UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDJAN FERNANDES DOS SANTOS

MEDIDAS E FORMA EM GEOMETRIA

JUAZEIRO DO NORTE
2014

EDJAN FERNANDES DOS SANTOS

MEDIDA E FORMA EM GEOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira.

JUAZEIRO DO NORTE

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

S234m Santos, Edjan Fernandes dos.
Medidas e forma em geometria/ Edjan Fernandes dos Santos. – 2015.
61 f. : il., color.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional, Juazeiro do Norte, 2015.
Orientação: Prof. Mário de Assis Oliveira.
Coorientação: Prof. Juscelino Pereira Silva.

1. Geometria. 2. Medidas. 3. Formas. I. Título.

CDD 510

EDJAN FERNANDES DOS SANTOS

MEDIDAS E FORMA EM GEOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 31 / 08/ 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira (Orientador)
Univ. Regional do Cariri (URCA) e
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Prof. Ms. Paulo César Cavalcante de Oliveira
Universidade Regional do Cariri (URCA)

A minha esposa, aos meus filhos, aos meus pais e irmãos, ao meus colegas de graduação e de pós-graduação (inesquecíveis), a todos os professores,do infantil a graduação e pós-graduação, em especial ao professores Carlos Alberto Gomes de Almeida e Mário de Assis Oliveira.

.

AGRADECIMENTOS

A minha esposa Cicera Romania Gonçalves de Macedo e meus filhos Marcos Vinícius Fernandes de Macedo e Júlia Maria Fernandes de Macedo por sempre terem me apoiado e me incentivado, compreendendo a minha ausência não só nos dias de estudo (sábado), mas quase que diariamente quando me dedicava quase todo tempo que tinha em casa para o estudo.

A minha mãe e meu pai pela estrutura familiar oferecida.

Aos meus professores pelo incentivo ao estudo.

Aos meus colegas de mestrado, em especial: Ezequias Guilherme, Henrique Barreto, Vanderli Araújo e Wecsley Fernandes pelos momentos que compartilhamos de estudo, de descontração, de alegrias, tristezas. Nunca vou me esquecer das muitas vezes que compreendi melhor o conteúdo devido a intervenção de alguns destes colegas.

Aos professores da UFCA, URCA e IF Juazeiro do Norte que ministraram as disciplinas do curso.

Ao professor Mário de Assis pela orientação que me deu neste trabalho de conclusão de curso.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A Deus, senhor de tudo e de todos.

RESUMO

O trabalho traz inicialmente uma abordagem histórica, da Grécia (com os pitagóricos), com o matemático Eudoxo, fazendo referência a talvez à maior obra matemática, os livros de Euclides. Em seguida, trazemos definições e construções sobre os números reais como um corpo completo, os conceitos de ínfimo, supremo, sequências infinitas com destaque as convergentes, sequências de Cauchy e os três teoremas fundamentais para o curso de cálculo, o teorema do anulamento, do valor intermediário e de Weierstrass. Logo após, definimos métrica e espaço métrico no plano, mostramos que o processo de comparar um segmento arbitrário com outro fixado como unidade nos conduz aos diversos tipos de números reais positivos: inteiros, racionais e irracionais, onde a noção de segmento comensurável e incomensurável é explicada. O cálculo de área para figuras planas, onde são apresentadas as fórmulas usuais para as áreas dos polígonos mais simples, apresentamos uma aplicação, a fórmula de Pick, sem demostração do teorema, simples, divertida, prática e eficiente para o cálculo de área, um conteúdo da disciplina de matemática presente em todo o ensino básico do Brasil sempre presente em avaliações externas como a OBMEP.

Palavras-chave: Segmentos comensuráveis e incomensuráveis, reais (corpo completo), sequências reais (Cauchy), convergência e Bolzano-Weierstrass, comprimento de segmentos, área, fórmula de Pick e OBMEP.

ABSTRACT

The work initially brings a historical approach, Greece (with the Pythagoreans), with the mathematician Eudoxus, referring to perhaps the greatest mathematical work, Euclid's books. Then bring definitions and constructions of the real numbers as a complete body, the concepts of tiny, supreme, infinite sequences especially the convergent, Cauchy sequences and the three fundamental theorems for the calculus course, the annulment of the theorem, the intermediate value and Weierstrass. Soon after, we define metric and metric space in the plan, we show that the process of comparing an arbitrary segment with another set as a unit leads to various types of positive real numbers: integers, rational and irrational, where the notion of measurable and immeasurable segment is explained. The area calculation for plane figures, where the usual formulas for the areas of simple polygons are presented, we present an application, Pick's formula, without demonstration of the theorem, simple, fun, practical and efficient for area calculation, one This mathematical discipline of content throughout basic education in Brazil always present in external evaluations as OBMEP.

Keywords: Commensurable and incommensurable segments , real (full body) , real sequences (Cauchy) , convergence and Bolzano- Weierstrass , length of segments , area, Pick formula and OBMEP .

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A necessidade de medir comprimentos é muito antiga, ainda na Grécia, o surgimento dos segmentos incomensuráveis com a unidade de medida abalou as estruturas dos matemáticos pitagóricos. O cálculo de áreas não menos diferente sempre foi tema de estudo ao longo da história por diversas civilizações.

A escola atual no nosso país, infelizmente, ainda revela deficiências no estudo da geometria. Fica claro na dificuldade da maioria dos nossos alunos em identificar os tipos de números, diferenciá-los, realizar o cálculo de áreas assim como ao menos ter uma idéia na hora de resolver um problema que envolva o cálculo de área, até mesmo de figuras planas mais simples. E se a figura plana é mais complexa, composta por figuras planas simples, os alunos se complicam ainda mais.

Esse trabalho aborda a importância de se realizar definições, demonstrações bem apuradas a respeito de medida de segmentos e o conceito de número que estes carregam, assim como o cálculo e resolução de problemas de áreas. Fazer isto é fundamental para o amadurecimento do conhecimento dos nossos alunos, mas, para que isso aconteça, é necessário que seu professor já possua um amadurecimento do conhecimento para evitar que o conteúdo não seja repassado com fórmulas prontas e viciado a casos particulares.

É preciso que o professor demonstre toda sua competência em saber explorar questões que possam ser construtivas para o conhecimento do aluno, para isso, sugerimos o trabalho com as questões da OBMEP que oferecem nos mais variados níveis de ensino, com grau de dificuldade variado, com muito bom gosto, questões desafiadoras, além do fato de serem pensadas e elaboras por um conjunto de mestres que já atingiram o ápice do conhecimento.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS

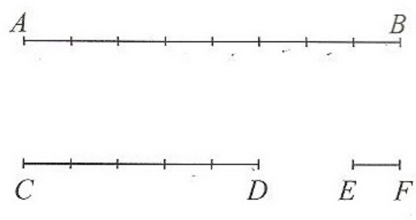
Números reais surgiram de uma necessidade simples e antiga, o ato de medir. Mas o que é medir?

Medir é comparar uma grandeza com outra (unidade ou não), que é uma grandeza de mesma espécie, fixada.

Há basicamente dois tipos de grandezas: as discretas(como medir um rebanho) e as contínuas(como medir tempo, área,distâncias). Comparar uma grandeza discreta com a outra significa efetuar uma contagem; o resultado é um número inteiro. Se, porém, a grandeza for contínua, compará-la com outra é medi-la; Hoje sabemos que o resultado da medida é um número real. Se a grandeza (contínua) que se mede é comensurável com a outra grandeza escolhida, a medida é um número racional, se é incomensurável sua medida é um número irracional.

Pois bem, para entendermos o que vem a ser comensurável e incomensurável, comecemos pelas medidas de segmentos de reta, por exemplo, AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n, significa que existe um terceiro segmento EF tal que AB seja m vezes EF e CD, n vezes esse mesmo segmento EF. Na figura abaixo ilustramos essa situação com $m = 8$ e $n = 5$.

Figura 1: Segmento Comensurável



Fonte:Ávila[1]

Note também: AB e CD são segmentos, não números. É por isso que "razão"não é o mesmo que "fração". Os gregos não usavam "frações", apenas "razões". E não escreviam AB/CD para indicar a razão de dois segmentos. Mesmo nos dias de hoje costuma-se escrever $AB : CD = m : n$, e dizer ”AB está para CD assim como m está para n”. Quando indicamos AB/CD, em vez de $AB : CD$, não devemos confundi-la com fração, pois, como já dissemos AB e CD são segmentos e não números.

Pensava-se que dados dois segmentos quaisquer, AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, situação esta que descrevemos dizendo que EF é um **submúltiplo comum** de AB e CD. Uma simples reflexão revela que essa idéia é muito razoável; afinal, se EF não serve, podemos imaginar um segmento menor, outro menor ainda, e assim por diante. Nossa intuição geométrica parece dizer-nos que há de existir um certo segmento EF, talvez muito pequeno, mas satisfazendo aos propósitos desejados. Imagine muito além, com EF tão pequeno que nem se possa mais desenhar, para nos convencer, por nossa intuição geométrica, da possibilidade de sempre encontrar um **submúltiplo comum** de AB e CD.

Dois segmentos nessa condições são ditos **comensuráveis**, justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade EF. Entretanto, não é verdade que dois segmentos quaisquer sejam sempre comensuráveis. Em outras palavras, existem segmentos AB e CD sem unidade comum EF, os chamados segmentos **incomensuráveis**. Esse é um fato que contraria nossa intuição geométrica.

Desde os pitagóricos, os gregos sabiam que existiam grandezas incomensuráveis, ou seja, que os inteiros e razões entre inteiros não eram suficientes para medir todas as grandezas, nem sequer para medir segmentos de reta. Aristóteles(quarto século A.C.), que não era matemático, conta que os pitagóricos constataram que ”se a diagonal de um quadrado fosse comensurável com o lado, o mesmo número poderia ser par e ímpar”.[Demonstração apresentada no Capitulo 4, o número mencionado por Aristóteles é o número de vezes em que o fator 2 aparece na decomposição de p^2 em fatores primos]. Algumas edições antigas dos Elementos continha a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ com esse argumento resumido por Aristóteles mas sabe-se que se tratava de uma interpolação. Euclides não precisava provar isto pois a Proposição 9 do Livro X dos Elementos estabelece que se um número (inteiro) não é quadrado de outro inteiro também não é quadrado de uma fração. Este fato permite concluir imediatamente que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc, são números irracionais.

Gerou-se uma grande crise entre os pitagóricos com a descoberta de grandezas incomensuráveis, para os quais se valia o lema ”Os números (inteiros) governam o universo”. Eles não conseguiram superar, o que somente um século depois teve saída com Eudoxo. Em vez de solucionar o problema estendendo o conceito de números, criando os números reais, como se tem hoje, ele encontrou uma solução diferente, seguida pelos matemáticos gregos posteriormente. Eudoxo manteve o princípio de que a palavra ”número”significava número natural mas teve de desistir de medir as grandezas, isto é, de exprimir por meio de um número o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade adotada.

Para comparar duas grandezas de mesma espécie (dois comprimentos, duas áreas), em vez de números Eudoxo adotou o conceito de ”razão entre duas grandezas”. Claro que atualmente a razão entre grandezas é simplesmente a medida de uma delas quando se toma a outra como unidade, ou seja, é um número real. Mas não era assim naquela época.

Eudoxo desenvolveu a teoria das razões entre grandezas de forma logicamente impecável e Euclides a apresentou no livro V dos Elementos. As definições básicas são as de igualdade e desigualdade entre duas razões.

Se A e B são grandezas de mesma espécie, a notação $A : B$ significa a razão entre A e B. Sejam X e Y também grandezas de mesma espécie (mas não necessariamente da mesma espécie que A e B).

Diz-se que $A : B = X : Y$ (e lê-se: ”A esta para B assim como X esta para Y) quando, dados números naturais arbitrários m e n tem-se $n \cdot A < m \cdot B$ se, e somente se, $n \cdot X < m \cdot Y$.

Esta era a definição de Eudoxo. Em linguagem de hoje, como $n \cdot A < m \cdot B$ significa $\frac{A}{B} < \frac{m}{n}$, ela equivale a dizer que os números reais $A : B$ e $X : Y$ são iguais se, e somente se, todo número racional maior do que $A : B$ é também maior do que $X : Y$ e todo número racional maior que $X : Y$ é maior do que $A : B$.

Na linguagem de Euclides, a definição era formulada assim: ”$A : B$ e $X : Y$ são iguais quando um equimúltiplo qualquer de A e X é ao mesmo tempo, e respectivamente, superior, igual ou inferior a um equimúltiplo de B e Y”.

Voltando a Eudoxo, ele dizia(por definição) que $A : B < X : Y$ quando existem números naturais m, n tais que $nA < mB$ e $mX < nY$. Novamente, em termos de números reais isto significa que o número real $A : B$ é menor do que o número real $X : Y$ quando existe um número racional $\frac{m}{n}$ tal que

$A : B < \frac{m}{n} < X : Y$.

Exemplo 1: A igualdade de frações ordinárias pode ser definida pela propriedade de possuírem a mesma forma irredutível. Por exemplo, $\frac{12}{40} = \frac{18}{60}$, pois

$$\frac{12}{40} = \frac{3 \times 4}{10 \times 4} = \frac{3}{10} \text{ e } \frac{18}{60} = \frac{3 \times 6}{10 \times 6} = \frac{3}{10}$$

Mas podemos também definir igualdade de frações pela igualdade do produto dos meios pelos extremos, como neste exemplo:

$$\frac{12}{40} = \frac{18}{60} \Longleftrightarrow 12 \times 60 = 18 \times 40$$

Escrevendo os enunciados dessas duas definições de maneira mais clara e organizada, temos:

Definição 1: *Diz-se que duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ são iguais se existem números primos entre si p e q, e números inteiros positivos a e b tais que $m = ap$, $n = aq$ e $m' = bp$ e $n' = bq$.*

Definição 2: *Diz-se que duas frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ são iguais se $m \times n' = m' \times n$.*

Exemplo 2: A definição de razões de dois segmentos comensuráveis dada anteriormente diz que AB e CD são comensuráveis e estão entre si na razão $\frac{m}{n}$ se existirem números m e n e um segmento φ tais que $AB = m\varphi$ e $CD = n\varphi$. Vamos provar que essa definição é consistente, isto é, se existirem dois outros números m′ e n′ e um segmento φ' tais que $AB = m'\varphi'$ e $CD = n'\varphi'$, então $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

Multiplicando $AB = m\varphi$ por n e $CD = n\varphi$ por m, donde $nAB = mCD$ e substituindo $AB = m'\varphi'$ e $CD = n'\varphi'$ chegamos a $nm' = mn'$, donde $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

Exemplo 3: Provemos que duas grandezas comensuráveis A e B estão entre si na razão $\frac{m}{n}$ se e somente se $nA = mB$.

