



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Geometria das Abelhas

Edivan Alano Luz

Teresina - 2013

Edivan Alano Luz

Dissertação de Mestrado:

Geometria das Abelhas

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2013

Luz, E. A.

xxxx Geometria das Abelhas.

Edivan Alano Luz – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

1. Área de Concentração

Matemática

CDD 516.36

Agradecimentos

Ao Ser Supremo, pela vida e a possibilidade de empreender esse caminho evolutivo, por proporcionar tantas oportunidades de estudos e por colocar em meu caminho pessoas amigas e preciosas. Tive a honra de encontrar professores e colegas de sala com uma qualidade técnica admirável e ao mesmo tempo pessoas humildes e que sempre estavam dispostas a ajudar. Isso me motivou, e com certeza, vou ter muito zelo pelo que aprendi.

A MINHA FAMÍLIA, especialmente a minha esposa (Celma), as minhas filhas (Edilana e Edilângela), ao meu filho (Erivan), ao meu pai (Alano), a minha mãe (Maria de Lourdes) e aos meus irmãos e parentes que, mesmo estando a alguns quilômetros de distância, se mantiveram incansáveis em suas manifestações de apoio e carinho.

AOS AMIGOS de Mestrado que compartilharam comigo esses momentos de aprendizado, especialmente ao Hélder, Paulo e Nascimento que sempre me apoiaram e me ajudaram em momentos delicados. Foram colaboradores incansáveis, em particular, o Hélder, a pessoa que sugeriu o tema do meu trabalho e indicou muito material de estudo. Estudamos muito e nos ajudamos mutuamente.

AO MEU ORIENTADOR, Dr. Jurandir (colega de graduação), um agradecimento carinhoso por todos os momentos de paciência, compreensão e competência.

A TODOS OS COLEGAS DE TRABALHO pelo incentivo e torcida, em especial ao meu grande amigo Afonso Norberto, que desde o início me deu dicas e suporte para que eu pudesse seguir em frente. Certamente é o maior responsável pelo meu crescimento como professor de Matemática. Enfim, a todos que de uma maneira ou de outra contribuíram para que este percurso pudesse ser concluído.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

“Nas grandes batalhas da vida, o primeiro passo para a vitória é o desejo de vencer”.

Mahatma Gandhi.

Resumo

Neste trabalho tratamos da geometria das abelhas, mas especificamente da forma em que armazenam o mel. A construção dos alvéolos (prisma de base hexagonal, fechado por três losangos congruentes, formando um ápice triédrico) se dá de uma forma inteligente em que é armazenada uma maior quantidade de mel para uma menor quantidade de material. Provamos que para este tipo de armazenamento os ângulos dos losangos não variam e o ângulo que o eixo vertical a partir do vértice forma com as faces dos losangos também é constante.

palavras chaves: abelhas, alvéolos, losangos e prisma hexagonal

Abstract

In this paper we deal with the geometry of the bees, but specifically the way they store the honey. The construction of the alveoli (hexagonal prism base, enclosed by three congruent lozenges, forming an apex trihedral) occurs in an intelligent way in which is stored an increased amount of honey for a smaller amount of material. We have proved that this type of storage angles of the diamond and the angle does not vary the vertical axis from the apex to form the faces of the diamond is also constant.

keywords: bees, alveoli, diamonds and hexagonal prism

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Resultados Preliminares	5
2.1 Congruências de triângulos	5
2.2 Quadriláteros notáveis	8
2.3 Áreas de Figuras Planas	9
2.4 Volume do Prisma	12
2.5 Derivada	14
2.5.1 Regras de Derivação	18
2.5.2 Máximos e Mínimos	20
3 Geometria Aplicada	23
3.1 Área do Alvéolo	29
3.2 Volume do Alvéolo	33
4 A Matemática das Abelhas	35
5 Considerações Finais	42
Referências Bibliográficas	43

Capítulo 1

Introdução

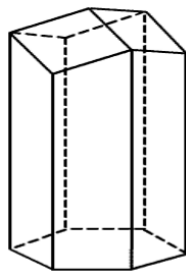
A geometria é um dos ramos da matemática que nasceu para atender as necessidades prática gerada pelo desenvolvimento da sociedade humana. Temos uma diversidade de exemplos: medição de terras, construção de moradias, confecção de itens bélicos, construção de estradas e etc, em que o conhecimento sobre as figuras geométricas e suas propriedades eram indispensáveis.

Posteriormente, a geometria ganha um aspecto mais aperfeiçoado. Buscando organizar os conhecimentos já desenvolvidos e sistematizá-los foi empregado uma estrutura oriunda da filosofia, surgindo então os axiomas, os postulados e as demonstrações com a retórica e a lógica tão cara aos gregos. Assim, há matemáticos que passam a desenvolver a geometria sob uma ótica puramente teórica e formalista, enquanto outros desejam sempre associá-la aos demais campos científicos, notadamente a Física e as Engenharias.

No livro as maravilhas da matemática, o Genial Malba Tahan, (1895-1974), comentou o trabalho do matemático Belga Maurice Maeterlinek (1862-1949) sobre a geometria que as abelhas praticam em sua vida diária. Como se sabe, esses insetos usam cera para construir os alvéolos das colmeias, que servem depois de depósito para o mel que fabricam. Maeterlinek observou que, ao contrário de muitos planejadores humanos, as abelhas constroem os alvéolos procurando uma forma que otimize a economia, isto é, que apresente o maior volume para uma menor porção de material gasto. Para isso, os alvéolos não poderiam ser cilíndricos, pois a falta de paredes comuns entre eles deixaria uma grande quantidade de espaços inaproveitados. Assim, para que a parede de um alvéolo servisse também ao alvéolo vizinho, eles deveriam, obviamente, ter a forma de um prisma. Provaremos posteriormente que os únicos prismas regulares que se justapõem sem deixar buracos

são os prismas triangulares, os quadrangulares e os hexagonais.

O problema realmente interessante acontece no fechamento dos alvéolos. Em vez de construir um hexágono plano para cobrir o fundo, as abelhas economizam cerca de um alvéolo em cada cinquenta, utilizando três losangos iguais colocados inclinadamente conforme a figura abaixo.



Alvéolo

Pode parecer pouco, mas uma economia de 2% que elas conseguem com o fechamento de milhões de alvéolos representa uma grande quantidade. Os ângulos do losango de fechamento, inclinados em relação ao eixo radial dos alvéolos, acabaram provocando uma controvérsia que foi didaticamente exposta por Malba Tahan em seu livro. Ele conta que o Físico francês René-Antonie Ferchault de Réaumur (1683-1757) observou que o ângulo agudo e, conseqüentemente, seu suplemento não variavam. Isto é, suas medidas eram constantes.

Intrigado, Réaumur mandou buscar alvéolos em várias partes do mundo, como a Alemanha, Suíça, Inglaterra, Canadá e Guiana. Todos apresentavam losangos de mesmo ângulo. O astrônomo francês Jean-Dominique Maraldi, (1709-1788) efetuou as medições dos mesmos ângulos agudos e encontrou o mesmo valor em todos eles: $70^{\circ} 32'$. Surpreendido com o resultado, Réaumur propôs ao seu amigo Samuel König, matemático alemão, que resolvesse o seguinte problema: dado um prisma de base hexagonal, devendo fechá-lo em uma das extremidades com três losangos iguais, colocados inicialmente, para obter maior volume com um gasto mínimo de material, qual é o ângulo dos losangos que satisfaz a condição?

Sem saber a origem do problema, König calculou o ângulo como sendo $70^{\circ}34'$. Embora a diferença fosse insignificante, de apenas dois minutos em relação aos cálculos feitos por Maraldi, concluiu-se que as abelhas estavam erradas. Isso provocou um certo embaraço entre os cientistas que tentavam explicar essa questão. O fato chegou ao conhecimento do

matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746), que utilizando os recursos do cálculo diferencial recalculou o ângulo e encontrou $70^{\circ} 32'$ o que mostrava que as abelhas estavam certas. Maclaurin mostrou ainda que o engano de König era explicável: ele havia usado uma tabela de logaritmos contendo um erro, daí a diferença de dois minutos.

Veja a seguir duas fotos que mostram a forma em que as abelhas armazenam o mel. Numa única colméia existem milhares de alvéolos podendo chegar a milhões.



Foto de uma Colméia



Favo de Mel

Este trabalho tem como objetivo mostrar que a forma de prisma hexagonal reto com cobertura rômica por losangos é a melhor estrutura geométrica que as abelhas utilizam para construção dos seus alvéolos conjugados, visto que permitem alcançar maior volume com menor área superficial. Para tanto este trabalho será estruturado por uma introdução

que apresenta um pouco da história sobre os pesquisadores que inicialmente desenvolveram pesquisas nessa área e as idéias gerais do trabalho. Posteriormente é colocado os resultados preliminares que é um resumo dos principais tópicos de Geometria Plana, Geometria Espacial, um pouco do Cálculo (regras de derivação, máximos e mínimos). Na sequência são resolvidos os problemas propostos e, finalmente, as considerações finais e a bibliografia.

Capítulo 2

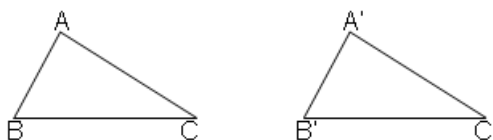
Resultados Preliminares

2.1 Congruências de triângulos

Dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro.

