



RICARDO DE ALMEIDA MORI

GRAFOS: PLANARIDADE E PROJETO DE ENSINO.

Santo André, 2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

RICARDO DE ALMEIDA MORI

GRAFOS: PLANARIDADE E PROJETO DE ENSINO.

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO RICARDO DE ALMEIDA MORI,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. RAFAEL DE MATTOS GRISI.

SANTO ANDRÉ, 2015

Dedicado a Preto, meu filho querido, que fez a
passagem antes deste trabalho ficar pronto.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente ao meu orientador professor Rafael Grisi, pelo empenho dedicado na elaboração deste trabalho, pelo incentivo e correções.

A todo o corpo docente da UFABC que além de ensinar me ajudaram a redescobrir como é ser aluno.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A minha esposa Íris, sempre ao meu lado, iluminando meus pensamentos.

Ao meu "Pai de Grafos", Carlos Shine que me iniciou no mundo dos grafos.

Ao meu grande amigo Heratóstenes Chapar pela consultoria sobre como desenhar esferas e toros.

Ao Colégio Etapa pelo investimento, apoio e compreensão.

Aos grandes amigos Leandro, Marcelo e Oertes, companheiros de estudo sem os quais esta jornada seria muito mais longa.

“ A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.”

(Renné Descartes)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução ao estudo da Teoria dos Grafos, com um dicionário visual e um histórico detalhado das origens deste ramo da matemática.

Será dada uma ênfase especial ao estudo de grafos planares e na imersão de grafos em outras superfícies.

Por fim, é apresentado um plano de aula para o professor interessado em introduzir o ensino de grafos a alunos do ensino fundamental e médio.

Palavras-chave: Grafos, Planaridade, Ensino.

ABSTRACT

This paper presents an introduction to the study of Graph Theory, with a visual dictionary and a detailed history of the origins of this branch of mathematics.

It will be given a special emphasis on the study of planar graphs and also in immersion graphs in other surfaces.

Finally, we present a lesson plan for teacher interested in introducing the teaching of graphs to students of primary and secondary education.

Keywords: Graphs, Planarity, Teaching.

CONTEÚDO

Introdução	1
1 DEFINIÇÕES E DICIONÁRIO VISUAL	3
1.1 Definição de grafo	3
1.2 Principais termos utilizados em grafos	5
2 HISTÓRICO	19
2.1 A cidade	19
2.1.1 O rio e as ilhas	24
2.1.2 As pontes	26
2.1.3 As pontes de Kaliningrado atualmente	28
2.2 O matemático	28
2.3 Euler e a teoria dos grafos	30
2.4 Outros colaboradores	31
2.5 Um passeio atual pelas pontes de Kaliningrado	34
3 PLANARIDADE	43
3.1 Noções preliminares	43
3.2 Determinando planaridade	47
3.3 Redução de grafos	60
4 GÊNERO DE UM GRAFO	63
4.1 Introdução	63
4.2 Gênero	69
4.2.1 Resultados sobre gênero	70
4.3 A Fórmula de Euler para imersões	75
5 PLANOS DE AULA	83
5.1 Aula 1 - O que é um grafo	85
5.2 Aula 2 - Grau de um vértice	96
5.3 Aula 3 - Isomorfismo	101
5.4 Aulas 4, 5 e 6 - Exercícios	110

Conteúdo

5.5	Aula 7 - Grafos Eulerianos	113
5.6	Aula 8 - Eulerização de grafos	122
5.7	Aula 9 - Grafos planares - parte 1	131
5.8	Aula 10 - Grafos planares - parte 2	139
A	GABARITOS	145
B	PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA	157
B.1	As coordenadas da projeção estereográfica	158
B.2	φ é uma função injetora	160
B.3	φ é uma função sobrejetora	162
B.4	φ é invertível	164
	Bibliografia	167

INTRODUÇÃO

Um dos motores criativos de nossa civilização é a necessidade constante de superar desafios, sejam eles de qualquer natureza.

Não importa se movido pela curiosidade, sede de conhecimento ou mesmo vaidade, é muito raro um ser humano permanecer indiferente a uma oportunidade de resolver um quebra-cabeça.

A matemática sempre proporcionou para a humanidade uma inesgotável fonte de desafios aparentemente ingênuos, mas que muitas vezes escondem sofisticadas estruturas, esperando apenas o momento e a pessoa certa para ser decodificada.

A Teoria dos Grafos nasceu de um desses problemas aparentemente ingênuos, quando em 1736 o matemático suíço Leonhard Euler publicou um artigo contendo a solução para o problema das sete pontes de Königsberg.

Ao longo destes quase 300 anos de existência, a Teoria dos Grafos evoluiu de tal forma em aplicações e complexidade que ousar dizer que impressionaria o próprio Euler.

Entretanto, apesar de possuir problemas de fácil compreensão e soluções motivadoras, a Teoria dos Grafos está longe de ser uma realidade nas salas de aula.

Este trabalho tem a pretensão de acolher professores e alunos em seu primeiro contato com Teoria dos Grafos, e para facilitar esta aproximação o Capítulo 1 contém um dicionário visual referente aos principais termos utilizados na área. Obviamente o dicionário não abrange todo o vocabulário da área, mas cobre o que necessitamos e vai um pouco além do que é estudado neste trabalho, para que possa servir de apoio aos leitores com interesse em se aprofundar no assunto. Este capítulo pode ser lido como material inicial de estudo ou como referência para os demais capítulos.

O Capítulo 2 possui um breve histórico sobre Teoria dos Grafos, que é praticamente um tópico obrigatório em qualquer trabalho sobre grafos, dadas as curiosas condições em que ela foi descoberta.

O Capítulo 3 estuda com mais detalhes o tema planaridade, onde o leitor chegará a conclusão de que, no plano, existem apenas dois grafos “responsáveis” pela planaridade ou não de grafo: o K_5 e o $K_{3,3}$.

Dizer que um grafo não pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem não o condena a uma eterna “não planaridade”. O Capítulo 4 expande a noção de planaridade, estudando as relações entre a “planaridade” de um grafo e a superfície onde ele é desenhado. Para tanto, é incluída a ideia de gênero na fórmula de Euler.

O Capítulo 5 possui um completo plano de aula para o professor interessado em ensinar grafos no ensino médio ou mesmo no ensino fundamental. Os temas abordados e suas demonstrações foram escolhidos de modo que um aluno do ensino fundamental possa acompanhar as aulas sem a necessidade de pré-requisitos.

Como efeito colateral desta escolha, alguns temas foram excluídos deste trabalho, como por exemplo qualquer tópico que necessite de matriz, que não é um tema abordado no ensino fundamental. Demonstrações que necessitam de indução foram feitas também de uma forma alternativa para que o professor possa usar em sala de aula.

As aulas foram dimensionadas para um bimestre, uma aula por semana.

A escolha bimestral não foi aleatória. Estas aulas foram testadas em duas oportunidades. Primeiro de uma forma semestral, que se mostrou ao seu término muito cansativa para os alunos e depois, mais compacta, em apenas um bimestre, que será apresentada aqui com algumas modificações.

O plano de aula contém além de teoria, exercícios resolvidos para serem propostos em sala de aula e também como tarefa, e um guia de orientação didático com dicas de como enriquecer e trabalhar a aula.

DEFINIÇÕES E DICIONÁRIO VISUAL

Para o leitor não familiarizado com a linguagem utilizada em grafos e principalmente para aqueles que pretendem utilizar este trabalho (ou parte dele) em sala de aula, serão enunciadas a seguir algumas definições (na forma de dicionário visual) que servirão de base para os próximos capítulos.

Por se tratar de um manual de referência foram acrescentadas definições que não serão utilizadas neste trabalho, porém o deixam mais completo.

Vale a pena lembrar também, que alguns autores divergem na hora de batizar alguns conceitos em grafos. Sempre que isso aconteceu, foi utilizado o nome mais frequente entre as fontes pesquisadas.

Definições adicionais podem ser encontradas em [9], [2], [5] e [11].

1.1 DEFINIÇÃO DE GRAFO

Um grafo $\mathcal{G} (V; A)$ é uma estrutura matemática formada por dois conjuntos:

- Um conjunto não nulo $V = \{V_1; V_2; \dots; V_n\}$, onde seus elementos são chamados de *vértices* ou *nodos*.
- Um conjunto¹ A , que será chamado de conjunto das *arestas*, formado por pares (não necessariamente distintos ou ordenados) de elementos de V .

Vértices são geralmente representados por pontos e arestas costumam ser representadas por segmentos de reta unindo dois vértices.

¹ Para ser rigorosamente correto, o certo seria dizer um multiconjunto ao invés de simplesmente conjunto. Um multiconjunto é a generalização de um conjunto, de tal forma que permite a repetição de elementos.

Mas apresentar grafos desta forma para um aluno de ensino fundamental pode ser pouco eficaz. Para facilitar a apresentação a maneira mais usual é introduzir grafos a partir de representações gráficas, usando pontos e retas. Simplificando muito o conceito de grafo para que um aluno do ensino fundamental possa compreender o seu significado, um desenho feito com pontos e retas é uma definição inicial bem aceitável, porém não totalmente correta, sendo apenas uma das possíveis representações gráficas de um grafo.

Uma representação gráfica de um grafo é também chamada de *diagrama*.

Na Figura 1, temos um diagrama representando o grafo \mathcal{G} , onde $V = \{V_1; V_2; V_3; V_4; V_5; V_6\}$ e $A = \{\{V_1; V_2\}; \{V_1; V_4\}; \{V_1; V_6\}; \{V_2; V_3\}; \{V_2; V_4\}; \{V_3; V_4\}; \{V_4; V_5\}; \{V_4; V_6\}; \{V_5; V_6\}\}$.

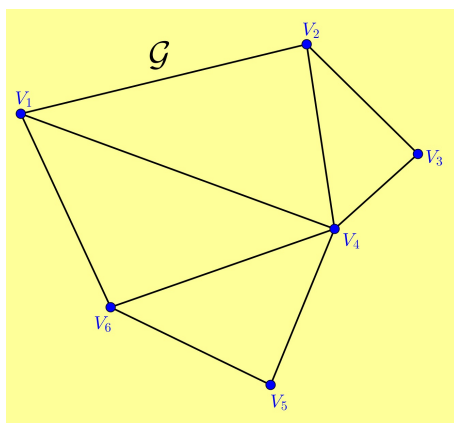


Figura 1: Os pontos da figura são os vértices do grafo \mathcal{G} e os segmentos de reta suas arestas.

Note que existe um número ilimitado de diagramas para representar o mesmo grafo, mas o que realmente importa é quais vértices estão ligados e não como são feitas estas ligações. Isso fica claro na Figura 2, onde um mesmo grafo é representado por três diagramas distintos.

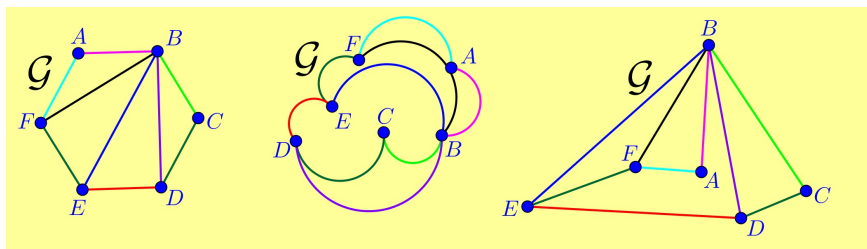


Figura 2: Três diagramas que representam o mesmo grafo \mathcal{G} .

1.2 PRINCIPAIS TERMOS UTILIZADOS EM GRAFOS

Aresta incidente:

Se uma aresta está ligada a um vértice, a aresta é dita incidente a este vértice.

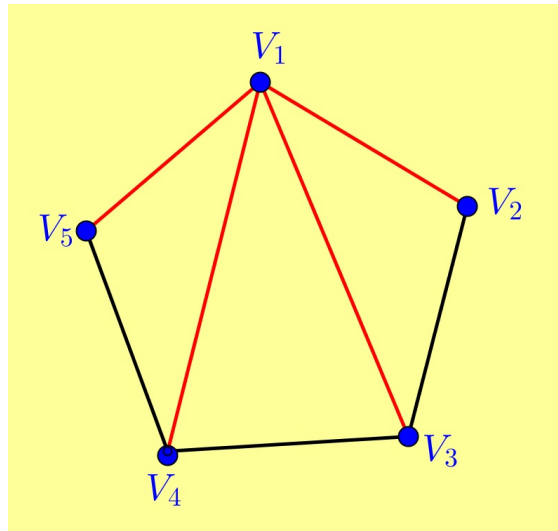


Figura 3: As arestas $\{V_1; V_2\}$, $\{V_1; V_3\}$, $\{V_1; V_4\}$ e $\{V_1; V_5\}$ são incidentes ao vértice V_1 .

Vértices adjacentes:

São vértices ligados por uma mesma aresta.

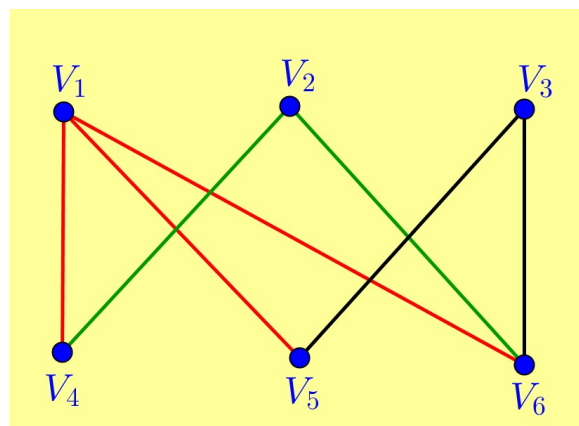


Figura 4: O vértice V_1 é adjacente aos vértices V_4 , V_5 e V_6 e o vértice V_2 é adjacente aos vértices V_4 e V_6 .

Grau de um vértice:

É o número de arestas incidentes ao vértice.

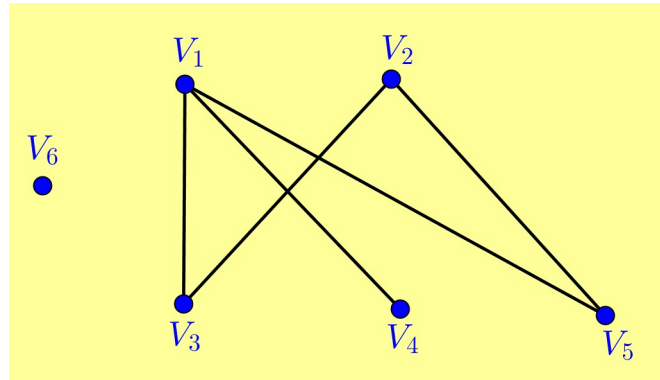


Figura 5: O grau de V_1 é igual a 3, o grau de V_2 é igual a 2 e o grau de V_6 vale zero.

Laço:

É uma aresta que liga um vértice a ele próprio. Ao contar o grau de um vértice, o laço deve ser contado duas vezes.

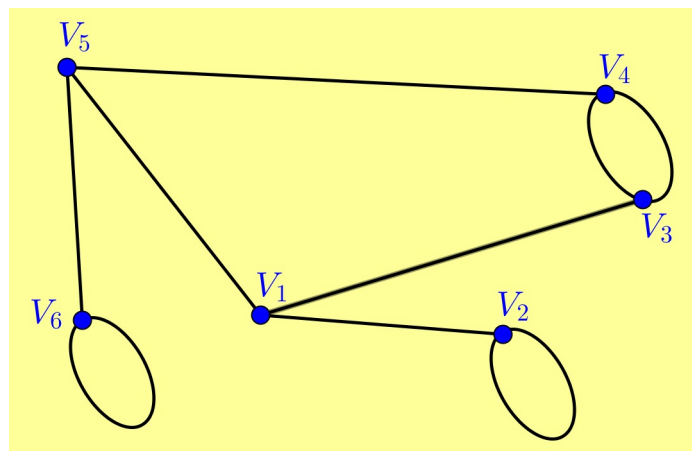


Figura 6: Existe um laço em V_2 e outro em V_6 . Entretanto V_4 e V_3 não formam laços. O grau de V_2 e V_6 é 3, pois o laço conta duas vezes.

Arestas paralelas:

São arestas associadas ao mesmo conjunto de vértices. Um grafo que possui arestas paralelas é chamado de multigrafo.

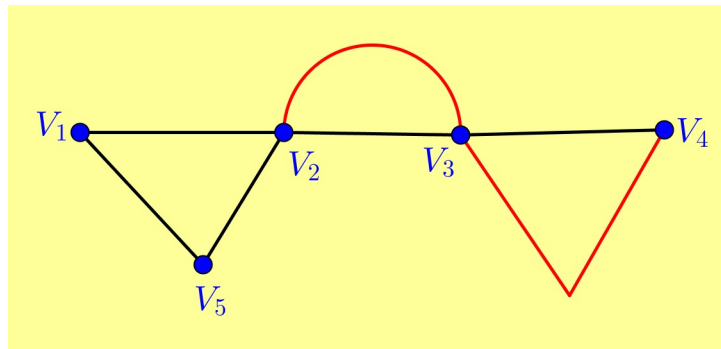


Figura 7: $\{V_2; V_3\}$ e $\{V_3; V_4\}$ são exemplos de arestas paralelas.

Grafo simples:

É o grafo que não possui laços nem arestas paralelas.

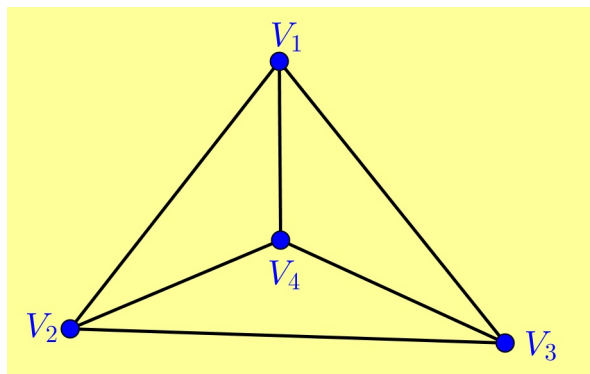


Figura 8: Exemplo de grafo simples.

Cadeia:

É uma sequência de arestas adjacentes que ligam dois vértices.

Uma cadeia é chamada de *elementar* se não passa duas vezes pelo mesmo vértice, e é chamada de *simples* se não passa duas vezes pela mesma aresta.

Uma cadeia é dita fechada se a sequência começar e terminar no mesmo vértice (caso contrário ela é dita aberta).

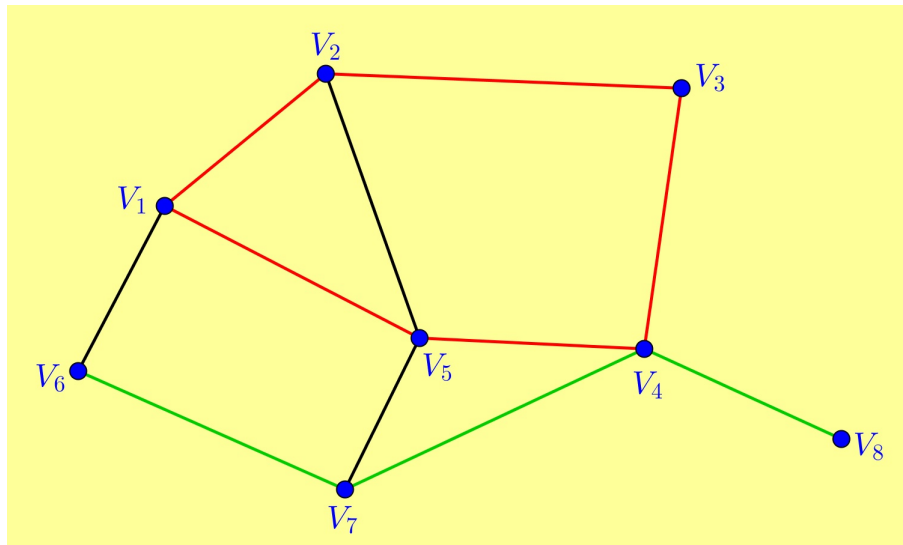


Figura 9: A sequência $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_1$ e a sequência V_6, V_7, V_4, V_8 são exemplos de cadeias.

Ciclo:

É uma cadeia simples e fechada.

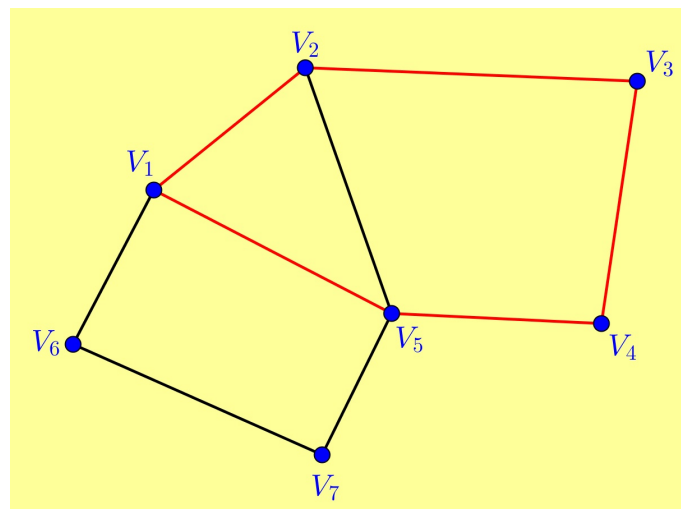


Figura 10: A sequência $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_1$ é um ciclo.

Observação. Por questão de conveniência, não vamos considerar um único ponto como um ciclo.

Grafo conexo:

É aquele onde há pelo menos uma cadeia ligando cada par de vértices do grafo. Informalmente um grafo é conexo (ou conectado) se é possível caminhar de qualquer vértice para qualquer outro vértice através de uma sequência de arestas adjacentes.

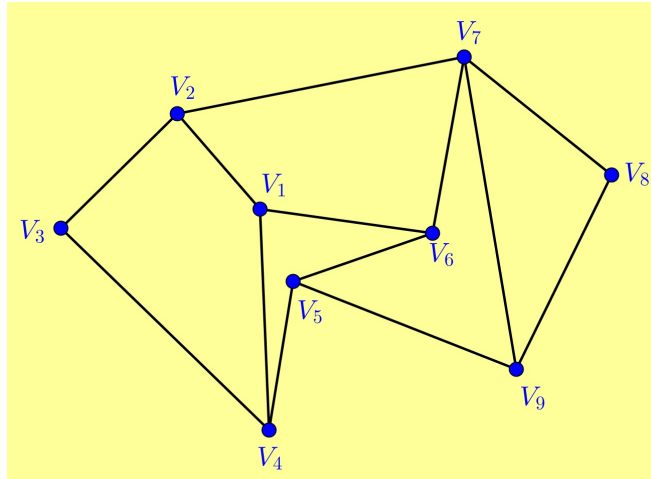


Figura 11: Exemplo de grafo conexo.

Grafo desconexo:

É aquele onde há pelo menos um par de vértices que não está ligado por nenhuma cadeia.

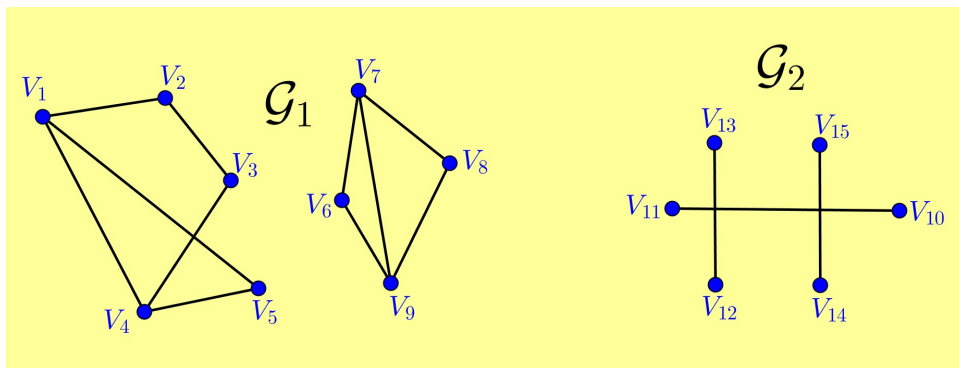


Figura 12: Exemplos de grafos desconexos.

Dígrafo:

É o grafo onde as arestas são orientadas. Em um dígrafo as conexões entre os vértices são chamadas de arcos. Em geral utilizamos setas para mostrar a orientação das arestas.

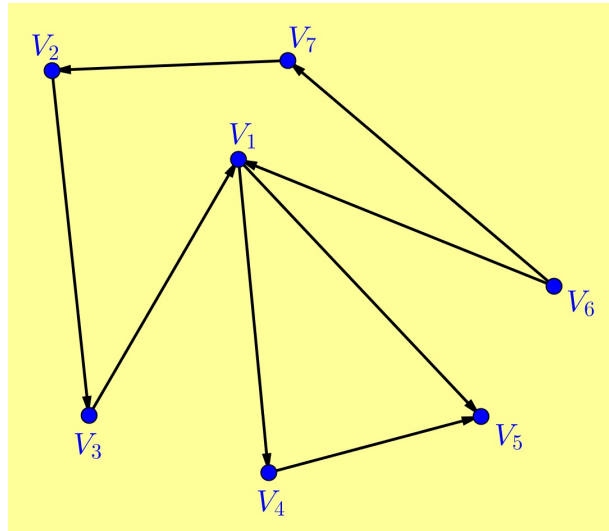


Figura 13: Exemplo de dígrafo.

Caminho:

É uma cadeia onde todas as arestas (arcos) possuem a mesma orientação. Aplica-se, portanto, somente a grafos orientados.

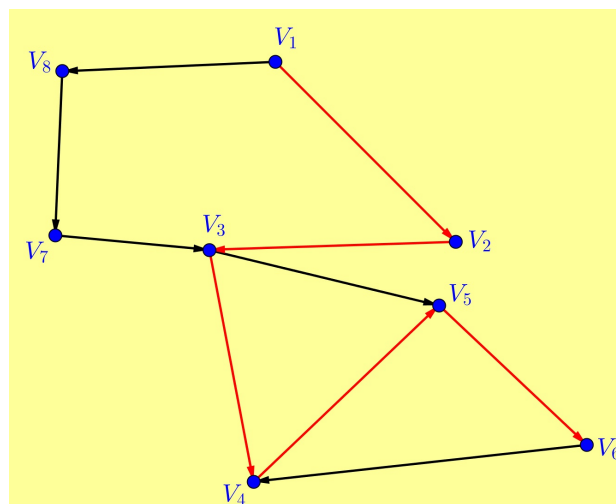


Figura 14: $\{(V_1; V_2); (V_2; V_3); (V_3; V_4); (V_4; V_5); (V_5; V_6)\}$ é um caminho.

Circuito:

É um caminho simples e fechado.

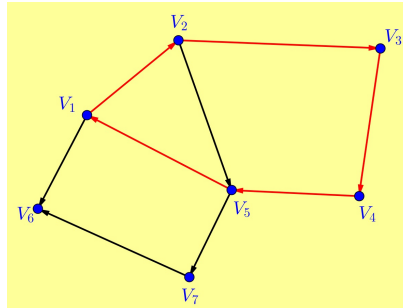


Figura 15: $\{(V_1; V_2), (V_2; V_3), (V_3; V_4), (V_4; V_5), (V_5; V_1)\}$ é um circuito.

Ponte:

Uma aresta é chamada de ponte quando sua remoção provoca uma redução na conectividade do grafo.

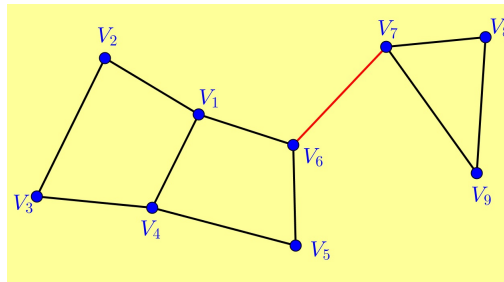


Figura 16: A aresta $\{V_6; V_7\}$ é uma ponte.

Vértice de corte:

Também conhecido como ponto de corte ou ponto de articulação. É o vértice cuja remoção (juntamente com as arestas a ele conectadas) torna o grafo desconexo.

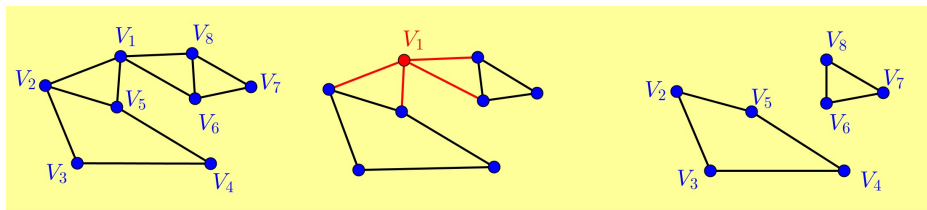


Figura 17: Na sequência, o vértice V_1 é um vértice de corte.

Árvore:

É um grafo conexo e sem ciclos.

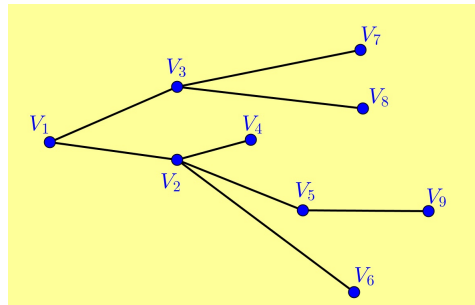


Figura 18: Exemplo de árvore.

Arborescência:

É uma árvore orientada.

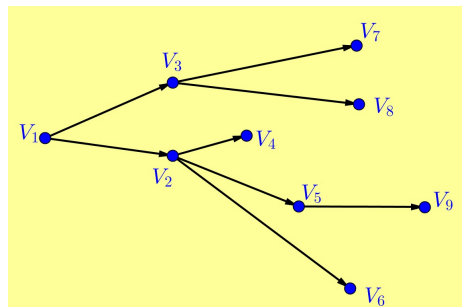


Figura 19: Exemplo de arborescência.

Floresta:

É um grafo onde as componentes conexas são árvores.

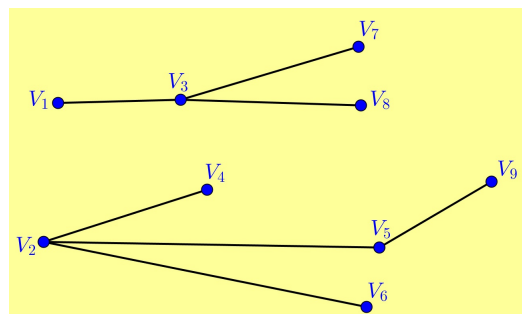


Figura 20: Exemplo de floresta.

Isomorfismo:

Dois grafos são isomorfos quando preservam as adjacências entre vértices. Em outras palavras os grafos são de fato idênticos, mas estão desenhados de maneiras diferentes.

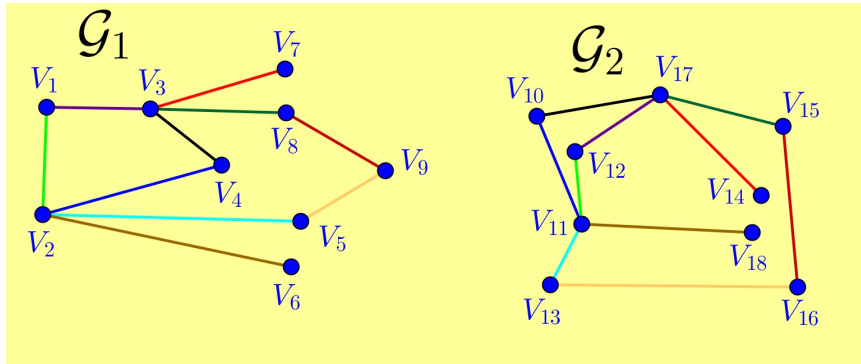


Figura 21: \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são grafos isomorfos.

Observe a correspondência entre vértices e arestas para os grafos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 .

Tabela 1: Vértices

\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2
V_1	V_{12}
V_2	V_{11}
V_3	V_{17}
V_4	V_{10}
V_5	V_{13}
V_6	V_{18}
V_7	V_{14}
V_8	V_{15}
V_9	V_{16}

Tabela 2: Arestas

\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2
$\{V_1; V_2\}$	$\{V_{11}; V_{12}\}$
$\{V_2; V_6\}$	$\{V_{11}; V_{18}\}$
$\{V_1; V_3\}$	$\{V_{12}; V_{17}\}$
$\{V_2; V_4\}$	$\{V_{11}; V_{10}\}$
$\{V_2; V_5\}$	$\{V_{11}; V_{13}\}$
$\{V_5; V_9\}$	$\{V_{13}; V_{16}\}$
$\{V_3; V_4\}$	$\{V_{17}; V_{10}\}$
$\{V_8; V_9\}$	$\{V_{15}; V_{16}\}$
$\{V_3; V_8\}$	$\{V_{17}; V_{15}\}$
$\{V_3; V_7\}$	$\{V_{17}; V_{14}\}$

Grafo planar:

É aquele onde existe alguma maneira de arranjar seus vértices no plano de modo que nenhum par de arestas se cruze.

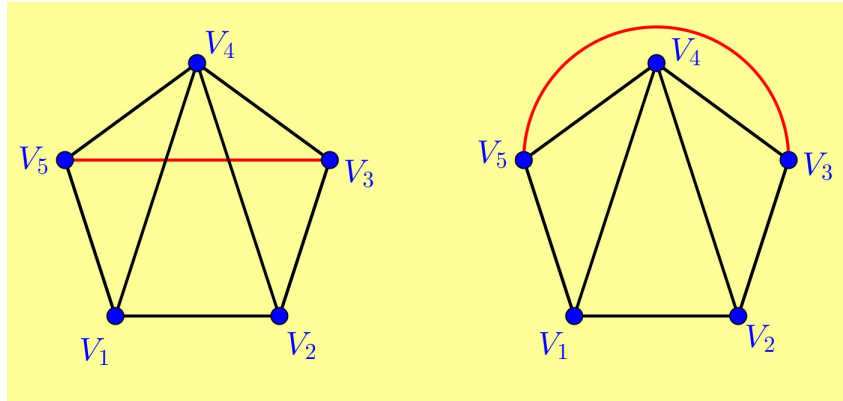


Figura 22: A direita temos uma representação do grafo da esquerda sem que suas arestas se cruzem.

Grafo regular:

É o grafo em que todo vértice tem o mesmo número de adjacências, ou em outras palavras o mesmo grau.

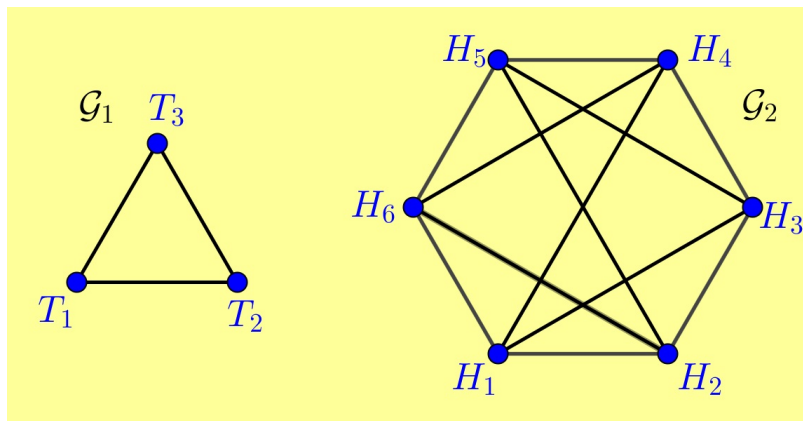


Figura 23: Em \mathcal{G}_1 todos os vértices tem grau 2 e em \mathcal{G}_2 todos os vértices tem grau 4.

Grafo completo:

É aquele no qual todo par de vértices possui uma aresta. Um grafo completo é representado por K_n , onde n é o número de vértices deste grafo.

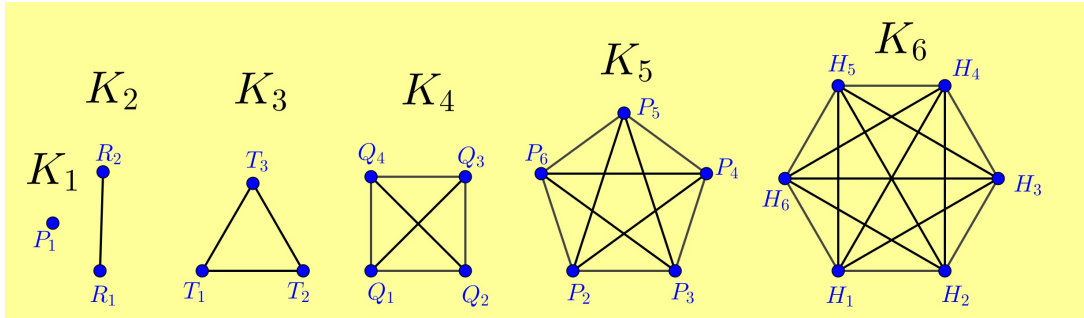


Figura 24: Da esquerda para direita tem-se K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 e K_6 .

Grafo bipartido completo:

É aquele onde o conjunto de seus vértices V pode ser dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2 , de modo que toda aresta do grafo une um vértice de V_1 a um vértice de V_2 . Esses grafos são representados por $K_{n,m}$, onde n é o número de vértices de V_1 e m é o número de vértices de V_2 .

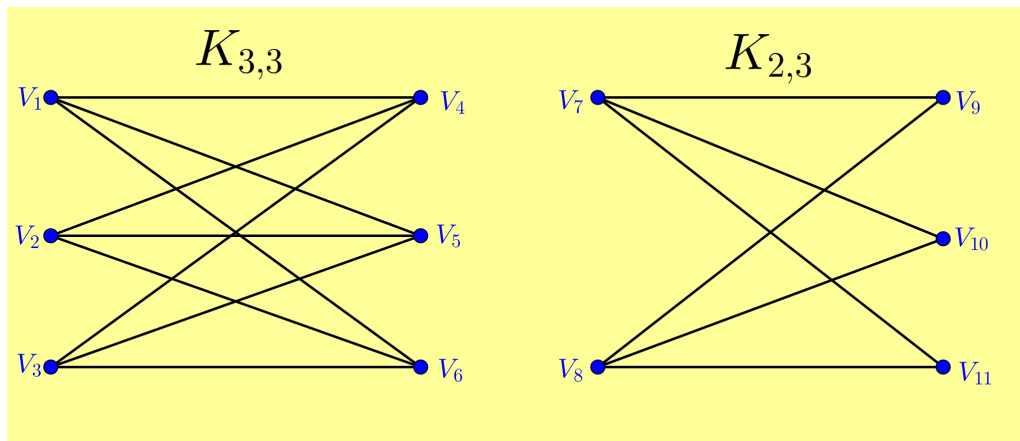


Figura 25: Da esquerda para direita, temos $K_{3,3}$ e $K_{2,3}$.

Grafo complementar:

Dado um grafo \mathcal{G} , o seu grafo complementar (ou conjugado) será o grafo que possuir os mesmos vértices de \mathcal{G} e um conjunto de arestas formado por todos os pares de vértices distintos que não aparecem em \mathcal{G} .

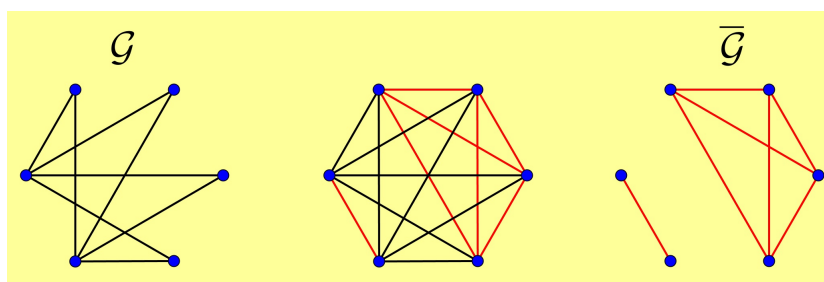


Figura 26: O complementar do grafo \mathcal{G} é o grafo em vermelho.

Subgrafo e supergrafo:

Um grafo $\mathcal{G}_1(V_1; A_1)$ é um subgrafo de $\mathcal{G}(V; A)$ se V_1 é um subconjunto de V e A_1 é um subconjunto de A . Da mesma forma um grafo $\mathcal{G}_2(V_2; A_2)$ é um supergrafo de $\mathcal{G}(V; A)$ se \mathcal{G} é um subgrafo de \mathcal{G}_2 .

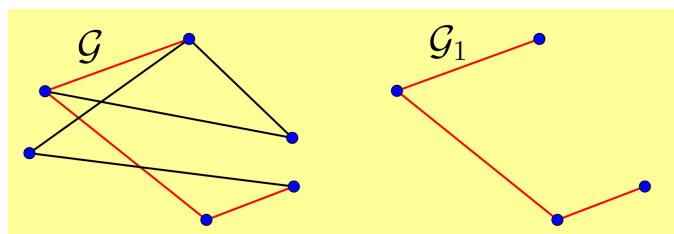


Figura 27: \mathcal{G}_1 é um subgrafo de \mathcal{G} . Também é possível dizer que \mathcal{G} é um supergrafo de \mathcal{G}_1 .

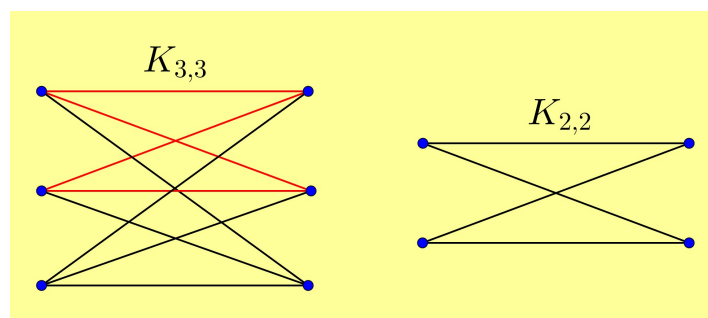


Figura 28: $K_{3,3}$ é um supergrafo de $K_{2,2}$.

Multigrafo:

É um grafo que possui múltiplas arestas (arestas paralelas) entre um par de vértices.

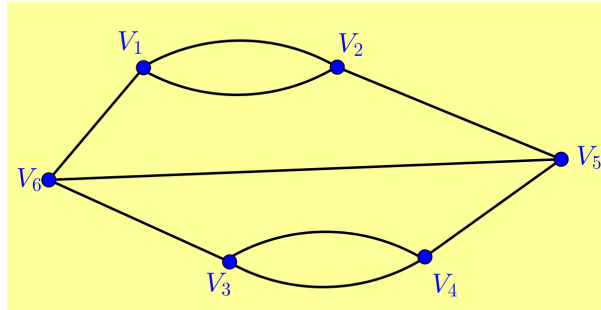


Figura 29: O grafo acima é um multigrafo, já que $\{V_1; V_2\}$ e $\{V_3; V_4\}$ são arestas paralelas.

Grafo imersível:

Um grafo é imersível em uma superfície S se for possível representá-lo em S de tal forma que suas arestas se cruzem apenas nos vértices. Um grafo planar é o grafo imersível no plano.

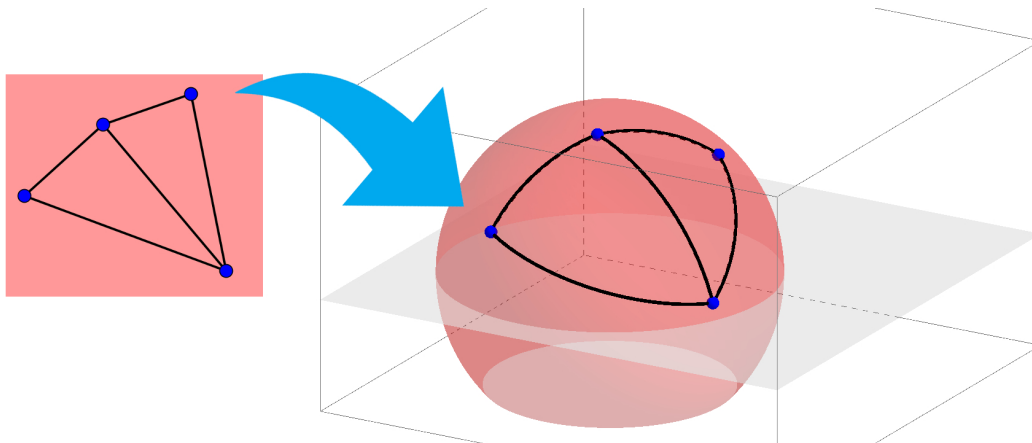


Figura 30: O grafo do lado esquerdo foi imerso em uma esfera.

