UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA - UFSM
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS - CCNE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MEDIDAS DE ALTURAS INACESSÍVEIS POR SEGMENTOS PROPORCIONAIS EM PROJEÇÕES DE SOMBRAS: Um relato de experiência

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Luciano Faustinoni

Santa Maria, RS, Brasil

2015

MEDIDAS DE ALTURAS INACESSÍVEIS POR SEGMENTOS PROPORCIONAIS EM PROJEÇÕES DE SOMBRAS: Um relato de experiência

Luciano Faustinoni

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), realizada na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS**)**, situado no prédio do Centro de Ciências Naturais e Exatas (CCNE), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Profª. Drª. Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS, Brasil

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA - UFSM
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS - CCNE
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação de Mestrado

MEDIDAS DE ALTURAS INACESSÍVEIS POR SEGMENTOS PROPORCIONAIS EM PROJEÇÕES DE SOMBRAS: Um relato de experiência

elaborada por
Luciano Faustinoni

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

____
Claudia Candida Pansonato, Drª (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

____
Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo - UFSM
(Examinador Titular)

____
Porfª. Drª. Rosane Rossato Binotto - UFFS
(Examinadora Titular)

____
Profª Drª Carmen Vieira Mathias - UFSM
(Examinadora Suplente)

Santa Maria, 16 de julho de 2015.

A Deus pela vida que Ele me concebeu.

À minha querida e amada esposa, Claudia, e meus filhos, Daniel, Lúcio e Ana Lúcia, pelo carinho, pela compreensão, pelo apoio e pela paciência durante minhas viagens e ausências nos momentos em família, com a certeza de que vocês contribuíram na busca do meu aprimoramento profissional.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), realizado pela Sociedade Brasileira de Matemática, com polo locado na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), pela realização desse curso.

Aos professores do Programa, pelos generosos ensinamentos, contribuições de inestimáveis valores em minha vida profissional.

À minha orientadora, Profª. Claudia Cândida Pansonato, pelas orientações e tempo disponível para me orientar e conduzir da melhor maneira possível à realização dessa dissertação.

Aos amigos do curso, pelas alegrias, tristezas e sufocos que passamos sempre juntos, unidos, incentivando e apoiando uns aos outros.

Ao Colégio São Luiz Gonzaga, à direção, à coordenação pedagógica, em especial à professora Marines Golo e seus estudantes um muito obrigado pela oportunidade de desenvolver minha pesquisa junto a vocês.

À Faculdade Meridional de Passo Fundo (IMED, RS) aos meus colegas de trabalho que muito contribuíram com a construção do equipamento, bem como, meu coordenador Rodrigo, da Escola de Engenharia Civil da IMED.

Ao colega Sérgio, professor de espanhol que me auxiliou e tranquilizou nos minutos finais.

Ao querido Prof. Toloti (*in memorian*), que a todo o momento incentivava-me para o término do mestrado.

“O temor do Senhor
é o princípio do saber,
mas os loucos desprezam
a sabedoria e o ensino”.

Provérbios 1:7

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - ProfMat
Universidade Federal de Santa Maria

MEDIDAS DE ALTURAS INACESSÍVEIS POR SEGMENTOS PROPORCIONAIS EM PROJEÇÕES DE SOMBRAS: Um relato de experiência

AUTOR: Luciano Faustinoni
ORIENTADOR: Profª. Drª. Claudia Candida Pansonato
Data e local da defesa: Santa Maria, 16 de julho de 2015.

O Teorema de Tales é conteúdo do Ensino Fundamental, na maioria dos currículos, no 9º ano, séries finais. No entanto, o que entra em foco é justamente o modo de trabalhar com esse conteúdo que é, muitas vezes, relegado ou tratado em sala de aula minimamente, com aulas teóricas e descontextualizadas da prática e da realidade do aluno. Em função dessas constatações, "de que modo se pode trabalhar de forma prática o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos no Ensino Fundamental?". Para respondê-lo traçou-se como objetivo geral "motivar os alunos a uma atividade prática de alturas inacessíveis", visando, acima de tudo, contribuir no aprendizado destes conceitos alinhando a teoria com a prática na aprendizagem da matemática. Assim sendo, metodologicamente, a pesquisa configurou-se como sendo de cunho dialético, qualitativa, descritiva, e, com base no procedimento técnico de pesquisa, como uma pesquisa-ação. Assim, a mesma foi realizada com três turmas do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal São Luiz Gonzaga, de Passo Fundo, Rio Grande do Sul, trabalhando com a professora titular de Matemática, primeiramente com Teorema de Tales e semelhança de triângulos, após, na prática de execução da medida inacessível da entrada da escola utilizando-se de um instrumento construído especificamente para a realização da atividade. Os resultados apontaram que é de suma relevância possibilitar a alunos a atividades práticas envolvendo estes conteúdos matemáticos. Foi visível a melhora da aprendizagem em relação aos conteúdos apresentados, sendo que essa abordagem aumentou a motivação dos alunos.

Palavras-chave: Tales de Mileto. Geometria Plana. Educação Básica.

ABSTRACT

Masters dissertation
Professional Masters in Mathematics in National Network - ProfMat
Universidade Federal de Santa Maria

HEIGHT MEASURES INACCESSIBLE PROPORTIONAL SEGMENTS IN PROJECTIONS SHADOWS: An experience report

AUTHOR: Luciano Faustinoni
SUPERVISOR: Prof. Dr. Claudia Candida Pansonato
Date and defense site: Santa Maria, July 16, 2015.

The Tales theorem is content of Basic Education, in most of curriculums, in the 9th grade, finals series. However, what comes into focus is precisely the way of working with Thales of Miletus, because it can not fall into the naivemess of not to introduce to the students what actually made history in the world and the real and current problem-solving possibilities based on the understanding of his theorem and, also, of the similar triangles. We can note, nevertheless, that these days, this content is, often, relegated or treated in the classroom minimally, with theoretical and decontextualized of the practice and the student reality classes. Because of these findings, this research work takes place from the following problem: "how one can work in a practical way the similarity of triangles and Thales theorem in Elementary School?" To answer it we traced the general objective "to motivate the students to perform a practical activity involving similar triangles and Thales Theorem to measure inaccessible heights", aimed, above all, contribute to the learning of these concepts aligning theory with practice in learning Mathematics. Therefore, methodologically, the research was configured as a dialectical, qualitative, descriptive, and, based on technical research procedure nature, such as an action research. Thus, the same was done with three groups of 9th grade of Elementary School of São Luiz Gonzaga, Passo Fundo, Rio Grande do Sul, working with the titled professor of Mathematics, first with the theory of similar triangles and Thales Theorem, after, in the practice of the inaccessible measure of school entry execution using a tool built specifically for carrying out the activity. The research results showed that, from experience performed and recorded in this survey, it is extremely important to give students of the Elementary School the practical activities involving these mathematical content. It was visible the improvement of learning and interaction between students and monitor regarding the showed contents, and this approach increased the motivation of students from 9th grade for the Mathematics teaching.

Keywords: Thales of Miletus. Plane Geometry. Basic Education.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AA: ângulo-ângulo
E.C: era cronológica
EF: Ensino Fundamental
EM: Ensino Médio
FAPERGS: Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul
FEPAR: Faculdade Evangélica do Paraná
IDEB: Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
IMED: Faculdade Meridional de Passo Fundo
INEP: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LAL: lado-ângulo-lado
LLL: lado-lado-lado
PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais
PNDE: Programa Nacional de Desenvolvimento da Educação
PROFMAT: Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PVC: policloreto de polivinila
RS: Rio Grande do Sul
Saeb: Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
UFSM: Universidade Federal de Santa Maria

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática está diretamente relacionada ao desenvolvimento de habilidades e competências do ser humano em resolver problemas. Assim, analisar a história da Matemática permite observar que dentro de sua evolução e revoluções ela vem sendo construída como respostas a perguntas que traduzem tantos problemas que são vivenciados no decorrer do seu cotidiano. A maioria das perguntas tem variações de suas origens e determinados contextos, e vão contextualizando-se com o decorrer do tempo: se outrora os problemas eram domésticos (divisão de terras, cálculos de débitos e créditos), hoje se encaminham para a estreita vinculação com outras ciências (astronomia, física, química, biologia, filosofia). É evidente, assim, que a Escola precisa reinventar-se, adotar a mudança como premissa básica de fazer educação, educar é estar aberto a ela. Assim também o é no ensino da Matemática. São decisivas para essa compreensão as palavras de Santaló (1990 apud PARRA; SAIZ, 1996, p. 11):

> o mundo atual é rapidamente mutável, também a escola deve estar em contínuo estado de alerta para adaptar seu ensino, seja em conteúdos como em metodologia, à evolução destas mudanças, que afetam tanto as condições materiais de vida como do espírito com que os indivíduos se adaptam a tais mudanças. Em caso contrário, se a escola descuida-se e se mantém estática ou com movimento vagaroso em comparação com a velocidade externa, origina-se um afastamento ou divórcio entre a escola e a realidade ambiental, que faz com que os alunos se sintam pouco atraídos pelas atividades de aula e busquem adquirir por outros meios os conhecimentos que consideram diretamente ou através dos meios massivos de comunicação. Como a educação informal desses meios extra-escolares segue seu curso de maneira cada vez mais forte, se a escola não os leva em consideração e pensa unicamente em uma educação para um mundo ideal que se vai distanciando da realidade.

É visível o entendimento, também, de que, de modo contextualizado e situado no tempo como visto, “fazer matemática é resolver problemas”. Isso porque são os problemas que deram origem à Matemática, e ela mesma veio para ajudar a solucioná-los, de forma que se possa viver uma vida mais prática, organizada e harmoniosa.

Nessa direção, indago[1]: quais são, hoje, os objetivos da Matemática na escola? Focando-se mais a questão: quais são hoje os objetivos da Matemática para o aluno do Ensino

[1] Por assim ser, optei por escrever esta dissertação em primeira pessoa, visto que esta é fruto não apenas da pesquisa realizada, como também da minha experiência como docente.

Fundamental (EF)? Que problemas ela vem resolver? Que problemas há no ensino da Matemática apesar de ser disciplina obrigatória, receber maior carga horária que as demais nos currículos da maioria das escolas de educação básica, e ser cobrada na maioria dos testes de avaliação externa para medir índices de educação, pontuar seus objetivos e importâncias nos dias atuais são tarefas complexas.

Em recente material produzido pelo Ministério da Educação (MEC), por meio de sua Secretaria de Educação Básica para alavancar a formação de professores da rede pública em nível federal um dos tópicos do programa foi, especificamente, a Matemática. Encontra-se no referido material, para negritar sua importância, que esta

> propicia o desenvolvimento de quatro tipos específicos de pensamento: indutivo, lógico-dedutivo, geométrico-espacial e não-determinístico. Muitos dos seus conhecimentos são úteis em várias situações do cotidiano, além de serem inúmeras as articulações possíveis com as outras áreas do conhecimento ou componentes curriculares (BRASIL, 2014, p.6).

A experiência empírica de 23 anos como educador permite a constatação de que a maioria dos alunos, falando-se especialmente do Ensino Fundamental (EF), possuem um grau de dificuldade muito elevado em relação à disciplina de Matemática. Nesta jornada, também, observando o fazer pedagógico de meus pares, percebi que o ensino desta disciplina se dá de modo predominantemente teórico, nem sempre considerando a essência da Matemática como “possibilidade de resolver problemas” e nem mesmo de ser mecanismo de construção social como se observou na breve descrição histórica de seu desenvolvimento. Os PCN enfatizam, para a especificidade do EF:

> é importante salientar que ainda hoje nota-se, por exemplo, a insistência no trabalho com os conjuntos nas séries iniciais, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais, a formalização precoce de conceitos e a **pouca vinculação da Matemática às suas aplicações práticas** (BRASIL, 1997, p.19, grifos nossos).

Corroboram com essa ideia autores como D’Ambrosio (1996, p.1) que claramente e veementemente expõe essa problemática, quando enfatiza que a Matemática, inclusive, corre o risco de desaparecimento como disciplina autônoma dos currículos escolares se continuar a ser praticada de modo “obsoleto, inútil e desinteressante”. Fala mais, com propriedade e a preocupação peculiar de um educador comprometido com a causa da educação, muitos dos problemas que envolvem essa questão estão relacionados ao modo como se concebe esta ciência em sala de aula, muitas vezes, desvinculada da realidade do aluno, da prática, do dia a dia, do exercício da crítica e da reflexão. Outras vezes, de forma compartimentalizada, sem ligação com qualquer outra área do conhecimento, é o que D'Ambrosio (1996) chama de "disciplina pela disciplina. Aponta, ainda, a mistificação da Matemática, "reforçada pelos testes e exames rotineiros, é a maior causa de se negar, ao povo, o importante instrumento de crítica proporcionado pela Matemática" (op. cit., p.6).

Encontra-se, ainda, no Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio (BRASIL, 2014, p.20), que

> tradicionalmente a Matemática escolar privilegia cálculos e memorização e o ensino é focado em técnicas operatórias e prescrição de procedimentos, sem justificativas; também, as avaliações costumam restringir-se a repetições das mesmas técnicas e procedimentos. Assim, os estudantes incorporam a ideia de que Matemática é tão somente executar ações do tipo: "calcular", "efetuar", "simplificar", "determinar" etc. E mais, a ênfase no seu caráter técnico e formal, a falta de conexão entre os diferentes campos e suas aplicações limitam a percepção dos jovens que acabam considerando a Matemática como um mero conjunto de regras, fórmulas e procedimentos.