Assim, se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ forem congruentes, deve existir uma correspondência entre os vértices de um e do outro, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes. A figura abaixo mostra dois triângulos congruentes ABC , $A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$ para tais triângulos, temos então

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}'; \hat{B} \equiv \hat{B}'; \hat{C} \equiv \hat{C}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}; \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}; \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases}$$



Triângulos Congruentes

É imediato que a congruência de triângulos possui as duas propriedades interessantes a seguir:

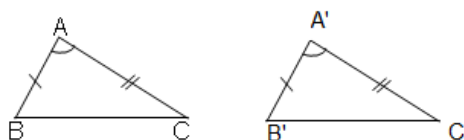
I) Simetria: tanto faz dizermos que um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF quanto dizer que DEF é congruente a ABC , ou mesmo que dizer que ABC e DEF são congruentes.

II) Transitiva: Se ABC for congruente a DEF e DEF for congruente a GHI , então ABC

será congruente a GHI. Doravante, escreveremos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ Para denotar que os dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'$. Seria interessante dispormos de critérios para decidir se dois triângulos dados são ou não congruentes. Tais critérios deveriam ser os mais simples possíveis, a fim de facilitar a verificação da congruência. Esses critérios existem e são chamados casos de congruência de triângulos.

No que segue estudaremos alguns casos de congruência.

CASO I : Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.



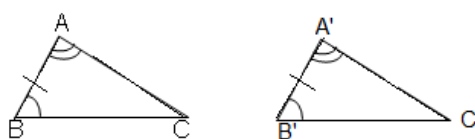
1ºCASO: O caso de Congruência LAL

Em símbolos, o caso de congruência acima garante que, dados triângulos ABC e $A'B'C'$,

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{LAL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'; B \leftrightarrow B'; C \leftrightarrow C'$. Em particular, segue daí que $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$

CASO II : Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.



2º CASO: O caso de Congruência ALA

Em símbolos, dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos

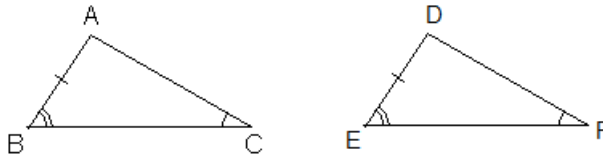
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A} \equiv \widehat{A}' \\ \widehat{B} \equiv \widehat{B}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \end{array} \right\} \xrightarrow{ALA} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$; $B \leftrightarrow B'$; $C \leftrightarrow C'$. Em particular, também devemos ter $\widehat{C} \equiv \widehat{C}'$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

CASO III : (LLL). Tendo os três lados respectivamente congruentes, dois triângulos serão congruentes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \end{array} \right. \xrightarrow{LLL} \triangle ABC \equiv \triangle DEF \implies \left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} \equiv \widehat{D} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{F} \end{array} \right.$$

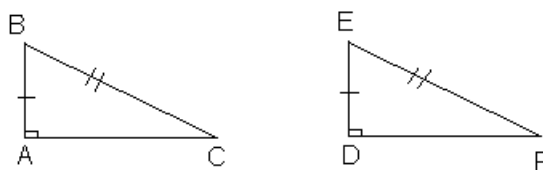
CASO IV : (LAA_o ou lado - ângulo - ângulo oposto). Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente ao lado considerado e o ângulo oposto a tal lado respectivamente congruentes, estão os triângulos são congruentes.



4º CASO: o caso LAA de Congruência

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \widehat{C} \equiv \widehat{F} \\ \widehat{B} \equiv \widehat{E} \end{array} \right. \xrightarrow{LAA_o} \triangle ABC \equiv \triangle DEF \implies \left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} \equiv \widehat{D} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \end{array} \right.$$

CASO V : Caso especial (apenas em triângulos retângulos) Se dois triângulos retângulos têm hipotenusas congruentes e um par de catetos de mesma medida (um em cada), então os triângulos são congruentes.



5º CASO: o caso Especial de Congruência

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} \\ \hat{A} \equiv \hat{D} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Caso Especial}} \triangle ABC \equiv \triangle DEF \implies \left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} \equiv \overline{DF} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \end{array} \right.$$

2.2 Quadriláteros notáveis

Definição 1. *Um quadrilátero convexo é dito paralelogramo se possuir lados opostos paralelos.*



Paralelogramo

$ABCD$ é paralelogramo $\Leftrightarrow \overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$.

No que segue vamos enunciar várias maneiras equivalentes de definir um paralelogramo. Você deve guardar tais resultados como propriedades notáveis dos paralelogramos, a serem usadas oportunamente.

Proposição 1. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se e só se seus ângulos opostos forem iguais.*

Proposição 2. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se e só se seus pares de lados opostos forem iguais.*

Proposição 3. *Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se e só se suas diagonais se intersectam ao meio.*

Se um quadrilátero convexo tiver dois lados opostos paralelos e iguais, já sabemos que se trata de um paralelogramo. Pode ocorrer, entretanto, sabermos somente que dois lados opostos de um quadrilátero convexo são paralelos (podendo ou não ser iguais). Neste caso o quadrilátero obtido é denominado trapézio. Assim, todo paralelogramo é em particular um trapézio, mas é fácil nos convenceremos de que a recíproca não é verdadeira.

Em todo trapézio, os dois lados sabidamente paralelos são suas bases, sendo o maior (respectivamente o menor) deles a base maior (respectivamente base menor); os outros dois lados (sobre os quais em princípio nada sabemos, mas que podem também ser paralelos, caso o trapézio seja em particular um paralelogramo) são os lados não paralelos do trapézio.

A fim de completar nosso estudo dos tipos particulares mais elementares de quadriláteros, vamos estudar agora retângulos e losangos. Um quadrilátero convexo é um retângulo se todos os seus ângulos internos forem iguais. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é sempre igual a 360° , segue então que um quadrilátero convexo é um retângulo se e só se todos os seus ângulos internos forem iguais a 90° . Um quadrilátero convexo é um losango se todos os seus lados forem iguais. Note então que todo losango é um paralelogramo.

Um resultado importante em relação aos losangos é que as suas diagonais se encontram determinando um ângulo de 90° . Para a comprovação desse resultado usamos congruência de triângulos.

2.3 Áreas de Figuras Planas

Iremos supor aqui que a área de um quadrado de lado a é a^2 e que a área de um retângulo de lados a e b é $a \cdot b$.

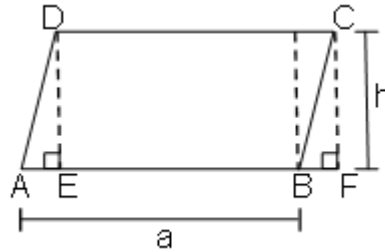
Queremos a partir de então determinar a área de um paralelogramo, de um trapézio e de um triângulo.

OBSERVAÇÃO: Seja $A_1A_2 \cdots A_n$ um polígono convexo de n lados. Denotaremos que a área desse polígono será dada por:

$$(A_1A_2 \cdots A_n).$$

Proposição 4. *A área de um paralelogramo de base a e altura h é $a \cdot h$.*

Demonstração. Considere o paralelogramo ABCD



Área do Paralelogramo

Sejam respectivamente E e F os pés das perpendiculares baixadas de D e C à reta \overline{AB} e suponha, sem perda de generalidade, que $E \in \overline{AB}$ (figura acima). É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF são congruentes, de modo que $\overline{AB} = \overline{EF}$ e $(ADE) = (BCF)$. Então, temos

$$(ABCD) = (ADE) + (BEDC)$$

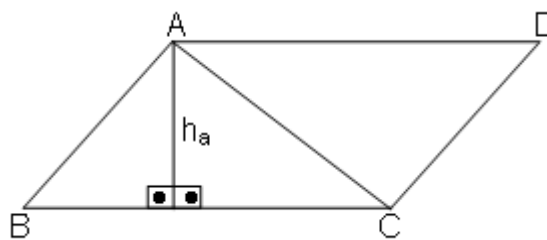
$$(ABCD) = (BCF) + (BEDC)$$

$$(ABCD) = (EFCD)$$

Por outro lado, EFCD é um retângulo de altura h e base $\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = a$. Portanto, $(ABCD) = a \cdot h$. □

Proposição 5. *Seja ABC um triângulo de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e alturas h_a , h_b e h_c respectivamente aos lados a, b, c. Então $(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$.*

Demonstração. Seja $S = (ABC)$ e D a interseção da paralela a \overline{BC} por A com a paralela a \overline{AB} por C (figura abaixo).



Área do Triângulo

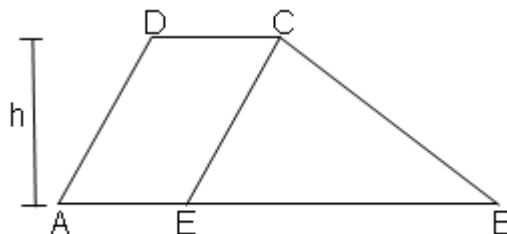
É imediato verificar que ABCD é um paralelogramo de área 2S (uma vez que $\triangle ABC = \triangle ACD$). Portanto, $2 \cdot (ABC) = 2 \cdot S = a \cdot h_a$, donde segue a primeira igualdade. As outras duas igualdades podem ser obtidas de modo análogo. □

Calcular áreas de polígonos convexos é agora, em princípio, uma tarefa fácil: as diagonais do mesmo traçadas a partir de um dos seus vértices o particionam em triângulos, e basta calcular a área de cada um desses triângulos com a ajuda da proposição anterior.

