Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Magda Cristina de Oliveira Dias

O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria

Juiz de Fora

2015

Magda Cristina de Oliveira Dias

O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Casagrande

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Dias, Magda Cristina de Oliveira.
O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria / Magda Cristina de Oliveira Dias. – 2015.
57 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Casagrande
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1. Ensino. 2. Geometria. 3. Origami. I. Casagrande, Rogério, orient. II. Título.

Magda Cristina de Oliveira Dias

O uso do Origami como recurso didático-metodológico para o ensino de Geometria

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 15 de agosto de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Prof. Dr. Rogério Casagrande - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Marcelo Oliveira Veloso
Universidade Federal de São João Del Rei

Professor Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde, força e disposição para nunca desistir.

Aos meus pais, que viraram estrelas e hoje iluminam minha estrada.

A minha irmã, por estar sempre ao meu lado.

Aos meus colegas de curso, por compartilharem comigo suas brilhantes resoluções, suas angustias e suas vitórias. Em especial, ao amigo sempre presente Ricardo Miranda.

A CAPES, pelo auxilio financeiro.

Aos professores do PROFMAT, pelo profissionalismo.

Ao meu orientador Rogério Casagrande, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivo.

Aos meus filhos Maria Clara e João Lucas e meu esposo Gustavo, por me apoiarem e compreenderem as minhas ausências.

E a todos que diretamente ou indiretamente fizeram parte desta etapa, o meu muito obrigada.

RESUMO

O ensino da Matemática, em geral, é considerado muito difícil e desinteressante para muitos alunos, logo precisamos desenvolver atividades motivadoras que despertem o interesse dos mesmos. Desta forma, este trabalho tem por objetivo propor atividades que abordem conceitos e noções de Geometria plana e espacial, usando como recurso pedagógico o Origami. O uso das dobraduras tornam as aulas mais dinâmicas, prazerosas e contribui significativamente para a interação e participação dos alunos na formação de conceitos e conhecimentos. Além de melhorar a concentração e a autoestima dos alunos, o recurso da experimentação permite aos alunos a formulação de conjecturas e a exploração de suas características através do contato. O Origami, além de contribuir para uma aprendizagem efetiva, possibilita o desenvolvimento de habilidades importantes para a formação geral do aluno, como a interdisciplinaridade, a disciplina, o trabalho em equipe, o raciocínio, a concentração entre outras.

Palavras-chave: Ensino. Geometria. Origami.

ABSTRACT

The teaching of mathematics in general is considered, by many students, very difficult and uninteresting. We must immediately develop motivating activities that arouse the their interest. In this way, this work aims to propose activities adchessing concepts and notions of plane and spatial geometry, using Origami as a pedagogical resource. The use of folds make the classes more dynamic, pleasurable and contributes significantly for interaction and partcipation of students in training concepts and knowledge. In addition to improving concentration and self-esteem of students, the trial feature allows students to formulate conjectures and exploitation of their characteristics througer contact. The Origami contributes for effective learning, enables the development of important skills for the general education of the student such as interdisciplinarity, teamwork, reasoning, concentration and others.

Keywords: Education. Geometry. Origami.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo da Geometria partiu-se da necessidade do ser humano entender e descrever seu meio. As questões relacionadas com as formas e as relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço, com a localização e o deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes ângulos são tão necessárias hoje quanto o foram no passado.

Situações cotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a arquitetura, a mecânica, etc... demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente. Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno.

A necessidade de se ter Geometria na escola pode ser argumentada pela justificativa de que, sem o pensamento geométrico os estudantes não possuem capacidade de solucionar situações do cotidiano que requerem o uso da Geometria.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais

> O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir de exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. [2]

No entanto, até há poucas décadas, o ensino da Geometria no Brasil era apenas racional, centrado em definições e demonstrações, esse modo formal dedutivo de conceber o ensino da Geometria elementar dificultava a aprendizagem dela para muitos. A ênfase dada aos aspectos algébricos da Matemática nas décadas de 1960 e 1970, com o Movimento da Matemática Moderna, provocou o abandono do campo geométrico nos programas escolares, com consequências visíveis para a atualidade. Com isso, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações.

A aprendizagem dos conceitos geométricos, muitas vezes, não é significativa, isso se dá pelo fato de que, na maioria das vezes, a geometria é apresentada aos alunos de forma mecanizada. O ensino de Geometria na escola tem se caracterizado por uma ênfase no caráter quantitativo, onde o uso de fórmulas para cálculo de grandezas, associadas a questões que envolvem aspectos geométricos é a tônica. Pouca ênfase é dada aos conceitos propriamente ditos.

Com base nesses fatos e diante das dificuldades expressas no ensino da geometria, é notória a importância da utilização de recursos materiais. Um recurso de bastante eficácia é o origami.

Por intermédio do uso das dobraduras de papel, o ensino da geometria passa a favorecer associações entre conteúdos abstratos e problemáticas cotidianas, isto porque na confecção de cada dobradura tornam-se extremamente necessárias articulações de estratégias geométricas para efetuar tais construções. Além disso, constituem-se em material didático que transforma o ensino-aprendizagem em uma atividade atraente e motivadora onde os alunos podem desenvolver sua experimentação geométrica e a visão espacial.

O trabalho com dobraduras é enriquecedor, no que se refere também, as inúmeras possibilidades que ele oferece nos diversos ramos da Matemática. Além de toda a exploração geométrica que é possível fazer com o origami, as noções de proporcionalidade, frações, aritmética, álgebra e funções, são fortemente evidenciadas nesta prática. A que salientar que o aluno tem preferências significativas por este tipo de abordagem, uma vez que, envolve o lúdico, a manipulação e o prazer de aprender.

Para o construtivismo, a habilidade de visualização é de fundamental importância, pois é através da imagem visual dos objetos geométricos que o aluno passa a controlar um conjunto de operações básicas para o ensino da geometria. Na concepção construtivista o indivíduo só aprende quando passa a elaborar seus próprios conceitos.

1.1 A ESCOLHA DO TEMA

Atuando na Rede Publica de ensino de Juiz de Fora há 17 anos. Muitas mudanças foram acontecendo durante esses anos. Mudanças estruturais, curriculares, mudanças nos sistemas de avaliação, nos sistemas de progressão e principalmente mudou-se o perfil de nossos alunos. E nós professores? Será que Mudamos?

Aprender Matemática, nunca foi uma tarefa atraente para maioria dos nossos alunos. Sempre existiu um tabu de que a Matemática é difícil e aprendê-la é privilégio de poucos. Cabe a nós professores, tentar desmistificar essa ideia mudando o nosso modo de ensinar Matemática.

Nossa prática em sala de aula é determinada pelo conjunto de crenças que temos sobre o que seja educar, do significado de ensinar e de aprender. São as nossas teorias desenvolvidas ao longo do tempo que fundamentam as nossas ações.

A modificação da nossa prática docente exige uma reflexão sobre as nossas "verdades" em relação ao ensino e a aprendizagem de Matemática. Temos que buscar entender como os alunos aprendem e dar um sentido ao que se aprende.

Refletindo sobre nossas ações na sala de aula é que percebemos como somos falhos, achando que sabemos tudo, achando que todos os alunos podem aprender da mesma forma e ao mesmo tempo. E como, sem querer, limitamos a aprendizagem dos nossos alunos, quando nos limitamos a um único jeito de ensinar.

Hoje, ainda que errando, nós educadores, tentamos a cada dia fazer um pouquinho diferente. Buscando alternativas para trazer o ensino da Matemática, sempre que possível, mais próximo da realidade dos alunos.

Quando levamos algo diferente para a sala de aula, imediatamente os alunos começam a mudar sua postura, ficam mais atentos, curiosos e questionadores. Com isso, nós professores também ficamos mais entusiasmados para ensinar.

O uso de recursos pedagógicos como materiais manipuláveis, por exemplo, desde que usados tendo claro os objetivos a serem alcançados, tornam as aulas mais dinâmicas, com maior participação dos alunos. Os alunos ficam mais independentes para fazer as atividades pois se sentem mais confiantes e com isso podemos dar mais atenção aos alunos com maiores dificuldades.

Neste trabalho, é apresentado como proposta para o ensino de Geometria para turmas de 6º e 7º anos, algumas atividades com dobraduras e Origami.

No ano de 2014, foi desenvolvido na escola em que leciono, um projeto cujo tema era CONVIVÊNCIA. Os professores se organizavam por turma, por área ou por tema para desenvolver o projeto. Uma amiga que também leciona Matemática, me convidou para fazer um trabalho sobre Origami com algumas turmas. O objetivo era, através do

Origami, trabalhar a socialização, o cooperativismo, a amizade, a paciência, a convivência de uma maneira geral.

Trabalhamos com os alunos a construção de tsurus, flores de vários modelos, borboletas, laços, corações e cubos. Foi montada uma sala para expor os trabalhos de dobraduras e os textos produzidos sobre respeito ao próximo, tolerância, amizade, violência, a importância do diálogo, entre outros.

Durante o desenvolvimento do projeto, observei um maior interesse e envolvimento dos alunos. Até aqueles mais indisciplinados e que não participam das aulas, participaram e ajudaram os colegas com maior dificuldade. Quando passava as instruções para a confecção das dobraduras, eu usava termos geométricos tais como : diagonal, quadrado mediatriz, losango, bissetriz e, no início os alunos perguntavam: Como? O quê? Mas no final eles já tinham assimilado e também já usavam os termos corretamente quando tinham que repassar os passos de uma construção.

A partir dessa experiência, trouxe o origami para as aulas de geometria e pude observar que, os alunos se sentiam mais motivados, faziam mais perguntas e alguns até arriscavam suas conclusões, mostrando que estavam realmente aprendendo. O que foi comprovado nas atividades avaliativas.

Diante das dificuldades que enfrentamos hoje no processo de ensino-aprendizagem e o desinteresse dos alunos, principalmente em Matemática, nós professores temos que estar sempre buscando atividades motivadoras que despertem o interesse dos alunos e possibilitem uma maior e efetiva aprendizagem. Com o uso de dobraduras, podemos tornar o ensino de geometria dinâmico e criativo. O origami é um recurso pedagógico e um material concreto que diversifica e contribui no enriquecimento das aulas, melhora a atenção, o grau de curiosidade e o envolvimento dos alunos nas atividades propostas.

O presente trabalho inicia-se com um breve histórico sobre a origem da Geometria e a história do Origami, No capitulo seguinte, temos alguns conceitos que regem a geometria euclidiana e, no capitulo 4, as sete possibilidades para uma única dobragem de Origami, que são os axiomas de Huzita Hatori. Em seguida, são apresentadas, no capitulo 5, atividades envolvendo conceitos geométricos, noções de ponto, reta e lugar geométrico. No capitulo 6, são propostas atividades de construção de polígonos através de dobraduras. No sétimo capítulo, temos a construção dos cinco poliedros de Platão e no ultimo capítulo, as considerações finais.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Apresentamos, neste capítulo, um breve relato sobre a origem da Geometria e a história do Origami.

2.1 A ORIGEM DA GEOMETRIA

> Sesóstris... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda... Por esse costume, eu creio, é que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia.
>
> (Heródoto)

Afirmações sobre a origem da Matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos em forma de escrita. Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas.

Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria.

Podemos considerar as ideias de Heródoto e Aristóteles como representando duas teorias opostas quanto às origens da matemática, um acreditando que a origem fosse a necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e espiritual. O fato de os geômetras egípcios serem às vezes "estivadores de corda" (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. Não podemos contradizer com segurança nem Heródoto nem Aristóteles quanto a motivação que produziu a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto.

Não temos como saber a verdadeira origem da geometria. O que sabemos é que desde a pré-história o homem reproduzia em seus desenhos e artefatos a beleza das formas.

Somente com Tales e Pitágoras, no século VI a.C., a Geometria começa a ser uma disciplina de caráter intelectual onde o homem passa a formular questões fundamentais do tipo

"Por que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos"?

Os processos empíricos anteriormente utilizados para verificar como as propriedades ocorriam não eram bastante para responder à indagações do tipo "por quê".

No século III a.C. viveu Euclides de Alexandria que escreveu os **Elementos**, o mais antigo texto de Matemática que chegou completo até nós. Nos **Elementos**, Euclides conseguiu incorporar, de forma bem disposta e apresentada, praticamente todo o conhecimento matemático acumulado por seus antecessores. Esta obra foi tão bem sucedida que permaneceu como obra padrão durante mais de 2000 anos. Os **Elementos** consistem de 13 livros, com 465 proposições e nelas Euclides incorpora todo o conhecimento matemático acumulado em sua época, com poucas exceções (Seções Cônicas e Geometria Esférica). Sua exposição em ordem lógica, dos assuntos básicos da Matemática Elementar foi pioneira. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico.

A primeira edição impressa dos **Elementos** data de 1482 e mais de 1000 edições ocorreram de lá para cá. Por mais de 2000 anos este trabalho dominou o ensino de geometria.

A influência do trabalho de Euclides para a Geometria foi tanta que os conhecimentos reunidos em **Os Elementos** e os obtidos a partir deles passaram a ser denominados de Geometria Euclidiana.

O texto acima foi extraído de [1] e [7].

2.2 UMA BREVE HISTÓRIA DO ORIGAMI

A invenção do papel ocorreu, supostamente na China, cerca de 2000 anos atrás. Por volta de 105 d.C., T'saiLun, alto funcionário da Corte Imperial, teria relatado ao imperador esta invenção.

O papel chegou ao Japão no século VI d.C., e foi neste país que o origami se desenvolveu tal como conhecemos hoje.

Em qualquer livro da especialidade podemos ler que "o Origami é a arte japonesa de dobrar papel". A palavra japonesa Origami é composta por dois caracteres, o primeiro, "ori", deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, "kami", deriva do desenho da seda e significa papel, espirito e Deus. A junção das duas palavras fez cair o "k" surgindo "Origami".

A sua história pode ser dividida em três grandes períodos:

O Período Heian (794 - 1185), onde o Origami era entendido como um divertimento das classes mais ricas, as únicas que podiam comprar papel. Era também utilizado pelos guerreiros Samurai que trocavam presentes enfeitados com noshi, pedaços de papel dobrados em forma de leque ou em forma de raio. Os mestres de cerimonia do chá recebiam diplomas que eram certificados com papel dobrado que garantia a sua autenticidade uma vez que um modelo, depois de dobrado, não podia ser desdobrado sem que surgissem novas marcas no papel.

Vem também desta época o ritual de se dobrarem borboletas macho e fêmea, nos casamentos, simbolizando a união entre os noivos e que serviam para adornar as garrafas de saquê. É ainda deste período o nó pentagonal, que os japoneses utilizavam para escrever as suas orações.

O Período Muromachi (1338 - 1573), quando o papel se tornou um produto mais acessível e o Origami começou a ser utilizado para distinguir as diversas classes sociais, conforme os adornos que as pessoas usavam.