Face de um grafo:

É a representação planar de uma região do grafo contornada por arestas. A porção do plano infinita que não é contornada por arestas é chamada de face externa ou face infinita.

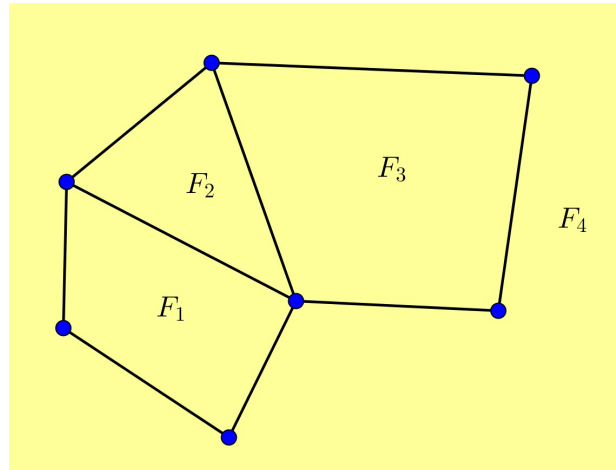


Figura 31: A figura acima possui 4 faces: três são polígonos e a quarta face é a face externa.

Grau de uma face:

É o número de arestas que limita uma face. Quando uma aresta faz fronteira com apenas uma face, ela deve ser contada duas vezes.

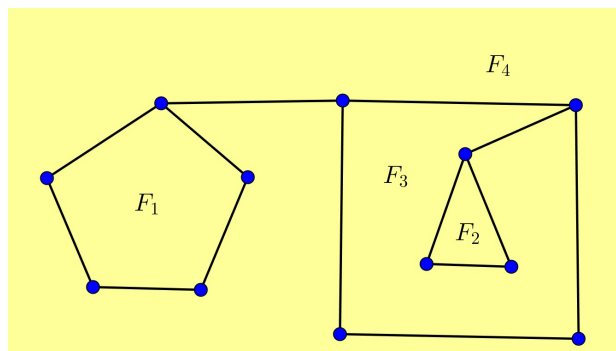


Figura 32: Na figura acima, F_1 possui grau 5, F_2 possui grau 3, F_3 possui grau 9 e F_4 possui grau 11.

HISTÓRICO

Todas as fontes consultadas para este trabalho são unânimes ao eleger a resolução do problema das pontes de Königsberg, por Leonhard Euler, como o marco inicial na história da Teoria dos Grafos. Entretanto, antes de falar do problema em si, gostaria de apresentar um panorama histórico e geográfico que envolve este problema.

2.1 A CIDADE

A cidade de Königsberg (que significa montanha do rei) foi fundada em 1255 e era, até 1945 capital e centro cultural/econômico da Prússia ¹.

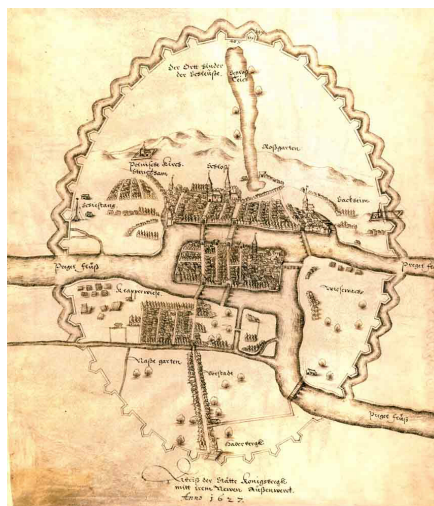


Figura 33: Königsberg - mapa de 1627.

¹ A Prússia foi uma poderosa nação européia que dominou boa parte do centro do continente no século XIX. Em 1947, o Estado foi oficialmente abolido, perdendo seu governador e sua representação parlamentar.

Em 1945, após a segunda guerra mundial, Königsberg passou a se chamar Kaliningrado em homenagem ao revolucionário bolchevique Mikhail Ivanovich Kalinin.

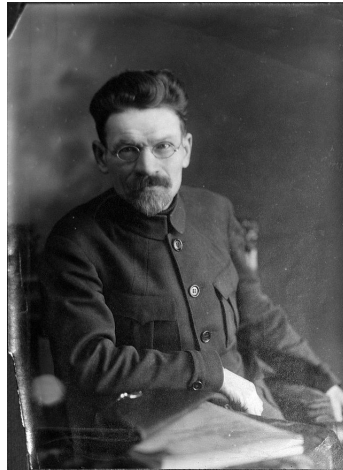


Figura 34: Mikhail Ivanovich Kalinin (1875-1946).

Geograficamente, Kaliningrado é um enclave russo do Mar Báltico a 1.235km de Moscou, limitado a norte e leste pela Lituânia, ao sul pela Polônia e a oeste pelo Báltico.

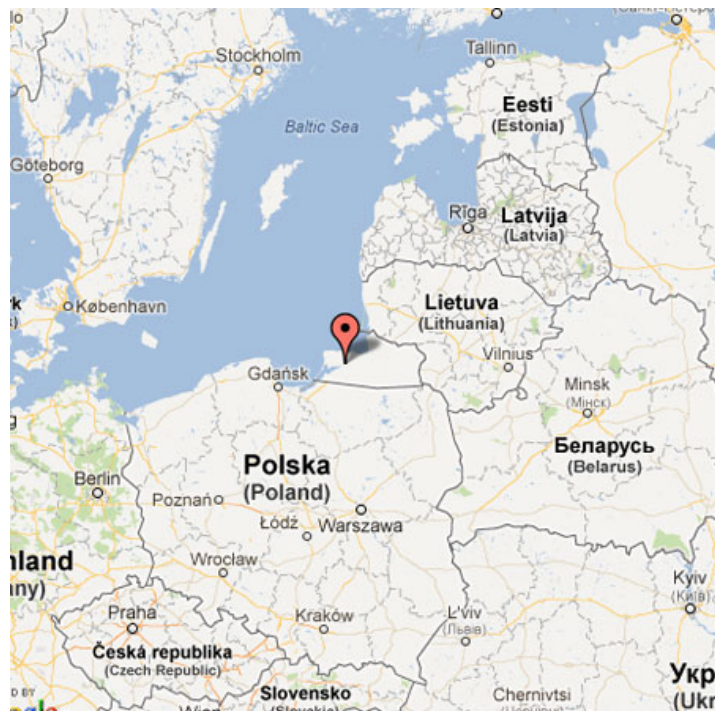


Figura 35: Kaliningrado: um território russo cercado pela Lituânia, Polônia e o Mar Báltico.

Uma pesquisa descuidada pode dar ao leitor informações conflitantes sobre Kaliningrado, como por exemplo sua extensão territorial que em algumas fontes de pesquisa aparece como 15.100km^2 e em outras como apenas 223km^2 .

Isto acontece pois Kaliningrado é nome que se dá tanto ao estado da Federação Russa como a sua capital ².

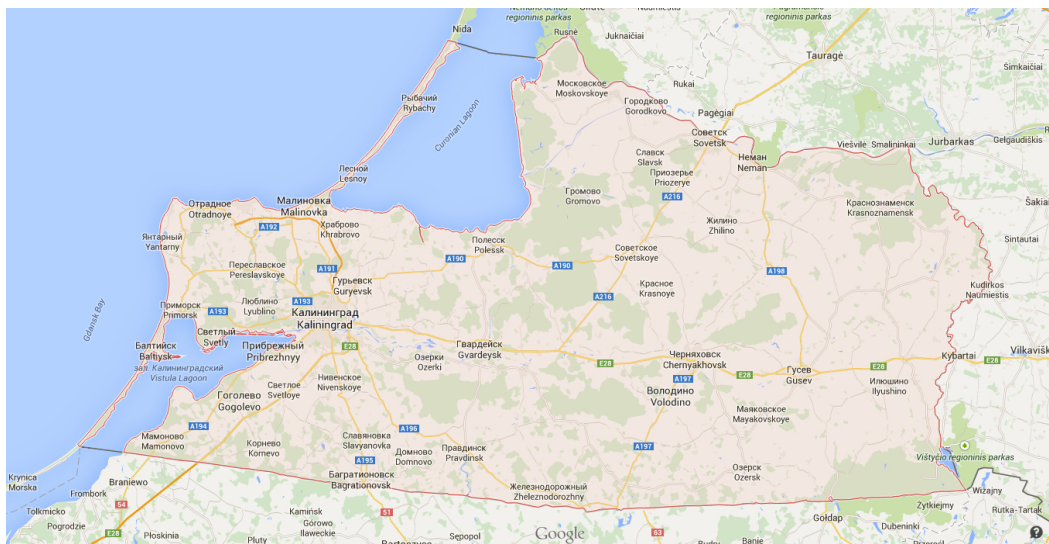


Figura 36: Estado de Kaliningrado.

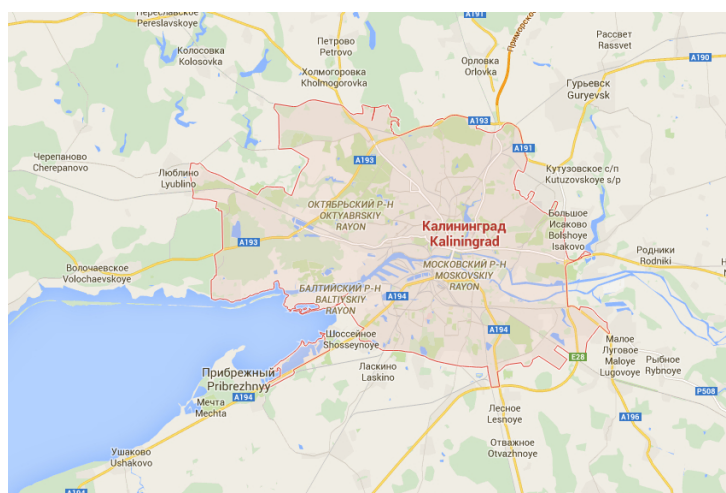


Figura 37: Cidade de Kaliningrado.

2 Assim como São Paulo e Rio de Janeiro.

Atualmente, Kaliningrado (a cidade) é um importante porto russo no Mar Báltico, servindo como um verdadeiro portão de acesso à Europa, e toda a região (o estado) possui um importante peso estratégico por ser o território mais ocidental da Federação Russa.

A cidade também é famosa por ser lar do filósofo Immanuel Kant.

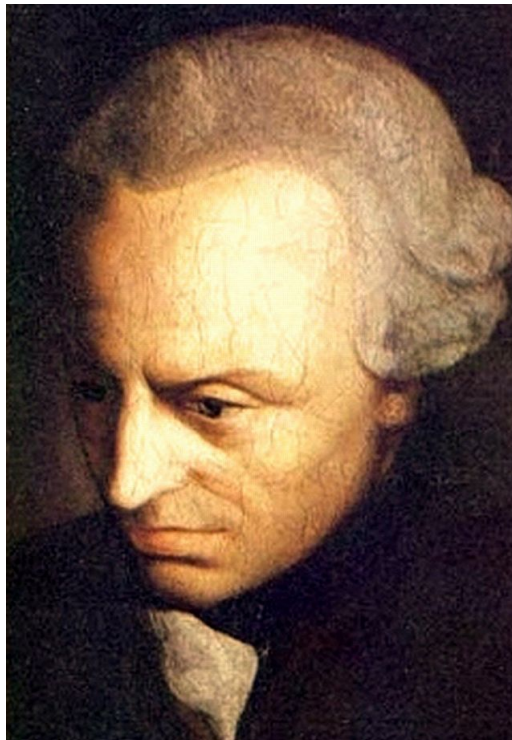


Figura 38: Immanuel Kant, (1724 -1804).

O cartão postal mais famoso da cidade de Kaliningrado é a majestosa Catedral Sagrada Família, construída no século XIV e restaurada depois dos bombardeios da Segunda Guerra Mundial. Ela é tombada pela UNESCO como patrimônio da humanidade.

Com duas capelas, uma protestante e outra ortodoxa, a Catedral de Königsberg é lembrada como um símbolo de paz e reconciliação.



Figura 39: Catedral de Königsberg.

A região de Kaliningrado também é conhecida por ser a principal fonte de âmbar³ da Europa. Cerca de 90% dos depósitos mundiais de âmbar estão localizados nesta região.



Figura 40: Salão de âmbar do Palácio Catarina em São Petersburgo.

³ O âmbar é uma resina fóssil muito usada para a manufatura de objetos ornamentais. Embora não seja um mineral, às vezes é considerado e usado como uma gema.

Kaliningrado voltará ao cenário mundial em 2018, pois será uma das sedes da Copa do Mundo de futebol.



Figura 41: Kaliningrado será uma das sedes da Copa do Mundo da Rússia.

2.1.1 *O rio e as ilhas*

A cidade de Kaliningrado é atravessada pelo rio Pregel (ou Prególia), onde existem duas ilhas importantes bem no centro da cidade: a ilha Kneiphof e a ilha Lomse.

A Ilha de Kneiphof é a que aparece retratada na maioria dos trabalhos sobre as pontes de Konisngberg. É uma pequena ilha quase retangular, medindo aproximadamente 400 metros de leste a oeste por 200 metros de norte a sul.

A ilha Lomse é quase sempre representada parcialmente pois é muito maior do que a ilha Kneiphof. Ela tem aproximadamente nove quilômetros de extensão, e sua largura varia de 200 metros a quase um quilômetro.

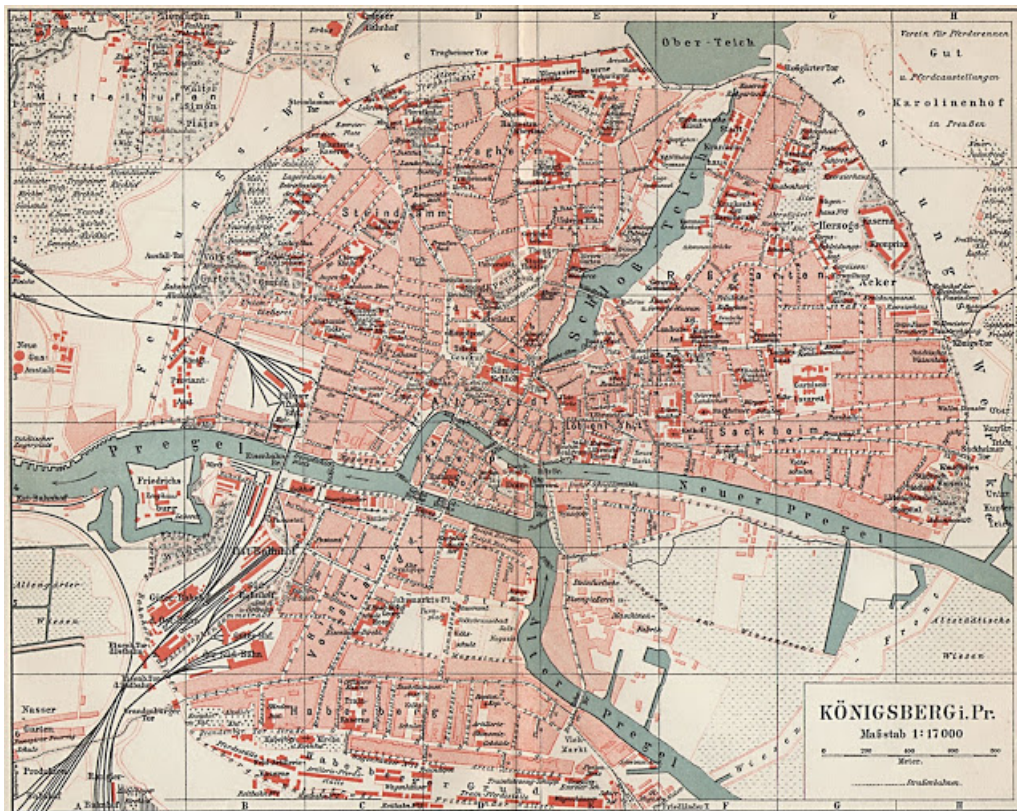


Figura 42: O rio Prególia e as ilhas Kneiphof e Lomse - Mapa de 1905.

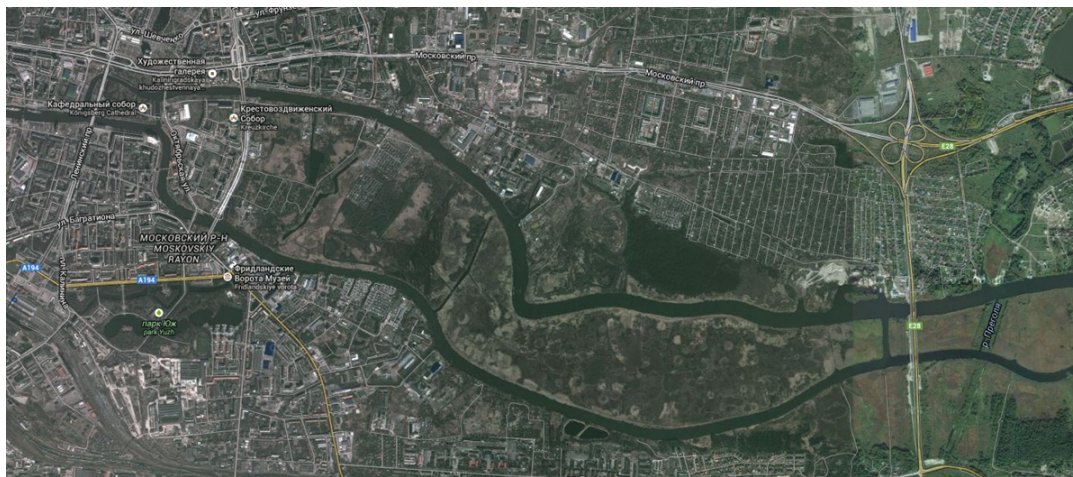


Figura 43: O rio Prególia e as ilhas Kneiphof (bem menor e à esquerda) e Lomse - Foto de Satélite - Google Earth 2014.

2.1.2 As pontes

Segue um breve relato histórico sobre as pontes de Königsberg, palco principal da fundação da Teoria dos Grafos.

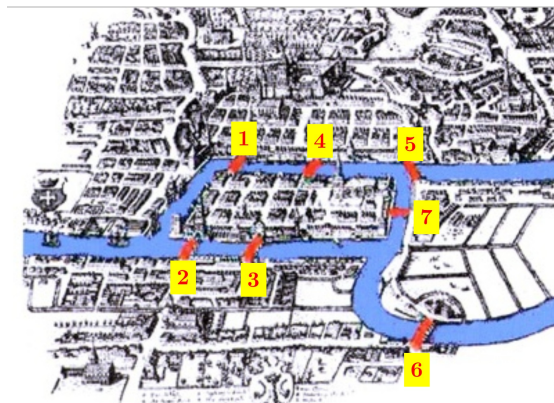


Figura 44: As pontes numeradas em ordem cronológica.

1. The Salesman's Bridge (Ponte do Vendedor)

A primeira ponte de Königsberg foi a Krämerbrücke - Ponte do Vendedor, data de 1286 e conecta a margem norte do rio Prególia com a ilha de Kneiphof.

2. The Green Bridge (Ponte Verde)

A segunda ponte, concluída em 1322, ligava a ilha Kneiphof a margem sul do rio. A ponte foi chamada Grünebrücke - Ponte Verde, devido às ondas verdes no fundo do brasão de armas de Kneiphof. Foi destruída por um incêndio em 1582 e reconstruída em 1590, ainda em madeira, permanecendo nesse estado até 1907, quando foi reconstruída em aço.

3. The Slaughter Bridge (Ponte do Abatedouro)

No século XIV, um matadouro operava na margem sul do rio Prególia. A fim de facilitar o transporte de carne, uma nova ponte chamada Köttelbrücke - Ponte do Abatedouro, foi construída em 1377 entre a margem sul do rio e a ilha de Kneiphof. Esta ponte foi reconstruída em 1886, em aço.

4. The Blacksmith's Bridge (Ponte do Ferreiro)

Construída em 1397, veio para substituir outra ponte, chamada Dombrücke - Ponte da Igreja, demolida em 1379. A ponte chamada Schmiedebrücke - Ponte

do Ferreiro, leva este nome pois existiam muitos ferreiros na margem norte do Rio Prególia. A ponte do Ferreiro foi reconstruída em 1787 em madeira, e em 1896 em aço.

5. The Timber Bridge (Ponte da Madeira)

A Ilha de Lomse foi usada durante algum tempo para estocar madeira. Uma nova ponte foi construída entre 1400 e 1404 para tornar mais fácil o transporte da madeira para a margem norte do rio. A ponte foi batizada de Holzbrücke - Ponte da madeira. Ela foi mantida por 500 anos e, em 1904, foi reconstruída em aço ao lado de sua antiga localização.

6. The High Bridge (Ponte Alta)

A próxima ponte, chamado Hohebrücke - Ponte Alta, foi construída em 1506, a fim de conectar a ilha de Lomse a margem sul do rio. Foi reconstruída em 1882-1883, desmantelada em 1937 e reconstruída alguns metros para o leste, em aço e concreto entre 1937-1939. As fundações da ponte original ainda podem ser vistas hoje.

7. The Honey Bridge (Ponte do Mel)

A sétima das pontes de Königsberg, ligando as duas ilhas, foi concluída em 1542. Foi construída pelos habitantes de Kneiphof que queriam acessar a ilha Lomse, sem ter que passar por cima de duas pontes. Segundo a lenda, os moradores de Kneiphof deram um grande barril de mel para o prefeito, a fim de obter permissão para construir a ponte. Por isso o nome Hönigbrücke - Ponte do Mel. Ela foi reconstruída em aço entre 1879 e 1882.

Assim, em 1542, todas as sete pontes de Königsberg consideradas por Euler estavam no local.

É importante notar que, se a 7ª ponte foi construída em 1542 e o problema foi resolvido por Euler em 1736, então o problema sobreviveu com certeza menos de 200 anos.

Os interessados em obter mais informações históricas sobre as pontes de Königsberg podem ler [10] e [15].

2.1.3 As pontes de Kaliningrado atualmente

Após a Segunda Guerra Mundial, Königsberg se tornou parte da União Soviética e adquiriu seu novo nome. As ilhas de Kneiphof e Lomse mais tarde ficaram conhecidas como Kant Island - ilha de Kant e Oktyabrskiy – ilha de Outubro ⁴.

Durante a guerra, quatro das oito pontes de Königsberg foram danificadas (8 e não 7 pois em 1905 foi construída mais uma ponte, a Ponte do Imperador). Assim, das sete pontes originais do problema de Euler, apenas a Ponte da Madeira, a Ponte Alta e a Ponte do Mel permanecem em seus locais de 1736 ou perto deles.

2.2 O MATEMÁTICO

Serei mais breve na biografia de Euler, pois é muito mais simples encontrar referências sobre este grande matemático do que sobre as pontes de Königsberg.

Filho de Paul Euler, um pastor calvinista, e Margaret Brucker, Leonhard Paul Euler passou sua infância na cidade Suíça de Riehen.

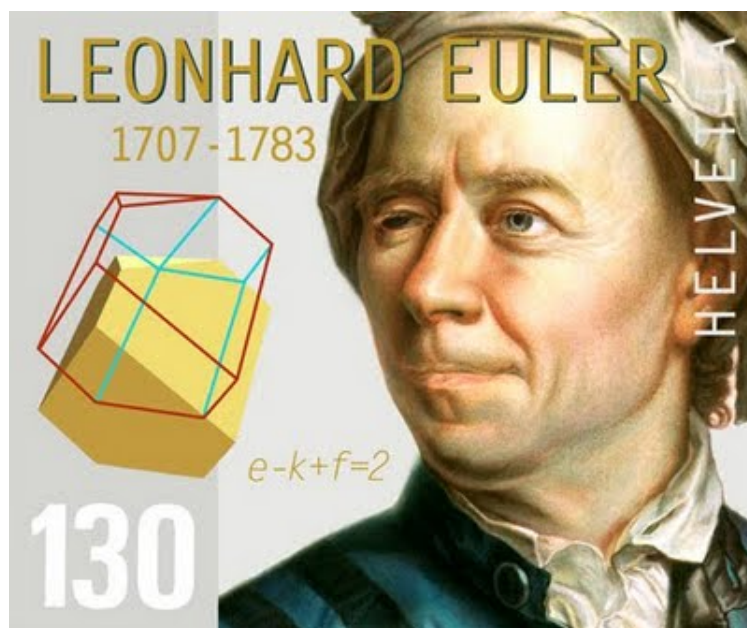


Figura 45: Leonhard Paul Eule (1707 - 1783).

⁴ Para evitar confusões este trabalho irá se referir às duas ilhas por seus nomes originais.

De família muito religiosa seu pai decidiu que ele deveria estudar teologia. Felizmente para a história da matemática, Paul Euler era amigo da família Bernoulli, e particularmente de Johann Bernoulli o que muito provavelmente influenciou o jovem Euler e o fez trocar a teologia pela matemática.

Euler assumiu uma cadeira na Universidade de São Petersburgo após não ser selecionado para a cadeira de Física da Universidade de Basel e mudou-se para a Rússia em 1727.

Euler foi um matemático extremamente produtivo e calcula-se que toda a sua obra reunida teria entre 60 e 80 volumes.

Dono de um extraordinário talento matemático e de uma obra tão vasta, não é de se estranhar que Euler tenha introduzido muitas convenções de notação que são utilizadas hoje em dia e popularizado várias outras.

A notação $f(x)$ para denotar a função f aplicada ao argumento x foi criada por Euler.

Ele também introduziu a notação moderna para as funções trigonométricas, a letra e para a base do logaritmo natural (agora também conhecido como número de Euler), a letra grega Σ para somatórios e a letra i para representar a unidade imaginária.

O uso da letra grega π para designar a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência também foi popularizado por Euler, embora não tenha sido ele o primeiro a usar esta notação.

Em 1738 Euler ficou praticamente cego do olho direito, mas isso não fez com que sua produção intelectual diminuísse.

Mais tarde, Euler desenvolveu catarata em seu olho esquerdo, o deixando praticamente cego.

Mesmo a cegueira não foi suficiente para paralisar a produção intelectual de Euler, pois a ausência de visão era compensada por suas habilidades de cálculo mental e memória fotográfica (e também por pessoas que trabalhavam para ele como escribas).

Para se ter uma ideia de sua produtividade sem visão, ele elaborou, em média, um artigo matemático durante todas as semanas do ano 1775.

A sua imagem foi incluída na nota de dez francos suíços.



Figura 46: Nota de dez Francos Suíços.

2.3 EULER E A TEORIA DOS GRAFOS

Em 9 de março de 1736 Euler tomou conhecimento de um problema sem solução proposto pelos habitantes da região de Königsberg, através de uma carta de Carl Leonhard Gottlieb Ehler, seu amigo e prefeito da cidade de Danzig.

O desafio consistia em fazer um passeio pelas 7 pontes já citadas neste capítulo, passando por cada ponte exatamente uma vez.

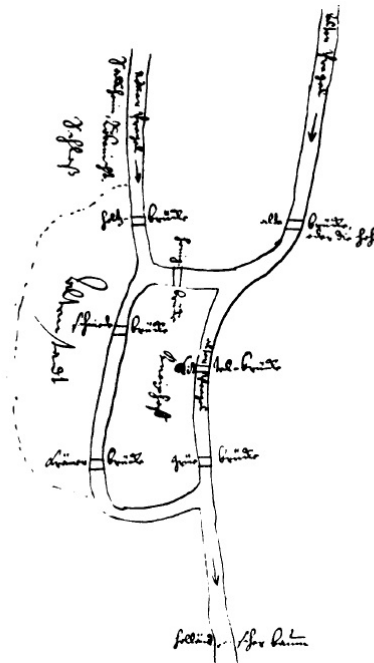


Figura 47: Esboço original enviado a Euler por Ehler.

A solução de Euler é comentada no Capítulo 5 deste trabalho e considerada como o marco da criação da teoria dos grafos.

Não coloco a solução agora para que o leitor possa refletir um pouco sobre o problema. Se você desejar ver imediatamente a resolução deste problema deve seguir para a Aula 7 do Capítulo 5.

Para resolvê-lo, Euler modelou o problema abstraindo detalhes irrelevantes para sua solução, como por exemplo a área ou o formato de cada ilha.

O próprio Euler não deu muita importância para sua descoberta na época. Após a publicação de seu artigo, a teoria dos grafos ficou adormecida por pouco mais de 100 anos até ser novamente utilizada em 1847.

2.4 OUTROS COLABORADORES

Gustav Robert Kirchhoff um físico que nasceu em Königsberg e teve contato com o trabalho de Euler sobre grafos, aplicou essa ideia no estudo de circuitos elétricos dando origem a um novo ramo da teoria dos grafos, chamado de árvores. [3]

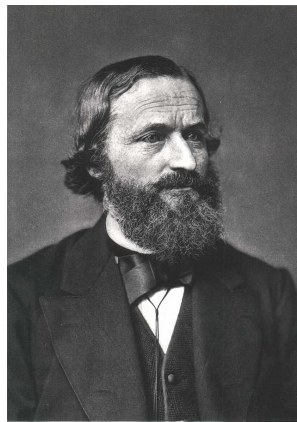


Figura 48: Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887).

Quase uma década depois, o matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) aplicou grafos à química orgânica, para tentar contar o número de isômeros de alcanos⁵, cuja fórmula geral é C_nH_{2n+2} .

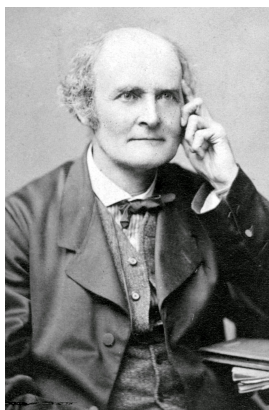


Figura 49: Arthur Cayley (1821 - 1895).

Matematicamente, o problema de Cayley era contar o número de diferentes tipos de árvores que podem ser feitas para uma quantidade pequena de vértices.

Cayley foi tão longe quanto um homem brilhante poderia chegar sem o auxílio de um computador. Ele contou todas as árvores possíveis para 14 vértices ou menos.

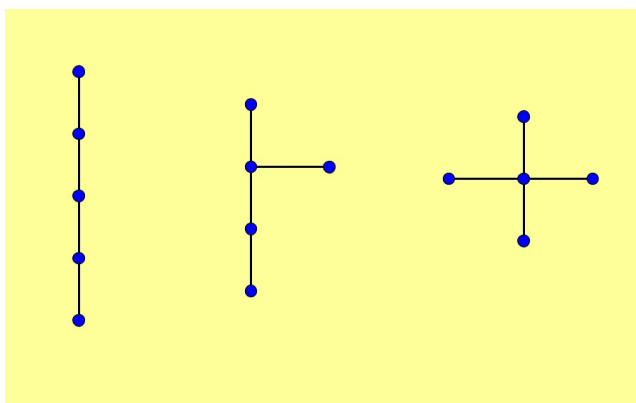


Figura 50: As 3 árvores possíveis para 5 vértices. Para 14 vértices existem 1858 árvores e para 32 vértices este número sobe para 27.711.253.769 árvores.

5 As propriedades de uma substância química não dependem unicamente de sua composição, mas também do arranjo espacial dos átomos dentro da molécula. Isomeria química é o fenômeno relacionado à existência de dois ou mais compostos químicos diferentes com massas e fórmulas moleculares idênticas, que resultam em propriedades diferentes.

Inclusive, a inexistência de computadores na época, é uma explicação possível para que a Teoria dos Grafos tenha evoluído tão lentamente antes do século XX.

Note também que tanto Cayley quanto Kirchhoff trabalhavam com conceitos impossíveis de serem representados como são na vida real.

O exato formato, posição e tamanho de uma molécula ou de um feixe de elétrons não são necessários e nem possíveis de serem observados, mas sempre é possível representá-los por grafos, focando apenas nos detalhes realmente relevantes.

Com o advento do computador, a ascensão da Teoria dos Grafos como importante ferramenta matemática foi uma questão de tempo. Um bom exemplo disto é o Teorema das 4 cores.

Em 1852, Francis Guthrie conjecturou que 4 cores eram suficientes para colorir qualquer mapa de modo que países com fronteira comum tenham cores diferentes.



Figura 51: Francis Guthrie (1831 - 1899).

A demonstração desta conjectura só foi finalizada mais de 100 anos depois, quando em junho de 1976 Appel e Haken com o auxílio de um computador analisaram 1482 grafos envolvendo na época 1200 horas de tempo de cálculo em um computador.

Como era de se esperar a demonstração de Appel e Haken não foi aceita imediatamente por todos os matemáticos pelo fato da demonstração ter sido feita, em parte, com a ajuda de um computador.



Figura 52: Kenneth Appel (1932 - 2013) e Wolfgang Haken(1928 -).

Embora o auxílio computacional seja uma ferramenta aceita e por que não dizer indispensável nos dias de hoje, na época além de não ser totalmente aceita, foi considerada a demonstração mais feia da história da matemática.

De 1736 aos dias de hoje a teoria dos grafos passou de uma curiosidade acadêmica para uma ferramenta poderosa na resolução de problemas.

Seguem algumas modelagens possíveis para problemas atuais utilizando grafos, Ver [2] [1] .

Tabela 3: Exemplos de modelagens com grafos

Problema	Vértices	Arestas
Comunicação	Centrais telefônicas	Cabos, Fibras ópticas
Hidráulico	Reservatórios, estações de bombeamento	Tubulações
Financeiro	Ações, moedas	Transações
Transporte	Cidades, Aeroportos	Rodovias, Vias aéreas
Internet	Páginas Web	Links
Jogo de Xadrez	Posições no tabuleiro	Movimentos permitidos

2.5 UM PASSEIO ATUAL PELAS PONTES DE KALININGRADO

Para finalizar este capítulo, ainda existe uma pergunta a ser respondida.

2.5 UM PASSEIO ATUAL PELAS PONTES DE KALININGRADO

Nos dias de hoje seria possível fazer um passeio pelas pontes de Kaliningrado sem repetir pontes?

Infelizmente a resposta não é simples.

Atualmente, existem duas ponte que passam por cima da ilha Kneiphof.

Não existe acesso por carro destas pontes para a ilha, entretanto as pontes possuem escadas que dão acesso à ilha.



Figura 53: Ponte sobre a ilha Kneiphof.



Figura 54: O acesso a ilha Kneiphof pode ser feito por escadas.

Além disso, foi construído um canal que atravessa a ilha Lomse.

Passando este canal existem mais três pontes: uma que passa por cima do que já foi um pedaço da ilha Lomse, uma ponte ferroviária que também liga as duas margens do

rio e uma terceira, aparentemente abandonada que liga a margem sul do continente com a ilha Lomse.

Além de escadas ligando a ponte à ilha, também existe uma escada ligando duas pontes.

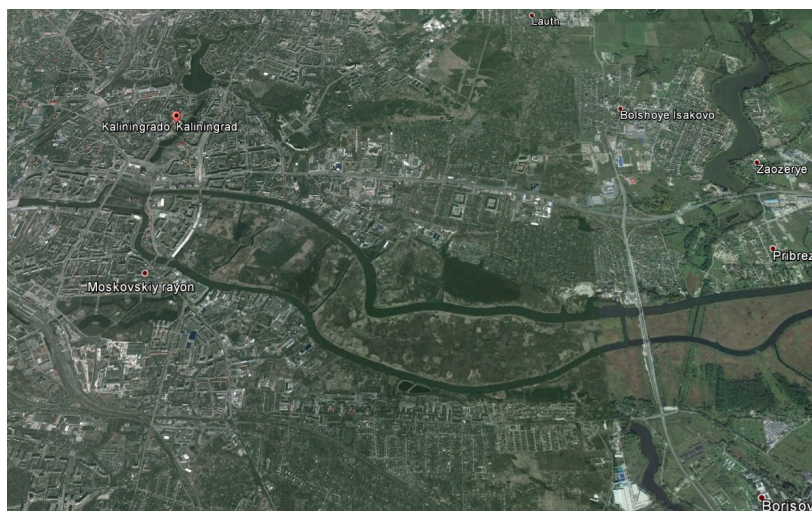


Figura 55: Visão de satélite da ilha Lomse.

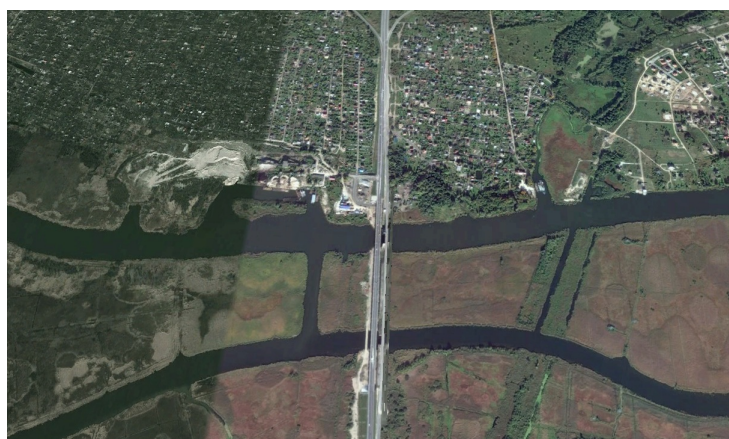


Figura 56: Detalhe do canal e das pontes construídas à direita do canal.

2.5 UM PASSEIO ATUAL PELAS PONTES DE KALININGRADO



Figura 57: Foto tirada de uma das pontes.



Figura 58: Escada ligando duas pontes.



Figura 59: Ponte exclusiva para pedestres.

Se o passeio pelas pontes de Kaliningrado for feito de carro, existe uma dificuldade a mais: uma das pontes é exclusiva para pedestres e na Ponte do Mel aparentemente não entram carros de passeio pois ela possui um portão.



Figura 60: Entrada da Ponte do Mel.



Figura 61: Detalhe dos cadeados presos na Ponte do Mel. É um costume dos noivos, no dia do casamento, trancarem um cadeado na ponte como símbolo de união duradoura.

Então para resolver o problema das pontes de Kaliningrado nos dias de hoje é necessário perguntar se o passeio deve ser feito caminhando ou de carro, se uma escada é um caminho válido e nesse caso se a pessoa deve passar por todas as escadas de uma ponte, se é válido caminhar por um trilho de trem e se um canal feito pelo homem dividindo uma ilha em duas faz com que esses dois pedaços de terra cercados por água se tornem realmente duas ilhas. Talvez seja mais seguro fazer esta pergunta após a copa do mundo de 2018 quando as obras de acessibilidade em Kaliningrado estiverem

prontas. Como exemplo, enquanto este trabalho estava sendo feito as imagens de satélite do Google Earth mostravam uma ponte em construção. Entretanto, a mesma ponte aparecia totalmente funcional quando observada pelo Google Street View.



Figura 62: Imagem de satélite.



Figura 63: Imagem do Google Street View.

Mesmo assim me recuso a deixar esta pergunta sem resposta.

Considerando apenas as pontes (sem escadas), que todas estão funcionais e ainda que as pontes após o canal não são válidas (mesmo porque elas se encontram muito

longe da ilha Kneiphof) teríamos a seguinte situação para uma pessoa que tenha o desejo de caminhar pelas pontes:



Figura 64: Imagem de satélite de Kaliningrado.

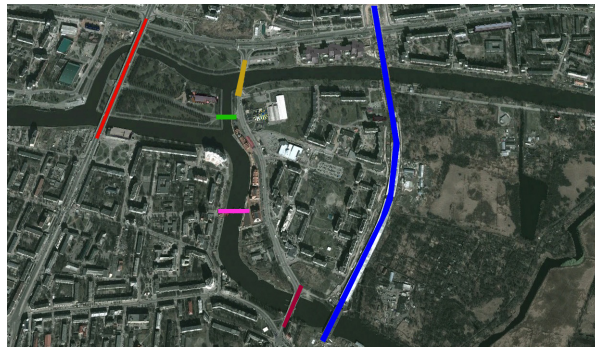


Figura 65: Pontes destacadas.

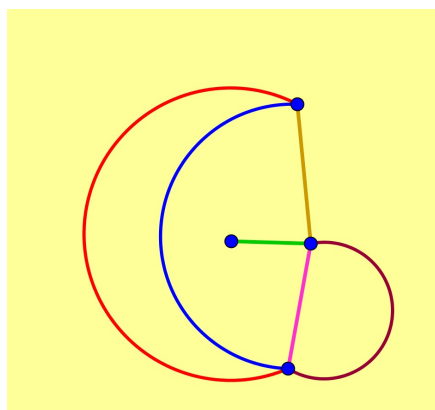


Figura 66: Grafo da atual configuração das pontes de Kaliningrado.

2.5 UM PASSEIO ATUAL PELAS PONTES DE KALININGRADO

Uma rápida análise no grafo desse problema mostra que é possível fazer um passeio utilizando todas as pontes apenas uma vez, porém não é possível retornar a ponte de origem sem repetir pontes, pois o grafo possui 2 vértices de grau ímpar.

Segue um vídeo feito em Stop Motion com imagens do Google Earth simulando este passeio.



Percorrendo um caminho Euleriano pelas pontes de Königsberg atuais.
Para ver este vídeo abra o versão PDF deste texto no Adobe Acrobat Reader.

PLANARIDADE

O apelo lúdico matemático somado à simplicidade dos conceitos matemáticos envolvidos, faz da planaridade de grafos um ótimo problema para o ensino do pensamento matemático em escolas de nível fundamental e médio.

Por esta razão este capítulo se dedica a explorar mais a fundo o mundo dos grafos planares, definido muito rapidamente no Capítulo 1. Ele se concentra principalmente na tarefa de determinar se um dado grafo é ou não planar. Para responder (ao menos parcialmente) esta questão o trabalho passa pela famosa fórmula de Euler, já conhecida na geometria espacial, que relaciona o total de vértices, arestas e faces em um grafo planar. O capítulo se encerra com comentários sobre o Teorema de Kuratowski, que tenta caracterizar de uma forma mais completa o conjunto de todos os grafos planares.

3.1 NOÇÕES PRELIMINARES

Conforme comentado no Capítulo 1, um grafo é apenas um conjunto de vértices e arestas, não estando incluída em sua definição nenhuma informação geométrica sobre estes elementos.

Normalmente escolhemos representar estes elementos por pontos (vértices), e retas ou curvas (para as arestas), mas mesmo isso não carrega nenhuma informação sobre, digamos, a posição relativa entre os diversos pontos, ou mesmo o formato de uma certa aresta.

É claro que tal informação pode ser importante na construção de um certo problema. Se por exemplo, resolvemos usar grafos para representar um circuito, os cruzamentos

de arestas pode gerar uma interferência no sistema, e queremos portanto um diagrama com o menor número de cruzamentos possíveis.

Neste sentido, relembramos abaixo a definição já colocada no Capítulo 1.

Definição 3.1. Um grafo \mathcal{G} é dito planar se existe uma representação gráfica de \mathcal{G} no plano de modo que nenhum par de arestas se cruze.

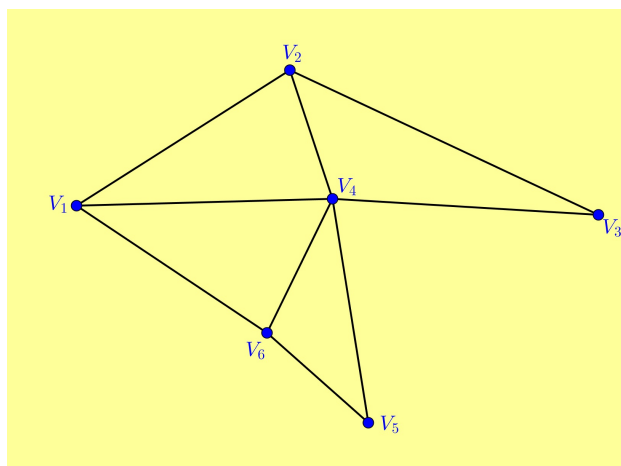


Figura 67: Exemplo de grafo planar.

Uma representação gráfica sem cruzamento de arestas de um grafo planar é chamada de *representação planar do grafo* ou ainda *diagrama planar*.