Proposição 6. Se $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$, e altura h , então

$$(ABCD) = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a > b$.



Área do Trapézio

Se $E \in \overline{AB}$ for tal que $\overline{AE} = b$ então o quadrilátero AECD tem dois lados paralelos e iguais, de modo que é um paralelogramo. Com $\overline{BE} = a - b$, temos

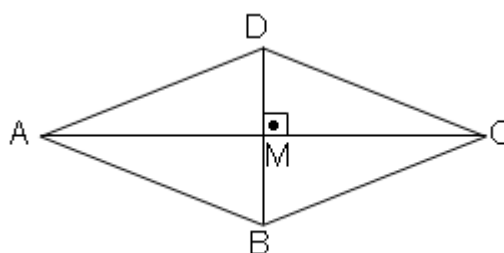
$$(ABCD) = (AECD) + (EBC) = b \cdot h + \frac{(a - b) \cdot h}{2} = \frac{(a + b)h}{2}$$

□

Corolário 1. Se $ABCD$ é um losango de diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , então

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2}$$

Demonstração. Como $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, temos



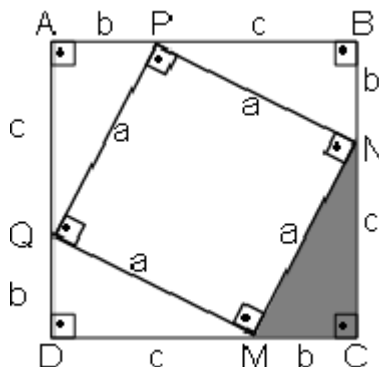
Área do Losango

$$(ABCD) = (ABC) + ACD) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BM}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DM}}{2} = \overline{AC} \cdot \frac{(\overline{BM} + \overline{DM})}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2}$$

□

Teorema 1. (*Teorema de Pitágoras*): Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração. Considere os quadrados ABCD e MNPQ da figura.



Teorema de Pitágoras

Temos que $(ABCD) = (MNPQ) + 4 \cdot (MNC)$, já que os quatro triângulos da figura são congruentes e portanto possuem a mesma área. Assim,

$$(ABCD) = a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}$$

$$(b + c)^2 = a^2 + 2bc$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

□

Note então que no triângulo retângulo MNC o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

2.4 Volume do Prisma

AXIOMA (Princípio de Cavalieri). *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.*

Com o Princípio de Cavalieri, podemos obter facilmente o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h , e cuja base seja um polígono de área A , contido em um plano horizontal. Construimos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A .

Suponha agora que os dois sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Ora,

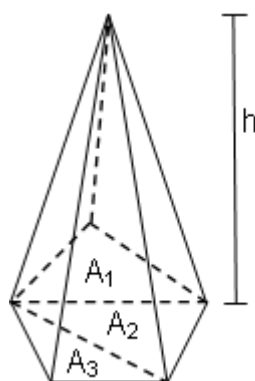
sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como as figuras congruentes tem mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm o mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é Ah , o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

Como consequência do cálculo do volume do prisma, podemos demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 2. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Teorema 3. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

Observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.



Pirâmide

Suponha agora que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A , tenha sido dividido em n triângulos de áreas A_1, A_2, \dots, A_n .

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3}A_1 \cdot h + \frac{1}{3}A_2 \cdot h + \dots + \frac{1}{3}A_n \cdot h = \frac{1}{3}h \cdot (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \frac{1}{3}A \cdot h$$

Como queríamos demonstrar.

2.5 Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto:

Definição 2. *Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0 , então a derivada de f em x_0 , denotada por $f'(x_0)$, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

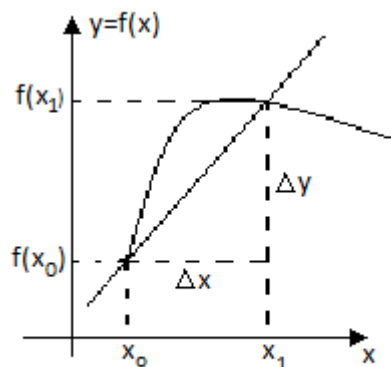
se esse limite existir.

Δx representa uma pequena variação em x , próximo de x_0 , ou seja, tomando $x = x_0 + \Delta x$ ($\Delta x = x - x_0$), a derivada de f em x_0 pode também se expressa por

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Interpretação física: a derivada de uma função f em um ponto x_0 fornece taxa de variação instantânea de f em x_0 . Vejamos como isso ocorre:

Suponha que y seja uma função de x , ou seja, $y = f(x)$. Se x variar de um valor x_0 até um valor x_1 , representaremos esta variação de x , que também é chamada de incremento de x , por $\Delta x = x_1 - x_0$, e a variação de y é dada por $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$, o que é ilustrado na figura a seguir:



Taxa de Variação Média

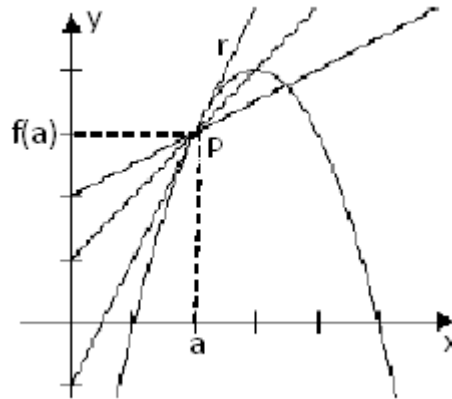
O quociente das diferenças, dado por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, é dito taxa de variação média de y em relação a x , no intervalo $[x_0, x_1]$. O limite destas taxas médias de variação, quando $\Delta x \rightarrow 0$, é chamado de taxa de variação instantânea de y em relação a x , em $x = x_0$. Assim, temos:

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Portanto, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto, isto é, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Interpretação geométrica: a derivada de uma função f em um ponto a fornece o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Vejamos:

Dada uma curva plana que representa o gráfico de f , se conhecermos um ponto $P(a, f(a))$, então a equação da reta tangente r à curva em P é dada por $y - f(a) = m(x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação. Mas como obter m para que r seja tangente à curva em P ? Consideremos um outro ponto arbitrário sobre a curva, Q , cujas coordenadas são $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. A reta que passa por P e Q que é chamada reta secante à curva.



Reta Tangente a Curva

Analisemos agora a variação do coeficiente angular da reta secante fazendo Q se aproximar de P , ou seja, tomando Δx cada vez menor. Tudo indica que quando P está próximo de Q , o coeficiente angular m_{sec} da reta secante deve estar próximo do coeficiente angular m da reta r , ou seja, o coeficiente angular m_{sec} tem um limite m quando Q tende para P , que é o coeficiente angular da reta tangente r . Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + \Delta x$ ($\Delta x = x - a$) e sabendo-se que a abscissa de P é expressa por a , então, se $Q \rightarrow P$ temos que $\Delta x \rightarrow 0$, o que é equivalente a $x \rightarrow a$. Assim:

$$m = \lim_{x \rightarrow a} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

(se este limite existe), é o coeficiente angular da reta tangente r . Portanto, o coeficiente angular da reta tangente no ponto de abscissa $x = a$ é a derivada da função f em a , isto é:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. Se f é a função constante definida por $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, então $f' = 0$.

Demonstração. Podemos chegar a essa conclusão fazendo diretamente o cálculo do limite.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Exemplo 2. Seja $f(x) = ax + b$ uma função linear, com $a \neq 0$, então $f'(x) = a$

Demonstração. Calculando diretamente o limite temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$$

Exemplo 3. Se $f(x) = \text{sen } x$ então $f'(x) = \text{cos } x$

Calculando diretamente a derivada de $f(x) = \text{sen } x$, obtemos:

$$f'(x) = (\text{sen } x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot \text{cos } h + \text{sen } h \cdot \text{cos } x - \text{sen}(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\text{cos } x \cdot \frac{\text{sen } h}{h} + \text{sen } x \cdot \frac{\text{cos } h - 1}{h} \right]$$

em que usamos a fórmula do seno da soma: $\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \text{cos } b + \text{sen } b \text{cos } a$ e agrupamos os termos com $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$.

