



MARCELO ALVES SOUZA

Grafos no Ensino Básico

Santo André, 2015



Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Marcelo Alves Souza

Grafos no Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro
de Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO MARCELO ALVES SOUZA,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. RAFAEL DE MATTOS GRISI.

Santo André, 2015

Dedico esta dissertação aos meus pais Elena e Adinaldo, à minha esposa Geisa e ao meu filho Caio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de me aprimorar mais ainda a minha profissão que amo muito.

Agradeço aos meus familiares e amigos que estão sempre torcendo pelo sucesso na minha carreira.

Agradeço também à professora Márcia Regina que me auxiliou na aplicação das oficinas na Escola.

Agradeço ainda aos gestores da Escola EE Iraci Sartori Vieira da Silva por ter concedido o espaço para aplicação das oficinas e a equipe de professores que carinhosamente participaram com muito empenho de uma das oficinas.

Agradeço aos meus colegas, professores, gestores, funcionários e alunos do Instituto Presbiteriano Independente de Ensino que torcem pela finalização deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de mestrado que nos acompanhou na tarefa árdua e prazerosa de estudar para concluir as disciplinas e obter sucesso no exame de qualificação. Agradeço especialmente aos colegas Ricardo Almeida Mori, Leandro Albino Mosca e Oertes Alves Souza.

Finalmente agradeço a todos os professores da Universidade que fazem parte desse projeto magnífico em especial ao professor Rafael de Mattos Grisi que aceitou o desafio de me orientar com toda sua paciência e dedicação.

RESUMO

Esse trabalho tem por objetivo apresentar um pouco da teoria de grafos no ensino Básico. Nele serão abordados conceitos básicos da teoria de grafos com maior enfoque sobre os grafos eulerianos e semieulerianos e o teorema das quatro cores. Apresentamos e discutimos também algumas propostas de atividades que foram e poderão ser desenvolvidas no Ensino Fundamental e Médio, possibilitando ao aluno o desenvolvimento de algumas habilidades como investigar, analisar, modelar, dentre outras. A prática dessas atividades foi realizada em uma escola da rede estadual do Estado de São Paulo com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental e com uma turma do 3º ano do Ensino Médio, no ano de 2014.

Palavras-chave: grafos planares, coloração, característica de Euler

ABSTRACT

This work aims to present some of the so called graph theory in the Basic education. It will address the basic concepts of graph theory with greater focus on the Euler graphs and the four color theorem. We also discuss some proposals for activities that have been developed in primary and secondary education, enabling the student to develop some skills to investigate, analyze and model problems using graphs. The practice of these activities took place in a state school of São Paulo with a class of 9th graders of the elementary school and a group of the 3rd year of high school, in 2014.

Keywords: planar graphs, coloring, euler characteristic

CONTEÚDO

| | |
|--|----|
| Introdução | 1 |
| 1 NOÇÕES BÁSICAS DE GRAFOS | 3 |
| 1.1 Definições Básicas | 3 |
| 1.2 Tipos de grafos | 7 |
| 2 GRAFOS EULERIANOS | 13 |
| 2.1 As Sete Pontes de Königsberg | 13 |
| 2.2 Caminhos Eulerianos | 14 |
| 2.3 De Volta a Königsberg | 21 |
| 3 GRAFOS PLANARES | 25 |
| 3.1 Conceitos Iniciais | 25 |
| 3.2 Característica de Euler | 26 |
| 4 COLORINDO MAPAS E GRAFOS | 33 |
| 4.1 Sobre Mapas e Grafos | 33 |
| 4.2 Colorindo Mapas e Grafos | 37 |
| 4.3 O Problema das 4 Cores | 45 |
| 4.3.1 A Demonstração Errada de Kempe | 47 |
| 4.3.2 O contra-exemplo de Heawood e o Problema das 5 Cores | 57 |
| 4.3.3 O teorema das cinco cores | 61 |
| 5 PROPOSTAS DE ATVIDADES | 65 |
| 5.1 Grafos Eulerianos | 65 |
| 5.2 Coloração de Mapas | 71 |
| A SOLUÇÃO DAS PROPOSTAS DE ATVIDADES | 77 |
| A.1 Grafos Eulerianos | 77 |
| A.2 Coloração de Mapas | 84 |
| Bibliografia | 87 |

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é a elaboração de um texto introdutório sobre a Teoria de Grafos que possa ser utilizado como suplemento na educação básica aos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e aos alunos do Ensino Médio. Dessa forma, os assuntos estudados estão expostos de uma maneira simples e detalhada, porém, procuramos manter o rigor matemático, formalizando as ideias (às vezes intuitivas) encontradas em alguns livros introdutórios, como em [1], [2] e [4]. Daremos ênfase a parte referente aos grafos eulerianos e a coloração de grafos e/ou mapas, de modo especial aos teoremas sobre coloração.

Acreditamos que o assunto Teoria dos Grafos pode ser ensinado para estudantes do Ensino Fundamental e Médio bastando que os professores abordem esse tema utilizando problemas desafiantes e que façam sentido para os alunos. Ressaltamos que a abordagem dessa teoria pode ser realizada em diversos momentos.

Neste trabalho procuramos verificar a aceitação de tal assunto para os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e para os alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Desenhar diagramas sem tirar o lápis do papel foi o que mais provocou os alunos durante a realização da dinâmica, eles se sentiram desafiados a desenhar os diagramas, inclusive os que não eram possíveis (sem saber que eram impossíveis). Acreditamos que a experiência que foi vivenciada neste trabalho nos leva a refletir que a proposta de se trabalhar a Teoria dos Grafos no Ensino Médio é válida.

A origem dos estudos da teoria dos grafos se deve ao matemático Leonhard Euler (1707-1783) que propôs uma solução para o famoso problema das sete pontes ou problema das pontes de Königsberg. Tal assunto será abordado e solucionado no capítulo 2.

No capítulo 1, apresentaremos os principais conceitos, as principais definições da Teoria dos Grafos e alguns resultados que servirão de base para os capítulos seguintes.

No capítulo 2, estudaremos os grafos eulerianos. Veremos quais serão as condições necessárias e suficientes para que um grafo seja euleriano e que foi esse tipo de grafo que solucionou o problema das pontes de Königsberg.

Estudaremos mais adiante no capítulo 3, a questão da planaridade de grafos, abordando o teorema de Euler para grafos planos e algumas consequências desse teorema.

Outro problema interessante na Teoria de Grafos, como visto em [3], que é de fácil compreensão e que desperta a curiosidade das pessoas, é o problema das quatro cores, que será trabalhado no capítulo 4.

O Problema das quatro Cores foi proposto por Francis Guthrie em 1852, que após ter concluído seus estudos, estava colorindo um mapa da Inglaterra de modo a não colorir regiões que tivessem fronteira em comum com a mesma cor. Verificou que eram necessárias apenas quatro cores para colorir tal mapa e, fez a mesma coisa com vários outros mapas, se convencendo que apenas quatro cores bastariam para colorir qualquer mapa.

Ele tentou demonstrar esse fato, mas não obteve êxito, e passou o problema para seu irmão Frederick Guthrie, que difundiu o problema para outros matemáticos da época, incluindo De Morgan e seus alunos.

O problema teve sua primeira publicação apenas em 1878 pela *London Mathematical Society* e um ano depois, em 1879, Alfred Bray Kempe publicou um artigo em que apresentava uma demonstração para o problema. Mas passados 11 anos de sua publicação, Percy John Heawood apontou um pequeno erro na mesma, o que a invalidou. Porém, parte da demonstração utilizada por Kempe foi salva por Heawood para demonstrar que cinco cores bastariam para colorir qualquer mapa.

Em 1976 foi apresentada uma nova demonstração por Appel e Haken, mas tal demonstração não era manual, era feita com uso de computador em vários de seus passos, o que gerou algumas dúvidas sobre sua validade e a tornou deselegante para os matemáticos.