O Período Tokugawa (1603 - 1873), também conhecido como o período da democratização do papel, quando surgem os primeiros livros de Origami. Em 1797 foi publicado o livro chamado Hiden Senbazuru Orikata, (como dobrar mil tsurus) que continha o primeiro conjunto de instruções para dobrar o pássaro sagrado do Japão, o Tsuru. (Em Portugal é conhecido por Grou e por Crane na Inglaterra e nos EUA). Este modelo foi adotado como símbolo da paz depois da segunda guerra mundial.

A difusão do Origami na Europa iniciou com os muçulmanos que praticavam esta arte e a levaram para a Península Ibérica. A doutrina islâmica não permitia a criação de figuras e as dobras de papel eram utilizadas em estudos matemáticos e astronômicos. Após a saída dos muçulmanos do Reino de Granada esta arte continuou a ser desenvolvida sob a designação de Papiroflexia, como é conhecida na Espanha.

Na Itália, Leonardo Da Vinci publicou no seu Codex Atlanticus, exercícios geométricos com dobragem e um estudo sobre o movimento de aviões de papel (Engel,1994). Na Alemanha, Friedrich Frebel, fundador do movimento Kindergarten, introduziu as dobragens de papel nas atividades pré-escolares.

O pai do Origami moderno é o japonês Akira Yoshizawa. É a Yoshizawa que se deve a simbologia atual de instruções de como dobrar os modelos (sistema Yoshizawa-Randlett, 1956). Este sistema é a contribuição mais importante para o Origami desde a invenção do papel, já que permite a difusão internacional das várias criações. Para Yoshizawa o Origami é uma filosofia de vida. (Texto adaptado de [11])

3 CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA PLANA

Os conceitos e definições aqui apresentados, foram adaptados de [6] e [3].

Em Geometria, como em todo ramo científico, estabelecemos ideias e conceitos que, embora não tenham correspondentes na vida real, são necessários para que possamos entender a realidade.

As noções primitivas são adotadas sem definição.

Os conceitos de ponto, reta e plano não são definidos. Compreendemos estes conceitos, a partir de um entendimento comum utilizado cotidianamente dentro e fora do cotidiano escolar.

Um **ponto** é concebido como sendo algo sem dimensão, sem massa e sem volume. Em geral, denotamos pontos por letras latinas maiúsculas.

Uma **reta** é concebida sem espessura, sem começo e sem fim. Sobre uma reta definimos segmentos e semirretas. Podemos também, dizer que a reta é um conjunto de pontos. Representamos retas por letras latinas minúsculas.

Um **plano** é concebido sem espessura sem fronteiras. Denotamos plano por letras gregas minúsculas.

Vejamos alguns conceitos básicos de Geometria Plana.

Postulado da existência

a) Numa reta, bem com fora dela, há infinitos pontos.

b) Num plano há infinitos pontos.

A expressão “infinitos pontos” tem o significado de “tantos pontos quantos quisermos”.

Postulado da determinação

a) Da reta

Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

b) Do plano

Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Postulado da inclusão

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

Dados dois pontos distintos A e B de um plano, a reta $r = \overleftrightarrow{AB}$, tem todos os pontos no plano.

Posições de dois pontos e de ponto e reta

a) Dados dois pontos A e B, de duas uma: ou A e B são coincidentes (é o mesmo ponto, um só ponto, com dois nomes A e B) ou A e B são distintos.

b) Dados uma reta r e um ponto P, ou o ponto pertence à reta r ou o ponto não pertence à reta r. Quando o ponto P pertence à reta r escrevemos $P \in r$. Quando o ponto P não pertence à reta escrevemos $P \notin r$.

Um ponto A situado sobre uma reta r, divide a reta em dois pedaços chamados de semirretas de origem A.

Dada uma reta r e dado um ponto $P \notin r$, existe uma única reta s paralela à reta r passando por P. Este fato é conhecido com **Axioma das Paralelas**.

Dados três pontos distintos no plano, se existir uma reta que passe por estes pontos, dizemos que eles são **colineares**.

Pontos **coplanares** são pontos que pertencem a um mesmo plano.

O **ponto médio** M do segmento $\overline{AB}$ é o ponto deste segmento que o divide em dois segmentos de mesmo comprimento, isto é, $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Toda reta determina exatamente dois semiplanos (convexos), cuja intersecção é a própria reta.

Lugar Geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade.

Todos os ângulos retos são congruentes.

A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

Figura é qualquer conjunto de pontos.

Figura plana é uma figura que tem todos seus pontos num mesmo plano.

4 OS AXIOMAS DO ORIGAMI

Da mesma forma que as construções geométricas tradicionais, as construções realizadas por meio de dobraduras, são regidas por um corpo axiomático. Os axiomas descrevem a Matemática de dobrar o papel para resolver problemas de construção geométrica.

No final da década de 70, o matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita, nascido no Japão mas que viveu maior parte de sua vida na Itália, formulou seis operações básicas, para definir um único vinco capaz de alinhar várias combinações de pontos e retas já existentes.

Estas operações são denominadas Axiomas de Huzita e se tornou a primeira descrição formal do tipo de construções geométricas possíveis com dobraduras. Em 2002, Koshiro Hatori apresentou uma sétima operação e, o conjunto delas passa a ser denominado de Axiomas de Huzita-Hatori.

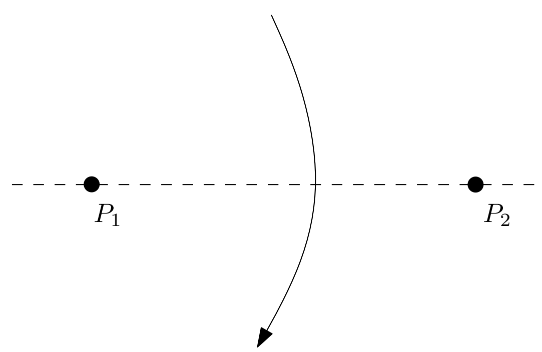
Podemos imaginar a folha de papel como sendo um plano. Cada dobra efetuada gera uma linha reta e os pontos de um dos semiplanos são refletidos no outro semiplano, ou seja, se r é a linha de dobra, e P é um ponto da folha de papel a ser dobrada, P é levado no seu simétrico P' em relação a r. Ou seja, a linha de dobra r é a mediatriz de cada par $\overline{PP'}$ onde P' é o refletido de P (onde P é levado).

Desta forma, os axiomas enumerados abaixo, regem todas as construções realizáveis via dobradura de papel.

OS AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

Axioma I: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que passa por eles.

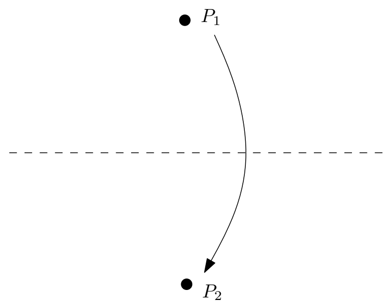
Figura 1 – Axioma I



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Axioma II: Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir P_1 com P_2 .

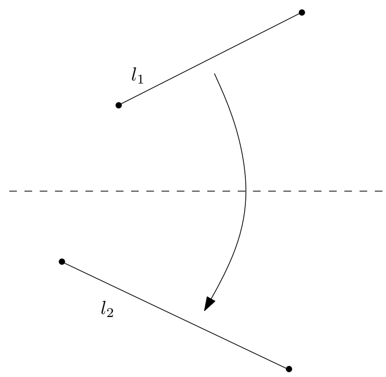
Figura 2 – Axioma II



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Axioma III: Dadas as retas l_1 e l_2 existe uma dobra que faz coincidir l_1 com l_2.

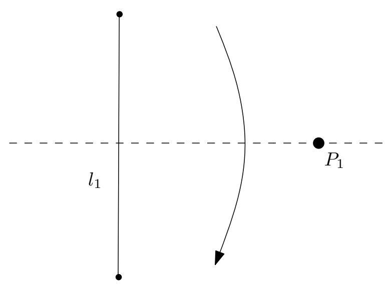
Figura 3 – Axioma III



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Axioma IV: Dados um ponto P_1 e uma reta l_1, existe uma única dobra que é perpendicular a l_1 e que passa por P_1.

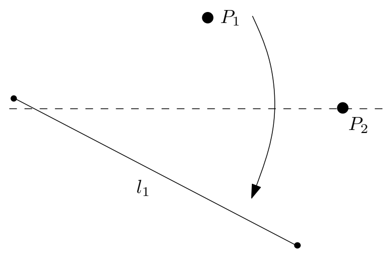
Figura 4 – Axioma IV



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Axioma V: Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta l_1, se a distância de P_1 a P_2 for superior ou igual a distância de P_2 a l_1 então, existe uma dobra que faz incidir P_1 em l_1 e que passa por P_2.

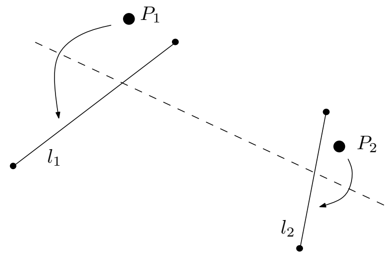
Figura 5 – Axioma V



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Axioma VI: Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas l_1 e l_2, se as retas não forem paralelas e a respectiva distância não for superior a distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz coincidir P_1 sobre l_1 e P_2 sobre l_2.

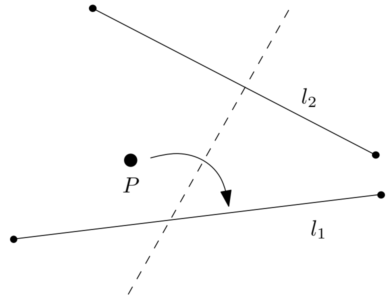
Figura 6 – Axioma VI



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Axioma VII: Dados um ponto P e duas retas l_1 e l_2, se as retas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir P em l_1 e é perpendicular a l_2.

Figura 7 – Axioma VII



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Os axiomas aqui apresentados, estão em[4].

5 ATIVIDADES ENVOLVENDO CONCEITOS GEOMÉTRICOS

As atividades propostas nesta unidade, tem como um dos objetivos fazer com que os alunos verifiquem, fixem e construam conceitos elementares de Geometria Plana, tais como: ponto médio de um segmento, retas paralelas e retas perpendiculares, reta mediatriz, a unicidade da reta. Elas foram adaptadas de [9]

O material utilizado nas atividades será folha de papel sulfite.

5.1 ATIVIDADE 1: CONSTRUÇÃO DA RETA

Vamos pegar uma folha de papel. Podemos imaginar que seja um plano. Veja Figura 8(a).

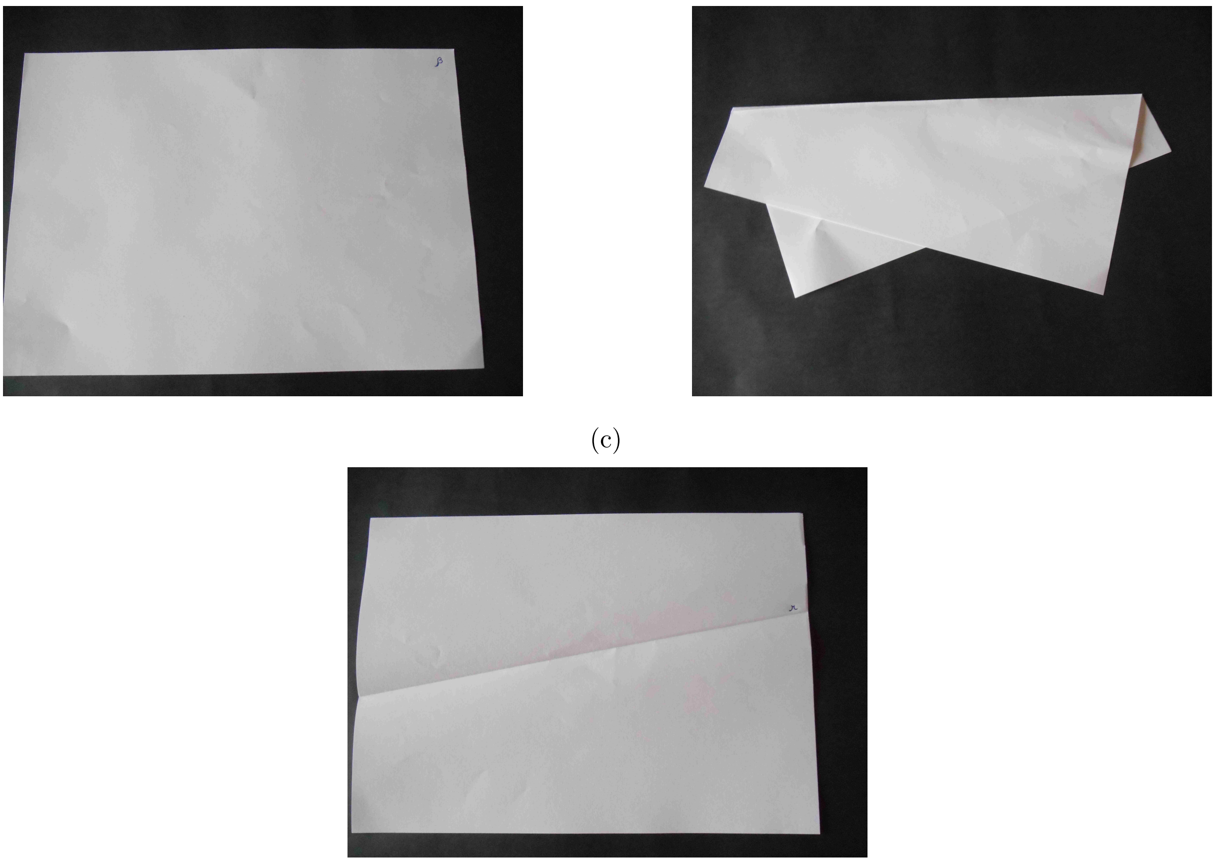
Atividade: Determinar a reta como sendo a dobra (vinco) dada no papel.

Faça uma dobra qualquer na folha, vinque bem e depois desdobre. O que você obteve? Veja Figura 8.