Assim como as dificuldades e as necessidades são apontadas, evidencia-se também a primordial função professor na superação das mesmas. É tarefa ou compromisso dos educadores fazer com que a nova geração seja preparada adequadamente para saber viver neste mundo, e essa preparação envolve, certamente, a resolução de problemas, o desenvolvimento do raciocínio lógico, dentre outros tipos de conhecimentos que a Matemática possibilita. Para isso, devem-se oportunizar meios que facilitam a sua aprendizagem de forma que os alunos visualizem a importância do determinado conteúdo no processo de sua vida acadêmica, que servirá também na sua rotina de vida e na sua formação e atuação futura, como cidadãos. O professor de Matemática é um elemento decisivo na complexa atividade que é ensinar esse conteúdo.

Acredito que pelo fato de a Matemática ter sido uma das disciplinas onde os estudantes encontram mais dificuldades, os educadores precisam procurar meios para ajudar e mostrar aos mesmos, a grande possibilidade de usar o conhecimento não apenas para uma aprovação. Dessa forma, fica claro que o papel do professor é fazer uma relação harmônica entre a Matemática e a vida do aluno, de forma que os aproxime, colocando entre ambos uma prática significativa de aprendizagem, levando em conta um caminho a ser traçado de uma forma mais curta, se possível. Destaco, ainda, que ao atuarem em educação básica, os educadores matemáticos ensinam a Matemática para os que não são matemáticos e por boa ventura, talvez, poderão despertar em algum estudante a vocação para um excelente matemático. Assim, sugere que todo educador deve embasar suas estratégias de aprendizagem com muita leitura, pesquisa, planejamento e dedicação, sendo assim, planejando e executando a melhor estratégia que condiz com a melhor forma de construção da aprendizagem para seu aluno.

Diante do exposto, novas perguntas evidenciam-se: como o professor pode fazer com que o aluno entenda Matemática como essencial à sua vida? Qual é a melhor forma de aprendermos Matemática? É diante do contexto aqui apresentado e da problemática delineada que na busca por essas respostas e outras que convergem à qualificação do ensino e da aprendizagem da Matemática no EF que se justifica a realização desse estudo.

O Teorema de Tales é conteúdo do EF, na maioria dos currículos, no 9º ano, séries finais. Falar de Tales de Mileto nos dias de hoje parece compactuar com a Matemática que até agora se criticou por ser desconexa do tempo contemporâneo. No entanto, o que entra em foco é justamente o modo de trabalhar com Tales de Mileto, pois não se pode cair na ingenuidade de não apresentar aos alunos o que de fato fez história no mundo e influenciou a nossa vida indiretamente. Se Tales de Mileto um dia usou-se de segmentos proporcionais para estimar a medida das pirâmides do Egito, o que nossos alunos, hoje, precisam medir para equacionar pequenos problemas de seu dia a dia? Assim, toma sentido tratar, nesta série, da Geometria e do desenvolvimento do pensamento matemático.

Tais possibilidades e necessidades motivaram-me à realização deste projeto como uma proposta de trabalhar conteúdos complexos da Matemática (no caso o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos), aliando a teoria e a prática em sala de aula, de forma atualizada e partindo-se da premissa do envolvimento dos alunos na resolução de problemas práticos e relacionados ao seu dia a dia na sociedade de hoje. Desse modo, a presente dissertação pautou-se no seguinte problema de pesquisa: “de que modo se pode trabalhar de forma prática a semelhança de triângulos e o Teorema de Tales no Ensino Fundamental?”. A partir desse problema, definiu-se como objetivo geral da pesquisa “motivar os alunos a uma atividade prática de alturas inacessíveis”, visando, acima de tudo, contribuir no aprendizado destes conceitos alinhando a teoria com a prática na aprendizagem da matemática.

Assim sendo, optei por desenvolver uma pesquisa de cunho dialético, qualitativa, descritiva, do tipo participante – como será descrito no capítulo metodológico – durante aproximadamente cinco semanas, com três turmas do 9º ano do EF da Escola Municipal São Luiz Gonzaga do município de Passo Fundo, do Estado do Rio Grande do Sul, através de acompanhamento de aulas teóricas e observações de práticas, onde os alunos utilizando-se de instrumento construído para a execução do projeto tiveram a oportunidade de realizar medidas até então inacessíveis. Fruto de observação e aplicação de questionários a uma amostra de alunos participantes, os dados surgidos contribuem para responder ao problema proposto direcionando-me ao objetivo geral desse estudo e aos demais anseios que perpetram essa construção. Nessa direção, no primeiro capítulo dessa dissertação apresento fruto da pesquisa bibliográfica realizada, considerações sobre Tales de Mileto e a Geometria, apresentando os conceitos básicos para o entendimento dos resultados devido a esse matemático e dessa área de conhecimento dentro do campo da Matemática.

No capítulo segundo, ainda resultado do estudo bibliográfico, teço considerações sobre o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, pontuando que tipo de conhecimento matemático é desenvolvido quando se trabalha tais conceitos.

Posteriormente, no capítulo três, apresento a metodologia utilizada para a execução do projeto e, ainda, o desenvolvimento do trabalho realizado, descrevendo cada etapa - a revisão e explanação dos conteúdos e a apresentação do Teorema de Tales em aulas teóricas expositivas, o trabalho de campo com a utilização do instrumento construído para medidas inacessíveis, os cálculos realizados *a posteriori* e, por fim, as impressões e concepções dos alunos registradas nos questionários aplicados.

Partindo-se à finalização dessa dissertação, no quarto capítulo apresento as considerações finais, englobando as limitações da pesquisa e a indicação de futuros estudos, por fim, as referências que subsidiaram teoricamente os achados, e os apêndices e anexos, materiais que complementam o entendimento e o dimensionamento do trabalho realizado.

1 TALES DE MILETO E A GEOMETRIA

O presente capítulo ocupa-se de teorizar, primeiramente, sobre a vida e a obra de Tales de Mileto, confundida muitas vezes com a própria história da Matemática e da Geometria, essa que também será abordada, pois foi campo inaugurado pelo nobre matemático. Assim sendo abordam-se esses temas de modo entrelaçado utilizando-se das ideias de Eves (1995), Spinelli (2003), Bongiovanni (2007) e Carvalho e Roque (2012).

1.1 A história de Tales de Mileto

Tales, segundo Heródoto[2] (apud SPINELLI, 2003, p. 16), nasceu em Mileto, mas os seus ancestrais eram originários da Fenícia, onde dados históricos são de difícil comprovação, tendo-se como testemunho Heródoto, considerado a melhor fonte de suas referências. De acordo com Bongiovanni (2007, p.96), Tales de Mileto foi um filósofo grego que viveu por volta de 630 a.C., no entanto reafirma que pouco se sabe sobre sua vida e obra.
Ao relacionar o período em que Tales viveu Spinelli (2003, p. 17), afirma que não há coerência entre os doxógrafos[3]. Mas sobre sua morte, o mesmo autor ainda afirma que:

> Diógenes Laércio fixa a sua morte na quinquagésima oitava Olimpíada (ou seja, entre 548-545 a.C.); e se ele viveu, como afirma (seguindo Apolodoro), setenta e oito anos, o seu nascimento estaria situado entre 626-623 a.C. Ao contrário, se ele viveu noventa anos (como também afirma, apoiado em Sosícrates), então a data recuaria para 638-635 a.C. No Suda a data está ainda mais recuada: 640-635 a.C. A cronologia, portanto, é controversa, a não ser a data em que ocorreu o eclipse do sol previsto por Tales, em 585 a.C., fato que está assim registrado em Heródoto (SPINELLI, 2003, p. 17).

Tales, como exímio filósofo e matemático, mostrava características peculiares em suas pesquisas, uma delas era a elevação do espírito e a outra o desejo do saber (observação da

---

[2] Heródoto foi um geógrafo e historiador grego – continuador de Hecateu de Mileto – nascido no século V a.C (485 a.C.– 420 a.C.), em Halicarnasso (hoje Bodrum, na Turquia) (WIKIPEDIA, 2015).
[3] Entre os gregos, compilador de extratos dos filósofos (MICHAELIS, 2015).

natureza), sendo que Spinelli (2003, p.22) afirma que "essas são duas atitudes mediante as quais Tales instituiu a busca do saber como uma forma de trabalho, concentrando nisso, toda a sua energia intelectual e a sua percepção".

De acordo Spinelli, (2003, p. 15), Tales está presente em todas as listas dos famosos Sete Sábios da Grécia e o seu nome sempre consta como sendo o primeiro, o mesmo autor afirma que:

> Existem várias listas, mas habitualmente apontam-se os seguintes nomes: Tales de Mileto (que figura em todas), Pítacos, Bias, Sólon, Cleóbulo, Periandro e Quílon. No elenco de Platão, por exemplo, vem excluído o nome de Periandro[1]. No lugar dele, Platão incluiu o de Míson, e assim o fez por se recusar a incluir entre os Sábios o nome de um tirano (SPINELLI, 2003, p.15).

Esses sábios, segundo Spinelli (2003, p.16) ofereceram em conjunto a Apolo as primícias de suas sabedorias e fizeram ainda, gravar no templo de Delfos essas máximas: "*Conhece-te a ti mesmo e Nada em demasia*", a qual atribuem a Tales a autoria. Tales obviamente, não foi o criador da Geometria, o que se sabe é que ele foi o primeiro sábio a descobri-la para os gregos e como narra Heródoto apud (SPINELLI, 2003, p. 23) "foi no Egito, no meu entender, que a geometria foi inventada, e foi de lá que ela veio para a Grécia. Diz ainda que ela nasceu da necessidade de medir e de distribuir as terras a seus proprietários após cada cheia do Nilo".

O Egito foi, assim, o campo fértil de Tales de Mileto. Falar-se do Egito remete a falar das pirâmides e delas volta-se a Tales. De acordo com Bongiovanni (2007, p.96), foi estudando-as que descobriu muitas proposições e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitos fenômenos da Matemática. Tales afirmou ou demonstrou pela primeira vez

> que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto; que os ângulos opostos pelo vértice são iguais; que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; que um círculo é dividido igualmente pelo seu diâmetro; que se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes (op. cit., p.96).

Assim, Tales de Mileto pode medir a famosa Pirâmide de Quéops no Egito como se mostra na Figura 1.

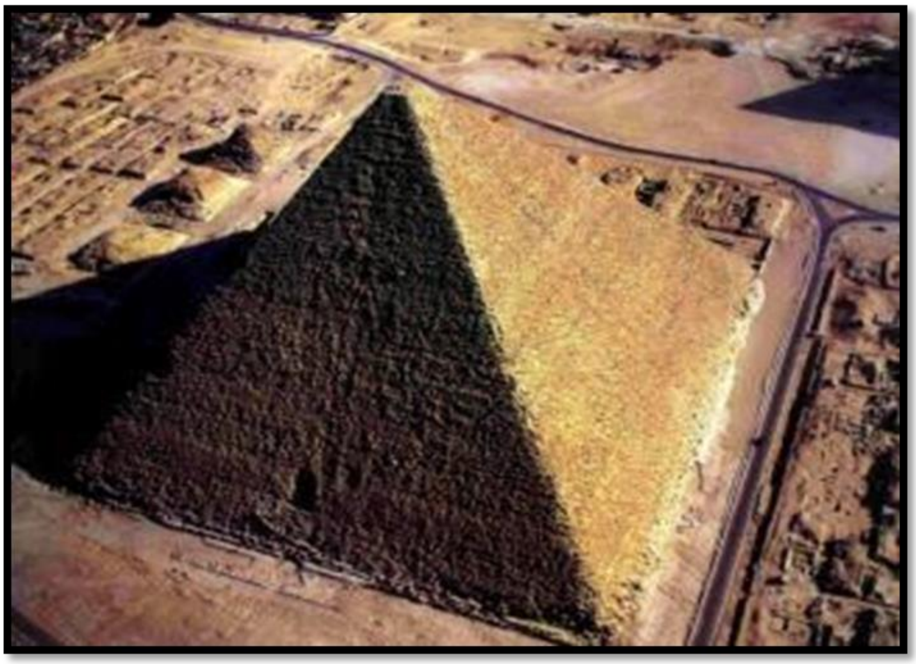


Figura 1 - Pirâmide de Quéops no Egito
Fonte: Newhouse, E. L., ed. The Builders, The National Geographic Society, Washington, D.C., 1992 (apud www.lmc.ep.usp.br/people/hlinde/estruturas/queops.htm, 2015).

A grande pirâmide de Quéops, em seu sistema estrutural, tem como função a guarda do túmulo do faraó Quéops, localizada na cidade de Gizé no Egito, à época da construção, por volta de 2551 a.C., tanto o projeto, quanto a execução do mesmo são de autores desconhecidos, fabricada de calcário, material utilizado no núcleo e no revestimento, inicialmente a dimensão da altura era de 146,6 m e atualmente 137,16 m.

Vários são os historiadores que relatam como Tales media as pirâmides. Diógenes Laércio (século III d.C.) nos informa que Tales mediu as pirâmides pela sombra, depois de observar o tempo que a nossa própria sombra demora a ficar igual à nossa altura. O historiador Plutarco (Século I d.C) dá outro relato a respeito da medição da altura da pirâmide feita por Tales, propondo que Ele limitou-se a colocar um bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, gerando o raio de sol tangente aos dois triângulos, demonstrando que a relação entre a primeira sombra e a segunda era a mesma que entre a pirâmide e o bastão (BONGIOVANNI, 2007, p.97-98).

Barroso (2010) cita como se deu o raciocínio de Tales de Mileto ao medir a altura da grande Pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito. Tales calculou essa altura, baseando-se no fato de que os raios solares vindos de uma distância tão grande se tornam paralelos e pelo fato de que a razão entre a altura do bastão e o comprimento de sua sombra era a razão entre a altura da pirâmide e o comprimento de sua sombra mais a metade da medida de seu lado de acordo com a Figura 2.