Finalizaremos no capítulo 5, com a apresentação e discussão de algumas atividades propostas em uma oficina de grafos eulerianos e uma oficina de coloração que foi realizada em uma escola pública da cidade de Franco da Rocha para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio.

NOÇÕES BÁSICAS DE GRAFOS

Neste capítulo iniciaremos os primeiros passos no mundo dos grafos. Serão definidas as notações e apresentados os principais conceitos acerca da teoria dos grafos que serão utilizados nos capítulos seguintes e, algumas características e resultados.

Vale ressaltar que em todo o contexto deste trabalho estaremos trabalhando com grafos finitos, os quais denotaremos apenas por grafos.

1.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Definimos um grafo da seguinte maneira:

Definição 1.1. Um grafo G é uma estrutura composta por um par ordenado (V, A) onde V é um conjunto não vazio e finito, e A é um *multiconjunto* (conjunto que permite a repetição de elementos) de pares não necessariamente ordenados dos elementos de V . Os elementos de V são chamados de **vértices** ou **nós** e os elementos de A são chamados de **arestas** ou **elos**. Denotaremos por $|V|$ a ordem do grafo, ou seja, o número de vértices.

Se A for um conjunto de pares ordenados, dizemos que o grafo será orientado.

Se u e v são vértices de um grafo, então $(u; v)$ é uma aresta e, dizemos que u e v são *adjacentes* ou *vizinhos*. Também dizemos que u e v são extremos de $(u; v)$.

Note que $(u; v)$ e $(v; u)$ representam a mesma aresta, a menos que o grafo seja orientado.

Podemos representar um grafo através de um diagrama, onde os vértices são pontos distintos do plano e as arestas são as linhas que unem dois vértices.

Tome por exemplo um grafo $G = (V, A)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $A = \{(a;b), (a;d), (b;e), (d;c), (c;e)\}$. O grafo G pode ser representado pelo diagrama da Figura 1.

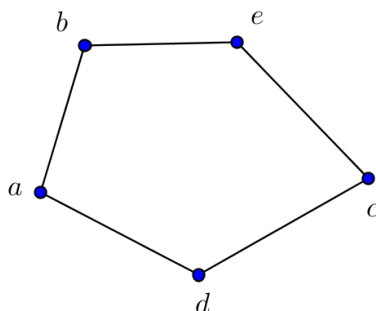


Figura 1: Representação do grafo $G = (V, A)$

Mas devemos nos atentar que um grafo pode ser representado por diversos diagramas distintos. A Figura 2 traz dois diagramas que representam o mesmo grafo $G = (V, A)$ da Figura 1.

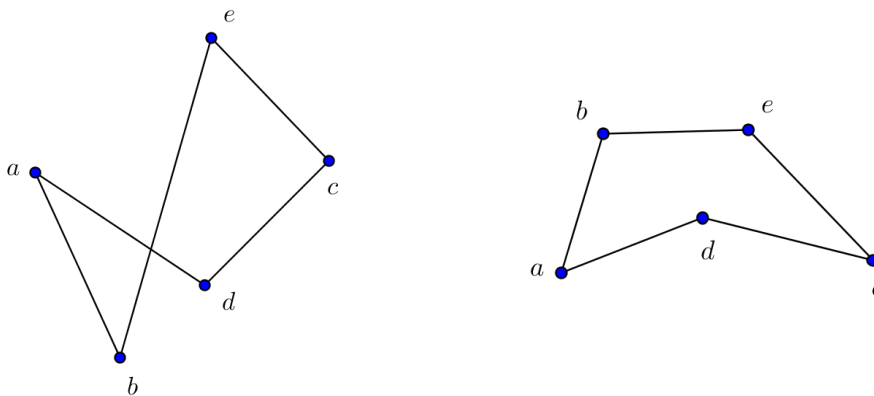


Figura 2: Outras representações do grafo $G = (V, A)$ da Figura 1.

O que mais nos interessa em um grafo é quem são os seus vértices e quem são suas arestas.

Duas arestas são ditas *adjacentes* se elas têm um *extremo* em comum, e dois vértices são *adjacentes* se eles são ligados por uma aresta. Quando existe uma aresta ligando dois vértices, dizemos que a aresta é *incidente* nesses vértices.

Chamamos de *grau do vértice* v o número de arestas incidentes à v . Quando um vértice tem grau 0, dizemos que ele é *isolado*.

Na Figura 1 vemos que o grau de cada vértice é 2, pois incidem duas arestas em cada vértice. Podemos observar também que **a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas**. Você pode estar pensando que o exemplo é simplório demais para tirarmos esta conclusão. Veja o exemplo da Figura 3.

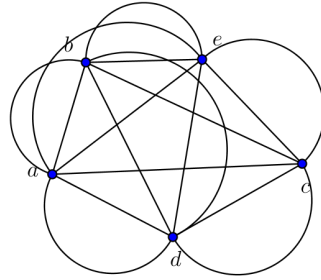


Figura 3: Este grafo possui 17 arestas, e a soma dos graus de seus vértices é 34.

Nesse grafo, o vértice a tem grau 7, o vértice b tem grau 7, o vértice c tem grau 6, o vértice d tem grau 7 e o vértice e tem grau 7, sendo que a soma dos graus é $7 + 7 + 6 + 7 + 7 = 34$. Se contarmos suas arestas, verificamos que possui 17 arestas.

Se ainda não se convenceu de que a soma dos graus de um grafo é igual ao dobro do número de arestas, basta pensarmos que quando estamos contando os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem 2 extremidades, cada aresta está sendo contada duas vezes.

Uma consequência desse resultado é que *todo grafo possui uma quantidade par de vértices com grau ímpar*, pois se tivéssemos uma quantidade ímpar, **a soma dos graus seria ímpar**. Mas o dobro de qualquer número inteiro é par, e a soma dos graus é o dobro do número de arestas, portanto é um número par.

Definição 1.2. Seja $G = (V, A)$ um grafo. Um grafo G' composto por um par ordenado (V', A') , onde V' é um subconjunto de V e A' é um subconjunto de A , é chamado de *subgrafo de* G .

No grafo $G = (V; A)$ representado pela Figura 4, temos que $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $A = \{(a;b), (a;c), (a;d), (a;e), (b;c), (b;d), (b;e), (c;d), (c;e), (d;e)\}$, e no grafo $G' = (V'; A')$ repre-

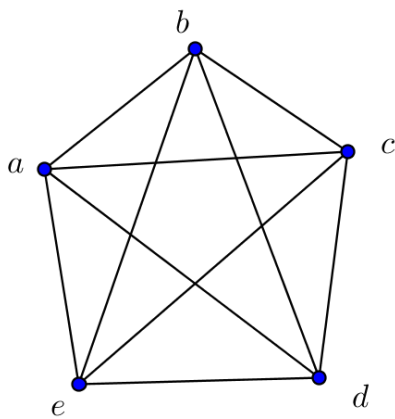


Figura 4: Grafo G .

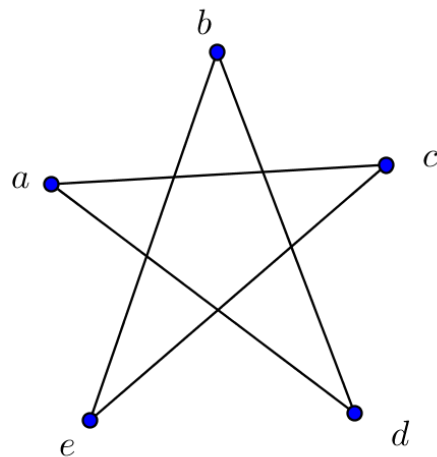


Figura 5: Grafo G' , que é subgrafo de G .

sentado pela Figura 5, temos que $V' = \{a,b,c,d,e\}$ e $A' = \{(a;c),(a;d),(b;d),(b;e),(c;e)\}$. Portanto $G' = (V', A')$ é um *subgrafo* de G .