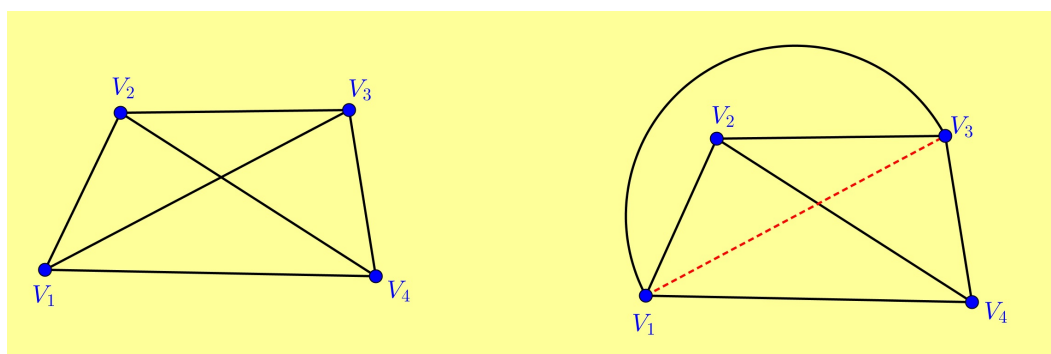


Figura 68: Duas representações do mesmo grafo, onde o diagrama da direita não apresenta cruzamento de arestas.

Colocada a definição de um grafo planar, surge então uma questão importante: como perceber de antemão se um grafo é ou não planar?

Para entender as dificuldades desta questão, considere a princípio que o grafo \mathcal{G} considerado seja planar. Para mostrar sua planaridade é necessário, a princípio, encontrar uma representação planar para \mathcal{G} . Mas em grafos muito grandes, esta pode ser uma tarefa muito complicada, que demanda muito tempo e talvez o auxílio de computadores.

Tarefa ainda mais complicada é determinar que um grafo não é planar! Representações gráficas são menos úteis neste caso, pois o total de representações para um determinado dado grafo é a princípio infinita, e portando gerar representações não planares do grafo não diz nada definitivo sobre sua planaridade.

Seria interessante então encontrar um ou mais critérios que, no mínimo, indicassem com segurança quando um grafo não é planar.

A primeira ferramenta importante na definição da planaridade de um grafo é a comparação. Comparar o grafo estudado com outro cuja classificação seja já conhecida, pode trazer informações importantes para a solução do problema. O próximo resultado dá um primeiro passo neste sentido, e comentários um pouco mais detalhados sobre este tópico são feitos no final deste capítulo.

Proposição 3.2. *Seja \mathcal{G}_1 subgrafo de um grafo \mathcal{G} . Nestas condições, se \mathcal{G} é planar, então \mathcal{G}_1 é planar.*

Demonstração. Para perceber isso, basta tomar um diagrama de \mathcal{G}_1 obtido via remoção de arestas e vértices de um diagrama planar de \mathcal{G} . □

A comparação é apenas a primeira ferramenta necessária no estudo de planaridade. O próximo passo para resolver (ao menos parcialmente) este problema é olhar para as informações mais básicas do grafo: o total de vértices e arestas. Estes valores claramente não definem um grafo por completo, mas trazem informações importantes sobre as possíveis estruturas do grafo, formando assim um interessante ponto de partida para o estudo do problema.

Outro elemento importante presente apenas em diagramas planares de um grafo são as *faces* delimitadas pelos caminhos do grafo. Infelizmente, determinar o número de faces de um grafo nem sempre é uma tarefa simples. Em primeiro lugar, ela pode estar relacionada ao diagrama escolhido para representar o grafo. Ou seja, diferente do que ocorre com vértices e arestas, o total de faces pode a princípio depender do diagrama planar utilizado.

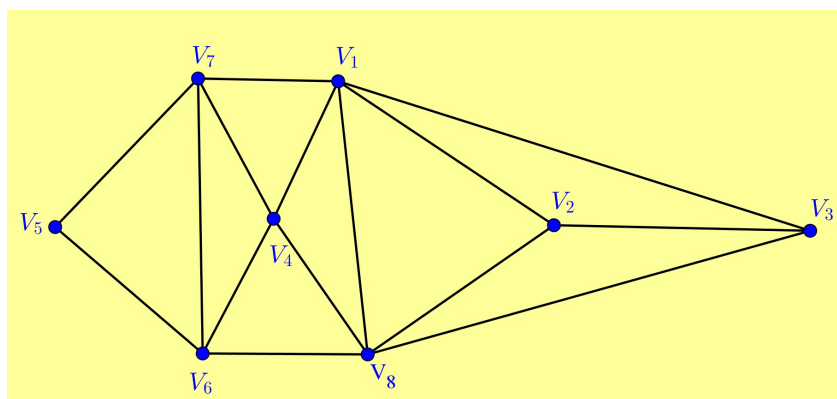


Figura 69: Representação planar de um grafo com 8 vértices, 15 arestas e 9 faces.

Mais a frente neste capítulo será visto que o total de faces é uma propriedade inerente ao grafo planar, não dependendo da representação gráfica utilizada. Mas por enquanto deixamos como desafio para o leitor encontrar uma representação planar para o grafo da Figura 70, e contar o total de faces na representação encontrada.

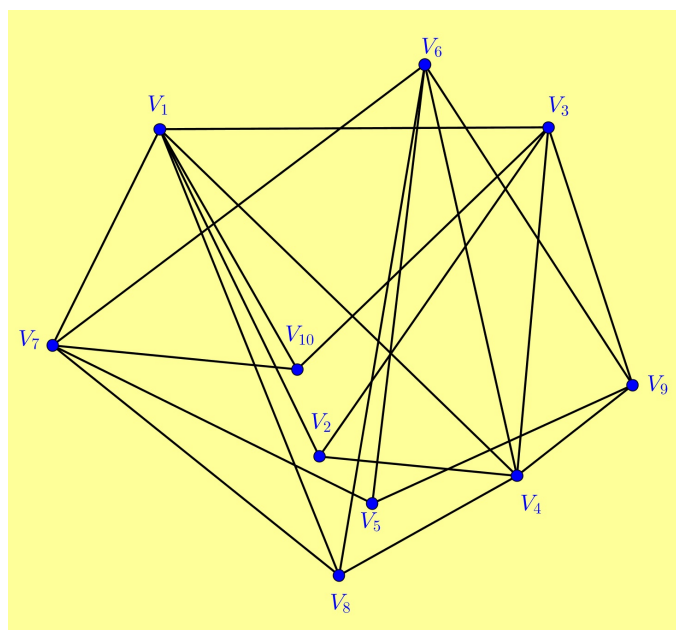


Figura 70: Este grafo possui 10 vértices e 22 arestas. Além disso, ele é planar e possui 14 faces, mas não é uma tarefa fácil contá-las.

3.2 DETERMINANDO PLANARIDADE

Um caminho possível na solução do problema de determinar planaridade é encontrar uma relação entre o total de vértices e arestas, que seja comum a todo grafo planar. Com isso, se o total de vértices e arestas não satisfizer a condição encontrada, será possível concluir que o grafo não é planar.

Satisfazer tal condição não garantiria a planaridade do grafo, mas seria um primeiro passo importante.

Para encontrar tal relação pode-se, por exemplo, tentar estudar primeiro relações entre total de faces e arestas (ou vértices) em um grafo planar. Isso por que faces são elementos exclusivos de grafos planares, e qualquer resultado encontrado seria portanto típico deste tipo de grafo.

O resultado mais conhecido relacionando tais quantidades é a conhecida *fórmula de Euler*. Esta fórmula, que relaciona de maneira exata o total de faces, arestas e vértices em todo grafo planar, e tem algumas consequências importantes. Uma destas é mostrar que o total de faces em um grafo planar depende exclusivamente do total de vértices e arestas no grafo, não dependendo portanto do diagrama planar escolhido para representá-lo. Em outras palavras, diagramas planares distintos para um mesmo grafo planar terão sempre a mesma quantidade de faces. Além disso servirá de base no desenvolvimento de critérios para determinação da planaridade de um grafo.

Teorema 3.3 (Fórmula de Euler). *Se \mathcal{G} é um grafo planar e conexo com V vértices, A arestas e F faces, então*

$$V - A + F = 2. \quad (3.1)$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre o número de arestas do grafo.

Caso inicial: Para um grafo ser conexo e não possuir arestas ele deve ser formado por um único vértice.

Neste caso $V = 1$, $A = 0$ e $F = 1$ (apenas a face externa do grafo), o que satisfaz a condição do problema, pois $1 - 0 + 1 = 2$.

Passo de indução: supondo que a fórmula é válida para um grafo qualquer com A arestas ou menos e seja \mathcal{G} um grafo com $A^* = A + 1$ arestas, V^* vértices e F^* faces.

Deve-se analisar dois casos:

- I) Se \mathcal{G} possui pelo menos um vértice de grau 1, retira-se este vértice e a aresta acoplada a ele.

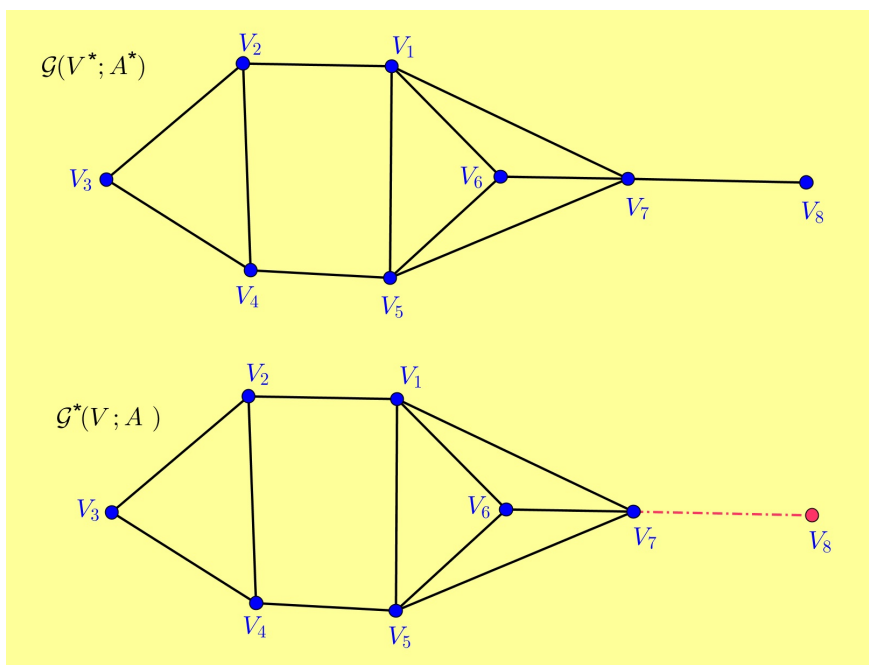


Figura 71: A aresta $\{V_7; V_8\}$ foi retirada.

Tem-se um novo grafo \mathcal{G}^* com A arestas V vértices e F faces. Note que $F = F^*$, pois retirando um vértice de grau 1 nenhuma face é perdida.

O novo grafo \mathcal{G}^* tem um vértice e uma aresta a menos que \mathcal{G} , então podemos escrever que $V = V^* - 1$ e $A = A^* - 1$.

Por hipótese de indução, tem-se que:

$$\begin{aligned} V - A + F &= 2 \\ \Leftrightarrow V^* - 1 - (A^* - 1) + F^* &= 2 \\ \Leftrightarrow V^* - A^* + F^* &= 2. \end{aligned}$$

- II) Se \mathcal{G} não possui nenhum vértice de grau 1, então \mathcal{G} possui pelo menos 1 ciclo. Escolhe-se um ciclo qualquer do grafo e retira-se uma de suas arestas.

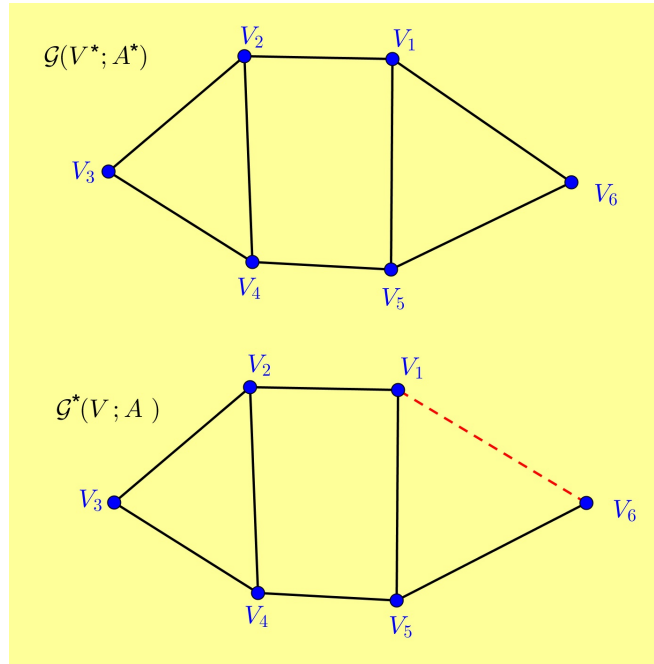


Figura 72: A aresta $\{V_1; V_6\}$ foi retirada.

Obtém-se mais uma vez, um novo grafo \mathcal{G}^* (que continua sendo conexo), com A arestas, V vértices e F faces.

Neste grafo, $F^* = F - 1$, pois quando se retira uma aresta do ciclo duas faces se unem, $V^* = V$ e $A^* = A - 1$.

Por hipótese de indução, tem-se que:

$$\begin{aligned} V - A + F &= 2 \\ \Leftrightarrow V^* - (A^* + 1) + F^* + 1 &= 2 \\ \Leftrightarrow V^* - A^* + F^* &= 2. \end{aligned}$$

□

Mas por mais interessante e exata que a fórmula de Euler seja, ainda não está claro como ela ajuda a determinar a planaridade ou não de um grafo. Isso por que, como comentado anteriormente, encontrar estimativas para o total de faces de um grafo pode ser extremamente difícil, especialmente antes de saber se o grafo é ou não planar.

Uma possibilidade seria retirar o total de faces da equação (3.1), mesmo que para isso seja necessário perder a igualdade também. Bastaria então encontrar uma relação

entre o total de faces e arestas (ou faces e vértices), e juntamente com a fórmula de Euler, encontrar uma relação entre o total de vértices e arestas.

As relações entre faces e arestas parecem mais simples (uma face é delimitada por arestas, cada aresta está na fronteira entre duas faces, etc), e por isso pode ser uma escolha natural seguir este caminho. O resultado a seguir mostra uma relação entre o total de faces e arestas em um grafo planar. [8]

Lema 3.4. *Em todo grafo planar, conexo e simples (sem laços ou arestas paralelas), com A arestas e F faces, tem-se que*

$$2A \geq 3F, \text{ se } A \geq 2.$$

Demonstração. Se $A = 2$ o grafo deve ser obrigatoriamente isomorfo ao grafo da Figura 73.

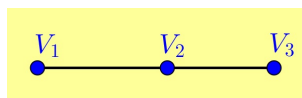


Figura 73: Grafo com duas arestas.

Como $A = 2$ e $F = 1$ (apenas a face externa) a desigualdade é satisfeita.

Para $A > 2$ note inicialmente que a representação planar do grafo não pode conter faces limitadas por apenas uma ou duas arestas, pois neste caso o grafo deveria conter laços ou arestas paralelas.

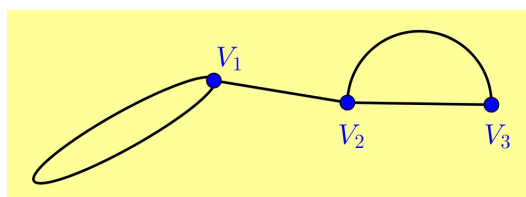


Figura 74: Tanto o laço em V_1 quanto o par de arestas que ligam V_2 a V_3 não são faces válidas.

Note também que toda aresta de um grafo ou pertence a fronteira entre duas faces ou a fronteira de uma única face.

Vamos chamar de f_i a quantidade de faces de um grafo com exatamente i arestas em sua fronteira.

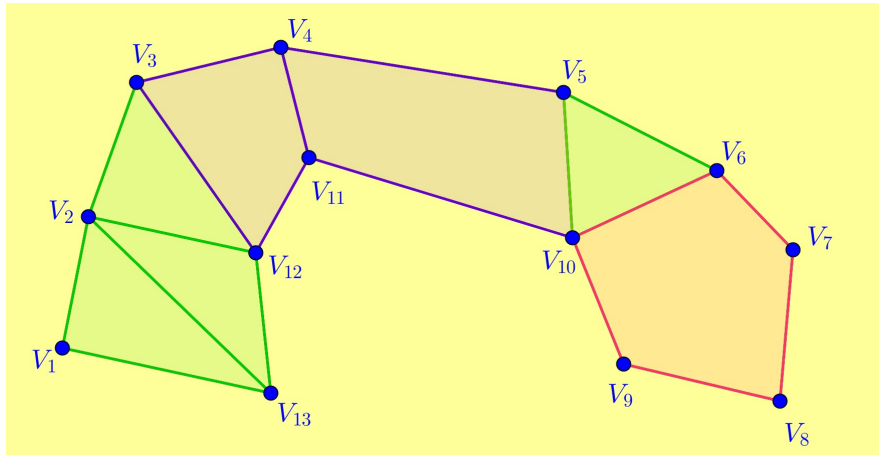


Figura 75: Na figura, $f_3 = 4$, $f_4 = 2$ e $f_5 = 1$.

Pode-se escrever que

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \leq 2A,$$

pois cada aresta é contabilizada no máximo 2 vezes.

Observe também que o total F de faces pode ser escrito por

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \dots$$

E lembrando mais uma vez que não se pode ter faces com apenas uma ou duas arestas, tem-se

$$3F = 3f_3 + 3f_4 + 3f_5 + \dots \leq f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \leq 2A,$$

ou seja, $3F \leq 2A$ ou equivalentemente $2A \geq 3F$.

□

Utilizando o Teorema 3.3 e o Lema 3.4, é possível encontrar um resultado sobre planaridade que não dependa da quantidade de faces.

Corolário 3.5. *Em todo grafo conexo, simples e planar com A arestas, V vértices e $A \geq 2$ tem-se que*

$$A \leq 3V - 6.$$

Demonstração. Já foi visto que $V - A + F = 2$ e também que $2A \geq 3F$, se $A \geq 2$.

Isolando F na equação e substituindo na desigualdade tem-se:

$$2A \geq 3(2 - V + A)$$

$$\Leftrightarrow 2A \geq 6 - 3V + 3A$$

$$\Leftrightarrow -A \geq -3V + 6$$

$$\Leftrightarrow A \leq 3V - 6.$$

□

Infelizmente este corolário afirma apenas que se um grafo é planar então essa relação tem de ser satisfeita, (ou seja, a ida da afirmação) mas não permite garantir que quando a desigualdade é satisfeita, o grafo é necessariamente planar. Em outras palavras, como a volta do corolário não foi demonstrada, um grafo não planar pode eventualmente satisfazer esta desigualdade.

Exemplo 3.1. K_5 não é um grafo planar.

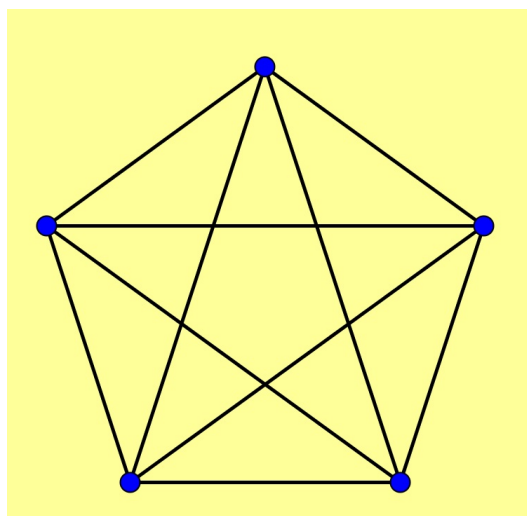


Figura 76: O grafo K_5 .

O grafo completo K_5 possui 5 vértices e 10 arestas.

Aplicando o Corolário 3.5 obtém-se

$$A \leq 3V - 6$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6,$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq 9,$$

que é uma afirmação falsa, portanto K_5 não é planar.

Os grafos K_1 e K_2 , apesar de claramente planares (K_1 é um ponto e K_2 um segmento de reta), não satisfazem as condições do Corolário 3.5, pois não possuem duas arestas. Já K_3 e K_4 , satisfazem as condições e verificam a desigualdade. De fato, K_3 possui 3 vértices e 3 arestas, e portanto

$$A = 3 \leq 3 = 3V - 6.$$

Já K_4 possui 4 vértices e 6 arestas. Logo

$$A = 6 \leq 6 = 3V - 6.$$

Mas infelizmente isso não garante a planaridade de K_3 e K_4 , que deve ser verificada graficamente. K_3 pode ser representado por um triângulo, e K_4 está representado na Figura 77.

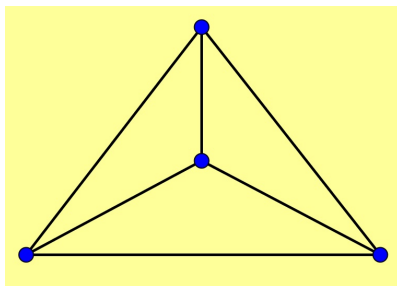


Figura 77: O grafo K_4 é planar.

Para $n \geq 5$, a não planaridade de K_n segue diretamente da não planaridade de K_5 (convidamos o leitor a tentar entender o porque), mas é possível também usar a mesma ideia usada para K_5 .

Exemplo 3.2. K_n não é planar para $n \geq 5$.

Se $A \leq 3V - 6$ então também pode-se escrever que $3V - A \geq 6$.

Como um grafo completo K_n possui n vértices e $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas, então

$$\begin{aligned}
3n - \frac{n(n-1)}{2} &\geq 6 \\
\Leftrightarrow n^2 - 7n + 12 &\leq 0 \\
\Leftrightarrow 3 \leq n &\leq 4.
\end{aligned}$$

Isso quer dizer que K_n não é planar para $n \geq 5$.

Deste modo conseguimos classificar todos os grafos completos pela sua planaridade. Isso coloca K_5 em uma posição importante, já que é o primeiro grafo completo não planar. De fato, como será observado no final deste capítulo, K_5 (juntamente com $K_{3,3}$) possui papel fundamental na determinação da planaridade de um grafo qualquer.

Um primeiro passo para entender este papel está no resultado abaixo.

Proposição 3.6. K_5 é o grafo não planar com a menor quantidade de vértices.

Demonstração. Inicialmente, note que dado um grafo \mathcal{G} , qualquer subgrafo de \mathcal{G} é obtido pela remoção de vértices e arestas de \mathcal{G} , mas esta operação não cria cruzamento de arestas, então todo subgrafo de um grafo planar também é planar. (Proposição 3.2)

Como já foi visto, K_4 é planar, então qualquer grafo com quatro vértices ou menos também é planar.

Pelo Exemplo 3.1 sabe-se que K_5 não é planar.

Ao retirar uma aresta qualquer de K_5 (por ser completo, todas as arestas possuem o mesmo grau e são equivalentes) o grafo se torna planar.

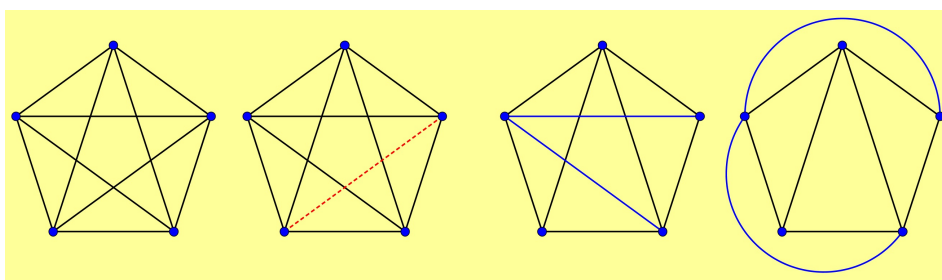


Figura 78: A seqüência mostra a planaridade de K_5 quando se retira uma aresta qualquer.

Logo K_5 é o grafo não planar com a menor quantidade de vértices. \square

Outro grupo interessante de grafos a ser estudado são os bipartidos completos. Como visto no Capítulo 1, estes são os grafos formados por dois conjuntos disjuntos de vértices, V_1 e V_2 de modo que nenhuma aresta liga dois vértices de V_1 ou dois vértices de V_2 , mas todo vértice de V_1 está ligado por uma aresta a um vértice de V_2 .

Assim como no caso dos grafos completos, determinar a planaridade dos grafos iniciais é simples, e basta encontrar uma representação planar para eles. Não é difícil encontrar representações planares para $K_{1,m}$ e $K_{2,m}$, $m \geq 1$ (ver Figura 79), mas para o próximo na fila, $K_{3,3}$, a tarefa não é tão simples. Mas nunca é demais lembrar que o fato de não encontrarmos um diagrama planar para $K_{3,3}$ não implica que este não seja planar. Está portanto muito cedo para declarar que $K_{3,3}$ não é planar.

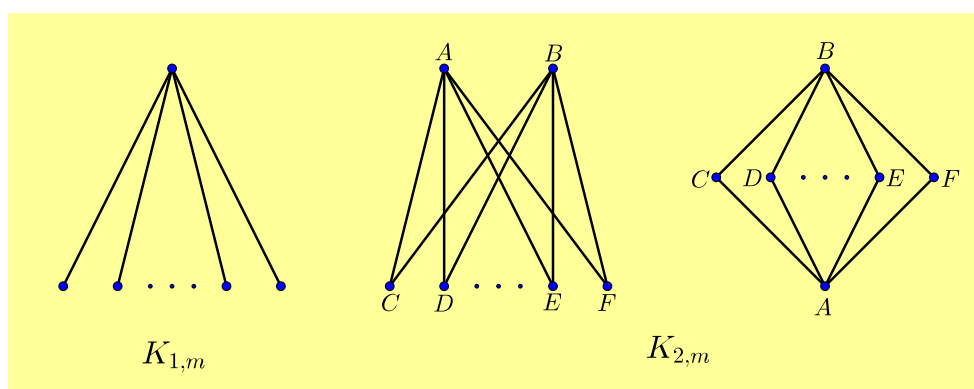


Figura 79: $K_{1,m}$ e $K_{2,m}$, $m \geq 1$ são planares.

Neste sentido, uma primeira ideia seria usar o Corolário 3.5 para verificar se $K_{3,3}$ não é de fato planar, mas neste caso $V = 6$ e $A = 9$, de onde segue que

$$A \leq 3V - 6$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq 3 \cdot 6 - 6$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq 12$$

e portanto a desigualdade não diz nada sobre a planaridade do grafo.

Ainda assim, deixando $K_{3,3}$ um pouco de lado, seria interessante seguir as ideias do Exemplo 3.2 para tentar classificar $K_{n,m}$ de acordo com sua planaridade.

Exemplo 3.3. $K_{n,m}$ é planar para $n = 1$ e não é planar para $n \geq 4$ e $m \geq 7$, ou para $n, m \geq 5$.

Verificar a planaridade de $K_{1,m}$ para qualquer m é simples, uma vez que $K_{1,m}$ é sempre uma árvore.

Em geral $K_{n,m}$ é um grafo com $V = n + m$ vértices e $A = nm$ arestas, de modo que se $K_{n,m}$ é planar vale que

$$A \leq 3V - 6 \Leftrightarrow nm \leq 3(n + m) - 6 \Leftrightarrow m(3 - n) \geq 6 - 3n.$$

Para analisar a desigualdade acima é necessário considerar separadamente os casos $n \leq 3$ e $n \geq 4$. Assim, fazendo $n = 2$, segue que

$$A \leq 3V - 6 \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Assim, a planaridade de $K_{2,m}$ continua não determinada para qualquer $m \geq 4$ (já foi visto que $K_{2,2}$ e $K_{2,3}$ são planares).

No caso de $n = 3$, vale que

$$A \leq 3V - 6 \Leftrightarrow 0 \geq -3,$$

e do mesmo modo não se conclui nada sobre a planaridade de $K_{3,m}$ para qualquer $m \geq 3$ (lembre que $K_{3,2}$ é planar).

Agora, se $n \geq 4$ então

$$A \leq 3V - 6 \Leftrightarrow m \leq 3 \frac{n-2}{n-3}. \quad (3.2)$$

Observe que

$$\begin{aligned} n \geq 4 &\Leftrightarrow -n \leq -4 \\ &\Leftrightarrow n \leq 2n - 4 \\ &\Leftrightarrow n - 2 \leq 2n - 6 \\ &\Leftrightarrow n - 2 \leq 2(n - 3). \end{aligned}$$

Assim,

$$n \geq 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{n-2}{n-3} \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 3 \frac{n-2}{n-3} \leq 6.$$

E deste modo, se $n \geq 4$ e $m \geq 7$, então

$$m > 6 \geq 3 \frac{n-2}{n-3},$$

e $K_{n,m}$ não é planar.

Observe que fazendo $n = 4$ no lado direito de (3.2), segue $m \geq 6$, e portanto a desigualdade não diz nada sobre a planaridade de $K_{4,m}$ para $m \leq 6$.

Repetindo a ideia acima para $n \geq 5$, segue que

$$\begin{aligned} n \geq 5 &\Leftrightarrow -n \leq -5 \\ &\Leftrightarrow 2n \leq 3n - 5 \\ &\Leftrightarrow 2n - 4 \leq 3n - 9 \\ &\Leftrightarrow n - 2 \leq \frac{3}{2}(n - 3), \end{aligned}$$

e

$$n \geq 5 \Rightarrow 1 \leq \frac{n-2}{n-3} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 3 \leq 3\frac{n-2}{n-3} \leq \frac{9}{2}.$$

Assim, se $n \geq 5$ e $m \geq 5$,

$$m > \frac{9}{2} \geq 3\frac{n-2}{n-3},$$

e $K_{n,m}$ não é planar.

Com os resultados mostrados até este ponto, foi possível classificar apenas parte dos grafos bipartidos completos por sua planaridade. Restam dúvidas ainda sobre $K_{4,4}$, $K_{4,5}$, $K_{4,6}$ e $K_{3,m}$, $m \geq 3$. É importante observar também que $K_{3,3}$ é subgrafo de todos os demais grafos ainda não classificados, de modo que se ele não for planar, os demais também não o serão.

Para atacar este problema será necessário então melhorar a desigualdade do Corolário 3.5, talvez usando alguma propriedade presente em todo grafo bipartido completo.

Neste sentido, note que em um grafo do tipo $K_{n,m}$, $n, m \geq 2$ todo ciclo tem comprimento no mínimo 4. Isso por que, se os conjuntos de vértices disjuntos que definem o grafo são \mathbb{V}_1 e \mathbb{V}_2 e temos um caminho V_1, V_2, V_3, V_4 , necessariamente $V_1 \neq V_2$, pois se (sem perda de generalidade) $V_1 \in \mathbb{V}_1$, então $V_2 \in \mathbb{V}_2$, $V_3 \in \mathbb{V}_1$ e $V_4 \in \mathbb{V}_2$.

Assim, usando este fato é possível encontrar o seguinte resultado.

Lema 3.7. *Seja \mathcal{G} é um grafo simples, planar e conexo com A arestas e V vértices. Se \mathcal{G} não possui ciclos de comprimento 3, então*

$$A \leq 2V - 4.$$

Demonstração. Se um grafo não possui ciclos de comprimento 3 (em outras palavras, não existem faces que possam ser representadas por triângulos), todos os ciclos tem quatro arestas ou mais.

Isso quer dizer que toda face tem pelo menos grau 4 e a soma dos graus das faces é, no mínimo, $4F$.

Como ao contar as faces, cada aresta é contabilizada no máximo 2 vezes, tem-se:

$$2A \geq 4F \Leftrightarrow A \geq 2F.$$

Do Teorema 3.3 tem-se que

$$V - A + F = 2 \Leftrightarrow F = 2 + A - V.$$

Substituindo este resultado na desigualdade obtida acima, tem-se:

$$A \geq 2(2 + A - V) \Leftrightarrow A \leq 2V - 4.$$

□

Exemplo 3.4. $K_{3,3}$ não é um grafo planar. Consequentemente, todo grafo $K_{n,m}$ com $n, m \geq 3$ não é planar.

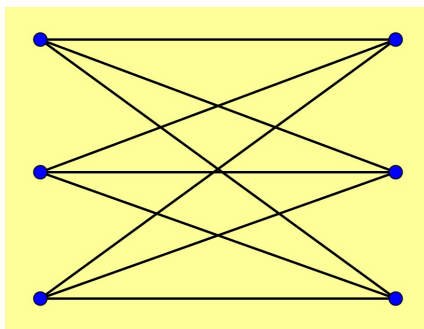


Figura 80: O grafo $K_{3,3}$.

$K_{3,3}$ é um grafo com $A = 9$ e $V = 6$ e sem ciclos de grau ≤ 3 .

Utilizando o resultado obtido no Lema 3.7 tem-se:

$$A \leq 2V - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8,$$

que é uma afirmação falsa, portanto $K_{3,3}$ não é planar.

Assim como K_5 , o grafo bipartido $K_{3,3}$ desempenha um papel importante na caracterização dos grafos planares. Comentários um pouco mais detalhados serão feitos

no final deste capítulo, mas a demonstração de tal resultado foge ao escopo deste trabalho.

Como forma de ilustrar um pouco tal importância, mostramos o resultado a seguir.

Proposição 3.8. $K_{3,3}$ é o grafo não planar com a menor quantidade de arestas.

Demonstração. K_4 é planar e possui 4 vértices e 6 arestas.

Então, pode-se afirmar que todo grafo simples de 4 vértices ou menos é planar.

O grafo K_5 possui 5 vértices e 10 arestas, e já foi provado que todos os subgrafos de K_5 (que possuem pelo menos 9 arestas) são planares.

Analisando agora os grafos com 6 vértices, note que para não ser planar, cada vértice deste grafo deve possuir no mínimo 3 arestas, pois um vértice com duas arestas pode ser eliminado sem alterar a planaridade do grafo (veja grafos homeomorfos).

Então o grafo não planar que se está procurando deve possuir 6 vértices e de cada vértice devem partir 3 arestas. Essa é a descrição de $K_{3,3}$.

Note que a eliminação de uma aresta qualquer de $K_{3,3}$ o torna planar.

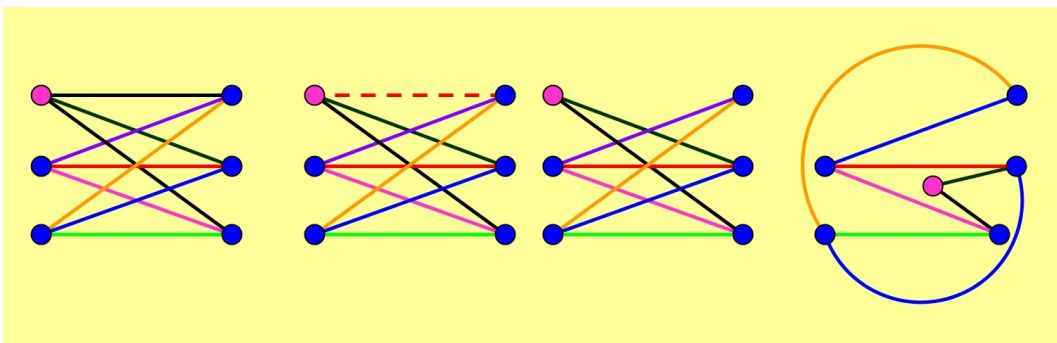


Figura 81: Na sequência, $K_{3,3}$ sem uma aresta qualquer se torna planar.

Por fim, aumentando a quantidade de vértices, ainda são necessárias 3 arestas para cada vértice, o que só fará aumentar a quantidade de arestas do grafo.

Portanto $K_{3,3}$, que possui 9 arestas (uma a menos que K_5) é o grafo não planar com a menor quantidade de arestas. \square

Até este ponto deve ter ficado claro que, de alguma forma, grafos “muito grandes” ou “muito conectados” tem menos chances de serem planares. O resultado abaixo tenta dar um significado mais formal a estes conceitos.

Proposição 3.9. *Se \mathcal{G} é um grafo conexo, simples e planar, com V vértices, A arestas e $A \geq 2$ então \mathcal{G} tem pelo menos um vértice com grau igual ou inferior a 5.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.5, sabe-se que $A \leq 3V - 6$, então também é verdade que $A < 3V$.

Se todos os vértices tivessem grau ≥ 6 , de cada vértice partiriam pelo menos 6 arestas e o total de arestas deste grafo seria maior ou igual a metade de $6V$ (pois em $6V$ cada aresta é contada duas vezes).

Assim,

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{2} \cdot 6V \\ \Leftrightarrow A &\geq 3V, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Sendo assim, pelo menos um vértice deve ter grau igual ou inferior a 5.

□

3.3 REDUÇÃO DE GRAFOS

Até este ponto foram vistos critérios algébricos que ajudam a determinar se um grafo não é planar. Tais critérios não garantem a planaridade, mas previnem que trabalhos desnecessários sejam feitos.

Neste ponto, para mostrar que um grafo é planar ainda é necessário encontrar um diagrama planar que o represente. Para facilitar este trabalho, o melhor a ser feito é limpar o grafo, tirando do caminho toda a informação extra, que não influi em sua planaridade, mas que pode dificultar a busca por diagramas.

Existem então procedimentos que diminuem a quantidade de vértices e arestas de um grafo sem alterar a sua planaridade. Tais afirmativas não serão demonstradas, mas seu funcionamento é bastante intuitivo, e pode ser visto nas Figuras 82, 83 e 84.

1. Pode-se eliminar qualquer laço de um grafo sem alterar sua planaridade.
2. Pode-se eliminar arestas paralelas, deixando apenas uma aresta entre cada par de vértices.
3. Pode-se eliminar os vértices de grau 2 através da fusão de duas arestas, pois arestas em série não afetam a planaridade de um grafo.

Veja um exemplo:

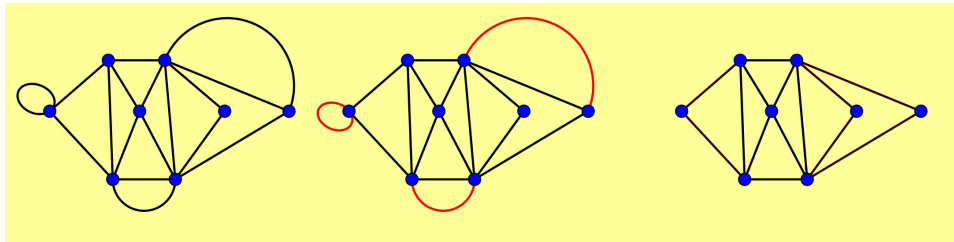


Figura 82: Passo 1: remover laços e arestas paralelas.

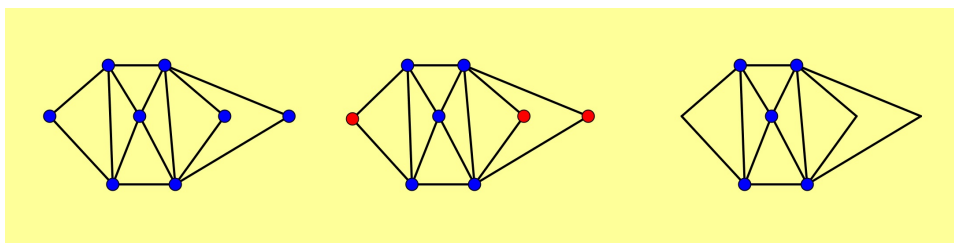


Figura 83: Passo 2: fazer a fusão das arestas dos vértices de grau 2.

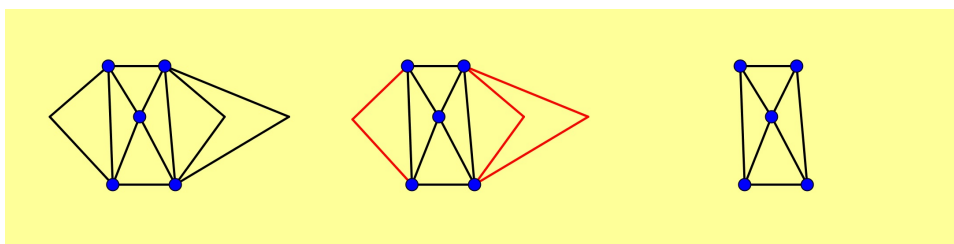


Figura 84: Passo 3: remover as novas arestas paralelas.

Vale então que

Proposição 3.10. *Seja \mathcal{G}^* um grafo encontrado a partir de \mathcal{G} seguindo as operações descritas acima. Nestas condições, \mathcal{G} é planar se, e somente se, \mathcal{G}^* é planar.*

Assim, se após sofrer redução o grafo se transformar, por exemplo, em um segmento de reta ou mesmo em K_4 , o grafo original é planar. Por outro lado, se o grafo for reduzido a K_5 ou $K_{3,3}$ ele certamente não é planar.

Até aqui pode-se concluir que se um grafo é planar então nenhum de seus subgrafos pode ser reduzido a K_5 ou $K_{3,3}$. Isso é uma condição necessária para a planaridade, mas ainda não se pode dizer que esta é uma condição suficiente.

Existe, no entanto, um outro resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo, chamado Teorema de Kuratowski, enunciado abaixo.

Teorema 3.11. *Um grafo \mathcal{G} é planar se, e somente se, nenhum de seus subgrafos pode ser reduzido a K_5 ou $K_{3,3}$.*

A demonstração do Teorema de Kuratowski é longa demais e vai além da proposta deste trabalho. Uma demonstração completa pode ser obtida em [14], mas ao longo do capítulo vimos alguns resultados que corroboram a veracidade de tal resultado. De fato, foram vistas as seguintes propriedades comuns a K_5 e $K_{3,3}$:

- Ambos são simples.
- Ambos são não planares.
- A remoção de uma aresta torna estes grafos planares.
- K_5 é o grafo não planar com o menor número de vértices e $K_{3,3}$ é o grafo não planar com o menor número de arestas, sendo de algum modo grafos não planares “minimais”.

GÊNERO DE UM GRAFO

4.1 INTRODUÇÃO

Existe na literatura um problema antigo e famoso, comumente conhecido como o problema das 3 casas. O mesmo problema pode ser encontrado em diversas línguas, com os mais diversos nomes¹. Em inglês, por exemplo, ele é conhecido como "the utilities problem", e um bom estudo sobre ele pode ser encontrado em [16].

O problema consiste em fazer conexões de água, luz e telefone em três casas sem que as conexões se cruzem.

Uma rápida pesquisa na internet pode proporcionar várias soluções engenhosas (porém erradas) para este problema. A maioria destas falsas soluções se aproveita da falta de rigor matemático na hora de enunciar o problema.

1 De acordo com o criador de puzzles inglês Henry Earnst Dudeney o problema das 3 casas é mais antigo do que a energia elétrica ou mesmo o gás encanado. Seguem duas versões mais antigas deste mesmo problema

Três pessoas vivem em lotes adjacentes, cada um com um poço. Ocasionalmente, um ou mais dos poços secam, de modo que cada pessoa requer um caminho para cada poço. Depois de um tempo os moradores desenvolveram fortes desgostos uns com os outros e decidiram construir seus caminhos, de tal maneira que eles evitem o encontro com um vizinho em seu caminho para os poços. Como devem ser construídos os caminhos?

Existem três famílias tais que qualquer membro de uma família tentará matar qualquer membro de outra família, sempre que seus caminhos se cruzem. No entanto, o poço, o mercado e a igreja são, por tradição, locais neutros que estão livres de violência. Portanto, as famílias gostariam de tomar caminhos a partir de suas casas para os três lugares seguros sem cruzar com uma família rival. Como isso deve ser feito?

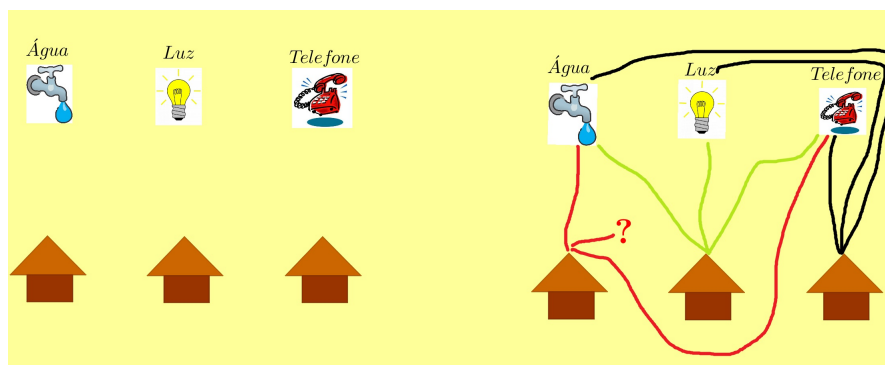


Figura 85: O problema das 3 casas.