A implicação $A : B = \frac{m}{n} \Longrightarrow nA = mB$ segue como no exemplo acima. A recíproca, vamos dividir A em m partes iguais a uma certa grandeza unidade φ, $A = m\varphi$. Daqui e de nA = mB segue-se que $nm\varphi = mB$, donde $B = n\varphi$.

Uma grave deficiência no formalismo criado por Eudoxo e apresentado nos Elementos de Euclides era que não se efetuavam operações aritméticas com razões.

O problema de estabelecer uma teoria rigorosa para a medida das grandezas só veio a ser resolvido definitivamente com a formulação correta do conceito de número real, com Dedekind, Cantor e Weierstrass, no século *XIX*. Curiosamente, a solução encontrada está muito próxima das idéias de Eudoxo.

Não se medem segmentos de reta nos Elementos de Euclides, pois há segmentos incomensuráveis com qualquer unidade que se adote mas não havia então números irracionais para representar seus comprimentos. A comparação entre dois segmentos se fazia mediante o conceito de razão entre eles, mas razões entre grandezas não eram consideradas como números. Analogamente, não havia medida de áreas na Matemática grega organizada como ciência dedutiva.

Na realidade Euclides nem sequer se deu ao trabalho de definir área.

Nos Elementos, duas figuras são chamadas "iguais"quando têm a mesma magnitude, isto é, o mesmo comprimento se são segmentos, a mesma área se são figuras planas, o mesmo volume se são sólidos, ou a mesma abertura se são ângulos.

A noção de figuras congruentes (aquelas que coincidem por superposição) só veio a ter interesse independente em Geometria muito depois.

Para Euclides, a coincidência de duas figuras planas por superposição era um passo intermediário para concluir a igualdade de suas áreas. (Com efeito, o Axioma 4 dos Elementos diz: "Duas figuras que coincidem por superposição são iguais"). Assim, era importante para ele dispor de critérios que assegurassem a superponibilidade, por exemplo, de dois triângulos. (Os 3 casos familiares de "igualdade de triângulos"). Cumpridas essas condições, o Axioma 4 garantiria a mesma área para os triângulos dados.

Evidentemente, para segmentos de reta serem congruentes é o mesmo que terem a mesma medida. Mas dois triângulos ou dois paralelogramos podem ter bases e alturas iguais sem serem congruentes.

Portanto, quando Euclides enuncia que triângulos ou paralelogramos com bases iguais e situados entre as mesmas paralelas são iguais, o significado desta última palavra "iguais"é de que as figuras em questão têm a mesma área. E a demonstração se faz por meio de decomposição em figuras congruentes.

Este fato é suficiente para permitir a Euclides demonstrar o Teorema de Pitágoras ainda no primeiro dos treze livros dos Elementos, sem fazer apelo a razões e proporções, das quais só vem a tratar no livro V.

Como se sabe, o Teorema de Pitágoras afirma que em todo triângulo retângulo, a área do quadrado que tem como lado a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lado os catetos.

É a seguinte a demonstração de Euclides:

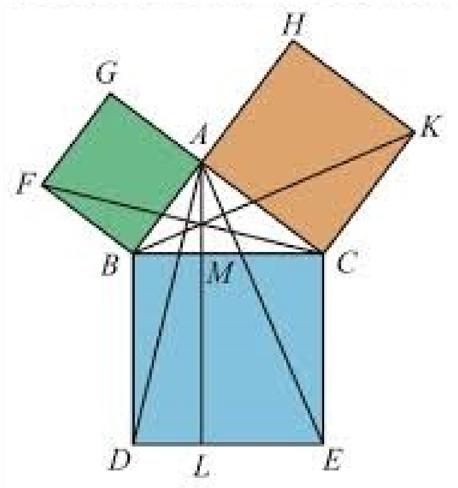
No triângulo retângulo ABC, para provar que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa BC é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos AB e AC, Euclides traça AM perpendicular a BC e a prolonga até L, ponto do lado DE. Traça também AD, segmento de reta que une os pontos A e D, CF, segmento de reta que une os pontos C e F.

Os triângulos ABD e BCF têm a mesma área porque são congruentes (um ângulo igual entre dois lados iguais), observe que AB = BF, pois, o quadrilátero ABFG é um quadrado, do mesmo modo, BC = BD porque BCED também é um quadrado, quanto ao ângulo, note que o ângulo B, dos quadrados, ABFG e BCED é reto e o ângulo B, do triângulo ABC é comum aos triângulos BCF e ABD. Os triângulos ABD e BDM têm áreas iguais, pois, têm a mesma base, lado BD do quadrilátero BDLM e alturas iguais, lado BM, também do quadrilátero BDLM. Assim, a área de ABD é a metade da área do retângulo BDLM.

Analogamente, BCF tem área igual à de ABF, que é a metade do quadrado ABFG. Segue-se que a área deste quadrado é igual à área do retângulo BDLM.

Do mesmo modo, tracemos AE, segmento de reta que une os pontos A e E e BK, segmento de reta que une os pontos B e k. Note que os triângulos ACE e BCK também têm a mesma área, pois, são congruentes (um ângulo igual entre dois lados iguais), observe que AC = CK, pois, o quadrilátero ACKH é um quadrado, do mesmo modo, BC = CE porque BCED também é um quadrado, quanto ao ângulo, note que os ângulos, C, dos quadrados, ACKH e BCED é reto e o ângulo C, do triângulo ABC é comum aos triângulos ACE e BCK. Os triângulos ACE e CEM têm áreas iguais porque têm a mesma base e alturas iguais que são: base CE do quadrilátero CELM e altura CM do mesmo

Figura 2: Teorema de Pitagoras



Elaborada pelo autor

quadrilátero. Assim, a área de ACE é a metade da área do retângulo CELM. Do mesmo modo BCK tem área igual a ACK, que é a metade do quadrado ACKH. Segue que a área deste quadrado é igual a área do retângulo CELM. Daí resulta o teorema de pitágoras.

Depois disso, Euclides volta a falar de área no livro VI, para provar que (as áreas de) triângulos por paralelogramos com alturas iguais estão entre si assim como suas bases, que (as áreas de) dois polígonos semelhantes estão entre si como o quadrado de dois lados homólogos e, quase no fim dos Elementos (Livro XII) para demonstrar que (as áreas de) dois círculos estão entre si assim como os quadrados dos seus diâmetros.

3 DEFINIÇÕES E CONSTRUÇÕES

3.1 Números reais

Vários matemáticos do século *XIX* cuidaram da construção dos números reais, dentre eles Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. Mas as teorias dos números reais que permaneceram foram as de Dedekind e Cantor.

Antes, falemos primeiro dos naturais, cujo simbolo é $\mathbb{N}$, formado com a ideia de sucessor de um número, os inteiros, com símbolo $\mathbb{Z}$, com a ideia de oposto dos números naturais, os racionais, que tem símbolo $\mathbb{Q}$, que pela necessidade da divisão originaram os números fracionários.

Estes três conjuntos possuem uma característica em comum, eles são **enumeráveis**.

Definição 3: *Dizemos que um conjunto X é* ***enumerável*** *se X for finito, ou então X puder ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto* $\mathbb{N}$.

Exemplos: $A = \{1, 3, 6, 8\}$; $B = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$.

Os conjuntos A, B e C são enumeráveis. A porque é finito, já os conjuntos B e C, considerando $\{0\}$ como natural, perceba que podemos estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto B, dos números pares, e a função $f(n) = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$. Por analogia, $f(n) = 2n + 1$ com $n \in \mathbb{N}$ e o conjunto C, dos números impares.

Os irracionais, com simbolo, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ao mesmo tempo que desponta com os pitagóricos, intrigou o mundo matemático até o século XIX, quando finalmente foram construídos.

Uma construção para $\mathbb{R}$ é $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Aqui destacamos:

1) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é maior do que $\mathbb{Q}$, apesar de que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ serem ambos infinitos, perceba que para cada $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ podemos somar infinitos $y \in \mathbb{Q}$, sendo que $x + y \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, pois, somos sabedores que a soma de um irracional com um racional é irracional.

2) $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Em 1874 Cantor surpreendeu o mundo matemático com uma de suas primeiras descobertas importantes sobre conjuntos, a de que o conjunto dos números reais é não enumerável, ou seja, tem **cardinalidade** diferente do conjunto $\mathbb{N}$.

Sobre esse conceito, na maneira mais **inocente** de se pensar, seria efetuar uma contagem dos elementos do conjunto.

Para provar isso, usamos o processo de **diagonalização** de Cantor. Ele pegou o intervalo $(0, 1)$ que aqui vamos assumir ter a mesma cardinalidade da reta, escreveu cada número apenas com uma representação decimal, adotando a representação decimal infinita, exemplo, $0, 3999...$ em vez de $0, 4$. Supôs que fosse possível estabelecer uma correspondência biunívoca dos números do intervalo $(0, 1)$ com os números naturais. Isto é o mesmo que supor que os números desse intervalo sejam os elementos de uma sequência infinita $x_1, x_2, x_3, ...$ Escritos em suas representações decimais esses números seriam, digamos,

$x_1 = 0, \mathbf{a_{11}} a_{12} a_{13} ... a_{1n} ...$

$x_2 = 0, a_{21} \mathbf{a_{22}} a_{23} ... a_{2n} ...$

$x_3 = 0, a_{31} a_{32} \mathbf{a_{33}} ... a_{3n} ...$

....

$x_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} ... \mathbf{a_{nn}} ...$

....

onde os a_{ij} são os algarismos de 0 a 9. O último passo, que nos levará a uma contradição, consiste em produzir um número do intervalo $(0, 1)$ que não esteja nesta lista. Construímos então um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa, diferente de x_3 na terceira casa, e assim por diante, obtendo um número que não coincidirá com nenhum outro da lista. Com isso Cantor chegou a um absurdo, o que o levou a concluir que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Vamos enunciar características importantes sobre $\mathbb{R}$, a **ordem** e a **completude** dos reais. Para isso determinaremos $\mathbb{R}_+^*$ e definimos duas operações, a soma e o produto, que satisfazem as seguintes condições:

1) Soma e produto de positivos é positivo;

2) Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$x \in \mathbb{R}_+^* \text{ ou } x = 0 \text{ ou } -x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Esta classificação de $\mathbb{R}_+^*$ é que nos dará a noção de ordem de $\mathbb{R}$.

Exemplo: Se $x \in \mathbb{R}$, então, $x^2 \in \mathbb{R}_+^*$ ou $x^2 = 0$.

Dado um $x \in \mathbb{R}$

$$x \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow x^2 = x \times x, \text{ portanto, } x^2 \in \mathbb{R} \text{ ou } x = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \times 0 = 0 \text{ ou}$$
$$-x \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow (-x)^2 = (-x) \times (-x), \text{ portanto, } (-x)^2 \in \mathbb{R}_+^*$$

Para podermos comparar elementos em $\mathbb{R}$, definimos dois números reais x e y, diremos que:

$x < y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+^*$ ou $y - x > 0$.

Exemplo 1: 20 e 35

$20 < 35$ pois $35 - 20 = 15 \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemplo 2: 3 e -5

$-5 < 3$ pois $3 - (-5) = 3 + 5 = 8 \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemplo 3: -3 e -8

$-8 < -3$ pois $-3 - (-8) = -3 + 8 = 5 \in \mathbb{R}_+^*$.

Apresentando $\mathbb{R}$ sobre uma ótica algébrica, ou seja, como uma estrutura algébrica, definimos $\mathbb{R}$ como um **corpo**, as operações de adição e multiplicação ficam assim definidas:

Definição 4: *Um conjunto $\mathbb{P}$ será chamado de corpo se for munido de uma operação de adição $(+)$ e uma operação de multiplicação $(\times)$ verificando as seguintes condições:*

A_1: A adição é associativa:

$(a + b) + c = a + (b + c)$, para todo a, b e $c \in \mathbb{R}$.

A_2: A adição é comutativa:

$a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

A_3: A adição possui um elemento neutro:

Existe um $0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

A_4: A adição possui um elemento oposto (simétrico):

Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe um $-a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = 0$.

M_1: A multiplicação é associativa:

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, para todo a, b e $c \in \mathbb{R}$.

M_2: A multiplicação é comutativa:

$a \times b = b \times a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

M_3: A multiplicação possui um elemento neutro:

Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que $a \times 1 = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

M_4: A multiplicação possui inverso:

Para todo $a \in \mathbb{R}^*$, *existe um* $a^{-1} \in \mathbb{R}$, *tal que* $a \times a^{-1} = 1$.

Exemplo 1: Dado $x \in \mathbb{R}$, x não nulo, temos $x^{-1} \in \mathbb{R}$, tal que $x \times x^{-1} = 1$. Prove que $(x \times y)^{-1} = x^{-1} \times y^{-1}$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Usando M_4, podemos escrever:

$(x \times y)^{-1} \times (x \times y) = 1$;

$(x \times y)^{-1} \times x \times y \times y^{-1} = 1 \times y^{-1}$

$(x \times y)^{-1} \times x \times 1 = y^{-1}$, usando M_3

$(x \times y)^{-1} \times x \times x^{-1} = y^{-1} \times x^{-1}$

$(x \times y)^{-1} \times 1 = y^{-1} \times x^{-1}$, usando M_2 e M_3

$(x \times y)^{-1} \times 1 = x^{-1} \times y^{-1}$.

Exemplo 2: Provemos que se $x \times u = x$, então $u = 1$.

$x \times u = x, x \neq 0$

$x^{-1} \times x \times u = x^{-1} \times x$

$1 \times u = 1$

$u = 1$

A **completude** dos números reais se deu com o trabalho de Dedekind. Ele conta que no início de sua carreira em 1858, quando teve de ensinar Cálculo Diferencial, percebeu a falta de uma fundamentação adequada para os números reais. E é também ele quem conta que foi buscar inspiração para sua construção dos números reais na antiga e engenhosa teoria das proporções de Eudoxo.