Apresentaremos a seguir mais algumas definições sucintas sobre grafos que nos poderá ser úteis nos capítulos apresentados a seguir:

Uma aresta que liga um vértice nele mesmo é chamado de **laço**. Devemos ficar atentos que ao contar o grau de um vértice que contém um laço, temos que contar o laço como duas arestas.

Uma aresta é **paralela** a outra aresta se elas possuem extremos nos mesmos vértices.

Na Figura 6, que representa o grafo $G = (V, A)$ em que $V = \{A, B, C, D\}$ e $A = \{(A;B), (A;C), (C;C), (A;D)\}$, temos um laço no vértice C e dois pares de arestas paralelas, um par $(A;D)$ e outro par $(A;B)$.

Aproveite para verificar que nesse grafo, também vale a propriedade de que a soma dos graus é igual ao dobro do número de arestas, pois o grafo possui 6 arestas e a soma dos graus é 12 (A tem grau 5, C tem grau 3, B e D tem grau 2).

Um *percurso* entre dois vértices é uma seqüência finita de vértices e arestas, tal que cada aresta aparece apenas uma vez. Se no percurso não há repetição de vértices, ele será chamado de *caminho*. Um caminho é *fechado* quando o primeiro vértice é igual ao último. Ao caminho fechado também damos o nome de *circuito*.

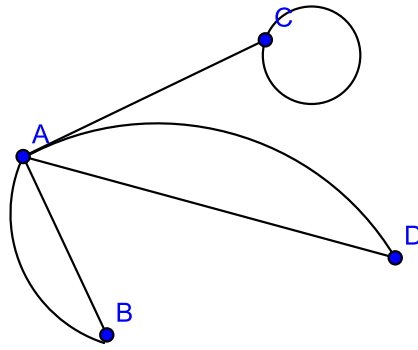


Figura 6: Exemplo de um grafo com laço e arestas paralelas.

O *tamanho do caminho ou do circuito* é o número de arestas que possui o caminho ou circuito. É claro que um caminho não fechado de tamanho k tem $k + 1$ vértices, e um circuito com tamanho k tem k vértices. Um pentágono por exemplo é um circuito de tamanho 5.

Neste trabalho, vamos considerar que um vértice isolado não forma um circuito.

Nas Figuras 7 e 8 temos exemplos de um caminho e um circuito, respectivamente.

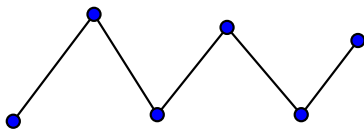


Figura 7: Caminho de tamanho 5.

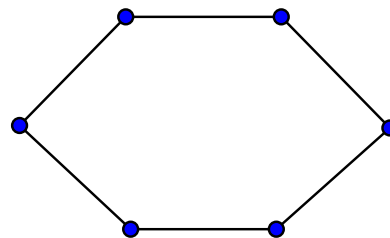


Figura 8: Circuito de tamanho 6.

1.2 TIPOS DE GRAFOS

Para finalizar este capítulo apresentaremos uma série de classificações de grafos de acordo com suas características. As classificações a seguir ajudarão a deixar os próximos capítulos mais simples e palatáveis.

Um grafo que possui arestas paralelas é chamado de *multigrafo*. Na Figura 6 temos um exemplo de um multigrafo.

Um grafo que não possui laços ou arestas paralelas é chamado de *grafo simples*. Na Figura 1 temos um exemplo de um grafo simples.

Um grafo é *completo* se cada par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo G com n vértices é denotado por K_n .

Um grafo que não possui arestas é chamado de grafo *nulo*.

Nas Figuras 9 e 10 temos um exemplo de grafo completo e um exemplo de grafo nulo respectivamente.

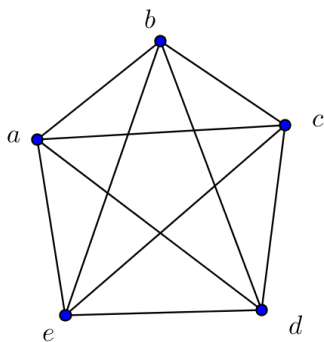


Figura 9: Grafo completo K_5 .

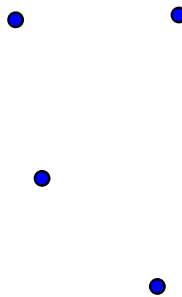


Figura 10: Grafo nulo.

Um grafo G' é chamado de *complementar* de outro grafo G , quando G' possui o mesmo conjunto de vértices, mas apenas com as arestas que faltam para que o grafo G seja um grafo completo.

Dizemos que um grafo G é *regular*, se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Veja um exemplo na figura 11 em que os dois grafos são regulares de grau 2.

Um grafo G é *conexo* se para qualquer par de vértices de G é possível encontrar um caminho que liga esses dois vértices. Caso não seja possível estabelecer um caminho entre esses dois vértices, dizemos que o grafo é *desconexo*.

Nas Figuras 12 e 13 temos exemplos de um grafo conexo e um grafo desconexo respectivamente.

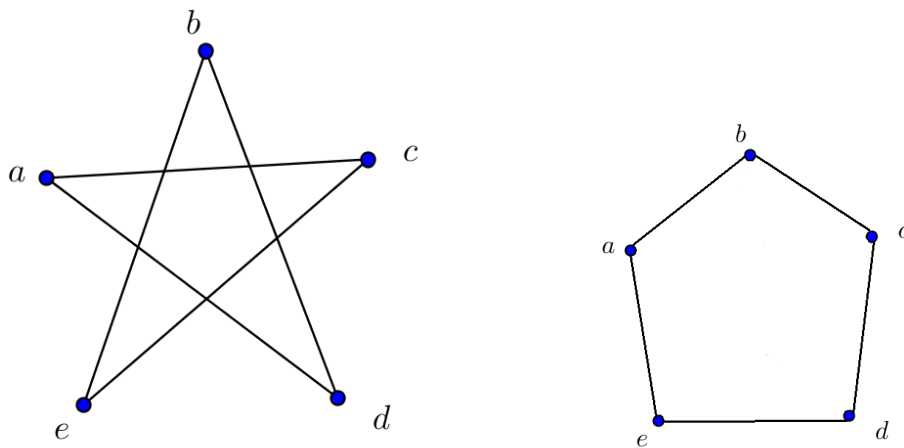


Figura 11: Grafos complementares.

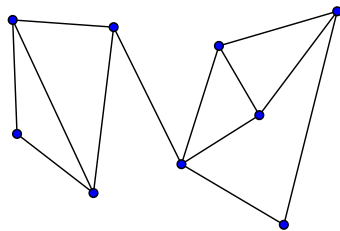


Figura 12: Grafo conexo.

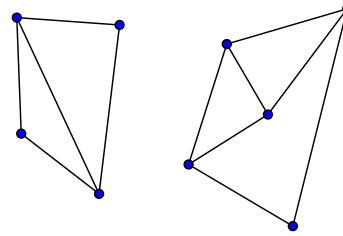


Figura 13: Grafo desconexo.

Em um grafo desconexo, as partes conexas que o formam são chamadas de *componentes*. Por exemplo a Figura 13 é um grafo desconexo formado por duas componentes.

Uma aresta que ligaria duas componentes conexas tornando o grafo conexo é chamada de *ponte*.

Dizemos que um grafo é uma *árvore* se ele for conexo e não possuir circuitos.

A Figura 14 é exemplo de uma árvore:

Um grafo G é dito *bipartido* se pudermos separar os vértices de G em dois conjuntos V_1 e V_2 sem intersecção, de forma que cada aresta de G seja composta por um vértice de V_1 e um vértice de V_2 . Se todos os vértices de V_1 são ligados a todos os vértices de V_2 , então ele é chamado de *bipartido completo* e é denotado por $K_{p,q}$, em que p e q são as quantidades de vértices de V_1 e V_2 .