Passando o limite quando $h \rightarrow 0$ e usando os limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos } h - 1}{h} = 0$, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

$$f'(x) = \text{cos } x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \right) + \text{sen } x \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos } h - 1}{h} \right)$$

$$f'(x) = \text{cos } x \cdot 1 + \text{sen } x \cdot 0$$

$$f'(x) = \text{cos } x$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 4. Se $f(x) = \text{cos } x$ então $f'(x) = -\text{sen } x$

Demonstração. O desenvolvimento é análogo ao que foi feito para a função seno. Para a função $f(x) = \text{cos } x$, temos:

$$f'(x) = (\text{cos } x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos}(x+h) - \text{cos } x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{cos } x \cdot \text{cos } h - \text{sen } x \cdot \text{sen } h) - \text{cos } x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\text{cos } x \cdot \frac{\text{cos } h - 1}{h} - \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen } h}{h} \right]$$

em que usamos a fórmula do cosseno da soma ($\cos(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \cos \mathbf{a} \cdot \cos \mathbf{b} - \text{sen } \mathbf{a} \cdot \text{sen } \mathbf{b}$) e agrupamos os termos com $\text{sen } \mathbf{x}$ e $\cos \mathbf{x}$. Passando o limite quando $\mathbf{h} \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}) &= (\cos \mathbf{x})' = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\cos(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \cos \mathbf{x}}{\mathbf{h}} \\ f'(\mathbf{x}) &= \cos \mathbf{x} \cdot \left(\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\cos \mathbf{h} - 1}{\mathbf{h}} \right) - \text{sen } \mathbf{x} \cdot \left(\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \mathbf{h}}{\mathbf{h}} \right) \\ f'(\mathbf{x}) &= \cos \mathbf{x} \cdot 0 - \text{sen } \mathbf{x} \cdot 1 \\ f'(\mathbf{x}) &= -\text{sen } \mathbf{x} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Como podemos notar, o cálculo da derivada através da sua definição nem sempre é simples, pois envolve o cálculo de um limite.

2.5.1 Regras de Derivação

No momento apresentaremos algumas propriedades das derivadas, que chamaremos de regras de derivação, que serão utilizadas posteriormente neste trabalho.

Regra 1. (Derivada da Soma) *Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo aberto I . Se as duas funções forem deriváveis em $\mathbf{x}_0 \in I$, então a função soma $f + g$ é derivável em \mathbf{x}_0 e vale que $(f + g)'(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0) + g'(\mathbf{x}_0)$.*

Demonstração. Sejam $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ duas funções reais. Então

$$(f+g)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{h})+g(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})) = (f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}))+(g(\mathbf{x}+\mathbf{h})-g(\mathbf{x})).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (f + g)'(\mathbf{x}) &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{(f + g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (f + g)(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{(f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})) + (g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x}))}{\mathbf{h}} \\ &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{g(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - g(\mathbf{x})}{\mathbf{h}} \\ &= f'(\mathbf{x}) + g'(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

Caso os limites existam. □

Regra 2. (Derivada do Produto) *Sejam $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ duas funções definidas em um intervalo I . Se as duas funções forem deriváveis em $\mathbf{x}_0 \in I$, então a função produto $(fg)(\mathbf{x})$ é derivável em \mathbf{x}_0 e vale que $(fg)'(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0) \cdot g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) \cdot g'(\mathbf{x}_0)$.*

Demonstração. Observe inicialmente que

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) =$$

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x),$$

em que simplesmente somamos e subtraímos na expressão a parcela $f(x) \cdot g(x+h)$.

Reagrupando a expressão:

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) =$$

$$f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) =$$

$$(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot (g(x+h) - g(x)).$$

Dividindo a expressão por h e passando ao limite $h \rightarrow 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \\ \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \cdot g(x) + f(x) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) &= \\ f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) & \end{aligned}$$

Observe que no desenvolvimento acima usamos as propriedades do limite da soma e do produto. Usamos também a continuidade da função g . Neste caso, provamos a proposição acima. \square

Regra 3. (Derivada do Quociente) *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em um intervalo I . Se as duas funções forem deriváveis em $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0$, então a função quociente $\left(\frac{f}{g}\right)$ é derivável em x_0 e vale que*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Regra 4. (Regra da Cadeia) *Sejam f e g funções reais tais que a imagem de g está contida no domínio de f . Se g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$ então $f \circ g$ é derivável em x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.*

Exemplo 5. (Derivada da Potência). *A função $f(x) = x^n$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ se $n \in \mathbb{N}$ e derivável para $x \in \mathbb{R}^*$ se $-n < 0$, onde $n \in \mathbb{N}$. Nos dois casos, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.*

Solução.

i) Sendo $n \in \mathbb{N}$, podemos por $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}_n$. Assim, pela Regra 2, temos

$$f'(x) = 1 \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots \cdot x}_{n-1} + x \cdot 1 \underbrace{x \cdot x \dots \cdot x}_{n-2} + \dots + \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots \cdot 1}_{n-1}.$$

Como o número x aparece $n - 1$ vezes nas n parcelas, a soma destas resulta $n \cdot x^{n-1}$. Portanto, $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

ii) Caso $-n < 0$ com $n \in \mathbb{N}$, basta tomarmos $m = -n$ e procedermos de modo análogo ao item i).

2.5.2 Máximos e Mínimos

Uma parte importante das aplicações do Cálculo Diferencial está relacionada ao problema de encontrar máximos e mínimos de funções. São os chamados problemas de otimização e que consiste, de maneira geral, em construir um modelo matemático do problema no qual alguma grandeza é dada por uma função derivável de uma ou mais variáveis e a informação que buscamos consiste em encontrar o máximo ou mínimo da função.

Máximos e mínimos de uma função são, respectivamente, os maiores e menores valores que a função assume em seu domínio, são os chamados valores extremos da função. Esses são extremos absolutos. No entanto, são também importantes os valores extremos em uma vizinhança de um ponto. São os chamados extremos locais.

Definição 3. Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em c se $f(x) \leq f(c)$ para todo x no domínio D de f . Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D .

Definição 4. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto em c se $f(x) \geq f(c)$ para todo x no domínio D de f . Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D .

Definição 5. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I , tal que $c \in I$ e $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I \cap D$. Nesse caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f .

Definição 6. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I , tal que $c \in I$ e $f(x) \geq f(c)$ para todo $x \in I \cap D$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f .

Teorema 4. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I . Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.

Demonstração. Suponha que f tenha um máximo local em $x = c$. A prova do caso em que f tem mínimo local em c é totalmente análoga. Como f é derivável em c , então

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

Como $f(c)$ é máximo local, há um intervalo (a, b) no domínio de f tal que $c \in (a, b)$ e $f(x) \leq f(c)$. Portanto, $f(x) - f(c) \leq 0$, para $x \in (a, b)$.

Se $x < c$ então $x - c < 0$ e, portanto $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ para $x \in (a, c)$, logo

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Por outro lado se, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ para $x \in (c, b)$, logo

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Comparando as desigualdades acima e levando em conta que são o mesmo número, resulta

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0$$

□

Proposição 7. *Seja a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) então:*

- (i) *f é não decrescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) > 0$ pra todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.*
- (ii) *f é não crescente em $[a, b]$ se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Além disso, se $f'(x) < 0$ pra todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.*

Proposição 8. *Seja a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b) e seja c um ponto crítico de f .*

- (i) *Se f' passa de positiva para negativa em c então f tem máximo local em c .*
- (ii) *Se f' passa de negativa para positiva em c então f tem mínimo local em c .*
- (iii) *Se f' não muda de sinal em c então f não tem um máximo nem mínimo local em c .*

Proposição 9. *Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ existe então:*

- (i) *Se $f''(c) < 0$ então f possui máximo local em c .*
- (ii) *Se $f''(c) > 0$ então f possui mínimo local em c .*

O teste é inconclusivo caso $f''(c) = 0$.

Demonstração. Demonstraremos o caso (i). O caso (ii) é análogo. Suponha $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$. então

$$f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

Logo, há um intervalo (a, b) contendo c tal que $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Portanto,

$$a < x < c \Rightarrow x - c < 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x-c} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

$$c < x < b \Rightarrow x - c > 0 \text{ e } \frac{f'(x)}{x-c} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Portanto, f passa de crescente para decrescente em c . Pelo teste da derivada primeira, f tem máximo local em $x = c$. □

Capítulo 3

Geometria Aplicada

Em um dos primeiros trabalhos no curso de modelagem matemática em Guarapuava, no ano de 1996, o tema proposto para a modelagem foi “abelhas”. Alguns matemáticos (João Rossa Müller, Marcos Flávio da Cunha, Osvaldo Deucher, Rui Branco e Vicente Bellaver) dedicaram-se a explorar o assunto, formulando entre outras, a questão “por que a seção transversal de um alvéolo é um hexágono regular?”.

Os recipientes, denominados alvéolos, têm a forma de um prisma hexagonal regular (faces laterais iguais e ângulos entre as faces iguais) aberto por uma extremidade e formando um ápice triédrico na outra face.

Assim, algumas perguntas podem ser propostas:

- Por que a base é hexagonal?
- Qual o ângulo formado entre as faces do ápice triédrico e por que essa medida?
- Qual o ângulo agudo de um dos losangos que formam o ápice triédrico?

Para solucionar a primeira questão, deve ser verificada que o corte transversal de um favo representa um mosaico com a repetição de hexágonos regulares. É evidente na observação da natureza a economia de recursos, buscando a otimização de espaços, a redução de consumo de energia, tendo em vista a sobrevivência, perpetuação e, segundo as teorias evolucionistas, o aprimoramento da espécie. Assim, toda a região plana da seção transversal do favo deve ser plenamente aproveitável.

Traduzindo para uma linguagem matemática, os polígonos que são produzidos na construção do mosaico observado no corte transversal do favo devem ser de tal forma que complete todo o plano. Chamamos esse processo de pavimentação do plano, que é a ação de cobrir uma região plana, denominada mosaico com uma mesma figura, chamada de

molde (em nosso estudo um polígono regular) sem deixar espaços vazios, nem ter figuras interseccionados.