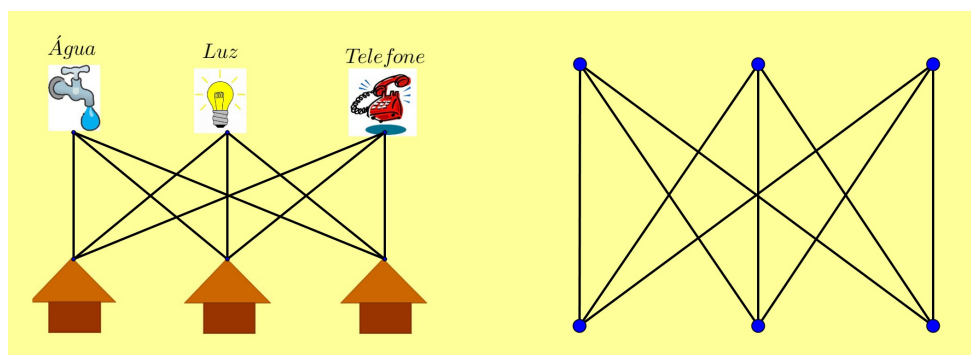


Figura 86: O problema das 3 casas é equivalente a planificar o grafo $K_{3,3}$, o que é impossível.

É comum encontrar soluções onde uma das tubulações passa por dentro de uma casa ou ainda representações do problema onde as casas possuem um vértice em comum.

Neste ponto o leitor já se deu conta que este é um problema de planaridade de grafos. De fato, deve estar claro que este problema é equivalente a tentar encontrar uma representação plana para $K_{3,3}$, e portanto não possui solução.

Mas isso seria desistir rápido demais do problema!

Esgotadas as possibilidades no plano, a pergunta natural a se fazer é: e se o mesmo problema fosse proposto na superfície de uma esfera?

Em geral, pessoas com a ideia de resolver o problema das 3 casas na esfera, vislumbram um encanamento circundando o planeta para evitar que as tubulações se interceptem. Muito provavelmente a maioria destas pessoas nunca pegou uma esfera e rabiscou o problema em sua superfície. Isso por que, apesar de tentadora, esta ideia não funciona!

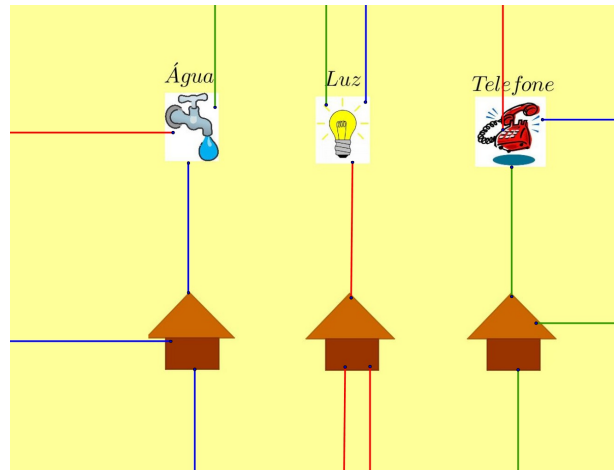


Figura 87: Exemplo de solução incorreta para o problema das 3 casa na superfície de uma esfera.

A impossibilidade de resolver o problema das 3 casas na superfície de uma esfera será estudada ainda neste capítulo, mas por hora o leitor está convidado a pensar sobre o problema, e se convencer de que o problema de representar um grafo sem cruzamento de arestas é equivalente no plano e na esfera.

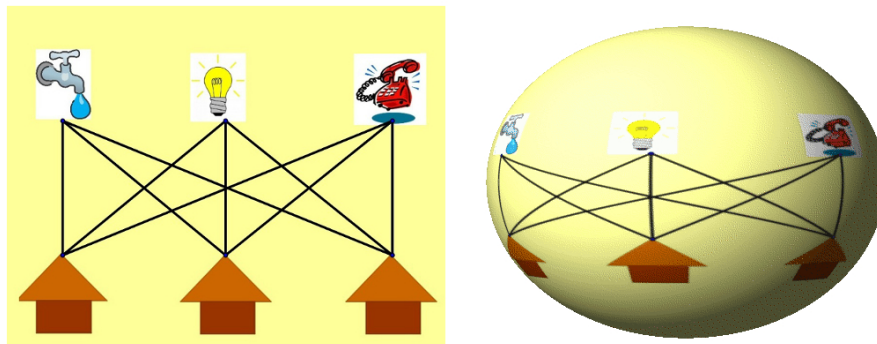


Figura 88: Tanto no plano quanto na esfera, o problema das 3 casas é insolúvel.

Mas por que parar em uma esfera? Será que é possível resolver o problema em alguma outra superfície? Como deve ser esta superfície?

Lembrando do capítulo anterior, $K_{3,3}$ possui uma representação no plano (e consequentemente na esfera) com apenas um cruzamento de arestas. Assim, uma esfera com uma “alça” resolveria o nosso problema de cruzamento de arestas.

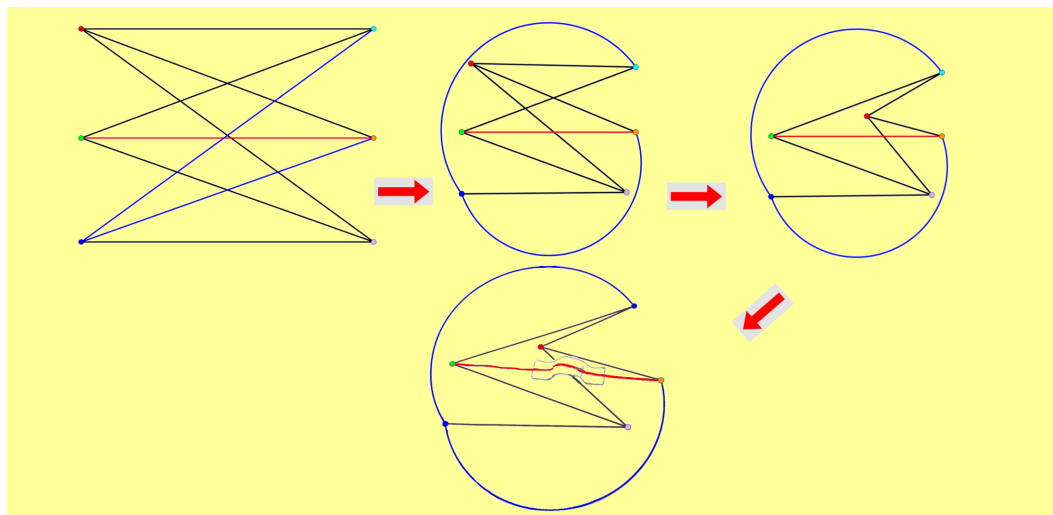


Figura 89: Na sequência, uma alça é adicionada a superfície plana, para que as arestas de $K_{3,3}$ não se cruzem.

Encontra-se assim uma nova superfície (uma esfera com alça) onde é possível representar o grafo sem cruzamento de arestas. Lembrando o Capítulo 1, uma representação de um grafo em uma superfície, sem cruzamentos de arestas é chamada de *imersão* do grafo na superfície.

É interessante notar que ao se adicionar uma alça, cria-se também um “buraco” na superfície, e enquanto uma das arestas passa por cima da alça, a outra passa por dentro do buraco. Por esta razão, outra maneira de resolver o problema seria colocar um buraco na esfera, transformando assim a esfera em um toro (ver Figura 91).

Para se convencer da afirmativa acima, o mais interessante é iniciar pela esfera. Imagine a esfera feita com massa de modelar, e considere uma imersão de um grafo nesta esfera. Não é difícil se convencer que é possível modelar a esfera em diversas outras formas, sem destruir a imersão conseguida. É possível, por exemplo, transformar a esfera em um cubo, ou qualquer outro poliedro, sem prejudicar a imersão.

No caso da “esfera com alça” esta mesma transformação pode ser feita até se obter o toro. É importante notar que, neste caso, é necessário que o buraco seja mantido, ou equivalentemente, que a alça não seja quebrada. Pois existem arestas passando por estes dois locais, e destruí-los quebraria a imersão.

Este assunto será novamente abordado mais a frente, mas antes observe que além de $K_{3,3}$ a mesma ideia pode ser aplicada a K_5 . Ambos os grafos não são imersíveis no plano, porém são imersíveis em um toro (superfície com um furo), pois a única aresta que os torna não planares pode passar pelo furo da superfície.

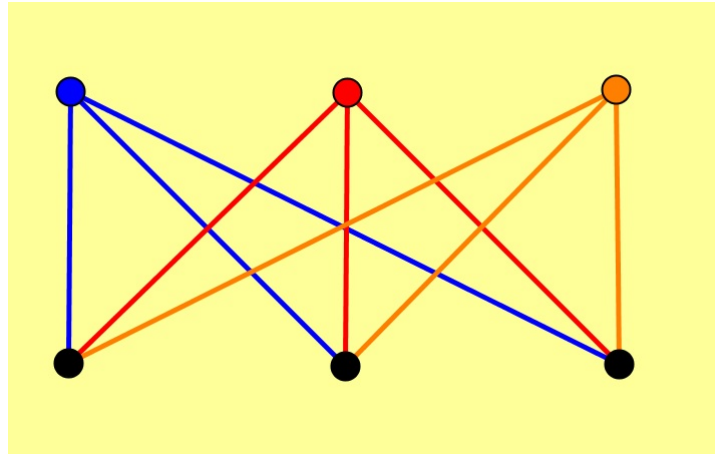


Figura 90: $K_{3,3}$ não é imersível no plano.

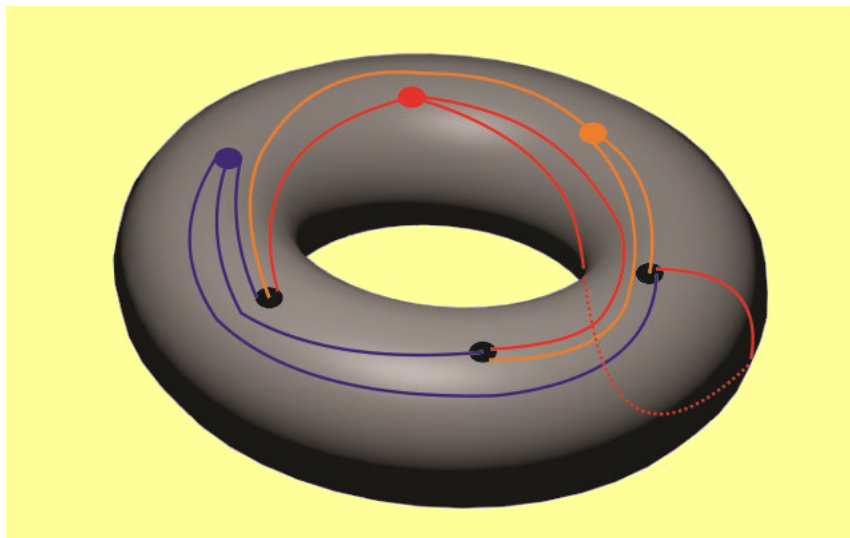


Figura 91: $K_{3,3}$ é imersível no toro.

Nessa mesma linha de raciocínio um grafo que no plano possui dois cruzamentos de arestas seja qual for o seu diagrama, irá precisar de duas alças (ou dois buracos) e poderá ser representado sem cruzamento de arestas em um bitoro.

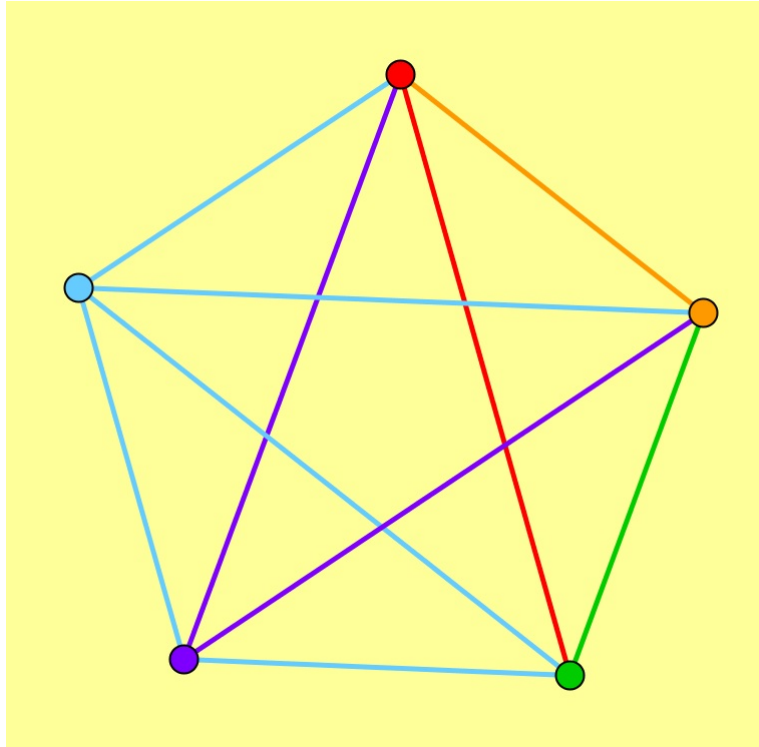


Figura 92: K_5 não é imersível no plano.

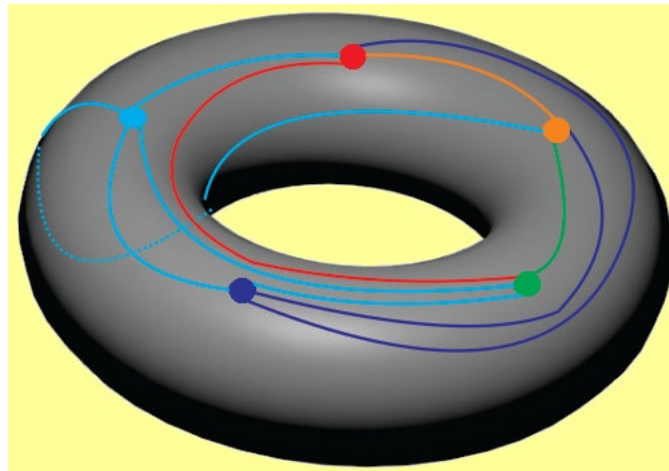


Figura 93: K_5 é imersível no toro.

Essa abordagem do problema gera duas novas perguntas:

- Todo grafo pode ser imerso em alguma superfície deste tipo?
- E qual o número mínimo de alças (buracos) necessárias para planificar um grafo?

4.2 GÊNERO

As respostas para os questionamentos da seção anterior serão respondidas nesta seção.

Para tanto, considere a família de superfícies em \mathbb{R}^3 , indicadas por S_g , $g \geq 0$ definida de modo que S_0 representa a esfera (superfície sem furos), S_1 representa um toro (superfície com um furo), S_2 representa um bitoro (superfície com dois furos) e assim por diante. O índice g é conhecido como *gênero* ou *genus* de uma superfície.

A intenção deste capítulo é estudar imersão de grafos em superfícies, e portanto a descrição de S_g como feita acima é bastante restritiva. Seguindo os comentários feitos na seção anterior, chame por S_g não apenas as superfície com g buracos descrita acima, mas todas aquelas que podem ser encontradas a partir dela usando deformações que

- não crie mais buracos;
- não “cole” dois pontos distintos da superfície;
- não “rasgue” a superfície (separando pontos);

Deste modo, tanto um cubo quanto uma bexiga², ou qualquer outro poliedro, serão representantes de S_0 . A Figura 94 exemplifica melhor estas classes de superfícies.

Note que uma superfície de gênero $g + 1$ pode ser obtida a partir de uma superfície de gênero g , bastando para isso que se adicione uma alça a S_g . É interessante notar que é possível realizar este processo sem modificar uma imersão de um grafo que por ventura esteja representado em S_g .

Deste modo, se um grafo for imersível em S_g ele também é imersível em S_{g+1}, S_{g+2}, \dots e assim por diante.

Com isso é possível estender a definição de gênero para grafos.

Definição 4.1. O gênero de um grafo \mathcal{G} é o menor valor de $g \geq 0$ tal que \mathcal{G} seja imersível em S_g .

² Desde que a bexiga esteja amarrada e de preferência cheia.

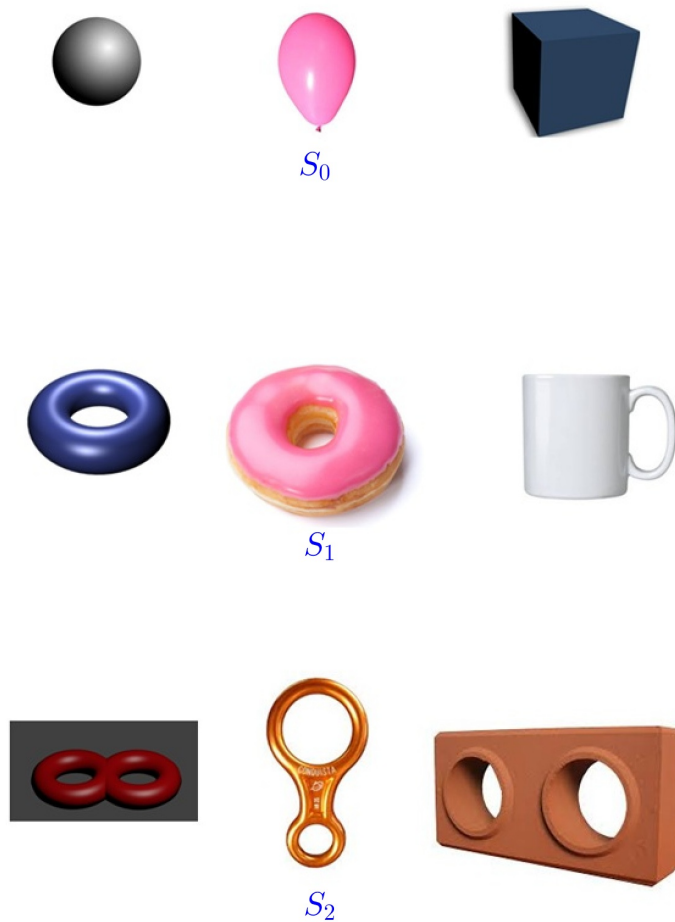


Figura 94: O que caracteriza a superfície S_n é a quantidade de buracos.

4.2.1 Resultados sobre gênero

No início do capítulo foi comentado que o problema de imersão de um grafo em uma esfera é equivalente ao problema da planaridade do grafo. Esta afirmativa pode ser resumida da seguinte forma.

Teorema 4.2. *O conjunto de todos os grafos planares é igual ao conjunto de todos os grafos com $g = 0$ ³.*

Demonstração. (\Rightarrow) Qualquer grafo que possui $g = 0$ é planar.

³ Este teorema é suficiente para mostrar que não é possível encontrar uma solução para o problema das 3 casas na superfície de uma esfera.

Seja \mathcal{G} um grafo sem cruzamento de arestas que está desenhado em uma superfície esférica (com $g = 0$).

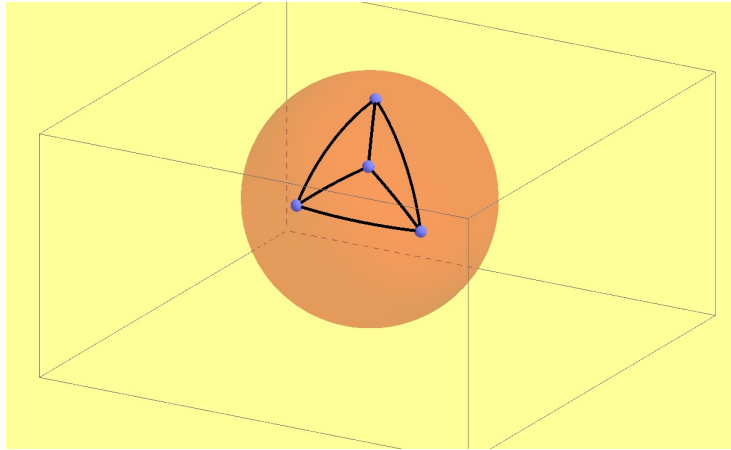


Figura 95: O grafo planar K_4 desenhado em uma superfície esférica S_0 .

Escolha um ponto da esfera que não pertença à representação do grafo (não é vértice e nem ponto de uma aresta). Retire este ponto e deforme esta nova superfície até que ela fique plana, com o grafo \mathcal{G} no interior desta superfície plana. Desta forma se obtém uma representação planar deste grafo.

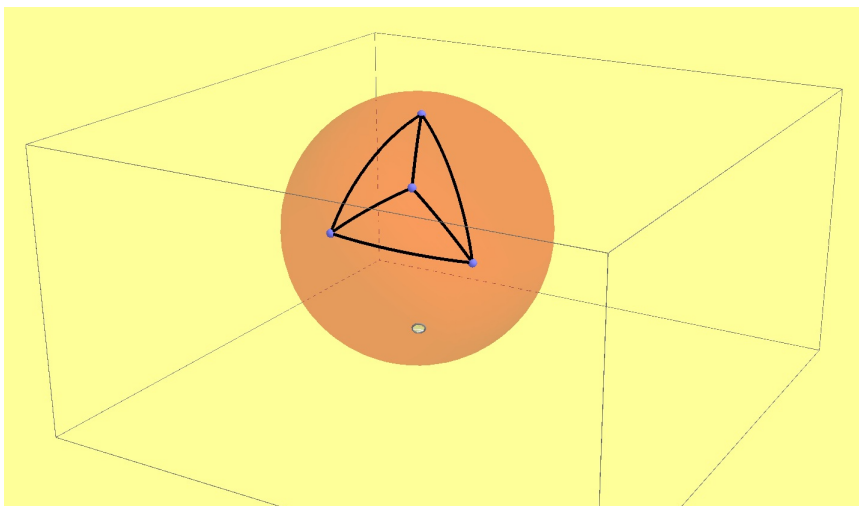


Figura 96: Um ponto é retirado da superfície S_0 .

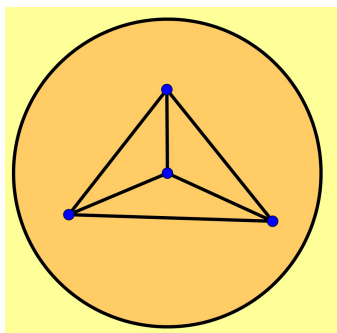


Figura 97: Resultado final da planificação da superfície S_0 .

Esse processo pode ser facilmente observado utilizando uma bexiga.

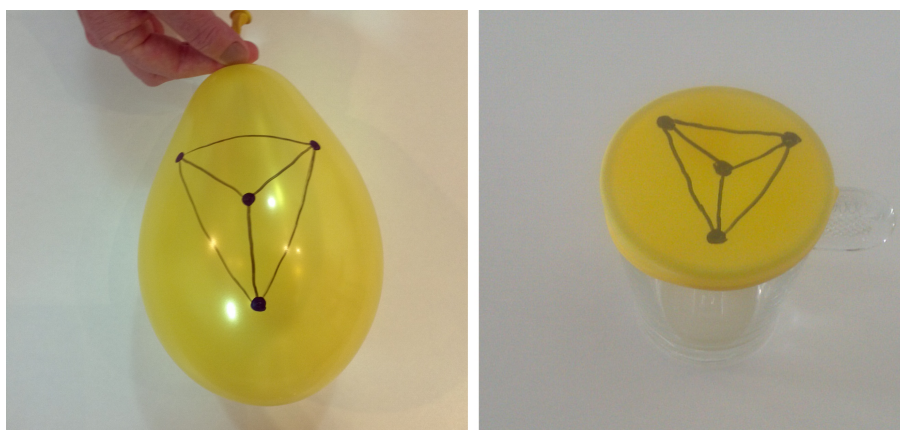


Figura 98: Planificação da superfície S_0 utilizando uma bexiga.

(\Leftarrow) Todo grafo planar possui $g = 0$.

Seja \mathcal{G} um grafo planar.

A superfície plana onde este grafo está desenhado pode ser deformada até que se obtenha uma casca esférica, que pode agora ser “colada” sobre uma esfera.

Esta representação \mathcal{G} sobre a esfera não possui cruzamento de arestas, e portanto \mathcal{G} possui gênero $g = 0$.

Uma abordagem mais formal para demonstrar este resultado pode ser feita com o auxílio da chamada *projeção estereográfica*.

Inicialmente apoie uma esfera em um plano, tendo como ponto de contato o polo Sul (S). Em seguida, dado um ponto A da esfera distinto do polo Norte (N), trace a

(única) reta determinada por este ponto e o polo Norte. Esta reta cruza o plano em um ponto B , que será definido então como a projeção de A no plano.

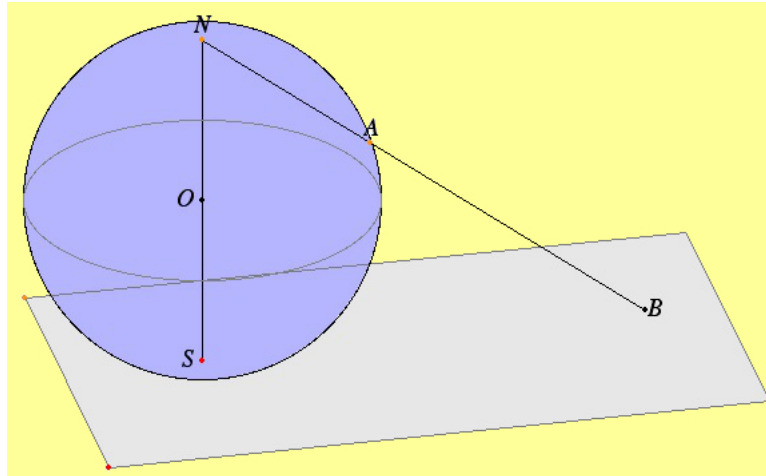


Figura 99: A projeção estereográfica do ponto A da esfera é o ponto B do plano.

Observe que o polo Sul será projetado nele mesmo!! E o polo Norte não possui projeção no plano, pois qualquer reta tangente a esfera no polo Norte será paralela ao plano tangente no polo Sul. Este fato é equivalente à necessidade de se retirar o ponto da esfera, como feito na primeira demonstração.

A seguir, o leitor pode ser convencido facilmente, sem se preocupar com cálculos, que este procedimento é inversível. Ou seja, para cada ponto B do plano é possível traçar uma reta ligando o ponto B ao polo Norte da esfera, marcando o ponto A onde cruza a esfera.

É um pouco mais complicado (mas ainda possível) observar que a projeção estereográfica leva curvas contínuas na esfera em curvas contínuas no plano. E se duas curvas não possuem interseção na esfera, suas projeções também não possuirão. O mesmo vale para sua inversa.

Como consequência, a projeção de um grafo imerso na esfera não possuirá cruzamento de arestas, sendo portanto planar.

O mesmo raciocínio usando a inversa da projeção mostra que se o grafo é planar, ele pode ser imerso na esfera.

Os cálculos que mostram a continuidade da projeção e de sua inversa são longos e tediosos, e por isso foram colocados no Apêndice B.

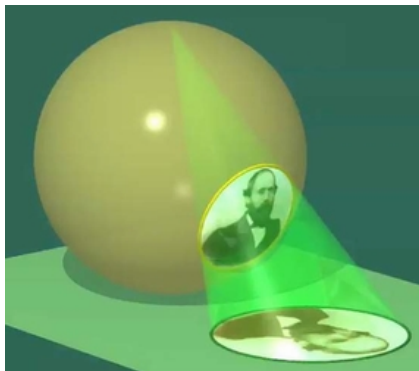


Figura 100: A projeção estereográfica é uma função inversível.

□

Proposição 4.3. *Todo grafo possui um gênero.*

Demonstração. Seja \mathcal{G} um grafo qualquer. Se \mathcal{G} é planar, já foi provado que $g = 0$.

Se \mathcal{G} não for planar, então trace \mathcal{G} sobre uma superfície esférica S_0 . Agora, onde houver um cruzamento de arestas adicione uma “alça”, ou seja, uma deformação que elimine o cruzamento das arestas.

Como o grafo \mathcal{G} possui um número finito de arestas, haverá também um número finito n de “pontes” em S_0 .

Cada uma dessas pontes pode ser deformada e transformada em buraco, revelando a superfície S_n e o gênero n do grafo. □

Proposição 4.4. *Se um grafo \mathcal{G} possui gênero g , então ele pode ser desenhado sem cruzamento de arestas em qualquer superfície S_n , com $g \leq n$.*

Demonstração. Suponha que o grafo \mathcal{G} possa ser desenhado em uma superfície S_g sem cruzamento de arestas.

Note que sempre é possível deformar uma região de S_g adicionando buracos na superfície, transformando a superfície S_g na superfície S_n , onde $g \leq n$. □

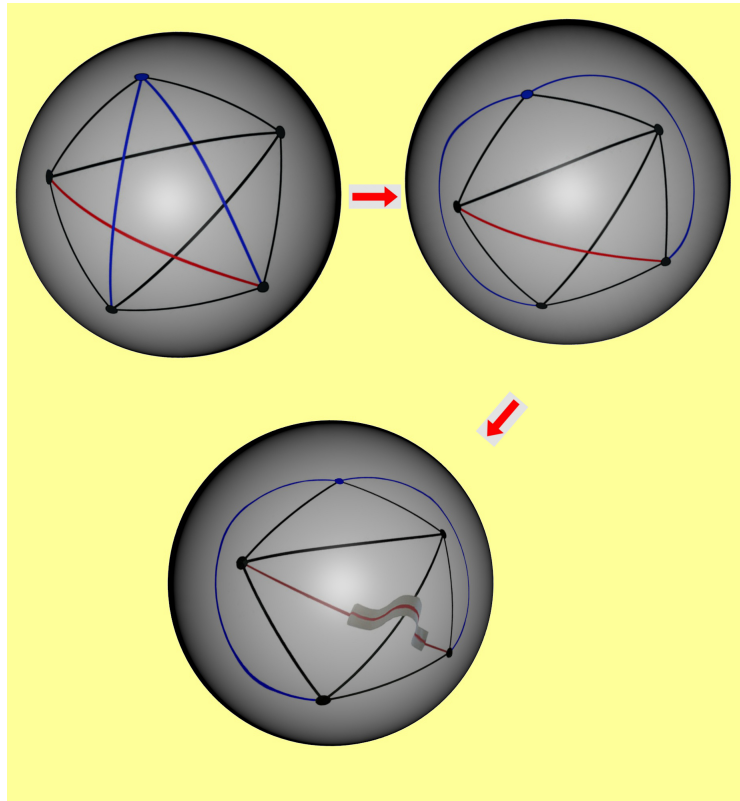


Figura 101: Na sequência, foi criada uma ponte para que a aresta vermelha de K_5 não intercepte outras arestas.

4.3 A FÓRMULA DE EULER PARA IMERSÕES

Este capítulo será finalizado com uma pergunta bastante natural: como o gênero de um grafo afeta a fórmula de Euler?

Observe que uma vez encontrada uma imersão de um grafo em uma superfície, passa a fazer sentido o conceito de faces nesta imersão, e com isso fica natural perguntarmos sobre a validade da fórmula de Euler para este grafo.

Algumas questões surgem então naturalmente.

- Existe realmente uma fórmula similar a de Euler para imersões, ou o total de faces depende da imersão escolhida?
- Se existir uma fórmula de Euler, como ela é influenciada pelo gênero do grafo, ou mesmo da superfície onde está representada?

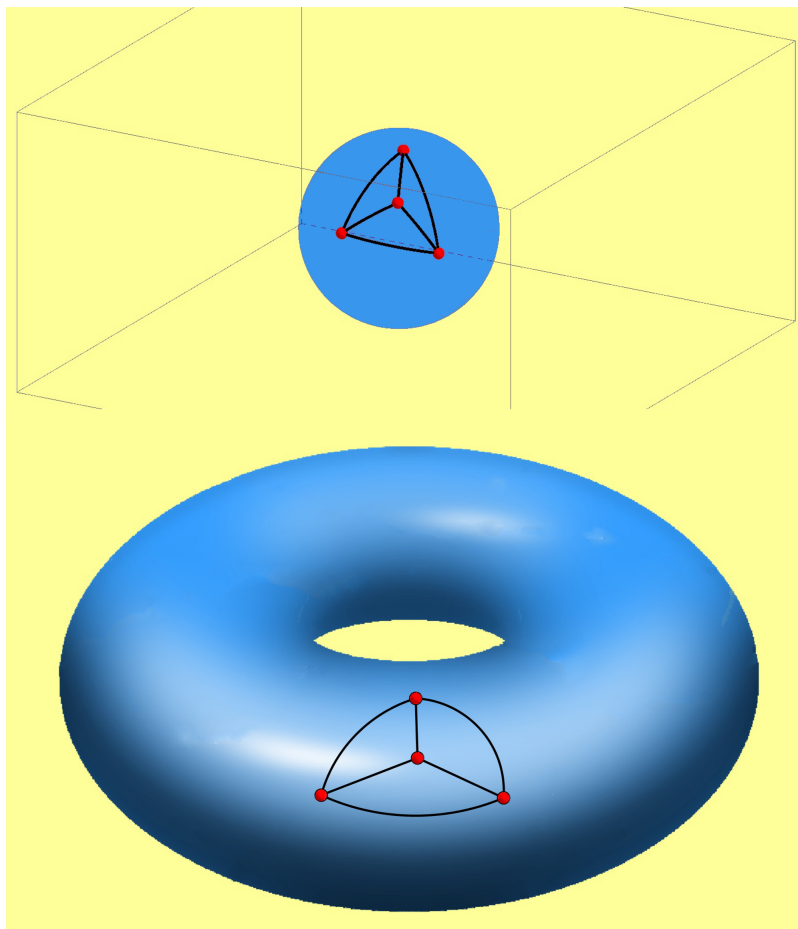


Figura 102: Se K_4 é imersível em uma esfera (de superfície S_0) então ele também é imersível em um toro (com superfície S_1).

Nenhuma das questões tem resposta simples, mas todo o estudado agora gera algumas expectativas.

Para grafos de gênero 0 (planares) a fórmula de Euler não depende da imersão escolhida, e nem do gênero da superfície escolhida. Imersões na esfera são similares a representações no plano. A projeção estereográfica e sua inversa relacionam como face interna da representação na esfera em uma face da representação no plano. Fica como desafio para o leitor se convencer que a face que contém o polo norte é associada com a face externa do diagrama planar. Com isso o total de faces é a mesma, e a fórmula de Euler vale para estas imersões.

Ainda nos grafos planares, a segunda questão não tem resposta tão simples. Como foi visto, um grafo planar pode ser imerso em superfícies de qualquer gênero, mas quando imerso em uma superfície de gênero superior ao seu, o total de faces pode

sim depender da imersão escolhida. Para ver isso considere o grafo K_3 . Podemos representá-lo no toro, por exemplo, usando apenas um triângulo, como faríamos na esfera ou no plano. Neste caso a imersão tem exatamente duas faces. Outra forma de representar K_3 no toro, é como um anel passando pelo buraco da superfície. Mas neste caso o total de faces é apenas 1!

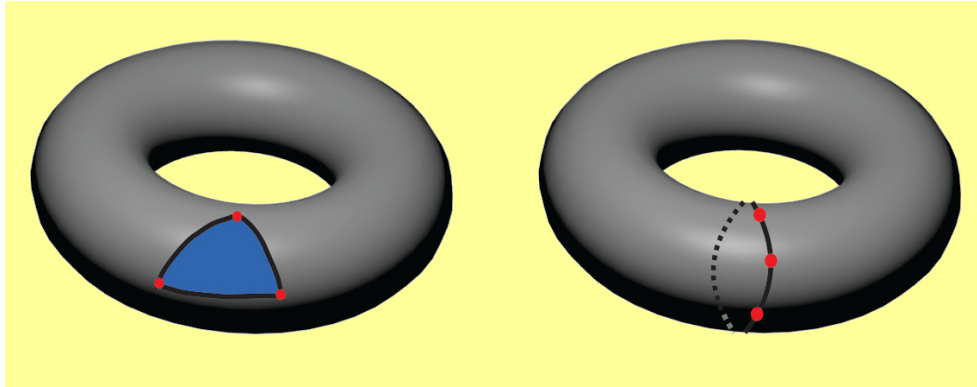


Figura 103: Duas imersões de K_3 em S_1 . A da esquerda tem duas faces, enquanto a da direita tem apenas uma face.

Fica claro então que para encontrar uma fórmula de Euler a melhor escolha é restringir o estudo a imersões de grafos em superfícies de mesmo gênero do grafo.

Entendidos os grafos de gênero 0, o próximo passo então é olhar para grafos de gênero 1, e os mais simples são justamente $K_{3,3}$ e K_5 .

Para contar o número de faces em cada um destes grafos, basta representá-lo no toro e contar o número de faces. Fica o convite ao leitor para fazer este exercício, e assim descobrir que $K_{3,3}$ possui apenas 3 faces. Com isso, teríamos

$$V - A + F = 6 - 9 + 3 = 0,$$

e a fórmula de Euler não é verificada.

Fazendo o mesmo procedimento para K_5 , encontra-se que este possui 5 faces, e portanto

$$V - A + F = 5 - 10 + 5 = 0.$$

Assim como na fórmula de Euler original, um padrão parece emergir. Este padrão de fato existe e dado pelo seguinte resultado.

Teorema 4.5. *(Segunda fórmula de Euler)*

Se \mathcal{G} é um grafo conexo de gênero g com V vértices, F faces e A arestas, então para qualquer imersão em S_g vale que

$$V - A + F = 2 - 2g.$$

Demonstração. Conforme foi visto no capítulo de planaridade no Teorema 3.3 ,

$V - A + F = 2$ para grafos planos. Como comentado no preâmbulo desta seção, imersões na esfera para grafos com $g = 0$ possui o mesmo número de faces que nos diagramas planares. Assim, a fórmula é válida para $g = 0$.

Seja \mathcal{G} um grafo conexo de gênero g . Então \mathcal{G} pode ser representado em uma superfície S_g (ou seja, uma superfície com g buracos) sem cruzamento de arestas.

Para que \mathcal{G} seja traçado sem cruzar arestas, algum ciclo de \mathcal{G} deve passar por cada buraco da superfície S_g . Se isso não ocorresse, seria possível fechar este buraco, reduzindo o gênero da superfície, sem alterar a imersão. Mas isso é um absurdo, dado que o gênero do grafo é o mesmo da superfície considerada.

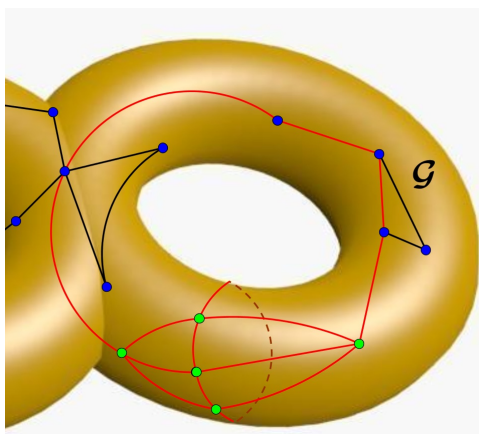


Figura 104: Em vermelho está destacado um subgrafo de \mathcal{G} homeomorfo a K_5 .

Fazendo um corte em todos os buracos da superfície S_g de modo que cada corte passe exatamente pelos vértices e arestas dos ciclos dentro dos buracos de \mathcal{G} , estes ciclos serão duplicados e também as arestas e vértices que formam estes ciclos.

Na sequência, tampe com superfícies circulares os cortes feitos. Observe que são necessárias 2 faces para cada buraco cortado.

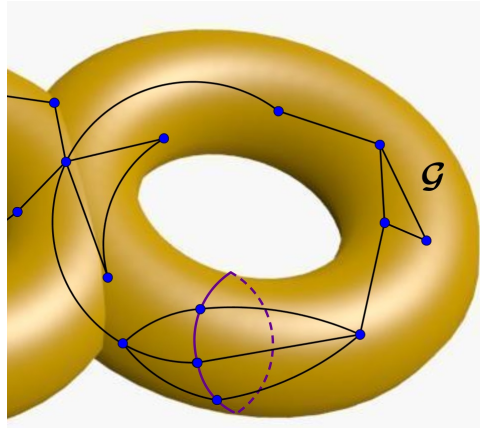


Figura 105: Um ciclo do subgrafo K_5 passa por um furo da superfície.

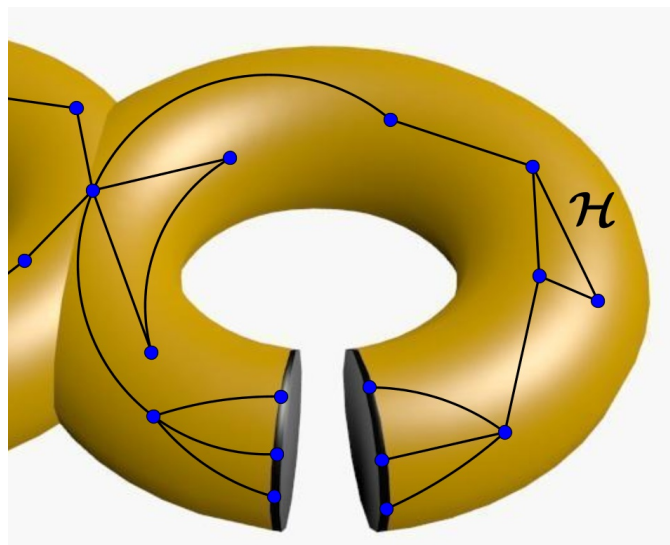


Figura 106: O novo grafo \mathcal{H} sem cruzamento de arestas e imerso em S_0 .

É interessante observar que cada um destes cortes não desconecta o grafo. Isso ocorre pois se isso ocorresse, seria possível cortar um destes anéis sem passar por nenhum vértice ou aresta, reduzindo o gênero da superfície.

Essa nova superfície não contém buracos (todos foram cortados) e portanto está em S_0 . Como este procedimento não desconectou grafo, e nem criou cruzamento de arestas, tem-se assim um novo grafo \mathcal{H} imerso em S_0 , para o qual vale que

$$V_{\mathcal{H}} - A_{\mathcal{H}} + F_{\mathcal{H}} = 2.$$

Sendo k , a quantidade de novos vértices criados, vale que

$$k = V_{\mathcal{H}} - V_{\mathcal{G}}.$$

Note que o total de arestas criadas também será k , pois em todo ciclo o número de vértices deve ser obrigatoriamente igual ao número de arestas.

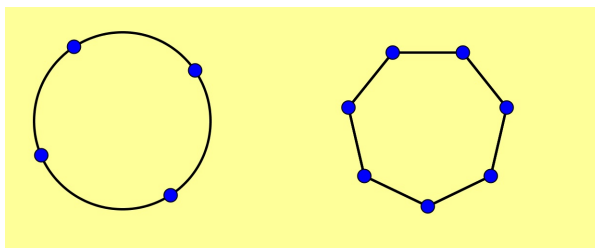


Figura 107: Ciclos possuem a mesma quantidade de vértices e arestas.

Assim também é possível escrever que

$$k = A_{\mathcal{H}} - A_{\mathcal{G}}.$$

Com relação às faces, foram criadas 2 novas faces para cada buraco em \mathcal{G} .

Então pode-se escrever que

$$F_{\mathcal{H}} - F_{\mathcal{G}} = 2g.$$

Assim,

$$V_{\mathcal{H}} - A_{\mathcal{H}} + F_{\mathcal{H}} = 2, V_{\mathcal{H}} = V_{\mathcal{G}} + k, A_{\mathcal{H}} = A_{\mathcal{G}} + k \text{ e } F_{\mathcal{H}} = F_{\mathcal{G}} + 2g.$$

Portanto

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{H}} - A_{\mathcal{H}} + F_{\mathcal{H}} &= 2 \\ \Leftrightarrow V_{\mathcal{G}} + k - (A_{\mathcal{G}} + k) + F_{\mathcal{G}} + 2g &= 2 \\ \Leftrightarrow V_{\mathcal{G}} + k - A_{\mathcal{G}} - k + F_{\mathcal{G}} + 2g &= 2 \\ \Leftrightarrow V_{\mathcal{G}} - A_{\mathcal{G}} + F_{\mathcal{G}} &= 2 - 2g. \end{aligned}$$

Este resultado também pode ser obtido por indução:

Seja \mathcal{G} um grafo com V vértices, A arestas, F faces e gênero $g + 1$.

Fazendo um corte em um buraco da superfície S_{g+1} de modo que o corte passe exatamente pelos vértices e arestas do ciclo dentro do buraco de \mathcal{G} , este ciclo será duplicado, e conseqüentemente as arestas e vértices que formam estes ciclos também.