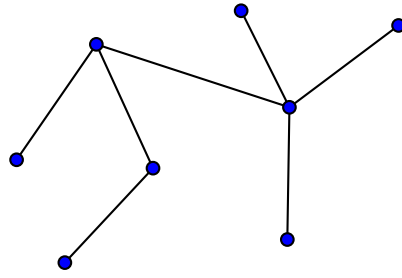


Figura 14: Exemplo de um grafo que é uma árvore.

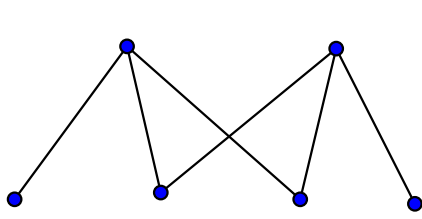


Figura 15: Grafo bipartido.

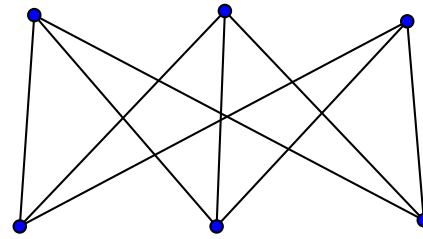


Figura 16: Grafo bipartido completo $K_{3,3}$.

As Figuras 15 e 16 são exemplos de grafos bipartidos

Um grafo onde as arestas são orientadas é chamado de **dígrafo**. Em geral, em um dígrafo são utilizadas setas para mostrar a orientação das arestas. Veja um exemplo na figura 17

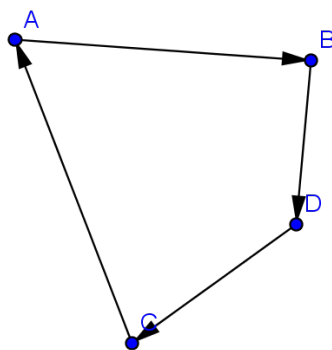


Figura 17: Exemplo de grafo orientado (dígrafo).

Se em uma árvore as arestas possuírem alguma orientação, esta é chamada de *arborescência*. Veja um exemplo na Figura 18

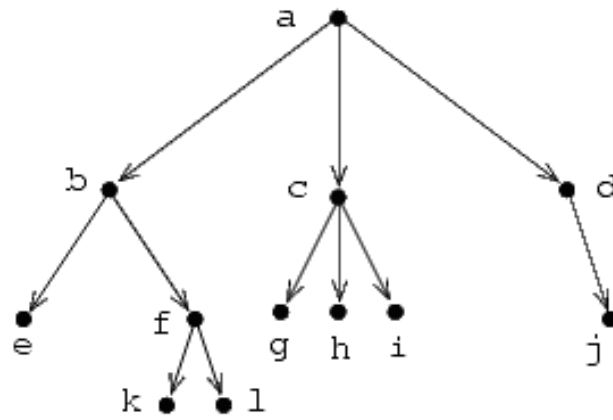


Figura 18: Exemplo de um grafo que é uma arborescência.

GRAFOS EULERIANOS

Neste capítulo trataremos de um famoso problema, proposto inicialmente pelo povo da cidade de Königsberg e levado ao conhecimento de Euler, que o resolveu. Trata-se do problema dos caminhos Eulerianos, que pergunta se é ou não possível percorrer todos os vértices de um grafo, passando por cada aresta apenas uma vez.

A seguir apresentaremos o problema como originalmente proposto a Euler, seguido de sua generalização para o mundo dos grafos. Apresentaremos então uma solução construtiva para o problema, que permite não apenas decidir se existe um caminho Euleriano em um dado grafo, bem como construir tal caminho.

2.1 AS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG

Dentre os inúmeros problemas que podemos modelar com o uso dos grafos, o mais famoso deles é sem dúvida o problema das pontes de Königsberg. Considerado um dos marcos principais na teoria de grafos, este problema foi proposto pelos moradores de Königsberg, então capital da Prússia Oriental, e apresentado a Leonhard Euler por Carl Leonhard Gottlieb Ehler, astrônomo e prefeito da cidade de Danzig.

A cidade de Königsberg é banhada pelo rio Pregel, que contém em seu percurso duas importantes ilhas: Kneiphof e Lomse. As ilhas estão ligadas ao restante da cidade por sete pontes. Conta a história, que os habitantes da cidade tentavam realizar um percurso pela cidade que os fizesse passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma. Como as suas tentativas foram sempre falhas, muitos deles acreditavam que não era possível encontrar tal percurso.

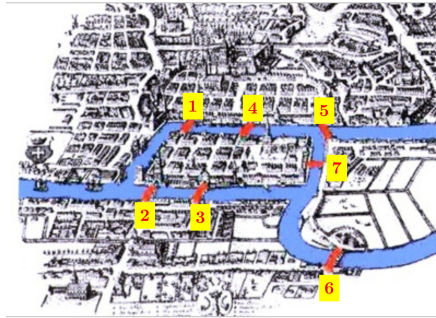


Figura 19: A cidade de Königsberg e suas sete pontes.

Euler, que a princípio pareceu relutante a resolver o problema por não reconhecê-lo como um problema matemático, eventualmente se rendeu a sua própria curiosidade, e mostrou que não é possível encontrar tal percurso.

A solução deste problema, descrita nas correspondências entre Euler, Ehler e o matemático Heinrich Kuhn, é considerada por muitos o início do que muitos anos depois viria a ser conhecida como teoria dos Grafos.

Os mais curiosos podem encontrar mais detalhes sobre o problema das pontes de Königsberg em [10].

2.2 CAMINHOS EULERIANOS

A seguir apresentaremos uma generalização do problema das pontes de Königsberg, adaptado para a linguagem de grafos que usamos até agora. Para iniciar, vamos primeiro definir o nosso principal objeto de estudo neste capítulo.

Definição 2.1. Chamaremos de *caminho (circuito) euleriano* todo caminho (circuito) que passa uma, e apenas uma vez, por todas as arestas de um grafo.

Um grafo que contém um circuito (caminho fechado) euleriano é chamado de *grafo euleriano*, e caso o caminho euleriano não seja fechado o grafo será chamado de *semi-euleriano*. O nome *euleriano* decorre, obviamente, do famoso problema das pontes de Königsberg que foi solucionado por Euler.

Em outras palavras, podemos dizer que um grafo é euleriano se desenharmos sua representação gráfica sem levantar o lápis do papel e retornarmos ao ponto inicial.

Se o grafo é semieuleriano, devemos começar por um ponto e terminar em outro, seguindo o mesmo procedimento anterior.

Exemplo 2.1. Considere os grafos representados nas Figuras 20 e 21.

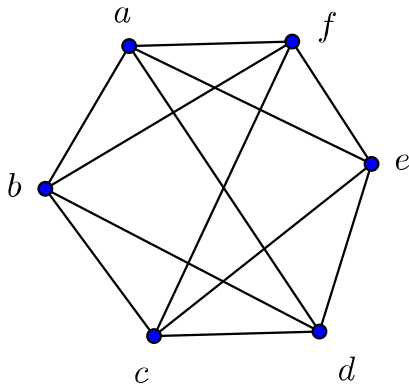


Figura 20: Exemplo de grafo euleriano.

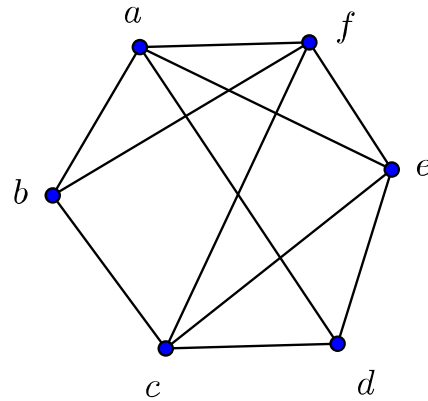


Figura 21: Exemplo grafo semi-euleriano.

