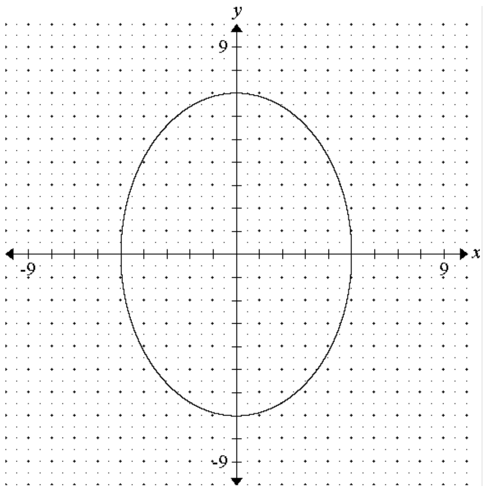
(D) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

(E) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$

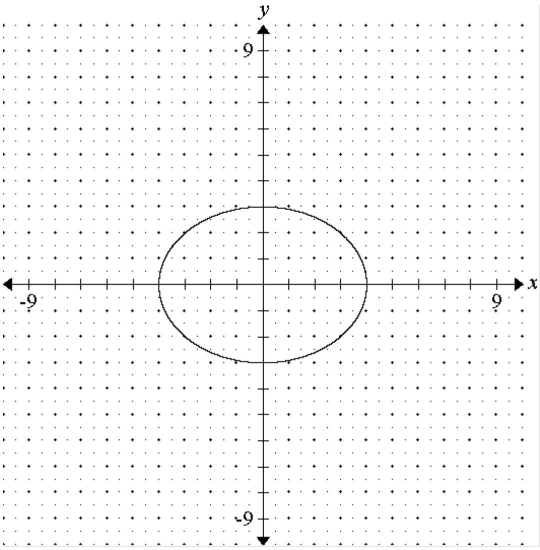
(   )



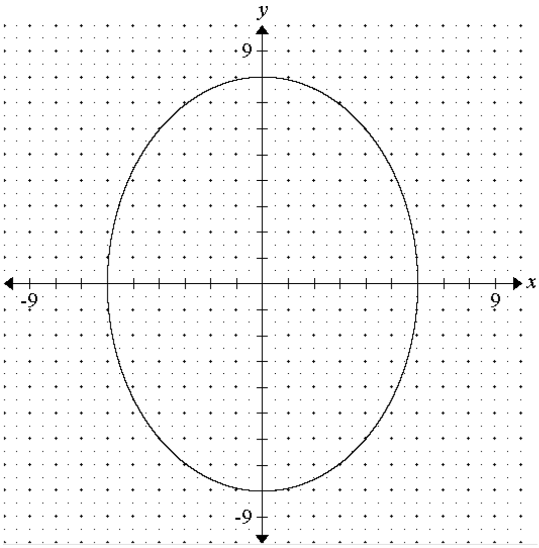
(   )



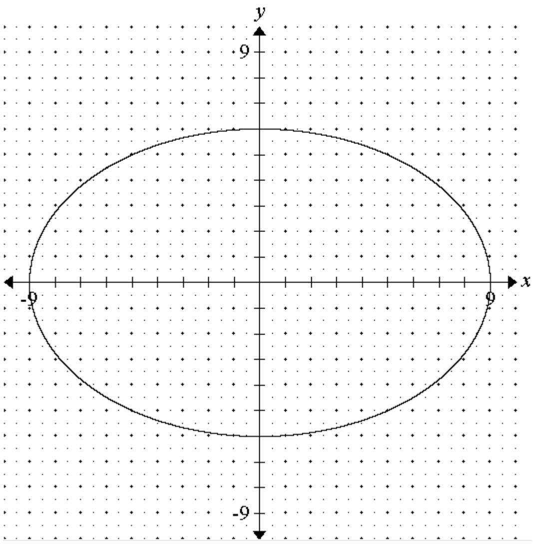
(   )


y
9
x
-9
9
-9

(   )


y
9
x
-9
9
-9

(   )


y
9
x
-9
9
-9

2. Relate com as suas palavras o que você observou a respeito dos valores que se encontram nos denominadores das equações em relação ao gráfico obtido.