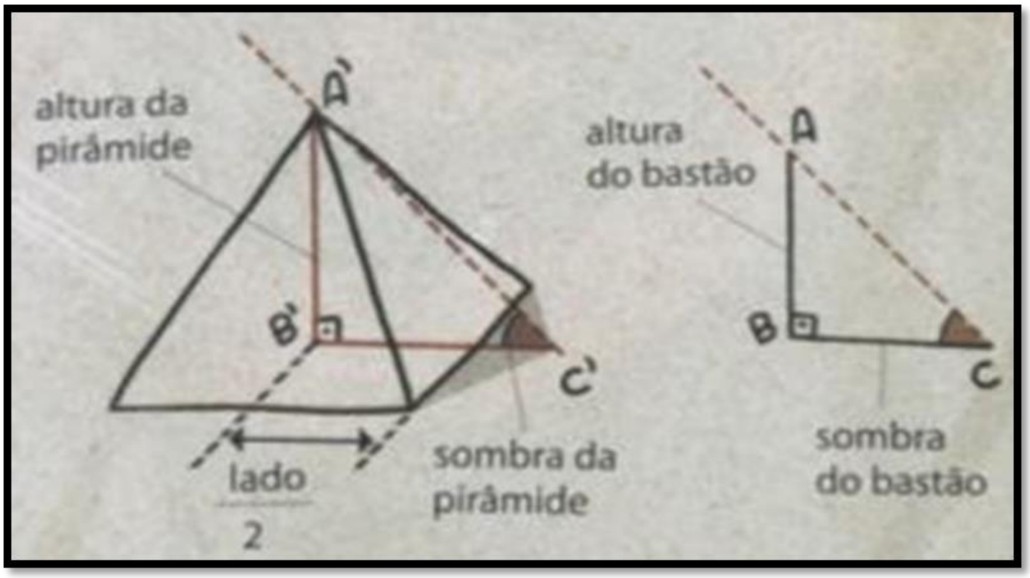


Figura 2 - Esquema do raciocínio de Tales de Mileto
Fonte: Barroso (2010, p. 93).

De modo similar Spinelli (2003) e Eves (1995) citam esse episódico histórico sobre Tales de Mileto, que revelam, também, algumas contraposições. Assim, segundo Eves (1995, p.115),

> O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual á altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos. Ambas as versões pecam ao não mencionar a dificuldade de obter, nos dois casos, o comprimento da sombra da pirâmide – isto é, a distância da extremidade da sombra ao centro da base da pirâmide.

Dentre essas várias versões, parece evidenciar-se a de Plutarco (do I-II séculos d.C.), filósofo e historiador grego que descreveu com melhor precisão essa descoberta, e será a descrição utilizada em nosso estudo de campo:

> Colocando a prumo uma vara no final da sombra da pirâmide e fazendo dois triângulos com a linha que traça o raio do sol quando toca as duas extremidades, ele mostrou que havia uma certa proporção entre a altura da pirâmide e a da vara correspondente ao comprimento da sombra de um à sombra de outro (SPINELLI, 2003, p. 24).

Assim, ao considerar os métodos utilizados para a medida das pirâmides, Tales de Mileto é um importante marco na história da Matemática e, de acordo com Bongiovanni (2007, p.96), pensa-se ter sido ele o criador da geometria demonstrativa, ou, pelo menos, o primeiro matemático a dar uma contribuição à organização da Geometria.

1.2 A Geometria

Geometria é uma palavra que resulta dos termos gregos *geo* (terra) e *metron* (medir), designando de modo geral as propriedades relacionadas com a posição e forma de objetos no espaço. Assim sendo, insere-se dentro do campo da Matemática, e como tal compõe os currículos escolares do EF e outros níveis. Nesse contexto se propõe a trabalhar questões relacionadas com forma, tamanho, posição relativa entre figuras ou propriedades do espaço, dividindo-se em várias subáreas, dependendo dos métodos utilizados para estudar os seus problemas (geometria plana, geometria espacial, geometria analítica, dentre outras). Nos PCN encontra-se que

> a Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa (BRASIL, 1997, p. 39).

Na contextualização histórica segundo, Carvalho e Roque (2012, p. 60), “a geometria surgiu às bordas do Nilo, devido às enchentes e à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas entre aqueles que haviam sofrido prejuízos”. Ainda Carvalho e Roque (2012, p.60) descrevem que:

> A história tradicional nos conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.E.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido, justamente, o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, por meio da semelhança entre, por um lado, a relação desta altura com sua sombra e, por outro, a relação de sua própria altura com sua própria sombra.

É neste sentido que a história da Geometria converge para a história de Tales de Mileto, anteriormente abordada. De acordo com Carvalho e Roque (2012, p. 62), “no final do século VII a.E.C., diversas realizações tecnológicas podem ter contribuído para o desenvolvimento da Matemática. Alguns termos de geometria já apareciam, por exemplo, na arquitetura.” Esses autores ressaltam que, de fato,

> há escritos técnicos do século VI a.E.C. tratando de problemas relacionados à astronomia e ao calendário. Neles intervinham alguns conceitos geométricos, como círculos e ângulos. Ao menos um destes livros ainda estava em circulação na época de Eudemo, e os enunciados geométricos aí contidos podem ter ficado conhecidos como sendo de Tales (CARVALHO; ROQUE, 2012, p. 62).

Os referidos autores afirmam com propriedade que, “no entanto, é difícil estabelecer as bases factuais destas afirmações. Para Bongiovanni (2007, p.96):

> A primeira referência que temos de Tales como iniciador do método dedutivo na matemática nos é dada pelo filósofo Proclus (420-485 D.C) no seu livro Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides. Proclus nos diz: “Tales primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia.

Em relação ao ensino da Geometria, hoje, no EF os PCN enfatizam sua necessidade e importância,

> Há um razoável consenso no sentido de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria) (BRASIL, 1997, p.38).

Assim como aponta a importância este referencial indica a necessidade de se repensar a forma como o ensino da Geometria está sendo processado. Nesse sentido,

> o desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos, de um lado, quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes; de outro, em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos (BRASIL, 1997, p.38).

Nessa direção os referenciais apontam a pertinência de se trabalhar com ângulos, com congruência, com semelhanças, com proporcionalidade, com observação. Fica implícita a relevância da semelhança de triângulo e do Teorema de Tales, como conteúdos essenciais ao EF. Um dos teoremas centrais no estudo da Geometria Plana é o Teorema de Tales, derivado da semelhança de triângulos, que pela importância que assumem nesse estudo serão tratados no capítulo que segue.

2 TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇAS DE TRIÂNGULOS

2.1 Teorema de Tales

Bongiovanni (2007) expõe que em outros países o Teorema recebe outras definições. Na Alemanha, por exemplo, o nome Teorema de Tales é dado a outro enunciado: “todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo” (p.99); na Itália, por sua vez, “os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais”.

Independente de tênues diferenças, segundo Bongiovanni (2007, p.96), esse teorema origina-se da necessidade de resolução de problemas práticos, envolvendo paralelismo e proporcionalidade que são a base da relação entre o geométrico e o numérico. Surgiu, assim, a partir das medições de Tales de Mileto utilizando-se da grande pirâmide de Gizé no Egito, como já exposto. De acordo com o mesmo autor,

> Proclus atribui a Tales haver afirmado ou demonstrado pela primeira vez que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto; que os ângulos opostos pelo vértice são iguais; que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; que um círculo é dividido igualmente pelo seu diâmetro; que se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes (p.96).

Como forma de descrever esses achados foi-se constituindo o Teorema. Historiadores revelam que na verdade, a princípio, o teorema iniciou-se quando Tales de Mileto tentava estimar a distância que um barco se encontrava da costa. Dessa maneira,

> a partir de um instrumento (quadrante, duas hastes articuladas), Tales poderia ter medido o ângulo (Homem, barco, pé da torre). A seguir, sem mudar o ângulo, poderia ter girado o instrumento de meia-volta, pedindo a alguém que marcasse no chão do outro lado o ponto para o qual o instrumento estaria apontado. A igualdade de visões implicaria na igualdade das distâncias (BONGIOVANNI, 2007, p.97).

A questão da proporcionalidade era de grande importância para os gregos, principalmente na arquitetura e agrimensura. A primeira publicação de que se tem notícia e que substitui o nome de “teorema dos segmentos proporcionais” pelo “Teorema de Tales” é o livro francês *Éléments de géométrie* de Rouche e Comberousse. Ao justificar a origem do Teorema e sua importância, Serres (apud BONGIOVANNI, 2007, p.97) diz que “medir o inacessível consiste em reproduzi-lo ou imitá-lo no acessível”. Comte (apud BONGIOVANNI, 2007, p.97), por sua vez, escreve que “devemos considerar como suficientemente verificada a impossibilidade de determinar, pela medição direta, a maioria das grandezas que desejamos conhecer”, fato que desencadeia a necessidade do uso do teorema. E foi a partir dessas necessidades e impossibilidades que Tales de Mileto seguiu seu trabalho partindo ao estudo das pirâmides e a determinação de suas medidas, até então inacessíveis (reafirmam-se, alturas de aproximadamente 146,6 m).

Para a demonstração do Teorema de Tales que faremos a seguir precisaremos do seguinte resultado cuja demonstração encontra-se em Muniz Neto (2012, p.82).

Lema: Teorema da Base Média. Seja *ABCD* um trapézio de bases *AB* e *CD* e lados não paralelos *AD* e *BC*. Sejam, ainda, *M* e *N* os pontos médios dos lados não paralelos *AD* e *BC*, e *P* e *Q* os pontos médios das diagonais *AC* e *BD* conforme a figura 4. Então: (a) *M*, *N*, *P* e *Q* são colineares e $\overleftrightarrow{MN}$ // $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{MN}$ // $\overleftrightarrow{CD}$. (b) $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$ e $\overline{PQ} = \frac{1}{2}|\overline{AB} - \overline{CD}|$.

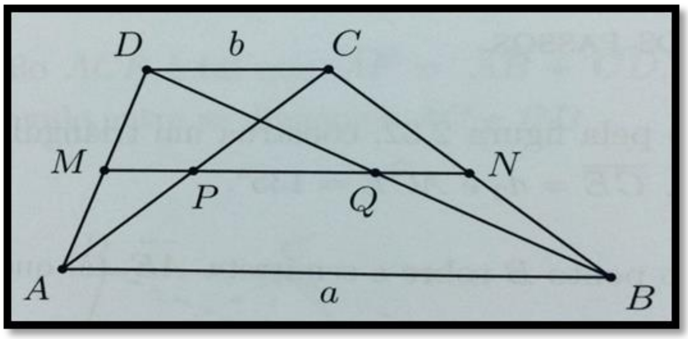


Figura 3 - Base média de um trapézio
Fonte: Muniz Neto (2012, p. 82).

Teorema. Sejam *r, s, t* retas paralelas. Escolha pontos *A, A' ∈ r*, *B, B' ∈ s* e *C, C' ∈ t*, de modo que *A*, *B*, *C* e *A', B', C'* sejam dois termos de pontos colineares. Então $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Demonstração:

Consideram-se no plano as retas paralelas *r, s, t* de acordo com a Figura 4 e traça-se a reta *u* que intersecta as retas *r, s* e *t* nos pontos *A, B,* e *C* respectivamente e a reta *u'* que intersecta *A', B'* e *C'* respectivamente.

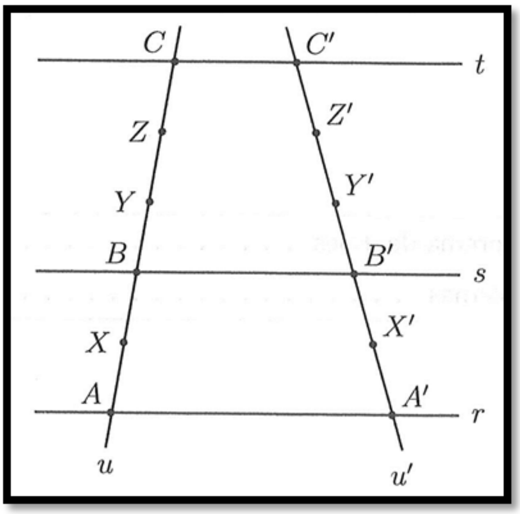


Figura 4 - Retas paralelas cortadas por retas transversais
Fonte: Muniz Neto (2012, p.154).

Se $\overline{AB} = \overline{BC}$, têm-se pelo teorema da base média de um trapézio que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Dessa forma, sabe-se que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1$$

Suponha-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional igual a $\frac{2}{3}$, por exemplo, assim, dividem-se os segmentos *AB* e *BC* em duas e três partes iguais respectivamente e obtêm-se os pontos *X, Y* e *Z* em *u*, onde, de acordo com a Figura 3,

$$\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$$

Traçam-se por *X*, *Y* e *Z* paralelas às retas *r*, *s*, e *t*, que intersectam *u'* em *X'*, *Y'* e *Z'* respectivamente, desse modo, aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem-se que,

$$\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$$

Tem-se, então que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}.$$

Suponha-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$, com *m*, *n* ∈ *N*. Assim, mantendo-se o mesmo raciocínio acima, divide-se respectivamente *AB* e *BC* em *m* e em *n* partes iguais para garantir que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}.$$

Tem-se, portanto a relação,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Sendo, sempre válida, quando o primeiro ou o segundo membro da igualdade for um racional. Supõe-se agora que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x,$$

onde ***x*** é irracional. Assim, escolha-se uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ de racionais positivos, tal que,

$$x < a_n < x + \frac{1}{n}$$

para todo $n \in N$ e marque o ponto $C_n \in u$ na figura 14 tal que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n$$

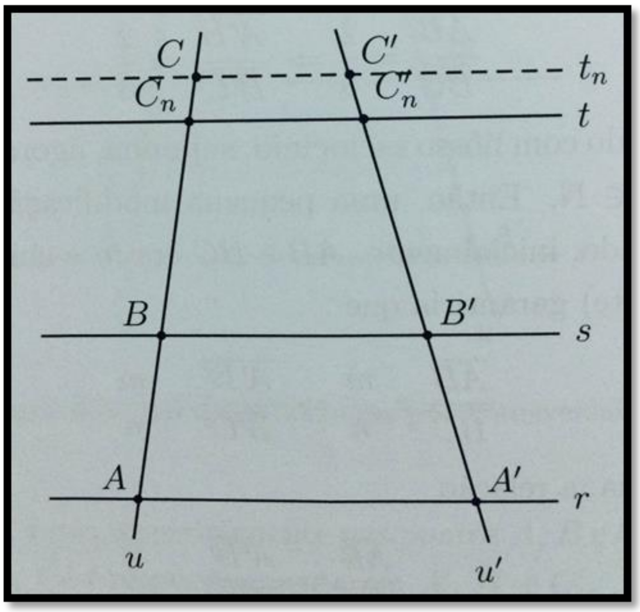


Figura 5 – Esboço do resultado para o caso irracional (Razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ Irracional)
Fonte: Muniz Neto (2012, p.156).