Fechando com superfícies circulares os cortes feitos em \mathcal{G} , obtém-se um novo grafo \mathcal{G}^* com $V + k$ vértices, $A + k$ arestas, $F + 2$ faces e gênero g .

Supondo que a afirmação seja verdadeira para \mathcal{G}^* , tem-se:

$$\begin{aligned}V + k - (A + k) + F + 2 &= 2 - 2g \\ \Leftrightarrow V + k - A - k + F &= 2 - 2g - 2 \\ \Leftrightarrow V - A + F &= 2 - 2(g + 1).\end{aligned}$$

□

Mais informações podem ser encontradas em [6] e [11]

PLANOS DE AULA

O leitor familiarizado com os Parâmetros Curriculares Nacionais (P.C.N.) do ensino médio identificará imediatamente a excelente ferramenta que a Teoria dos Grafos pode se tornar para que o aluno possa constituir habilidades e competências defendidas e recomendadas pelos PCN como:

- Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas;
- Identificar variáveis relevantes e selecionar os procedimentos necessários para produção, análise e interpretação de resultados de processos ou experimentos científicos e tecnológicos;
- Entender a relação entre o desenvolvimento das Ciências Naturais e o desenvolvimento tecnológico, e associar as diferentes tecnologias aos problemas que se propuseram e propõem solucionar. [13]

O material proposto neste capítulo foi testado nos anos de 2013 e 2014 em salas do 9º ano do ensino fundamental em uma disciplina chamada Oficina de Matemática.

Em 2013 a atividade teve duração de um semestre, o que se mostrou um pouco cansativo para os alunos.

Em 2014 a oficina foi reduzida para apenas 10 aulas, perdendo em conteúdo, mas ganhando em dinamismo e também na aprovação final dos alunos.

Ainda sob a influência da LDB e dos PCN, o espírito destes planos de aula é promover atividades interdisciplinares para retirar a Matemática do isolamento didático em que tradicionalmente se confina no contexto escolar.

Para que esse trabalho fosse usado sem restrições tanto no ensino médio quanto no ensino fundamental, muitos temas curiosos e relevantes tiveram que ser deixados para trás, como grafos Hamiltonianos, o problema do Carteiro Chinês, problemas de coloração e toda a parte de algoritmos computacionais na resolução de problemas.

O critério adotado para a escolha dos assuntos abordados neste trabalho foi em primeiro lugar, algo que realmente pudesse ser aplicado tanto em uma sala de ensino médio quanto em uma de ensino fundamental e, em seguida os tópicos preferidos pelos alunos após a experiência semestral citada neste capítulo.

Estes planos de aula contém atividades que podem ser entregues aos alunos integral ou parcialmente, todos os exercícios resolvidos, sugestões de roteiros de aulas e um precioso tópico chamado observações metodológicas onde relato minhas experiências pessoais com as aulas de grafos.

Apesar de apresentar um roteiro completo, considero estes planos de aula apenas uma sugestão de trabalho para o professor. Cabe ao docente adequar este trabalho para a realidade da instituição de ensino onde trabalha.

Muitos dos exercícios deste capítulo foram retirados de [7].

5.1 AULA 1 - O QUE É UM GRAFO

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Metas:
 - Apresentar a definição de grafo.
 - Apresentar alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando grafos.
 - Apresentar a ideia de modelagem.
- Roteiro:
 - Apresentar os 4 problemas iniciais e suas aplicações.
 - Definir o conceito de grafo.
 - Resolver o problema 1 dando ênfase na ideia de modelagem.
 - Deixar como tarefa o Exercício 2.

- Observações metodológicas:

A aula apresenta alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando grafos.

O professor deve explicar quais são os problemas, sem resolvê-los. A ideia é apenas aguçar a curiosidade dos alunos.

A definição formal do que é um grafo pode ser feita também após a resolução do Exercício 1.

Quando resolver o problema 1 o professor deve desenhar os dois primeiros grafos e deixar que os alunos façam os restantes, para que eles se habituem a construir grafos.

Ainda no Exercício 1 o professor deve tomar o cuidado de verificar se todos os alunos sabem como é o movimento do cavalo no jogo de xadrez.

Após a resolução do Exercício 1 deve ser comentado que a maioria das pessoas resolveria este problema por tentativa e erro e como modelando adequadamente o problema pode-se encontrar não apenas uma solução, mas uma família delas.

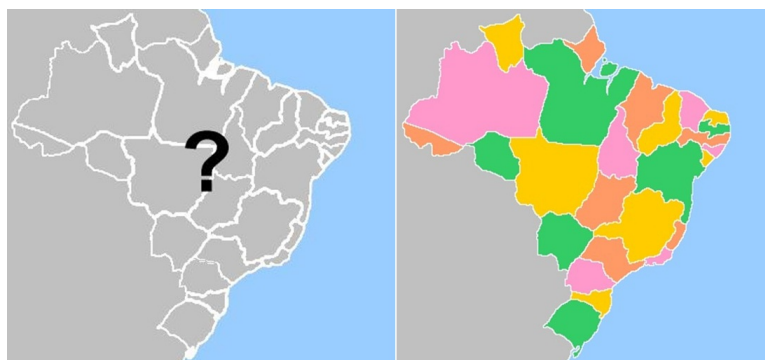
AULA 1 - INTRODUÇÃO

Motivação

Antes de começar a estudar grafos, veja alguns problemas que podem ser resolvidos utilizando a Teoria dos Grafos.

1. COLORAÇÃO DE MAPAS

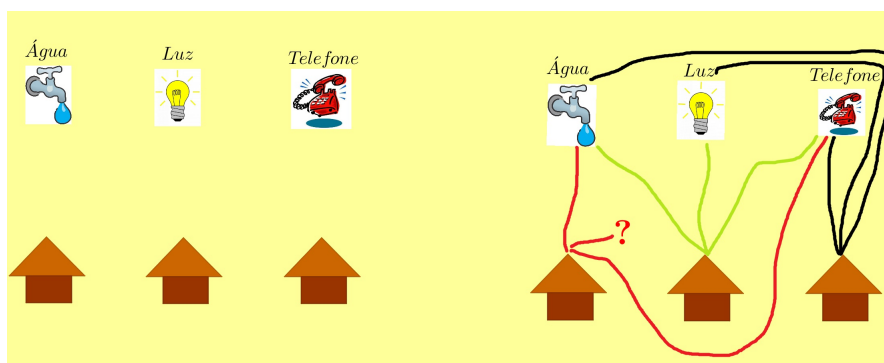
Qual é o número mínimo de cores necessário para colorir um mapa de modo que estados vizinhos não tenham a mesma cor?



Usando grafos pode-se garantir que com apenas quatro cores é possível colorir qualquer mapa plano.

2. O PROBLEMA DAS 3 CASAS

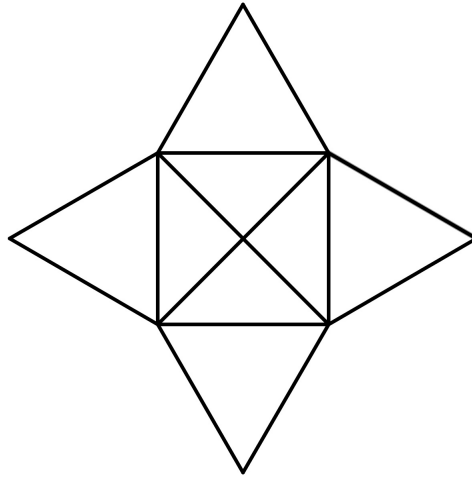
É possível conectar os serviços de água, energia e telefone em cada uma das três casas sem haver cruzamento de tubulação?



A Teoria dos Grafos mostra que isto não é possível!

3. CIRCUITOS

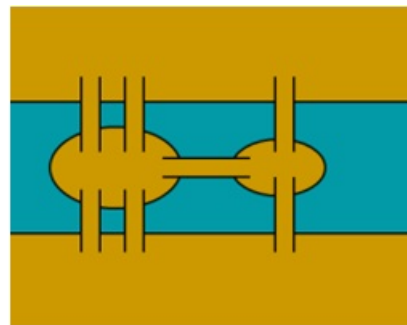
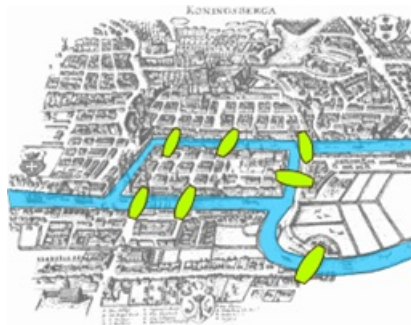
É possível reproduzir a figura abaixo sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo lugar?



Com grafos mostra-se que, neste caso, isto não é possível.

4. O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG

Königsberg era uma cidade da antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado, na atual Rússia. Na parte central de Königsberg, fluíam vertentes do rio Prególia, formando duas ilhas que eram interligadas com a cidade por sete pontes, como representado nas figuras abaixo.

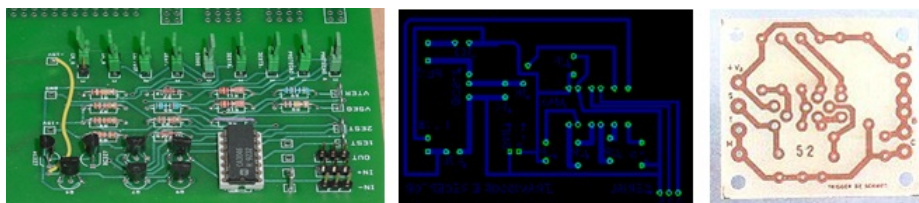


Um desafio, proposto pelos habitantes de Königsberg era fazer um passeio pela cidade utilizando as sete pontes, porém passando apenas uma vez sobre cada ponte. Este desafio é possível? Ou seja, sair de terra firme, passar uma única vez em cada uma das pontes e retornar ao ponto de origem?

Com grafos, pode-se provar que isto também não é possível.

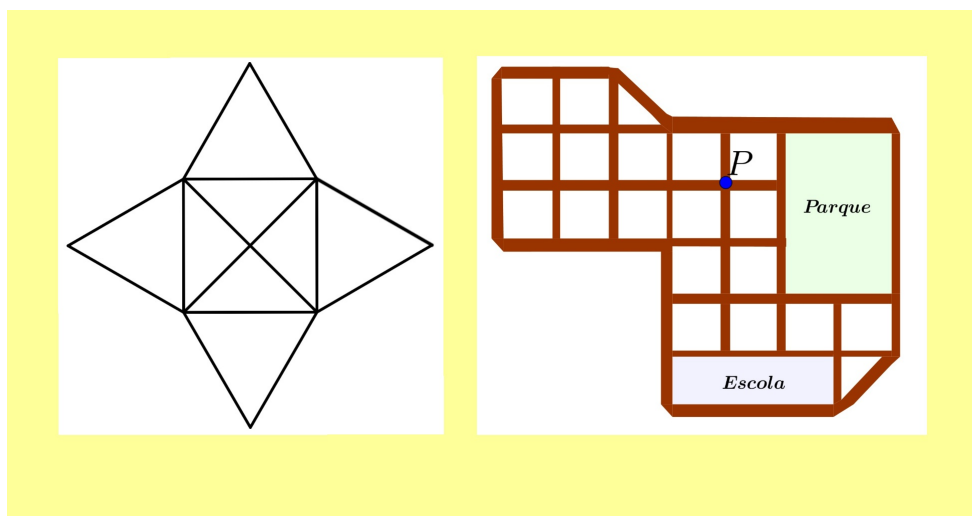
E PORQUE DEVO ESTUDAR ESTES PROBLEMAS?

- Diminuindo a quantidade de cores em um mapa facilitamos a sua compreensão e minimiza-se seu custo de produção.
- Ao invés de sobrepor tubulações no problema das 3 casas, pense em placas de circuito integrado.



Esquemas de ligações que evitem cruzamentos são essenciais para diminuir os custos e aumentar a velocidade de produção.

- E quanto à figura que deve ser feita sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo lugar?



Imagine um policial fazendo sua ronda em um bairro. Ele deve passar por cada rua pelo menos uma vez e, se não for possível passar uma única vez em cada rua ele deve planejar um percurso de modo que possa percorrer todo o caminho repetindo o menor número possível de ruas, para economizar combustível e também deixar sua ronda mais eficiente.

Já o problema das pontes de Königsberg foi onde tudo começou e será explicado com mais detalhes em uma aula posterior.

Definição de Grafo

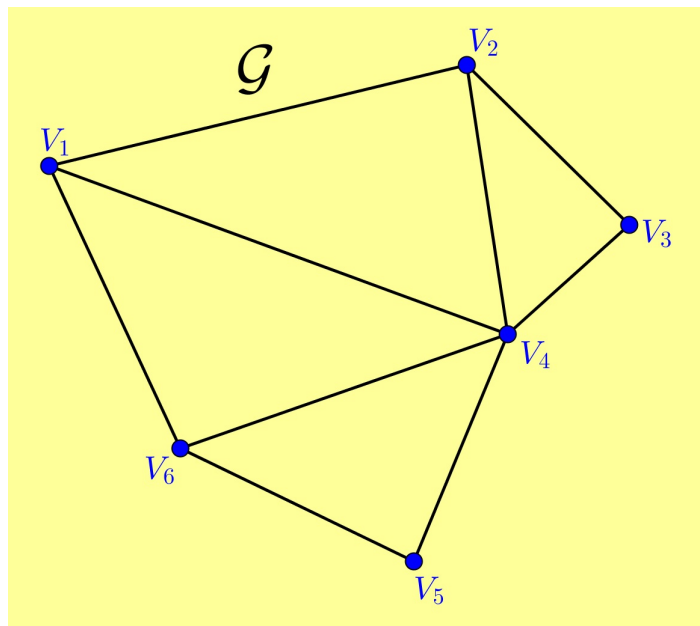
Um grafo $\mathcal{G}(V; A)$ é uma estrutura matemática formada por dois conjuntos:

- Um conjunto não nulo $V = \{V_1; V_2; \dots; V_n\}$, onde seus elementos são chamados de vértices ou nodos.
- Um conjunto A , que será chamado de conjunto de arestas, formado por pares (não necessariamente distintos ou ordenados) de elementos de V .

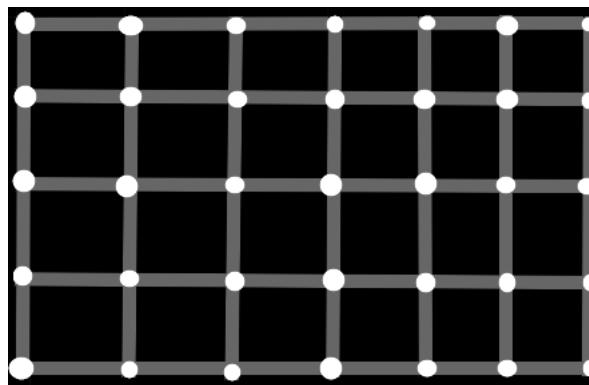
Vértices são geralmente representados por pontos e arestas costumam ser representadas por segmentos de reta unindo dois vértices.

Simplificando muito esta ideia, pode-se simplesmente dizer que grafo é um desenho, que pode ser representado por pontos e retas.

Na figura abaixo, tem-se o grafo \mathcal{G} , onde $V = \{V_1; V_2; V_3; V_4; V_5; V_6\}$ e $A = \{\{V_1; V_2\}; \{V_1; V_4\}; \{V_1; V_6\}; \{V_2; V_3\}; \{V_2; V_4\}; \{V_3; V_4\}; \{V_4; V_5\}; \{V_4; V_6\}; \{V_5; V_6\}\}$.



Seguem mais alguns exemplos de imagens que podem ser consideradas grafos:

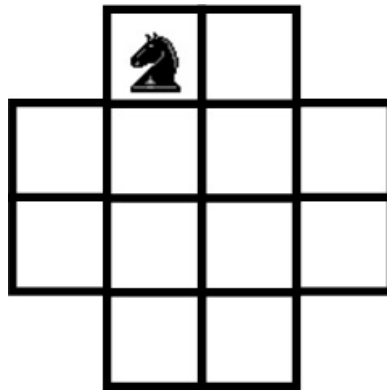


Apenas com esta ideia simples de modelar um problema utilizando pontos e retas já é possível resolver problemas interessantes.

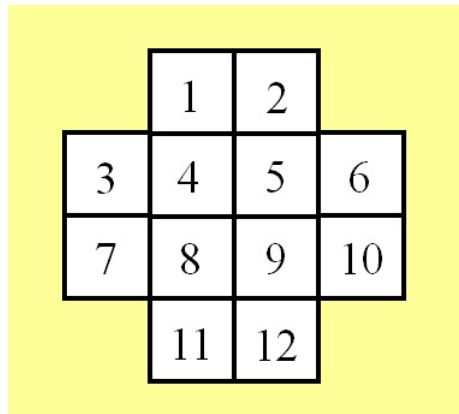
ATIVIDADES

Exercício 1 - O problema do passeio do cavalo

É possível mover um cavalo do jogo de xadrez de modo que ele passe por cada casa deste tabuleiro exatamente uma vez e terminar na mesma casa que começou?

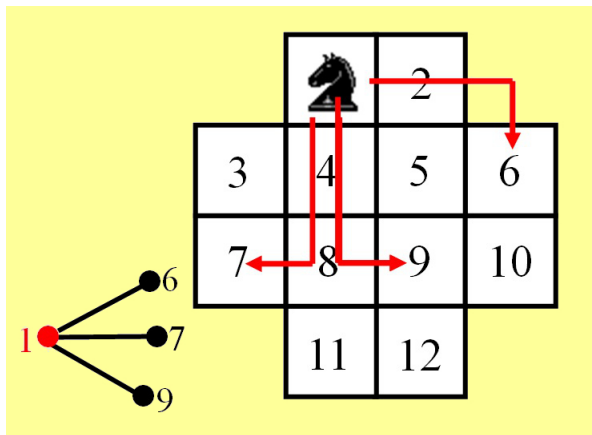
**Modelagem**

Inicialmente deve-se “batizar” as casas do tabuleiro, para que a comunicação fique mais eficiente.

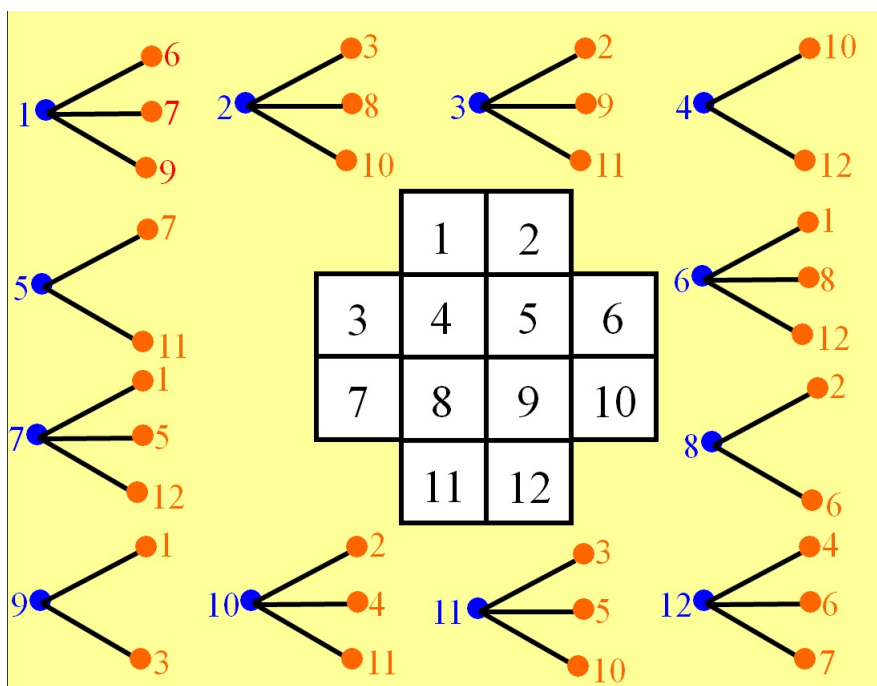


Feito isso, deve-se associar as casas do tabuleiro a vértices e, os caminhos que ligam uma casa de partida até a casa de chegada do cavalo, por arestas.

Aqui é representado o grafo da posição 1 do cavalo. Ele pode se locomover para as casas 6, 7 e 9.



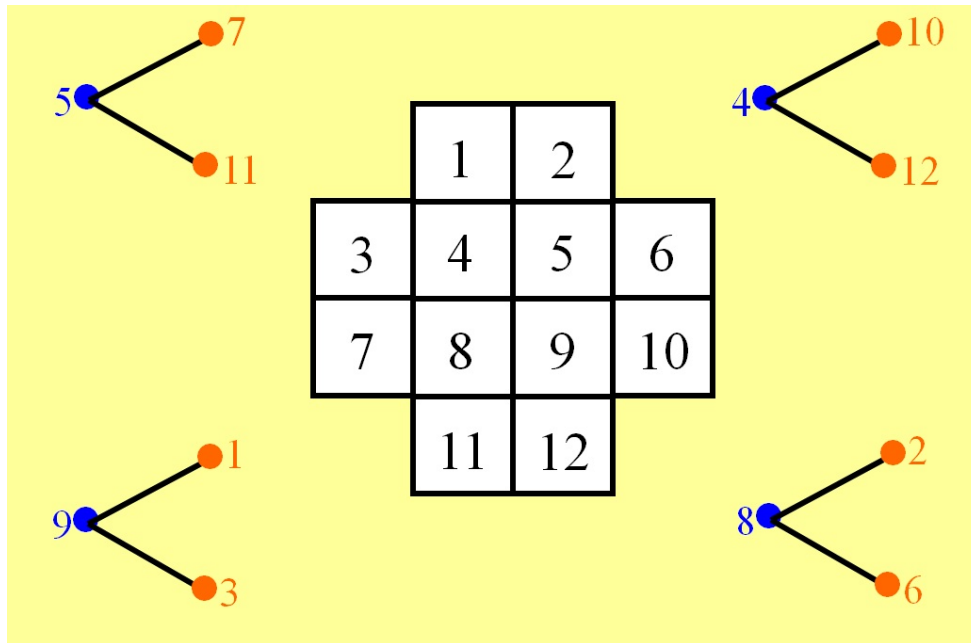
Construindo os outros 11 grafos possíveis, tem-se:



A próxima parte é muito importante:

Observe que dos 12 grafos representados acima, quatro são diferentes dos demais.

Os grafos das posições 4, 5, 8 e 9 tem apenas duas arestas enquanto os demais tem três.



Isso quer dizer que para concluir a tarefa de passar por todas as casas apenas uma vez, os grafos com duas arestas “são caminhos obrigatórios”.

Em outras palavras, o grafo da posição 5 diz que, uma vez que o cavalo chegue na posição 7, deve-se seguir da posição 7 para a posição 5 e da posição 5 para a posição 11.

Esta informação de quais são os caminhos obrigatórios é o que faltava para resolver o exercício.

Partindo da posição 1 é necessário fazer a primeira escolha.

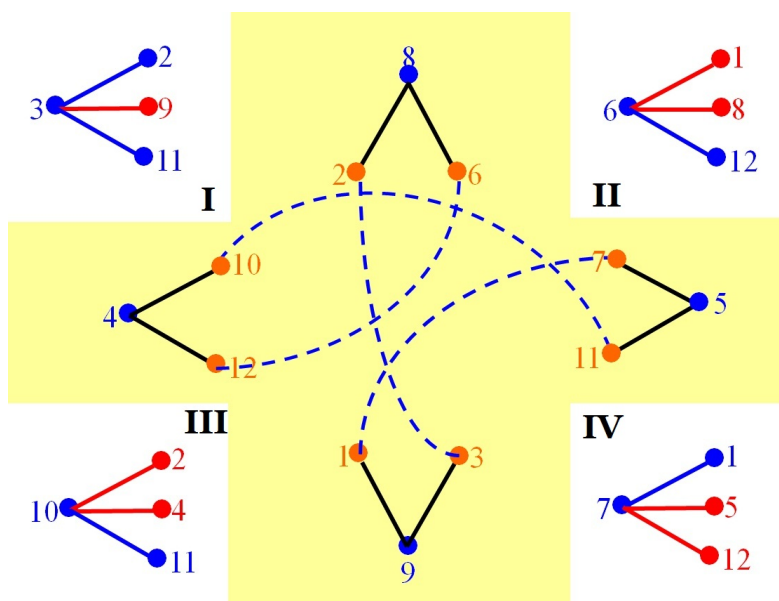
Das 3 possibilidades que o grafo da posição 1 apresenta, escolhe-se a posição 9 com ponto de chegada, que é um dos caminhos obrigatórios do cavalo.

Da posição 9, só se pode ir para a posição 3.

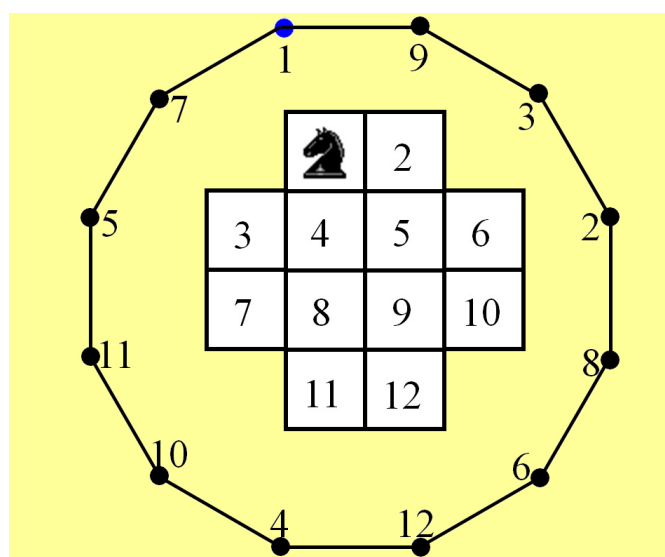
A partir da posição 3 pode-se escolher entre as posições 2, 9 ou 11(veja o grafo da posição 3). A posição 9 já foi usada, então deve-se escolher entre as posições 2 e 11 observando que qualquer decisão leva a outro caminho obrigatório.

Escolhendo arbitrariamente a posição 2 tem-se o caminho obrigatório de 2 para 8 e de 8 para 6.

Continuando com este raciocínio para os demais grafos, forma-se a seguinte figura:



Por fim, note que o “formato” deste caminho pode ser representado de uma maneira mais agradável.



Observe que estas imagens não mostram uma única solução e sim, uma família de soluções. Pode-se, por exemplo, olhar para esta figura e determinar duas soluções possíveis para o problema se o cavalo iniciar o passeio pela casa de posição 7.

Tente agora utilizando a mesma técnica encontrar outras soluções para este problema.

Exercício 2 (Tarefa) - O problema das 9 cidades

Na Novelândia existem 9 cidades, chamadas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Um turista nota que duas cidades estão ligadas por uma estrada se, e somente se, o número formado pelos nomes das duas cidades é divisível por 3. Por exemplo, há uma estrada ligando as cidades 1 e 8, pois 18 é divisível por 3 (e 81 também), mas não há nenhuma estrada ligando diretamente as cidades 2 e 6, pois 26 não é divisível por 3. É possível o turista ir da cidade 1 à cidade 9?

5.2 AULA 2 - GRAU DE UM VÉRTICE

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Meta:
 - Definir grau de um vértice e suas propriedades.
- Roteiro:
 - Resolver a tarefa da Aula 1.
 - Definir o que é grau de um vértice.
 - Apresentar a propriedade da soma dos graus de um vértice.
 - Resolver o Exercício 1.
 - Resolver o Exercício 2.
 - Propor o Exercício 3 como tarefa para casa.

- Observações metodológicas:

Durante a resolução dos exercícios é muito importante que o professor estimule o aluno a tentar modelar os problemas.

Deve-se também alertar o aluno que foi mudada a estratégia de resolução de problemas nesta aula. Nos exercícios propostos na primeira aula, os grafos foram desenhados e depois analisados.

Nesta aula, será utilizada uma propriedade de grafos ao invés de desenhá-los, pois construir os grafos seria muito mais trabalhoso.

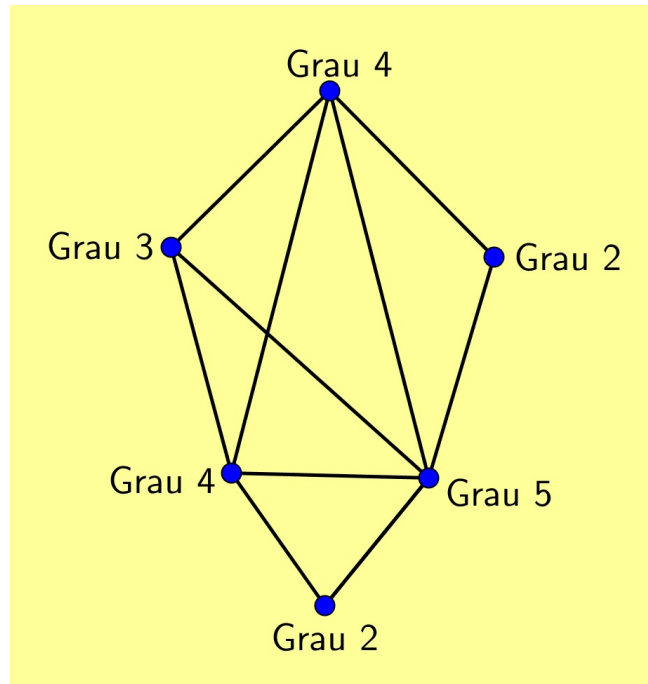
No exercício dos telefones, caso haja tempo é interessante propor ao aluno que desenhe um heptágono e tente fazer as conexões. Ainda neste exercício, um fato curioso que pode ilustrar a aula é mostrar que existe um heptágono regular na moeda de 25 centavos, tanto na cara quanto na coroa. A justificativa para este polígono regular estar na moeda de 25 centavos é que $2 + 5 = 7$.



AULA 2 - GRAU DE UM VÉRTICE

O que é o grau de um vértice

Define-se grau de um vértice como o número de arestas que partem deste vértice.



Propriedade

Em um grafo, a soma de todos os graus é igual ao dobro do número de arestas.

Isso pode ser facilmente concluído se for levado em conta que uma aresta é limitada por dois vértices. Logo, cada vez que se conta uma aresta, deve-se contabilizar dois vértices.

Com esta informação já é possível resolver muitos problemas.

ATIVIDADES

Exercício 1 - O problema dos telefones

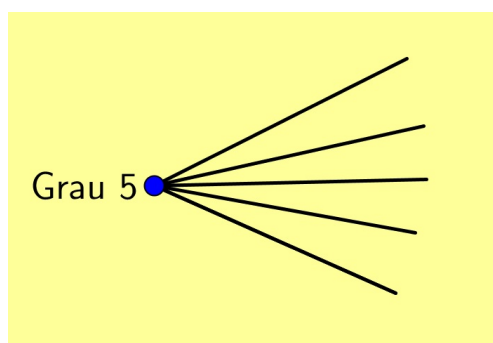
Uma operadora de telefonia está propondo um plano especial para famílias de sete pessoas. Neste plano, o celular de cada membro da família fará ligações gratuitas para exatamente cinco outras pessoas dentre os 7 membros da família.

É possível que a operadora de telefonia cumpra sua promessa?

Modelagem

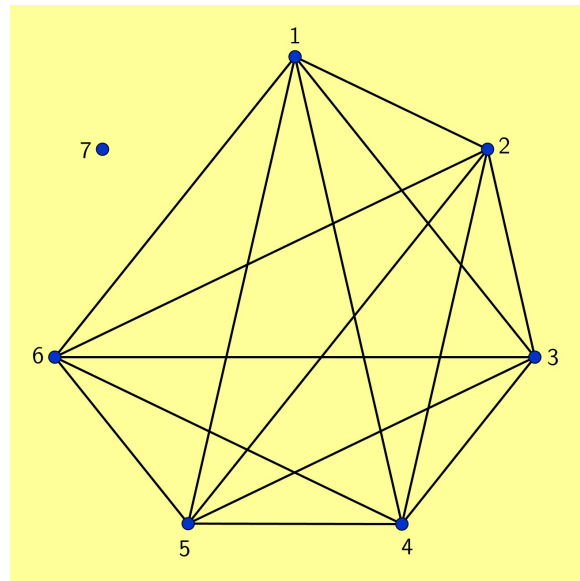
Cada um dos 7 telefones será representado por um vértice e uma conexão telefônica será representada por uma aresta.

Com a modelagem acima, deve-se ter um grafo com sete vértices (sete telefones) e de cada um desses vértices devem partir cinco aresta (5 linhas telefônicas).



Então a soma de todos os graus dos vértices deste grafo deveria ser $7 \cdot 5 = 35$.

Porém, como a soma de todos os graus é igual ao dobro do número de arestas, este grafo teria $\frac{35}{2}$ arestas, o que é impossível. Logo a operadora de telefonia não pode cumprir esta promessa. Veja na imagem a seguir que, ao se tentar construir o grafo do problema, um vértice deverá ficar sem arestas.



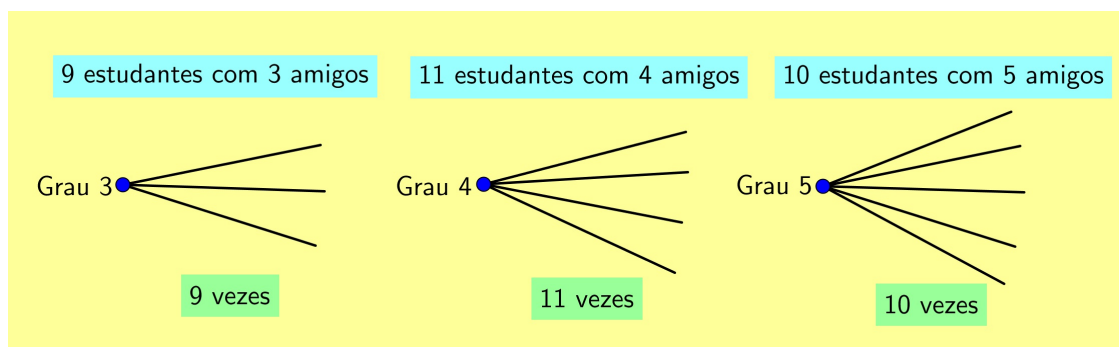
Exercício 2 - O problema dos amigos

Há 30 estudantes em uma sala. É possível que 9 deles tenham 3 amigos na classe, 11 tenham 4 amigos e 10 tenham 5 amigos cada?

Modelagem

Cada estudante será um vértice e uma “relação de amizade entre dois alunos” será uma aresta.

Como existem 9 estudantes com 3 amigos, nossa modelagem terá nove vértices com três arestas cada. Pelo mesmo princípio, o grafo ainda terá dez vértices com cinco arestas (10 estudantes com 5 amigos) e onze vértices com quatro arestas (11 estudantes com 4 amigos).



A soma de todos os graus deste grafo deve ser $9 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 121$.

Como a soma dos graus deve ser igual ao dobro do número de arestas, deve-se ter $\frac{121}{2}$ arestas, o que é impossível.

Exercício 3 (Tarefa) - As estradas do reino

Num certo reino muito distante, há 100 cidades. De cada cidade saem 4 estradas. Quantas estradas tem este reino?

5.3 AULA 3 - ISOMORFISMO

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Metas:
 - Entender o conceito de isomorfismo para grafos.
 - Encontrar métodos para decidir se dois grafos são isomorfos ou não.
- Roteiro:
 - Resolver o exercício deixado como tarefa na aula anterior.
 - Explicar o conceito de isomorfismo.
 - Discutir os critérios de verificação de isomorfismo entre 2 grafos.
 - Resolver o Exercício 1 com os alunos.
 - Deixar que os alunos façam o Exercício 2.
 - Propor o Exercício 3 como tarefa.

- Observações metodológicas:

Para que o assunto grafos possa ser desenvolvido, o aluno deve compreender o mais rapidamente possível que o mesmo grafo pode ser desenhado de maneiras diferentes.

Podem surgir mais respostas para os exercícios do que o professor pode corrigir em uma aula. A estratégia sugerida é que o professor limite o tempo para o Exercício 2 e que a correção seja feita pelos próprios alunos, trocando as folhas e corrigindo os trabalhos uns dos outros, cabendo ao professor sanar eventuais dúvidas.

A melhor maneira de desenhar um grafo, em particular um grafo isomorfo, é utilizar o software Geogebra. Constrói-se um grafo qualquer, faz-se uma cópia deste grafo, e na cópia arrastam-se os vértices para construir um grafo isomorfo ao primeiro.

As definições de arestas paralelas, laços, grafo convexo e ciclo aparecem com mais intensidade nesta aula. Nesse ponto seria interessante o professor sugerir ao aluno que faça seu próprio dicionário ilustrado de grafos, no final do seu caderno.

Todas estas definições necessárias encontram-se no Capítulo 1 deste trabalho.

AULA 3 - ISOMORFISMO

O que é isomorfismo

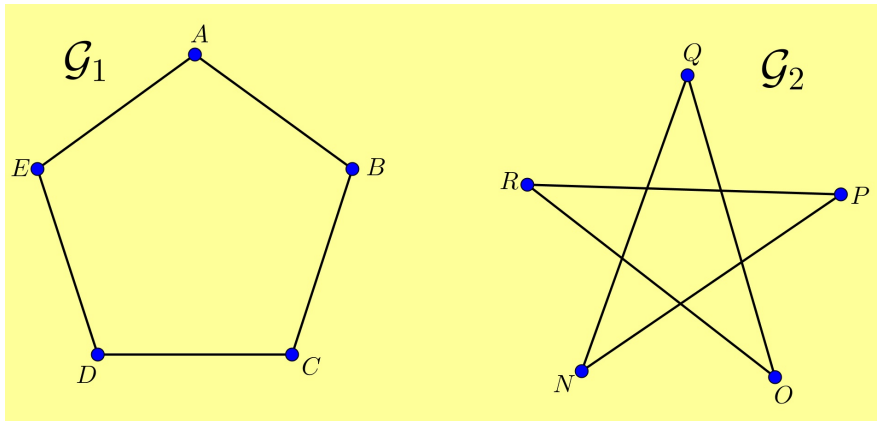
O que realmente importa para diferenciar dois grafos é quais vértices estão conectados e quais não estão.

Pouco importa para a teoria dos grafos se a conexão entre dois vértices é feita por uma linha colorida, um arco de circunferência ou um segmento de reta.

Dois grafos que possuem a mesma quantidade de vértices e as mesmas conexões são ditos isomorfos.

Para determinar se dois grafos são isomorfos deve-se encontrar uma correspondência entre vértices e arestas para os dois grafos (em matemática esta correspondência é chamada de bijeção).

Observe:



Os dois grafos são isomorfos, então é possível fazer as seguintes bijeções:

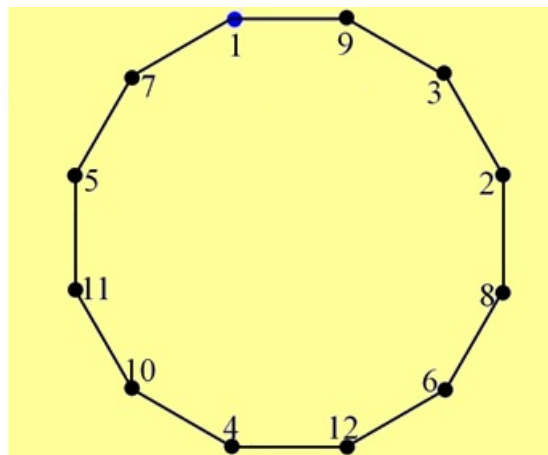
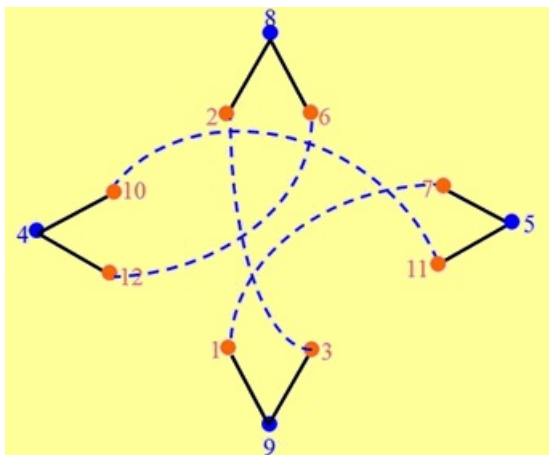
Tabela 4: Vértices

\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2
A	Q
B	O
C	R
D	P
E	N

Tabela 5: Arestas

\mathcal{G}_1	\mathcal{G}_2
{A;B}	{Q;O}
{B;C}	{O;R}
{C;D}	{R;P}
{D;E}	{P;N}
{E;A}	{N;Q}

Outro exemplo foi feito na primeira aula. Você lembra destes dois grafos?



Eles também são isomorfos. Confira!

Encontrar uma correspondência entre grafos nem sempre é uma tarefa simples, mas existem algumas condições que podem tornar mais fácil a verificação de que dois grafos não são isomorfos.

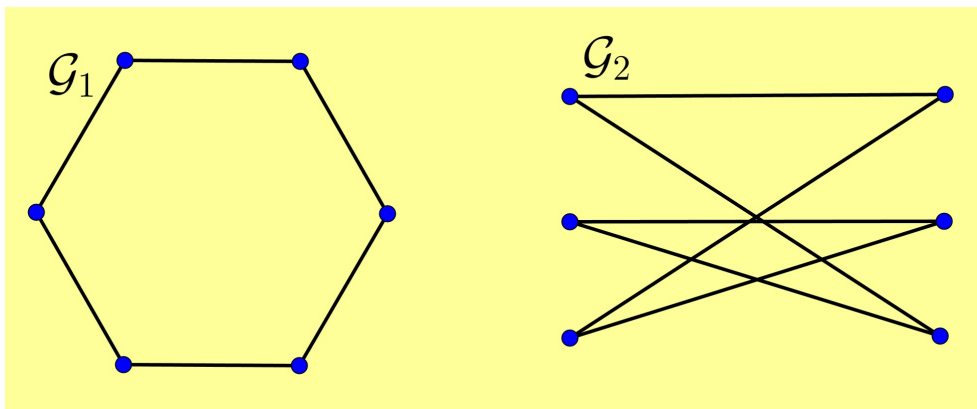
Essas condições incluem:

- um grafo ter mais vértices do que outro;
- um grafo ter mais arestas do que outro;
- um grafo ter arestas paralelas e o outro não;
- um grafo ter laço e o outro não;
- um grafo ter um vértice de grau k e o outro não;
- um grafo ser conexo e o outro não;
- um grafo ter um ciclo e o outro não.

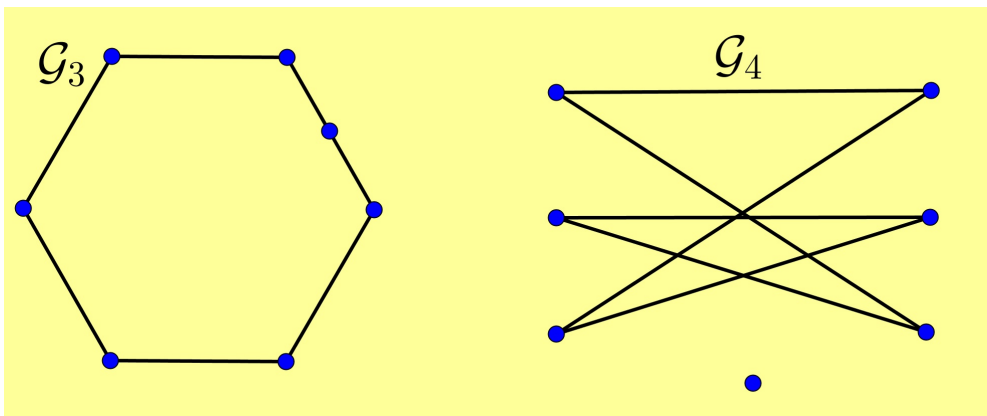
ATIVIDADES

Exercício 1 - Decida se os pares de grafos são isomorfos ou não. Em caso afirmativo, escreva a bijeção e em caso negativo justifique a sua resposta.