Na Figura 20 a sequência $a - d - e - c - b - f - e - a - b - d - c - f - a$ forma um caminho começando e terminando no vértice a , usando todas as arestas do grafo apenas uma vez, e portanto o grafo é euleriano.

Já na Figura 21, a sequência $b - a - d - e - c - f - a - e - f - b - c - d$ forma um caminho euleriano que começa no vértice b e termina no vértice d , sendo assim um grafo semi-euleriano.

Pela própria definição, um caminho sempre será conexo. Como um caminho euleriano contém todas as arestas de um grafo, um grafo euleriano será sempre conexo, a menos que tenha vértices isolados.

Colocadas as definições de grafos eulerianos e semi-eulerianos, a pergunta natural que surge é: como definir se um grafo é euleriano (ou semi-euleriano)? Caso positivo, conseguimos construir tal caminho?

Para melhor entender o problema, comecemos analisando um circuito euleriano.

Suponha então que G é um grafo euleriano, e tome um circuito euleriano em G iniciando, digamos, por um vértice a . Para simplificar, suponha que G não possua laços. Neste caso o primeiro passo do caminho nos leva para um vértice distinto de

a . Sabemos que eventualmente deveremos voltar para a . Isso por que o caminho é fechado, e portanto termina em a . Agora, como cada aresta é usada uma única vez, ao voltarmos para a precisaremos usar outra aresta. Como o caminho começa e termina em a , cada vez que saímos de a devemos retornar para a , fazendo com que o total de arestas usadas para sair de a deve ser igual ao total de arestas usadas para entrar em a . De onde concluímos que o grau de a é necessariamente par.

Para analisar os demais pontos, note que o circuito pode ser percorrido começando em qualquer um dos seus vértices, de modo que a análise acima para ser estendida a todos os demais vértices do grafo.

A presença de laços também não alteraria esta conclusão, pois cada laço soma 2 ao grau do vértice em que incide. Além disso, vértices isolados (que não pertencem ao circuito) possuem grau 0.

Concluímos assim que para um grafo ser euleriano é necessário que todo vértice tenha grau par.

Análise similar pode ser feita para um grafo semi-euleriano. Para isso considere um grafo semi-euleriano, com um caminho semi-euleriano iniciado em a e com fim em b . Seguindo a mesma análise anterior, enquanto houver arestas disponíveis, cada vez que o caminho sai de a ele deve eventualmente voltar para a . Mas como o caminho termina em um vértice distinto de a , vai existir um momento que o caminho sai de a e não retorna mais. Assim, o caminho possui uma aresta usada para sair de a a mais que as usadas para entrar, e o grau de a é necessariamente ímpar. Analogamente, concluímos que o grau de b também deve ser ímpar (basta trocar os papéis das arestas de entrada e saída).

Para os vértices internos ao caminho, a análise não é mais válida. Se c é um vértice interno do caminho, então cada vez que o caminho entra em c ele deve necessariamente sair, e o grau de c deve ser par.

Assim, para um grafo ser semi-euleriano ele deve conter exatamente dois vértices de grau ímpar (nem mais e nem menos). E estes serão os vértices inicial e final de todo caminho euleriano.

Estas são obviamente apenas condições necessárias para a existência de caminhos eulerianos em um grafo. As análises acima partem da hipótese de que tais caminhos existem, e portanto não podem garantir sua existência.

Felizmente, a recíproca das observações acima são também verdadeiras, e formam o principal resultado deste capítulo, que apresentaremos a seguir.

Teorema 2.2 (Teorema de Euler). *Seja G um grafo conexo. Nestas condições vale que*

- G é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.
- G é semi-euleriano se, e somente se, possuir exatamente dois vértices de grau ímpar.

Demonstração. Como comentado logo antes de enunciarmos o teorema, ao menos parte dele já foi demonstrado. Mais explicitamente, mostramos que

- Se G é euleriano, então todos os seus vértices tem grau par.
- Se G é semi-euleriano, então G possui exatamente dois vértices de grau ímpar.

Resta então a parte mais complicada, mostrar que as condições de paridade dos vértices implicam na existência de tais caminhos.

Vamos nos concentrar inicialmente no primeiro caso. Para isso tome um grafo G conexo onde todos os vértices tem grau par. Podemos descartar o caso óbvio, onde o grafo é composto apenas de um nó isolado, e supor portanto que todos os vértices tem grau ao menos 2.

A demonstração a seguir vai se fiar na construção do circuito euleriano através da união de circuitos distintos, como esquematizado na Figura 22 que mostra que dois circuitos com um vértice em comum formam um circuito único.

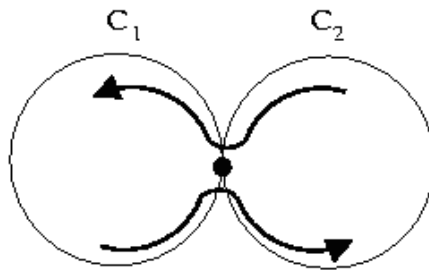


Figura 22: União de dois circuitos

Note que, por possuir apenas vértices de grau maior ou igual a 2, G não pode ser uma árvore (pois árvores possuem nós de grau 1), e portanto possui ao menos um circuito, sem arestas repetidas em seu caminho. Chame este caminho de C_1 .

Se C_1 contém todas as arestas, então o grafo possui um circuito euleriano e o problema está acabado.

Caso contrário, retire todas as arestas de C_1 (assim como todos os vértices que fiquem isolados). Ficamos assim com um subgrafo G' . Como C_1 é um circuito, para cada passagem em um dado vértice a , existe uma aresta de entrada e outra de saída. De modo que o total de arestas incidentes ao vértice a em C_1 é par. Assim concluímos que G' possui todos os vértices ainda com grau par. Além disso, ao menos um dos vértices do grafo resultante, ainda faz parte de C_1 , ou então o grafo não seria conexo.

É importante notar que G' não é necessariamente conexo, mas certamente cada componente conexa possui ao menos um vértice comum com C_1 , e isso é de fato tudo o que precisamos.

Outro ponto importante é que poderíamos escolher C_1 começando em qualquer vértice do grafo, pois como o processo (escolha e retirada de um circuito) gera um subgrafo que não possui vértices de grau ímpar, podemos repeti-lo até que todo o grafo original seja consumido. Basta agora escolher um ciclo que possua o vértice pretendido.

Voltando ao problema, repita o mesmo processo em G' , começando agora por vértice comum a C_1 , e obtendo um novo circuito, denotado por C_2 . Como os dois circuitos possuem um mesmo vértice, formamos assim um único circuito. Retire este novo circuito e repita todo o processo, até esgotar todo o grafo G .

O circuito assim encontrado é, por construção, euleriano.

Logo após esta demonstração, apresentamos um exemplo que, com sorte, auxiliará no entendimento do processo que acabamos de descrever.

Antes de seguirmos para o segundo caso, observe que, o circuito euleriano construído acima pode ser iniciado em qualquer vértice, e aresta incidente a ele, que desejarmos. De fato, todo circuito pode ser percorrido em qualquer direção que desejarmos, e a partir do vértice que escolhermos.

Suponha agora que G possui exatamente dois vértices de grau ímpar, a e b . Vamos então aumentar G , incluindo uma aresta (a, b) . O grafo G' assim gerado possui todas os vértices de grau par, e portanto possui um caminho euleriano. Construa então um circuito euleriano C , iniciando pelo ponto b e passando primeiro pela aresta (a, b) recém acrescentada.

Retirando agora a aresta (a, b) do circuito C , encontrarmos um caminho, iniciando em a e terminando em b . Como C era euleriano, e (a, b) não pertencia a G , o novo caminho assim encontrado é euleriano!

□

Como prometido, vamos agora exemplificar o processo descrito acima.