Seja a reta t_n paralela às retas *r*, *s*, e *t* traçada por C_n e C'_n o ponto onde t_n intersecta *u'*. Como $a_n \in Q$, temos que,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n$$

De outra forma, obtém-se que,

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}$$

ou, então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Observa-se que as desigualdades do primeiro membro garantem que, na medida em que n aumenta, os pontos C_n aproximam-se cada vez mais do ponto C. E ainda, como $t_n \mathbin{//} t$, segue-se assim que os pontos C'_n aproximam-se cada vez mais do ponto C', de maneira que a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ aproxima-se cada vez mais da razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$. Pode-se resumir escrevendo da seguinte maneira,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad quando\ n \to \infty.$$

De maneira análoga, pode-se observar, a partir das desigualdades do segundo membro de (1), que temos,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad quando\ n \to \infty.$$

Utiliza-se o fato de que uma sequência de reais não pode se aproximar simultaneamente de dois reais distintos quando $n \to \infty$, (intuitivamente é obvio e pode ser justificado com mais rigor em Fundamentos de Cálculo, o que não é o objetivo real desse trabalho), portanto força-se a concluir que,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Em geral, os textos didáticos apresentam essa demonstração “escondendo” o caso dos segmentos serem incomensuráveis, visto que, nesses casos, haveria necessidade da construção da reta real e dos números reais.

Essas demonstrações são possíveis no EF, razões maiores, pelos quais, se está realizando o projeto que dá sentido a essa dissertação. Essa possibilidade também é pontuada por Bongiovanni (2007), quando indica o uso de construções com régua e compasso (divisão de segmentos em partes iguais ou numa razão dada, obtenção da quarta proporcional, por exemplo) e as demonstrações dos teoremas das bissetrizes interna e externa de um triângulo, como forma de demonstração dos casos de semelhança de triângulos e o entendimento do Teorema de Tales. Pontua-se, no entanto, e desde agora, que a exemplo da maioria dos livros didáticos, atividades práticas não foram indicadas.

O presente capítulo traz a explicação e ilustração da semelhança de triângulos e o Teorema de Tales, principal feito de Tales de Mileto que o consagrou e imortalizou no campo da Matemática, utilizando-se especialmente dos estudos de Dolce e Pompeo (2005), Bongiovanni (2007), Peneireiro e Silva (2008), Barroso (2010) e Muniz Neto (2012).

2.2 Semelhança de Triângulos

Ao se falar em semelhança de triângulos, deve-se observar que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos (*homo,* mesmo, *logos,* lugar) proporcionais.

Quando dois triângulos são semelhantes os ângulos correspondentes são ditos **homólogos**, assim como os lados correspondentes são chamados **lados homólogos**. A razão entre as medidas de dois lados homólogos é **chamado razão de semelhança** entre os dois triângulos.

Assim, analisando-se a Figura 6 têm-se exemplos de triângulos semelhantes.

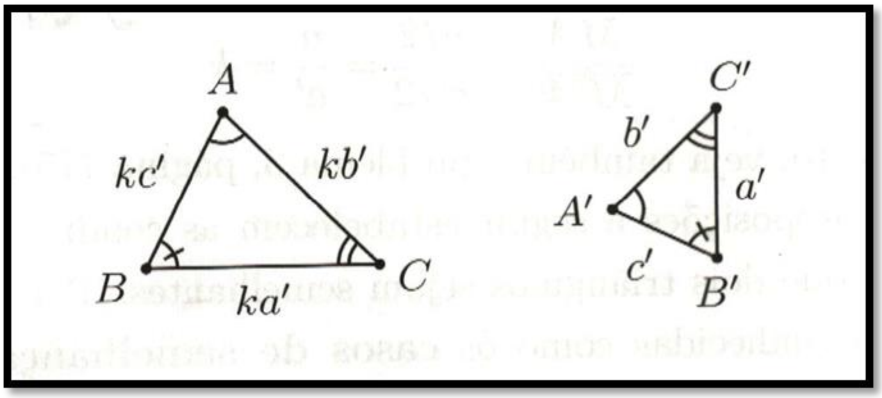


Figura 6 – Dois triângulos semelhantes
Fonte: Muniz Neto (2012, p. 165)

Interpretando-se a Figura 6 matematicamente tem-se, que dois triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes e indica-se tal fato usando a notação *ABC ~ A'B'C'*. Assim,

$$ABC \sim A'B'C' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \hat{A} = \widehat{A'} \\ \hat{B} = \widehat{B'} \\ \hat{C} = \widehat{C'} \end{cases} \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

O número k tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$, é chamado razão de semelhança. Se $k = 1$, temos que os triângulos são congruentes.

O **Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos** diz que, se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então, o triângulo que ela determina com esses lados é semelhante ao primeiro.

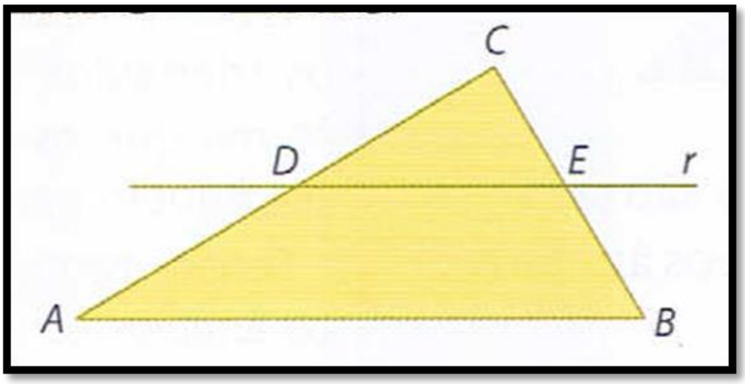


Figura 7 – Triângulo cortado pela reta r paralela à *AB*
Fonte: Barroso (2012, p.118)

Deve-se observar na equação (2) que, usa-se para mostrar o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulo, justamente o resultado do Teorema de Tales que será demonstrado posteriormente.

Assim, como $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$, então:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \quad (2)$$

Tem-se que:

$$\begin{cases} A\hat{C}B = D\hat{C}E \text{ (ângulos comum)} \\ A\hat{B}C = D\hat{E}C \text{ (ângulos correspondentes)} \\ B\hat{A}C = E\hat{D}C \text{ (ângulo correspondentes)} \end{cases} \quad (3)$$

De acordo com a Figura 8 traçamos por E uma reta s paralela ao lado $\overline{AC}$, determinando o ponto F sobre o lado $\overline{AB}$.

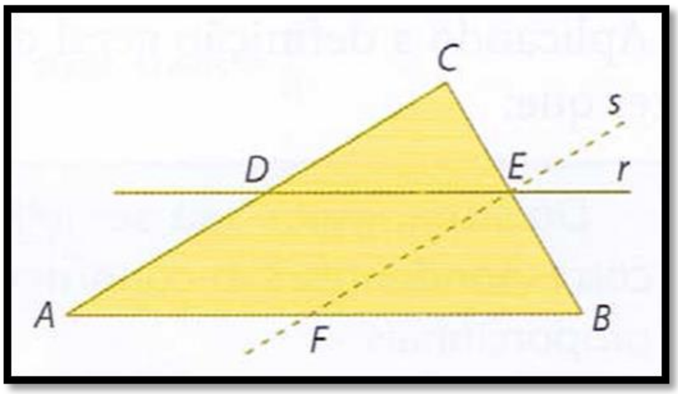


Figura 8 – Triângulo cortado pelas retas r paralela à *AB* e s paralela à *AC*
Fonte: Barroso (2012, p.118)

Desse modo obtemos

$$\frac{CE}{CB} = \frac{AF}{AB} \quad (4)$$

Como o quadrilátero *AFED* é um paralelogramo, têm-se:

$$\overline{AF} = \overline{DE} \quad (5)$$

Substitui-se (5) em (4), temos:

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \quad (6)$$

De (2) e (6), vem:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{AF}{AB} \quad (7)$$

Portanto, de (2) e (6) conclui-se que $ABC \sim DEC$.

2.3 Critérios de semelhança

São três os critérios para se considerar a semelhança de triângulos: 1) ângulo, ângulo (*AA*); 2) critério lado, ângulo, lado (*LAL*); 3) lado, lado, lado (*LLL*), denominados 1º, 2º e 3º casos de semelhança de triângulos, como se vê na sequência.

1º Caso: Ângulo, Ângulo (*AA*)

O teorema a seguir é conhecido como o 1º caso de semelhança de triângulos, em que dois ângulos são conhecidos. Na Figura 9 observa-se que os dois ângulos dos triângulos *ABC* e *A’B’C’* são congruentes, ou seja,

$$B\hat{A}C = {}'\hat{A}'C' \text{ e } A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'.$$

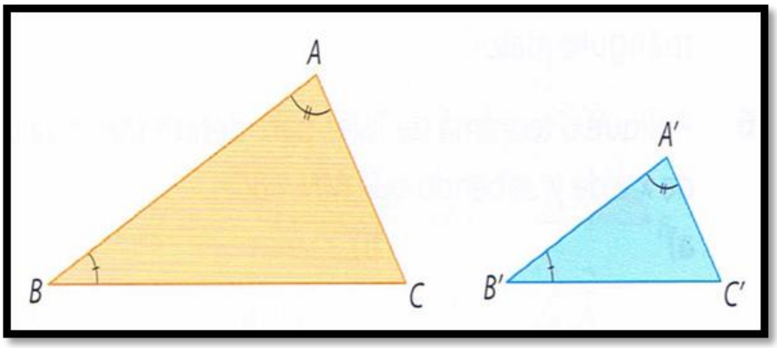


Figura 9 – 1º caso de triângulos semelhantes
Fonte: Barroso (2012, p. 120)

Deve-se mostrar que $ABC \sim A'B'C'$.

Teorema. Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Demonstração:

No ABC, traça-se $\overline{DE}$, de forma que,

$$\overline{AD} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{DE} \; // \; \overline{BC}$$

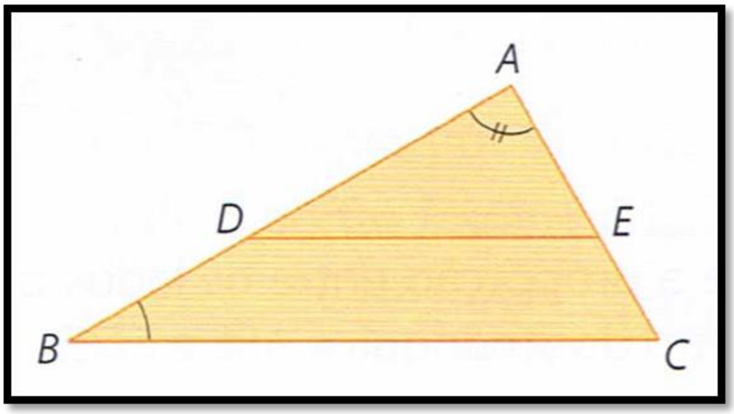


Figura 10 - Triângulo cortado pelo segmento *DE* paralelo ao lado *BC*
Fonte: Barroso (2012, p. 120)

Consideram-se os triângulos *ABC* e *ADE*, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, têm-se,

$$ABC \sim ADE$$

Logo, consideram-se agora os dados iniciais,

$$C\hat{A}B = C'\hat{A}'B' \text{ e } A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

e com base no que se acaba de verificar sobre os ângulos dos triângulos *ABC* e *ADE*, têm-se,

$$E\hat{A}D = C\hat{A}B = C'\hat{A}'B' \text{ e}$$

$$A\hat{D}E = A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

Portanto,

$$E\hat{A}D = C'\hat{A}'B' \text{ e } A\hat{D}E = A'\hat{B}'C'$$

Por construção, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, então, os triângulos *A'B'C'* e *ADE* são congruentes pelo caso de congruência ALA ($E\hat{A}D = C'\hat{A}'B'$, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ e $A\hat{D}E = A'\hat{B}'C'$). Assim, pode-se afirmar que os triângulos ABC e A'B'C' também são semelhantes.

$$ABC \sim A'B'C'.$$

2º Caso: Lado, Ângulo, Lado (*LAL*)

O teorema a seguir é conhecido como o 2º caso de semelhança de triângulos, onde, conhecem-se a proporcionalidade entre dois lados correspondentes dos triângulos e o ângulo formado por eles, conforme Figura 11.