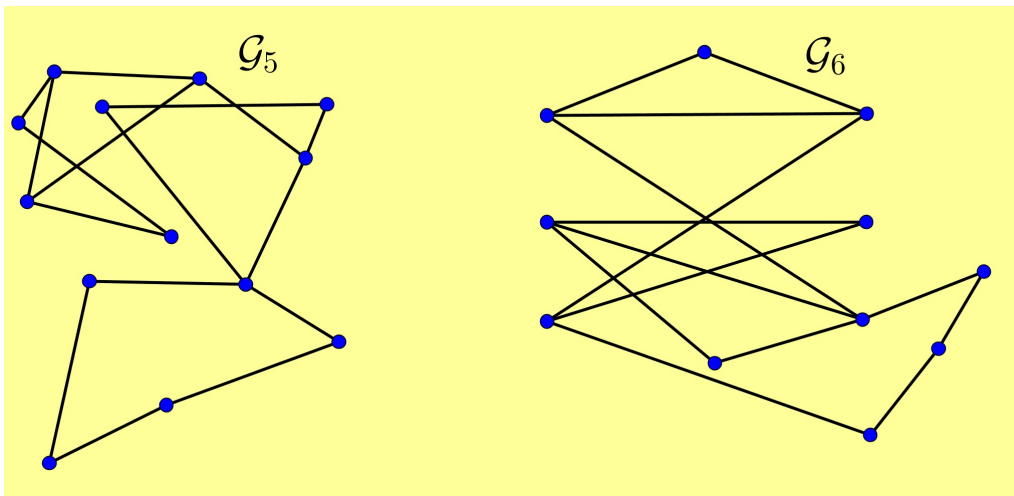
a)



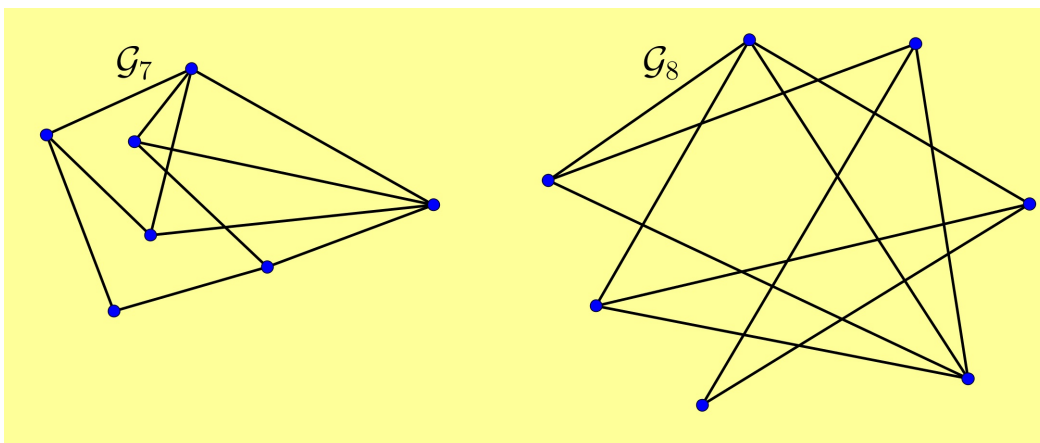
b)



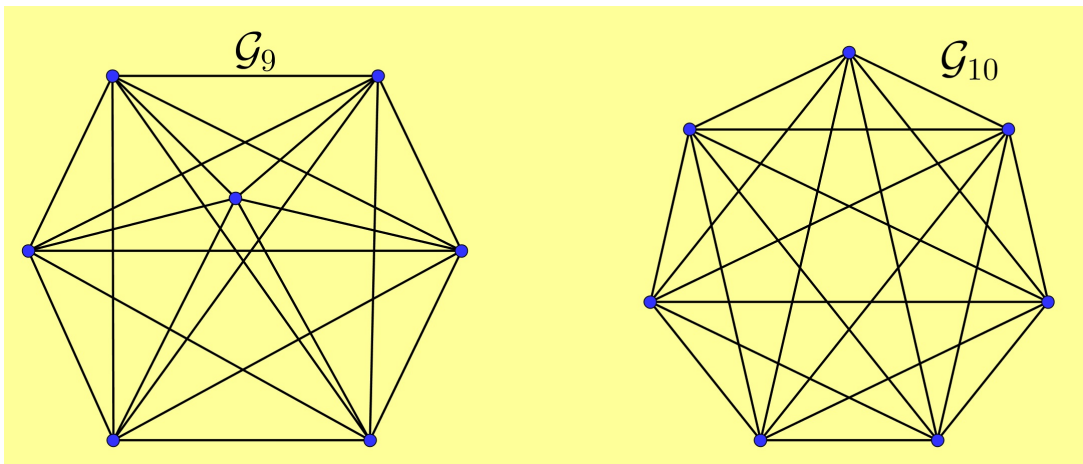
c)



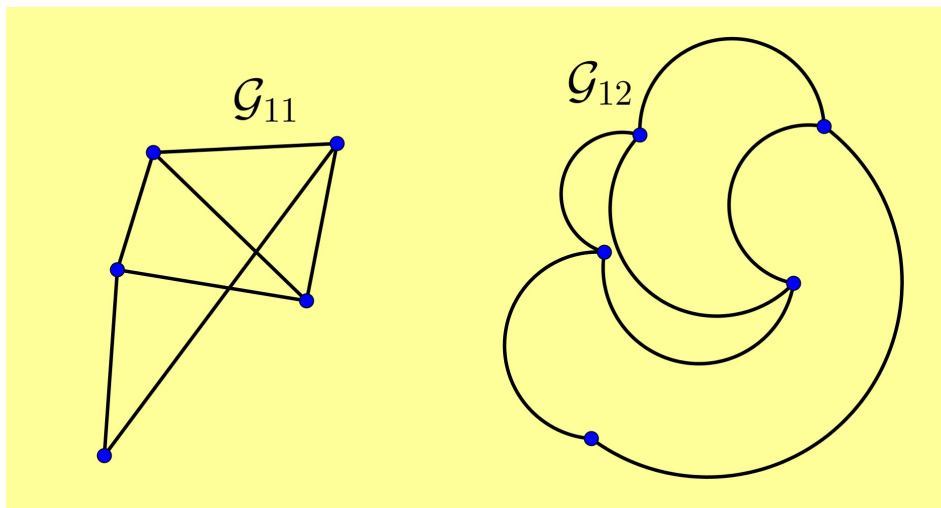
d)



e)

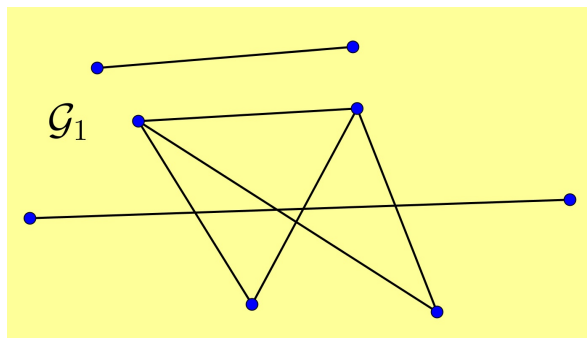


f)

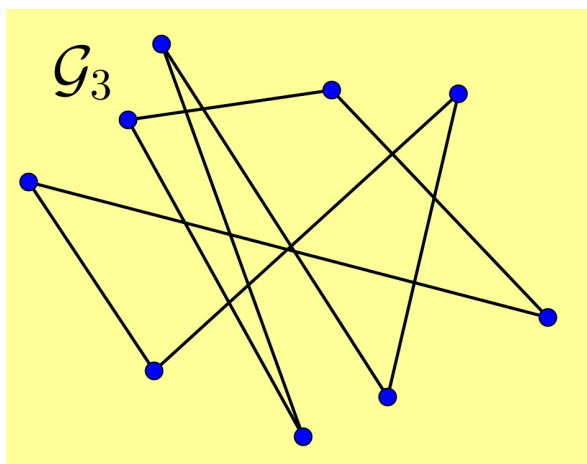


Exercício 2 - Construa um grafo isomorfo ao grafo dado:

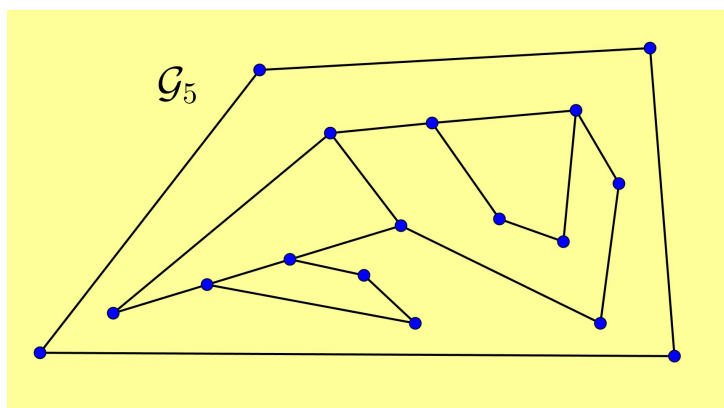
a)



b)



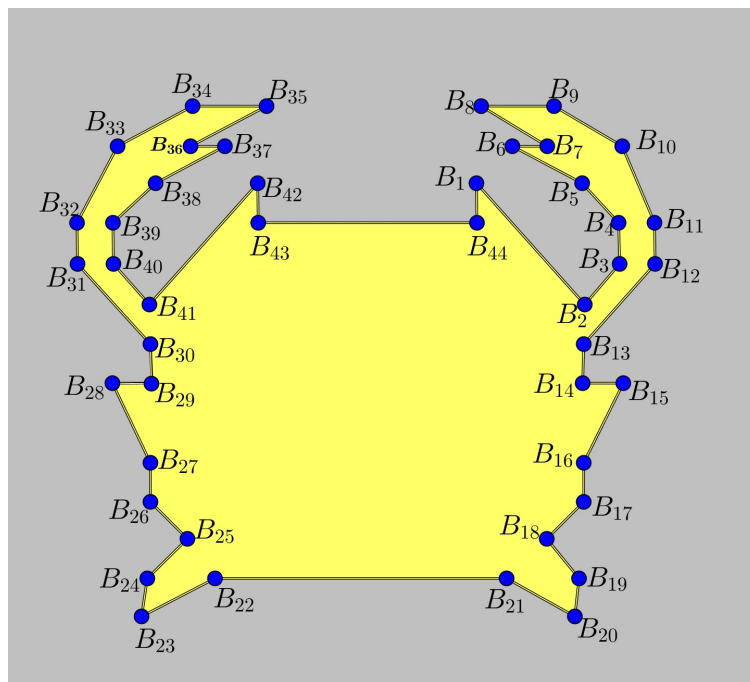
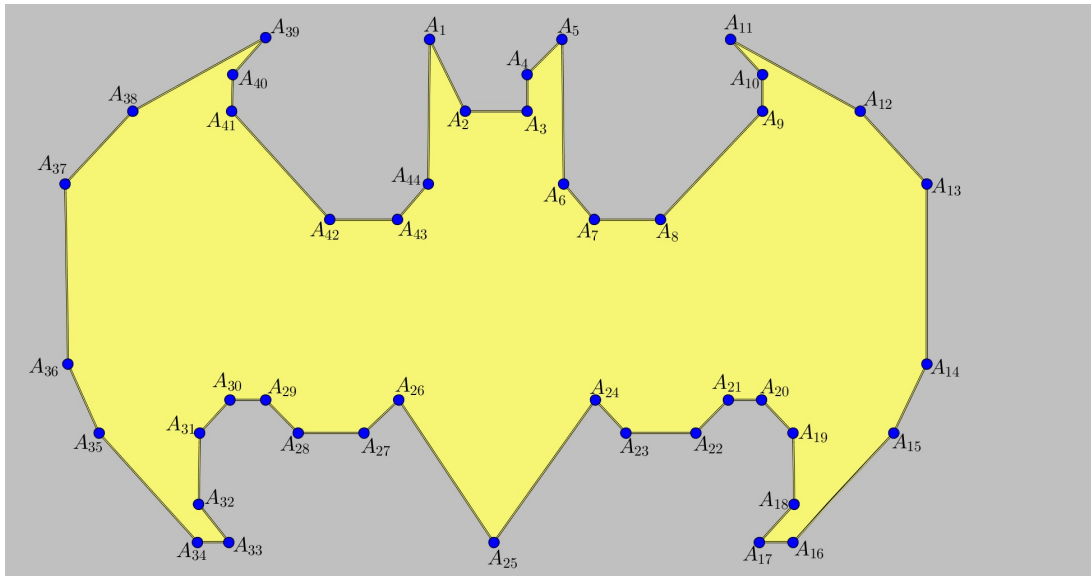
c)



Exercício 3 (Tarefa) - Arte e isomorfismo

As duas figuras abaixo são grafos isomorfos, pois ambos são formados por um único ciclo com 44 vértices.

Construa você também duas figuras isomorfas.



5.4 AULAS 4, 5 E 6 - EXERCÍCIOS

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Meta:
 - Resolver exercícios para fixar o conteúdo aprendido nas aulas anteriores.
- Roteiro:
 - Aula 4 : Relembrar a propriedade da soma dos graus dos vértices de um grafo.
 - Aula 4 : Ler os exercícios com os alunos para se certificar de que todos entenderam os enunciados.
 - Aula 4 : Deixar que os alunos tentem resolver os Exercícios de 1 a 5, interferindo com comentários sempre que necessário.
 - Aula 4 : Propor o Exercício 6 como tarefa.
 - Aula 5 : Resolver os Exercícios de 1 a 5. Eventualmente um ou dois exercícios podem ficar para Aula 6.
 - Aula 5 : Comentar os resultados obtidos com o Exercício 6 na tarefa e oferecer a folha de apoio com a marcação das capitais.
 - Aula 6 : Terminar a correção dos exercícios.
 - Aula 6 : Fazer comentários sobre o Exercício 6.
 - Aula 6 : Se sobrar tempo, propor a atividade descrita nas observações metodológicas.

- Observações metodológicas:

É importante que o aluno tente modelar por si só cada um dos problemas.

Nos Exercícios 1, 2 e 3 aparece o conceito de conjunto universo e a ideia de que a solução de uma equação deve pertencer ao seu conjunto universo.

No Exercício 4 existe mais de uma forma de contar a quantidade de arestas do grafo. O aluno pode tentar contar as diagonais e os lados do hexágono ou ainda, se o aluno já estiver familiarizado com análise combinatória, ele pode associar o número de arestas com um problema de combinação simples.

No Exercício 6, provavelmente a primeira tentativa dos alunos será praticamente impossível de ser corrigida, pois faltará organização no grafo.

Com a imagem de referência onde estão marcados os estados, a correção ficará muito mais simples. A ideia é que primeiro os alunos tentem fazer o grafo em casa e na Aula 5 oferecer a folha de referência com os vértices, que irá padronizar os grafos.

Um fato curioso aconteceu quando esta aula foi testada pela primeira vez.

Alguns alunos começaram a questionar o que existiria em algumas fronteiras do mapa. Com o Google Earth procuramos várias imagens do Brasil e depois do mundo para sanar esta curiosidade. Se sobrar tempo, esta atividade desperta grande curiosidade e pode ser feita de forma interdisciplinar com Geografia.

Abaixo, seguem duas dessas fronteiras: a região entre Tocantins, Piauí, Maranhão e Bahia e também a Fronteira entre Acre, Amazonas e Rondônia.



AULAS 4, 5 E 6 - EXERCÍCIOS

1. É possível existirem exatamente 100 estradas em um reino, no qual existem 3 estradas saindo de cada cidade?
2. Uma classe tem 50 alunos. É possível que 18 alunos tenham exatamente 2 amigos (na classe), 11 tenham 7 amigos e 21 tenham 6 amigos?
3. É possível desenhar 9 segmentos de reta no plano de tal forma que cada segmento interseccione exatamente 3 outros?
4. (FUVEST 97) Os trabalhos da diretoria de um clube são realizados por 6 comissões. Cada diretor participa exatamente de 2 comissões e cada 2 comissões têm exatamente um diretor comum. Quantos diretores têm o clube?
5. Prove que o número de pessoas que viveram na Terra e que apertaram mãos um número ímpar de vezes em suas vidas é par.
6. Vamos construir um grafo dos estados do Brasil da seguinte maneira: os estados (e o Distrito Federal) serão representados por vértices e as fronteiras entre dois estados serão representadas por arestas. Após construir o grafo, responda à pergunta: quantas fronteiras entre estados possui o Brasil.



5.5 AULA 7 - GRAFOS EULERIANOS

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Metas:
 - Reconhecer um grafo Euleriano.
 - Usar o conceito de grafo Euleriano para a resolução de problemas.
- Roteiro:
 - Apresentar alguns grafos que são Eulerianos e outros que não são e pedir para que os alunos procurem uma relação entre os grafos que são Eulerianos.
 - Justificar a propriedade necessária para que se encontre um circuito Euleriano em um grafo.
 - Resolver o problema das pontes de Königsberg.
 - Resolver o problema da figura que deve ser desenhada sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo lugar.
 - Mostrar a relação entre os dois problemas resolvidos.
 - Propor o exercício do cubo como tarefa.

- Observações metodológicas:

É mais importante para esta aula que o aluno entenda o conceito de grafo Euleriano do que saber demonstrar a ida e a volta deste teorema, principalmente para alunos do ensino fundamental. Uma busca por Kaliningrado no Google Earth pode mostrar várias fotos da região onde nasceu o problema das 7 pontes. A Cidade de Kaliningrado é um enclave, ou seja, um pedaço de um país dentro de outro país. Mais precisamente, um pedaço da Rússia cercado pela Polônia, Lituânia e o mar. Em geografia política, um enclave é um território com distinções políticas, sociais e/ou culturais cujas fronteiras geográficas ficam inteiramente dentro dos limites de um outro território.

Pode ser uma atividade interessante, além de ser interdisciplinar, pedir que os alunos busquem mais exemplos de enclaves. Eles podem descobrir, por exemplo que existem mais de 100 enclaves indianos dentro de Bangladesh e também que existe uma região chamada Dahala Khagrabari que é um enclave de terceira

ordem (um pedaço da Índia, dentro de Bangladesh dentro da Índia, que está dentro de Bangladesh). A história de Leonhard Euler também é extremamente interessante e pode ser estudada como trabalho extraclasse. Por fim, relato uma experiência pessoal quando testei esta aula. Após ter mostrado que é impossível fazer o passeio pelas pontes de Königsberg, um aluno disse que havia resolvido o problema. Ele disse que o problema era possível, mas era necessário começar em uma ilha. Sua solução consistia em um dado momento, “dar a volta ao mundo” e continuar o passeio. É curioso notar, que a proposta dar a volta ao mundo, significa acrescentar uma aresta extra entre as duas margens do rio, transformando o grafo do problema em outro, com dois vértices de grau par (as margens) e dois vértices de grau ímpar (as ilhas). Informações adicionais que podem enriquecer esta aula estão no Capítulo 2 deste trabalho.

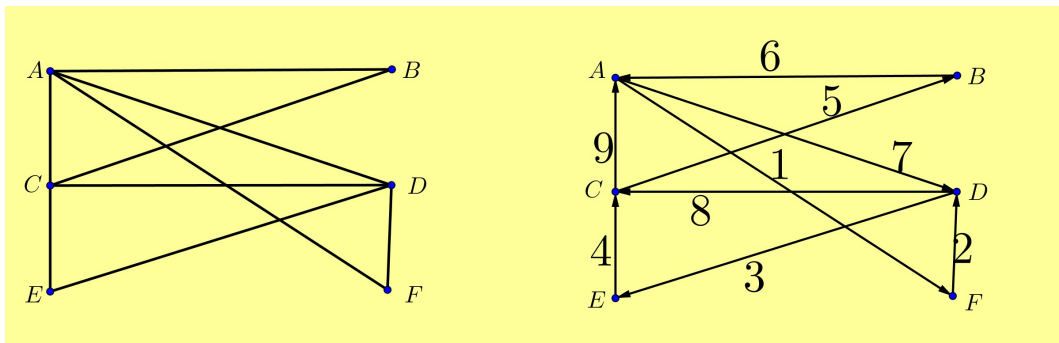


Figura 108: Mapa da região de Dahala Khagrabari.

AULA 7 - GRAFOS EULERIANOS

O que são grafos Eulerianos

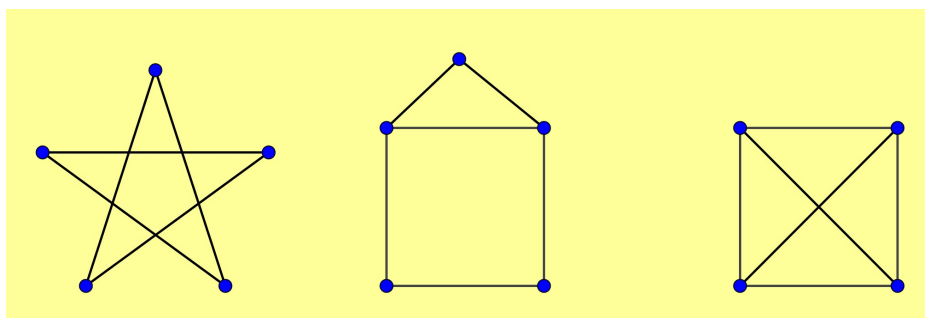
Um caminho que percorre cada aresta de um grafo exatamente uma vez é chamado de circuito euleriano e um grafo que possui um tal caminho é chamado de grafo euleriano.



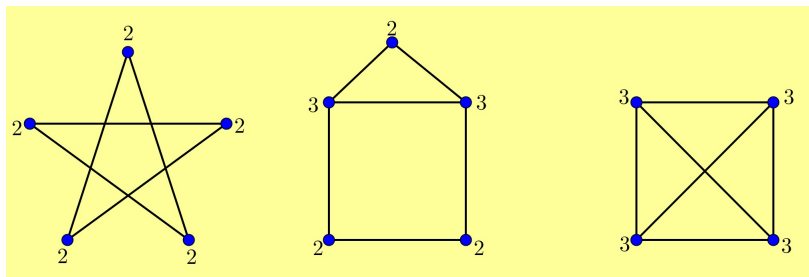
Dizer que um grafo é euleriano é o equivalente a dizer que o seu desenho pode ser feito de forma contínua, sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo lugar.

A pergunta óbvia que surge é: sempre é possível encontrar um circuito euleriano em um grafo? E se não for possível, como provar que não existe tal caminho?

Para começar a responder esta pergunta, outra deve ser feita: quais das figuras abaixo podem ser feitas com um único traço, sem tirar o lápis do papel, passando o lápis uma só vez em cada traço?



Você provavelmente conseguiu fazer as 2 primeiras figuras e falhou ao tentar a terceira. A chave para este problema está nos graus dos vértices destes grafos. Observe:

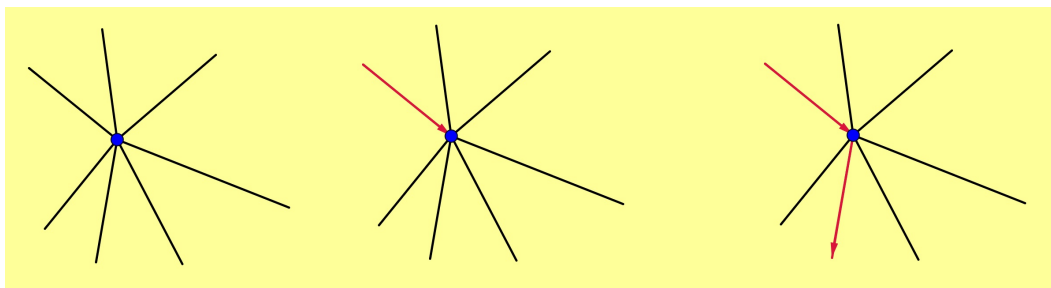


Existe um argumento muito simples que mostra que para existir um circuito pelo grafo em que não se repitam arestas, este grafo deve ter todos os seus vértices de grau par, ou então, apenas dois vértices de grau ímpar e os restantes de grau par. Neste segundo caso o caminho deve começar em um dos vértices de grau ímpar e terminar no outro.

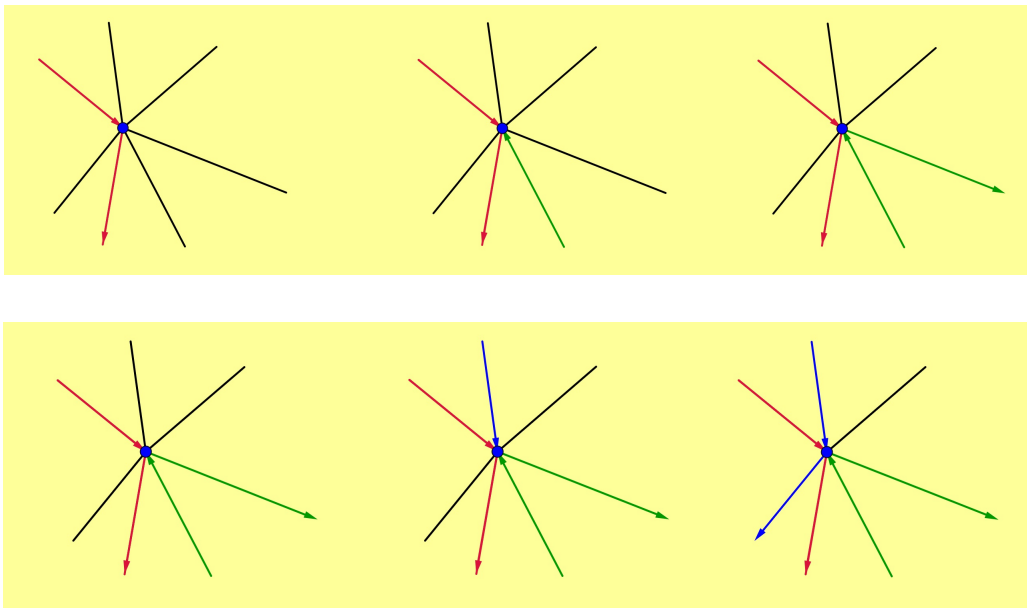
Considere um dos vértices de grau ímpar de um grafo. No exemplo foi desenhado um vértice de grau 7.

Isto quer dizer que deste vértice partem 7 arestas e para percorrer o todo o grafo, você vai passar por este vértice 7 vezes.

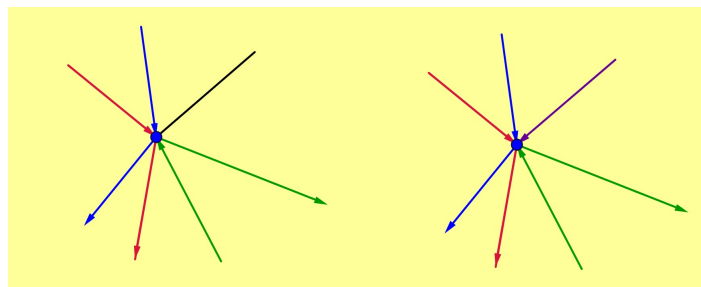
A primeira passagem pelo vértice (entrada e saída) está representado em vermelho.



Esta operação será repetida mais duas vezes, agora com as arestas marcadas em verde e depois em azul.



Na quarta passagem, como existe uma quantidade ímpar de arestas, ao sair do vértice, você obrigatoriamente vai repetir uma das arestas.



Isto só não seria um problema se este fosse o ponto de chegada do caminho.

O mesmo raciocínio vale para o ponto de partida do caminho¹.

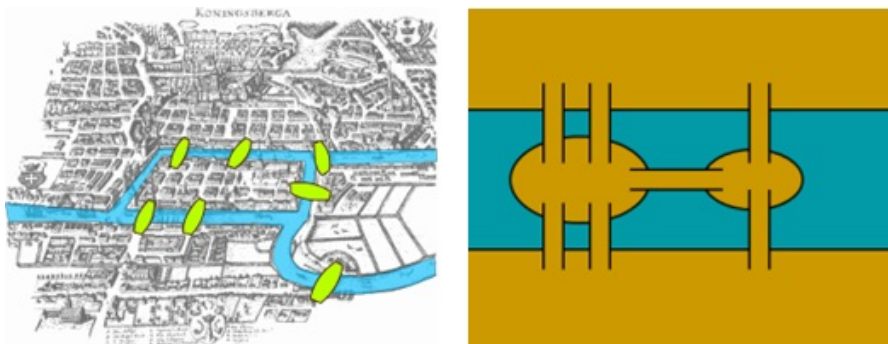
¹ Uma explicação mais formal e detalhada, com a ida e a volta deste teorema pode ser encontrada em [5]

ATIVIDADES

Exercício 1 - O problema das pontes de Königsberg

Königsberg era uma cidade da antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado, na atual Rússia. Na parte central de Königsberg, fluíam vertentes do rio Prególia, formando duas ilhas.

Sete pontes, interligando partes da cidade, foram construídas, como representado nas figuras abaixo.



Um desafio, proposto pelos habitantes de Königsberg era fazer um passeio utilizando as sete pontes, porém passando apenas uma vez sobre cada ponte.

O problema foi resolvido pelo matemático suíço, Leonhard Euler em 1736 e é considerado o início dos estudos sobre teoria dos grafos.



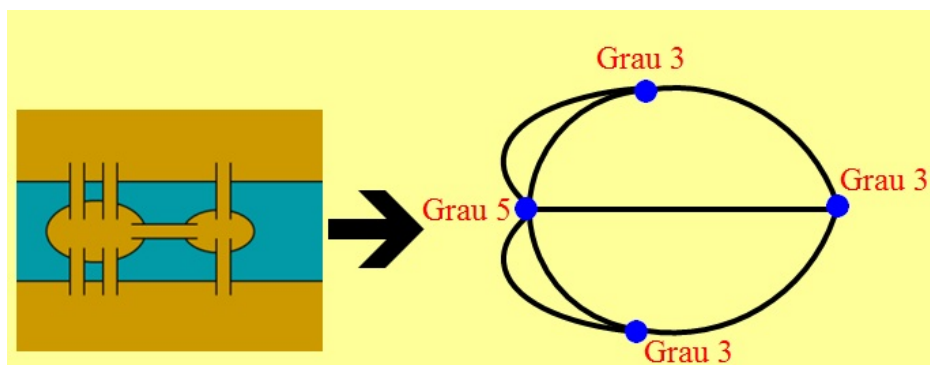
Figura 109: Leonhard Euler.

Euler argumentou: “–Este é um tipo de problema no qual as distâncias envolvidas são irrelevantes. O que importa é como as várias porções de terra estão interligadas entre si.”

Modelagem

Uma porção de terra (ilhas ou margens dos rios) será tratada como um vértice e as pontes serão tratadas como arestas.

Observe que o grafo formado possui mais de dois vértices com grau ímpar, portanto é impossível fazer o passeio proposto.

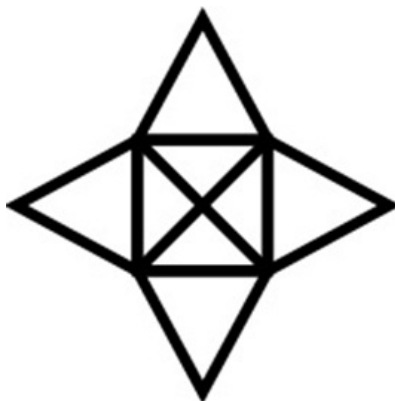


Seguem algumas imagens atuais de Königsberg para ilustrar a aula.

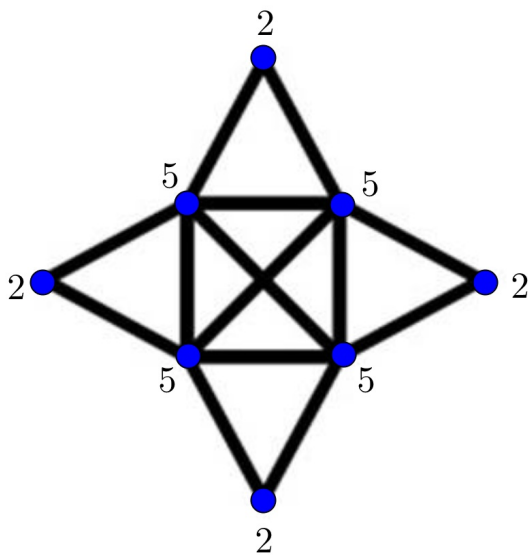


Exercício 2 - O problema dos circuitos

É possível reproduzir a figura abaixo sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo lugar?



Contando os graus dos vértices deste grafo, encontramos 5 vértices de grau ímpar, portanto a figura não pode ser feita sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo lugar.



Exercício 3 (Tarefa) - O problema do arame

Você tem um pedaço de arame de 120 cm e quer deformá-lo de modo a formar um cubo de aresta 10 cm. Mostre que não é possível formar o cubo sem cortar o arame.

5.6 AULA 8 - EULERIZAÇÃO DE GRAFOS

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Metas:
 - Entender o algoritmo para construir um grafo euleriano.
 - Aprender a eulerizar um grafo.
- Roteiro:
 - Explicar o algoritmo de Fleury para encontrar um circuito euleriano.
 - Fazer com os alunos o exemplo proposto no material.
 - Explicar como eulerizar um grafo, dando especial atenção ao fato de que não é possível criar arestas novas entre vértices que originalmente não eram conectados.
 - Propor e resolver o problema do patrulheiro.
 - Propor a tarefa.
- Observações metodológicas:

Alternativamente o professor pode começar a aula propondo o problema do patrulheiro e pedir que os alunos o resolvam apenas por instinto. Comparar o resultado obtido pelos alunos com o da eulerização mostra a importância da teoria.

Em geral os alunos preferem encontrar um caminho euleriano por tentativa e erro do que usando o algoritmo de Fleury. Independentemente do método que o aluno utilizar para fazer a tarefa, é importante que ele anote a sequência dos vértices para que outras pessoas possam reproduzir o seu caminho.

Existem vários jogos gratuitos para computador, cuja meta é encontrar um circuito Euleriano. Um bem famoso se chama Icosien e pode facilmente ser encontrado por qualquer programa de busca e jogado online.

AULA 8 - EULERIZAÇÃO DE GRAFOS

COMO ENCONTRAR UM CIRCUITO EULERIANO

Na maioria das vezes, sabendo que o grafo possui um circuito Euleriano, encontrá-lo não costuma ser uma tarefa difícil.

Entretanto existe um algoritmo para descobrir um circuito Euleriano, nos casos em que encontrá-lo não é uma atividade trivial.

ALGORITMO DE FLEURY

Comece por fazer duas cópias do grafo original.

O grafo cópia 1 : onde serão tomadas decisões.

O grafo cópia 2 : que é utilizado para recordar o que já foi feito.

Escolhe-se, em ambos, um vértice qualquer para começar o percurso e em seguida uma aresta que esteja ligada a esse vértice sem que a sua remoção transforme o grafo cópia 1 em dois grafos desconectados.

Na cópia 2 sublinhamos essa aresta e a numeramos.

Em seguida apagamos esta aresta da cópia 1.

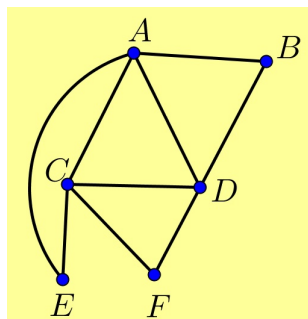
Repetimos este processo até voltar ao vértice inicial.

Em outras palavras, se o vértice vigente atingiu grau 1, deve-se sair dele pela sua única aresta; caso contrário escolhe-se uma aresta cuja remoção não deixe o grafo desconexo.

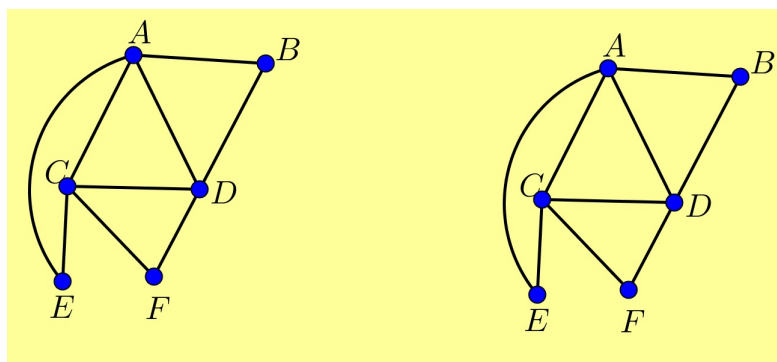
O importante neste algoritmo é notar que, enquanto a primeira cópia do grafo (a que estamos apagando arestas) continuar sendo um grafo conexo, ainda é possível encontrar um circuito euleriano.

Veja um exemplo:

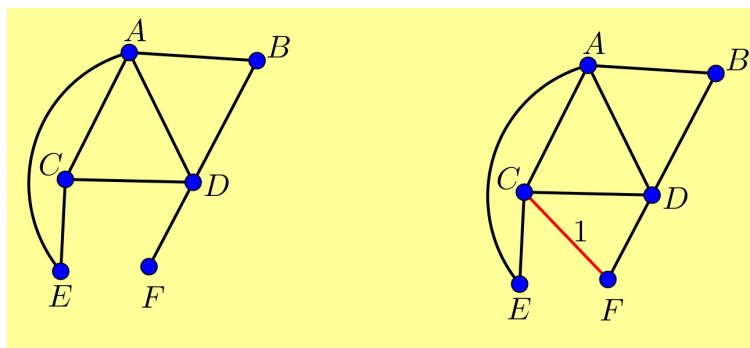
Deseja-se encontrar um circuito euleriano para o grafo abaixo.

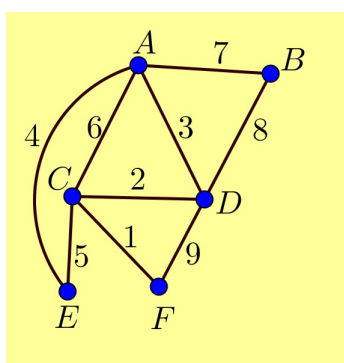
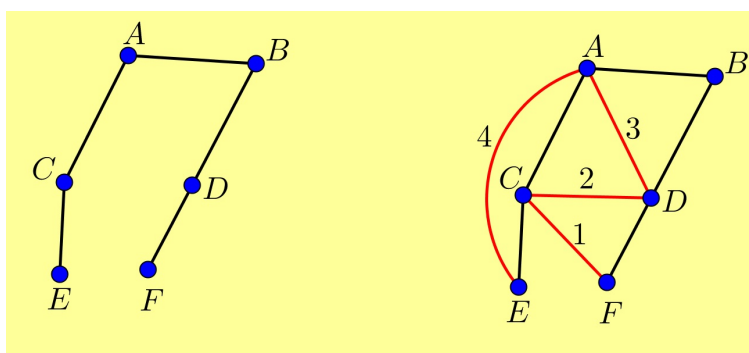
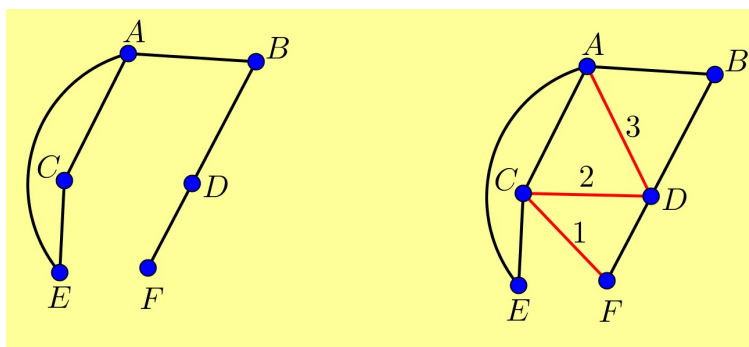
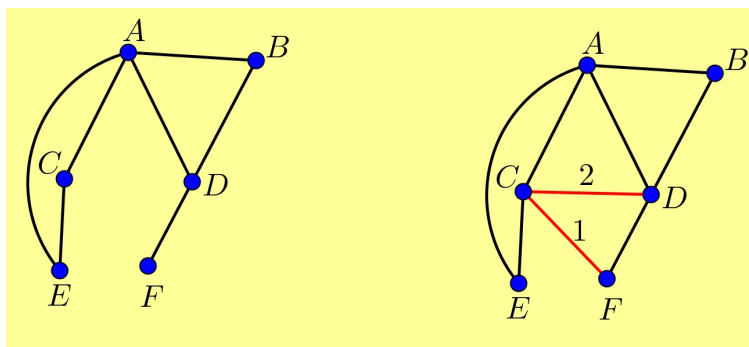


Como todos os vértices do grafo abaixo tem grau par (confira) pode-se escolher um vértice qualquer para começar. Foi escolhido o vértice F .



Do vértice F segue-se para o vértice C . Então na cópia da esquerda apaga-se a aresta $\{F;C\}$ e na cópia da direita marca-se e numera-se a aresta. Esta mesma operação é repetida mais algumas vezes, até que o caminho se revele. Confira o resultado nas próximas imagens.





COMO EULERIZAR UM GRAFO

Se não existe um circuito euleriano como se pode percorrer o grafo repetindo o menor número de arestas possíveis?

A solução deste problema consiste na eulerização de um grafo.

Eulerizar um grafo significa acrescentar as arestas estritamente necessárias para que todos os vértices de grau ímpar se tornem vértices de grau par.

No entanto não se pode acrescentar novas arestas. Pode-se apenas duplicar as já existentes.

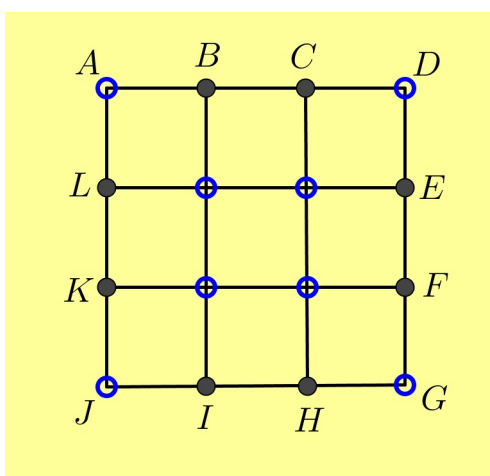


Figura 110: Grafo original.

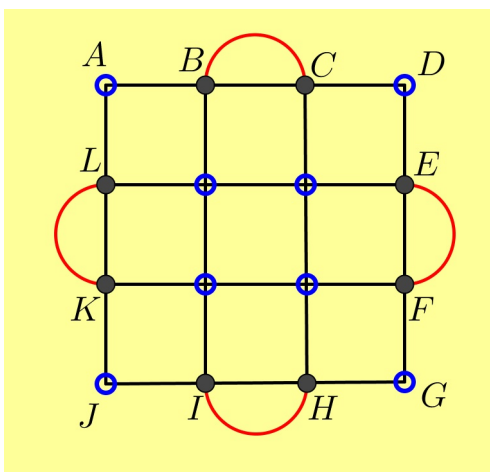


Figura 111: Versão eulerizada do grafo, acrescentando arestas entre vértices de grau ímpar.

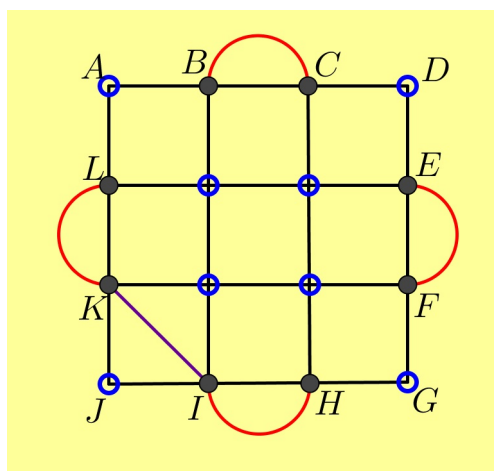
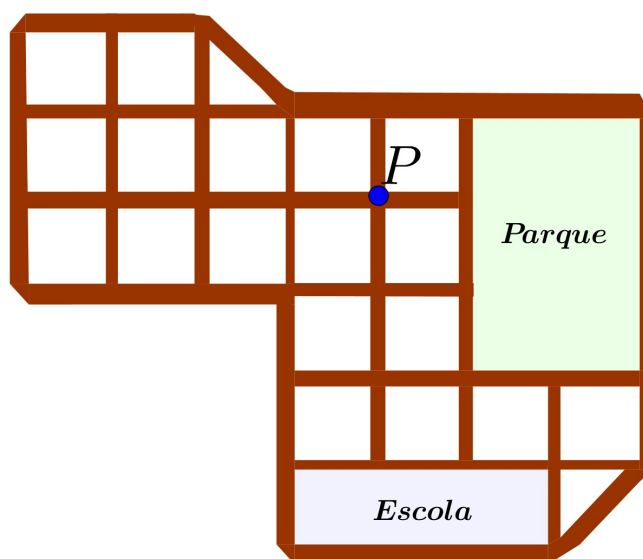


Figura 112: Eulerização ilegal do primeiro grafo, pois a aresta $\{K; I\}$ não existia no grafo original.