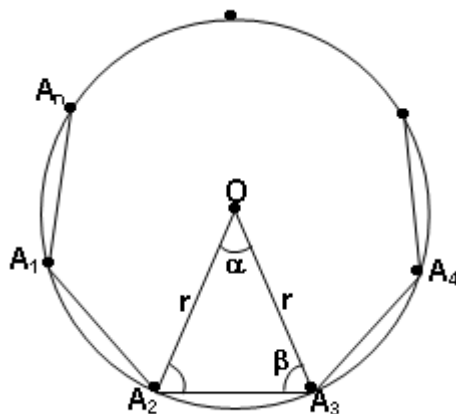
Veja abaixo as figuras que representam as possíveis configurações de um favo.



Pavimentação do Plano

Proposição 10. *Apenas Três polígonos regulares podem ser utilizados para pavimentar o plano: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.*

Demonstração. Todo polígono regular pode ser inscrito em um círculo, sendo seus lados cordas congruentes, de medida ℓ . Assim dado um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de centro O e raio r , ele pode ser dividido em n triângulos isósceles de base ℓ e lados iguais a r . Em cada um desses triângulos, o ângulo do vértice α é igual a $\frac{360^\circ}{n}$ e os ângulos da base medem $\beta = \frac{\theta}{2}$, onde θ é o ângulo interno do polígono. Assim temos:



Polígono Regular

$$\begin{aligned}
 \theta = 2\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} &\Rightarrow \frac{\theta}{360^\circ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\
 &\Rightarrow \frac{360^\circ}{\theta} = \frac{2n}{n-2} \\
 &\Rightarrow \frac{360^\circ}{\theta} = \frac{2n-4}{n-2} + \frac{4}{n-2} \\
 &\Rightarrow \frac{360^\circ}{\theta} = 2 + \frac{4}{n-2}, \text{ com } n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Sabemos que um polígono regular pode se propagar, formando um mosaico, se $\frac{360^\circ}{\theta}$ for um número inteiro positivo. Este número nos dá a quantidade de polígonos que têm vértice comum. (basta observar que, dado um vértice comum a n polígonos que cobrem uma região, deve ser verificado $\theta \cdot n = 360^\circ$, para se obter um encaixe perfeito). Assim como $\frac{360^\circ}{\theta} = 2 + \frac{4}{n-2} \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{4}{n-2} \in \mathbb{N}$. Neste caso:

$n - 2$ é um divisor positivo do número 4. Portanto,

$$n - 2 = 1 \text{ ou } n - 2 = 2 \text{ ou } n - 2 = 4$$

$$n = 3 \qquad n = 4 \qquad n = 6$$

Logo o polígono regular que atende essas condições é o triângulo equilátero, o quadrado ou hexágono regular. □

Verificada essa proposição, surge a questão: se os alvéolos poderiam ter bases triangulares equiláteras, quadrados ou hexagonais regulares, por que a escolha das abelhas recai sobre o formato dos hexágonos regulares?

Como já foi mencionado, é nítido na natureza e no comportamento da maioria dos seres vivos a busca pelo aproveitamento dos recursos com o máximo de rendimento. A grandeza que se pretende maximizar nesse caso é a área da base do alvéolo que irá proporcionar o maior volume e, portanto, capacidade de armazenamento de maior quantidade de mel.

Proposição 11. *Fixado um perímetro $12x$, para o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, então o que tem maior área é o hexágono regular.*

Demonstração. Fixamos o perímetro $12x$ para cada um dos polígonos dos três polígonos. Denotando a área do $\triangle ABC$ por (ABC) , temos, pela figura (3.1), que

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{4x} \Rightarrow h = 4x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2x \cdot \sqrt{3}.$$

Logo,

$$(ABC) = \frac{4xh}{2} = 2xh = 2x \cdot 2x \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}x^2 \approx 6,8x^2.$$

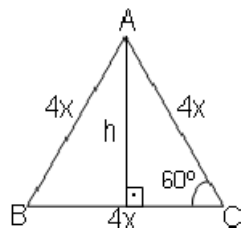


Figura 3.1: Triângulo equilátero.

De acordo com a figura (3.2), a área do quadrado ABCD é dada por

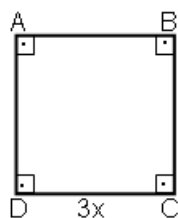


Figura 3.2: Quadrado.

$$(ABCD) = 3x \cdot 3x = 9x^2.$$

Observe que a área do hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros de lado $2x$ (veja a figura (3.3)). Logo,

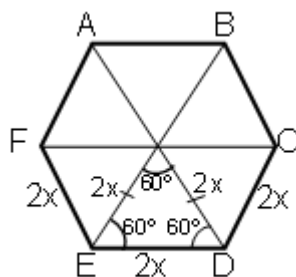


Figura 3.3: Hexágono Regular.

$$(ABCDEF) = 6 \cdot \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 4x^2 \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}x^2 \approx 10, 2x^2.$$

Portanto, para um mesmo perímetro, dentre as três figuras propostas, a que apresenta a maior área é o hexágono regular. □

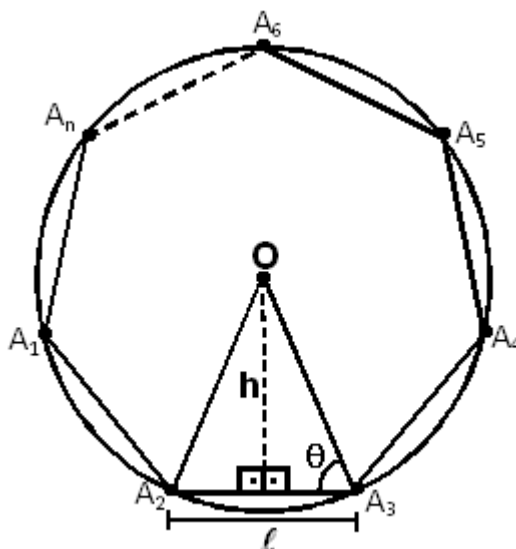


Figura 3.4: Polígono Regular Inscrito

O processo de Modelagem Matemática pressupõe a possibilidade de explorar, a partir de um tema único proposto, diversos aspectos da Matemática, então, apesar da questão do formato dos alvéolos ter um cunho prioritariamente geométrico, pode-se também aproveitá-lo para analisar a seguinte proposição, que fará uso de conceitos e análise.

Proposição 12. *Dado qualquer polígono regular, o valor numérico de seu perímetro coincide com de sua área se, e somente se, seu apótema vale 2.*

Demonstração. Seja um polígono regular, inscrito em um círculo com perímetro p e apótema h . Esse polígono pode ser visto como n triângulos isósceles de base $\ell = \frac{p}{n}$ e altura h . então a área A desse polígono será dada por:

$$A = n \frac{\ell \cdot h}{2}$$

$$A = n \frac{\frac{p}{n} \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{ph}{2}$$

Respeitadas as unidades de medidas adequadas temos que:

se $p = A \Rightarrow h = 2$ e se $h = 2 \Rightarrow p = A$, conforme enunciamos na proposição. \square

Agora, se tomarmos um polígono regular de n lados cuja apótema é 2, em um dos n triângulos isósceles de base $\ell = \frac{p}{n}$ e altura $h = 2$, em que ele pode ser dividido, considerando o ângulo da base de medida θ , temos:

$$\tan \theta = \frac{h}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2h}{\ell} = \frac{2h}{\frac{p}{n}} = \frac{4n}{p},$$

pois $h = 2$.

Temos ainda que

$$\theta + \frac{360^\circ}{2n} = 90^\circ \Rightarrow \theta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tan \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) &= \frac{4n}{p} \Rightarrow \\ p &= \frac{4n}{\tan \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right)} = \frac{4n}{\cot \frac{180^\circ}{n}}, \end{aligned}$$

pois $\frac{180^\circ}{n}$ e $(90^\circ - \frac{180^\circ}{n})$ são arcos complementares. Assim,

$$p = \frac{4n}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}} = 4n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Como a área é numericamente igual ao seu perímetro, temos:

$A_n = 4n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Note que $\frac{\pi}{n}$ está em radiano. Veja abaixo uma tabela indicando alguns polígonos com apótema igual a 2.

Polígono	n	A_n
triângulo equilátero	3	20,78
quadrado	4	16,00
pentágono	5	14,53
hexágono	6	13,85
decágono	10	12,99
100-ágono	100	12,57
1000-ágono	1000	12,56641
10000-ágono	10000	12,56634

Polígonos com apótema igual a 2.

Nota-se que a sequência (A_n) , $n \geq 3$ é decrescente conforme n aumenta (cresce) e é limitada pela área de um círculo de raio 2, que é o limite de um polígono de n lados, com apótema igual a 2, considerando n assumindo um valor muito grande ($n \rightarrow +\infty$).