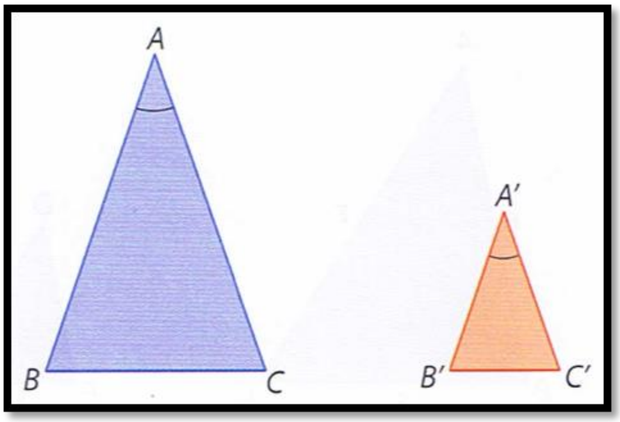


Figura 11 – 2º caso de triângulos semelhantes
Fonte: Barroso (2012, p. 120)

Deve-se mostrar que $ABC \sim A'B'C'$.

Teorema. Se dois triângulos têm dois lados paralelos correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes então esses triângulos são semelhantes.

Demonstração:

No ABC, traça-se $\overline{DE}$, de forma que,

$$\overline{AD} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{DE} \,//\, \overline{BC}.$$

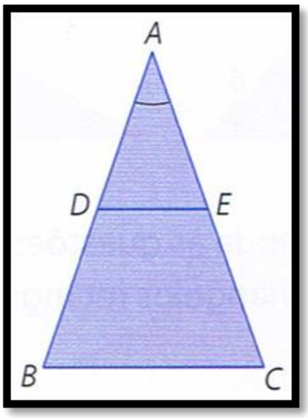


Figura 12 - Triângulo cortado pelo segmento *DE* paralelo à *BC* 2
Fonte: Barroso (2012, p. 120)

Analisando-se os triângulos *ABC* e *ADE*, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, têm-se,

$$ABC \sim ADE$$

Logo, $\frac{AB}{AD} = \frac{CA}{EA} = \frac{BC}{DE}.$

Por construção, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, então, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{EA}$ (8)

De acordo com os dados iniciais, sabemos que,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'} \quad (9)$$

Compara-se (8) e (9), têm-se,

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{CA}{EA}$$

Portanto, $\overline{C'A'} = \overline{EA}$

Assim, tem-se,

$$E\hat{A}D = C'\hat{A}'D'.$$

Logo, os triângulos *A'B'C'* e *ADE* são congruentes pelo caso de congruência *LAL* ($\overline{AD} = \overline{A'B'}$, $E\hat{A}D = C'\hat{A}'D'$ e $\overline{C'A'} = \overline{EA}$). Desse modo, pode-se afirmar que os triângulos ABC e A'B'C' também são semelhantes.

$$ABC \sim A'B'C'.$$

3º Caso: Lado, Lado, Lado (*LLL*)

O teorema a seguir é conhecido como o 3º caso de semelhança, em que somente a proporção entre os respectivos é conhecida, ou seja,

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{C'A'}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}}$$

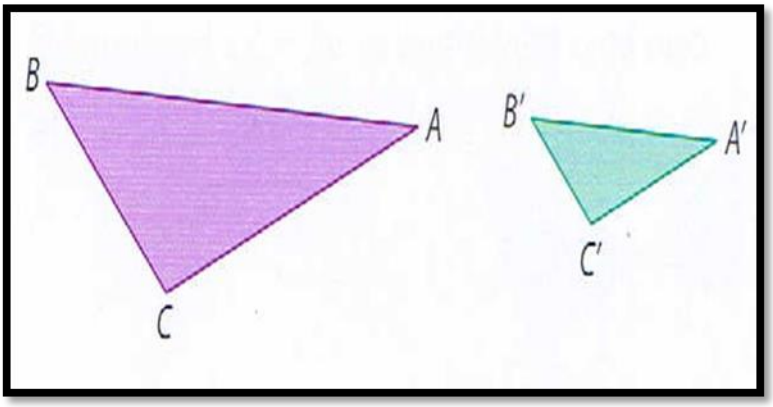


Figura 13 - Triângulos semelhantes 3
Fonte: Barroso (2012, p. 121)

Deve-se mostrar que $ABC \sim A'B'C'$.

Teorema. Se dois triângulos têm três pares de lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

Demonstração:

No *ABC*, Constrói-se $\overline{DE}$ tal que,

$$\overline{AD} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{DE} \;//\; \overline{BC}.$$

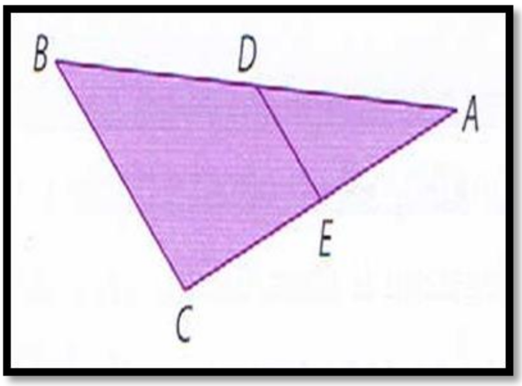


Figura 14 - Triângulo cortado por segmento *DE* paralelo à *BC* 3
Fonte: Barroso (2012, p. 121)

Consideram-se os triângulos *ABC* e *ADE*, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, tem-se,

$$ABC \sim ADE$$

Logo, $$\frac{AB}{AD} = \frac{CA}{EA} = \frac{BC}{DE}.$$

Por construção, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$, então, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{EA}$ (10)

De acordo com os dados iniciais, sabemos que,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'} \quad (11)$$

Compara-se (10) e (11), têm-se:

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{CA}{EA} \quad (12)$$

Portanto, $\overline{C'A'} = \overline{EA}$

Como, $\frac{AB}{AD} = \frac{CA}{EA} = \frac{BC}{DE}$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{BC}{B'C'}$,

Então, de (12) tem-se, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{DE}$

Portanto, $\overline{B'C'} = \overline{DE}$

Logo, os triângulos *A'B'C'* e *ADE* são congruentes pelo caso de congruência *LLL* ($\overline{AD} = \overline{A'B'}$, $\overline{B'C'} = \overline{DE}$ e $\overline{C'A'} = \overline{EA}$). Assim, pode-se afirmar que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* também são semelhantes.

Tales, ao medir a grande pirâmide do Egito, fez uso direto da semelhança de triângulos e levou à prática, onde, nos dias de hoje, são fundamentais às medidas geradas, por exemplo, por equipamentos eletrônicos como estação total, o que ratifica a sua importância no currículo escolar, especialmente no EF que ser quer contemporâneo, formando cidadãos para as demandas e os avanços da sociedade atual.

2.3.1 Consulta a livros do EF sobre semelhança de triângulos e o Teorema de Tales

Para aprimorar a pesquisa bibliográfica subsidiando teoricamente a de campo, buscou-se ler e analisar livros didáticos de EF do 9º ano (embora brevemente, pois não é objetivo deste estudo), de Matemática com o objetivo único de verificar como o Teorema de Tales é abordado. Para tanto se utilizou de quatro obras: Imenes e Lellis (2010), Bianchini (2011), Barroso (2010) e Centurión e Jakubovic (2012).

O **primeiro livro**, dos autores Imenes e Lellis (2010), inclui já no capítulo 1 semelhança de triângulos, bem como figuras semelhantes, conceito de semelhança, construções de figuras semelhantes, triângulos semelhantes e semelhança no triângulo retângulo. No final do capítulo 1 encontra-se uma ação extraclasse para medir distâncias inacessíveis com um transferidor e canudo, porém não usa prumo.

Mesmo que Imenes e Lellis (2010) não tenham citado o Teorema de Tales em sequência ao conteúdo de semelhança de triângulo, no capítulo 7 incorpora a geometria dedutiva, com uma introdução de matemática e dedução. Seguem os conteúdos de ângulos internos e externos dos polígonos, ângulos na circunferência, paralelismo e por fim o Teorema de Tales.

O **segundo livro** consultado, Bianchini (2011), traz em seu capítulo 5, “proporcionalidade em Geometria”. O conteúdo programático inicia abordando razão entre dois segmentos, feixe de paralelas, e então apresenta o Teorema de Tales, 1ª consequência do teorema de Tales e 2ª consequência do teorema de Tales e uma diversificação sobre a razão de ouro finalizando o capítulo.

Em seguida, no capítulo 6 que fala sobre o conteúdo de “semelhança”, inicia-se com figuras semelhantes e, na sequência, polígonos semelhantes, semelhança aplicada a triângulos, teorema fundamental da semelhança, casos de semelhança de triângulos e finaliza o capítulo diversificando com a câmara escura de orifício.

No **terceiro livro** investigado, Barroso (2010) cita em seu capítulo 5 “semelhança”, a retomada de conceitos de razão e proporção, razão entre dois segmentos, proporção entre dois segmentos, Teorema de Tales, figuras semelhantes, polígonos semelhantes, triângulos semelhantes. Houve nesse livro a integração necessária entre semelhança de triângulos e o Teorema de Tales.

Já, no **quarto livro** averiguado, de Centurión e Jakubovic (2012), verifica-se que em seu capítulo 1 “Geometria: ampliações e reduções” abarcam-se os conteúdos programáticos de semelhança, semelhança de triângulo, ação sobre semelhança, utilizando a semelhança de triângulos, o Teorema de Tales. Percebeu-se, ao final da consulta a esse livro, que se encontrou uma prática parecida com a que Tales supostamente utilizou. O referido livro propõe o seguinte exercício para que o estudante pense e responda:

> 3. O professor de Matemática passou este trabalho para o meu grupo: medir a altura da escola, sem subir no telhado. Para isso, nós medimos: a altura de nossa colega Karen, obtendo 1,50m; o comprimento da sombra de Karen, obtendo 1,80m; a sombra do prédio da escola, obtendo 12m. Com essas medidas, calculamos a altura da escola. Qual é essa altura? Calcule você também a altura da sua escola (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2012, p. 23)

Figura 15 - Exercício envolvendo ação prática de semelhança
Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p. 23).

Percebe-se que apenas Centurión e Jakubovic (2012) indicaram uma prática similar a que Tales de Mileto usou na medida da altura da pirâmide para se fazer com os alunos. Tal prática corresponde à proposta pelo trabalho com que se desenvolve dessa dissertação. Verifica-se, também, que nenhum dos livros analisados demonstrou o caso para segmentos incomensuráveis.

Deve-se ressaltar a importância com que Barroso (2010) comentou de que a prova da demonstração do teorema de Tales estava incompleta, pois, faltaria a prova da parte irracional e que os matemáticos já haviam chegado a sua demonstração e que não iriam comentar ou realizar uma prova por completa, mas iria usá-lo.

3 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS: DA ESCOLA DE MILETO À ESCOLA DE HOJE

No presente capítulo, com base no referencial teórico apresentado, discorre-se, primeiramente, sobre o caminho metodológico percorrido para a realização dessa pesquisa, desde a motivação para a sua realização até os passos de seu planejamento e execução, apresentando-se, assim, sua caracterização, a amostra de pesquisa e sua devida descrição, os processos de coleta de dados bem como de suas análises. Na sequência, apresentam-se os dados propriamente ditos, desde a confecção dos materiais que permitiram a realização das atividades de pesquisa na Escola de EF, passando pela sua execução e, por fim, apontando e discutindo percepções do professor e dos alunos, assim como aquelas perpassadas no livro didático utilizado pelo professor com a turma.

3.1 Percurso e processo metodológico

Durante minha caminhada como docente, percebi a necessidade de tornar o ambiente de aprendizagem dos alunos mais satisfatório e significativo no que tange, especialmente, ao ensino e à aprendizagem de Matemática, minha área de formação.

Somado a esse fato, ao término das disciplinas do Mestrado, e por sugestão da orientadora deste estudo, surgiu o tema de Geometria Plana para ser desenvolvido com estudantes de EM ou EF.

Matemática

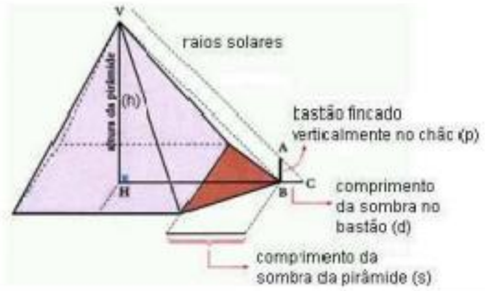
21 **Tales e a altura da pirâmide**

A ideia de proporção e sua aplicação em Geometria são bastante antigas. Um dos trabalhos mais importantes nesse sentido foi desenvolvido por Tales (625 – 547 a.C.), um rico comerciante, filósofo, matemático, astrônomo e geômetra, considerado um dos sete sábios da Antiguidade.

Conta-se que, numa de suas viagens ao Egito, Tales foi desafiado a medir a altura da grande pirâmide de Queóps. Construída por volta de 2500 a.C., ela é considerada uma das grandes maravilhas do mundo antigo.É uma pirâmide reta de base quadrada cujos lados medem cerca de 230 metros. Fincando uma vara vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide, obteve-se uma sombra projetada de mesmo comprimento da vara. Como **p** (altura da estaca), **d** (sombra do bastão) e **s** (comprimento da sombra da pirâmide) podem ser medidos diretamente, o valor de **h** (altura da pirâmide) fica determinado.

(Adaptado do disponível em: <http://comahistoriadamatematica.blogspot.com.br/>. Acesso em: 25 jul. 2013)

Sabendo que o comprimento da sombra da pirâmide é de 35 metros, avalie as afirmativas.



a. (   ) **(V)** A altura da pirâmide é de 150 metros.

b. (   ) **(V)** O volume da pirâmide de Queóps é de 2.645.000 m^3.

c. (   ) **(V)** Os triângulos VHB e ABC são semelhantes.

d. (   ) **(F)** A razão entre a altura (h) e a sombra da pirâmide (s) é proporcional à razão entre a altura (p) e a sombra do bastão (d).

e. (   ) **(V)** A área lateral (*Al*) da pirâmide é igual a $Al = 460.\sqrt{35725}$.