Exemplo 2.2. Considere o grafo abaixo, que possui todos os vértices de grau par, e portanto deve ser euleriano.

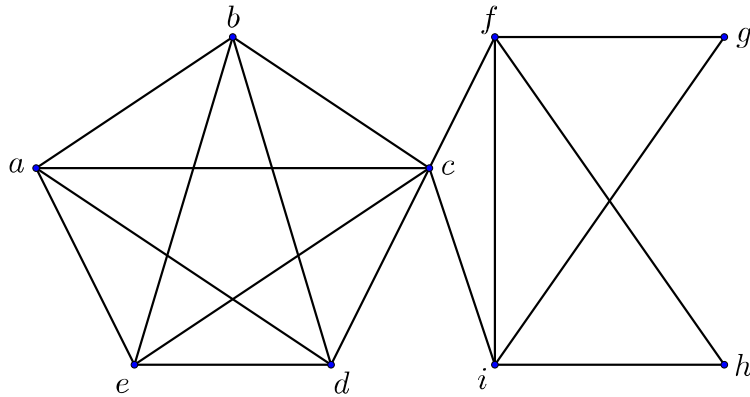


Figura 23: Exemplo de grafo Euleriano.

Começando pelo vértice a , podemos por exemplo percorrer o circuito C_1 dado por

$$a - b - e - a - c - d - a,$$

marcado na figura abaixo.

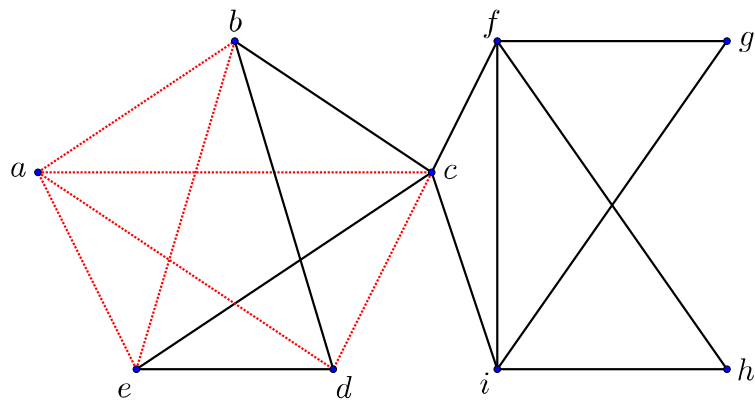


Figura 24: Exemplo de grafo Euleriano

Retirando o circuito C_1 do grafo original, resta um novo grafo G' também com todos os vértices de grau par, e tendo os vértices b, c, d, e em comum com o circuito

C_1 . Tomando um destes vértices, por exemplo, o vértice b podemos construir um novo circuito, por exemplo, o circuito C_2 dado por

$$b - c - e - d - b,$$

mostrado abaixo.

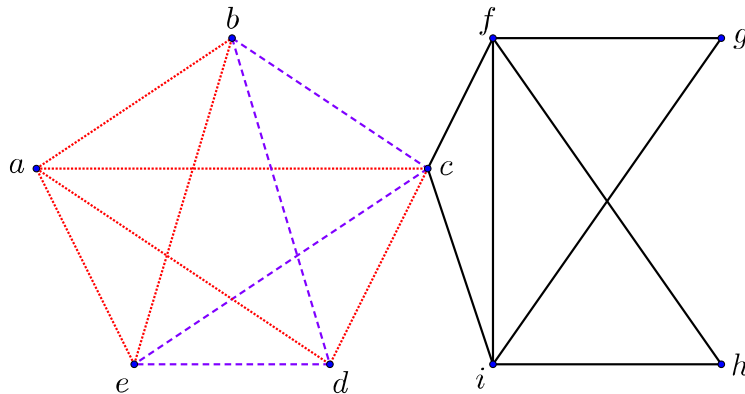


Figura 25: Exemplo de grafo Euleriano.

A união de C_1 e C_2 em um único circuito deve ser feito no ponto escolhido. No caso o ponto b . Para isso “quebramos” circuito C_1 em b , e introduzimos o circuito C_2 , obtendo

$$a - b - c - e - d - b - e - a - c - d - a.$$

Continuando devemos retirar agora o circuito C_2 (além do C_1 que já havia sido retirado). Os vértices em comum do novo grafo com o circuito C_2 recém retirado é apenas o ponto c . E começando um circuito aí obtemos, por exemplo, C_3 dado por

$$c - f - i - c,$$

como mostrado na Figura 26.

Repetindo o processo anterior, introduzimos o circuito C_3 na união já obtida de C_1 e C_2 , obtendo

$$a - b - c - f - i - c - e - d - b - e - a - c - d - a.$$

Para finalizar, retiramos o circuito encontrado até agora, e ficamos com um circuito C_4 que, se iniciado em f , é dado por

$$f - h - i - g - f.$$

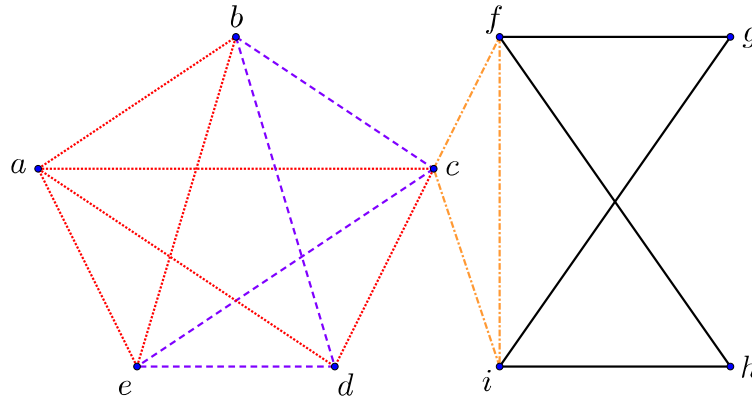


Figura 26: Exemplo de grafo Euleriano.

Assim, unindo C_4 ao circuito obtido até aqui temos

$$a - b - c - f - h - i - g - f - i - c - e - d - b - e - a - c - d - a,$$

que é um circuito Euleriano usando todas as arestas do grafo original.

É interessante observar que um ciclo escolhido pode desconectar o grafo. Mas neste caso, as duas componentes serão ainda Eulerianas, e podemos repetir o processo acima, uma componente por vez.

Fica como desafio para o leitor, montar um circuito Euleriano seguindo os passos acima, mas iniciando do circuito

$$C : a - b - e - a - c - f - i - c - d - a,$$

dado pela união de C_1 e C_3 descritos acima.

Existem diversos algoritmos computacionais para encontrar caminhos eulerianos, mas para grafos a tentativa e erro normalmente funciona, e é uma atividade lúdica bastante atraente para estudantes do ensino fundamental.

2.3 DE VOLTA A KÖNIGSBERG

Para terminar o capítulo voltaremos ao problema das sete pontes e, com auxílio do teorema de Euler, daremos uma solução final ao questionamento de seus habitantes.

Para tanto, vamos primeiro modelar o problema usando um grafo, no qual os vértices indicam as regiões ligadas a parte continental e as arestas indicam as pontes, como indicado na Figura 27.

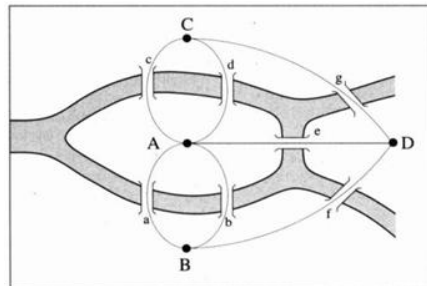


Figura 27: Representação gráfica do problema das 7 pontes

Verificamos que o grau do vértice A é 5 e os vértices B, C e D tem grau 3. Como todos os vértices desse grafo possuem graus ímpares, chegamos a conclusão de que o problema não possui solução! Não é coincidência portanto que os habitantes não tenham conseguido encontrar o caminho desejado.