Figura 8 – Construção da reta

(a) (b)

(c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

5.2 ATIVIDADE 2: PONTO

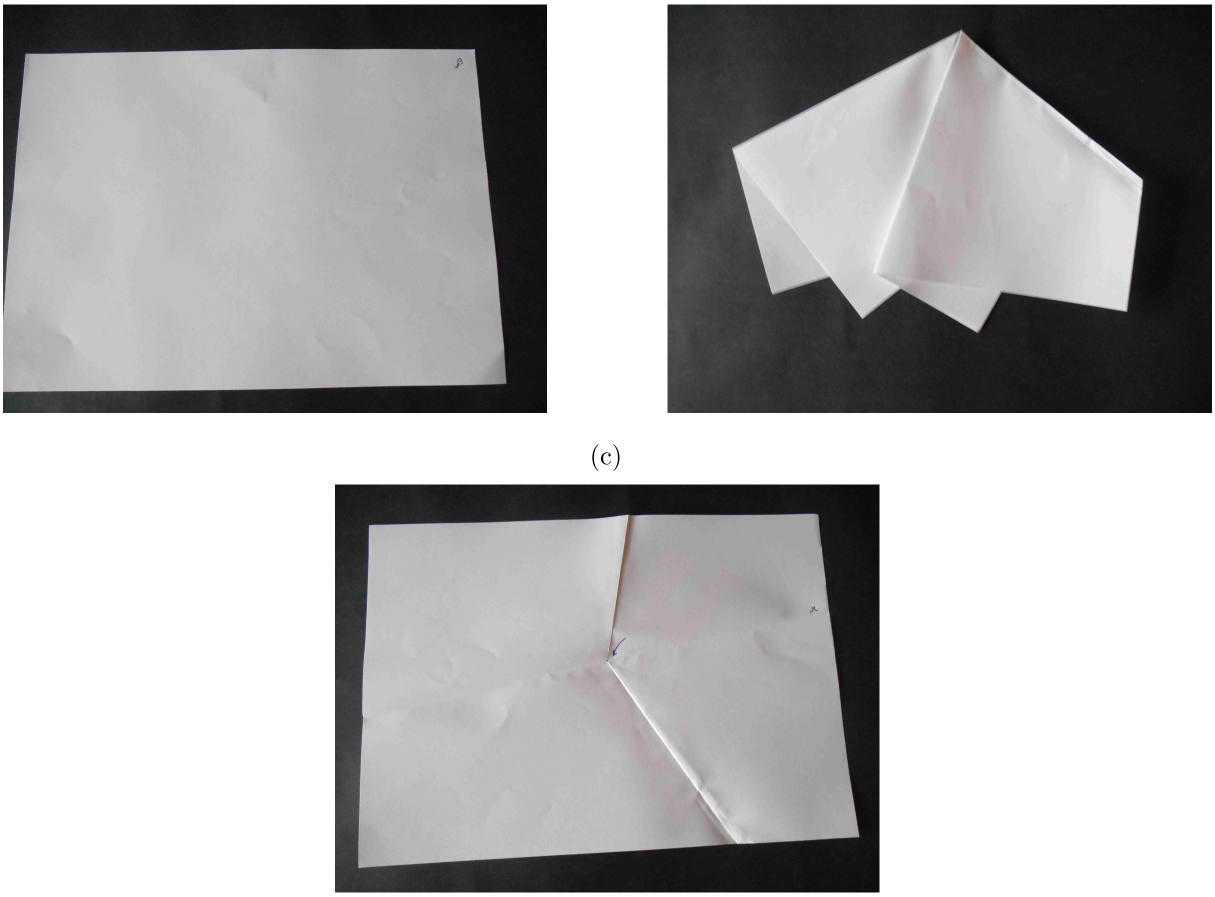
Atividade: Construir o ponto geométrico

1º Passo: Dobre um pedaço de papel e desdobre, construindo assim, uma reta r.

2º Passo: Faça uma 2ª dobra de modo que a reta r seja "dividida". Desdobre. Veja Figura 9.

Figura 9 – Ponto geométrico

(a) (b)



(c)

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observe que agora temos duas retas que se cortam. Podemos dizer que o encontro das duas retas é um ponto.

Objetivo: Obter a noção de ponto geométrico, mesmo não existindo a imagem do ponto (.), como sendo a intersecção de duas dobras.

5.3 ATIVIDADE 3: UNICIDADE DA RETA QUE PASSA POR DOIS PONTOS DADOS

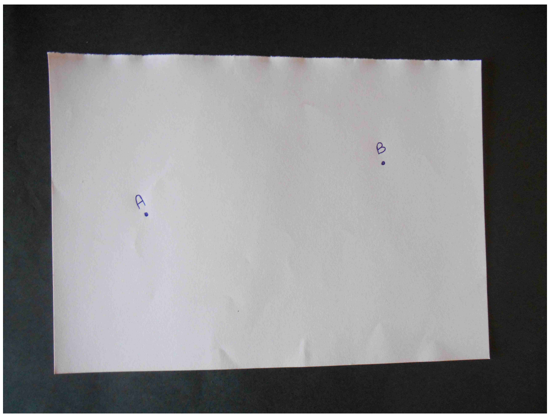
Atividade: Determinar a reta que passa por dois pontos A e B, dados.

1º Passo: Marque dois pontos A e B distintos quaisquer numa folha de papel.

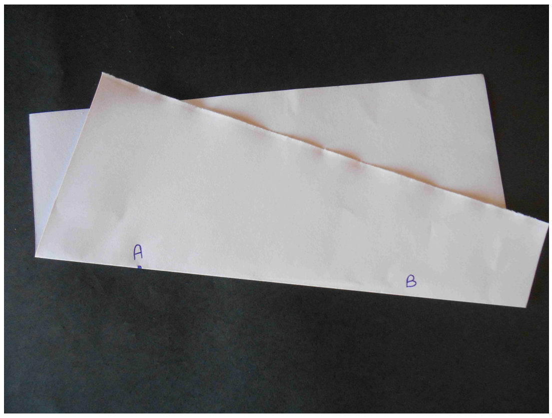
2º Passo: Faça uma dobra no papel que passe por A e B ao mesmo tempo. Desdobre.

Figura 10 – Reta que passa por dois pontos dados

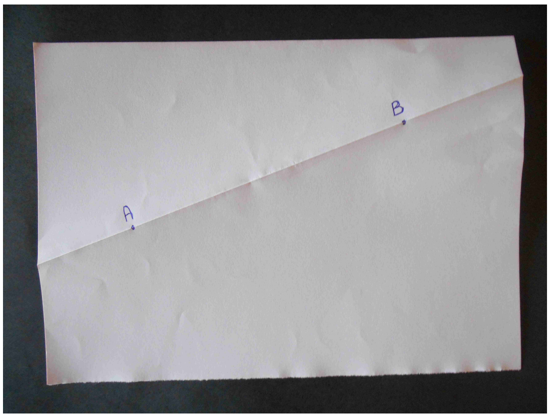
(a)



(b)



(c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observe que a dobradura construída resulta numa reta que contém A e B. (axioma I). Veja Figura 10.

É possível a construção de outras retas distintas que passam por A e B ao mesmo tempo? Vamos tentar?

A que conclusão você chegou?

Espera-se que o aluno conclua que, dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

5.4 ATIVIDADE 4: PONTO MÉDIO

Chama-se ponto médio do segmento $\overline{AB}$, o ponto M deste segmento tal que, os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são congruentes.

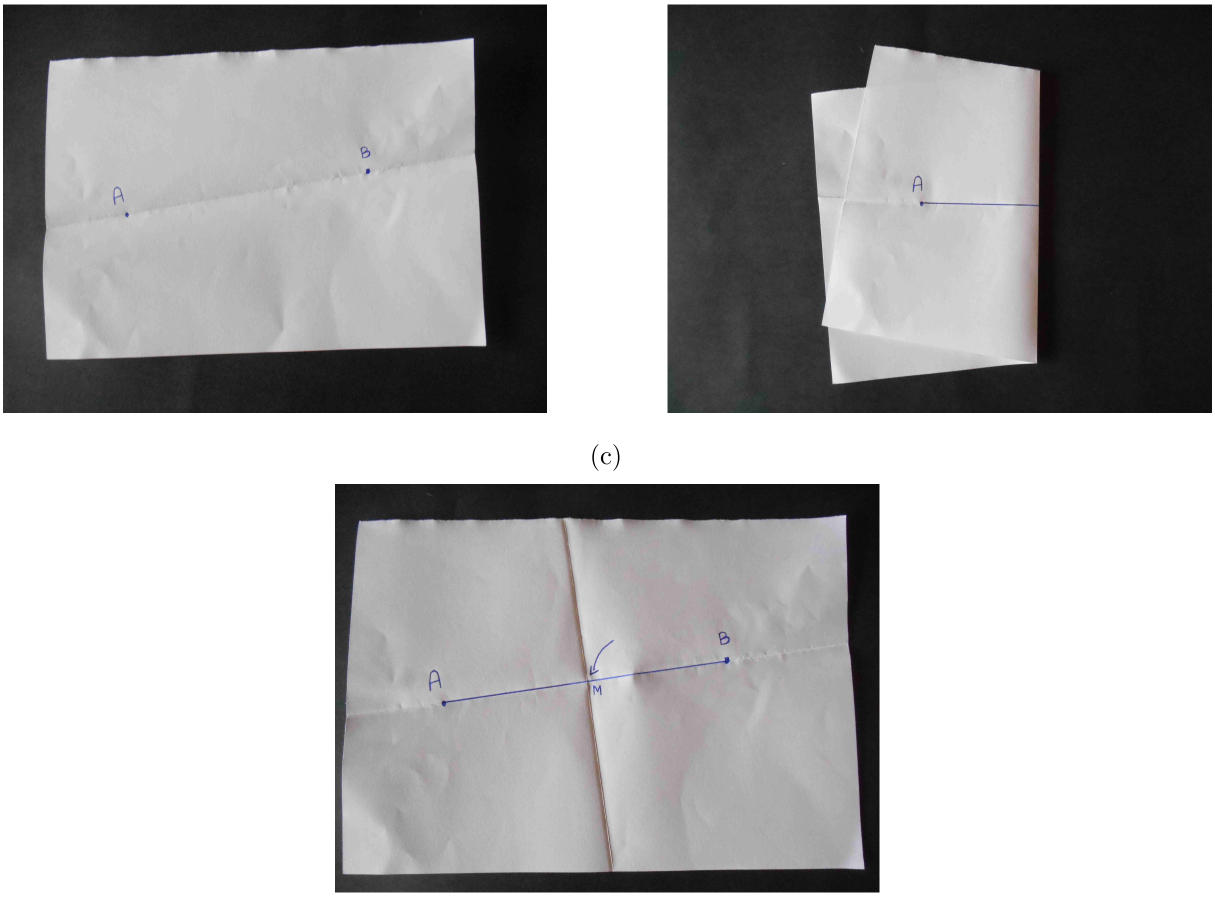
Atividade: Construir o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

1º Passo: Faça um segmento $\overline{AB}$ num pedaço de papel.

2º Passo: Dobre o papel de modo que o ponto A coincida com o ponto B. Desdobre. Veja 11.

Figura 11 – Ponto Médio

(a) (b) (c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A intersecção da reta construída pela dobra e o segmento $\overline{AB}$ é o ponto médio M.

Observe que os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ se sobrepõe, o que significa dizer que $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são congruentes ($\overline{AM} \equiv \overline{MB}$).

5.5 ATIVIDADE 5: RETAS PERPENDICULARES

Duas retas são **concorrentes** se, e somente se, elas tem um único ponto comum.

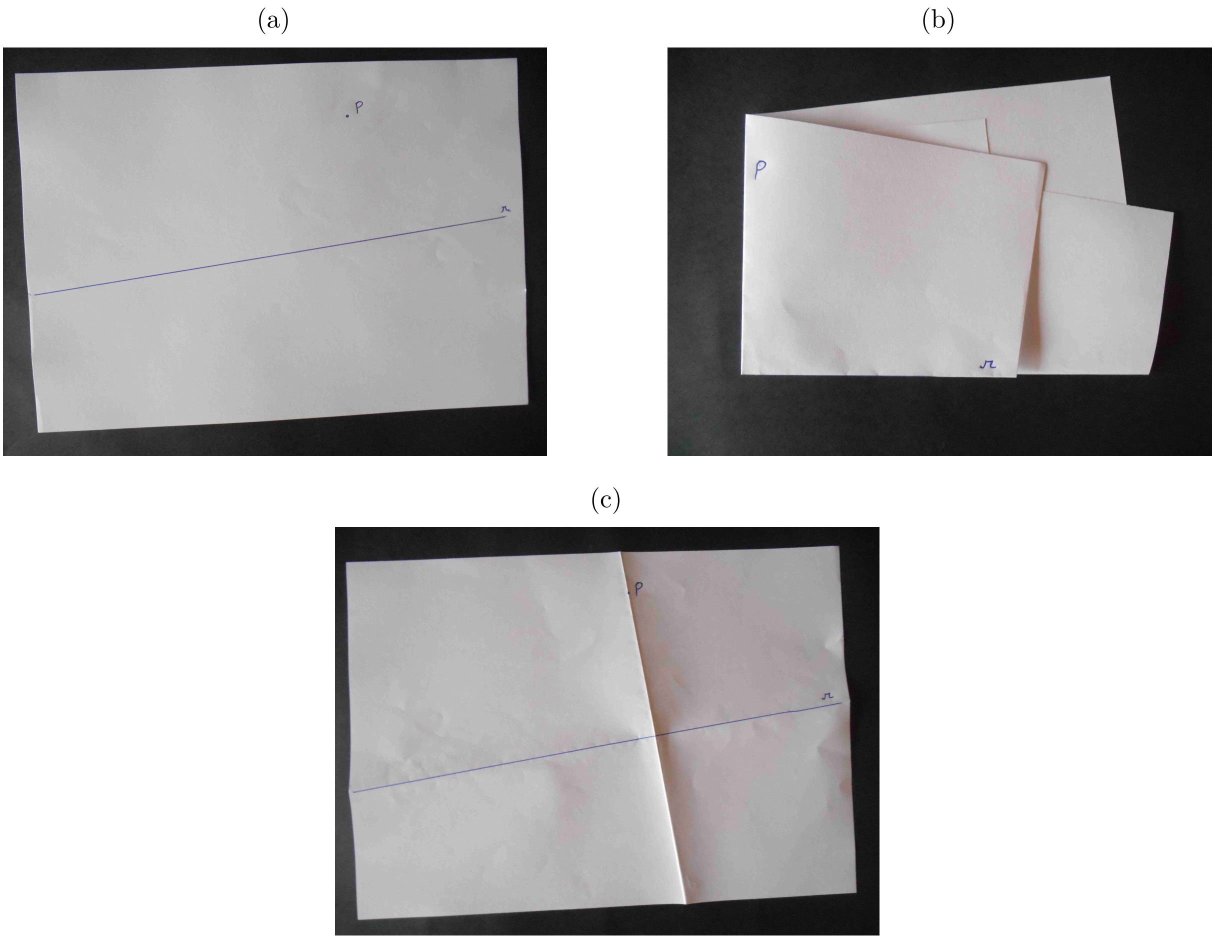
Duas retas são **perpendiculares** se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares e congruentes.

Atividade: Construir, através de dobradura, uma reta que passe por um ponto P e seja perpendicular a uma reta r dada. (axioma II)

1º Passo: Dobrar a folha de papel para marcar a reta r. Marcar um ponto P qualquer não pertencente a r.

2º Passo: Dobrar o papel, de modo que uma parte da reta r se sobreponha sobre a outra parte e, a dobra passe sobre o ponto P. Desdobre e marque a reta encontrada. Veja 12.

Figura 12 – Retas Perpendiculares



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O objetivo é fazer com que os alunos observem que os quatro ângulos formados pela intersecção das duas retas se sobrepõe, logo são congruentes e, ainda que, a soma dos ângulos formados é 360°, segue que cada ângulo mede 90°. Portanto as retas são perpendiculares.

Como obter uma reta perpendicular a um segmento $\overline{AB}$ que passe por A?

Obtenha a reta s perpendicular a reta r dada que passe por um ponto P, com $P \in r$.