No caso de n tomado como um valor muito grande, $\frac{\pi}{n}$ é um valor próximo de zero e torna-se válida a seguinte sentença:

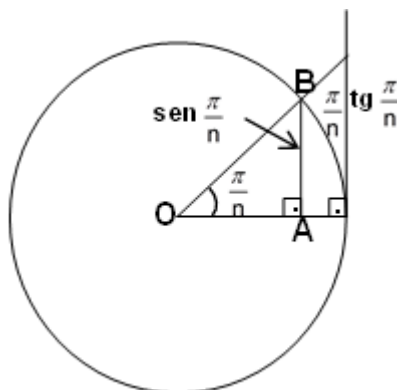
$$\text{sen } \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{n} \leq \tan \frac{\pi}{n}$$

dividindo os dois primeiros termos por $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ temos:

$$\tan \frac{\pi}{n} \leq \frac{\frac{\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \text{ Assim,}$$

$$\frac{\pi}{n} \leq \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \frac{\frac{\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \Rightarrow$$

$$\pi \leq n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$



Teorema do Confronto

Note que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi = \pi \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \pi. \text{ Logo, pelo Teorema do Confronto,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) = \pi.$$

Assim, voltando ao cálculo da área dos polígonos com apótema igual a 2, temos $A_n = 4n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 4\pi \approx 12,566371\dots$, quando $n \rightarrow +\infty$.

Ainda pode ser mencionado que a garantia da convergência da sequência $A_n \geq 3$ deve-se a sua monotonicidade (decrecente) e limitação (área do círculo de raio 2).

3.1 Área do Alvéolo

Cada alvéolo, como já foi afirmado, tem o formato de um poliedro de base hexagonal, faces laterais na forma de trapézios retângulos, ortogonais à base e culminado por um ápice triédrico.

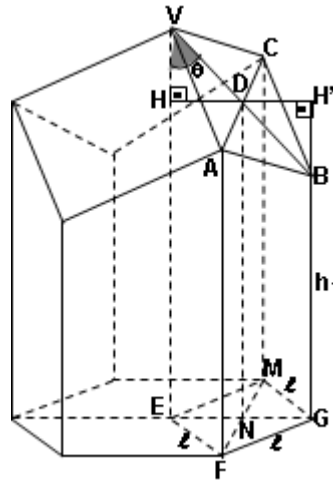


Figura 3.5: Ângulo θ no alvéolo

A questão proposta agora é minimizar a área do alvéolo, correspondendo à mínima utilização de cera necessária à produção de favos para o armazenamento do mel. Para maior facilidade de estudo, e devido a simetria existente, podemos calcular a área total determinando a área de uma das faces laterais e de um dos losangos que constituem o ápice, sendo a área total A dada pela soma de seis vezes a área de um dos trapézios e três vezes a área de um dos losangos.

Cada face lateral corresponde a um trapézio retângulo de bases medindo h_1 e h_2 e altura de medida ℓ , que por sua vez é congruente ao lado da base hexagonal.

Considere, ainda, a medida do ângulo agudo formado entre a altura do alvéolo e uma das faces losangonais igual a θ .

Note que:

$$EG = HH' = \ell$$

$$BG = h_1$$

$$AF = h_2$$

$$GH' = AF = h_2$$

$\triangle EFG$ é equilátero de lado ℓ

$$\text{No } \triangle VHD, \text{ temos que } \cot \theta = \frac{VH}{HD} = \frac{VH}{\ell/2} = 2\frac{VH}{\ell} \Rightarrow VH = \frac{\ell}{2} \cot \theta$$

$$\triangle VHD \equiv \triangle BH'D \Rightarrow VH = BH'$$

Neste caso a área da face $ABGF$ é dada por:

$$(ABGF) = \frac{(h_1 + h_2)FG}{2} = \frac{(H'G - BH' + AF) \cdot \ell}{2} = (h_2 - BH' + h_2) \frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ABGF) = (2h_2 - VH) \frac{\ell}{2} = (2h_2 - \frac{\ell}{2} \cot \theta) \frac{\ell}{2} = \ell \cdot h_2 - \frac{\ell^2}{4} \cot \theta$$

Portanto a área S_1 das seis faces laterais do alvéolo é dado por:

$$S_1 = 6 \cdot \left(\ell \cdot h_2 - \frac{\ell^2}{4} \cot \theta \right)$$

Queremos calcular agora a área do losango $ABCV$.

Perceba inicialmente que CD é altura do triângulo isósceles BCV . Note ainda que $MGH'C$ é paralelogramo e portanto $GM = CH' = \ell$. Usando o Teorema de Pitágoras no $\triangle CDH'$ temos que $CD = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Perceba agora que no $\triangle VHD$, concluimos que

$$\text{sen } \theta = \frac{HD}{VD} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{\ell/2}{VD} \Rightarrow VD = \frac{\ell/2}{\text{sen } \theta} = \frac{\ell}{2 \cdot \text{sen } \theta}.$$

Assim a área do $\triangle VCD$ é:

$$(VCD) = \frac{CD \cdot VD}{2} = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\ell}{2 \cdot \text{sen } \theta}}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{4 \text{sen } \theta} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{8 \text{sen } \theta}$$

Como o losango $ABCV$ é formado por quatro triângulos de mesma área de VCD , temos:

$$(ABCV) = \frac{4\ell^2\sqrt{3}}{8 \text{sen } \theta} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2 \text{sen } \theta}$$

Portanto a área total S_2 dos três losangos é dado por:

$$S_2 = 3 \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2 \text{sen } \theta} = \frac{3\sqrt{3}\ell^2}{2 \text{sen } \theta}$$

Portanto a área A total de um alvéolo aberto é dado por:

$$A = S_1 + S_2 = 6\ell h_2 - \frac{3\ell^2}{2} \cot \theta + \frac{3\sqrt{3}\ell^2}{2 \text{sen } \theta} = 6\ell h_2 + \frac{3\ell^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\text{sen } \theta} - \cot \theta \right)$$

Esta área, como função de θ , terá um menor valor quando $T(\theta)$ for mínimo para θ variando entre 0° e 90° ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) com $T(\theta)$ dado por:

$$T(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\text{sen } \theta} - \cot \theta \right) = \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } \theta} - \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} = \frac{\sqrt{3} - \cos \theta}{\text{sen } \theta} > 0,$$

pois no intervalo citado $\text{sen } \theta > 0$ e $0 < \cos \theta < 1$, ou seja, $\sqrt{3} - \cos \theta > 0$ e portanto, o quociente é positivo.

Usando uma calculadora, podemos calcular alguns valores de T . Veja tabela abaixo:

θ	$T(\theta) = \frac{\sqrt{3}-\cos \theta}{\text{sen } \theta}$
10°	4,3032
20°	2,3167
30°	1,7320
40°	1,5028
50°	1,4219
60°	1,4226
70°	1,4792
80°	1,5824
90°	1,7320

Observamos que o menor valor de T deve ocorrer quando θ está entre os valores 50° e 60°. O ângulo médio escolhido pelas abelhas está bem próximo do valor ótimo de θ que é 54,7°.

Com o uso de uma calculadora podemos chegar bem próximo do valor ótimo, usando o “método da bissecção”.

No entanto, podemos obter o valor de θ que minimiza a função $A(\theta)$, usando uma matemática mais sofisticada.

Seja

$$A(\theta) = 6\ell h_2 + \frac{3\ell^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\text{sen } \theta} - \cot \theta \right)$$

Como esta equação está expressa em função de ℓ , h_2 (valores dados) e θ , o problema passa a ser a determinação do valor de θ , ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) para o qual a expressão $T(\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{\text{sen } \theta} - \cot \theta \right) = \frac{\sqrt{3}-\cos \theta}{\text{sen } \theta}$ atinge um mínimo.

Isso é garantido pela proposição: dada uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, contínua e diferencial, tal que $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um candidato a extremo (máximo ou mínimo) local da função.

A comprovação pode ser feita verificando a derivada segunda da função analisada.

Se $f''(x_0) < 0$, x_0 é ponto de máximo e se $f''(x_0) > 0$, x_0 é ponto de mínimo.

Desta forma, para minimizar a área superficial do alvéolo, resta calcular o ponto θ^* que anula a primeira derivada de $T(\theta)$, sendo a derivada segunda nesse ponto negativa.

$$T(\theta) = \frac{\sqrt{3} - \cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

$$T'(\theta) = \frac{(\sqrt{3} - \cos \theta)' \cdot \text{sen } \theta - (\text{sen } \theta)' \cdot (\sqrt{3} - \cos \theta)}{(\text{sen } \theta)^2}$$

$$T'(\theta) = \frac{(\text{sen } \theta) \text{sen } \theta - \cos \theta (\sqrt{3} - \cos \theta)}{\text{sen }^2 \theta}$$

$$T'(\theta) = \frac{\text{sen }^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta + \cos^2 \theta}{\text{sen }^2 \theta}$$

$$T'(\theta) = \frac{1 - \sqrt{3} \cos \theta}{\text{sen }^2 \theta},$$

com $0^\circ < \theta < 90^\circ$ e $\text{sen } \theta > 0$, então:

$$1 - \sqrt{3} \cos \theta^* = 0 \Rightarrow \cos \theta^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta^* = 54,7356^\circ$$

. Note que

$$T''(\theta) = \frac{(1 - \sqrt{3} \cos \theta)' \cdot \text{sen }^2 \theta - (\text{sen }^2 \theta)' \cdot (1 - \sqrt{3} \cos \theta)}{(\text{sen }^2 \theta)^2}$$

$$T''(\theta) = \frac{(\sqrt{3} \text{sen } \theta) \cdot \text{sen }^2 \theta - (2 \text{sen } \theta \cos \theta) \cdot (1 - \sqrt{3} \cos \theta)}{\text{sen }^4 \theta}$$

$$T''(\theta) = \frac{\sqrt{3} \text{sen }^2 \theta - 2 \cos \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta}{\text{sen }^3 \theta}$$

$$T''(\theta) = \frac{\sqrt{3} \cos^2 \theta + \sqrt{3} \text{sen }^2 \theta - 2 \cos \theta + \sqrt{3} \cos^2 \theta}{\text{sen }^3 \theta}$$

$$T''(\theta) = \frac{\sqrt{3} - 2 \cos \theta + \sqrt{3} \cos^2 \theta}{\text{sen }^3 \theta}.$$

Assim, $T''(\theta^*) = T''(54,7356^\circ) \approx 2,1213 > 0$. Portanto a segunda derivada nesse ponto é positiva, o que confirma que nesse ponto θ^* minimiza a função $T(\theta)$.