É interessante observar, no entanto, que se retirarmos qualquer uma das pontes, o problema teria solução. Isso por que o grafo tem exatamente 4 vértices, e retirando uma aresta qualquer, dois deles teriam o grau reduzido em 1, ficando assim com grau par. Deste modo teríamos apenas 2 vértices com grau ímpar, e o grafo seria semi-euleriano. A Figura 28 traz uma das maneiras de fazer isso.

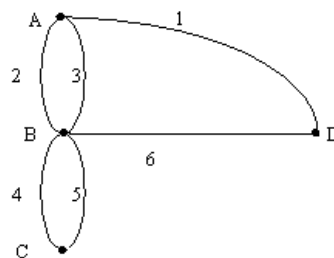


Figura 28: Representação gráfica do problema das 7 pontes com uma ponte a menos.

Mais detalhadamente,

- Retirando as pontes a ou b, os graus de A e B seriam pares.
- Se retirarmos as pontes c ou d, os graus de A e C seriam pares.

- Retirando a ponte e, teríamos os vértices A e D com grau par.
- Retirando a ponte f, teríamos os vértices B e D com grau par.
- Se retirarmos a ponte g, os graus de C e D seriam pares.

Da mesma forma, construir mais uma ponte na cidade também faria o problema possível. Veja a Figura 29.

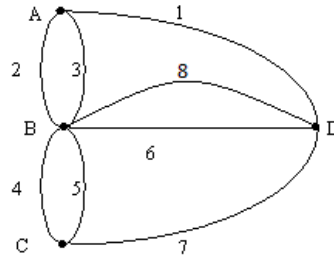


Figura 29: Representação gráfica do problema das 7 pontes com uma ponte a mais.

- Acrescentando uma ponte que liga A e B, os graus de A e B seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga A e C, os graus de A e C seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga A e D, os graus de A e D seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga C e B, os graus de C e B seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga C e D, os graus de C e D seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga B e D, os graus de B e D seriam pares.

Novamente, em qualquer um dos casos, haveriam apenas dois vértices com grau ímpar.

Segundo [10], o problema atualmente possui solução, pois foi construída uma nova ponte, então o grafo não é mais o mesmo.

GRAFOS PLANARES

Neste capítulo estudaremos um grupo bastante particular de grafos, conhecidos por grafos planares. Veremos que nem todo grafo tem uma representação planar, e que garantir a planaridade de um dado grafo não é tarefa simples. Teremos por meta encontrar resultados que possam nos garantir se um grafo não é planar, mas que infelizmente não nos permitem garantir que um grafo é planar. Para isso estudaremos as relações entre o número de vértices, arestas e faces de um grafo, dentre elas a famosa Fórmula de Euler para grafos planares.

3.1 CONCEITOS INICIAIS

Definição 3.1. Um grafo G é *planar* se existir uma representação deste grafo no plano sem intersecção de arestas (exceto em seus extremos). Uma representação de G sem cruzamentos de arestas é conhecida por *representação planar* do grafo.

Nas Figuras 30 e 31 a seguir temos duas representações distintas do grafo completo K_4 , sendo uma delas planar.

Um erro comum é confundir um grafo com sua representação gráfica, e assim dizer que o grafo K_4 da Figura 30 não é planar, pois as arestas $(a; c)$ e $(b; d)$ se cruzam. No entanto, não podemos nos esquecer que um grafo têm infinitas representações distintas, e a própria definição diz que a existência de uma representação planar é o suficiente para dizer que o grafo é planar. Assim, a Figura 31 é suficiente para verificamos que o grafo K_4 é planar.

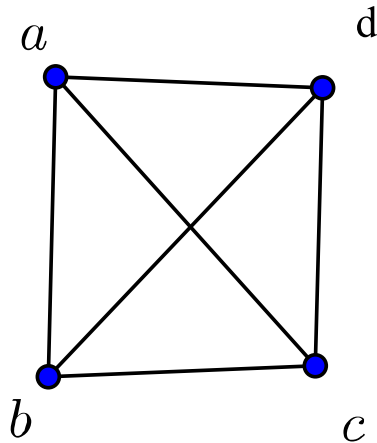


Figura 30: Grafo completo K_4 .

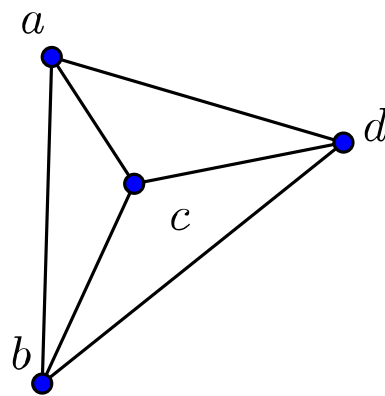


Figura 31: Representação planar de K_4 .

Uma representação planar de G divide o plano em regiões delimitadas pelas arestas que chamaremos de faces. Uma destas regiões é ilimitada e está “por fora” do grafo, que denotaremos por *face externa*. A representação de K_4 na figura 31, por exemplo, possui 4 faces.

3.2 CARACTERÍSTICA DE EULER

Enquanto a própria definição de um certo grafo, traz indubitavelmente o total de vértices e arestas neste grafo, a determinação do total de faces pode ser um problema mais complicado. Antes de mais nada, o grafo precisa ser planar, e até aqui, tanto para garantir a planaridade do grafo, quanto para contarmos o total de faces, precisamos antes encontrar uma representação planar.

O problema fica ainda mais complicado quando percebemos que, como a própria definição de face depende de uma representação planar específica, é possível que o total de faces também dependa!

A resposta para este problema está na conhecida fórmula de Euler, que mostra que para um grafo planar o total de faces depende exclusivamente do total de vértices e arestas, garantindo assim que não depende da representação planar escolhida.

Mais a frente utilizaremos esta fórmula (junto com outras observações) para encontrar critérios necessários para a planaridade, e assim poder testar a planaridade

de um dado grafo. Por enquanto, vamos enunciar o resultado e tentar mostrar sua veracidade.

Teorema 3.2 (Fórmula de Euler). *Se G é um grafo planar e conexo com v vértices, a arestas e f faces em sua representação plana, têm-se*

$$v - a + f = 2.$$

Demonstração. Vamos mostrar a validade do teorema primeiro para o caso em que G é uma árvore.

É evidente que em uma árvore temos que o número de faces f é igual a 1, pois não possui nenhum caminho fechado.

Agora, se considerarmos que $a = 1$, temos que $v = 2$ (pois uma aresta é ligada por dois vértices).

A partir daí podemos inserir arestas uma a uma até encontrar a árvore desejada. Para cada aresta inserida, deve-se inserir um novo vértice (caso contrário fecharíamos um caminho). Assim, se inserirmos $a - 1$ arestas, serão inseridos $a - 1$ vértices. Assim, ao chegarmos em a arestas, o número de vértices será $a + 1$. Em outras palavras $v = a + 1$. Segue que

$$v - a + f = (a + 1) - a + (1) = 2.$$

Suponha agora que G não é uma árvore.

Neste caso, pela própria definição de árvore, G possui um caminho fechado. Retirando-se uma aresta do caminho fechado, o número de vértices não se altera, enquanto que o número de arestas diminui 1 unidade e o número de faces também diminui uma unidade, pois haverá uma fusão entre as duas regiões que eram adjacentes a aresta retirada. Assim, se chamarmos de a^* , v^* e f^* o total de arestas, vértices e faces do novo grafo teremos

$$a^* = a - 1, v^* = v \text{ e } f^* = f - 1,$$

e portanto

$$v^* - a^* + f^* = v - (a - 1) + (f - 1) = v - a + f.$$

Concluimos assim que $v - a + f$ é invariante em relação a essa operação de retirada de aresta de um circuito.