5.6 ATIVIDADE 6: RETAS PARALELAS

Duas retas são paralelas se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares (pertencentes a um mesmo plano) e não tem nenhum ponto comum.

Atividade: Construir uma reta paralela a reta r.

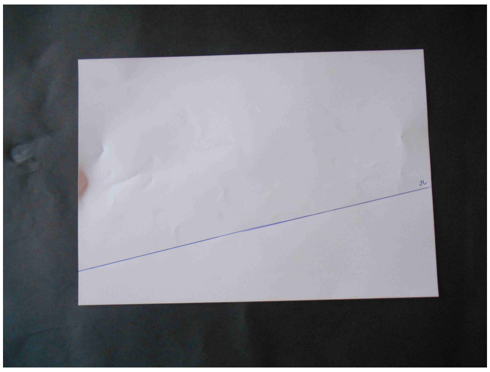
1º Passo: Faça uma dobra para determinar a reta r. Desdobre.

2º Passo: Construa uma reta s, que seja perpendicular a reta r (atividade 5).

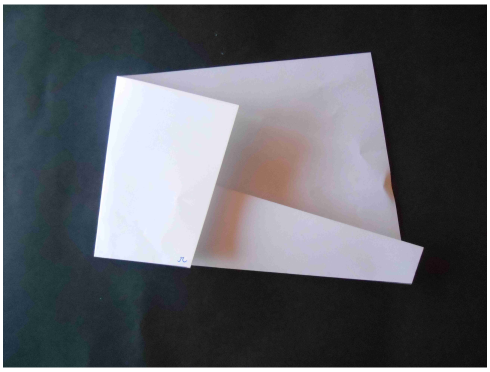
3º Passo: Construa uma perpendicular a reta s, diferente da reta r. Chame essa nova reta de t. A reta t é paralela a reta r. Veja Figura 13 e Figura 14.

Figura 13 – Retas paralelas

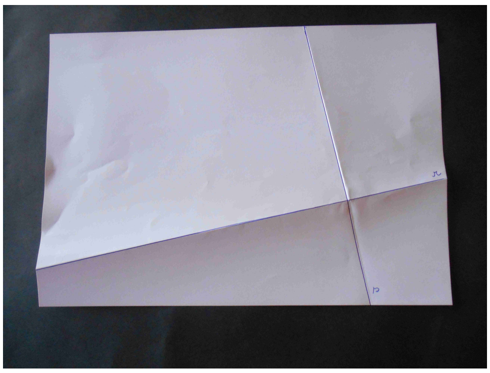
(a)



(b)



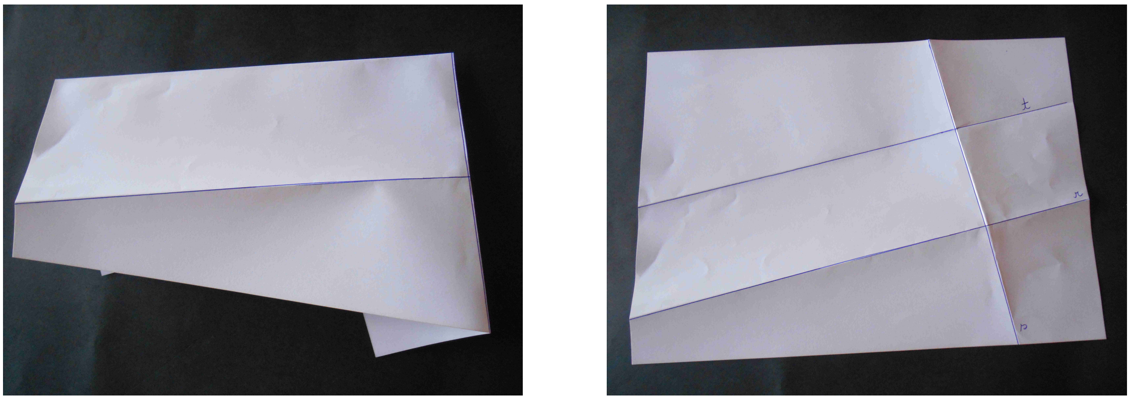
(c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 14 – Retas paralelas (continuação)

(a) (b)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

5.7 ATIVIDADE 7: MEDIATRIZ DE UM SEGMENTO

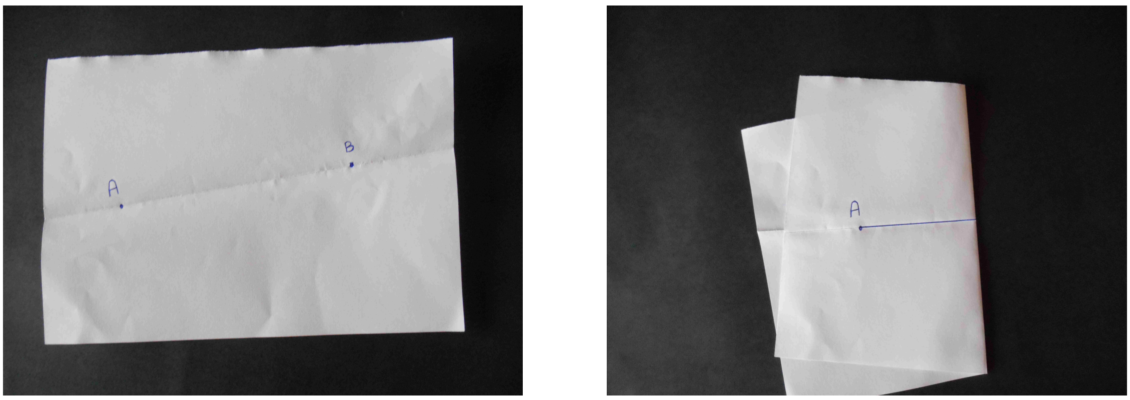
A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de A e B. É uma reta perpendicular ao segmento e que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$.

Atividade: Construir a mediatriz de um segmento $\overline{CD}$ dado. (axioma III)

Seguir as mesmas instruções para a construção do ponto médio (Atividade 4). Veja Figura 15 e Figura 16.

Figura 15 – Reta Mediatriz

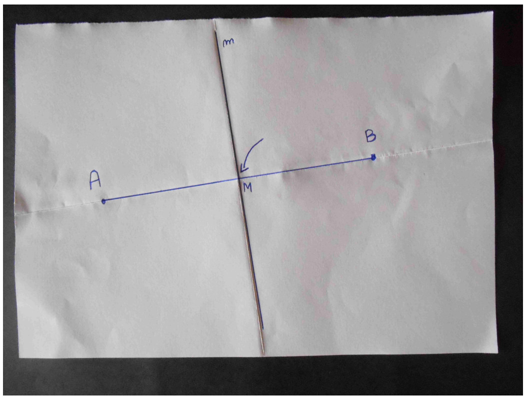
(a) (b)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 16 – Reta Mediatriz (continuação)

(a)



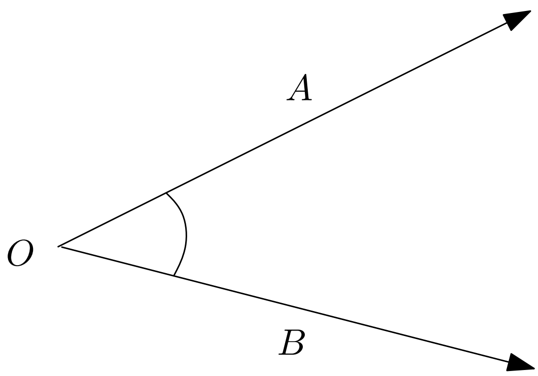
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Marque alguns pontos sobre a reta que acabou de construir. Agora meça a distância de cada ponto aos pontos A e B. O que podemos observar?

5.8 ATIVIDADE 8: ÂNGULO

Um **ângulo** é a figura formada por duas semirretas de mesma origem. Estas semirretas são chamadas de **lados** e a origem comum dos lados é o **vértice** do ângulo. Na figura a seguir vemos um ângulo com lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e com vértice no ponto O.

Figura 17 – Ângulo



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Bissetriz

A bissetriz de um ângulo, é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

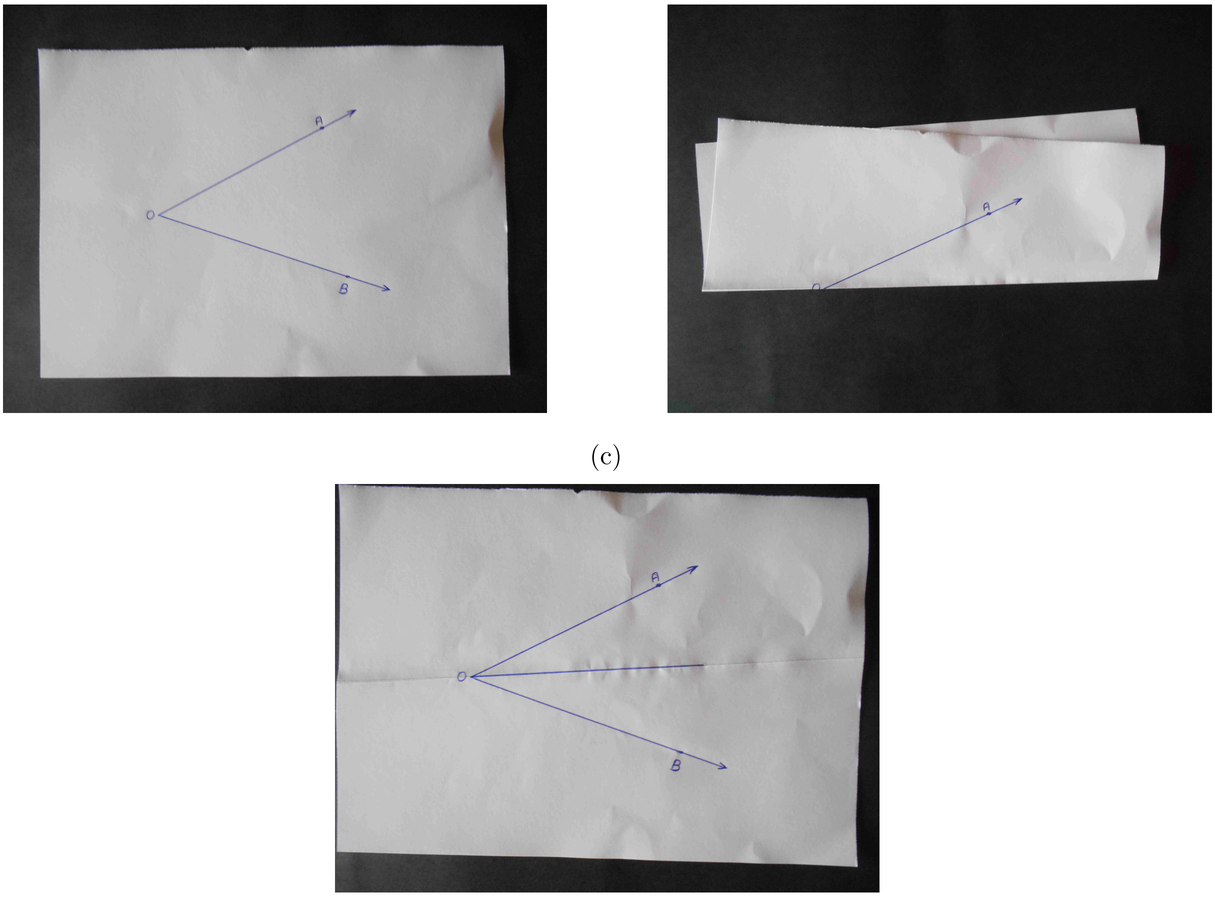
Atividade: Encontre a bissetriz de um ângulo dado, usando dobradura.

1º Passo: Desenhe um ângulo na folha de papel.

2º Passo: Dobre a folha de modo que os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ do ângulo se sobreponham. Desdobre. Veja Figura 18.

Figura 18 – Reta Bissetriz

(a) (b) (c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Verifique que os dois novos ângulos formados são congruentes, isto é, $A\hat{O}C \equiv C\hat{O}B$, portanto a semirreta comum aos dois ângulos é a bissetriz do ângulo dado.

Como obter o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de duas retas concorrentes.

5.9 ATIVIDADE 9: SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Atividade: Quanto mede a soma dos ângulos internos de um triângulo?

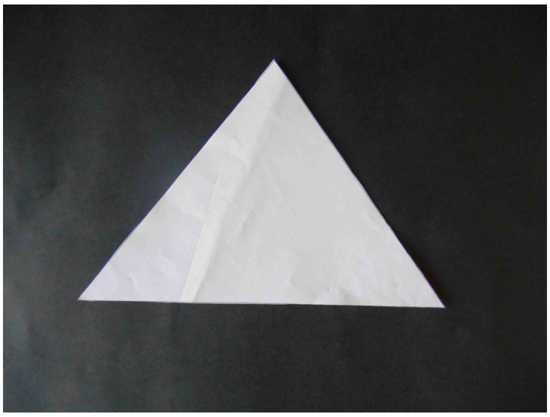
1º) Desenhe um triângulo qualquer e recorte-o.

2º) Faça uma dobra para marcar a altura de um dos vértices, cujo a ângulo seja agudo, do triângulo.

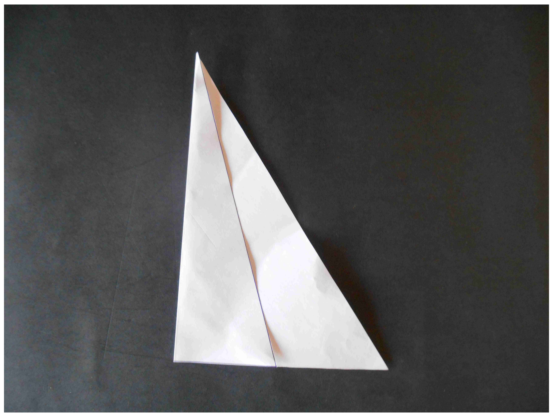
3º) Leve cada vértice ao pé da altura encontrada. veja Figura 19 e Figura 20.