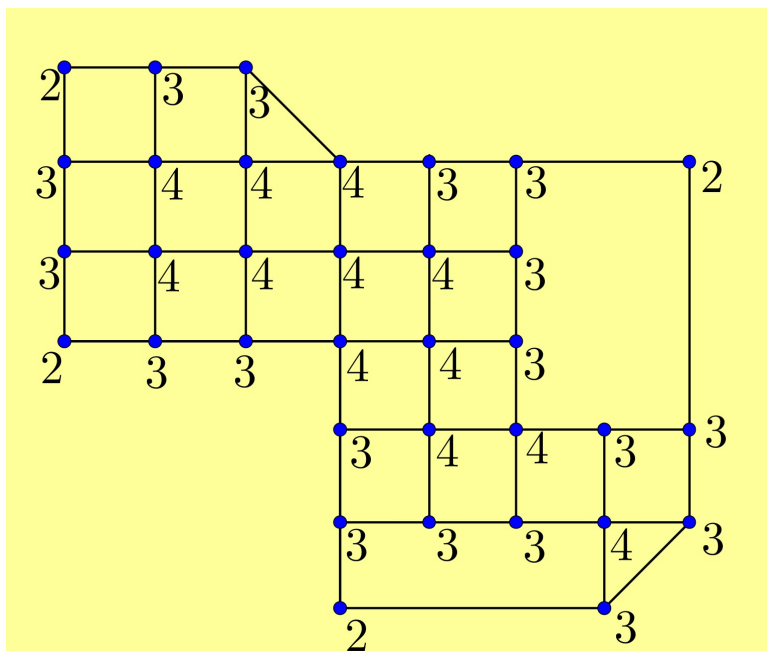
ATIVIDADES

Exercício 1 - O problema do patrulheiro

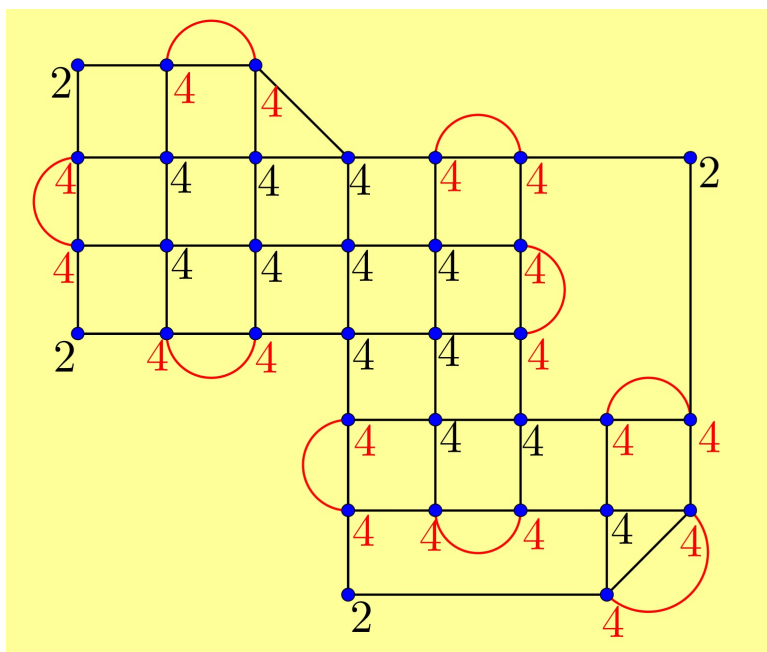
Um policial vai patrulhar a pé as ruas de uma cidade, cuja planta é apresentada na figura abaixo, partindo de P . Ele pretende vigiar cada rua da cidade uma única vez, partindo e terminando em P . Caso não seja possível, como ele deve proceder para repetir ruas um número mínimo vezes?



Retirando o que é desnecessário na figura (ou seja, transformado ela em um grafo) e contando o grau de cada vértice, obtém-se:



Acrescentando as arestas necessárias:

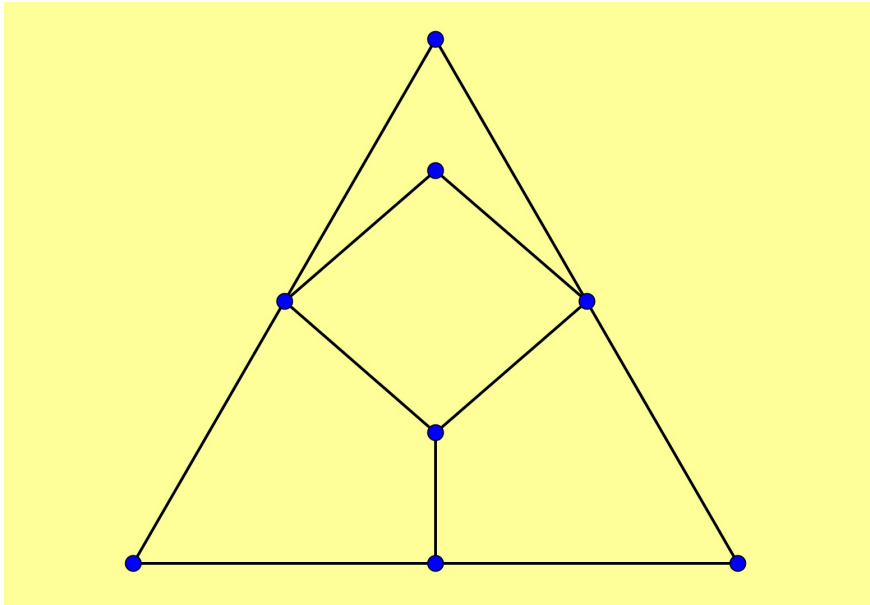


Portanto o patrulheiro deverá repetir no mínimo 9 ruas para terminar a sua ronda.

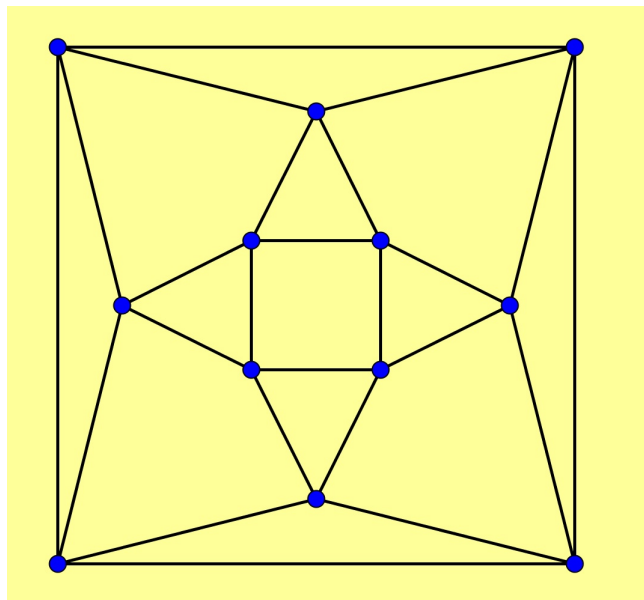
Exercício 2 (Tarefa) - Encontrar o circuito euleriano

Encontrar um circuito euleriano para cada um dos grafos abaixo.

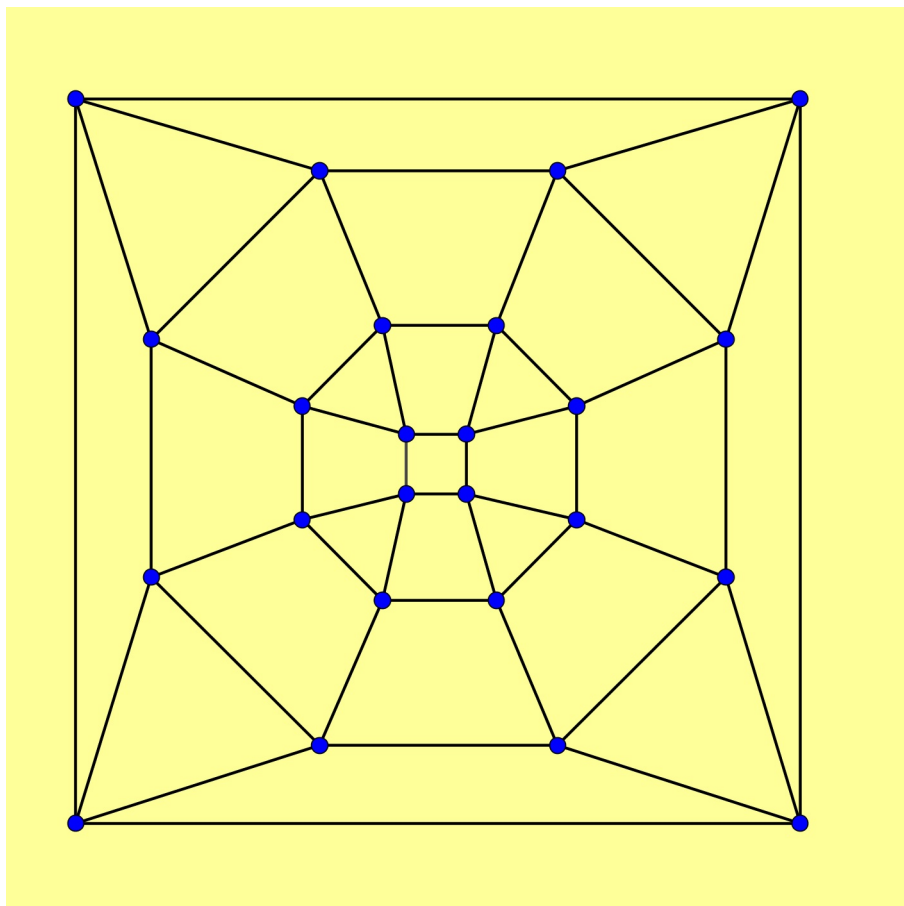
a)



b)



c)



5.7 AULA 9 - GRAFOS PLANARES - PARTE 1

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Metas:
 - Introduzir o conceito de planaridade.
 - Apresentar a relação entre vértices, arestas e faces para um grafo.
 - Apresentar e aplicar um critério para planaridade de grafos.
- Roteiro:
 - Definir o conceito de face de um grafo.
 - Definir o conceito de planaridade.
 - Explicar porque o critério de planaridade é mais útil se depender apenas de vértices e arestas.
 - Provar a relação $2A \geq 3F$, se $A \geq 2$.
 - Provar a fórmula de Euler.
 - Resolver o Exercício 1.
 - Com o resultado obtido no Exercício 1, propor e resolver o Exercício 2.
 - Propor a tarefa.
- Observações metodológicas:

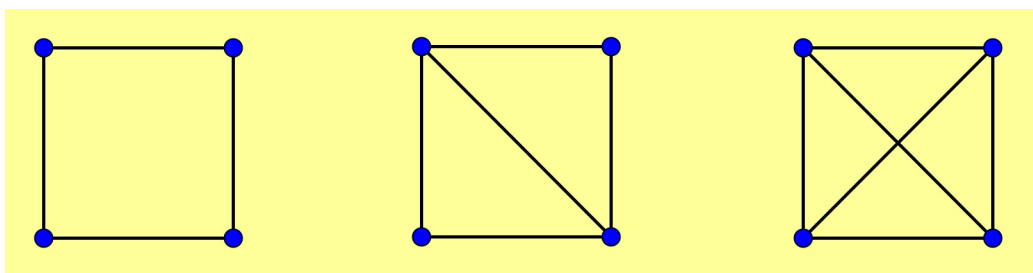
Se houver tempo de sobra, o professor pode explorar a fórmula de Euler para poliedros.

A demonstração da fórmula de Euler também está feita por indução no Capítulo 3 deste trabalho. Fica a critério do professor escolher a demonstração mais adequada para o grau de maturidade de seus alunos. Se os alunos não estiverem maduros o suficiente para a demonstração desta fórmula, o professor pode dar vários exemplos, com grafos e também com sólidos para que o aluno possa se convencer de que esta relação é verdadeira. Em sala de aula tive a experiência de utilizar óculos 3D para que os alunos observassem sólidos. Na prática a experiência foi pouco produtiva, pois além de alguns alunos terem dificuldade em ver as imagens 3D a experiência tirou boa parte da atenção da turma em grafos.

AULA 9 - GRAFOS PLANOS - PARTE 1

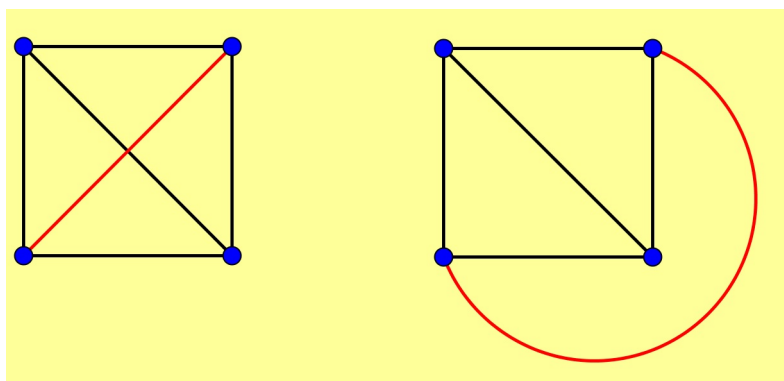
Definição de grafo plano

Um grafo que pode ser desenhado de modo que suas arestas não se interceptem (exceto é claro nos vértices) é chamado plano. Na figura abaixo, temos quantos grafos planos?



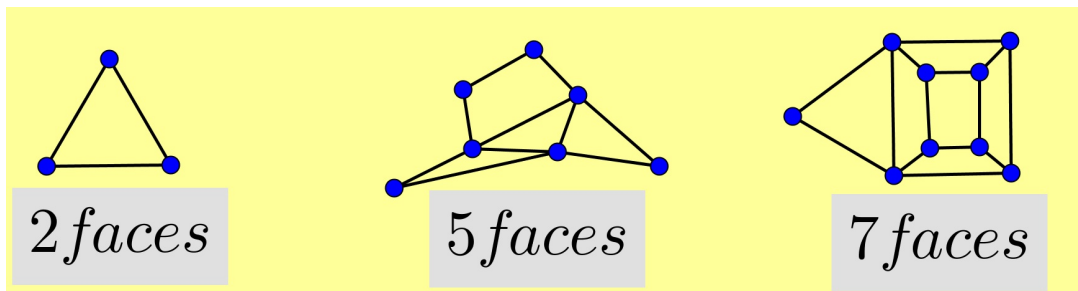
Se a sua resposta foi apenas dois, então vale à pena lembrar a definição de grafo. O que importa é quais vértices estão conectados e não qual o formato ou geometria desta conexão.

Sendo assim, o terceiro grafo, pode ser representado sem cruzamento de arestas, com mostra a figura abaixo.

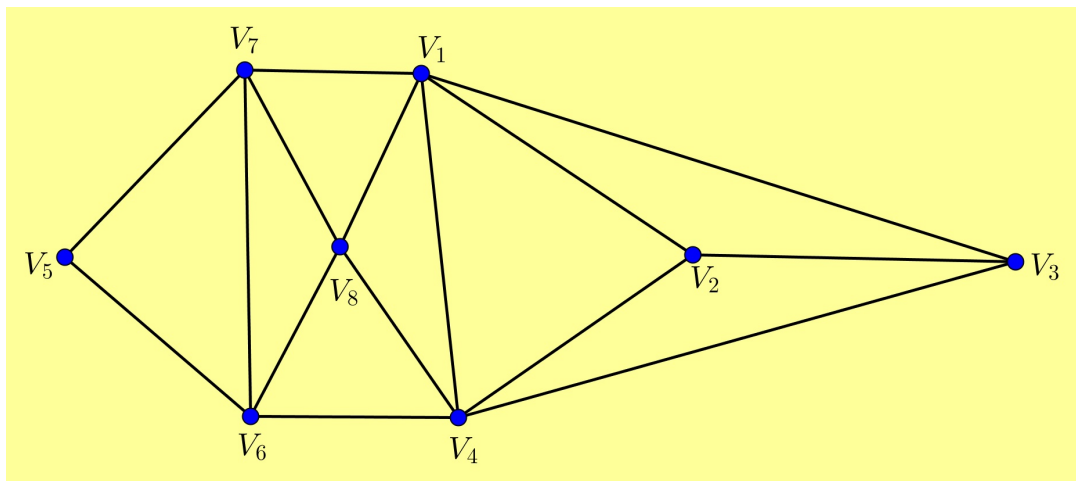


Um grafo plano, se desenhado de forma apropriada, o divide em regiões. Cada região é chamada de face. A região externa do plano também é contada como face e é chamada de face infinita ou face externa.

Veja os exemplos.

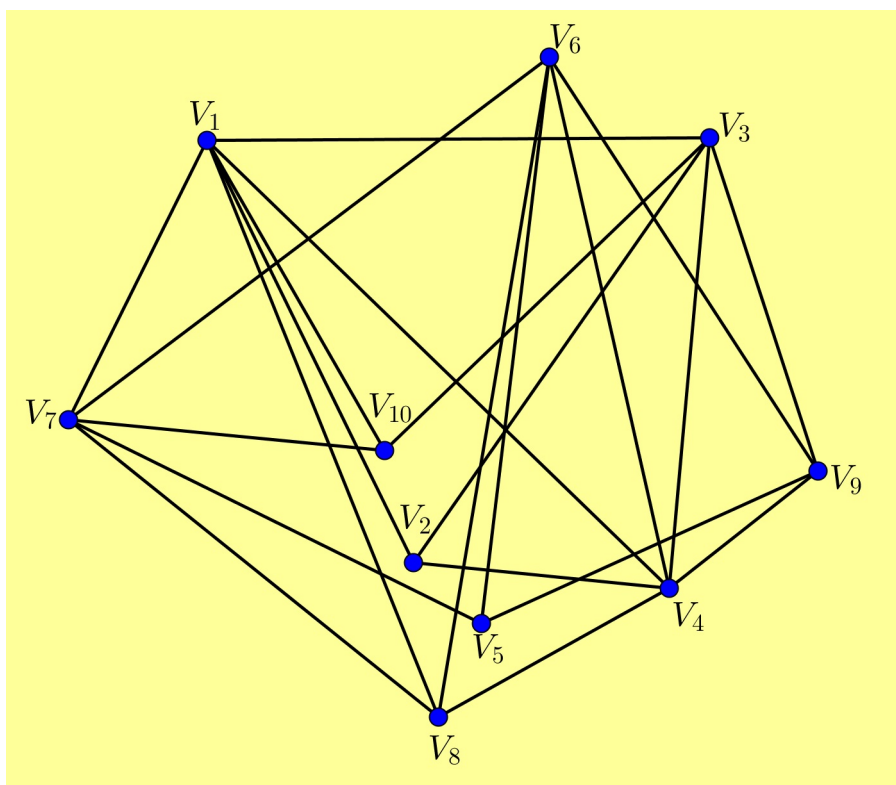


Quando se analisa um grafo, tanto o número de vértices quanto o de arestas podem ser contados facilmente. Por exemplo, é simples verificar que o grafo abaixo possui 8 vértices e 15 arestas.



Por outro lado, determinar o número de faces de um grafo nem sempre é uma tarefa simples.

A primeira dificuldade reside no fato de que um grafo possui infinitos diagramas que o representam, o que em muitos casos torna o trabalho visual de contar o número de faces impraticável.



Este grafo que possui 10 vértices e 22 arestas é planar e possui 14 faces, mas não é uma tarefa fácil contá-las.

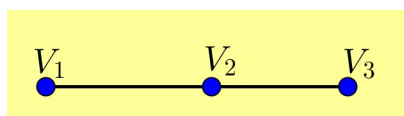
Então se for necessário verificar se um grafo é plano, ou contar o número de faces deste grafo, é preciso um critério que dependa apenas de vértices e arestas, que são mais fáceis de contar.

Para isso, existem 2 teoremas importantes:

Teorema 5.1. *Em todo grafo plano e conexo, sem laços ou arestas paralelas, com A arestas e F faces, tem-se que*

$$2A \geq 3F, \text{ se } A \geq 2.$$

Demonstração. Se $A = 2$, ou seja, com apenas duas arestas o teorema é facilmente comprovado.



Para um grafo com pelo menos duas faces, cada face deve ter no mínimo 3 arestas (a face é no mínimo um triângulo).

Ao contar as arestas de todas as faces, conta-se cada aresta no máximo duas vezes, pois uma aresta pode fazer fronteira com duas faces, ou apenas uma, se possuir um vértice isolado. Como cada face possui no mínimo 3 arestas, pode-se dizer que existem, no mínimo $\frac{3F}{2} \leq A$ ou ainda que $3F \leq 2A$ e conseqüentemente $2A \geq 3F$. \square

Teorema 5.2. *Se \mathcal{G} é um grafo planar e conexo com V vértices, A arestas e F faces, então*

$$V - A + F = 2.$$

Esta relação é conhecida como fórmula de Euler.

Para demonstrar este teorema, inicialmente é necessário demonstrar um lema e dois outros teoremas.

Lema 5.3. *A soma S das medidas dos ângulos dos $F - 1$ polígonos internos de um grafo (sem contar a face externa), cada uma dessas faces com respectivamente $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{f-1}$ arestas é*

$$S = [n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{f-1} - 2(F - 1)] \cdot 180^\circ.$$

Demonstração. Para $F - 1$ polígonos, a soma de todos os ângulos internos desses polígonos é:

$$S = (n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + (n_3 - 2) \cdot 180^\circ + \dots + (n_{F-1} - 2) \cdot 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow S = [n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{f-1} + (-2) + (-2) + (-2) + \dots + (-2)] \cdot 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow S = [n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{f-1} - 2(F - 1)] \cdot 180^\circ.$$

\square

Teorema 5.4. *Sendo A o número total de arestas do grafo e A' o número de arestas da face externa, tem-se que*

$$S = [2A - A' - 2(F - 1)] \cdot 180^\circ.$$

Demonstração. Contando todas as arestas de todas as faces, tem-se $2A$ arestas, pois cada aresta foi contada duas vezes. Então pode-se escrever que

$$2A = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{f-1} + A'$$

$$\Leftrightarrow 2A - A' = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{f-1}.$$

Pelo Lema 5.3, tem-se que

$$S = [n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{f-1} - 2(F - 1)] \cdot 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow [2A - A' - 2(F - 1)] \cdot 180^\circ.$$

□

Teorema 5.5. *Seja V o número de vértices do grafo, V' o número de vértices da face externa e A' o número de arestas da face externa, então*

$$S = (V - V') \cdot 360^\circ + (A' - 2) \cdot 180^\circ. \quad (5.1)$$

Demonstração. No grafo, a soma dos ângulos dos polígonos para cada vértice que não pertence à face externa é 360° .

A soma dos ângulos internos da face externa é

$$(A' - 2) \cdot 180^\circ.$$

Então a soma dos ângulos dos polígonos é

$$S = (V - V') \cdot 360^\circ + (A' - 2) \cdot 180^\circ.$$

Já foi visto que

$$S = [2A - A' - 2(F - 1)] \cdot 180^\circ \text{ e } S = (V - V') \cdot 360^\circ + (A' - 2) \cdot 180^\circ.$$

Então, pode-se escrever

$$[2A - A' - 2(F - 1)] \cdot 180^\circ = (V - V') \cdot 360^\circ + (A' - 2) \cdot 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2A - A' - 2F + 2 = 2V - 2V' + A' - 2$$

$$\Leftrightarrow 2V - 2A + 2F = -2A' + 2V' + 4$$

$$\Leftrightarrow V - A + F = -A' + V' + 2.$$

Porém na face externa existe um ciclo, portanto a quantidade de vértices é igual a quantidade de arestas, ou seja, $A' = V'$.

Então

$$V - A + F = 2.$$

Resta uma dúvida. E se o grafo possui vértices com grau igual a 1?

Note que neste caso, para cada vértice e sua aresta, acrescenta-se um vértice e uma aresta a mais no grafo (e na fórmula), o que não altera a relação.

□

CRITÉRIO PARA VERIFICAR A PLANARIDADE DE UM GRAFO

Já foi visto que em um grafo plano, $2A \geq 3F$ e $V - A + F = 2$.

Isto é suficiente para encontrar um critério de planaridade que depende apenas de vértices e arestas (que são mais fáceis de contar).

ATIVIDADES

Exercício 1 - Critério de planaridade

Mostre que se um grafo é plano a quantidade de arestas deve ser menor ou igual ao triplo do número de vértices menos 6.

Solução:

Sabe-se que

$$V - A + F = 2 \Leftrightarrow F = 2 - V + A.$$

E também que

$$2A \geq 3F.$$

Substituindo F na desigualdade, tem-se

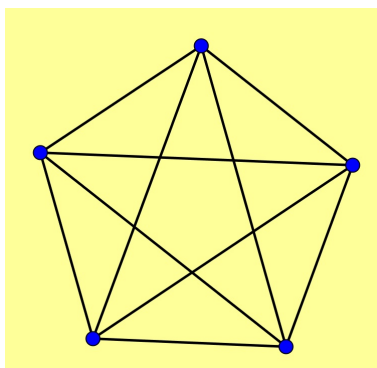
$$\begin{aligned} 2A &\geq 3F \\ \Leftrightarrow 2A &\geq 3(2 - V + A) \\ \Leftrightarrow 2A &\geq 6 - 3V + 3A \\ \Leftrightarrow -A &\geq 6 - 3V \\ \Leftrightarrow A &\leq 3V - 6. \end{aligned}$$

Observação:

Note que foi encontrada uma relação necessária, mas não suficiente para a planaridade. Isto quer dizer, que se um grafo não satisfaz esta relação, ele não é plano, entretanto, se a relação é satisfeita, nada se pode afirmar.

Exercício 2 - Provar que um grafo não é planar

Prove que o grafo a seguir não é planar.



Solução:

O grafo possui 5 vértices e 10 arestas. Aplicando o resultado obtido no Exercício 1 tem-se

$$\begin{aligned} A &\leq 3V - 6 \\ \Leftrightarrow 10 &\leq 3 \cdot 5 - 6 \\ \Leftrightarrow 10 &\leq 9, \end{aligned}$$

que é uma afirmação falsa, portanto o grafo não é planar.

Tarefa

Esta tarefa é virtual. Existe um jogo chamado Planarity que pode ser encontrado em www.planarity.net.

Neste jogo você deve desembaraçar as arestas do grafo de modo que elas não se cruzem.

5.8 AULA 10 - GRAFOS PLANARES - PARTE 2

GUIA DE ORIENTAÇÃO DIDÁTICA

- Metas:
 - Resolver o problema das 3 casas.
 - Mostrar que o problema das 3 casas possui solução na superfície de um toro.
- Roteiro:
 - Lembrar o conceito de planaridade.
 - Propor o problema das 3 casas.
 - Mostrar que o critério obtido na aula anterior não é suficiente para resolver o problema das 3 casas.
 - Mostrar que para o problema das 3 casas o critério de planaridade é

$$A \geq 2V - 4 .$$
 - Propor os Exercícios 1 e 2.

• Observações metodológicas:

O problema das 3 casas é relativamente famoso, então muitos alunos já devem ter tentado resolvê-lo.

Talvez a conclusão mais espantosa deste trabalho é que o problema não pode ser resolvido nem em uma superfície plana e nem em uma superfície esférica, mas pode ser resolvido na superfície de um toro.

Ao aluno que o problema despertar interesse podem ser oferecidos os Capítulos 3 e 4 deste trabalho como material de aprofundamento.

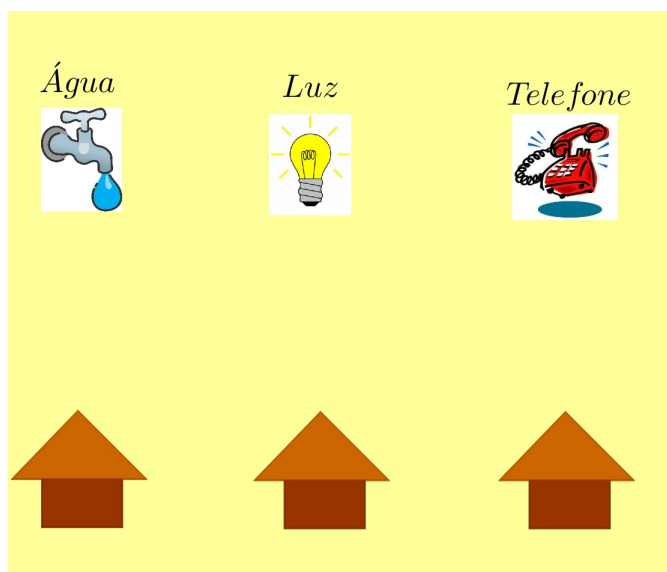
Para resolver os problemas finais deste capítulo o aluno pode utilizar massa de modelar, ou cilindros feitos de borracha ou espuma para fazer um toro e desenhar nele.

AULA 10 - GRAFOS PLANOS - PARTE 2

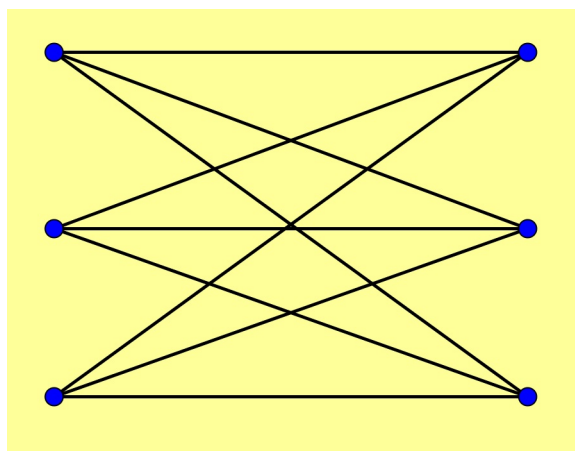
O problema das 3 casas

Na primeira aula de grafos foi enunciado o problema das 3 casas.

É possível conectar os serviços de água, energia e telefone em cada uma das casas sem haver cruzamento de tubulação?



Note que com o conhecimento adquirido até aqui, pode-se modelar o problema transformando as três casas e as estações de água, luz e telefone em vértices e as ligações em arestas.



O problema ficou resumido a decidir se trata-se um grafo plano ou não.

Já foi provado na aula anterior um critério para verificar a planaridade de um grafo.

Se um grafo não for plano, então não é válida a relação $A \geq 3V - 6$.

Este grafo possui $A = 9$ e $V = 6$, portanto

$$A \geq 3V - 6$$

$$\Leftrightarrow 9 \geq 3 \cdot 6 - 6$$

$$\Leftrightarrow 9 \geq 12,$$

que é uma afirmação verdadeira.

Mas isso não significa que este grafo é plano. Significa que testes adicionais devem ser feitos.

Em outras palavras, foi verificada uma condição que é necessária, mas não é suficiente.

Note que este grafo não possui faces limitadas por 3 arestas. Suas faces tem no mínimo 4 arestas.

Aplicando o mesmo raciocínio da aula passada, contando todas as arestas de todas as faces, cada aresta é contada no máximo duas vezes, pois uma aresta pode fazer fronteira com duas faces, ou apenas uma se possuir um vértice isolado. Como cada face possui no mínimo 4 arestas, pode-se dizer que existem, no mínimo $\frac{4F}{2}$ arestas no grafo.

Como o grafo possui A arestas, pode-se escrever que $\frac{4F}{2} \leq A$ ou ainda que $4F \leq 2A$ e conseqüentemente, que $A \geq 2F$.

Relacionando esta nova desigualdade com o teorema de Euler

$$F = 2 - V + A \text{ e } A \geq 2F$$

$$\Leftrightarrow A \geq 2(2 - V + A)$$

$$\Leftrightarrow A \geq 4 - 2V + 2A$$

$$\Leftrightarrow A \geq 2V - 4.$$

Lembrando mais uma vez que foi encontrada outra relação necessária, mas não suficiente.

Voltando ao problema, agora deve-se verificar se um grafo com 9 arestas e 6 vértices satisfaz a nova relação encontrada.

$$\begin{aligned} A &\geq 2V - 4 \\ \Leftrightarrow 9 &\geq 2 \cdot 6 - 4 \\ \Leftrightarrow 9 &\geq 8, \end{aligned}$$

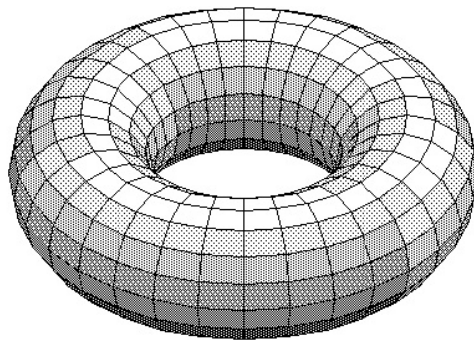
que é uma afirmação falsa.

Portanto o grafo não é plano e é impossível resolver o problema das 3 casas “no plano”.

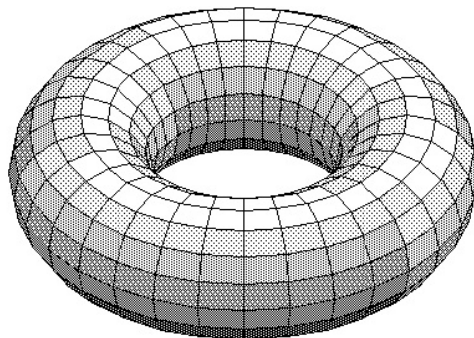
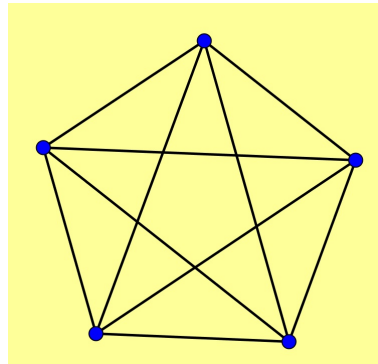
ATIVIDADES

Exercícios finais

- 1) Resolva o problema das 3 casas em uma superfície em forma de uma rosca.



2) Desenhe o grafo abaixo em uma rosca sem cruzamento de arestas.



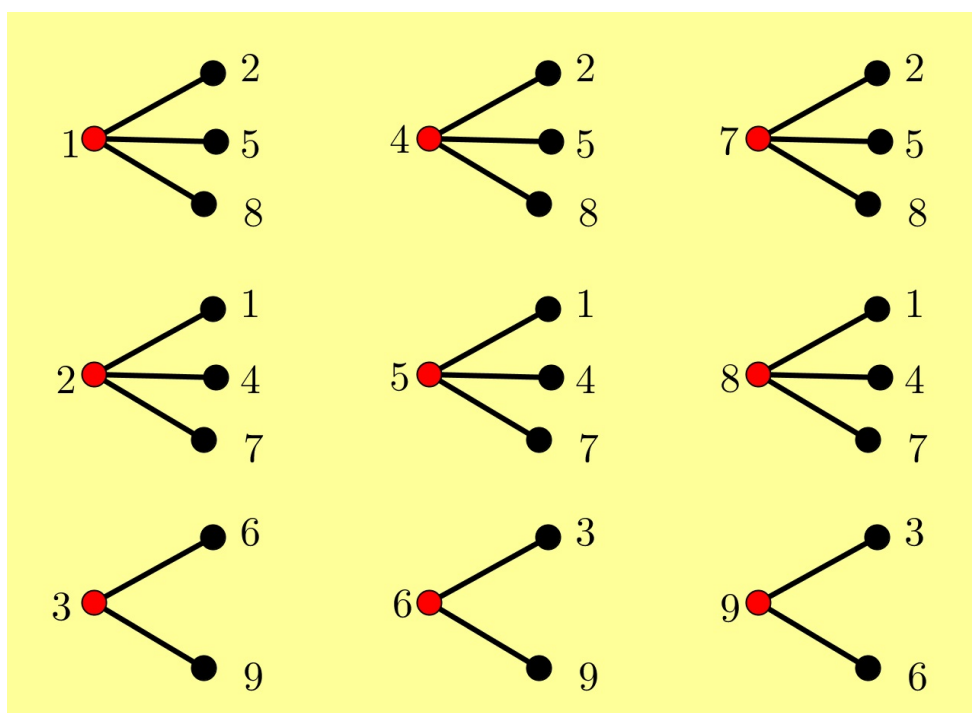
GABARITOS

GABARITO AULA 1

Exercício 2 - O problema das 9 cidades

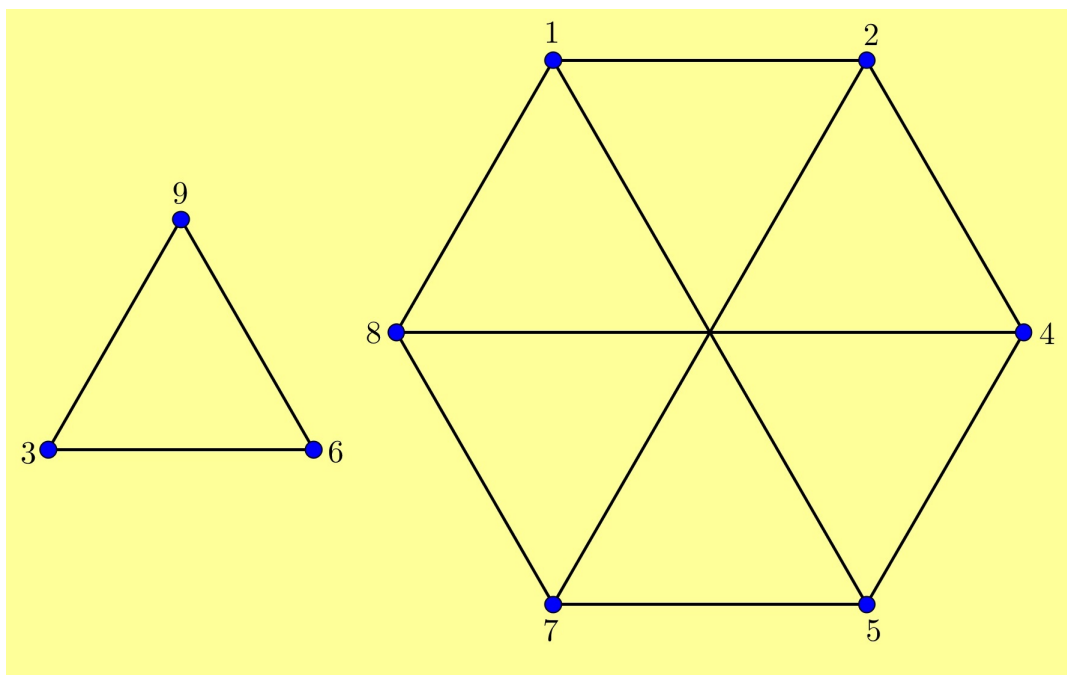
Solução:

Para a modelagem deste problema considere uma cidade como um vértice e uma estrada como uma aresta. Os grafos das nove cidades estão desenhados abaixo (confira).



GABARITOS

Analisando estes grafos, é fácil notar que existem dois conjunto distintos de estradas: as que ligam as cidades 3, 6 e 9 e as que ligam as cidades 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Veja o que acontece quando conectamos os grafos.



Agora é fácil concluir que é impossível sair da cidade 1 e chegar na cidade 9.

GABARITO AULA 2

Exercício 3 - As estradas do reino

Solução:

Para a modelagem do problema, vamos considerar uma cidade como um ponto e uma estrada como uma aresta.

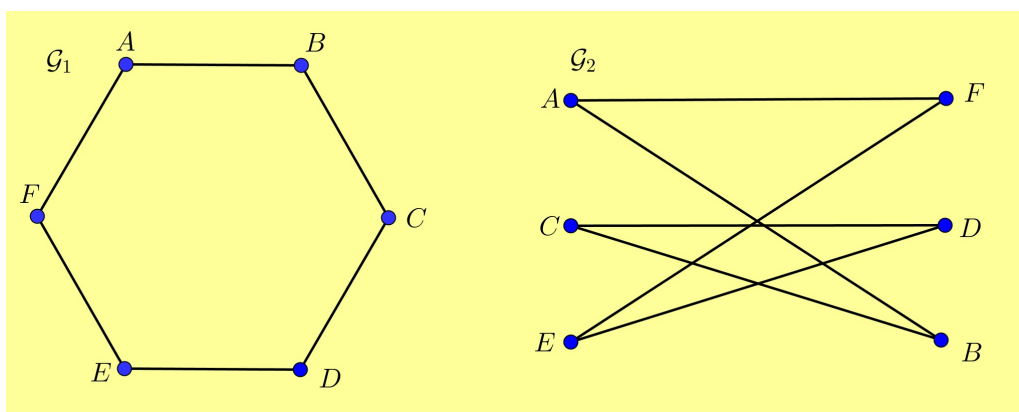
De cada uma das 100 cidades partem 4 estradas, então tem-se um grafo com 100 vértices, cada um deles com grau 4.

A soma de todos os graus dos vértices deste grafo é $4 \cdot 100 = 400$. Isto equivale ao dobro do número de arestas, então existem $\frac{400}{2} = 200$ arestas. Logo, o reino possui 200 estradas.

GABARITO AULA 3

Exercício 1

a) Sim. Os dois grafos são formados por um único ciclo com 6 vértices e 6 arestas.



b) Não. G_4 possui um vértice isolado e G_3 não.

c) Não. G_5 possui 13 vértices e G_6 11.

d) Sim

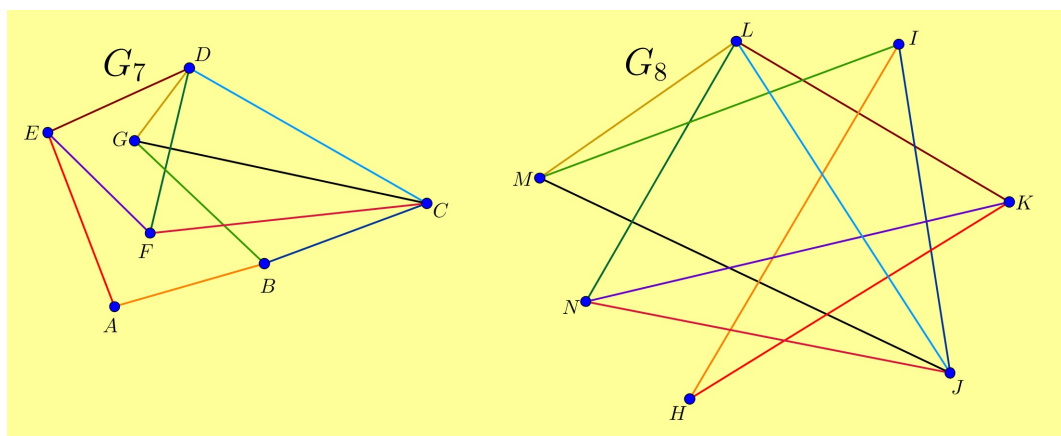


Tabela 6: Vértices.

\mathcal{G}_7	\mathcal{G}_8
A	H
B	I
C	J
D	L
E	K
F	N
G	M

Tabela 7: Arestas.

\mathcal{G}_7	\mathcal{G}_8
{A;E}	{H;K}
{A;B}	{H;I}
{B;C}	{I;J}
{B;G}	{I;M}
{E;D}	{K;L}
{D;G}	{L;M}
{D;F}	{L;N}
{F;C}	{N;J}
{C;G}	{J;M}
{C;D}	{J;L}
{E;F}	{K;N}

Observe a correspondência entre vértices e arestas dos grafos \mathcal{G}_7 e \mathcal{G}_8 .

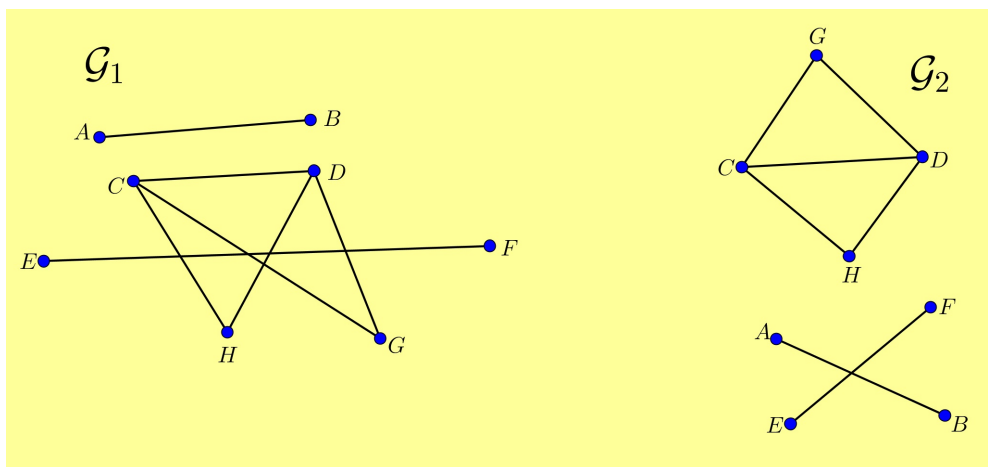
e) sim: os dois grafos são completos com 6 vértices.

f) sim: note que em \mathcal{G}_{12} apenas trocamos os segmentos de reta de \mathcal{G}_{11} por arcos de circunferência.