3. Plote no *GrafEq* as seguintes equações, e relacione as colunas identificando o gráfico correto com cada equação.

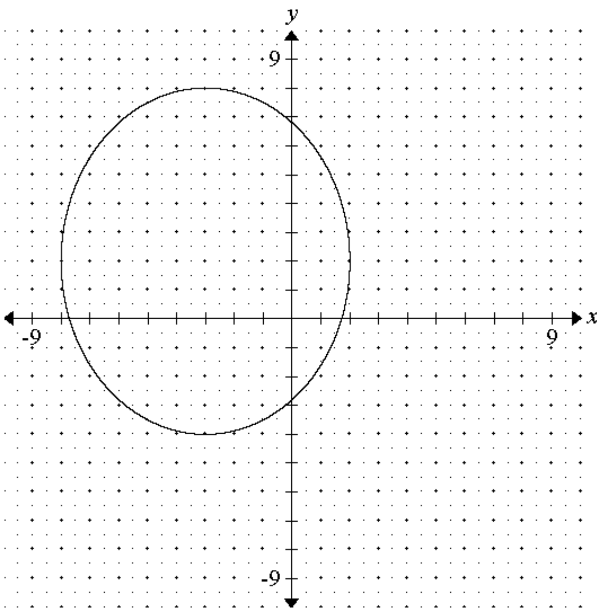
(A) $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$

(B) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

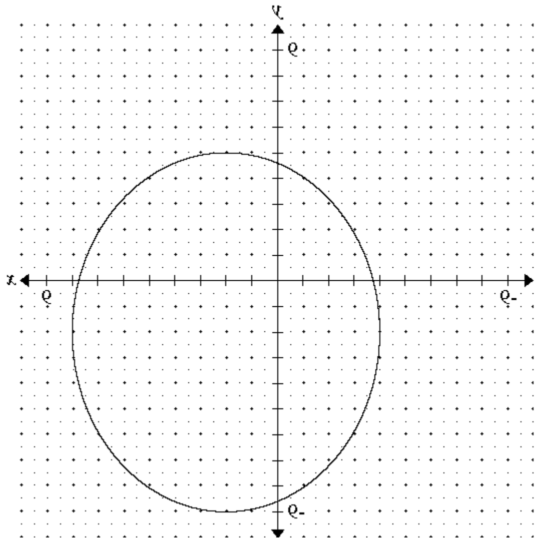
(C) $\frac{(x+1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$

(D) $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$

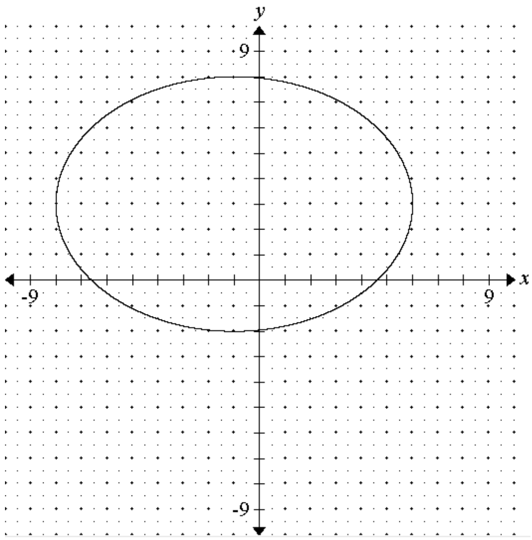
(   )



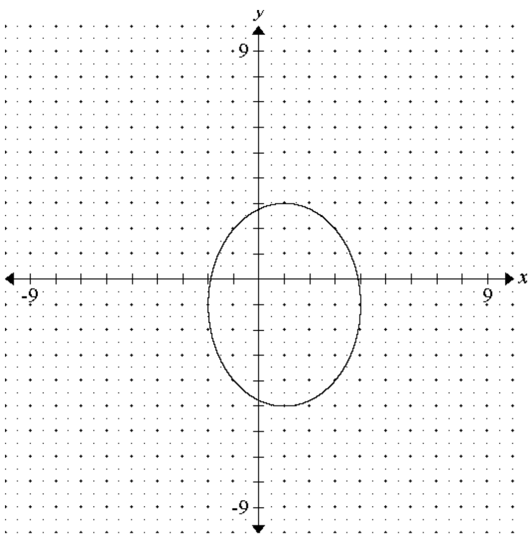
( )



( )