Figura 19 – Soma dos ângulos internos de um triângulo

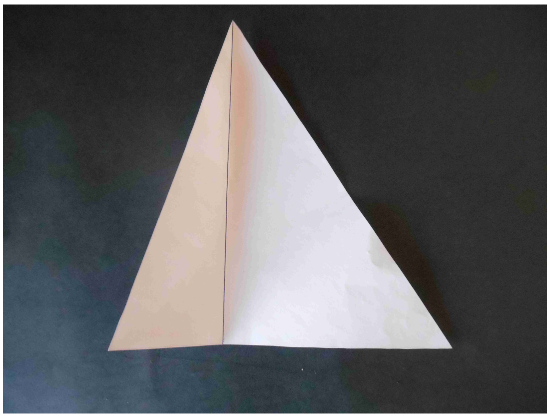
(a)



(b)



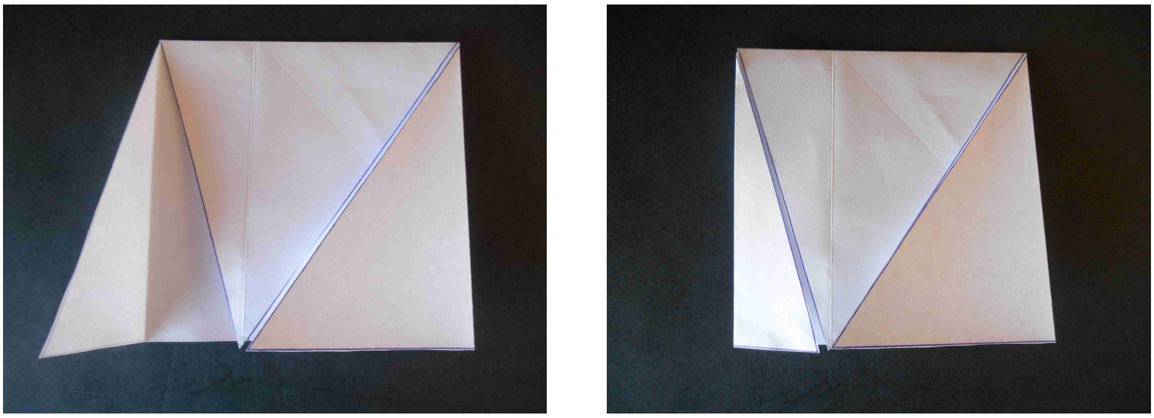
(c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 20 – Soma dos ângulos internos de um triângulo (continuação)

(a) (b)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Espera-se que o aluno conclua que, através da observação da reunião dos três ângulos do triângulo, para qualquer triângulo, a soma de seus ângulos internos é 180º.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

- Fazendo a dobradura do avião, que toda criança conhece, podemos trabalhar triângulo retângulo, triângulo isósceles e encontrar os ângulos envolvidos, reforçando a soma dos ângulos internos de um triângulo.
- Na construção do barquinho de papel, podemos trabalhar polígonos e quadriláteros notáveis.

6 POLÍGONOS

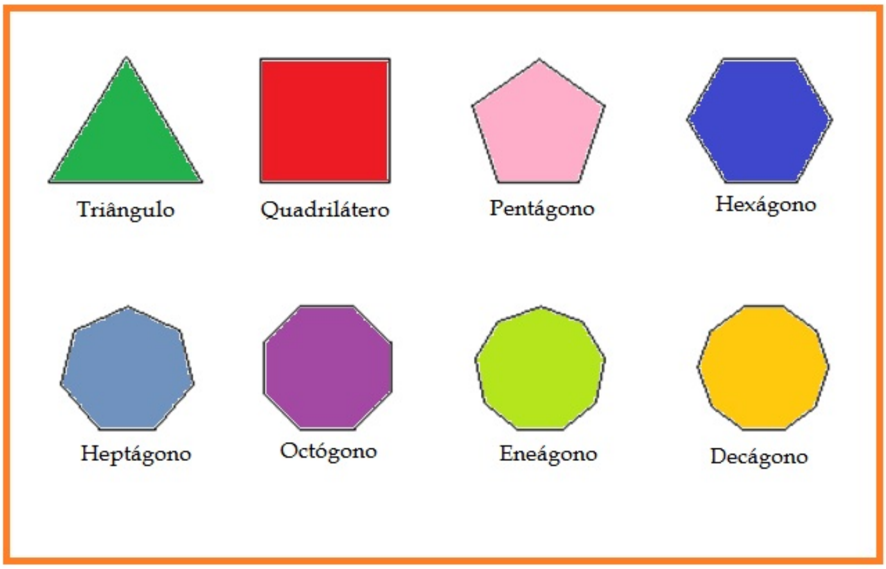
As definições aqui apresentadas, estão em [6].

Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2,...,A_n) com $n \geq 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando-se consecutivos A_{n-1}, A_n e A_1, assim como, A_n, A_1, e A_2, chama-se polígono à reunião dos segmentos A_1A_2, A_2A_3,..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1.

Polígono regular

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos congruentes.

Figura 21 – Polígonos



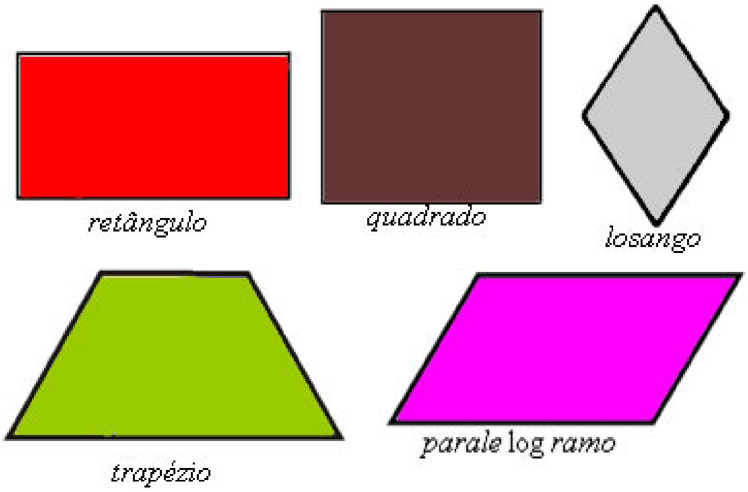
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Quadriláteros

Os quadriláteros são polígonos que possuem quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos.

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero, é igual a 360º. Veja Figura 22.

Figura 22 – Quadriláteros



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O objetivo das atividades seguintes, é construir polígonos utilizando dobraduras, identificando os elementos e as propriedades de cada figura.

As atividades foram adaptadas de [9]

6.1 RETÂNGULO

Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

Um retângulo tem: os quatro ângulos retos, as diagonais congruentes, as diagonais cortando-se ao meio.

Atividade: Determinar, através de dobraduras, um retângulo.

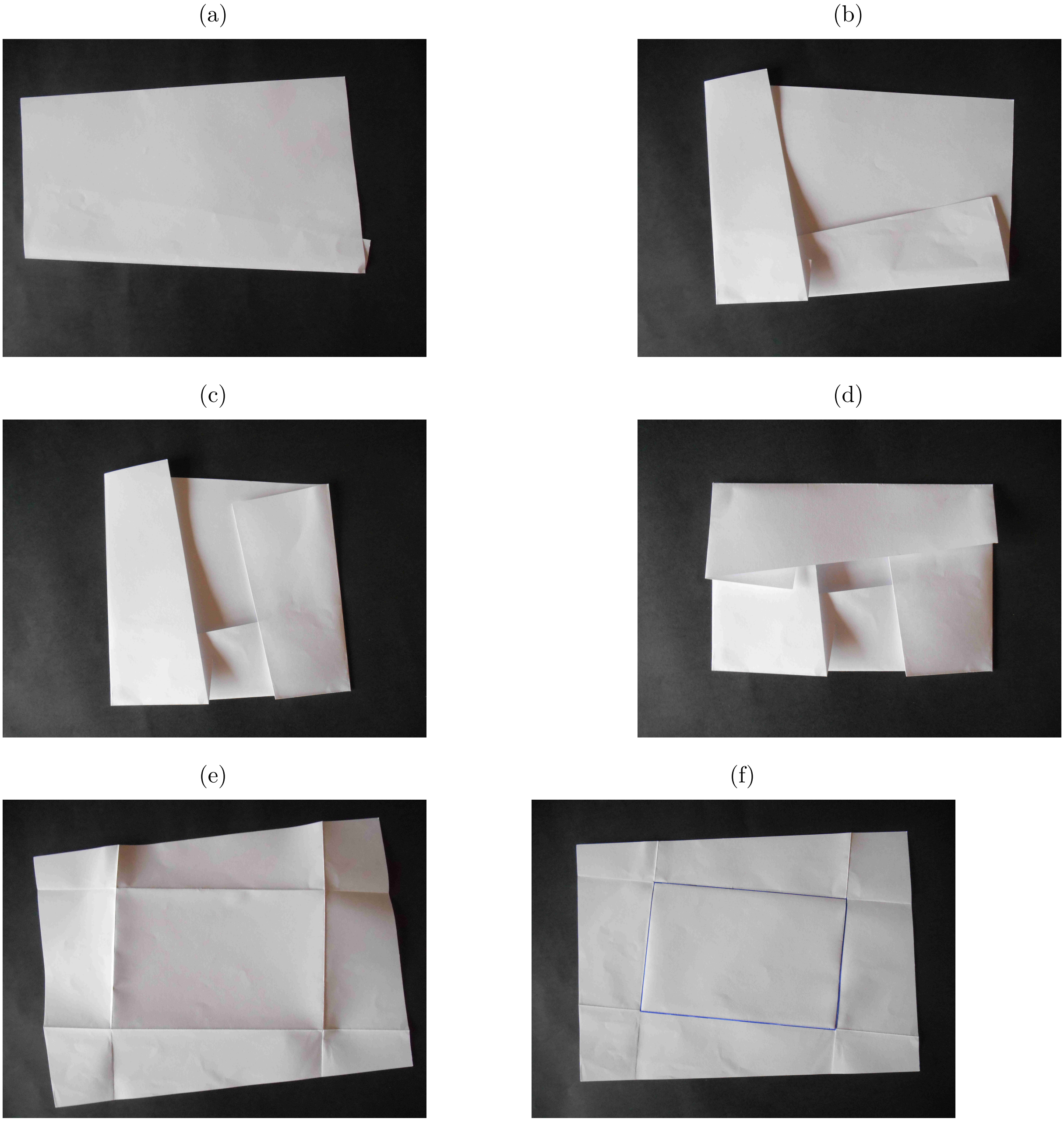
1º Passo: Faça uma dobra no papel, para ser o lado maior, por exemplo.

2º Passo: Faça uma segunda dobra de modo que a reta encontrada seja perpendicular a primeira.

3º Passo: Faça o mesmo procedimento na outra extremidade da reta.

4º Passo: Construa uma paralela a primeira reta encontrada, que intercepte as duas outras. Veja Figura 23.

Figura 23 – Retângulo



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como as retas construídas nos passos 2 e 3 são perpendiculares a primeira, temos que elas são paralelas entre si. E a reta construída no passo 4 é paralela a primeira e, por conseguinte, perpendicular as outras duas. Logo, pela definição, temos um retângulo.

6.2 QUADRADO

Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes.

Um quadrado é um retângulo que possui os quatro lados congruentes, e é um losango que possui os quatro ângulos congruentes.

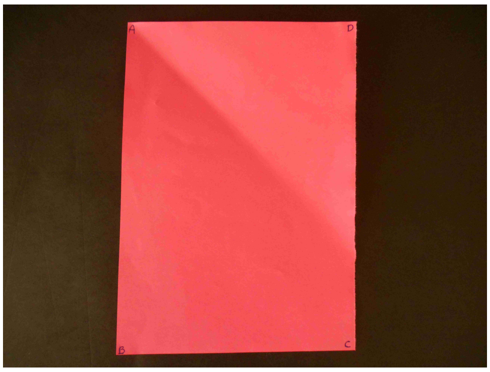
Atividade: Construir um quadrado

1º Passo: Seja uma folha retangular com vértices A, B, C e D. Faça uma dobra sobrepondo o lado menor AD sobre O lado maior AB. Seja P o ponto que D determina sobre AB e Q o ponto de intersecção entre a dobra e o lado CD.

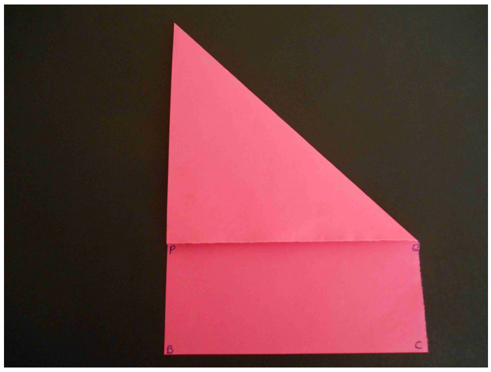
2º Passo: Recorte o retângulo menor $PBCQ$. Desdobre. O polígono formado é um quadrado. Veja Figura 24.

Figura 24 – Quadrado

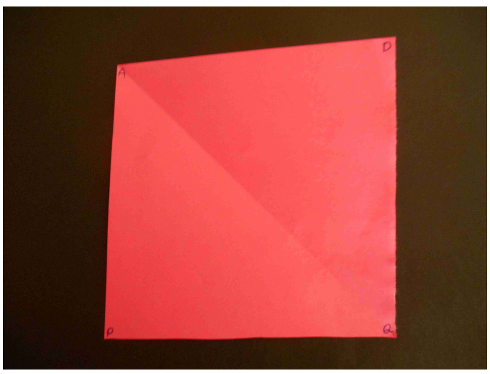
(a)



(b)



(c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observe que na sobreposição dos ângulos $C\hat{D}A$ $A\hat{P}Q$, tem-se $Q\hat{D}A \equiv A\hat{P}Q \equiv D\hat{A}P \equiv 90^o$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360^o, segue que $P\hat{Q}D \equiv 90^o$ e, portanto, todos os ângulos são retos. Temos também que, $AD \equiv AP$,

$PQ \equiv BC \equiv AD$ e $DQ \equiv PQ$, portanto $AD \equiv AP \equiv PQ \equiv DQ$.
O quadrilátero que possui os quatro ângulos retos e os quatro lados iguais é o quadrado.

6.3 TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Triângulo

Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo ABC.

Pontos notáveis do triângulo

Incentro: É o encontro (intersecção) das bissetrizes internas do triângulo.

Baricentro: É o encontro das medianas do triângulo.

Ortocentro: É a intersecção das alturas do do triângulo.

Circuncentro: É a intersecção das mediatrizes do triângulo.

O **triângulo equilátero** é o polígono que possui, os três lados congruentes entre si, e os três ângulos congruentes.

Atividade: Construir um triângulo equilátero

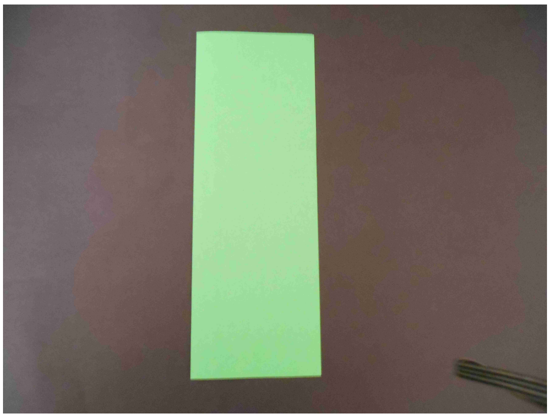
1º Passo: Dado o retângulo $ABCD$, faça uma dobra de modo a coincidir os lados AB e CD. Encontrando assim a mediatriz do lado menor AD. Desdobre.

2º Passo: Faça uma dobra que passe pelo vértice C e de modo que o vértice B fique sobre a mediatriz. Marque o ponto E que B determina na 1ª dobra. Desdobre. Marque os segmentos BE e CE.