Dessa forma, a função área superficial do alvéolo é minimizada, no intervalo de interesse, quando o ângulo formado entre o eixo central e uma das diagonais do losango da face superior do alvéolo é aproximadamente igual a $54,7356^\circ$.

3.2 Volume do Alvéolo

Note que na Figura (3.5) os tetraedros VACH e BACH' têm o mesmo volume, pois:

$$VH = BH' \text{ (provamos anteriormente)}$$

$$\triangle VAC \equiv \triangle BAC$$

$$VABC \text{ VABC é um losango e, portanto, } VA = AB = BC = CV$$

$$\triangle ACH \equiv \triangle ACH'$$

Logo, os tetraedros possuem a mesma área da base, já que área de ACH é igual a área de ACH' , e possuem a mesma altura, pois $VH = BH'$. Neste caso os mesmos possuem o mesmo volume, pois o volume do tetraedro é igual a um terço da área da base vezes a altura (é uma pirâmide triangular). O cálculo do volume é então simplificado, pois basta que se calcule o volume de um prisma de base hexagonal de lado ℓ e altura $h_2 = AF$, ou seja, adotando que a apótema de um polígono regular mede 2, temos:

$$V_{\text{alvéolo}} = Ab \cdot h_2, \quad Ab \rightarrow \text{área da base}$$

$$h_2 \rightarrow \text{altura do prisma.}$$

Mas, como o apótema é 2, provamos anteriormente que a área da base é numericamente igual ao perímetro ($Ab = 6\ell$).

Assim,

$$V_{\text{alvéolo}} = 6\ell_2$$

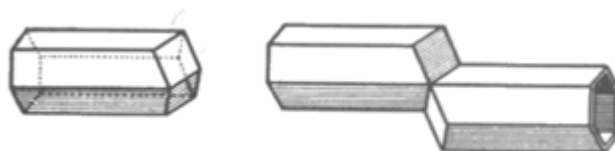
Em um favo real, com diâmetro médio do abdômen de uma abelha mede cerca de 4 mm, os alvéolos são construídos com o apótema da base de medida próxima de 2 mm, o que faz com que $\ell \approx 2,3$ mm. Considerando, ainda, dados empíricos, a altura $h_2 = 10$ mm, temos que o volume médio de um alvéolo é: $V = 6 \cdot 2,3 \cdot 10 = 138 \text{ mm}^3$.

Capítulo 4

A Matemática das Abelhas

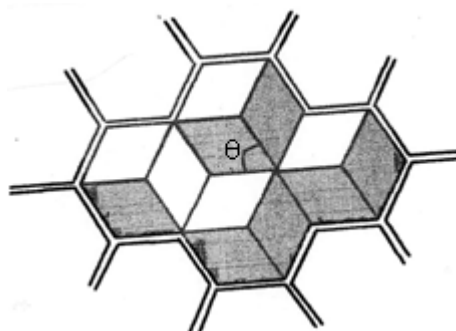
Já sabemos que a pavimentação do plano só pode ser feita através de três polígonos regulares: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.

Por um cálculo volumétrico simples das três possibilidades acima, observando o mesmo volume, ou escolhendo a forma mais convexa das três opções indicadas, a escolha das abelhas pela forma hexagonal é de fato a mais econômica visto que dentre os polígonos destacados com mesmo perímetro, o hexágono tem maior área.



Encaixe dos Alvéolos

Eis como as abelhas colocam os seus alvéolos hexagonais. Esses alvéolos, para maior economia de material, são fechados por três losangos iguais. O valor constante do melhor ângulo agudo de um losango de fechamento causou sério debate entre teólogos, naturalistas e matemáticos, conforme foi anteriormente comentado



Vista Superior dos Alvéolos

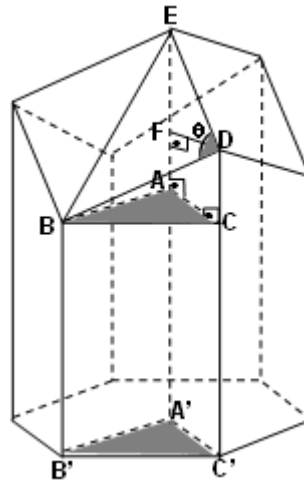


Figura 4.1: Ângulo da cobertura rômbrica

O problema que as abelhas resolveram vai ser abordado, sem grande dificuldade, com os recursos de Matemática elementar.

Como mostra a figura acima, as abelhas fecham uma das bases do prisma com três losangos congruentes cujo ângulo agudo do losango, θ , mede aproximadamente $70^{\circ}32'$, o que dá origem ao problema do ângulo de fechamento da cobertura rômbrica, que é o seguinte:

PROBLEMA: De todas as coberturas rômbricas de um prisma reto hexagonal, a que faz com que a área superficial total seja mínima, para um volume total fixo, é formada por três losangos congruentes com ângulo agudo $\theta \approx 70^{\circ}32'$.

Demonstração: Considere a figura acima, que é um prisma hexagonal reto com cobertura rômbrica. A figura também ajuda a obtermos as relações métricas necessárias para deduzir o volume V e a área lateral total S em função do lado ℓ da base hexagonal e do ângulo θ (ângulo agudo do losango da cobertura rômbrica). Assim, temos:

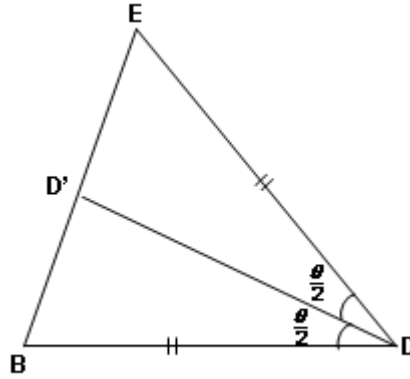
- (I) A seção ABC é paralela ao plano determinado pelos pontos A' , B' e C'
- (II) O trapézio $ACDE$ é retângulo com bases \overline{CD} e \overline{AE} , perpendiculares ao plano que contém o triângulo equilátero ABC , de lado \overline{AB} medindo ℓ .
- (III) Note que $\overline{AE} = 2\overline{DC}$, pois $ACDF$ é retângulo e portanto $\overline{DC} = \overline{AF}$. Além disso o $\triangle FED \equiv \triangle CBD$ (caso especial \rightarrow os triângulos retângulos possuem um cateto e a hipotenusa, respectivamente iguais). Assim, $\overline{CD} = \overline{EF}$. Logo,

$$\overline{EA} = \overline{EF} + \overline{FA} = \overline{DC} + \overline{DC} = 2\overline{DC}.$$

(IV) $\overline{BD} = \overline{DE}$ (lados do losango). Portanto, $(\overline{BD})^2 = (\overline{DE})^2$. Mas no $\triangle DEF$, temos:

$$(\overline{DE})^2 = (\overline{FD})^2 + (\overline{EF})^2 \Rightarrow (\overline{DE})^2 = \ell^2 + \left(\frac{\overline{AE}}{2}\right)^2 = \ell^2 + \frac{(\overline{AE})^2}{4} \quad (4.1)$$

(V) Observe a figura abaixo:



Triângulo Isósceles

temos que

$$\text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{2}.$$

Pela equação (4.1), segue que

$$(\overline{BD})^2 \cdot \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(\overline{BE})^2}{4} = \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left(\ell^2 + \frac{(\overline{AE})^2}{4} \right) \quad (4.2)$$

(VI) No $\triangle ABE$, temos:

$$(\overline{BE})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AE})^2$$

Pela equação(4.2) temos:

$$4 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left(\ell^2 + \frac{(\overline{AE})^2}{4} \right) = \ell^2 + (\overline{AE})^2$$

$$4 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \ell^2 + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} (\overline{AE})^2 = \ell^2 + (\overline{AE})^2$$

$$(\overline{AE})^2 \left[1 - \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] = \ell^2 \left[4 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right]$$

$$(\overline{AE})^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = \ell^2 \left[4 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right]$$

$$(\overline{AE})^2 = \ell^2 \left(4 \tan^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \right)$$