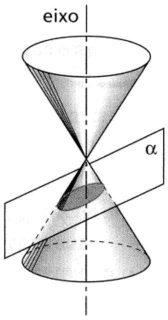
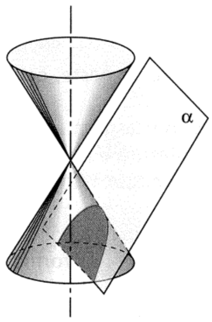
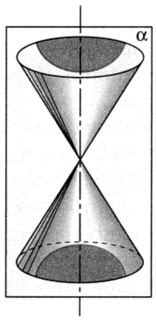

y
9
-9
9
x
-9

( )


y
9
-9
9
x
-9

4. O que você pode perceber sobre a equação reduzida da elipse?

Cônicas:

Elipse	Parábola	Hipérbole
Se o plano α interceptar todas as geratrizes do cone e não for paralelo às bases dos cones nem passar pelo vértice, teremos:	Se o plano α for paralelo (mas não coincidente) a uma geratriz, teremos:	Se o plano α for paralelo (mas não coincidente) a duas geratrizes, teremos:
		
Essa cônica é chamada de *elipse*.	Essa cônica é chamada de *parábola*.	Essa cônica é chamada de *hipérbole*.

Definição de elipse:

Traçado e definição da elipse

Em vários objetos e situações do dia a dia podemos observar a forma da elipse.

Para traçar uma elipse, vamos marcar sobre o plano dois pontos, F_1 e F_2, distantes $2c$ um do outro. Em cada ponto fixamos, com o auxílio de dois percevejos, a extremidade de um barbante de comprimento $2a$, sendo $2a > 2c$ (figura I). Então, posicionando um lápis junto ao barbante, de modo que este se mantenha esticado, traçamos uma curva (figura II).

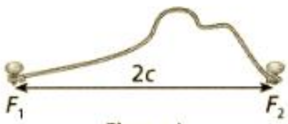


Figura I

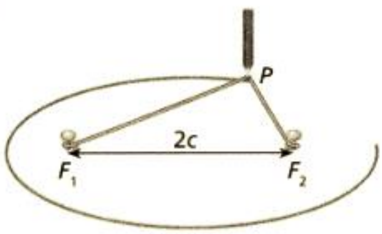


Figura II

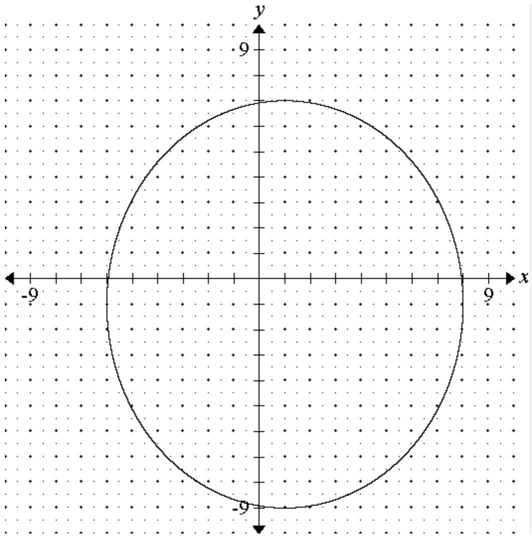
Note que, para qualquer ponto P pertencente à curva, a distância $PF_1 + PF_2$ é constante, pois corresponde ao comprimento do barbante.

A curva formada é chamada de elipse e pode ser assim definida:

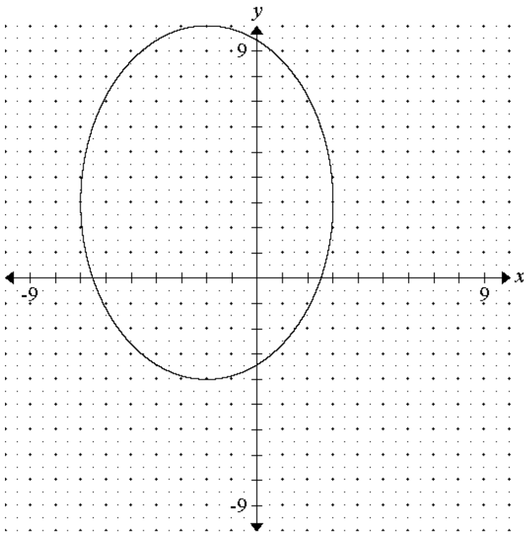
> **Elipse** é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja soma de suas distâncias aos focos F_1 e F_2 é constante e maior que a distância entre eles.

5. Escreva a equação das seguintes elipses:

a)



b)



c)