Observe que a definição de Eudoxo associa, a cada par de grandezas, digamos (A, B), dois conjuntos de pares (m, n) de números naturais: o conjunto E ("E"de esquerda) dos pares para os quais $mB<nA$ (que fariam $\frac{m}{n}<\frac{A}{B}$ se $\frac{A}{B}$ tivesse significado numérico) e o conjunto D ("D"de direita) dos pares para os quais $mB>nA$ (que fariam $\frac{A}{B}<\frac{m}{n}$ se $\frac{A}{B}$ tivesse significado numérico).

Inspirando-se na definição de Eudoxo, Dedekind notou que o procedimento do sábio grego leva a uma separação dos números racionais em dois conjuntos. Assim, qualquer número racional r efetua um "corte"ou separação de todos os demais números racionais no conjunto E dos números menores que r e no conjunto D dos números maiores do que r; o próprio número r pode ser incluído como maior elemento de E ou o menor elemento de D.

Mas, além desses "cortes", há outros, como exemplifica o clássico caso de $\sqrt{2}$. O processo de encontrar a raiz quadrada de 2 conduz à separação dos números racionais em dois conjuntos: o conjunto E das raízes aproximadas por falta (aí incluídos o zero e os racionais negativos), e o conjunto D das raízes aproximadas por excesso. Só que agora esse corte não tem elemento de separação; de fato, veja o exemplo abaixo:

Exemplo: Provemos que o conjunto E das raízes quadradas de 2 por falta não tem máximo.

Considere r racional positivo tal que $r^2<2$, existe um outro racional $s>r$ tal que $s^2<2$. Isso se consegue aumentando r de uma quantidade bem pequena, digamos $\frac{1}{n}$, com n inteiro bem grande. Tomando $s = (r + \frac{1}{n})$, queremos que $s^2 = (r + \frac{1}{n})^2$ seja menor que 2, ou seja, $r^2 + \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2}<2$; ou ainda,

$(2r + \frac{1}{n}) \times \frac{1}{n}<2 - r^2$.

Podemos resolver essa inequação utilizando outra bem mais simples, para isso como $n \geq 1$, temos que $\frac{1}{n} \leq 1$, portanto,

$(2r + \frac{1}{n}) \times \frac{1}{n} \leq (2r + 1) \times \frac{1}{n}$

Notemos que $(2r + 1) \times \frac{1}{n}<2 - r^2$ ou $(2r + 1) \times \frac{1}{n} \geq 2 - r^2$.

Fazendo $(2r + 1) \times \frac{1}{n}<2 - r^2$, que é o nosso objetivo, resolvemos a inequação,

$(2r + 1) \times \frac{1}{n}<2 - r^2$

Multiplicando os dois termos da inequação por n, temos:

$(2r + 1)<n(2 - r^2)$

$\frac{(2r + 1)}{(2 - r^2)}<n \Longrightarrow n>\frac{(2r + 1)}{(2 - r^2)}$

É claro que com qualquer n nessas condições teremos também $(r + \frac{1}{n})<2$, que é o resultado desejado. Para ser mais claro, observe que vendo $r^2 = (a_n)$, uma sequência que converge para $\sqrt{2}$, teremos $s^2 = (b_n)$ convergindo mais "rápida"para $\sqrt{2}$. Veja alguns valores:

Tome $r = 1 \Longrightarrow r^2 = 1$ e $n>\frac{2 \times 1 + 1}{2 - 1^2} \Longrightarrow, n>3$. Se $n = 4 \Longrightarrow s = 1 + \frac{1}{4} = 1,25 \Longrightarrow s^2 = 1,5625$.

Se $r = 1,4 \Longrightarrow r^2 = 1,96$ e $n>\frac{2 \times 1,4 + 1}{2 - 1,4^2} \Longrightarrow, n>95$. Se $n = 96 \Longrightarrow s = 1,4 + \frac{1}{96} = 1,41041667 \Longrightarrow s^2 = 1,98927518$.

No caso de $(2r+1)\times\frac{1}{n}\geq 2-r^2$, basta tomar um $n\leq\frac{(2r+1)}{(2-r^2)}$, teríamos, então:
$r=1\Longrightarrow r^2=1$ e $n\leq\frac{2\times 1+1}{2-1^2}\Longrightarrow, n\leq 3$. Se $n=2\Longrightarrow s=1+\frac{1}{2}=1,5\Longrightarrow s^2=2,25$.

No modo de ver de Dedekind, o número irracional $\sqrt{2}$ deve ser criado como elemento de separação entre os conjuntos desse corte.

Diz-se que um conjunto C de números reais é limitado a direita ou limitado superiormente se existe um número L tal que $c\leq L$ para todo $c\in C$. Do mesmo modo, C é limitado a esquerda ou limitado inferiormente se existe um número l tal que $l\leq c$ para todo $c\in C$. Os números L e l são chamados **cotas** do conjunto C, superior e inferior, respectivamente.

Exemplo 1: O conjunto $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente, mas não superiormente;

Exemplo 2: O conjunto dos racionais menores do que 5 é limitado superiormente, mas não inferiormente;

Exemplo 3: O conjunto dos reais tais que $x^2\leq 5$ é limitado, tanto à direita como à esquerda, esse conjunto equivale ao intervalo $[-\sqrt{5},\ \sqrt{5}]$. Conjuntos como esses são denominados simplesmente como **limitado**. É também limitado qualquer intervalos de extremos a e b.

Um conjunto limitado superiormente pode ter um elemento que seja o maior de todos, o qual é chamado de **maximo** do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos racionais x tais que $x\leq 5$ tem 5 como seu máximo. Já o conjunto $A=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},...,\frac{n}{n+1}\}$ não tem máximo, embora seja limitado superiormente pelo 1, o qual é a menor das cotas superiores.

Definição 5: *Chama-se* **supremo** *de um conjunto C a menor de suas cotas superiores. Denote por S o supremo e S satisfaz as seguintes propriedades:*

a) $c\leq S$ para todo $c\in C$;

b) Dado qualquer número $\varepsilon>0$, existe um elemento $c\in C$ à direita de $S-\varepsilon$, isto é, tal que $S-\varepsilon<c$.

Definição 6: *Chama-se* **infimo** *de um conjunto C à maior de suas cotas inferiores. Denote por s o ínfimo e s satisfaz as seguintes propriedades:*

a) $s\leq c$ para todo $c\in C$;

b) Dado qualquer número $\varepsilon>0$, existe um elemento $c\in C$ à esquerda de $s+\varepsilon$, isto é, tal que

$c<S+\varepsilon$.

Exemplo 1: $[-3,8) = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x<8\}$ não tem máximo, mas tem supremo $S = 8$.

Exemplo 2: $\{2, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, 6\}$ tem ínfimo 2, que é também seu mínimo. Dado $\varepsilon = 0,2$. $s+\varepsilon$ será $2,2$ e o único elemento a esquerda de $2,2$ é o próprio 2.

3.2 Sequências Infinitas

Definição 7: *Uma sequência infinita ou simplesmente sequência de números reais é uma função* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *que a cada número natural n associa um número real* $a_n = a(n)$ *chamado n-ésimo termo da sequência.*

Denotaremos por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ ou por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (a_n) a sequência $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 1: $a_n = (2, 4, 6, ...)$ com $a_n = 2n$ e $n \in \mathbb{N}$, sequência dos pares;

Exemplo 2: $a_n = (1, 3, 5, ...)$ com $a_n = 2n-1$ e $n \in \mathbb{N}$, sequência dos impares;

Nem sempre o termo geral de uma sequência é dada por uma fórmula, embora, evidentemente, sempre haja uma lei de formação bem definida que permite determinar o termo geral dessa sequência.

Exemplo 3: $a_n = (2, 3, 5, 7, 11, ...)$, sequência dos números primos;

A sequência $(1, 2, 1, 2, 1, 2, ...)$ corresponde a função $a_n = 1$, se n é impar e $a_n = 2$, se n é par; o conjunto de seus termos é o conjunto $X = \{1, 2\}$, ou seja, uma sequência tem sempre infinitos termos, embora o conjunto formado pelos seus termos possa ter um conjunto finito de termos.

Pela definição, uma sequência (a_n) é indexada a partir de $n = 1$ de forma que a_1 é seu primeiro termo, porém, as vezes, é conveniente que ela seja indexada por um certo $n \neq 1$, é o caso de $a_n = \sqrt{n-2}$ que só faz sentido para $n = 2, 3, 4, ...$ de forma que a_2 é o primeiro termo. Mas, mesmo nestes casos, uma translação de índice nos faz recair em $n = 1$. Então, no exemplo dado, basta fazer, $b_n = a_{n+1} = \sqrt{n-1}$.

Definição 8: *Uma sequência* (a_n) *é dita limitada, se existe* $c>0$ *tal que* $|a_n| \leq c$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Quando uma sequência* (a_n) *não é limitada, diremos ser ela é ilimitada.*

Exemplo 4: $a_n = [0, 1]$, $a_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...)$;

Definição 9: *Uma sequência* (a_n) *será dita decrescente se* $a_{n+1}<a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Diremos*

que a sequência é não decrescente, se $a_{n+1} \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5: $a_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} ..., \frac{1}{2^n}, ...)$, decrescente;

Exemplo 6: $a_n = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...)$, não-decrescente;

Definição 10: *Uma sequência (a_n) será dita crescente se $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Diremos que a sequência é não crescente, se $a_{n+1} \geq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 7: $a_n = (1, 2, 3, ..., n, ...)$, crescente;

Exemplo 8: $a_n = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...)$, não-crescente;

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de sequências **monotonas**.

Exemplo 9: $a_n = (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$, não é uma sequência monótona, pois, $a_n > a_{n+1}$, se n é impar e $a_{n+1} < a_{n+2}$;

Não existe nenhuma relação entre sequências monótonas e limitadas.

Exemplo 10: $a_n = n$ com $n \in \mathbb{N}$, monótona e ilimitada;

Exemplo 11: $a_n = (1 - \frac{1}{n})$ com $n \in \mathbb{N}$, monótona e limitada;

Teremos um interesse especial pelas sequências **convergentes**. De maneira sugestiva, uma sequência (a_n) é convergente se, a medida que o índice n cresce, o elemento a_n vai-se tornando arbitrariamente próximo de um certo número L, chamado **limite** da sequência. A proximidade entre a_n e L é medida por $|a_n - L|$. Portanto, dizer que a_n se aproxima de L significa que $|a_n - L|$ torna-se inferior a qualquer número positivo ε, por pequeno que seja, desde que tenhamos n suficientemente grande.

Definição 11: *Diz-se que uma sequência a_n converge para o número L, ou tem limite L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que*

$$n > N \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon, (*).$$

Escreve-se $\lim_{n \to \propto} a_n = L$, $\lim a_n = L$ *ou* $a_n \to L$.

Uma sequência que não converge é dita **divergente**.

Dado o número L qualquer, chama-se **vizinhança** ε de L a todos os números a do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Denotemos esse intervalo com o simbolo $V_\varepsilon(L)$. Observe que a condição $a \in V_\varepsilon(L)$ pode ser escrita de três maneiras equivalentes.

$$|a - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < a - L < \varepsilon \Longleftrightarrow L - \varepsilon < a < L + \varepsilon.$$

Assim, ao definirmos limite, estamos dizendo que $n>N \Longrightarrow a_n \in V_\varepsilon(L)$.

Ou seja, $n>N \Longrightarrow |a_n - L|<\varepsilon$ ou $n>N \Longrightarrow L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$.

É importante salientar que o número ε, dado arbitrariamente, não pode ser mudado até a determinação de N, pois este N depende de ε. Mudando-se ε deve-se, em geral, mudar N.

Exemplo 12: Mostre que a sequência $a_n = (\frac{n}{n+12}) = (\frac{1}{13}, \frac{2}{14}, \frac{3}{15}, ..., \frac{n}{n+12}, ...)$ converge para o número 1.

Usando (*), dado $\varepsilon>0$, $|a_n - 1| = |\frac{n}{n+12} - 1| = \frac{12}{n+12}<\varepsilon \Longleftrightarrow n>\frac{12}{\varepsilon} - 12$.

Isso nos diz que, dado $\varepsilon>0$, existe $N = \frac{12}{\varepsilon} - 12$ tal que $n>N \Longrightarrow |a_n - 1|<\varepsilon$.

Assim, se $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $N = 108$, se $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $N = 1188$.

Quando eliminamos um ou vários termos de uma sequência, obtemos o que se chama uma **subsequencia** da primeira. Assim, a sequência dos números positivos pares, impares é uma subsequência dos números naturais. Uma definição precisa do conceito de subsequência e a seguinte:

Definição 12: *Uma subsequência de uma dada sequência a_n é uma restrição dessa sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}^*$ do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Dito de outra maneira, uma subsequência de a_n é uma do tipo $b_j = a_{n_j}$, onde (n_j) é uma sequência crescente de inteiros positivos, isto é, $n_1<n_2<n_3<...$*

As demonstrações dos teoremas 1, 2, 3, 4 e 5 feita baseado em Ávila [1]:

Teorema 1: *Se uma sequência (a_n) converge para um limite L, então toda sua subsequência a_{n_j} também converge para L.*

Utilizemos a propriedade relativa a subsequência: Se $\lim a_{n_j} = L$ e dado $\varepsilon>0$, então apenas um número finito de termos não pertence ao intervalo $I = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Demonstração: Para todo $\varepsilon>0$ apenas um número finito de termos de a_{n_j} não pertence ao intervalo $I = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, assim apenas um número finito de termos da subsequência podem estar fora do intervalo I o que implica que a subsequência converge para L pois I irá conter todos termos da subsequência (a menos uma quantidade finita) para qualquer $\varepsilon>0$. □

Encerramos sequência com mais dois teoremas, a saber:

Teorema 2: *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Dado qualquer $\varepsilon>0$, existe um índice N tal que

$$n>N \Longrightarrow L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon.$$

Isto nos diz que, a partir do índice $n = N + 1$, a sequência é limitada: a direita por $L + \varepsilon$ e a esquerda por $L - \varepsilon$. Para englobarmos a sequência inteira, basta considerar dentre todos os números

$$a_1, a_2, ..., a_n, L-\varepsilon, L+\varepsilon.$$

aquele que é o menor de todos, digamos, A, e aquele que é o maior de todos, digamos B; então será verdade, que para todo n, que

$$A<a_n<B.$$

□

Teorema 3: *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*
Demonstração: Tomemos $a_n \subset \mathbb{R}$, sequência crescente e limitada, então, a_n é convergente. Seja $L = sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, vamos mostrar que $\lim a_n = L$. Então, para qualquer $\varepsilon>0$ temos $L>L-\varepsilon$, pois, L é o supremo e como $L-\varepsilon$ não é cota superior, então $\exists n_0$ tal que $a_{n_0}>L-\varepsilon$, e como a sequência é crescente temos $n>n_0$ que $a_n>a_{n_0}$, logo, $a_n>a_{n_0}>L-\varepsilon$ e como $a_n<L+\varepsilon \Longrightarrow L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon \Longrightarrow \lim a_n = L$. □

3.3 Sequências de Cauchy

O teorema acima é um ”critério de convergência”de Cauchy, ou seja, ele permite saber se uma dada sequência é convergente, sem conhecer seu limite de antemão.
Definição 13: *Chama-se sequência de Cauchy toda sequência que satisfaz uma das seguintes condições equivalentes abaixo:*

$$n, m>N \Longrightarrow |a_n - a_m|<\varepsilon \ (\circ)$$

Podendo ser escrita de maneira equivalente assim:

$$n>N \Longrightarrow |a_n - a_{n+p}|<\varepsilon \ (\bullet)$$

Esse tipo de sequência surgiu no final do século *XVIII* em conexão com processos numéricos para resolver equações. Por exemplo, uma equação como $x^3 - 8x + 1 = 0$ pode-se escrever na forma $x = \dfrac{x^3+1}{8}$, ou $x = f(x)$, onde $f(x) = \dfrac{x^3+1}{8}$. Com a equação nesta forma, podemos construir uma sequência numérica infinita, começando com um certo valor x_1, assim:

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), x_4 = f(x_3), etc.$$

Em geral, $x_n = f(x_{n-1})$ com $n = 2, 3, 4, ...$ Se for possível provar que essa é uma sequência de Cauchy, saberemos que ela converge para um certo x_0. Em seguida procura-se provar que x_0 é solução da equação dada, os elementos x_n sendo valores aproximados da solução. Isso, na verdade, é um poderoso instrumento de cálculo numérico (conhecido como 'método das aproximações sucessivas").