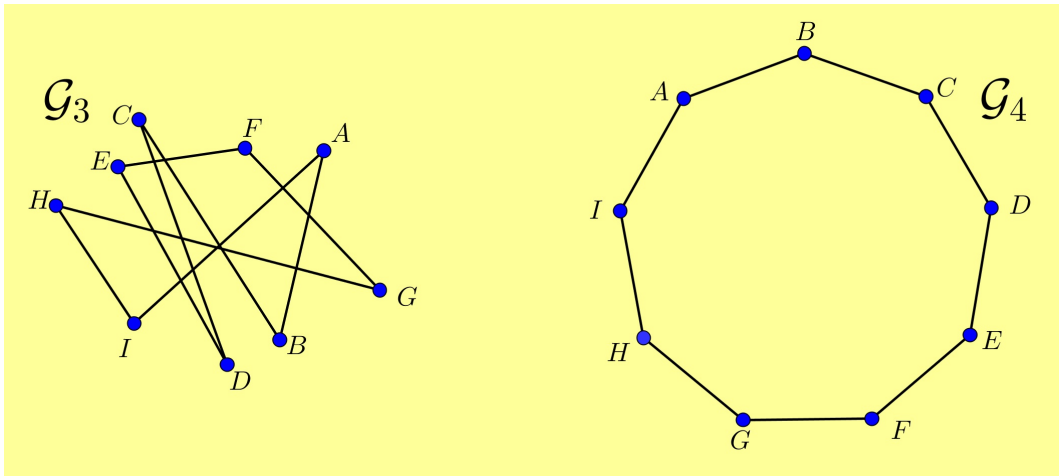
Exercício 2

Existem infinitas soluções. Na sequência é apresentada uma solução para cada ítem.

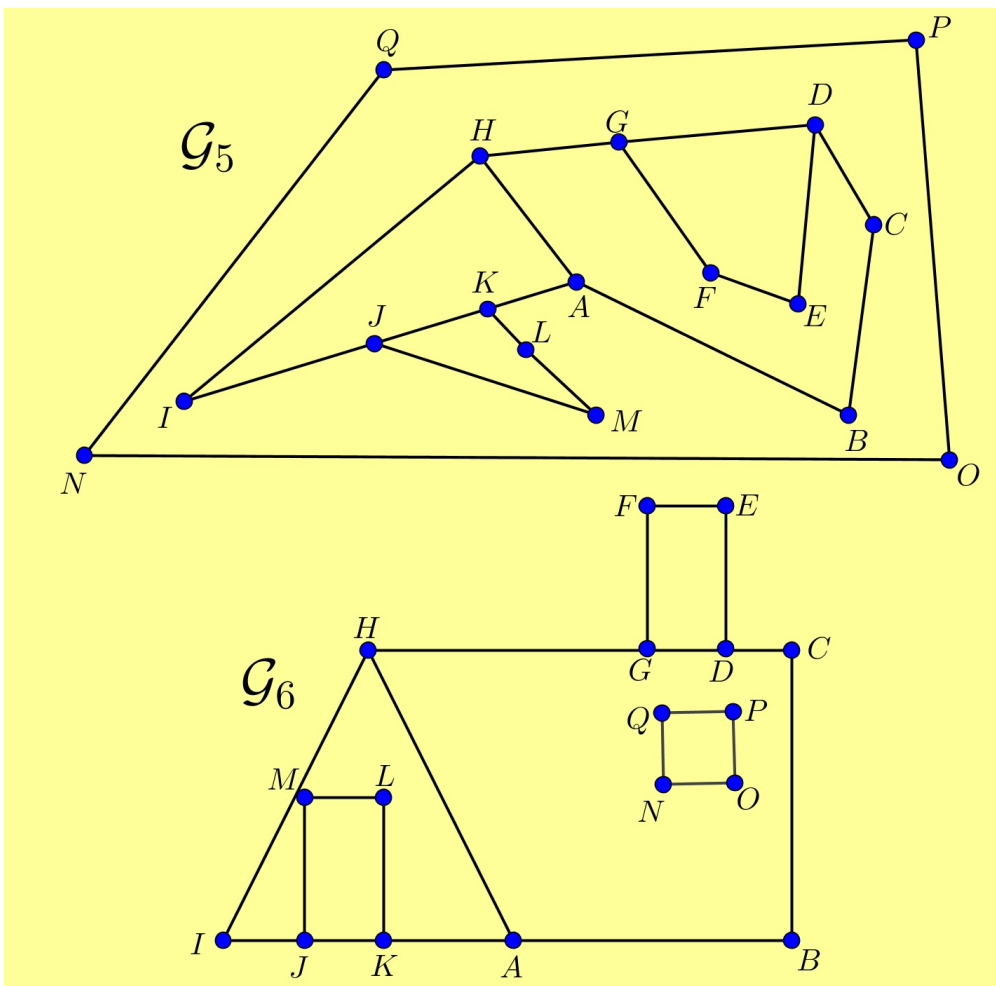
a)



b)



c)



Exercício 1

Solução:

Não. Se o problema for modelado considerando cada estrada como uma aresta e cada cidade como um vértice (V), e utilizando a propriedade de que a soma de todos os graus de um grafo é igual ao dobro do número de arestas, tem-se a equação $2 \cdot 100 = 3V$. Essa equação não possui solução no universo dos números naturais (não se pode ter $\frac{200}{3}$ vértices), logo a afirmação do problema é impossível.

Exercício 2

Solução:

Não. Considerando um aluno como um vértice e uma relação de amizade entre dois alunos como uma aresta, e sabendo que a soma de todos os graus é igual ao dobro do número de arestas tem-se a equação $18 \cdot 2 + 11 \cdot 7 + 21 \cdot 6 = 2Y$, onde Y é igual ao número de amizades, que deve ser um número natural.

$$36 + 77 + 126 = 2Y$$

$$\Leftrightarrow 2Y = 239$$

$$\Leftrightarrow Y = 119,5,$$

portanto impossível.

Exercício 3

Solução:

Não. Considerando um segmento de reta como um vértice e uma intersecção entre 2 segmentos de reta como uma aresta, e sabendo que a soma de todos os graus é igual

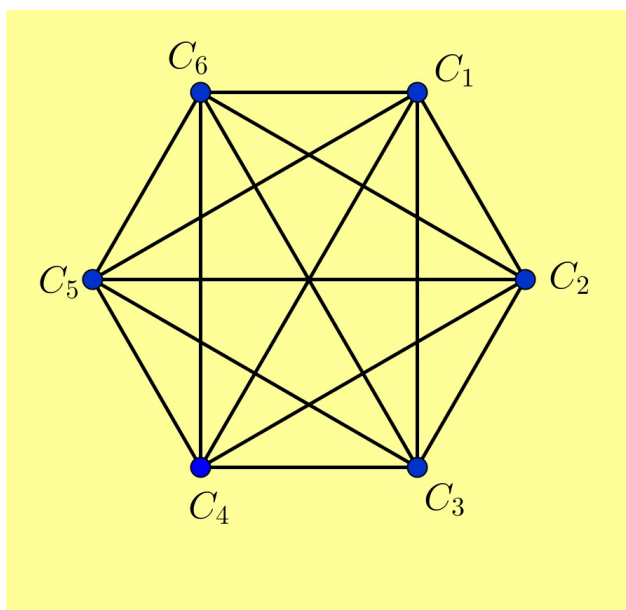
¹ Veja mais informações sobre estes exercícios nas observações metodológicas da aula.

ao dobro do número de arestas tem-se a equação $3 \cdot 9 = 2Y$, onde Y é o número de interseções. Como Y não é natural, não é possível.

Exercício 4

Solução:

Considerando uma comissão como um vértice e um diretor como uma aresta, obtém-se o grafo abaixo:



No total, contamos 15 arestas, e portanto 15 diretores.

Exercício 5

Solução:

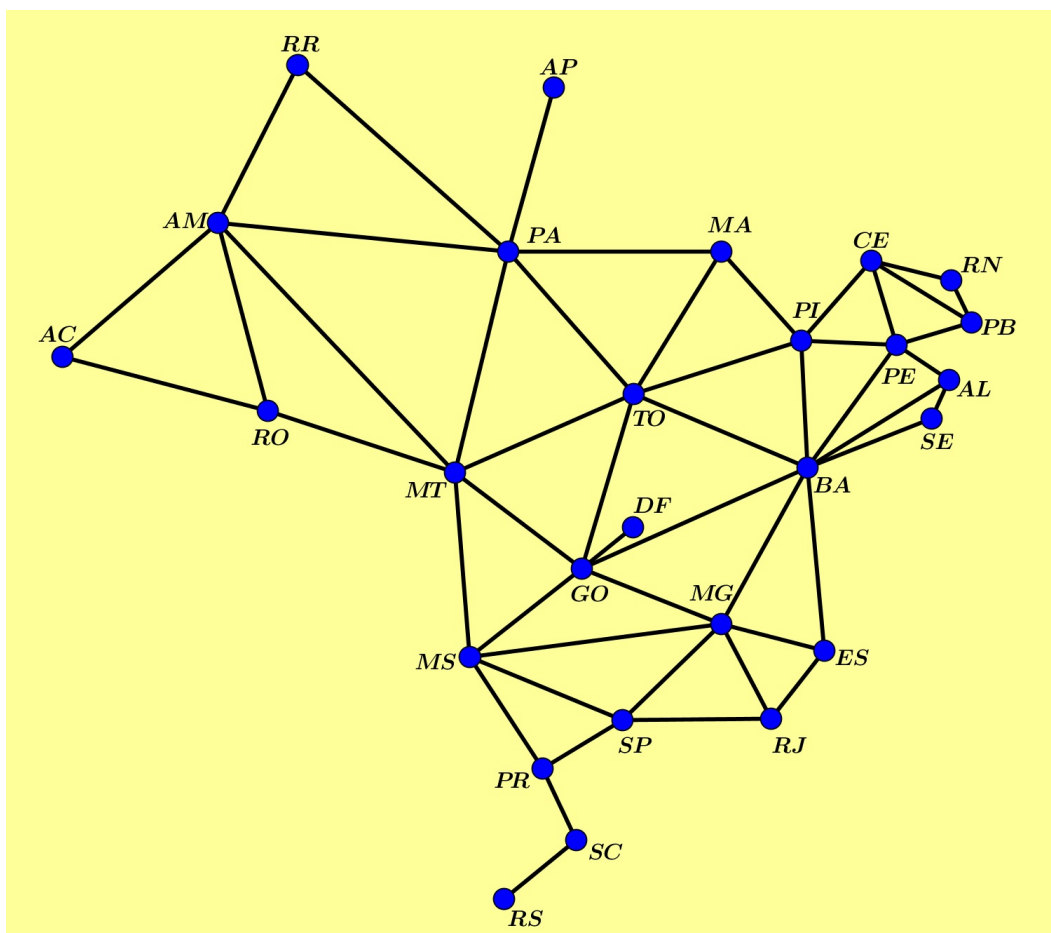
Na verdade este exercício pode ser considerado um novo teorema: o número de vértices ímpares de um grafo deve ser par.

Se toda aresta tem 2 vértices, então a soma de todos os graus deve ser par.

E, uma soma de números naturais é par se, e somente se, o número de parcelas ímpares é par.

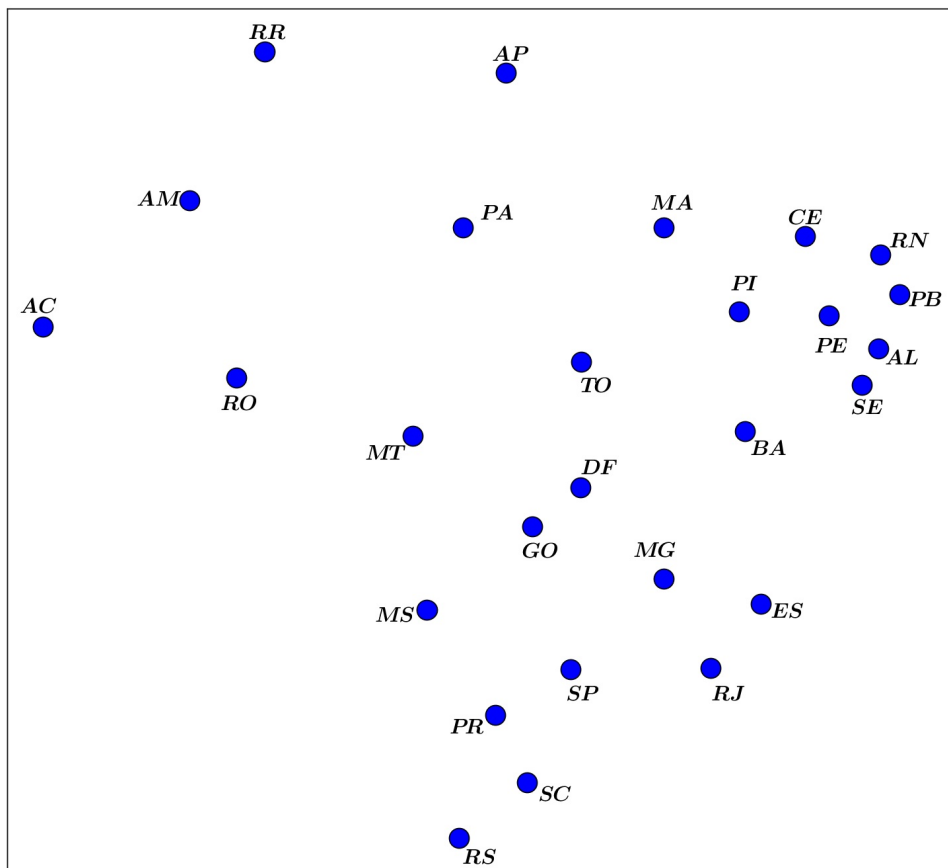
No problema, imagine um grafo muito grande, onde toda a pessoa que já viveu representa um vértice e cada aperto de mão é representado por uma aresta ligando os vértices correspondentes às duas pessoas que estão se cumprimentando. Estamos contando os vértices ímpares deste grafo, que deve ser par.

Exercício 6



O grafo possui 27 vértices (estados). A soma de todos os graus deste grafo é 100 (confira), então existem $\frac{100}{2} = 50$ arestas (fronteiras).

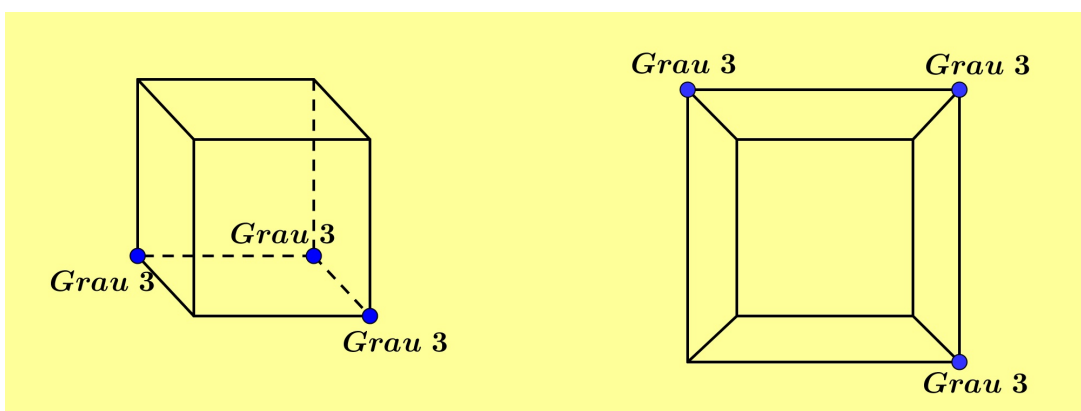
Modelo para o Exercício 6



Exercício 3 - O problema do arame

Solução:

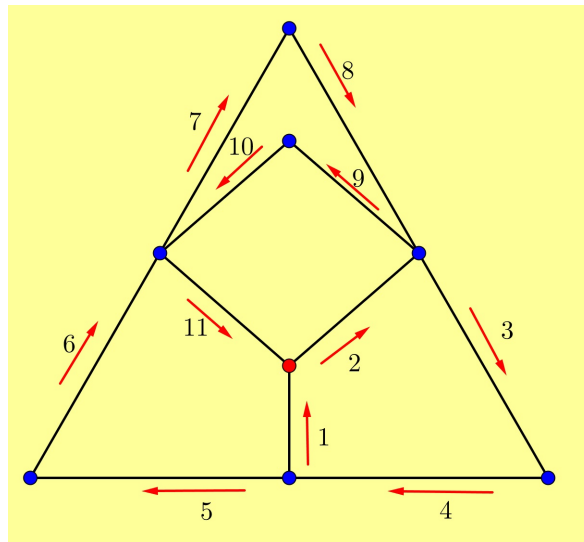
Um cubo tem 8 vértices e de cada vértice partem 3 arestas. Se o cubo for deformado de modo que fique planificado, pode-se ver facilmente que o problema é equivalente ao de um grafo com mais de dois vértices de grau ímpar onde se quer construir um circuito euleriano. O que não é possível.



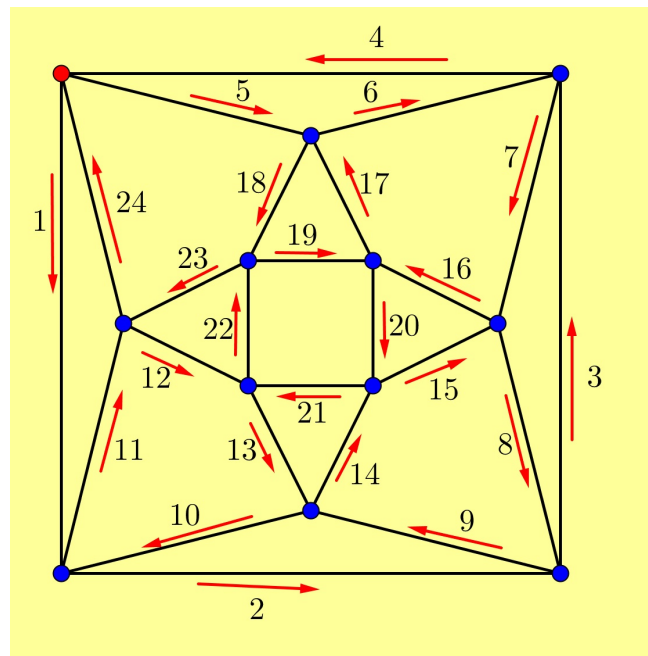
GABARITO AULA 8

Exercício 2 - Encontrar o circuito Euleriano

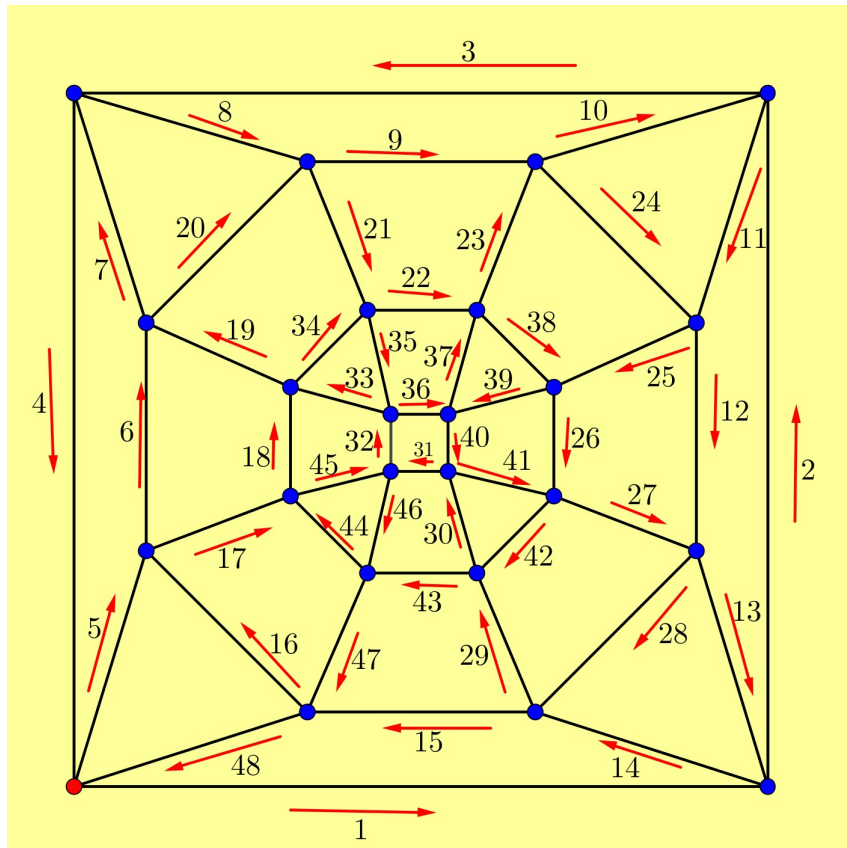
a)



b)

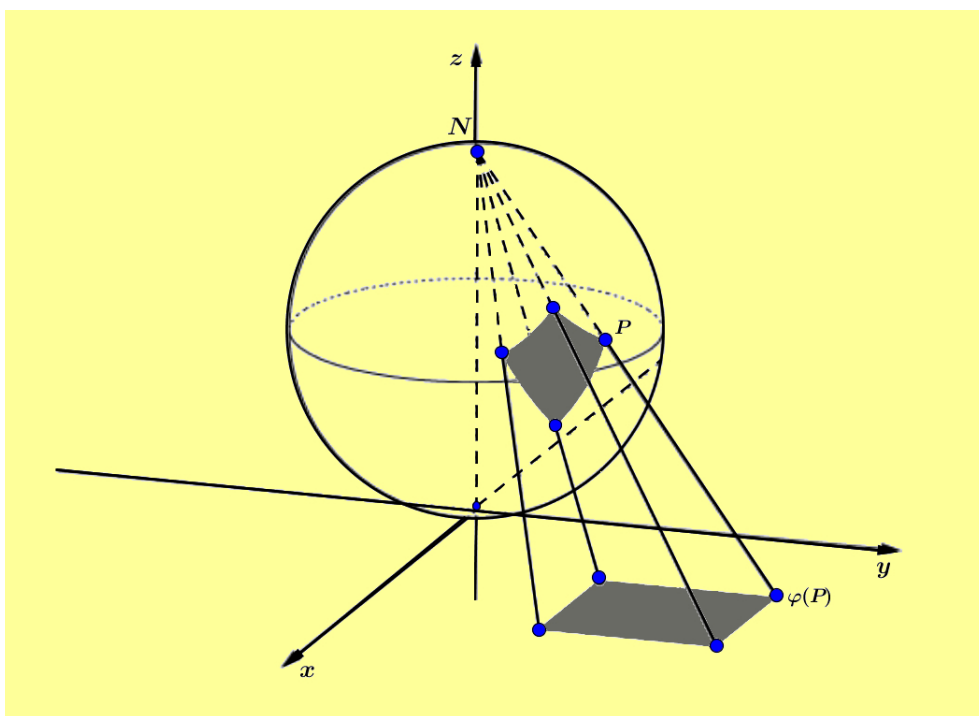


c)



PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Projeção estereográfica é um tipo de transformação onde a superfície de uma esfera pode ser representada em um plano tangente a esta superfície, utilizando como origem um ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência. [12]



Em outras palavras uma projeção estereográfica é a representação de uma esfera tridimensional em um plano bidimensional.

B.1 AS COORDENADAS DA PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Considere a superfície esférica de raio 1 e centro $(0; 0; 1)$.

A equação desta superfície esférica é

$$S^2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}.$$

Considere agora um ponto $P = (a; b; c) \in S^2$ e com ele defina a reta r que passa pelos pontos $N = (0; 0; 2)$ e $P = (a; b; c)$.

Esta reta tem equação

$$r : \{(0; 0; 2) + t(a; b; c - 2) / t \in \mathbb{R}\} = \{(ta; tb; 2 + t(c - 2)) / t \in \mathbb{R}\}.$$

Por fim, considere o plano π , tangente a superfície esférica S^2

$$\pi : \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}.$$

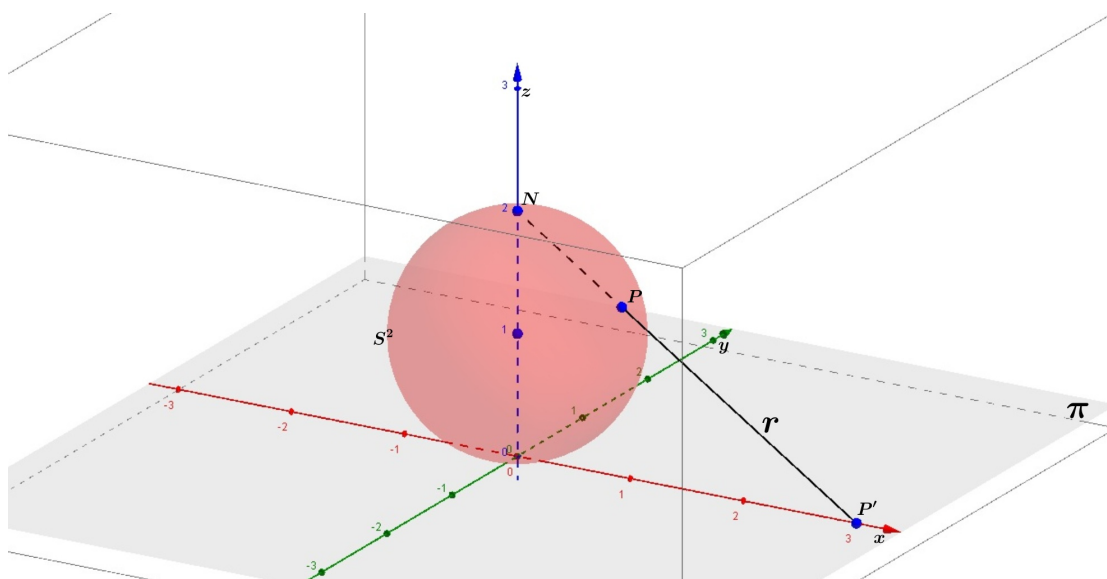


Figura 113: A esfera S^2 , o plano π , a reta r e os pontos N , P e P' .

$$r \cap \pi : \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / (x; y; 0) = (ta; tb; 2 + t(c - 2))\},$$

ou seja

$$\begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ 0 = 2 + t(c - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ t = \frac{2}{2 - c}. \end{cases}$$

Substituindo o valor encontrado para t nas outras equações do sistema, tem-se:

$$x = \frac{2a}{2 - c} \text{ e } y = \frac{2b}{2 - c}.$$

O significado disto, é que é possível levar um ponto P da superfície da esfera, para o plano π , tangente a esta esfera com a seguinte transformação:

$$\varphi : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(a; b; c) \rightarrow \varphi(a; b; c) = \left(\frac{2a}{2 - c}; \frac{2b}{2 - c} \right).$$

Observe que φ está bem definida pois o ponto $N = (0; 0; 2) \in S^2$, que é o único ponto no qual ela não está definida, não pertence ao domínio de φ .

Portanto esta função está definida em todo o seu domínio.

Apenas a título de exemplo, o ponto $P \in S^2$, $P = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3} \right)$, nos dará

$$\varphi(P) = \left(\frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{2 - \frac{5}{3}}; \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{2 - \frac{5}{3}} \right) = (4; 2).$$

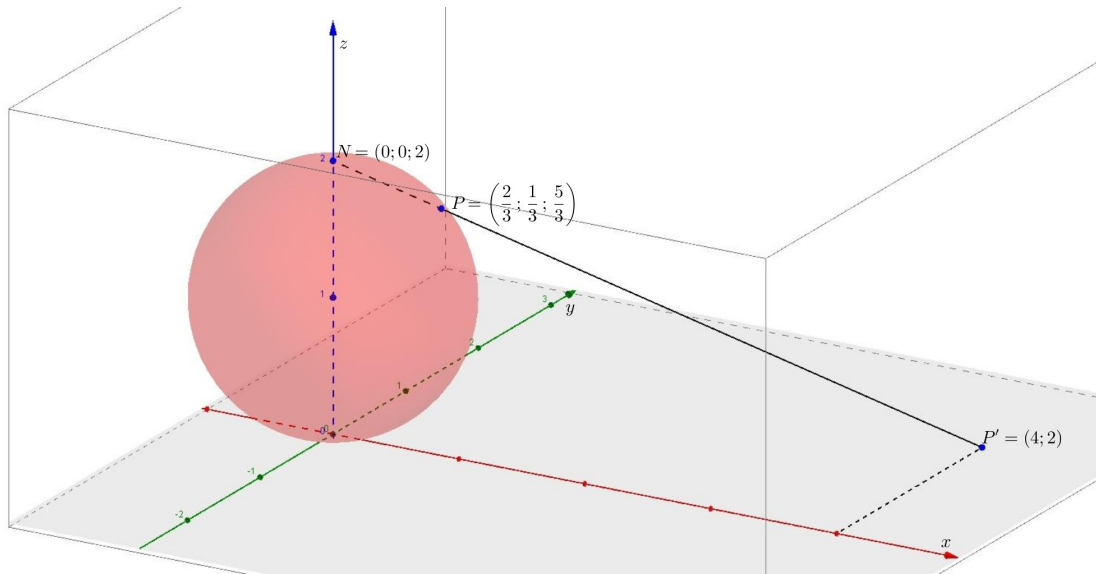


Figura 114: A imagem de P é o ponto $P' = \varphi(P)$.

O nosso interesse em projeção estereográfica é utilizá-la como suporte formal do Teorema 4.2 do Capítulo 4, que diz que o conjunto de todos os grafos planares é igual ao conjunto de todos os grafos com $g = 0$.

Em outras palavras, se um grafo não apresenta cruzamento de arestas na superfície de uma esfera, então ao ser planificado ele também não apresentará cruzamento de arestas e vice-versa.

Para tanto, é necessário provar que a projeção estereográfica é um homeomorfismo.

Dois espaços topológicos dizem-se homeomorfos se existir uma função entre esses espaços que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua.

Inicialmente deve-se provar que φ é uma função bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora.

B.2 φ É UMA FUNÇÃO INJETORA

φ será uma função injetora quando dados dois pontos P_1 e P_2 , se $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$ então obrigatoriamente $P_1 = P_2$.

Sejam $P_1 = (a_1; b_1; c_1)$ e $P_2 = (a_2; b_2; c_2)$.

Tem-se que:

$$\varphi(P_1) = \left(\frac{2a_1}{2-c_1}; \frac{2b_1}{2-c_1} \right) \text{ e } \varphi(P_2) = \left(\frac{2a_2}{2-c_2}; \frac{2b_2}{2-c_2} \right).$$

Esses dois pares ordenados serão iguais se, e somente se,

$$\frac{2a_1}{2-c_1} = \frac{2a_2}{2-c_2} \text{ e } \frac{2b_1}{2-c_1} = \frac{2b_2}{2-c_2}, \text{ com } c_1 \neq 2 \text{ e } c_2 \neq 2.$$

Além disso, P_1 e P_2 pertencem a S^2 , então também devem satisfazer que

$$a_1^2 + b_1^2 + (c_1 - 1)^2 = 1 \text{ e } a_2^2 + b_2^2 + (c_2 - 1)^2 = 1.$$

Então deve-se resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{2a_1}{2-c_1} = \frac{2a_2}{2-c_2} \\ \frac{2b_1}{2-c_1} = \frac{2b_2}{2-c_2} \\ a_1^2 + b_1^2 + (c_1 - 1)^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + (c_2 - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a_2 \cdot (2-c_1)}{2-c_2} \\ b_1 = \frac{b_2 \cdot (2-c_1)}{2-c_2} \\ a_1^2 + b_1^2 + (c_1 - 1)^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 = 1 - (c_2 - 1)^2. \end{cases}$$

Substituindo os valores de a_1 e b_1 em $a_1^2 + b_1^2 + (c_1 - 1)^2 = 1$, obtem-se:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + (c_1 - 1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a_2 \cdot (2-c_1)}{2-c_2} \right)^2 + \left(\frac{b_2 \cdot (2-c_1)}{2-c_2} \right)^2 + (c_1 - 1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a_2^2 \cdot (2-c_1)^2}{(2-c_2)^2} + \frac{b_2^2 \cdot (2-c_1)^2}{(2-c_2)^2} &= 1 - (c_1 - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(a_2^2 + b_2^2) \cdot (2-c_1)^2}{(2-c_2)^2} &= 1 - (c_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Lembrando que $a_2^2 + b_2^2 = 1 - (c_2 - 1)^2$, pode-se escrever que

$$(1 - (c_2 - 1)^2) \cdot (2 - c_1)^2 = (1 - (c_1 - 1)^2) \cdot (2 - c_2)^2$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (2c_2 - c_2^2) \cdot (2 - c_1)^2 = (2c_1 - c_1^2) \cdot (2 - c_2)^2 \\
 &\Leftrightarrow (2c_2 - c_2^2) \cdot (4 - 4c_1 + c_1^2) = (2c_1 - c_1^2) \cdot (4 - 4c_2 + c_2^2) \\
 &\Leftrightarrow 8c_2 - 8c_1c_2 - 2c_1^2c_2 - 4c_2^2 + 4c_1c_2^2 - c_1^2c_2^2 = \\
 &\quad 8c_1 - 8c_1c_2 - 2c_2^2c_1 - 4c_1^2 + 4c_2c_1^2 - c_1^2c_2^2 \\
 &\Leftrightarrow 8c_2 - 2c_1^2c_2 - 4c_2^2 + 4c_1c_2^2 = 8c_1 - 2c_2^2c_1 - 4c_1^2 + 4c_2c_1^2 \\
 &\Leftrightarrow 8c_1 - 8c_2 - 2c_2^2c_1 + 2c_1^2c_2 - 4c_1^2 + 4c_1^2 + 4c_2c_1^2 - 4c_1c_2^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 8(c_1 - c_2) - 2c_1c_2(c_1 - c_2) - 4(c_1 - c_2)(c_1 + c_2) + 4c_1c_2(c_1 - c_2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (c_1 - c_2)(4 - c_1c_2 - 2(c_1 + c_2) + 2c_1c_2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ ou \\ 4 - c_1c_2 - 2(c_1 + c_2) + 2c_1c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ ou \\ c_1 = \frac{2c_2 - 4}{c_2 - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ ou \\ c_1 = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Como c_1 deve ser $\neq 2$, conclui-se que $c_1 = c_2$.

Portanto a igualdade entre pares ordenados $\left(\frac{2a_1}{2 - c_1}; \frac{2b_1}{2 - c_1}\right) = \left(\frac{2a_2}{2 - c_2}; \frac{2b_2}{2 - c_2}\right)$

pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \frac{2a_1}{2 - c_1} = \frac{2a_2}{2 - c_1} \\ \frac{2b_1}{2 - c_1} = \frac{2b_2}{2 - c_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Concluimos então que se $\varphi(P_1) = \varphi(P_2)$ então obrigatoriamente $P_1 = P_2$, e portanto a função é injetora.

B.3 φ É UMA FUNÇÃO SOBREJETORA

Se a projeção estereográfica leva pontos da esfera para o plano, o contradomínio desta função é o plano $\pi = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ também conhecido como plano \mathbb{R}^2 .

Deve-se mostrar que para qualquer ponto $P' = (x; y; 0)$ do plano π , existe um ponto P na esfera que pertence à reta que passa pelos pontos $N = (0; 0; 2)$ e P' .

A reta que passa por $(x; y; 0)$ e $(0; 0; 2)$ tem equação

$$r : \{(0; 0; 2) + t(x; y; -2) / t \in \mathbb{R}\} = \{(tx; ty; 2 - 2t) / t \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos encontrar o ponto P , intersecção entre r e S^2 .

Se $S^2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ então

$$(tx)^2 + (ty)^2 + (2 - 2t - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2x^2 + t^2y^2 + 1 - 4t + 4t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow t^2(x^2 + y^2 + 4) = 4t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ t = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4}. \end{cases}$$

Encontraremos o ponto P , substituindo o valor encontrado para o parâmetro t na reta $r : \{(tx; ty; 2 - 2t) / t \in \mathbb{R}\}$.

Para $t = 0$, temos o próprio ponto $N = (0; 0; 2)$.

Para $t = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4}$, ficamos com:

$$(tx; ty; 2 - 2t) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}; \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}; 2 - \frac{8}{x^2 + y^2 + 4} \right),$$

ou ainda

$$P = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}; \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}; \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 4} \right).$$

Observe ainda que o ponto $P \in S^2$, pois substituindo as coordenadas de P em $S^2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ ficamos com uma sentença verdadeira (Comprove).

Acabamos de mostrar que para qualquer ponto P' de π sempre existe um ponto $P \in S^2$ tal que $P = r \cap S^2$.

Isso é o mesmo que dizer que a imagem de $\varphi(P)$ é o plano π . Portanto a função é sobrejetora.

Por ser injetora e sobrejetora, a função φ é bijetora.

B.4 φ É INVERTÍVEL

Por ser bijetora, podemos definir a função φ^{-1} , inversa de φ como:

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{N\}$$

$$(x; y) \rightarrow \varphi^{-1}(x; y) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}; \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}; \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 4} \right).$$

Note que $\varphi^{-1}(x; y) \neq (0; 0; 2)$ para todo $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Para mostrar que a inversa de φ é a função φ^{-1} devemos mostrar que

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(P) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(P) = P.$$

$$\varphi^{-1}(P) = \left(\frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}; \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}; \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\varphi^{-1}(P)) = \left(\frac{2 \cdot \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}}{2 - \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 4}}; \frac{2 \cdot \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}}{2 - \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2 + 4}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\varphi^{-1}(P)) = \left(\frac{\frac{8x}{x^2 + y^2 + 4}}{\frac{2x^2 + 2y^2 + 8 - 2x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2 + 4}}; \frac{\frac{8y}{x^2 + y^2 + 4}}{\frac{2x^2 + 2y^2 + 8 - 2x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2 + 4}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\varphi^{-1}(P)) = \left(\frac{8x}{8}; \frac{8y}{8} \right) = (x; y).$$

Analogamente

$$\varphi(P) = \left(\frac{2a}{2 - c}; \frac{2b}{2 - c} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(P)) = \\
&= \left(\frac{4 \left(\frac{2a}{2-c} \right)}{\left(\frac{2a}{2-c} \right)^2 + \left(\frac{2b}{2-c} \right)^2 + 4}; \frac{4 \left(\frac{2b}{2-c} \right)}{\left(\frac{2a}{2-c} \right)^2 + \left(\frac{2b}{2-c} \right)^2 + 4}; \frac{2 \left(\frac{2a}{2-c} \right)^2 + 2 \left(\frac{2b}{2-c} \right)^2}{\left(\frac{2a}{2-c} \right)^2 + \left(\frac{2b}{2-c} \right)^2 + 4} \right) \\
&= \left(\frac{\left(\frac{8a}{2-c} \right)}{\frac{4a^2}{(2-c)^2} + \frac{4b^2}{(2-c)^2} + 4}; \frac{\left(\frac{8b}{2-c} \right)}{\frac{4a^2}{(2-c)^2} + \frac{4b^2}{(2-c)^2} + 4}; \frac{\frac{8a^2}{(2-c)^2} + \frac{8b^2}{(2-c)^2}}{\frac{4a^2}{(2-c)^2} + \frac{4b^2}{(2-c)^2} + 4} \right) \\
&= \left(\frac{\left(\frac{8a}{2-c} \right)}{\frac{4a^2 + 4b^2 + 4(2-c)^2}{(2-c)^2}}; \frac{\left(\frac{8b}{2-c} \right)}{\frac{4a^2 + 4b^2 + 4(2-c)^2}{(2-c)^2}}; \frac{\frac{8a^2 + 8b^2}{(2-c)^2}}{\frac{4a^2 + 4b^2 + 4(2-c)^2}{(2-c)^2}} \right) \\
&= \left(\frac{8a}{\frac{4a^2 + 4b^2 + 4(2-c)^2}{2-c}}; \frac{8b}{\frac{4a^2 + 4b^2 + 4(2-c)^2}{2-c}}; \frac{8a^2 + 8b^2}{4a^2 + 4b^2 + 4(2-c)^2} \right) \\
&= \left(\frac{2a(2-c)}{a^2 + b^2 + (2-c)^2}; \frac{2b(2-c)}{a^2 + b^2 + (2-c)^2}; \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + (2-c)^2} \right) \\
&= \left(\frac{2a(2-c)}{a^2 + b^2 + 4 - 4c + c^2}; \frac{2b(2-c)}{a^2 + b^2 + 4 - 4c + c^2}; \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + 4 - 4c + c^2} \right) \\
&= \left(\frac{2a(2-c)}{a^2 + b^2 + (c-1)^2 - 2c + 3}; \frac{2b(2-c)}{a^2 + b^2 + (c-1)^2 - 2c + 3}; \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + (c-1)^2 - 2c + 3} \right).
\end{aligned}$$

Lembrando que $a^2 + b^2 + (c-1)^2 = 1$, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\varphi(P)) &= \left(\frac{2a(2-c)}{1-2c+3}; \frac{2b(2-c)}{1-2c+3}; \frac{2a^2+2b^2}{1-2c+3} \right) \\
\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(P)) &= \left(\frac{2a(2-c)}{2(2-c)}; \frac{2b(2-c)}{2(2-c)}; \frac{2a^2+2b^2}{2(2-c)} \right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(P)) = \left(\frac{2a}{2}; \frac{2b}{2}; \frac{1 - (c - 1)^2}{2(2 - c)} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(P)) = \left(a; b; \frac{c(2 - c)}{2 - c} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\varphi(P)) = (a; b; c).$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] MENONCINI, L.; OSTROSKI, A. Aplicações práticas da teoria dos grafos. <http://www.unochapeco.edu.br/static/files/trabalhos-anais/Ensino/Ci%C3%Aancia%20e%20Tecnologia%20-%20Apresenta%C3%A7%C3%A3o%20Oral/Alvaro%20ostroski.pdf>. Acesso em: Acesso em: 23 dez 2014.
- [2] LOUREIRO, A. A. F. Grafos (slides de curso). http://homepages.dcc.ufmg.br/~loureiro/md/md_9Grafos.pdf. Acesso em: Acesso em: 23 dez 2014.
- [3] GIMBERT, J. Los grafos como modelos matemáticos: ejemplos y aplicaciones (notas para seminário). http://web.udl.es/usuaris/p4088280/teaching/guion_Lec_Guerrero.ps. Acesso em: Acesso em: 23 dez 2014.
- [4] NETTO, P. O. B. *Teoria e modelos de grafos*. São Paulo: Blücher, 1979.
- [5] JURKIEWICZ, S.; NETTO, P. O. B. *Grafos: Introdução e prática*. São Paulo: Blücher, 2009.
- [6] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- [7] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. A experiência russa. In: *Círculos Matemáticos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [8] MELLO, M. P.; MURANI, I. T.; SANTOS, J. P. O. *Introdução à análise combinatória*. Campinas: Editora Unicamp, 2002.
- [9] PEREIRA, G. M. R.; DA CÂMARA, M. A. *Algumas aplicações da teoria dos grafos*. *FAMAT em Revista*, v. 11, p. 67–80, 2008.
- [10] GRIBKOVSKAIA, I.; ØYVIND Halskau Sr.; LAPORTE, G. The bridges of Königsberg - a historical perspective. *Networks*, v. 49, n. 3, p. 199–203, 2007.
- [11] PAMPLONA, D. C. *Tópicos em teoria dos grafos*. 2008. Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

BIBLIOGRAFIA

- [12] Projeção estereográfica - Wikipédia: a enciclopédia livre. http://pt.wikipedia.org/wiki/Proje%C3%93_estereogr%C3%A1fica. Acesso em: Acesso em: 23 dez 2014.
- [13] Parâmetros curriculares nacionais ensino médio. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: Acesso em: 12 fev 2015.
- [14] FORCADE, R. W. Kuratowski's theorem. <http://math.byu.edu/~forcader/MisterK.pdf>. Acesso em: Acesso em: 12 fev 2015.
- [15] SACHS, H.; STIEBITZ, M.; WILSON, R. J. An historical note: Euler's Königsberg letters. *Journal of Graph Theory*, v. 12, n. 1, p. 133–139, 1988.
- [16] KULLMAN, D. E. The utilities problem. *Mathematics Magazine*, v. 52, n. 5, p. 299–302, 1979.