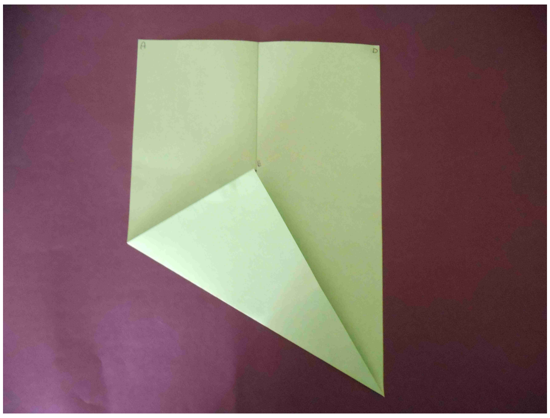
Observe que CE é congruente ao segmento BC. Como o ponto E pertence a mediatriz de BC, segue que E equidista de B e C, ou seja, $BE \equiv EC \equiv BC$. Portanto o triângulo BEC é equilátero. Veja Figura 25.

Figura 25 – Triângulo equilátero

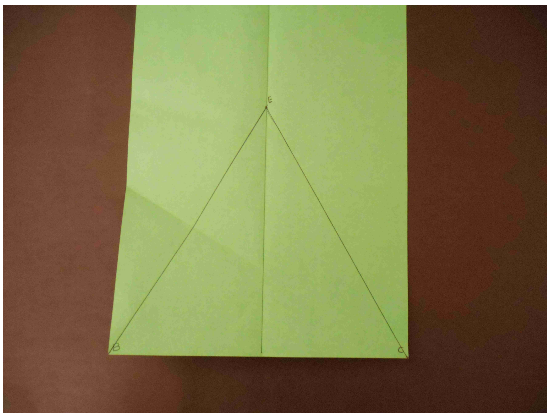
(a)



(b)



(c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

6.4 HEXÁGONO REGULAR

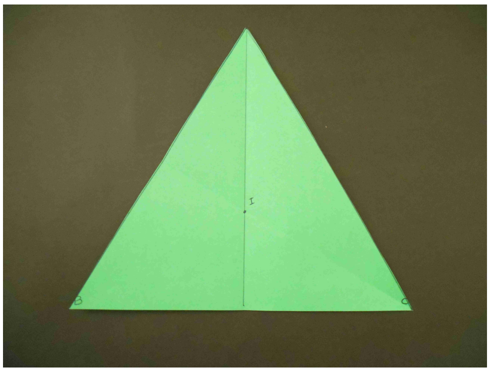
Recorte o triângulo equilátero construído.

Encontre o incentro I, que é o ponto de intersecção das três bissetrizes do triângulo.

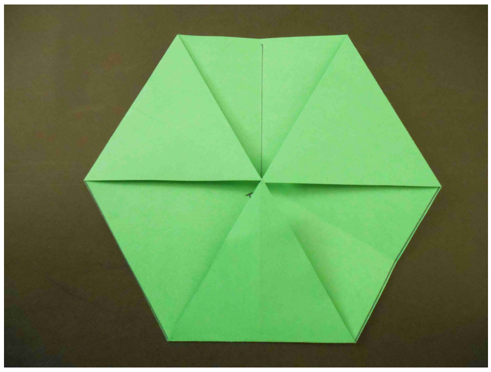
Leve os vértices do triângulo até o ponto I. O polígono obtido é um hexágono. Para verificar que ele é regular, basta fazer uma dobra em que dois lados coincidam. Veja Figura 26.

Figura 26 – Hexágono

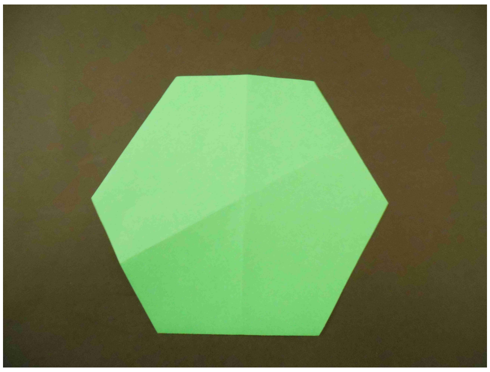
(a)



(b)



(c)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Pedir aos alunos que desenhem num papel um triângulo qualquer e encontre os pontos notáveis, usando dobradura.

Pode-se recortar o triângulo, e mostrar, com uma linha ou um clips, por exemplo, que o baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

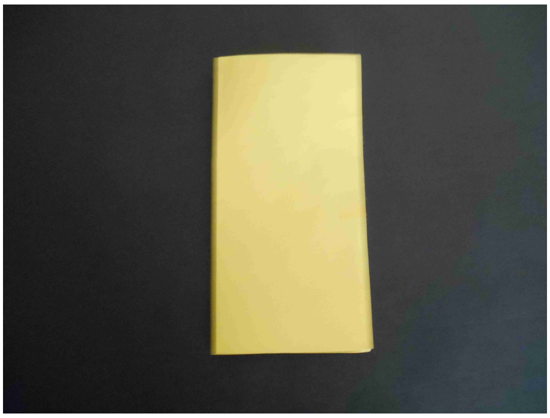
6.5 OCTÓGONO REGULAR

Dobra-se uma folha de papel quadrada ao meio, e a seguir, novamente ao meio, obtendo-se um quadrado menor. Dobre novamente obtendo a diagonal do quadrado. Desdobre e dobre os lados até a diagonal encontrada. Recorte o triângulo menor e abra a folha. A figura obtida é um octógono regular. Veja Figura 27.

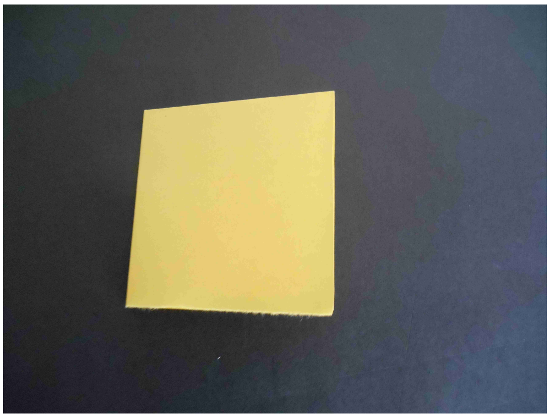
Através de simetrias, verifica-se a congruência entre cada um dos segmentos que determinam os lados do octógono, pois cada um dos lados pode ser refletido sobre o outro por alguma dobradura. Portanto, o octógono construído é regular.

Figura 27 – Octógono regular

(a)

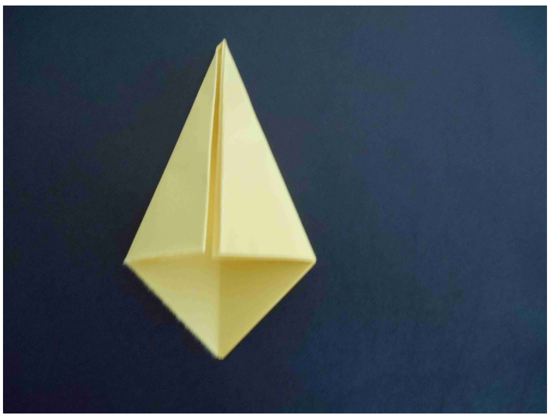


(b)

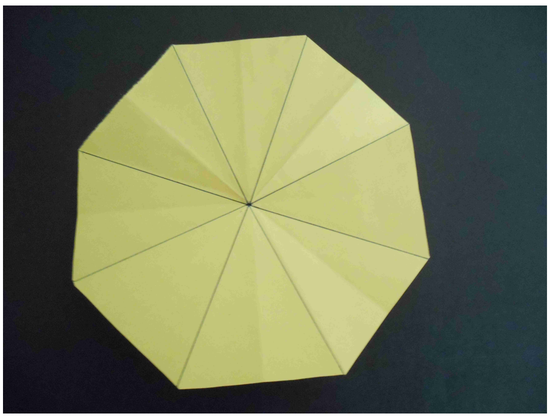


(c)

(d)



(e)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

7 POLIEDROS

Visualizar um poliedro através do nome ou do desenho feito no plano, pode não ser tão simples para o aluno do Ensino Fundamental. Ter um poliedro em suas mãos para poder tocar, observar sob diferentes perspectivas, representa uma ferramenta efetiva para o entendimento de seus elementos: vértices, arestas e faces.

Por meio da montagem dos módulos, os alunos são levados a perceber a relação entre vértices, faces e arestas. Na desmontagem dos sólidos e dos módulos podem ser visualizados conceitos geométricos envolvidos nos vincos de papel, as possibilidades de planificação, entre outros.

Poliedros de Platão

Definição

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as seguintes três condições:

a) Todas as faces têm o mesmo número n de arestas,

b) Todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número m de arestas,

c) Vale a relação de Euler: $V - A + F = 2$.

Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Demonstração:

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

a) Cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$) e, como cada aresta está em duas faces:

$$n \cdot F = 2A \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{2A}{n}. \quad (1)$$

b) Cada um dos V ângulos poliédricos tem m arestas ($m \geq 3$), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{2A}{m}. \quad (2)$$

c) A relação de Euler

$$V - A + F = 2. \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo por $2A$, obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}. \qquad (4)$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. Notemos, porém, que se m e n fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$$m > 3 \quad \Longrightarrow \quad m \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4}$$

$$n > 3 \quad \Longrightarrow \quad n \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$$

assim,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

o que contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão, m = 3 ou n = 3 (isto significa que um poliedro de Platão, possui, obrigatoriamente, triedro ou triângulo):

1º) Para m = 3 (supondo um triedro).

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad n < 6.$$

Então, n = 3 ou n = 4 ou n = 5 (respectivamente faces triangulares, ou quadrangulares ou pentagonais).

2º) Para n = 3 (supondo que tem triângulo).

Em (4) vem:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad m < 6.$$

Então, m = 3 ou m = 4 ou m = 5 (respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

Resumindo os resultados encontrados, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (m, n) da tabela abaixo sendo, portanto, cinco, e somente cinco as classes de poliedros de Platão.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Para saber o número de arestas A, o número de faces F e o número de vértices V de cada poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de m e n encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

Por exemplo, uma das possibilidades encontradas para m e n foi m = 3 e n = 5.

Com esses valores em (4), temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \quad \Longrightarrow \quad A = 30$$

Em (2):

$$V = 2 \cdot \frac{30}{3} \quad \Longrightarrow \quad V = 20$$

Em (1):

$$F = 2 \cdot \frac{30}{5} \quad \Longrightarrow \quad F = 12$$

Como é o número de faces que determina o nome, o poliedro do exemplo é o dodecaedro.

Tabela 1 – Nome dos poliedros de Platão

m	n	A	V	F	nome
3	3	6	4	4	tetraedro
3	4	12	8	6	hexaedro
4	3	12	6	8	octaedro
3	5	30	20	12	dodecaedro
5	3	30	12	20	icosaedro

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Esta demonstração encontra-se em [5].

7.1 CONSTRUÇÃO DO MÓDULO E MONTAGEM DO HEXAEDRO

Construção do módulo

1º Passo: Pegue uma folha quadrada, dobre a ao meio e desfaça.

2º Passo: Faça uma dobra de modo que os lados AB e CD coincidam com a mediatriz.

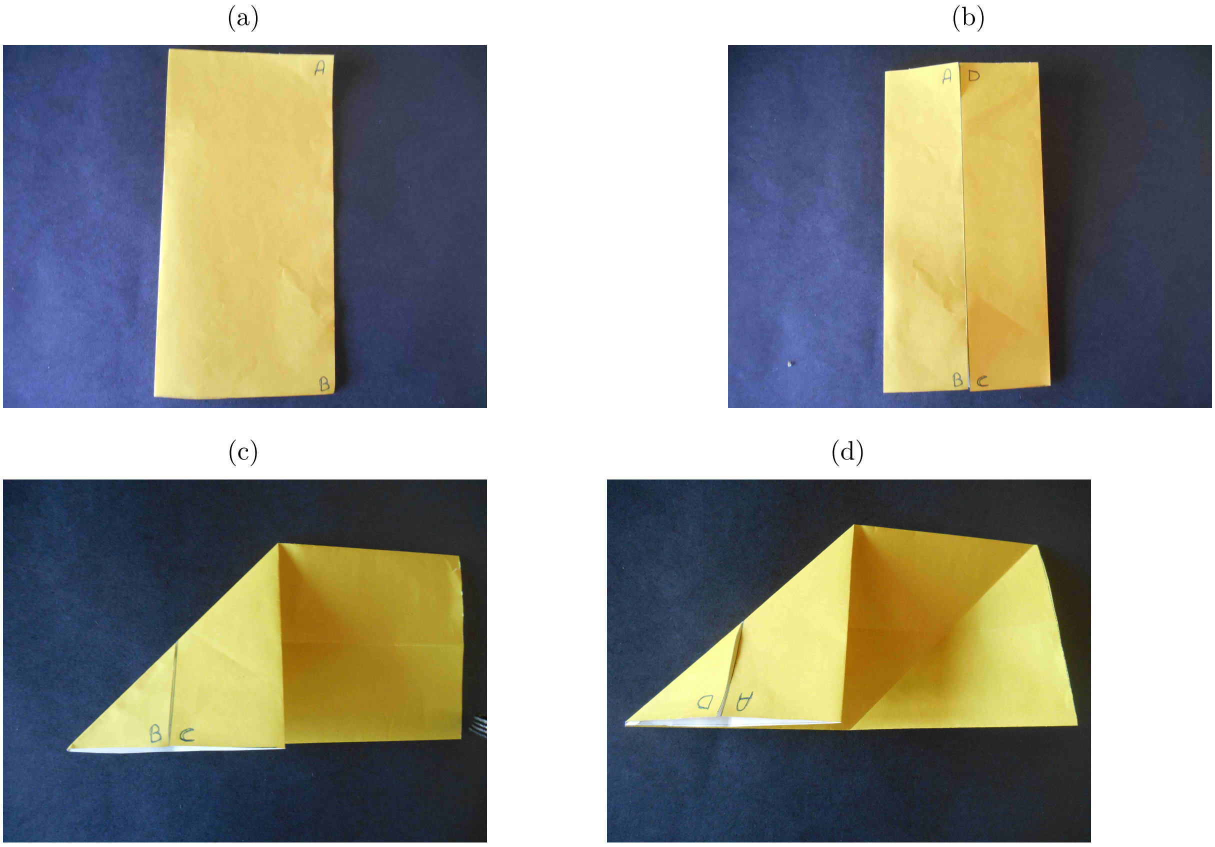
3º Passo: Dobre os vértices A e C para dentro, de modo a encontrar a linha de dobra anterior.

4º) Passo: Dobre de forma que FG coincida com EF. Introduza EG dentro da dobra AB.

5º) Passo: Dobre de forma que FH coincida com HG. Introduza FH dentro da dobra CD.