Nem toda sequência de Cauchy é convergente. Para ver isto, tomemos uma sequência de números racionais x_n convergindo para um número irracional a. (Por exemplo, $x_1 = 1, x_2 = 1,4, x_3 = 1,41, x_4 = 1,414...$, com $lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.) Sendo convergente em $\mathbb{R}$, vamos aqui assumir que toda sequência convergente é de Cauchy, que (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mas evidentemente (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$.

E nem toda sequência limitada é de Cauchy. O exemplo mais simples é dado por $(1, 0, 1, 0, ...)$ na reta. Embora limitada, esta sequência não é de Cauchy pois $d(x_n, x_{n+1}) = 1$ para todo n. Porém, assumiremos também aqui que toda sequência de Cauchy é limitada. Na sequência de números reais $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$ não é de Cauchy porque não é limitada.

3.4 Bolzano-Weierstrass

Teorema 4: *Consideremos uma família de intervalos encaixados, isto é, intervalos* $I_n = [a_n, b_n]$*,* $n = 1, 2, 3, ...$ *tais que* $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ....$ *Então existe pelo menos um número c pertencendo a todos os intervalos* I_n *ou, o que é o mesmo,* $c \in I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n \cap ....$ *Se além das hipóteses feitas, o comprimento* $|I_n| = |b_n - a_n|$ *do n-ésimo intervalo tender a zero, então o número c será único, isto é,* $I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n \cap ... = \{c\}$.

Demonstração: É claro que as sequências a_n e b_n são, respectivamente, não decrescente e não crescente. Além disso, como

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1,$$

vemos que a_n é limitada à direita por b_1 e b_n é limitada à esquerda por a_1; logo, essas duas sequências possuem limites, digamos, A e B respectivamente. Como $a_n < b_n$, é claro que

$$a_n \leq A \leq B \leq b_n,$$

Isso significa que $[A, B] \subset I_n$ para todo n. Então, se $A < B$, a intersecção dos intervalos I_n é o próprio intervalo $[A, B]$; e se $A = B$ (como é o caso se $b_n - a_n$ tender a zero), essa intersecção é o número $c = A - B$. □

A condição de que os intervalos I_n sejam fechados é essencial no teorema. Em $I_n = (0, \frac{1}{n})$ são encaixados e limitados, mas não são fechados, sua intersecção é vazia. Veja:

Exemplo 13: $I_1 = (0, 1) \cap I_2 = (0, \frac{1}{2}) \cap ... \cap I_n = (0, \frac{1}{n}) \cap ...$ com n grande.

É também essencial que os intervalos sejam limitados. Em $I_n = [0, \infty)$ é uma família de intervalos fechados e encaixados, mas sua intersecção também é vazia, eles não são limitados.

Exemplo 14: $I_1 = [1, \infty) \cap I_2 = [2, \infty) \cap ... \cap I_n = [n, \infty) \cap ...$ com n grande.

Teorema 5: Teorema de Bolzano-Weierstrass. *Toda sequência limitada* (a_n) *possui uma subsequencia convergente.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência limitada, portanto, toda contida num intervalo fechado I, de comprimento c. Dividindo esse intervalo ao meio, obtemos dois novos intervalos (fechados) de comprimento $\frac{c}{2}$, um dos quais necessariamente conterá infinitos elementos da sequência; seja I_1 esse intervalo. (Se os dois intervalos contiverem infinitos elementos da sequência, escolhe-se um deles para ser I_1.) O mesmo procedimento aplicado a I_1 nos conduz a um intervalo fechado I_2, de comprimento $\frac{c}{2^2}$, contendo infinitos elementos da sequência.

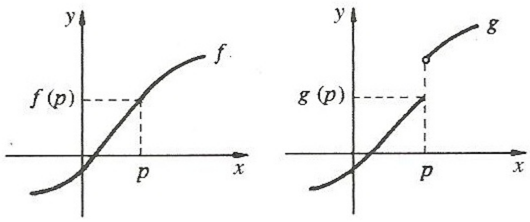
Continuando indefinidamente com esse procedimento, obtemos uma sequência de intervalos fechados e encaixados I_n, de comprimento $\frac{c}{2^n}$, que tende a zero, cada um contendo infinitos elementos da sequência a_n. Seja L o elemento que pelo teorema dos intervalos encaixados, está contido em todos os intervalos I_n. Agora é só tomar um elemento a_{n_1} da sequência (a_n) no intervalo I_1, a_{n_2} no intervalo I_2 etc, tomando-os um após o outro de forma que $n_1 < n_2 < ....$ Assim obtemos uma subsequência (a_{n_j}) convergindo para L. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, seja N tal que $\frac{c}{2^N} < \varepsilon$, temos que $I_m \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ para $m > N$. Portanto, para $j > N$, n_j será maior do que N (pois n_j), logo, a_{n_j} estará no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, o que prova que $a_{n_j} \longrightarrow L$. □

3.5 Teoremas Fundamentais do Cálculo

Funções contínuas

Sejam f e g de gráficos

Figura 3: Funções f e g



Fonte: Guidorizzi[3]

Observe que f e g se comportam de modo diferente em p; o gráfico de f não apresenta "salto "em p, ao passo que o de g, sim. Queremos destacar uma propriedade que nos permita distinguir tais comportamentos.

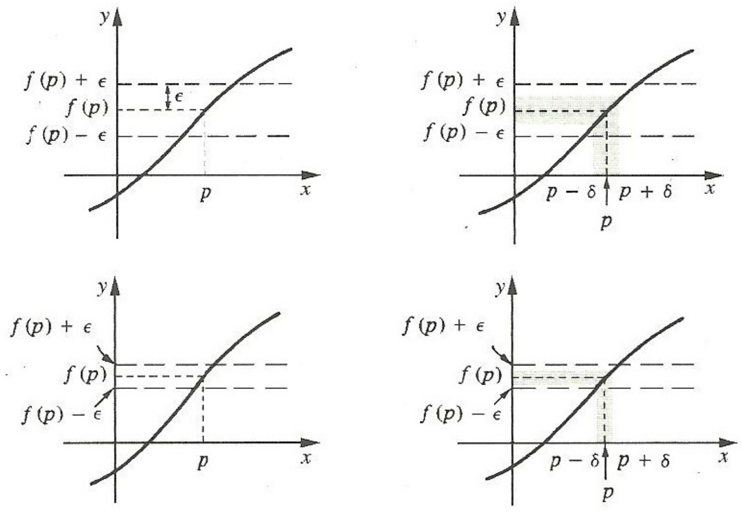
Veja as situações apresentadas a seguir

A função f satisfaz em p a propriedade

para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que $f(x)$ permaneça entre $f(p) - \epsilon$ e $f(p) + \epsilon$ quando x percorre o intervalo $(p - \delta, p + \delta)$, com x no domínio de f.

Ou de forma equivalente

Figura 4: Propriedade da função



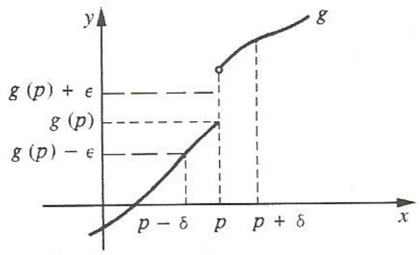
Fonte: Guidorizzi[3]

para todo ϵ>0 dado, existe δ>0 (δ dependendo de ϵ), tal que, para todo $x \in D_f$

$$p - \epsilon < x < p + \epsilon \Longrightarrow f(p) - \epsilon < f(x) < f(p) + \epsilon. \ (\blacktriangledown).$$

Entretanto a função g não satisfaz em p tal propriedade

Figura 5: Propriedade da função



Fonte: Guidorizzi[3]

para ϵ>0 acima, não existe δ>0 que torne verdadeira a afirmação:

$$\text{Qualquer que seja } x \in D_f, p - \epsilon < x < p + \epsilon \Longrightarrow g(p) - \epsilon < g(x) < g(p) + \epsilon.$$

Qualquer que seja δ>0 que se tome, quando x percorre o intervalo $(p - \delta, p + \delta\ )$, $g(x)$ não permanece entre $g(p) - \epsilon$ e $g(p) + \epsilon$.

A propriedade ($\blacktriangledown$) distingue os comportamentos de f e de g em p. Adotaremos esta propriedade como definição de função contínua em p.

A definição acima pode ser reescrita assim:

para todo ϵ>0 dado, existe δ>0 (δ dependendo de ϵ), tal que, para todo $x \in D_f$

$$|x - p|<\delta \implies |f(x) - f(p)|<\delta. \ (\blacktriangle).$$

Exemplo 15: Mostre que $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $p = 1$.

Solução: Por definição, para todo ϵ>0, dado, existe δ>0 tal que, para todo $x \in D_f$, temos $1-\delta<x<1+\delta \implies f(1)-\epsilon<f(x)<f(1)+\epsilon$. Considere ϵ>0, dado, fazendo as contas, temos:

$f(1) - \epsilon<f(x)<f(1) + \epsilon \iff 3 - \epsilon<2x + 1<3 + \epsilon$.

Somando-se -1 aos membros das desigualdades e dividindo por 2, temos:

$f(1) - \epsilon<f(x)<f(1) + \epsilon \iff 1 - \dfrac{\epsilon}{2}<x<1 + \dfrac{\epsilon}{2}$.

Então, dado ϵ>0 e tomando-se $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$, inclusive um $0<\delta<\dfrac{\delta}{2}$ também servirá, resultando em:

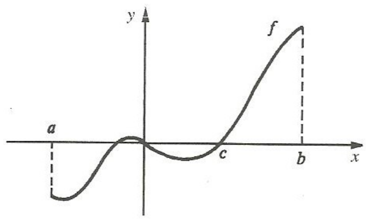
$1 - \delta<x<1 + \delta \implies f(1) - \epsilon<f(x)<f(1) + \epsilon$.

Logo, f é contínua em $p = 1$.

As demonstrações realizadas nos teoremas 6 e 7 se baseiam em Guidorizzi.

Teorema 6: Teorema do Anulamento . *Se f for contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Figura 6: Teorema do anulamento



Fonte: Guidorizzi[3]

Demonstração: Suponhamos $f(a)$<0 e $f(b)$>0. Façamos $a = a_0$ e $b = b_0$ e seja c_0 o ponto médio do segmento $[a_0, b_0]$. Temos $f(c_0)$<0 ou $f(c_0) \geq 0$.

Suponhamos $f(c_0)$<0 e façamos $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$. Temos $f(a_1)$<0 e $f(b_1)$>0, Seja c_1 o ponto médio do segmento $[a_1, b_1]$. Temos $f(c_1)$<0 ou $f(c_1) \geq 0$.