Figura 16 - Exercício envolvendo a temática em estudo
Fonte: FEPAR, 2014.

As necessidades vivenciadas na experiência da atividade docente e os direcionamentos ocorridos foram ao encontro dos requisitos para a conclusão do Curso de Mestrado em Matemática e justificaram a elaboração de um projeto de pesquisa no segundo semestre de 2014, onde os conteúdos do Teorema de Tales seriam trabalhados em classe e extraclasse na escola municipal, com o auxílio de um equipamento de medida construído no laboratório de Engenharia Civil da IMED.

A instituição municipal onde realizei essa pesquisa, que resultou a presente dissertação, tem como filosofia trabalhar com projetos diferenciados que visam à melhoria da construção do conhecimento e em, consequência, a evolução do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)[4].

Ao relatar a proposta para a direção da Escola, percebi que a direção ficou motivada e entusiasmada para a realização do trabalho pretendido, porém, precisava consultar e

[4] O IDEB é o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, que foi criado em 2007 e representa a iniciativa pioneira de reunir, em um só indicador, dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da educação: fluxo escolar e médias de desempenho nas avaliações, assim, é obtido pelas notas o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) e pela taxa média de aprovação percentual, expresso em uma escala de 0 a 10 (INEP, 2015).

convencer a discente titular das turmas para que atuasse em conjunto no projeto. Tal convencimento não ocorreu.

Em que pese o fato, fui indicado a conversar e explanar o projeto para a professora de 9º ano, a qual aceitou e motivou seus alunos com grande entusiasmo para a realização do mesmo.

Assim sendo, o trabalho na forma de projeto de ensino, visava o ensino e a aprendizagem - com aspectos teóricos e práticos - do Teorema de Tales, considerando-se medidas de alturas inacessíveis por segmentos proporcionais em projeções de sombras. Assim, o trabalho no todo teve uma duração de cinco semanas, num total de vinte períodos, onde nas duas semanas iniciais foram apresentados às turmas os conteúdo programáticos da semelhança de triângulos e do Teorema de Tales em aulas expositivas, professora titular, com resolução de exercícios propostos de livros didáticos que essa costuma utilizar e complementares e, ainda, uma contextualização histórica de como Tales de Mileto mediu a famosa Pirâmide de Quéops no Egito, como se apresentou e comentou-se no Capítulo 1 deste estudo. Após o período de exposição teórica, em outras duas semanas, os estudantes, juntamente com sua professora e eu como facilitador/participante, fizemos o trabalho de campo, medindo a sombra de projeção do prédio administrativo da direção do colégio e a sombra do equipamento fabricado (como será exposto no tópico 3.1.4) e utilizado para auxiliar no cálculo da altura inacessível do prédio e, por fim, na última semana, finalizou-se o estudo com a aplicação do questionário aos alunos (Apêndice A), que serviram como instrumento principal de coleta de dados primários, juntamente com as observações realizadas no decorrer de todo o trabalho de pesquisa.

Com a execução desses processos e atividades, a presente pesquisa configura-se, de acordo com a metodologia seguida e a classificação proposta por Diehl e Tatim (2004), em uma pesquisa dialógica, de cunho qualitativo, descritiva, do tipo avaliação formativa e, com base no procedimento técnico de pesquisa, como uma pesquisa-ação.

Na concepção de Diehl e Tatim (2004, p.50), o método dialético de pesquisa fundamenta-se na dialética proposta por Hegel, em que "as contradições transcendem, dando origem a novas contradições, o que passa a requerer solução".

No que tange ao problema de pesquisa, configura-se como qualitativa. No entender dos autores que balizam o entendimento metodológico desta construção, a pesquisa qualitativa "podem descrever a complexidade de determinado problema e a interação de certas variáveis, compreender e classificar os processos dinâmicos vividos por grupos sociais" (DIEHL; TATIM, 2004, p.50). Ainda, permite, para além de medidas exatas expressas pelas pesquisas de cunho quantitativo, “contribuir no processo de mudança de dado grupo e possibilitar, em maior nível de profundidade, o entendimento das particularidades do comportamento dos indivíduos” (op. cit., p.52). Conforme Minayo (2010), a pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares, com um nível de realidade que não pode ser quantificado, por sua complexidade e grande número de variáveis impactantes em dada realidade social.

Assim sendo, direcionar a pesquisa de forma a responder ao problema qualitativamente favoreceu ao entendimento da relevância e da pertinência do Teorema de Tales no EF, na contramão do que corriqueiramente acontece e abordou-se no capítulo introdutório de que, em suma, o professor tem certo grau de dificuldade em operacionalizar o assunto e o aluno tem dificuldades em entendê-lo.

Em razão do objetivo de pesquisa - verificar a relevância da utilização do Teorema de Tales na teoria e prática em medidas de alturas inacessíveis por segmentos proporcionais em projeções de sombras na disciplina de Matemática - a pesquisa delineia-se como descritiva. Para Diehl e Tatim (2004, p.50), esta espécie de estudo “tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou, então, o estabelecimento de relação entre as variáveis”. Nesse contexto e a par desse entendimento, pode-se com o referido estudo descrever o fenômeno da aprendizagem do objeto principal de pesquisa - o Teorema de Tales - e algumas características e variáveis que impactaram sobre o mesmo, tais como, o interesse do aluno, a relação teoria e prática, a interdisciplinaridade e o desejo por aprender Matemática.

Por fim, em relação ao procedimento técnico de pesquisa, realizou-se, primeiramente, uma pesquisa bibliográfica – ação adotada por toda pesquisa que cumprindo com rigor metodológico parte do conhecimento já produzido para avançar na compreensão de dado assunto. Serviram para a construção da base teórica D’Ambrosio (1996), Parra e Saiz (1996), Machado (2000), Spinelli (2003), Dolce e Pompeo (2005), Bongiovanni (2007), Carvalho e Roque (2012), assim como em normativas oficiais, os PCN (BRASIL, 1997). Ainda, serviram à base teórica os livros didáticos, especialmente, Imenes e Lellis (2010), Bianchini (2011), Barroso (2010), Centurión e Jakubovic (2012) e Neto (2012).

3.1.1 A amostra de pesquisa

A população ou universo de pesquisa são os sujeitos que participam da mesma e, no caso desse estudo, possibilitaram a observação, a ação do pesquisador para o levantamento de dados para atingir-se ao objetivo proposto. Na descrição de Diehl e Tatim (2004, p.63), na pesquisa científica, “população ou universo é um conjunto de elementos passíveis de serem mensurados com respeito às variáveis que se pretende levantar”. Assim sendo, a população de pesquisa constitui-se dos alunos de três turmas de 9º ano do EF da Escola Municipal São Luiz Gonzaga de rede pública do município de Passo Fundo, Rio Grande do Sul, totalizando um total de 27 estudantes divididos em nove grupos de três alunos cada, como já dito.

3.1.2 Instrumentos de coleta de dados

Segundo Diehl e Tatim (2004, p.65), para a pesquisa científica configuram-se, essencialmente, dois tipos de fontes de dados, as primárias e as secundárias. Para os autores, as primeiras constituem-se em “dados colhidos e registrados pelo próprio pesquisador em primeira mão”, utilizando-se de técnicas diversas, dentre estas o **questionário** e a **observação**. Para esta pesquisa foram esses os procedimentos de coleta de dados primários.

Assim, o processo de pesquisa contou com a observação e registro de dados e impressões do pesquisador desde o momento do planejamento da mesma, passando por todas as etapas tal como durante a execução das medidas dos segmentos proporcionais em projeções de sombras onde o papel de pesquisador permeou-se ao papel de professor de Matemática, com pequenas intervenções oportunas no decorrer e execução de algumas atividades, atuando como facilitador do trabalho da professora titular.

Os questionários, por sua vez, são excelentes ferramentas para avaliar a qualidade e as ações realizadas nas atividades do trabalho. Representam uma estratégia para a coleta de informações em relação ao perfil dos estudantes, problemas na aplicação, qualidades encontradas na mesma e para determinar até mesmo, o grau de satisfação dos alunos para com o andamento do projeto desenvolvido. Na concepção de Diehl e Tatim (2004, p.68), “o questionário é um instrumento de coleta de dados construído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do pesquisador”. Assim, o questionário proposto aos alunos foi entregue a todos os participantes do projeto.

O referido instrumento de coleta de dados compôs-se de uma parte introdutória que objetivava caracterizar os respondentes (coletando dados como idade e gênero), cinco questões abertas para se compreender quais as percepções dos alunos em relação aos benefícios do Projeto em foco em termos de aliar a teoria à prática, possibilitar a interdisciplinaridade, diminuir dificuldades na disciplina e, até mesmo, se houve a motivação para a escolha de uma futura profissão voltada à área das exatas, mais precisamente a Matemática.

3.1.3 Construção do equipamento para realizar as medidas de alturas inacessíveis

Ao vislumbrar um dos objetivos específicos do estudo - realizar as medidas de alturas inacessíveis por segmentos proporcionais em projeções de sombras - idealizou-se a construção de um equipamento para operar tal ação. Em discussão conjunta, na sala de professores da IMED, formou-se uma equipe de docentes da Escola de Engenharia Civil, Escola de Arquitetura e Urbanismo e até mesmo, pelo professor da Escola de Psicologia, onde todos os envolvidos estavam muito interessados na fabricação do equipamento e na execução do projeto na escola municipal da cidade. No decorrer das discussões foram elaborados três possíveis projetos para a construção do equipamento, optando-se, no entanto, pelo projeto que fornecia a melhor mobilidade, acessibilidade e conforto na hora de executar as medidas pelos estudantes e que favorecesse o ajuste de um nível pelo ambiente, tendo a certeza de que a medida extraída configurasse uma ótima aproximação. Além disso, a um baixo custo financeiro.

Assim, a partir do planejamento, foram indicados e adquiridos os materiais para a confecção do equipamento. Utilizaram-se 1,5m de cano PVC de 25mm de diâmetro, ainda, uma cruzeta de 25mm para encaixes de canos e 50cm de mangueira com diâmetro equivalente ao de uma broca de tamanho 8,5mm. Manusearam-se ferramentas para realizar cortes e encaixes, nesse caso, tais equipamentos foram uma serra e uma furadeira, utilizadas para perfurar madeiras e ferros. Operaram-se brocas de madeiras e de ferros nos tamanhos de 6 e 8mm para obter os devidos furos nos canos de PVC de 25mm.

De posse dos materiais, passou-se ao desenvolvimento ou confecção do instrumento, no Laboratório de Engenharia, Arquitetura e Urbanismo da IMED um instrumento que auxiliou nas medidas de alturas inacessíveis. Nesse momento, contou-se com a ajuda do coordenador da escola de Engenharia Civil e do monitor do laboratório de materiais de construção civil, materiais de construção mecânica e estruturas da IMED.

Assim que o equipamento de medidas de alturas inacessíveis ficou pronto, o mesmo foi disponibilizado na sala dos professores da IMED, na qual surgiu a ideia de construir-se futuramente um projeto e enviá-lo a Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS), para reproduzi-lo e disponibilizá-lo para outras experiências educativas e de pesquisa. Em seguida, o instrumento foi liberado ao grupo de estudantes e à professora, para dar-se o início do projeto.

Após idealização, planejamento e confecção do instrumento habilitou-se o projeto ao seu início, efetivamente sendo executado na Escola Municipal São Luiz Gonzaga, com três turmas do 9º ano em acompanhamento da professora titular da disciplina de Matemática, com vistas a contemplar o objetivo de pesquisa, como se descreve a seguir.

3.2 Desenvolvimento das atividades

A teoria desenvolvida pela professora para a explicação do Teorema de Tales assentou-se principalmente nas obras de Centurión e Jakubovic (2012)[5] e para a sua demonstração, Bianchini (2011, p. 156-57), para os exercícios complementares e trabalho propostos, serviu como referência Andrini e Zampirolo (2002, p. 156-159), Bianchini (2011, p. 157-158) e Centurión e Jakubovic (2012, p. 27-29). Em relação aos critérios ou casos de semelhança de triângulos a professora adotou o conteúdo exposto em de Bianchini (2011, p. 177-180).

Em seguida à finalização dos estudos teóricos, os estudantes foram encaminhados para a realização do trabalho de campo, sendo desafiados a medir a altura do prédio central do colégio municipal São Luiz Gonzaga. Todos os grupos receberam instruções preliminares ao início das atividades, de minha parte como elaborador do projeto e participante da pesquisa. As medidas das sombras da estaca e do prédio central efetuadas pelos grupos de alunos ocorreram pela manhã, no período das 9h às 10h e 30min aproximadamente.

Em relação à turma do 9º ano A, seis alunos aceitaram participar do projeto em estudo de campo e foram divididos em dois grupos de três estudantes (Grupo 1 e 2), onde um ficava

[5] De acordo com a professora, o conceito básico explorado consistiu no enunciado do teorema de Tales, conforme Centurión e Jakubovic (2012, p. 26), como “se três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, então essas paralelas determinam nas transversais segmentos proporcionais”.

responsável por registrar as medidas da sombra da estaca e da sombra do prédio, em cada grupo, como se tem à Tabela 1.

Turma	Sombra do Prédio	Sombra da Estaca
9º ano A – Grupo 1	6,47m = 647cm	67cm
9º ano A – Grupo 2	6,23m = 623cm	63cm

Tabela 1 - Medidas dos grupos 1 e 2 do 9º ano A
Fonte: Dados compilados pelo autor a partir da pesquisa de campo, 2015.

Para a realização da medida, um estudante posicionava o equipamento na ponta da sombra do prédio, nivelava-o em relação ao prumo de água contido na mangueira do equipamento, de maneira mais precisa possível, de acordo com a Figura 17.

Figura 17 - Nível do equipamento pelo ambiente
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

E por fim, outro aluno era quem mensurava as duas medidas, sendo a primeira delas a sombra da estaca e depois a sombra do prédio de acordo com as Figuras 18 e 19.