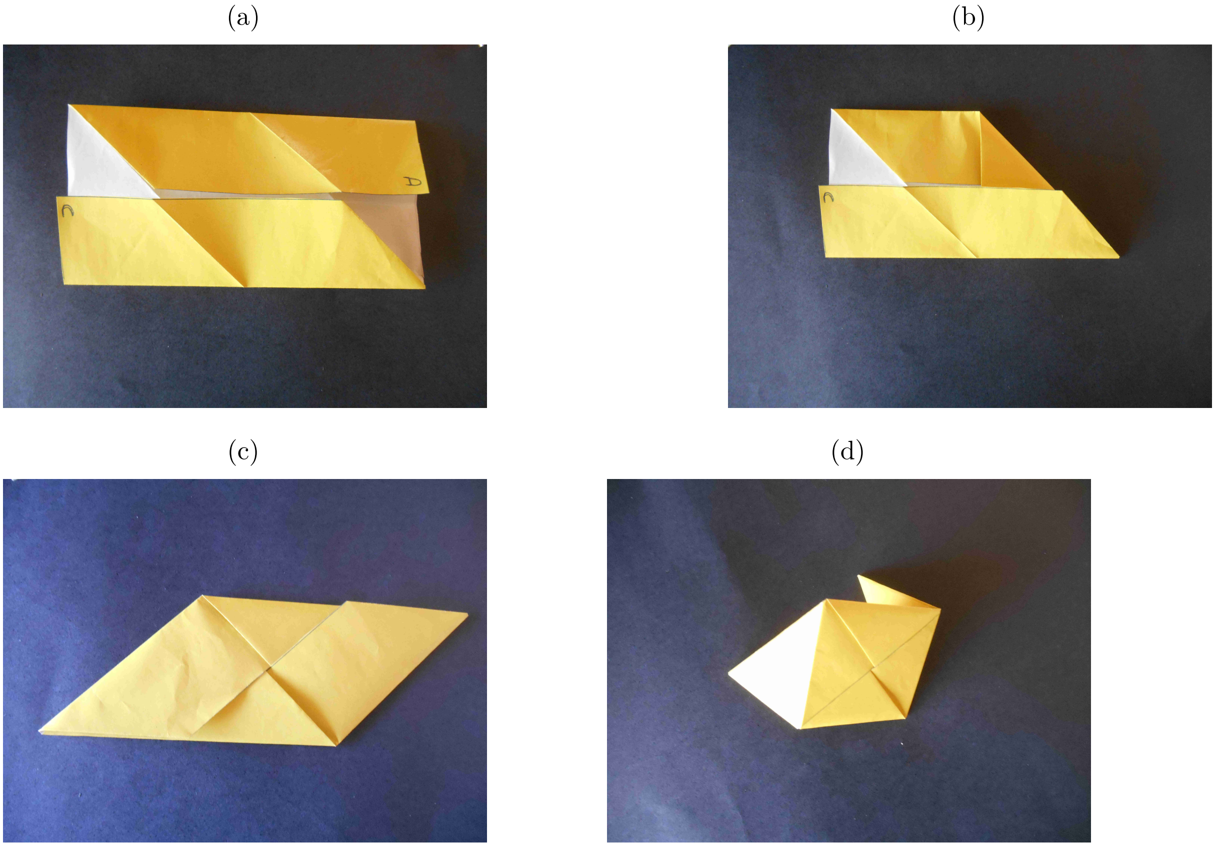
6º) Passo: tem-se então, um módulo no formato final de um quadrado que possui duas pontas triangulares. Veja Figura 28 e Figura 29.

Figura 28 – Módulo do hexaedro



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

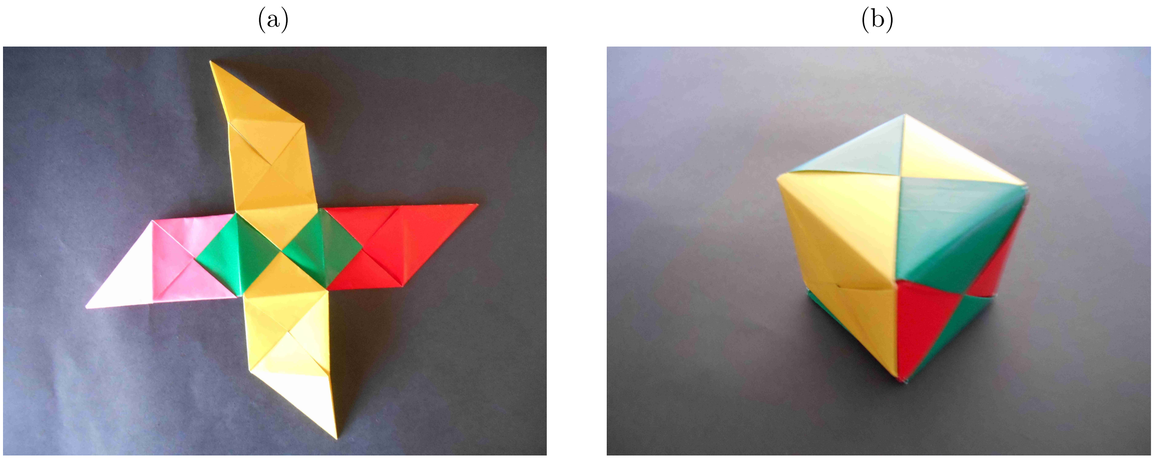
Figura 29 – Módulo do hexaedro (continuação)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Após a confecção dos seis módulos, encaixe as abas nos bolsos de modo que não fique nenhuma aba sem encaixar e nenhum bolso sem abas. Está pronto o hexaedro regular. Veja Figura 30.

Figura 30 – Hexaedro regular



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Depois de construído o hexaedro, podemos trabalhar planificação com os alunos, pedindo que eles desenhe todas as possíveis planificações do cubo.

7.2 CONSTRUÇÃO DO MÓDULO TRIANGULAR

1º) Passo: Considerando um quadrado de vértices $ABCD$, faça uma dobra de modo que AB fique sobre CD, determinando a mediatriz. Desdobre.

2º) Passo: Mantendo o ponto B fixo, faça uma dobra de modo que o vértice C fique sobre a mediatriz. Desdobre.

3º) Passo: Leve o lado AB até a linha de dobra.

4º) Passo: Mantendo o ponto C fixo, faça uma dobra de modo que o vértice B fique sobre a mediatriz. Leve o lado CD até a linha de dobra. Desdobre.

Está construído o triângulo equilátero BEC.

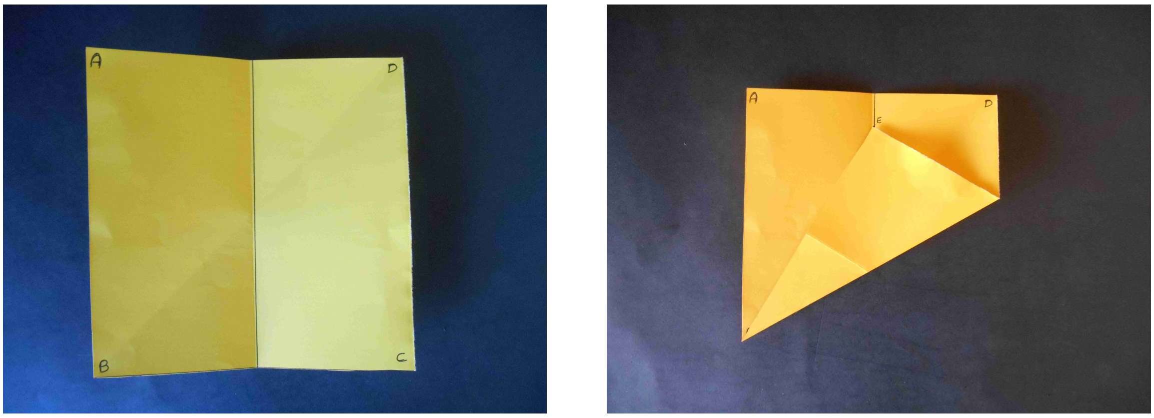
5º) Passo: Dobre as retas CE e BE. Faça uma dobra que leve o vértice E até ao ponto médio de BC.

6º) Passo: Dobre o vértice A para fora.

7º) Passo: Temos três triângulos equiláteros. Dobre-os para trás, encaixando um dentro do outro. Veja Figura 31, Figura 32 e Figura 33.

Figura 31 – Módulo triangular

(a) (b)

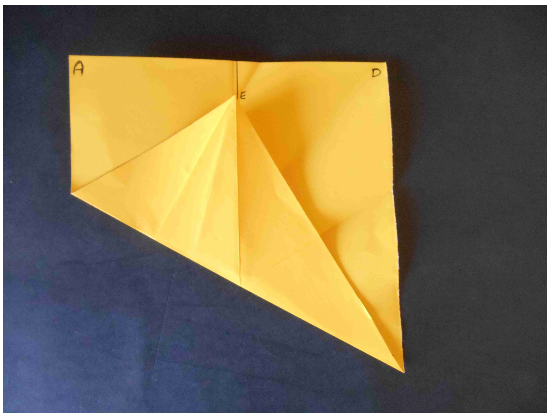


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 32 – Módulo triangular (continuação)

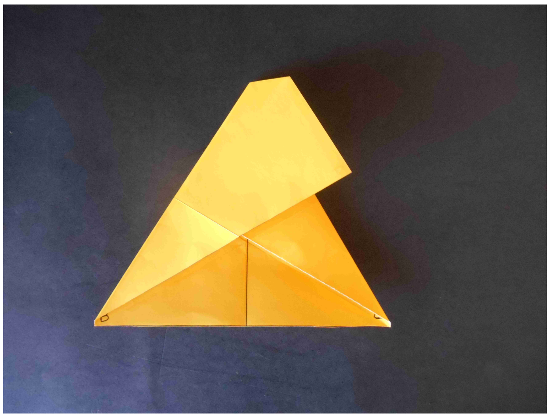
(a)

(b)



(c)

(d)

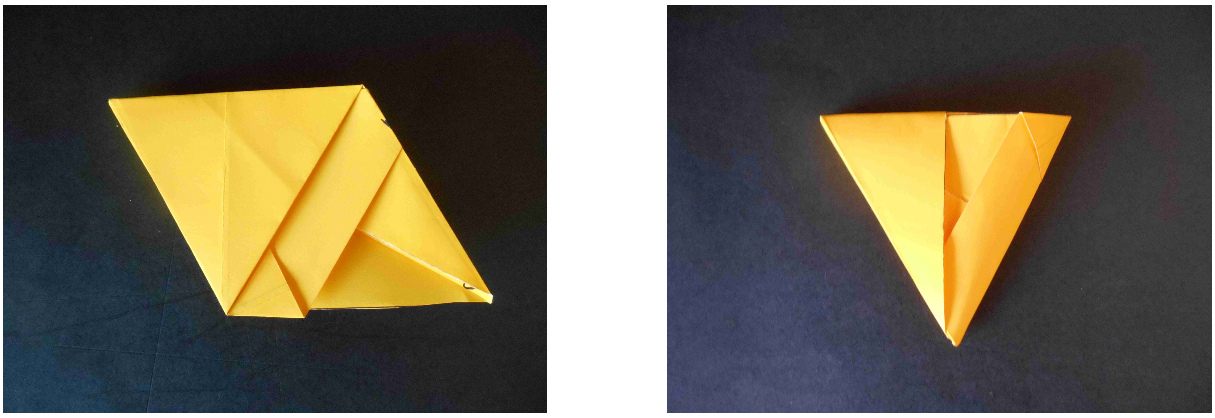


(e)

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 33 – Módulo triangular (continuação)

(a) (b)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A peça montada é um triângulo equilátero que representa o módulo dos poliedros de faces triangulares. Observe que o triângulo obtido contém um bolso em cada um dos três lados, onde serão colocados os módulos de encaixe, que irão unir as faces do poliedro.

Módulo de encaixe

Para a confecção do módulo de encaixe, é necessário utilizar um papel com $\frac{1}{4}$ da área do papel utilizado no módulo triangular.

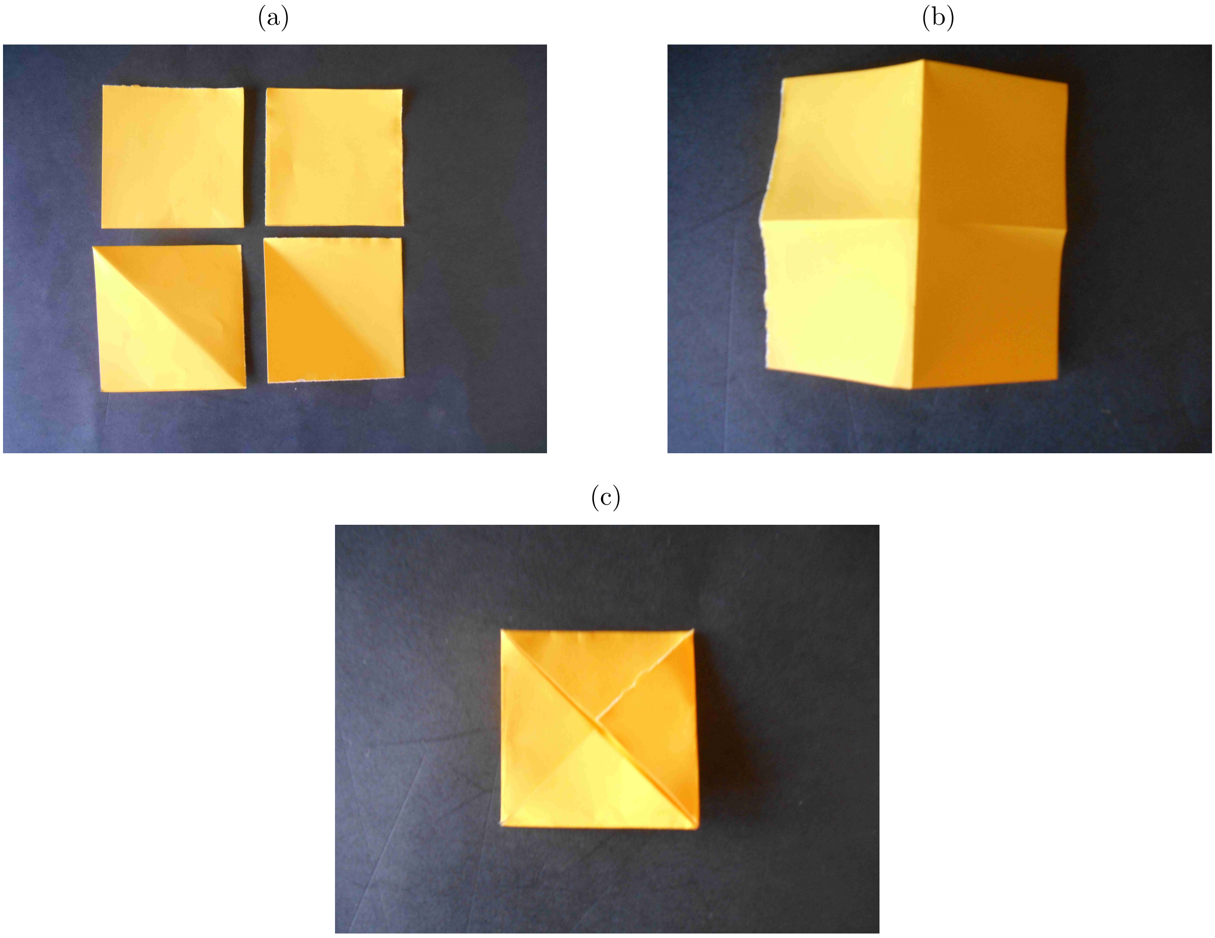
1º) Passo: Corte o papel original em quatro quadrados iguais.