Suponhamos $f(c_1) \geq 0$ e façamos $a_1 = a_2$ e $c_1 = b_2$. Assim, $f(a_2)<0$ e $f(b_2) \geq 0$. Prosseguindo com este raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos

$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$

que satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes e tal que, para todo n,

$$(1)\ f(a_n)<0 \text{ e } f(b_n) \geq 0$$

Seja c o único número real tal que, para todo n,

$$a_n \leq c \leq b_n$$

As sequências de termos gerais a_n e b_n convergem para c. Segue, então, da continuidade de f, que

$$(2)\ \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(a_n) = f(c) \text{ e } \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(b_n) = f(c)$$

Segue de (1) e de (2) que

$$(2)\ f(c) \leq 0 \text{ e } f(c) \geq 0$$

e, portanto, $f(c) = 0$. □

Vejamos um exemplo:

Exemplo 16: Seja $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 3x - 10$, sabemos que $f(2) = 0$ e que $lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$, fixemos $[a, b] = [0, 3] \in D_f \subset \mathbb{R}$. Notemos que:

$a_0 = 0$ e $b_0 = 3 \Longrightarrow [a_0; b_0] = [0; 3]$, com $f(a_0) = f(0) = -10<0$ e $f(b_0) = f(3) = 80>0$, seja $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = \dfrac{0 + 3}{2} = 1,5$, temos que $f(c_0) = f(1,5) = -10,5625<0$, fazendo

$a_1 = c_0 = 1,5$ e $b_1 = b_0 = 3 \Longrightarrow [a_1; b_1] = [1,5; 3]$, seja $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = \dfrac{1,5 + 3}{2} = 2,25$, e $f(c_1) = f(2,25) = 10,98828125>0$, pondo

$a_2 = a_1 = 1,5$ e $b_2 = c_1 = 2,25 \Longrightarrow [a_2; b_2] = [1,5; 2,25]$, seja $c_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = \dfrac{1,5 + 2,25}{2} = 1,875$, e $f(c_2) = f(1,875) = -3,8806152344<0$, escrevendo

$a_3 = c_2 = 1,875$ e $b_3 = b_2 = 2,25 \Longrightarrow [a_3; b_3] = [1,875; 2,250]$, seja $c_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = \dfrac{1,875 + 2,250}{2} = 2,0625$, e $f(c_3) = f(2,0625) = 2,3191070557>0$, continuando

$a_4 = a_3 = 1,875$ e $b_4 = c_3 = 2,0625 \Longrightarrow [a_4; b_4] = [1,875; 2,0625]$, seja $c_4 = \dfrac{a_4 + b_4}{2} = \dfrac{1,8750 + 2,0625}{2} = 1,96875$, e $f(c_4) = f(1,96875) = -1,0618581772<0$, escrevendo

$a_5 = c_4 = 1,96875$ e $b_5 = b_4 = 2,06250 \Longrightarrow [a_5; b_5] = [1,96875; 2,0625]$, seja $c_5 = \dfrac{a_5 + b_5}{2} = \dfrac{1,96875 + 2,0625}{2} = 2,015625$, e $f(c_5) = f(2,015625) = 0,5549736619>0$, continuando

$a_6 = a_5 = 1,96875$ e $b_6 = c_5 = 2,015625 \Longrightarrow [a_6; b_6] = [1,96875; 2,015625]$, seja $c_6 = \dfrac{a_6 + b_6}{2} = \dfrac{1,96875 + 2,015625}{2} = 1,9921875$, e $f(c_6) = f(1,9921875) = -0,2714285813<0$, observe que

$[a_7; b_7] = [1,9921875; 2,015625]$, continuando o processo, segue, então, da continuidade de f, que $lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$ e $lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) = f(2) = 0$.

Observe como ficaram as sequências:

$a_n = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...\} = \{0; 1,5; 1,5; 1,875; 1,875; 1,96875, 1,96875, 1,9921875...\}$

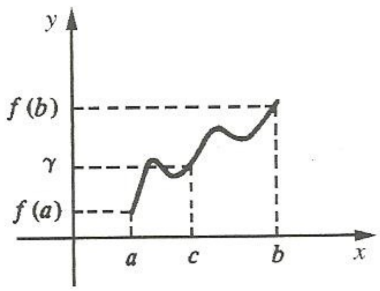
e

$b_n = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, ...\} = \{3; 3; 2,25; 2,25; 2,0625; 2,0625, 2,015625, 2,015625, ...\}$.

Segue do exposto acima que $f(c) \leq 0$ e $f(c) \geq 0$ e portanto, $f(c) = 0$

Teorema 7: Teorema do Valor Intermediário. *Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.*

Figura 7: Teorema do Valor Intermediário



Fonte: Guidorizzi[3]

Demonstração: Suponhamos $f(a)<\gamma<f(b)$. Consideremos a função $g(x) = f(x) - \gamma$, x em $[a, b]$. Como f é contínua em $[a, b]$, g também o é; temos, ainda $g(a) = f(a) - \gamma<0$ e $g(b) = f(b) - \gamma>0$. Pelo teorema do anulamento, existe c em $[a, b]$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, $f(c) = \gamma$. □

4 COMPRIMENTO

4.1 Definições e exemplos de Espaços Métricos

Definição 14: *Uma métrica num conjunto* $\mathbb{M}$ *é uma função* $d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{R}$*, que associa a cada par ordenado de elementos* $x, y \in \mathbb{M}$ *um número real d(x,y), chamado distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{M}$*:*

d1) $d(x, x) = 0$*;*

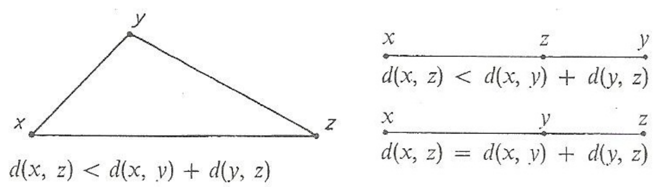
d2) Se $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$*;*

d3) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Os postulados d1) e d2) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que d(x,y) = 0 se, e somente se, x = y. O postulado d3) afirma que a distância d(x,y) é uma função simétrica das variáveis x, y. A condição d4) chama-se **desigualdade do triângulo**; ela tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Figura 8: Espaço metrico



Fonte: Elon Lages[4]

Um espaço métrico é um par $(\mathbb{M}, d)$, onde $\mathbb{M}$ é um conjunto e d é uma métrica em $\mathbb{M}$.

Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos, etc.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: A **reta**, ou seja, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, é o exemplo mais importante de espaço métrico. A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por d(x,y) = | $x - y$ |. As condições d1) a d4) resultam imediatamente das propriedades elementares do valor absoluto de números reais. Esta é a chamada "métrica usual"da reta. A menos que seja feita menção explícita em contrário, é a ela que nos referimos sempre que consideramos R como espaço métrico.

Exemplo 2: O **espaço euclidiano** $\mathbb{R}^n$. Este exemplo generaliza o anterior. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são as listas x = $(x_1, ...x_n)$ onde cada uma das n coordenadas x_i é um número real. Vamos definir a distância entre dois pontos de acordo com o espaço métrico explorado no nosso trabalho, ou seja, até o $\mathbb{R}^2$, então, dado x = (x_1, y_1) e y = (x_2, y_2), escreveremos:

$$\text{d(x,y)} = \sqrt{(x_1-x_2)2+(y_1-y_2)2}$$

A função d: $\mathbb{R}^2 x \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica, pois, cumpre as condições d1), d2), d3) e d4). A métrica d é chamada euclidiana. Ela provém da fórmula para a distância entre dois pontos do plano (em coordenadas cartesianas) a qual se prova com o Teorema de Pitágoras. Evidentemente, para considerações de natureza geométrica, d é a métrica natural pois fornece a distância da geometria euclidiana.

Vamos mostrar que as condições d1), d2), d3) e d4) são cumpridas:

d1): Seja x = (x_1, y_1) e y = (x_2, y_2) como $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, portanto $x = y$.

Segue que d(x,y) = $\sqrt{(x_1-x_2)2+(y_1-y_2)2} \Longrightarrow \sqrt{(x_1-x_1)2+(y_1-y_1)2} \Longrightarrow \sqrt{(0)2+(0)2} = 0$.

d2): Seja x = (x_1, y_1) e y = (x_2, y_2) como $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, portanto $x \neq y$.

Segue que d(x,y) = $\sqrt{(x_1-x_2)2+(y_1-y_2)2} \Longrightarrow \sqrt{(x_1-x_2)2+(y_1-y_2)2} > 0$, posto que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ então $p = {}^{(x_1-x_2)2}+{}^{(y_1-y_2)2}$ é sempre positivo e a função $d(p) = \sqrt{(p)}$ também é.

d3): Seja x = (x_1, y_1) e y = (x_2, y_2) e $d(x, y) = d(y, x)$.

Segue que d(x,y) = $\sqrt{(x_1-x_2)2+(y_1-y_2)2}$ e d(y,x) = $\sqrt{(x_2-x_1)2+(y_2-y_1)2}$ e como ${}^{(x_1-x_2)2} = {}^{(x_2-x_1)2}$ e ${}^{(y_1-y_2)2} = {}^{(y_2-y_1)2}$, concluímos que d(x,y) = d(y,x).

d4): Seja x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2), z = (x_3, y_3), sabemos que três pontos x, y e z no plano ou estão alinhados ou formam um triângulo, justamente daí reside o argumento para a desigualdade triangular, pois, caso o ângulo oposto ao $d(x, z)$ sejam 90, pois cos 90 = 1, ocorre a igualdade, caso seja agudo, como o cosseno de um ângulo agudo está entre 0 e 1, ocorre a desigualdade, então, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

4.2 Medida de um segmento de reta

Indicaremos com o simbolo $\overline{AB}$ a medida do segmento de reta AB. A medida, ou comprimento de $\overline{AB}$ será definido a seguir.

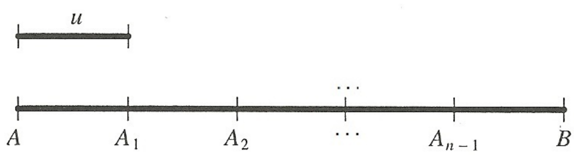
Comecemos fixando um segmento de reta u, ao qual chamaremos de *segmento unitário* de comprimento igual a 1. Todos os segmentos de retas congruentes a u terão comprimento 1.

Caso exista um ponto intermediário C (situado em AB) tal que $AC = CB = u$, então, o comprimento de AB será 2, podendo escrevermos $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 2$.

Genericamente, dado um número inteiro positivo n se for possível obter $n - 1$ pontos intermediários $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ no segmento AB, de tal modo que os n segmentos $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}B$ sejam todos congruentes ao segmento unitário u, então, o comprimento de AB será n, escreveremos assim:

$$\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + ... + \overline{A_{n-1}B} = n$$

Figura 9: segmento de reta



Fonte: Elon Lages[5]

Podemos representar $\overline{AB} = n$, pois, AB é decomposto em n segmentos de reta justapostos todos de comprimento $u = 1$.

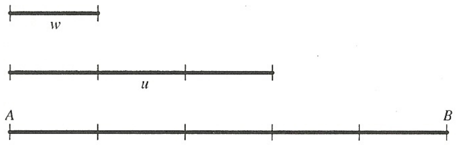
Nesse caso, como $\overline{AB}$ = n (n inteiro) é natural assumir que AB contém n vezes o segmento unitário u.

Não é difícil perceber que podemos conseguir um segmento AB que não contenha o segmento u um número inteiro de vezes, basta que o segmento $\overline{AB}$ seja menor que u, então, como definir o comprimento de AB?

Elaboremos uma hipótese. Suponhamos que, embora AB não contenha u um número inteiro de vezes, existe entretanto um segmento menor, w, tal que w esteja n vezes contido em u e m vezes contido em AB, sendo m e n números inteiros.

$u = 3w$ e $\overline{AB} = 5w \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{u} = \dfrac{5w}{3w} = \dfrac{5}{3}$.

Figura 10: segmentos de reta



Fonte: Elon Lages[5]

O segmento w é definido como submúltiplo comum de AB e u. AB e u são tidos como já dissemos segmentos comensuráveis. Note ainda que, se escolhêssemos um submúltiplo ainda menor, por exemplo $t = \dfrac{w}{2}$, obteríamos como medida uma razão equivalente a anterior.

De fato, teríamos:

$u = 3w$, $\overline{AB} = 5w$ e $w = 2t \Rightarrow u = 3.2t$, $u = 6t$ e $\overline{AB} = 5.2t$, $\overline{AB} = 10t$

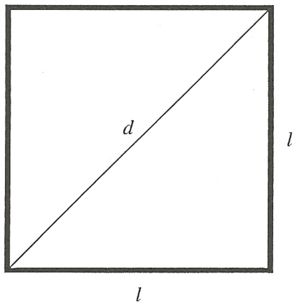
Logo $\dfrac{AB}{u} = \dfrac{10t}{6t} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$.

Entretanto, nossos olhos ou até mesmo os instrumentos mais sofisticado de aferição tem um limite de percepção (precisão), sendo incapazes de distinguir dois pontos que, embora distintos, achem-se a uma distância inferior a esse limite, tudo então leva a crer que dois segmentos são sempre comensuráveis.

Por algum tempo acreditou-se nisso.

Coube aos pitagóricos abalar essa estrutura de pensamento, causando enorme impacto na matemática grega. Provaram que o *lado e a diagonal de um quadrado* são grandezas incomensuráveis.

Figura 11: segmentos de reta



Fonte: Elon Lages[5]

A demonstração tradicional desse fato é a seguinte:

Se o lado e a diagonal de um quadrado fossem comensuráveis, tomando o lado como a unidade e o comprimento da diagonal como um racional $\frac{p}{q}$, por pitágoras (Aplicado a um dos triângulos retângulo da figura 11 acima), temos:

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2.$

Ou seja

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, com p e q inteiros.

Dai resulta $p^2 = 2q^2$.

A igualdade é um *absurdo*, pois, os inteiros p^2 e q^2 contêm cada um dos seus fatores primos um número par de vezes, pois, estão elevados ao quadrado. Por conseguinte, $2q^2$ contém um número impar de fatores iguais a 2 e assim não pode ser igual a p^2.

Podemos apresentar uma outra demonstração, a saber:

Suporemos que o lado e a diagonal sejam comensuráveis, e que

$d = m.u$ e $l = n.u$, sendo $\frac{d}{l} = \frac{m}{n}$, irredutível.

Logo $d = \frac{m}{n}.l$. Como o triângulo ABC é retângulo e isósceles, temos que:

$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow d^2 = 2l^2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}l\right)^2 = 2l^2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2.$

isto é m^2 é par.

Se m^2 é par, então m é par. Logo $m = 2k$, com k inteiro.

Mas como $\frac{m}{n}$ é irredutível, temos que n é impar.

No entanto, ao substituirmos $m = 2k$, podemos observar que

$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$, ou seja, n é par, um absurdo!.

Como definir então o comprimento de um segmento AB que é incomensurável com o segmento unitário u?

A medida de AB será, neste caso, um *número irracional.*

E o que é um número irracional? A resposta não é muito simples. Enquanto um número racional tem uma expressão "exata"como quociente $\frac{p}{q}$ de dois números inteiros, um número irracional não fica determinado quando se conhecem seus valores aproximados (os quais são números racionais).

O matemático grego Eudoxo, o primeiro a lidar de modo preciso com grandezas incomensuráveis, já havia desenvolvido, há mais de 25 séculos, uma teoria que, em linguagem moderna, se resume assim: para conhecer um número irracional x basta conhecer os números racionais menores do que x (suas aproximações por falta) e os números racionais maiores do que x (suas aproximações por excesso).

Por exemplo, $\sqrt{2}$ (por definição: número positivo cujo quadrado é 2) é um número irracional, como vimos acima. Os vários processos de cálculo de raiz quadrada nos permite obter valores racionais aproximados de $\sqrt{2}$ com erro tão pequeno quanto se queira. Assim, podemos escrever $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$. Isto significa que $(1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$, o que é correto, como qualquer pessoa pode verificar.