Figura 18 - Medida da sombra do prédio grupo 1
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

Figura 19 – Medida da sombra da estaca grupo 2
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

Logo nos primeiros momentos de cada grupo, os estudantes não relacionaram que a escadaria de entrada era um obstáculo a se considerar para a obtenção altura aproximada do prédio central. Assim, a professora motivou a essa percepção levando-os a encontrar também a altura da escadaria (Figura 20) e subtrair da altura inicialmente encontrada, pois, essa se relacionava a altura do prédio mais a altura da escadaria. Encontrou-se nas medidas das alturas dos degraus, cinco deles de 17 cm, outros três degraus de 16 cm e um degrau de 5 cm, totalizando uma altura de escadaria de 1,38 m.

Figura 20 - Medida da altura da escadaria 9º ano A
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

Com referência à turma do 9º ano B, nove estudantes participaram do projeto em estudo de campo e divididos em três grupos de três estudantes, um membro de cada grupo ficou responsável por anotar as medidas das sombras da estaca e do prédio, como realizado e exposto para a turma anterior e, de acordo com o que se mostra à Tabela 2 e Figura 21.

Turma	Sombra do Prédio	Sombra da Estaca
9º ano B – Grupo 1	9,60 m = 960 cm	1,00 m = 100 cm
9º ano B – Grupo 2	10,00 m = 1000 cm	1,00 m = 100 cm
9º ano B – Grupo 3	10,23 m = 1023 cm	1,09 m = 109 cm

Tabela 2 - Medidas dos grupos 1, 2 e 3 do 9º ano B
Fonte: Dados compilados pelo autor a partir da pesquisa de campo, 2015.

Outro estudante localizava o equipamento no início da sombra do prédio, equilibrava-o em relação ao prumo de água contida na mangueira do equipamento de maneira precisa, conforme a Figura 21.

Figura 21 - Prumo e medida da sombra da estaca
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

O último integrante do grupo apontava as duas medidas de sombras, a sombra da estaca e a sombra do prédio, com indica a Figura 22.

Figura 22 - Medida da sombra do prédio 9º ano B
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

Constatou-se que as medidas das alturas dos degraus eram, no total, quatro; uma de 17 cm, quatro de 16 cm e um degrau de 5 cm, totalizando a altura da escadaria 1,37 m.

A respeito da turma do 9º ano C, 12 discentes envolveram-se no projeto em estudo de campo, distribuídos em quatro grupos de três estudantes, em que, um componente de cada grupo executou os apontamentos das medidas das sombras da estaca e do prédio como se verifica à Tabela 3 e Figura 23.

Turma	Sombra do Prédio	Sombra da Estaca
9º ano C – Grupo 1	7,32 m = 732 cm	0,74 m = 74 cm
9º ano C – Grupo 2	7,77 m = 777 cm	0,81 m = 81 cm
9º ano C – Grupo 3	6,88 m = 688 cm	0,71 m = 71 cm
9º ano C – Grupo 4	7,16 m = 716 cm	0,72 m = 72 cm

Tabela 3 - Medidas dos grupos 1, 2, 3 e 4 do 9º ano C
Fonte: Dados compilados pelo autor a partir da pesquisa de campo, 2015.

Figura 23 - Nível do equipamento pelo ambiente
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

O último integrante do grupo apontava as duas medidas de sombras, a sombra da estaca e a sombra do prédio, com indica a Figura 24.

Figura 24 - Medida da sombra do prédio 9º ano C
Fonte: Registro fotográfico do autor, 2015.

Após a tomada e anotação de medidas os alunos foram incentivados a aplicar tais medidas e calcular efetivamente a altura da entrada do prédio da Escola, momento em que se utilizaram da semelhança de triângulos e do Teorema de Tales na prática, fazendo a representação de triângulos imaginários, e considerando conceitos essenciais como os obstáculos (escada) e proporcionalidade. Após e durante essas atividades, realizaram-se diversas atividades de avaliação, as quais a professora titular considera que obtiveram notas consideradas boas e acima da média obtida pelos alunos nos conteúdos anteriores.

3.3 Resultados

Neste subitem serão descrito os resultados advindos das observações e comprovações durante as atividades, pela realização e demonstração de cálculos pelos alunos utilizando-se da semelhança de triângulos e do Teorema de Tales e, ainda, os dados obtidos pela aplicação dos questionários.

3.3.1 Representação

Cada grupo de estudantes, com seus dados recolhidos em pesquisa de campo, retomou os conhecimentos prévios da história matemática de Tales de Mileto e a medição da grande pirâmide de Quéops em Gizé no Egito, utilizando-se das Figuras 25 e 26.

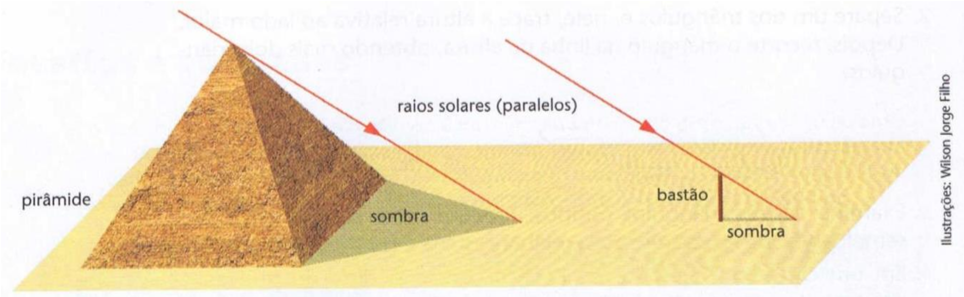


Figura 25 - Medida de Tales com auxilio de bastão, raios solares (paralelos)
Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p. 22).

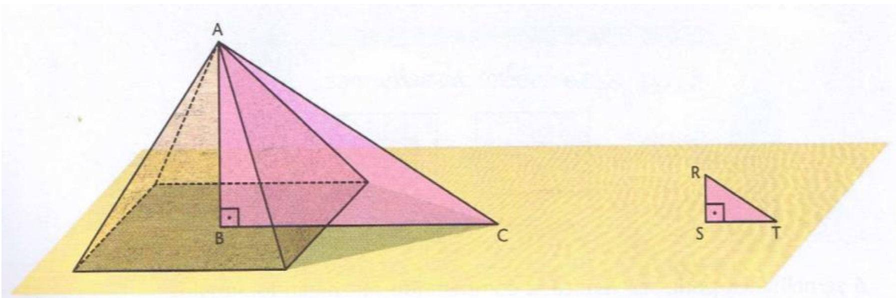


Figura 26 - Tales de Mileto considerando 2 (dois) triângulos imaginários
Fonte: Centurión e Jakubovic (2012, p. 22).

A exemplo da experiência de Tales de Mileto, como mostra a Figura 31, os alunos relacionaram triângulos imaginários e aplicando o conhecimento do conteúdo de semelhança de triângulo e Teorema de Tales estudado, tomaram como:

- ***H***: a medida da altura do prédio pretendida;
- ***h***: a medida da altura do bastão;
- ***x***: a medida da sombra do prédio;
- ***y***: a medida da sombra do bastão.

Assim, aplicaram a relação de lados proporcionais de triângulos semelhantes:

$$\frac{H}{h} = \frac{x}{y} \qquad (13)$$

A medida ***H*** da altura do prédio está para a medida ***h*** da altura da estaca, assim como, a medida ***x*** da sombra do prédio está para a medida ***y*** da sombra da estaca. Como a medida da altura da estaca ***h*** = 1 m (um metro) temos:

$$\frac{H}{1} = \frac{x}{y}$$
$$H = \frac{x}{y} \qquad (14)$$

Portanto, cada grupo de estudantes fez em sala de aula apenas a razão da medida ***x*** da sombra do prédio pela medida ***y*** da sombra da estaca. Podemos observar a Tabela 4 com os dados que os grupos de alunos coletaram em pesquisa de campo e relacionar com a Tabela 5, dos cálculos aproximados da medida da altura do prédio com obstáculo.

TURMA	SOMBRA DO PRÉDIO	SOMBRA DA ESTACA
9º ANO A – GRUPO 1	6,47 m = 647 cm	0,67 m = 67 cm
9º ANO A – GRUPO 2	6,23 m = 623 cm	0,67 m = 63 cm
9º ANO B – GRUPO 1	9,60 m = 960 cm	1,00 m = 100 cm
9º ANO B – GRUPO 2	10,00 m = 1000 cm	1,00 m = 100 cm
9º ANO B – GRUPO 3	10,23 m = 1023 cm	1,09 m = 109 cm
9º ANO C – GRUPO 1	7,32 m = 732 cm	0,74 m = 74 cm
9º ANO C – GRUPO 2	7,77 m = 777 cm	0,81 m = 81 cm
9º ANO C – GRUPO 3	6,88 m = 688 cm	0,71 m = 71 cm
9º ANO C – GRUPO 4	7,16 m = 716 cm	0,72 m = 72 cm

Tabela 4 - Medidas das sombras do prédio e das sombras da estaca
Fonte: Dados compilados pelo autor a partir da pesquisa de campo, 2015.

TURMA	ALTURA DO PRÉDIO
9º ANO A – GRUPO 1	9,65 m
9º ANO A – GRUPO 2	9,30 m
9º ANO B – GRUPO 1	9,60 m
9º ANO B – GRUPO 2	10,00 m
9º ANO B – GRUPO 3	9,38 m
9º ANO C – GRUPO 1	9,89 m
9º ANO C – GRUPO 2	9,59 m
9º ANO C – GRUPO 3	9,69 m
9º ANO C – GRUPO 4	9,94 m

Tabela 5 - Medida aproximada da altura do prédio com obstáculo
Fonte: Dados compilados pelo autor a partir da pesquisa de campo, 2015.

Os grupos de alunos tinham um obstáculo a vencer, a altura da escada que permite acesso ao prédio interferia na medida da altura do prédio. Sendo assim, cada grupo precisou calcular a altura de cada degrau da escada para poder então descobrir a altura da escada e tirar essa diferença em relação à proporção encontrada no cálculo da altura do prédio indicada na Tabela 6.

TURMA	ALTURA DA ESCADA
9º ANO A – GRUPO 1	138 cm = 1,38 m
9º ANO A – GRUPO 2	138 cm = 1,38 m
9º ANO B – GRUPO 1	137 cm = 1,37 m
9º ANO B – GRUPO 2	137 cm = 1,37 m
9º ANO B – GRUPO 3	137 cm = 1,37 m
9º ANO C – GRUPO 1	137 cm = 1,37 m
9º ANO C – GRUPO 2	158 cm = 1,58 m
9º ANO C – GRUPO 3	158 cm = 1,58 m
9º ANO C – GRUPO 4	121 cm = 1,21 m

Tabela 6 - Medidas aproximadas da altura da escada: obstáculo
Fonte: Dados compilados pelo autor a partir da pesquisa de campo, 2015.

Observando melhor a tabela 6, a turma do 9º ano C, grupo 4, teve uma maior preocupação com a medida da altura de cada degrau da escada, pois acreditavam que o erro da medida da altura do prédio calculada por eles por semelhança seria bem menor e que encontrariam uma medida bem mais próxima da medida real do prédio.

TURMA	ALTURAS PROXIMADAS DO PRÉDIO
9º ANO A – GRUPO 1	8,27 m
9º ANO A – GRUPO 2	7,92 m
9º ANO B – GRUPO 1	8,23 m
9º ANO B – GRUPO 2	8,63 m
9º ANO B – GRUPO 3	8,01 m
9º ANO C – GRUPO 1	8,52 m
9º ANO C – GRUPO 2	8,01 m
9º ANO C – GRUPO 3	8,11 m
9º ANO C – GRUPO 4	8,73 m

Tabela 7 - Medidas aproximadas da altura do prédio sem obstáculo
Fonte: Dados compilados pelo autor a partir da pesquisa de campo, 2015.

Ao observar os dados da Tabela 7, podemos verificar que as medidas dos grupos de alunos não são iguais, devido aos erros de inferência, ou seja, erro de ajuste. Deve-se considerar o fato de que em cada grupo de alunos têm-se dois tipos de erros: o primeiro tipo de erro está ligado à circunstância do estudante que controla a estaca e verifica o prumo da melhor maneira possível e o segundo tipo de erro está interligado ao estudante que executou a medida da sombra da estaca e a medida da sombra do prédio. Confirma-se dessa forma o depoimento da professora titular,

> Pode-se observar que aos alunos tiveram uma boa participação, apesar de terem apresentando dificuldades para efetuar as medições e perceberem que os ângulos em que os raios solares incidem no prédio e na estaca são iguais. Os alunos despertaram interesse e admiração pelas descobertas, embora as medidas de cada grupo não tenham sido iguais, eles entenderam que o resultado obtido foi aproximado. (Depoimento da Professora Titular, 2015).

Para melhor aproximação da altura real do prédio pode-se calcular a média aritmética simples, em obtenção de uma ótima abrangência de medida, sendo essa 8,27 m como a medida da altura aproximada do prédio.

3.3.2 Concepções dos alunos

Ao realizar a proposta de atividade de campo com os estudantes em conjunto com a professora de Matemática, além de minhas observações e anotações, depoimentos de professores, coordenação pedagógica e direção da escola, foram relevantes os dados coletados por meio da aplicação de questionário aos alunos participantes. Embora baixa a taxa de adesão dos mesmos em respondê-los (aproximadamente 26% dos alunos contribuíram com o preenchimento do questionário disponível, conforme Apêndice B), os dados permitem ótimas reflexões.

As questões iniciais trataram de caracterizar os alunos quanto à idade e ao gênero, assim, a as idades variaram de 14 a 16 anos.