2º) Passo: Dobre um dos pedaços obtidos ao ao meio fazendo vinco (mediatriz); repita para encontrar a outra mediatriz.

3º) Passo: Em seguida, una os vértices no ponto de intersecção obtido.

4º) Vire e dobre na diagonal. Está pronto o módulo de encaixe. Veja Figura 34.

Figura 34 – Módulo de encaixe



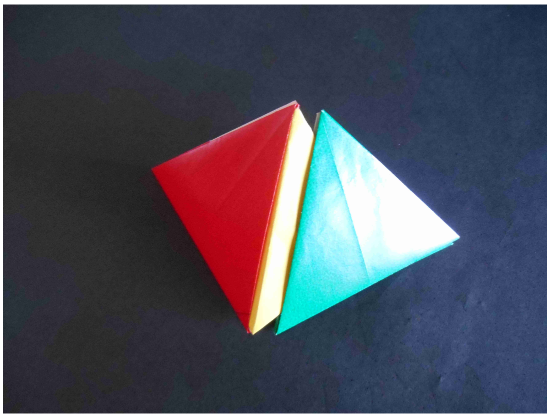
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Montagem do tetraedro

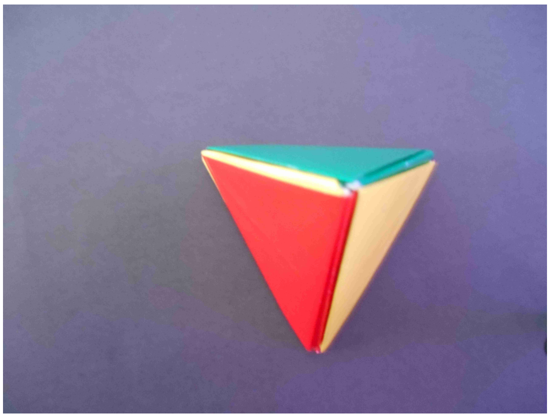
Para montar o tetraedro são necessários quatro módulos triangulares e seis módulos de encaixe. Encaixe os módulos triangulares introduzindo o módulo de conexão nos bolsos de encaixe. Veja Figura 35.

Figura 35 – Tetraedro

(a)



(b)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

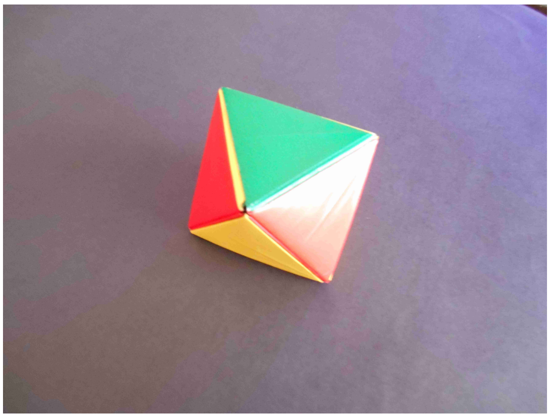
7.3 MONTAGEM DO OCTAEDRO E DO ICOSAEDRO

Os módulos de encaixe são as arestas do poliedro. Assim para a montagem do octaedro serão necessários 12 módulos de conexão e 8 módulos triangulares. Veja Figura 36.

Figura 36 – Octaedro

(a)

(b)

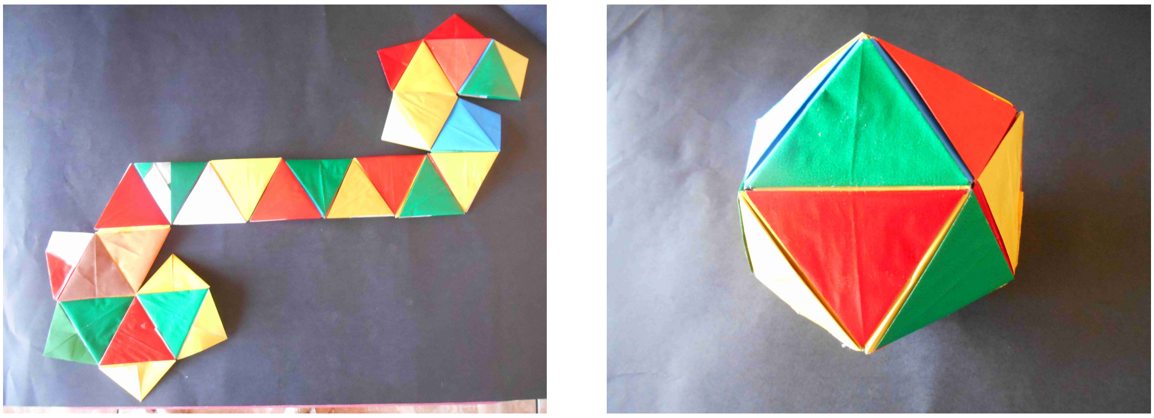


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Para a montagem do icosaedro que possui 20 faces e 30 arestas, serão necessários 20 módulos triangulares e 30 módulos de conexão. Veja Figura 37.

Figura 37 – Icosaedro

(a) (b)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

7.4 CONSTRUÇÃO DO MÓDULO E MONTAGEM DO DODECAEDRO

Construção do módulo em forma de pentágono

Para a confecção do módulo pentagonal, vamos utilizar uma folha de papel no formato retangular (por exemplo nas dimensões A4)

1º Passo: Folha de papel A4, dobrar e desdobrar marcando as duas mediatrizes.

2º Passo: Una os vértices opostos dois a dois ao centro da folha, marcando vinco.

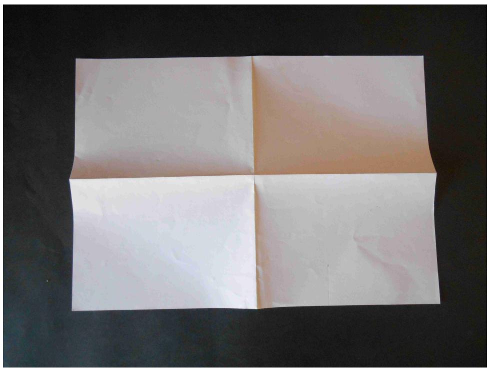
3º Passo: Dobre o hexágono formado ao meio, encaixando uma parte dentro da outra.

4º Passo: Traga um dos lados (maior) do pentágono obtido junto a última dobra efetuada, destacando o segmento maior encontrado com o auxílio de um lápis. Faça o mesmo para o outro lado.

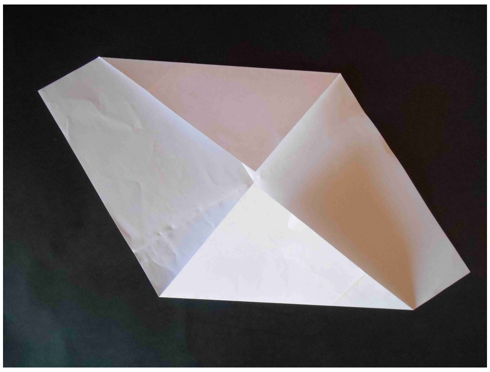
5º) Passo: Dobre e desdobre as linhas marcadas com o lápis e verifique o pentágono encontrado, assim como os encaixes e os bolsos obtidos. Veja Figura 38.

Figura 38 – Módulo pentagonal

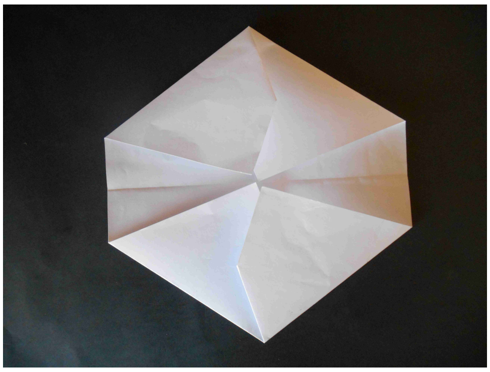
(a)



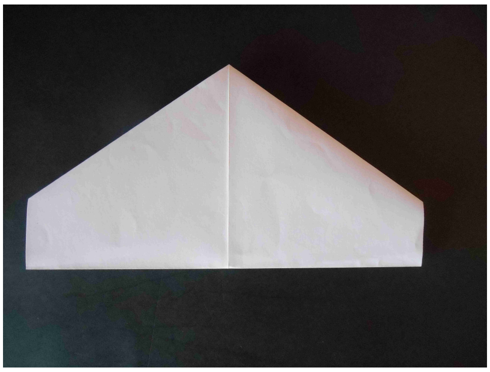
(b)



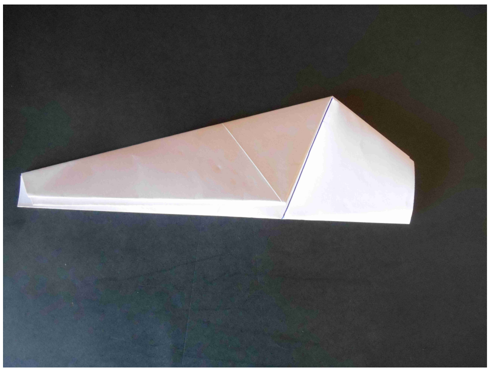
(c)



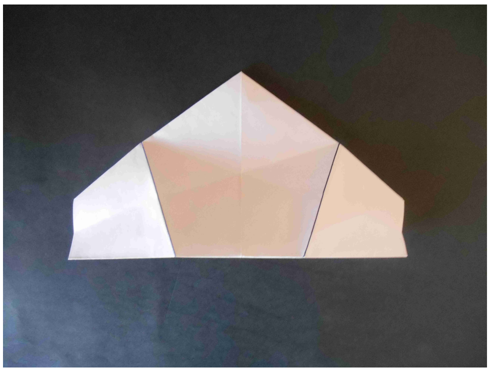
(d)



(e)



(f)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

O módulo construído possui duas abas e dois bolsos de encaixe. Você poderá fazer um corte (uma abertura) no outro lado para obter um terceiro bolso.

São necessários 12 módulos para a montagem do dodecaedro. Veja Figura 39.

Figura 39 – Dodecaedro

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

As construções aqui apresentadas, podem ser visualizadas em [10].

É importante salientar que todo o trabalho com origami modular é melhor aproveitado quando realizado em grupo para que a produção dos módulos não se torne cansativa, além do que, as atividades em grupo trabalham nos alunos a senso de solidariedade.

Durante as construções dos sólidos geométricos, deve-se discutir as relações matemáticas encontradas. Fazer sempre questionamentos sobre possibilidades. Após a conclusão das atividades, deve-se colocar questões para que os alunos possam manipular os sólidos geométricos, identificando seus principais elementos e características.

Ao trabalhar com origami modular, temos mais opções de construções além das dos poliedros. Estudamos também:

- prismas e pirâmides
- identificação de seus elementos: arestas, faces, vértices, base
- composição e decomposição
- planificação
- Fórmula de Euler
- a existência de apenas cinco os poliedros de Platão.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Novas formas de ensinar Matemática sempre são bem vindas. Mas alguns professores ainda resistem as mudanças.

A proposta do uso do origami nas aulas, tem por finalidade oportunizar ao professor métodos práticos que possam contribuir na sua prática docente, além de oportunizar também, aos alunos uma formação de conceitos e conhecimentos de forma lúdica. Também ajuda a diminuir a resistência que muitos apresentam para determinados conteúdos matemáticos.

“Há fortes indicações de que insistir no ensino de Geometria por meio de aula expositiva, utilizando a linguagem formal, sem envolver o aluno em atividades práticas, não permite que a maioria destes desenvolva conhecimentos que respondam às demandas de saberes matemáticos atuais-sejam formativas ou funcionais.”[12]

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, desenvolvendo um trabalho de construção das formas, o aluno reconhecerá com maior propriedade tanto figuras bidimensionais, quanto as tridimensionais. Nesse contexto, o trabalho com dobraduras, recortes e encaixes é fundamental para efetivar tais construções.

Durante a confecção do origami, o professor deve sempre utilizar a linguagem matemática adequada para favorecer a compreensão correta dos conteúdos geométricos por parte dos alunos. E ter sempre em mente os objetivos pretendidos com a execução das dobras: quais conceitos e conteúdos matemáticos serão abrangidos.

Quando trabalhamos de forma diferenciada, os alunos além de apresentar melhoras no conhecimento, apresenta também uma mudança significativa no comportamento, se mostram mais dispostos ao aprendizado.

É de suma importância o trabalho com recursos metodológicos que incentivem a criatividade e o lúdico, podendo assim, eliminar grande parte das deficiências de aprendizagem presentes na sala de aula.

Existem vários tipos de recursos que podem ser utilizados , com o fim de auxiliar o ensino-aprendizagem na Geometria, como por exemplo, o geoplano, o tangram e o Geogebra. O Origami é só um deles, porém de grande eficácia, sendo de fácil acesso e de baixo custo.

REFERÊNCIAS

[1] BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Edgard Blücher LTDA, 1996.

[2] BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília /MEC, 1998.

[3] CADAR, Luciana; DUTENHEFNER, Francisco. *Encontros de Geometria, parte 1*,Rio de Janeiro, IMPA, 2015. Disponível em http:// www.obmep.org.br/prog_ic_2010/apostila.html (acessado em agosto/2015)

[4] CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. *Explorando Geometria com Origami*, 2012. Disponível em http:// www.obmep.org.br/docs/apostila11.pdf. (acessado em junho/2015)

[5] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: geometria espacial, posição e métrica.* Atual Editora, São Paulo, vol. 10, 5º edição, 1993.

[6] DOLCE,Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria plana.* Atual Editora, São Paulo, vol. 9, 1980.

[7] EVES, Howard. textitIntrodução à História da Matemática. Editora da Unicamp, Campinas, 2ª edição, 1997.

[8] IEZZI, Gelson e outros. *Matemática e Realidade.* Ensino Fundamental. Atual Editora. São Paulo, 2005.

[9] IMENES, Luiz Márcio. *Geometria das dobraduras.* Coleção Vivendo a Matemática. Scipione, São Paulo, 7ª edição, 1996.

[10] www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/video.plap?video=6916.(acessado em junho/2015)

[11] www.apm.pt/files_EM114_pp16_22_4e6489d4d25fc.pdf (acessado em maio/2015)

[12] RÊGO, Rogéria Gaudêncio do; RÊGO, Rômulo Marinho do; VIEIRA, Kleber Mendes. *Laboratório de ensino de geometria.* Coleção formação de professores. Autores Associados, Campinas, 2012.

ANEXO A – PROJETO CONVIVÊNCIA

Imagens do projeto desenvolvido na Escola Municipal Henrique José de Souza. O tema proposto era Convivência e nosso trabalho foi desenvolvido através do Origami.

Figura 40 – Mostra: CONVIVÊNCIA

(a)

(b)

(c)

(d)

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.