Usando a identidade trigonométrica $\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1 = \sec^2 \frac{\theta}{2}$, temos:

$$\begin{aligned} (\overline{AE})^2 &= \ell^2 \left(4 \tan^2 \frac{\theta}{2} - \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \\ (\overline{AE})^2 &= \ell^2 \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) \\ \overline{AE} &= \ell \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

(VII) Assim a área lateral total S do prisma é dada por:

$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \left[\frac{BD \cdot DE \cdot \sen \theta}{2} + \frac{BC \cdot CD}{2} + B'C' \cdot B'B \right] \\ S &= 6 \cdot \left[DE^2 \cdot \frac{\sen \theta}{2} + \frac{\ell}{2} \cdot \frac{AE}{2} + \ell \cdot h \right] \end{aligned}$$

Usando as equações (4.1) e (4.3), obtemos:

$$S = 6 \cdot \left[\left(\ell^2 + \frac{(\overline{AE})^2}{4} \right) \frac{\sen \theta}{2} + \frac{\ell}{4} \cdot \ell \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot h \right]$$

Segue-se da equação (4.3) que:

$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \left[\left(\ell^2 + \frac{\ell^2 \cdot (3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1)}{4} \right) \frac{\sen \theta}{2} + \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot h \right] \\ S &= 6 \cdot \left[\frac{4\ell^2 + 3\ell^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} - \ell^2}{4} \cdot \frac{\sen \theta}{2} + \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot h \right] \\ S &= 6 \cdot \left[\frac{3\ell^2 \cdot (\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1)}{4} \cdot \frac{2 \sen \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2} + \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot h \right] \\ S &= 6 \cdot \left[\frac{3\ell^2}{4} \cdot \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sen \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot h \right] \\ S &= 6 \cdot \left[\frac{3\ell^2}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \sen \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot h \right] \\ S &= 6 \cdot \left[\frac{3\ell^2}{4} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot h \right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Note que usamos a fórmula trigonométrica da área de um triângulo ($\triangle BDE$), que é dada pela metade dos produtos dos lados \overline{BD} e \overline{DE} com o seno do ângulo entre eles, juntamente com a fórmula do arco duplo para o seno ($\sen \theta = 2 \sen \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$).

(VIII) O volume V do prisma é dado por: $V = 6 \cdot [\text{volume do prisma triangular mais volume da pirâmide de vértice } B \text{ e base } ACDE]$

$$\begin{aligned}
 V &= 6 \cdot \left[\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} h + \frac{1}{3} \frac{(\overline{CD} + \overline{AE}) \cdot \overline{AC}}{2} \cdot \frac{\ell \sqrt{3}}{2} \right] \\
 V &= \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2} h + \frac{1}{3} \cdot \frac{3\ell \sqrt{3}}{2} (\overline{CD} + \overline{AE}) \cdot \overline{AC} \\
 V &= \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2} h + \frac{1}{3} \cdot \frac{3\ell \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\overline{AE}}{2} \cdot \ell \\
 V &= \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2} h + \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 V &= \frac{3\ell^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \left[h + \frac{\ell}{2} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Iremos fixar um valor para V e obtermos o valor de S em função de θ . Isolando o valor de h em (4.5) temos:

$$h = \frac{2V}{3\ell^2 \sqrt{3}} - \frac{\ell}{2} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo o valor de h em (4.4), temos:

$$\begin{aligned}
 S &= 6 \cdot \left[\frac{3\ell^2}{4} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\ell^2}{4} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \ell \cdot \left(\frac{2V}{3\ell^2 \sqrt{3}} - \frac{\ell}{2} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \\
 S &= \frac{9\ell^2}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} + \frac{3\ell^2}{2} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4V}{\sqrt{3}\ell} - 3\ell^2 \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 S &= \frac{9\ell^2}{2} \cdot \tan \frac{\theta}{2} - \frac{3\ell^2}{2} \cdot \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{4V}{\sqrt{3}\ell} \\
 S &= \frac{3\ell^2}{2} \left[3 \tan \frac{\theta}{2} - \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{4V}{\sqrt{3}\ell}
 \end{aligned}$$

Observando a expressão acima, vemos que ela torna-se mínima se $\left[3 \tan \frac{\theta}{2} - \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]$ for mínima para valores de θ com a condição $3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lema 1. Se $3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \geq 0$ então $3 \tan \frac{\theta}{2} - \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{2}$, valendo a igualdade se e somente se $\tan \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Demonstração. Para todo θ vale:

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} - 1 \right)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 3 \left(\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} - 1 \right)^2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 3 \left(2 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 2\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} + 1 \right) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 6 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 6\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} + 3 \geq 0 \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Somando-se $3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1$ aos membros da desigualdade (4.6) temos:

$$\begin{aligned} 6 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 6\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} + 3 + 3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 &\geq 3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ 9 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 6\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} + 2 &\geq 3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ \left(3 \tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{2} \right)^2 &\geq 3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como $\tan \frac{\theta}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, temos que $3 \tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{2} > 0$. Logo, de (4.7) obtemos:

$$3 \tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{2} \geq \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3 \tan \frac{\theta}{2} - \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \sqrt{2},$$

como queríamos demonstrar. □

Portanto, o menor valor de S é obtido quando

$$3 \tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{2} = \left(3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(3 \tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{2} \right)^2 &= 3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ 9 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 6\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} + 2 &= 3 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 1 \\ 6 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 6\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} + 3 &= 0 \\ 2 \tan^2 \frac{\theta}{2} - 2\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} + 1 &= 0 \\ \left(\sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} - 1 \right)^2 &= 0 \\ \sqrt{2} \tan \frac{\theta}{2} - 1 = 0 &\Rightarrow \theta = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 70^\circ 32' \end{aligned}$$

que é o ângulo agudo do losango da cobertura rômbrica que fornece a menor área lateral de um alvéolo para um volume V fixo.

Curiosamente, o ângulo entre as diagonais de um cubo tem uma relação particular com o ângulo entre os ângulos do losango da cobertura dos alvéolos, como mostra a proposição a seguir:

Proposição 13. *O ângulo agudo θ da cobertura rômbrica é o mesmo ângulo agudo entre as diagonais internas de um cubo.*

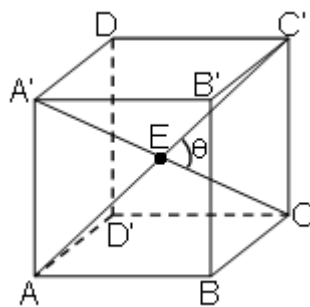


Figura 4.2: Ângulo θ no alvéolo

Demonstração. Considere o cubo de aresta ℓ . Note que as diagonais $\overline{AC'}$ e $A'C$ se encontram no ponto médio E de $\overline{AC'}$. Temos ainda que

$$\overline{AC'} = \ell\sqrt{3} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Usando lei dos cossenos no $\triangle AA'E$, temos

$$(\overline{AA'})^2 = (\overline{A'E})^2 + (\overline{AE})^2 - 2 \cdot \overline{A'E} \cdot \overline{AE} \cos \theta$$

$$\ell^2 = \frac{3\ell^2}{4} + \frac{3\ell^2}{4} - 6\ell^2 \cos \theta$$

$$6\ell^2 \cos \theta = 2\ell^2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta \approx 70^\circ 32'$$

□

Capítulo 5

Considerações Finais

Este trabalho se propôs, como objetivo geral, estudar o tipo de armazenamento que as abelhas acondicionam o mel. O local onde as abelhas armazenam o mel tem um padrão, que são os alvéolos. Estudamos algumas propriedades desses alvéolos e nos certificamos que esse tipo de armazenamento proporciona uma menor quantidade de material (cera) para armazenar uma quantidade fixa de mel (volume).

Para alcançar o objetivo proposto resolvi basicamente três problemas:

(i) que a pavimentação do plano se dá apenas através de três polígonos regulares: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.

(ii) que o ângulo entre uma das faces do losango que formam o ápice de fechamento do alvéolo e o eixo vertical a partir do vértice é constante e igual a $54,73^\circ$ quando impomos que a área lateral do alvéolo juntamente com a área dos três losangos de fechamento é mínima.

(iii) que o ângulo agudo do losango da cobertura rômica é $70^\circ 32'$ quando fixamos um volume V e impomos que a área superficial total do alvéolo é mínima.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*, 10^a edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [2] BASSANEZI, R.C., *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, 3^a edição. São Paulo: Editora Contexto, 2010.
- [3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 9, 8^a edição. São Paulo: Atual, 2005.
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*, volume 1, 5^a edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [5] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [6] SARAIVA, J.C., *A Matemática das Abelhas*. In: Revista Eureka!, n^o 6, p 18-22. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.
- [7] TAHAN, Malba. *As Maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1973
- [8] Material de Cálculo do PROFMAT.
- [9] Material de Geometria do PROFMAT.
- [10] <http://aprendermatematica.blogspot.com.br/p/derivadas>. Acesso em: 5 de dezembro de 2012
- [11] <http://www.super.abril.com.br/mundo-animal/geometria-instintivo>. Acesso em: 5 de dezembro de 2012.
- [12] <http://www.jornalinfinito.com.br/series.asp?cod=141> Acesso em: 5 de dezembro de 2012.

-
- [13] <http://www.cempem.fae.unicamp.br/lapemmec/cursos>. Acesso em: 5 de dezembro de 2012.