As desigualdades $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ significam que 1,414 é um valor aproximado por falta e 1,415 é um valor aproximado por excesso para o número irracional $\sqrt{2}$. Como $1,415 - 1,414 = 0,001$ vemos que, ao substituirmos $\sqrt{2}$ por qualquer um desses valores aproximados, cometemos um erro inferior a 1 milésimo. Assim, 1,414 é um valor aproximado de $\sqrt{2}$ com três algarismos decimais exatos. (Em outras palavras, se escrevermos uma aproximação por falta de $\sqrt{2}$ com erro inferior a 0,001 os três primeiros algarismos decimais devem ser 414.)

Se desenvolvermos um número racional $\frac{p}{q}$ em fração decimal, dois casos podem ocorrer: ou obtemos uma fração decimal exata (finita), como $\frac{3}{8} = 0,375$ ou então uma fração decimal periódica (infinita) como $\frac{4}{11} = 0,363636...$

E reciprocamente, dada qualquer fração decimal periódica, existe sempre um número racional (sua "geratriz"), do qual a decimal dada é o desenvolvimento. Podemos então definir os números irracionais como aqueles que, escritos como frações decimais, possuem expressões que nem são finitas nem periódicas.

Dada esta explicação sobre números irracionais, voltemos a medida dos segmentos.

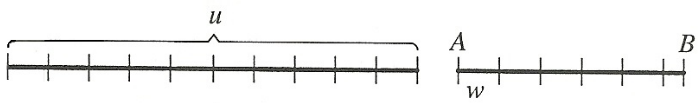
Temos um segmento AB. Sabemos que ele não é comensurável com a unidade de comprimento u. Sua medida $\overline{AB}$ é, portanto, um número irracional. Quais os valores aproximados (por falta e por excesso) desse número irracional $\overline{AB}$?

Seja dado um número inteiro positivo n. (Por exemplo, n = 1.000 ou n = um milhão). Dividimos o segmento unitário em n partes iguais. Cada uma dessas partes é um segmento de comprimento $\frac{1}{n}$. Seja w uma dessas partes. Existe um número inteiro positivo m tal que AB contém m segmentos congruentes a w e ainda sobra alguma coisa, mas $m + 1$ segmentos congruentes a w, justapostos, formam um segmento maior que AB. Quando isto ocorrer, tem-se

$$\frac{m}{n} < \overline{AB} < \frac{m+1}{n}$$

Ou seja, o número racional $\frac{m}{n}$ é uma aproximação por falta para o comprimento de AB, com erro inferior a $\frac{1}{n}$. Da mesma forma $\frac{m+1}{n}$ é uma aproximação por excesso do número irracional AB, com erro inferior a $\frac{1}{n}$.

Figura 12: segmentos de reta



Fonte: Elon Lages[5]

Concluímos assim nossa discussão sobre a medida $\overline{AB}$ (ou comprimento) de um segmento de reta AB. Essa medida pode ser inteira, fracionária ou irracional. Os primeiros casos ocorrem quando AB é comensurável com a unidade de comprimento escolhida. O último caso se dá quando AB e o segmento unitário são incomensuráveis, isto é, não possuem um submúltiplo comum. Neste caso, dado qualquer inteiro n, podemos obter aproximações racionais $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$, por falta e por excesso, para o comprimento $\overline{AB}$. O erro cometido é, portanto, inferior a $\frac{1}{n}$. Como $\frac{1}{n}$ pode se tornar um valor tão pequeno quanto o desejemos, (bastando para isso tomar n grande) vemos que é possível obter valores aproximados para $\overline{AB}$ com erro tão insignificante quanto se queira.

5 ÁREA

Trataremos aqui da medida da porção do plano ocupada por uma figura F comparando-a com a unidade de área. O resultado desta comparação será um número, que exprimirá quantas vezes a figura F contém a unidade de área. Daremos um significado preciso a esta ideia e estabeleceremos as fórmulas para as áreas das figuras geométricas mais conhecidas.

5.1 Área do quadrado e do retângulo

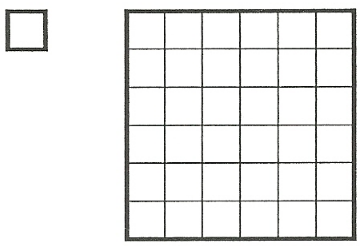
O *quadrado* é o quadrilátero que tem os 4 lados iguais e os 4 ângulos retos. Convencionaremos tomar como unidade de área um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento, e a ele chamaremos de *quadrado unitário*.

Definiremos, qualquer quadrado de lado 1, como tendo área igual a 1.

Um quadrado Q que tenha medida o número inteiro n pode ser decomposto, por meio de paralelas aos seus lados, em n quadrados justapostos, cada um deles com lado unitário e portanto com área 1. Segue então que Q tem área n^2.

Analogamente, se o lado de um quadrado Q tem por medida $\frac{1}{n}$, onde n é inteiro, então o quadrado unitário se decompõe, mediante paralelas aos seus lados, em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q. Estes n^2 quadrados a Q compondo um quadrado de área 1, então, a área de Q deve satisfazer à condição $n^2 \times$ área de $Q = 1$ e, portanto, área de $Q = \frac{1}{n^2}$.

Figura 13: Quadrado de lado 6 decomposto em $6^2 = 36$



Fonte: Elon Lages[5]

Se o lado de um quadrado Q tem o racional $\frac{m}{n}$ por medida, então podemos decompor cada lado de Q em m segmentos cada um dos quais tem comprimento $\frac{1}{n}$. Traçando paralelas aos lados de Q a partir dos pontos de divisão, obteremos uma decomposição de Q em m quadrados, cada um dos quais tem lado $\frac{1}{n}$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$. Segue que a área de Q é:

$$m^2 \times \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

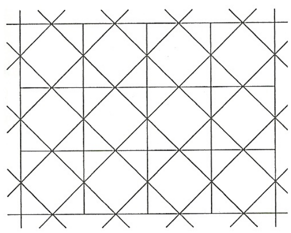
ou seja

$$\text{área de } Q = \left(\frac{m^2}{n^2}\right)$$

Portanto, sendo $a = \frac{m}{n}$, concluímos que a área de Q = a^2

Quanto aos quadrados cujos lados são incomensuráveis com o segmento unitário, perceba que na figura abaixo há dois tipos de quadrados: uns com lados inclinados, outros com lados horizontais e verticais. Seja qual for a unidade de comprimento escolhida, pelo menos um tipo têm lado irracional.

Figura 14: Quadrado de lado incomensurável



Fonte: Elon Lages[5]

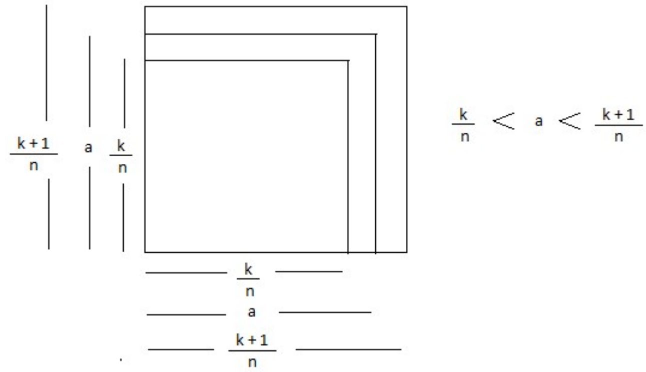
.

Sendo Q um desses, o lado de Q tem por medida um *número irracional a*. Mostraremos ainda neste caso que deveremos ter área de Q = a^2.

.

Note que nesse caso o quadrado cuja medida do lado é (irracional), tem área maior que a do quadrado de medida do lado igual a $\frac{k}{n}$ (racional) e menor que a do quadrado de medida $\frac{k+1}{n}$ (racional), propriedade inerente a área dos polígonos. Como já mostramos no capitulo anterior sobre segmentos, o que define a são as aproximações que pudermos fazer na desigualdade $\frac{k}{n} < a < \frac{k+1}{n}$. Além disso já provamos que a área do quadrado

Figura 15: Quadrado de lado incomensurável



Fonte: Elaborada pelo autor

vale para os racionais, valerá também para os quadrados de lado irracional, pois a função área é contínua, então, o teorema do valor intermediário garante o resultado.

Concluímos, desta maneira, que a área de um quadrado Q, cujo lado mede a, deve ser expressa pela fórmula: área de Q = a^2.

O retângulo é o quadrilátero que tem quatro ângulos retos.

Para provar que a área do retângulo é o produto da base por sua altura, procederemos com argumentos análogos aos usados no quadrado.

Sendo que os lados do retângulo R tem como medidas os números inteiros m e n, então, mediante paralelas aos lados, podemos decompor R em mn quadrados unitários, de modo que se deve ter área $R = mn$.

Mais geralmente, se os lados do retângulo R têm como medidas dois números racionais a e b, podemos escrever estes números como duas frações $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$, com o mesmo denominador q. Dividindo cada lado de R em segmentos de comprimentos $\frac{1}{q}$. O lado a será decomposto em p segmentos justapostos, cada um deles medindo $\frac{1}{q}$. O lado b será subdividido em r segmentos iguais, de comprimento $\frac{1}{q}$. Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em pr quadrados, cada um deles de lado $\frac{1}{q}$. A área de cada um desses quadradinhos é $(\frac{1}{q}^2) = \frac{1}{q^2}$. Logo a área de R deverá ser igual a:

$$(pr) \times \frac{1}{q^2} = \frac{pr}{q^2} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{q}$$

Ou seja, a área de $R = a \times b$.

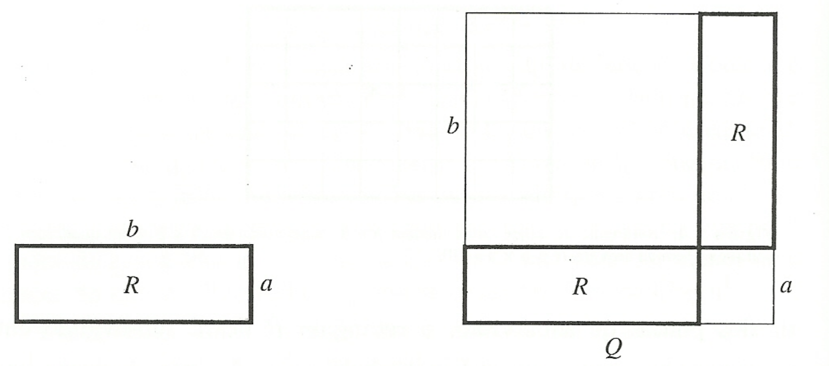
Portanto, se os lados de um retângulo R de medidas dos lados como números racionais a e b, a área fica determinada pela fórmula: Área de $R = a \times b$.

Diz-se então que a área do retângulo é o produto da base pela altura.

Isso é válido não só quando a e b são números racionais, como também com a e b irracionais, ou ainda, um deles racionais e outro irracional.

Mostrar o caso em que a e b não são ambos racionais, poderíamos utilizar o método da exaustão, como usado para área do quadrado. Em vez disso, usaremos um artificio simples e elegante, fazendo recair a área do retângulo na área do quadrado. Procedendo assim, ficamos inclusive dispensado de considerar separadamente o caso em que a base e a altura do retângulo têm medidas racionais.

Figura 16: O quadrado Q contém dois retângulos iguais a R mais um quadrado de lado a e outro de lado b



Fonte: Elon Lages[5]

Dado o retângulo R, de base b e altura a, construímos o quadrado Q, de lados $a + b$, o qual contém 2 cópias de R e mais dois quadrados, um de lado a e outro de lado b. Como sabemos,

$$\text{área de Q} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por outro lado, como os quadrados menores têm áreas iguais a ^{2} e b^2 respectivamente, temos:

$$\text{A área de Q é igual a } (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2xT, \text{ sendo } T = \text{área de R}.$$

Segue que a área de R = $a \times b$.

5.2 Área do paralelogramo e do triângulo

Consideremos a seguinte proposição:

A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.

Vamos provar que a área do paralelogramo $ABCD$ é $b \times a$. Para isto tracemos, a partir dos pontos A e B, dois segmentos, AE e BF, perpendiculares à reta CD. O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \times \overline{BF}$ a qual, é exatamente $b \times a$. Para completarmos a demonstração observe que os triângulos ADE e CBF são congruentes pelo caso LAA_0, e que:

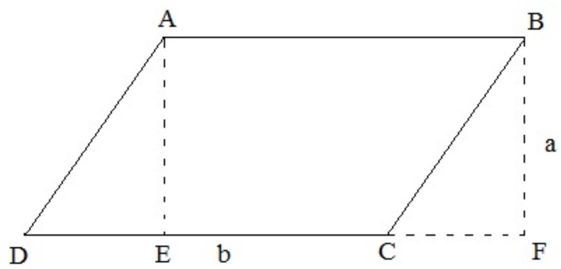
Leia : S como área.

$$S(ABCD) = S(ABCE) + S(ADE)$$

$$S(ABCD) = S(ABCE) + S(CBF)$$

$$S(ABCD) = S(ABFE) = b \times a$$

Figura 17: Área do paralelogramo



Fonte: Elaborada pelo autor

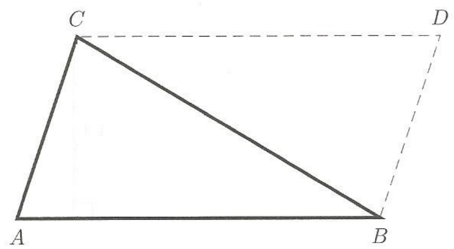
Seja a proposição:

A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.

Dado um triângulo ABC, trace pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB, e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC. Estas duas retas se interceptam em um ponto

D. O polígono $ACDB$ é um paralelogramo, e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes, pelo caso ALA. Como $S(ABDC) = S(ABC) + S(CDB)$ e $S(ABC) = S(CDB)$, então: $S(ABC) = \dfrac{1}{2}S(ABCD)$. Observe ainda que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativo ao lado AB.

Figura 18: Área do triângulo

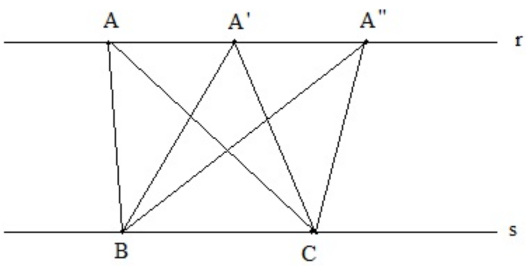


Fonte: Elaborada pelo autor

Num triângulo temos três escolhas para a base b e, portanto, três escolhas para a altura a. Seja qual for a escolha, o produto $b \times a$ será o mesmo, pois, em cada caso ele fornece o dobro da área do triângulo.