A primeira questão inquiriu aos alunos sobre “quais benefícios que a teoria e a prática do Teorema de Tales lhes proporcionariam em suas aprendizagens”. A maioria das respostas, algumas das quais se transcreve na sequência, apontou para a importância da aula prática, o aluno consegue identificar com facilidade que “aprende mais” com a prática, muito embora não deixe claro o que, efetivamente, aprendeu (um aluno apenas relatou que aprendeu a medir, mas não fez referências a medidas inacessíveis, por exemplo).

> Aprendi muito mais na prática porque a teoria não explica tanto quanto a prática; aprendi a não só ficar na sala de aula, porque na sala é muito chato [...] na prática temos melhores avanços (Aluno A).

> Proporcionou uma boa aprendizagem, eu consegui guardar mais os conteúdos, eu gostei mais da prática, aprendi mais rápido (Aluno E).

> Eu aprendi a medir melhor (Aluno C).

A segunda questão, complementar à primeira, buscou compreender “quais as dificuldades que a prática do Teorema de Tales ajudou-os a suprir na disciplina de Matemática”. A maioria dos alunos, ou a totalidade, expressou que a prática ajudou na compreensão da teoria. Também se pontua que não especificaram qual conceito dentro da teoria, ou que aspectos da teoria.

A importância da prática é hipótese que move este estudo, e é referida também por autores como D'Ambrosio (1996) e Sacramento (2008), quando enfatizam que a Matemática deve relacionar-se diretamente ao cotidiano das crianças ou adolescentes. Do mesmo modo é a percepção dos PCN, para a necessidade de contemplarmos a efetivação dessa prática, assegurando que "O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática", os próprios livros didáticos analisados, além da experiência empírica do autor, também denunciam essa dificuldade. No entanto percebe-se pela atividade realizada, e pela concepção dos alunos que movimentos nessa direção precisam ser feitos - a Matemática é uma ciência que se aprende na prática. Tal estratégia pode se dar, por exemplo, promovendo o ensino desta ciência por meio da metodologia de projetos, adotando-se a pesquisa como princípio pedagógico e a reflexão com o aluno como mote de toda e qualquer aula sem, contudo, prescindir da teoria.

A terceira questão trouxe ao debate a percepção do aluno quanto a buscar no projeto uma aproximação de outras disciplinas, como no caso, a interação com a disciplina de Filosofia e qual a relevância dessa comunicação entre áreas do conhecimento. Com relação a essa aproximação entre as disciplinas, a maioria dos discentes afirmou que houve interação com a disciplina de Filosofia, no qual, Tales de Mileto foi considerado o primeiro grande sábio grego, matemático, engenheiro, urbanista de sua época.

> Sim, houve porque Tales de Mileto foi o primeiro matemático, também foi filósofo, engenheiro (Aluno B).
>
> [...] urbanista (Aluno C).

Novamente percebe-se que o aluno tem certeza quando reconhece a importância da interligação entre as disciplinas, mesmo ainda não tendo conhecimentos muito aprofundados ou exatos teoricamente ("o primeiro"), pontua a relevância de ter conhecido a história de Tales de Mileto. De acordo com os PCN,

> O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (BRASIL, 1997, p.19).

Ao analisar a forma como registraram suas respostas no questionário, percebeu-se que poderia (deveria) haver a relação da disciplina neste projeto com a área das Linguagens, pois teria sido uma ótima oportunidade desses alunos aprimorarem seu sistema de escrita - já que revelaram inúmeros erros ortográficos, até mesmo incompreensão da letra - por estarem produzindo algo que, aparentemente, lhes trouxe prazer, já que voluntariamente optaram por respondê-lo.

Questionados sobre “as conclusões que você chegou ao manusear o equipamento”, na quarta questão, os alunos aproximaram as respostas a sentimentos de satisfação e outras reações positivas. Veja-se:

> Ele foi um equipamento fabricado, não tem tecnologia, ele tinha fácil manuseio [...] gostei do aparelho, foi muito importante, gostei do equipamento, porém precisa do auxílio de outros colegas para o seu manuseio (Aluno A).

> [...] o equipamento pré-fabricado tinha fácil manuseio, tinha precisão pelo nível do ambiente, porém precisamos de pelo menos três pessoas para manusear (Aluno D).

Percebe-se aceitação do equipamento, no entanto, são equivocados os conceitos de tecnologia. A mesmo, provavelmente, é concebida pelos alunos como algo que se relacione ao eletrônico ao computacional. O aluno, até mesmo pela dificuldade de reconhecer o conhecimento como historicamente situado, como muito se abordou nesse estudo, não percebe que, assim como o instrumento construído e utilizado, a tecnologia consiste em todo e qualquer meio ou processo que “o homem desenvolveu [para a sua] sobrevivência, meios para suprir necessidades, realizando, em geral, avanços em benefícios da humanidade” (BRASIL, 2014, p.25). Assim, considerando que medidas antes inacessíveis tornam-se acessíveis, o instrumento, embora sua simplicidade seja uma tecnologia que poderia, a par do desenvolvimento de um bom projeto de ensino e aprendizagem Matemática, ser idealizado, planejado e construído pelos próprios alunos.

Por fim, a última questão buscou identificar se “o estudo realizado lhe auxiliou na escolha de uma futura profissão voltada à área das exatas”, para a qual se obteve resposta negativa de todos os alunos avaliados. Tal situação denota, talvez, as lacunas que salientamos no capítulo introdutório, a Matemática como hoje é ensinada nas escolas não atrai o adolescente, não o cativa, não o estimula. É preciso partir a novos caminhos, laçar novos olhares, sendo que os projetos podem ser possibilidades viáveis.

CONCLUSÕES

Ao findar esse trabalho dissertativo, retoma-se o seu objetivo principal, que foi verificar de que modo se pode trabalhar de forma prática a semelhança de triângulos e o Teorema de Tales no Ensino Fundamental? Buscou-se atingi-lo, executando-se um projeto envolvendo teoria e prática de semelhança de triângulos e o Teorema de Tales com 27 estudantes de 9º ano do EF da Escola Municipal São Luiz Gonzaga do município de Passo Fundo, atuando como pesquisador-participante junto com a professora titular de Matemática, visando à medida inacessível da altura do referido educandário.

Assim, conclui-se que, a partir da experiência realizada e registrada nesse relato, é de suma relevância possibilitar a alunos do EF a prática destes conteúdos matemáticos. Foi visível a melhora da aprendizagem e do convívio entre estudantes e monitor em relação aos conteúdos apresentados, sendo que essa abordagem aumentou a motivação dos alunos de 9º ano para o ensino de Matemática, além de perceber-se o empenho e a motivação dos mesmos na definição da altura inacessível, bem como elevação das notas em atividades avaliativas.

A Geometria Plana usualmente tratada nos últimos anos do EF, especialmente o conteúdo de semelhança de triângulos e Teorema de Tales, é de suma importância para os estudantes, pois desperta sobre eles a forte noção de proporcionalidade, com a qual podem calcular medidas inacessíveis como alturas de árvores, postes, caixa d'água, estátuas, prédios, largura de rios, entre outros, servindo-lhes à resolução de problemas práticos do dia a dia. Por isso, evidenciam-se certezas para fazer frente aos aspectos lacunares indicados na problemática que motivou essa pesquisa - a educação deve contemplar a realidade do aluno e os problemas que os cercam, visando despertar seus interesses para a aprendizagem.

Tal condição pode ser contemplada com a utilização de aulas práticas – de forma alguma se excetuando a teoria, mas agregando a ela. Em campo o aluno adquire maiores e melhores condições de compreensão da semelhança de triângulos e do Teorema de Tales, devendo primeiramente ser orientado por um professor que lhe traga as bases teóricas, conceituais, localizando o conteúdo na história, no espaço, no tempo, pois as ideias significativas da Matemática não acontecem de forma espontânea ou desconectadas desses contextos. No trabalho com práticas, como se viu no decorrer desse estudo, o professor estará supervisionando e desafiando o aluno a todo o momento – lançando perguntas, propondo problemas, evidenciando desafios - para que ele não se desvie do que foi proposto e para que utilize essas aulas práticas como suporte para sanar suas dúvidas perante um determinado conteúdo. Nessa experiência, foi possível visualizar que a utilização de aulas práticas unidas com aulas teóricas sobre semelhança de triângulos e Teorema de Tales é sem dúvida muito importante como metodologia de ensino. A dinâmica oferecida pela aula prática despertou no aluno maior interesse para desenvolver o conteúdo, fixá-lo ainda mais e sanar dúvidas. Embora as aulas práticas, em particular as aulas que envolvam semelhança e o Teorema de Tales não solucionem todos os problemas de aprendizagem, elas mostram novos caminhos e novas formas de ensinar e aprender.

Ainda, em decorrência da experiência, pode-se perceber que uma metodologia possível para a sistematização e operacionalização das aulas práticas é a de projetos. Por meio destes é possível mais contato aluno e professor e maior vivência prática dos conteúdos, exigindo, com certeza, maior tempo e também, muitas vezes, adequações no currículo, permitindo ao professor o planejamento e ao aluno a participação sem, contudo prejudicar o seu tempo escolar nas demais disciplinas.

Percebe-se que responsabilidade do ensinar e do aprender deve ser compartilhada, por isso, esse aprender, exige do professor um papel fundamental. Assim, penso que os professores de Matemática, bem como os demais professores de áreas afins, devam procurar alternativas para aumentar a motivação para o ensino e a aprendizagem dos seus alunos, desenvolvendo nesses a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção, o raciocínio lógico dedutivo e o senso cooperativo. Ao planejar e executar o trabalho pude perceber que projetos, bem construídos e elaborados por um corpo docente, podem ser utilizados para auxiliar no ensino e na aprendizagem, e dirimir muitas das dificuldades encontradas. Concluo acreditando que a utilização de abordagens teóricas e práticas em sala de aula e extraclasse, especialmente utilizando-se a metodologia de projetos, com planejamento e objetivos claros, são de grande importância no ensino da matemática, pois possibilita motivar os alunos e, consequentemente, contribui para que a aprendam de forma mais prazerosa.

Em face de toda a aceitação, é pertinente também apontarmos as limitações desse trabalho, como o tempo de execução e a coleta de dados mais precisos dos momentos da representação dos alunos, por exemplo.

Mesmo assim, o desenvolvimento dessa atividade foi um bom meio de demonstrar que existem formas de tornar o ensino mais prático e prazeroso para os estudantes, bem como para desafiar os professores a sair um pouco da sala de aula e trazer toda a teoria para ser vivenciada do lado de fora das quatro paredes.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNADJER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

ANDRINI, A., ZAMPIROLO, M. J. C. de V. **Novo praticando matemática.** Coleção Atualizada. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011.

BARROSO, J. M. **Araribá Matemática 9**: ensino fundamental. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BIANCHINI, E. **Matemática 9**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BONGIOVANNI, V. O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico. **EVEMAT** - Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 2.5, p.94-106, 2007. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/.../12094>. Acesso em: 12 abr. 2015.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Secretaria de Educação Básica. **Formação de professores do ensino médio**, Etapa II - Caderno V: Matemática. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2014.

CARVALHO, J. B. P.; ROQUE, T. **Tópicos de história da matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática:** teoria e contexto, 9º ano. São Paulo: Saraiva, 2012.

D´AMBROSIO, U. **Por que se ensina Matemática?** Sociedade Brasileira de Ensino de Matemática, 1996. Disponível em: < apoiolondrina.pbworks.com/f/Por%20que%20ensinar%20Matematica.pdf>. Acesso em: 12 jan. 2015.

DIEHL, A., TATIM, D. C. **Pesquisa em ciências sociais aplicadas**: métodos e técnicas. São Paulo: Prentice Hall, 2004.

DOLCE, O., POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**: volume 9: geometria plana. São Paulo: Atual, 2005.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. – 1ª reimpressão 2005.

FAUSTINONI, L. **Tecnologia de informação e comunicação:** uma abordagem escolar na matemática no contexto de objetos de aprendizagem**.** 63 f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Santa Maria, 2012.

FEPAR. **Processo seletivo 2014**. Disponível em: <http://www.fepar.edu.br/hotsite_2014_1 /documentos/gabarito_medicina.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2015.

IMENES, L. M.; Lellis, M., **Matemática 9 º ano**. São Paulo: Moderna, 2010.

INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **IDEB.** Disponível em: <http://www.portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/o-que-e-o-ideb>. Acesso em: 18 fev. 2015.

MACHADO, N. J. **Educação**: projetos e valores. São Paulo: Escrituras, 2000.

MICHAELIS. **Dicionário on-line**. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/definicao/doxografo%20_948331.html>. Acesso em: 12 abr. 2015.

MINAYO, M. C. S. **O desafio da pesquisa social.** In: **______**; GOMES, Suely Ferreira Deslandes Romeu (Orgs.). **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010. p.9-29.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria.** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de matemática elementar:** geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.2.

PARRA, C.; SAIZ, Irma (Orgs.). **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PENEIREIRO, J. B.; SILVA, M. F. **Geometria Plana e Desenho Geométrico.** 139 f. Caderno Didático – Departamento de Matemática – Centro de Ciências Naturais e Exatas – Universidade Federal de Santa Maria, 2008.

SPINELLI, M. **Filósofos pré-socráticos**: primeiros mestres da filosofia e da ciência grega. – 2. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2003. 392 p.

PIRÂMIDE de Quéops. Disponível em: <http://www.lmc.ep.usp.br/people/hlinde/estruturas/ queops.htm>. Acesso em: 20 maio 2015.

SANTALÓ, L. A. **Matemática para não-matemáticos.** Conferência inaugural do I Congresso Íbero-Americano de Educação Matemática, Sevilha, Espanha, 1990.

WIKIPEDIA. **Biblioteca virtual**: Heródoto. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Her%C3%B3doto>. Acesso em: 1 maio 2015.