Sejam r e s retas paralelas e b um número real positivo. Segue-se da fórmula acima que todos os triângulos ABC com vértice A sobre r, base BC sobre s e $\overline{BC} = b$, têm a mesma área.

Figura 19: Triângulos com mesma base e altura = área iguais



Fonte: Elaborada pelo autor

Para um polígono qualquer, o processo de calcular sua área consiste em subdividi-lo em triângulos, paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular. A área do polígono procurada será a soma das áreas das figuras em que o decompusemos.

Por exemplo, seja $ABDC$ um *trapézio*. Isto significa que AB e CD são paralelos.

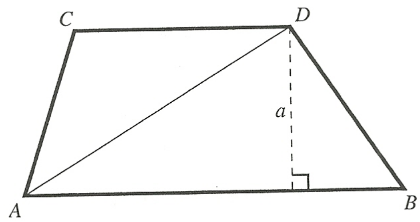
Escrevamos $\overline{AB} = b_1$, $\overline{CD} = b_2$ e chamamos de a a distância entre as paralelas AB e CD, isto é, o comprimento de qualquer perpendicular ligando um ponto da reta AB a um ponto de reta CD.

A diagonal AD decompõe o trapézio nos triângulos ABD e ACD, com bases b_1 e b_2 respectivamente, e mesma altura a. A área do trapézio $ABDC$ é a soma das áreas desses dois triângulos, logo

$$\text{área de ABDC} = \frac{ab_1}{2} + \frac{ab_2}{2} = \frac{b_1 + b_2}{2} \times a.$$

.

Figura 20: Trapézio ABDC



Fonte: Elon Lages[5]

Assim, a área do trapézio é igual à semi soma das bases vezes a altura.

5.3 Definição geral de área

Para que um conceito qualquer de área para polígonos tenha utilidade, *postulamos* que as seguintes propriedades (intuitivamente desejáveis) sejam válidas:

1) Polígonos congruentes têm áreas iguais;

2) Se P é um quadrado com lado unitário, então a área de $P = 1$.

3) Se P pode ser decomposto como uma reunião de n polígonos $P_1, ..., P_n$ tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i.

Apesar de não termos definido formalmente a noção de congruência para polígonos, a idéia é de que um deles pode ser deslocado no espaço, sem deformá-lo, até coincidir com o outro.

Segue de 3) que se o polígono P está contido no polígono Q então a área de P é menor do que a área de Q.

Se observamos bem, notaremos que as fórmulas para as áreas do quadrado, do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio foram todas deduzidas a partir destas três propriedades.

Então, a área de uma figura plana F deve ser um número real não-negativo, que indicaremos com $a(F)$. Ele se aproximará cada vez mais do seu valor real a medida que conhecermos seus valores mais aproximados, por falta ou por excesso.

Os valores de $a(F)$ aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F. Os valores de $a(F)$ aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contêm F. Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos P (contido em F) e P'(contendo F), o número $a(F)$ satisfaz às desigualdades

$$a(P) \leq a(F) \leq a(P')$$

Por simplicidade, em vez de considerarmos polígonos quaisquer, limitaremos nossa atenção aos polígonos retangulares, para os quais é mais fácil calcular a área.

Um *polígono retangular* é a reunião de vários retângulos justapostos (isto é, dois desses retângulos têm em comum no máximo um lado). A área de um polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem.

Ainda para maior simplicidade, limitaremos nossa atenção a polígonos retangulares contidos na figura F cuja área desejamos calcular.

Em outras palavras, consideremos apenas os valores aproximados por falta para o número real a(F).

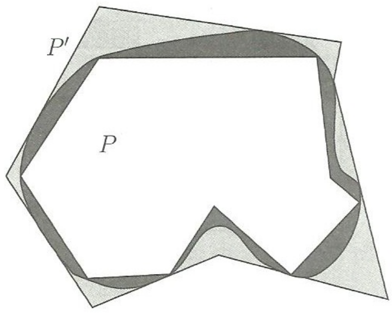
Assim, definiremos a área da figura F como número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F.

Isto significa que, para todo polígono retangular P, contido em F, tem-se

$$a(P) \leq a(F)$$

.

Figura 21: Uma figura plana F (negra), contida num polígono P′ e contendo um polígono P. A área de P é uma aproximação por falta e a área de P′ uma aproximação por excesso, para a área de F.



Fonte: Elon Lages[5]

Além disso, dado qualquer número $b<a(F)$, existe um polígono retangular P, contido em F, tal que

$$b \leq a(P) \leq a(F)$$

.

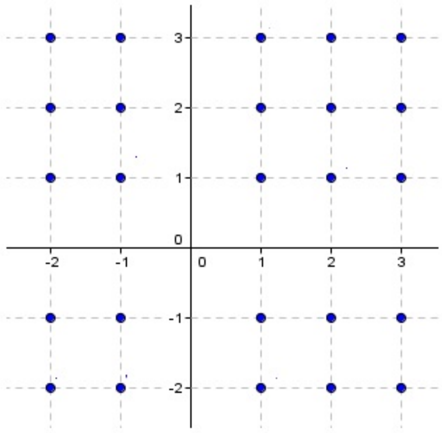
Poderíamos, também, ter definido a área de F como o número real cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos retangulares que contêm F.

5.4 Aplicação de área: Como calcular a área de um Polígono, se você sabe contar

Uma *rede* de um plano é o conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m, n) são números inteiros.

O matemático theco George Alexander Pick publicou, em 1899, uma fórmula simples e bonita para a área de um polígono cujos vértices são pontos da rede. Foi um matemático que nasceu em 1859, em Viena, Áustria. Morreu em 1942, com 83 anos,

Figura 22: Rede



Fonte: Elaborada pelo autor

num campo de concentração, durante a II Guerra Mundial. A sua carreira profissional se deu na Universidade de Praga, embora tenha trabalhado e estado ligado a outras universidades da Europa. Pick ganhou destaque pelo teorema que leva seu nome e que permite calcular a área de polígonos simples desenhados sobre uma rede pela simples contagem dos pontos. A demonstração deste teorema não será meu objeto de estudo, mas, é possível encontrar no livro "Meu professor de Matemática", de Lima, Elon Lages e em trabalhos como o de Liu, Andy C.F. Lattice Points and Pick Theorem, descrito nas referências bibliográficas.

5.5 Fórmula de Pick

A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão

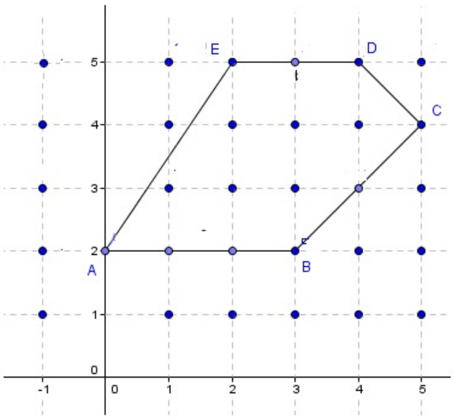
$$I + \frac{B}{2} - 1,$$

onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existente no interior do polígono.

Exemplo 1: Na figura temos um pentágono não regular *ABCDE* cujos vértices são pontos de uma malha. Como se calcula a área desse polígono?

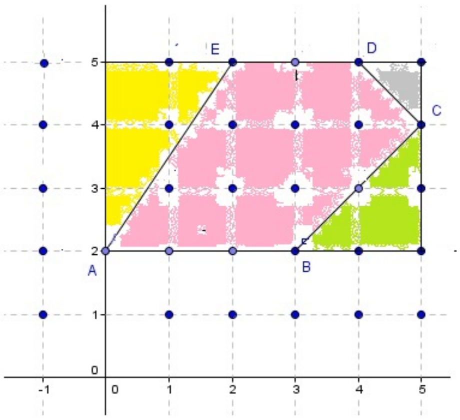
Uma possível solução é completar a figura de modo que ela forme um retângulo, calcula-se sua área e subtrai as áreas dos triângulos que as completaram, dai teremos a área do pentágono.

Figura 23: Cálculo de área



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 24: Completamento do polígono ABCDE



Fonte: Elaborada pelo autor

Note que a área do retângulo = $5 \times 3 = 15$; a área do triângulo amarelo = $\dfrac{3 \times 2}{2} = 3$; a do verde = $\dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ e a do cinza = $\dfrac{1 \times 1}{2} = 0,5$. Logo, as áreas dos 3 triângulos é igual a = $3 + 2 + 0,5 = 5,5$

$$A(ABCDE) = 5 \times 3 - (\frac{3 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} + \frac{1 \times 1}{2}) = 15 - (3 + 2 + 0,5) = 9,5$$

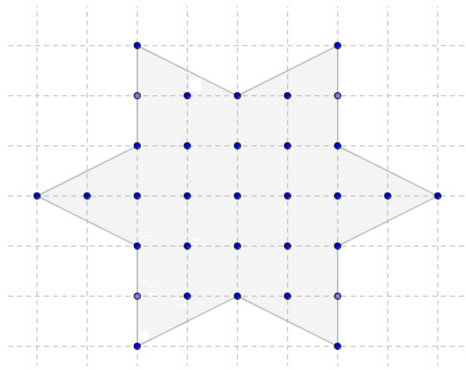
De maneira mais simples, usemos a fórmula de Pick, note que no interior do polígono temos 6 pontos ($I = 6$) e sobre seus lados temos 9 pontos da malha ($B = 9$), portanto,

$$A = I + \frac{B}{2} - 1 = 6 + \frac{9}{2} - 1 = 9,5$$

Exercícios Resolvidos

1) Calcule a área do polígono ″estrela″usando a fórmula de Pick.

Figura 25: Polígono estrela



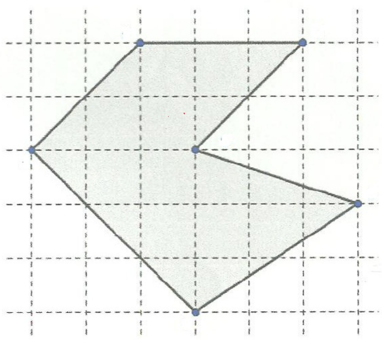
Fonte: Elaborada pelo autor

Solução:

Observem que $B = 16; I = 17$, portanto: $A = 17 + \frac{16}{2} - 1 = 24u$

2) Vamos calcular a área do polígono não regular da figura 4.14:

Figura 26: Hexágono



Fonte: Elaborada pelo autor

Como $B = 12; I = 10$, portanto: $A = 10 + \frac{12}{2} - 1 = 15u$.

6 OBMEP NA ESCOLA

Neste capítulo faremos uma apresentação sucinta da avaliação externa à escola, que tem acontecido anualmente desde 2005, e que talvez seja a mais desfiadora avaliação de matemática que os alunos do ensino fundamental e médio participam durante o ano, além de poder proporcionar a nossos alunos(as) e por que não a nossos professores(as) a voos mais altos em sua vida. Mostraremos também, questões e suas resoluções das OBMEPs em sua primeira fase em todos os seus níveis.

6.1 Breve Histórico

Em 1894, acontece a primeira olimpíada matemática, na Hungria.

Em 1959, foi criada a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Hoje a competição reúne alunos de mais de 100 países.

Em 1977, acontece a primeira Olimpíada Matemática no país, em São Paulo, organizada pela Academia Paulista de Ciências.

Em 1979, surge a Olimpíada Brasileira de Matemática (0BM), organizada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Em 2001, o Brasil figura entre os 20 melhores colocados da (IMO), a frente de países como Canadá, França e Inglaterra.

Em 2005, é realizada a primeira edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com mais de 10 milhões de participantes.

Em 2009, recorde: mais de 19,5 milhões de alunos se inscreveram para a edição em 5.518 municípios brasileiros.

Em 2011, Dos seis (6) alunos selecionados para representar o Brasil na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), três (3) são de escolas públicas participantes da OBMEP. Esses alunos receberam duas medalhas de prata e uma de bronze.

Em 2014, foi realizada a décima edição da OBMEP.

6.2 Sobre a OBMEP

A Olimpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas(OBMEP) é uma realização do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA - e tem como objetivo estimular o estudo da matemática e revelar talentos na área.

Atualmente, a OBMEP desenvolve sete programas e/ou projetos,a saber:

1 - Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) - Destinado aos alunos medalhistas da OBMEP, o PIC é realizado por meio de uma rede nacional de professores em polos espalhados pelo país, e também no fórum virtual. Tem como objetivo despertar nos alunos o gosto pela matemática e pela ciência em geral e motivá-los na escolha profissional pelas carreiras científica e tecnológicas. Ao longo de suas edições, a OBMEP já ofereceu a mais de 36 mil alunos a oportunidade de estudar matemática por 1 ano, com bolsa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e mais de 1800 alunos participam do programa como ouvinte.

Página: PIC - www.obmep.org.br/pic.html.

2 - Portal da Matemática - Aplicativo e videoaulas que cobre todo currículo da matemática do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio. Possui cerca de 500 vídeos já preparados.

No Banco de Questões e provas antigas - Cada volume apresenta uma seleção de problemas similares aos problemas das provas divididos por níveis e assuntos.

Página: http://matemática.obmep.org.br

3 - Portal Clube da Matemática - Encontre toda semana um desafio no blog. Crie com seus amigos um clube da matemática.

4 - POTI - Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo - O programa é destinado aos interessados em se preparar para as provas da OBMEP e da OBM que esteja matriculados na oitava ou nono ano do ensino fundamental ou em qualquer série do médio.

Página: http://poti.impa.br

5 - PICME - Programa de Iniciação científica e mestrado - É um programa que oferece aos estudantes universitários que se destacaram nas OBMEP e OBM a oportunidade de realizar estudos avançados em matemática simultaneamente com sua graduação. Os participantes recebem bolsas por meio de parceria com o CNPq e a CAPES (mestrado). Mais de 2000 alunos ja foram beneficiados.

Página: http://www.obmep.org.br/picme.html.

6 - Programa OBMEP na escola - Voltado para o professor de matemática das escolas públicas, o programa quer estimular atividades extraclasse com o uso dos materiais da OBMEP, tais como prova e banco de questões. Professores de todo o país são habilitados e preparados para desenvolver essa atividade em sua escola ou em escolas vizinhas. O programa conta com o apoio da CAPES.

Página: http://www.obmep.org.br/OBMEP_na_escola.html.

7 - O PECI - Preparação Especial para Competições Internacionais - É um programa da OBMEP destinado a preparar um grupo seleto de medalhistas da OBMEP para competições internacionais, foi criado em 2009. As atividades são virtuais, no fórum do PECI e presenciais.

6.3 Questões das OBMEPs - (2005-2014)

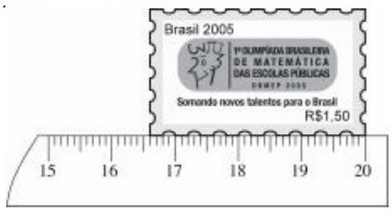
Veremos algumas questões sobre comprimentos de segmentos e áreas que caíram nas OBMEPs anteriores, para que possamos ver que esses assuntos são cobrados e de que maneira eles são cobrados nessas avaliações externas:

Figura 27: OBMEP

OBMEP 2005

2. Guilherme está medindo o comprimento de um selo com um pedaço de uma régua, graduada em centímetros, como mostra a figura. Qual é o comprimento do selo?

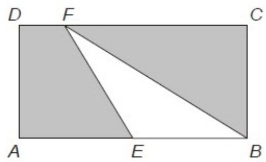
(A) 3 cm
(B) 3,4 cm
(C) 3,6 cm
(D) 4 cm
(E) 4,4 cm



OBMEP 2006

4. No retângulo da figura temos $AB = 6$ cm e $BC = 4$ cm. O ponto E é o ponto médio do lado AB. Qual é a área da parte sombreada?

(A) 12 cm^2
(B) 15 cm^2
(C) 18 cm^2
(D) 20 cm^2
(E) 24 cm^2

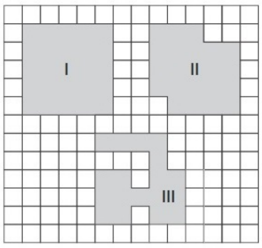


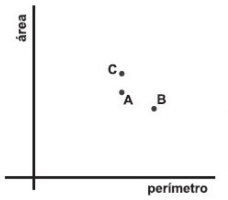
Fonte: Provas da OBMEP

Figura 28: OBMEP

OBMEP 2007

15. A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um desses polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.



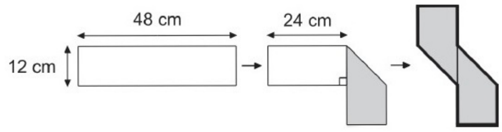


Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

A) I ⟶C, II⟶B, III⟶A
B) I ⟶B, II⟶A, III⟶C
C) I ⟶A, II⟶C, III⟶B
D) I ⟶A, II⟶B, III⟶C
E) I ⟶C, II⟶A, III⟶B

OBMEP 2008

4. Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e cinza do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?

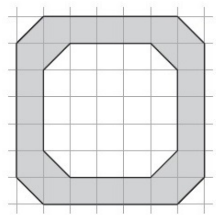


(A) 216 cm²
(B) 264 cm²
(C) 348 cm²
(D) 432 cm²
(E) 576 cm²

OBMEP 2009

2. O quadriculado da figura é feito com quadradinhos de 1 cm de lado. Qual é a área da região sombreada?

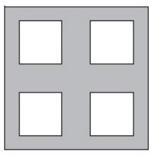
A) 16 cm²
B) 18 cm²
C) 20 cm²
D) 24 cm²
E) 30 cm²



OBMEP 2010

14. A figura mostra quatro quadrados iguais dentro de um quadrado maior. A área em cinza é 128 cm² e a área de cada quadrado menor é igual a 9% da área do quadrado maior. Qual é a área do quadrado maior?

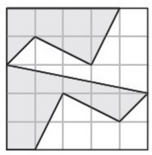
A) 128 cm²
B) 162 cm²
C) 200 cm²
D) 210 cm²
E) 240 cm²



OBMEP 2011

11. Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1 cm. Qual é a área da região cinza?

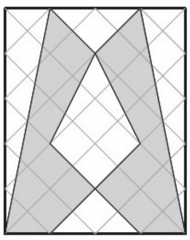
A) 10 cm²
B) 12,5 cm²
C) 14,5 cm²
D) 16 cm²
E) 18 cm²



OBMEP 2012

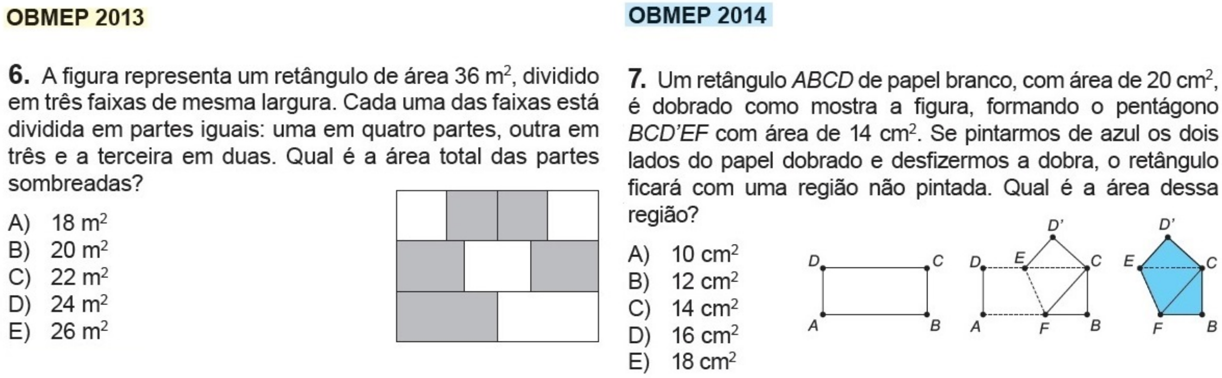
12. O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região cinzenta?

A) 10 cm²
B) 11 cm²
C) 12,5 cm²
D) 13 cm²
E) 14,5 cm²



Fonte: Provas da OBMEP

Figura 29: OBMEP


OBMEP 2013

6. A figura representa um retângulo de área 36 m², dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?

A) 18 m²
B) 20 m²
C) 22 m²
D) 24 m²
E) 26 m²

OBMEP 2014

7. Um retângulo *ABCD* de papel branco, com área de 20 cm², é dobrado como mostra a figura, formando o pentágono *BCD'EF* com área de 14 cm². Se pintarmos de azul os dois lados do papel dobrado e desfizermos a dobra, o retângulo ficará com uma região não pintada. Qual é a área dessa região?

A) 10 cm²
B) 12 cm²
C) 14 cm²
D) 16 cm²
E) 18 cm²

Fonte: Provas da OBMEP

6.4 Resolução das questões - (2005-2014)

(OBMEP 2005 - NIVEL 1 e 2) Pela leitura da figura, as extremidades dos selos estão na marca 20 cm e 16,6 cm. O comprimento do selo é $20 - 16,6 = 3,4$. Alternativa B.

(OBMEP 2006 - NIVEL 1 e 2) A área do triângulo BEF é $\frac{EBxBC}{2}$, onde EB = base e BC = altura, ou seja, $\frac{3x4}{2} = 6cm^2$ e a área do retângulo ABCD é AB x CD = $6x4 = 24cm^2$. Logo, a área da parte sombreada é a área do retângulo ABCD - área do triângulo BEF = $24 - 6 = 18cm^2$. Alternativa C.

(OBMEP 2007 - NIVEL 2 e 3) Tomando o lado l de um dos lados dos quadradinhos do quadriculado como unidade de comprimento, a contagem direta na figura nos dá o perímetro e áreas das figuras da seguinte forma: Perímetro I - 20; Perímetro II - 20 e Perímetro III - 30. Área I - 25; Área II - 22 e Área III - 18. Então a correspondência é $I(20,25)$, $II(20,22)$ e $III(30,18)$. Os pontos correspondes a I e II tem a mesma abscissa (perímetro) logo estão na mesma vertical no plano cartesiano; como o ponto correspondente a I tem ordenada (área) maior, ele é o que está mais acima. Logo, I - C; II - A e III - B. Alternativa E.

Note que aqui podemos aplicar a fórmula de Pick, para figura I, temos B = 20, I = 16, então $\frac{20}{2} + 16 - 1 = 25$, para figura II, temos B = 20, I = 13, então $\frac{20}{2} + 13 - 1 = 22$ e para figura III, temos B = 30, I = 4, então $\frac{30}{2} + 4 - 1 = 22$.

(OBMEP 2008 - NIVEL 1 e 2) Na figura dada a parte cinza obtida depois da primeira dobradura pode ser dividida em duas partes: um quadrado de lado 12 cm e um triângulo de área igual a metade da área do quadrado. A área do quadrado é $12x12 = 144cm^2$, logo a área do triângulo é $\frac{1}{2}x144 = 72cm^2$. Assim, a área dessa parte cinza é $144 + 72 = 216cm^2$. Depois da segunda dobradura, obtemos dus dobraduras iguais, cuja área total é $2x216 = 432cm^2$. Alternativa D.

(OBMEP 2009 - NIVEL 1) A figura pode ser decomposto em 20 quadradinhos e 8 triângulos, de acordo com o quadriculado. Juntando dois desses pequenos triângulos formamos um quadradinho. Temos assim um total de $20+\frac{8}{2} = 20+4 = 24$ quadradinhos. Alternativa D.

Aqui também podemos aplicar a fórmula de Pick, para polígono maior, temos B = 28, I = 36, então $\frac{28}{2} + 36 - 1 = 49$, e para polígono menor, temos B = 20, I = 16, então $\frac{20}{2} + 16 - 1 = 25$. Portanto a área hachurada é $49 - 25 = 24$.

(OBMEP 2010 - NIVEL 2) A área de cada quadrado menor é 9% da área do quadrado maior, como são 4 quadrados menores, temos $4x9 = 36\%$. A área da região cinza corresponde a $100\% - 36\% = 64\%$ correspondente a $128cm^2$, o que equivale a $1\% = 2cm^2$. Portanto, a área do quadrado maior é $100x2 = 200cm^2$. Alternativa C.

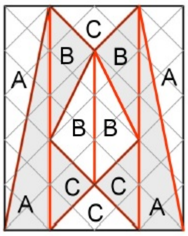
(OBMEP 2011 - NIVEL 2) Podemos calcular a área da região cinza por partes, dividindo-a em regiões triangulares e retângulares. Portanto a área é igual a $0,5 + 0,5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2,5 + 3 = 12,5$. Alternativa B.

(OBMEP 2012 - NIVEL 1 e 2) Basta dividir a figura em regiões A, B e C, como mostra a figura abaixo. Regiões com a mesma letra são idênticas e tanto a parte branca quanto a parte cinza consistem de duas regiões A, duas regiões B e duas regiões C, segue que a área da região branca é igual a área da região cinza. Cada uma dessas áreas é então a metade da área total do retângulo, que é $4x5 = 20cm^2$. Logo a área da parte cinza é $10cm^2$. Alternativa A.

.

(OBMEP 2013 - NIVEL 1) As faixas são retângulos iguais, portanto, eles tem a mesma área que é $\frac{36}{3} = 12m^2$. Segue que: - Na faixa inferior, a área de cada parte é $\frac{12}{2} = 6m^2$; essa é a área da parte cinza; - Na faixa do meio, a área de cada parte é $\frac{12}{3} = 4m^2$; as duas partes cinzas tem área igual a $2x4 = 8m^2$; - Na faixa de cima, a área de cada parte

Figura 30: obmep



Fonte: Provas da OBMEP

é $\frac{12}{4} = 3m^2$; as três partes cinzas tem área igual a $2x3 = 6m^2$. A área total da região colorida de cinza é, portanto, $6 + 8 + 6 = 20m^2$. Alternativa B.

(OBMEP 2014 - NIVEL 3) Quando pintamos o papel em forma de pentágono dos dois lados, a área total pintada será de $28cm^2$. Esta área pintada inclui a área de um dos lados do retângulo original, que ficará totalmente azul, e a área pintada do outro lado. Se da área total de $40cm^2$, correspondente aos dois lados do retângulo, retirarmos a área pintada de $28cm^2$, teremos $12cm^2$ de área não pintada. Alternativa B.

7 CONCLUSÃO

Com o trabalho, esperamos ter provocado uma pequena reflexão sobre o quão é importante sabermos trabalhar bem os temas comprimento e áreas no ensino fundamental e médio, base para as geometrias plana, espacial e analítica.

Em comprimento nos deparamos com os conceitos de comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos de reta com a unidade de medida o que nos levou a discussão sobre à racionalidade e irracionalidade dos números, trabalhando assim o conjunto R, base no ensino fundamental e médio. Uma fórmula prática, bonita e interessante (Fórmula de Pick) foi apresentado como mais uma ferramenta para o cálculo de áreas de figuras planas.

Trago um recado aos professores que como eu atuam no ensino fundamental e médio a montarem projetos que incentivem seus alunos a participarem bem das OBMEPs, acabando com o que acontece ainda em muitas escolas, a participação com apatia quase que total por partes de professores e alunos. A OBMEP através de sua página na internet oferece muitos recursos (como programas e projetos) a professores e alunos, ofertando bolsas de estudos e premiações aos mesmos. Trabalhar as questões da OBMEP nos mais variados níveis de dificuldade com certeza é uma ferramenta poderosa que garantirão melhoras nos resultados da educação.

REFERÊNCIAS

[1]AVILA, Geraldo Severo de. **Análise matemática para Licenciatura,** 2 ed. São Paulo: Blucher, 2005.

[2]BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana,** Rio de Janeiro: SBM, 1997.

[3]BOYER, Carl Boyer. **História da matemática,** 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[4]GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo,** 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[5]LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos,** 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009 (Projeto Euclides).

[6]LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria,** 4 ed. Rio de Janeiro: SBM 2006.

[7]LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias,** 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8]LIU, Andy C. F. Lattice **Points and Pick's Theorem,** Mathematcs Magazine 52 (1979) 232-235.

[9]NETO, Antônio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana,** 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10]OBMEP. **Sobre a OBMEP**. Disponível em: < www.obmep.org.br/>. Acesso: Meses de fevereiro e março.

[11]STEWART, James. **Cálculo,** 2 ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2010.