Como esta operação apenas quebra o ciclo, mas sem desconectar o grafo, podemos repetir esse processo em toda face até obtermos uma árvore, mantendo o grafo conexo e ainda continua planar.

Como para árvore resultante vale a relação $v - a + f = 2$, a mesma igualdade valerá para o grafo original. \square

De um modo geral não é uma tarefa fácil decidir se um grafo é planar ou não. A princípio, para garantir a planaridade de um certo grafo é necessário encontrar um representação planar.

A fórmula de Euler é um primeiro passo para encontrar condições algébricas que ajudem nesta tarefa, mas ela sozinha tem pouca utilidade. Isso por que para determinar o total de faces de um grafo, e assim verificar se a fórmula é ou não satisfeita, ainda precisamos de uma representação planar!

Quando temos a representação gráfica de um grafo, fica evidente a quantidade de vértices e a quantidade de arestas, no entanto, encontrar o número de faces pode não ser uma tarefa simples. Veja o exemplo da Figura 32.

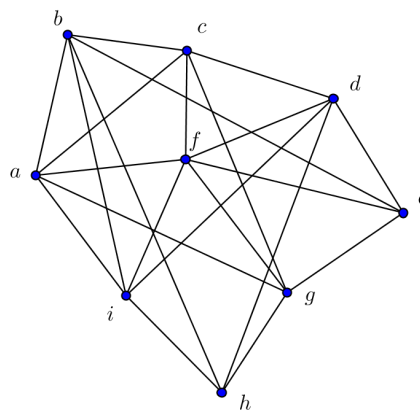


Figura 32: Grafo com 9 vértices e 19 arestas.

Pelo teorema de Euler, se soubéssemos que o grafo da Figura 32 é planar, poderíamos concluir que ele possui 12 faces. Mas não podemos garantir que ele é planar sem uma representação planar deste. Para essa figura, seria interessante investigar a condição de planaridade de alguma maneira que não fosse necessário conhecer o número de faces.

Abaixo estudaremos algumas condições que ajudam a verificar se um grafo não é planar, mas como são condições necessárias (mas não suficientes) para a planaridade, ainda podem haver grafos não-planares que as satisfaçam, e portanto não nos permitem afirmar que um dado grafo é realmente planar.

Proposição 3.3. *Se G é um grafo planar, conexo e sem laços e arestas paralelas, com a arestas ($a \geq 2$) e f faces em sua representação plana, então*

$$a \geq \frac{3}{2}f.$$

Demonstração. Para mostrar a veracidade desta afirmativa, primeiro observe que cada aresta delimita no máximo duas faces (arestas que não pertencem a circuitos fazem fronteira com apenas uma). Assim, somando o número de arestas de cada face encontraremos no máximo duas vezes o total de arestas do grafo.

Além disso, como o grafo não possui laços e arestas paralelas, cada circuito tem no mínimo 3 arestas, e portanto cada face é delimitada por ao menos 3 arestas. Esta afirmativa só não é verdade se o grafo possuir apenas uma face (a externa). Mas neste caso, como $a \geq 2$, a afirmativa é trivial.

Assim, segue que $2a \geq 3f$, e

$$a \geq \frac{3f}{2}.$$

□

Através da fórmula de Euler, pode-se deduzir outras relações entre o número de vértices e arestas de um grafo planar, que podem ser muito úteis para verificar se um grafo não é planar.

Usando o Teorema 3.2 juntamente com a proposição 3.3, chegamos ao seguinte corolário:

Corolário 3.4. *Se G é um grafo planar e conexo (sem laços e arestas paralelas) com a arestas ($a \geq 2$) e v vértices em sua representação plana, têm-se*

$$a \leq 3v - 6$$

Demonstração. Isolando f no Teorema 3.2 temos $f = 2 + a - v$. Como, pela Proposição 3.3, temos $a \geq \frac{3f}{2}$, então

$$a \geq \frac{3(2 + a - v)}{2} \Leftrightarrow 2a \geq 6 + 3a - 3v \Leftrightarrow 2a - 3a \geq 6 - 3v \Leftrightarrow a \leq 3v - 6.$$

□

O interessante deste corolário é que ele depende apenas do total de vértices e arestas do grafo, e portanto pode ser facilmente verificado. Mais uma vez, se um grafo satisfaz tal condição, não podemos concluir nada sobre ele. Mas se a condição não for satisfeita, então garantimos que o grafo não é planar.

Exemplo 3.1. Podemos usar esse fato para mostrar que o grafo K_5 não é planar.

Pela própria definição de K_5 , sabemos que ele possui 5 vértices e 10 arestas.

Assim vale que

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Leftrightarrow 10 \leq 9,$$

o que é um absurdo. Segue portanto que K_5 não é planar.

Este resultado vale para todo grafo planar, conexo e sem arestas paralelas ou laços, mas se incluirmos ainda mais informações sobre o grafo, podemos melhorar esta condição.

Corolário 3.5. *Se G é um grafo planar (sem laços e sem arestas paralelas) e conexo com v vértices, a arestas e sem circuitos de comprimento 3, têm-se*

$$a \leq 2v - 4$$

Demonstração. Seguindo argumento análogo ao usado na proposição 3.3, e observando que cada face tem no mínimo 4 arestas, encontramos que $2a \geq 4f$.

Usando que $f = 2 + a - v$ temos

$$a \geq 2(2 + a - v) \Leftrightarrow a \geq 4 + 2a - 2v \Leftrightarrow a - 2a \geq 4 - 2v \Leftrightarrow a \leq 2v - 4.$$

□

Uma classe importante de grafos com a propriedade de não possuir circuitos de tamanho 3 são os grafos bipartidos completos. A planaridade dos grafos do tipo $K_{2,n}$, $n \geq 1$ pode ser facilmente verificada pelo leitor, mas os grafos do tipo $K_{3,n}$, $n \geq 3$, por não serem planares, constituem exemplos mais complicados.

Exemplo 3.2. Vamos estudar o grafo $K_{3,3}$ usando os resultados acima. Antes de mais nada, observe que $K_{3,3}$ possui 6 vértices e 9 arestas.

Testando as condições do corolário 3.4, obtemos que

$$a = 9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12.$$

Assim, o corolário 3.4 não nos diz nada sobre a planaridade de $K_{3,3}$.

Mas agora, pelo corolário 3.5, como o grafo $K_{3,3}$ não possui faces triangulares, caso fosse planar, deveria satisfazer a condição $a \leq 2v - 4$. Mas

$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8.$$

Dessa forma, podemos concluir que $K_{3,3}$ não é planar.

Outro importante teorema sobre planaridade está enunciado a seguir:

Teorema 3.6. *Se G é um grafo planar (sem laços e sem arestas paralelas) e conexo com v vértices e a arestas ($a \geq 2$), então G tem pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.*

Demonstração. Para mostrar que esse fato é verdadeiro, devemos observar que se $a \leq 3v - 6$, então com certeza $a < 3v$. Se todos os vértices tivessem grau maior ou igual a 6, então de cada vértice seria adjacente a pelo menos 6 arestas e o total de arestas seria no mínimo igual a $3v$. Assim teríamos que $a \geq 3v$, o que contradiz o fato de que $a < 3v$.

Portanto pelo menos um vértice tem grau inferior ou igual a 5.

□

4

COLORINDO MAPAS E GRAFOS

Neste capítulo iremos estudar o problema da coloração de mapa, que consiste basicamente em colorir as regiões de um dado mapa, sem que regiões vizinhas sejam pintadas com a mesma cor. Dentre os resultados importantes relacionados a este problema, nos concentraremos no chamado teorema das quatro cores, que diz que, respeitando a condição colocada anteriormente, qualquer mapa pode ser colorido com no máximo quatro cores.

Apesar de sua aparente simplicidade, esse teorema só foi demonstrado realmente com mais de cem anos após a sua conjectura. Ressalte-se ainda que a única demonstração conhecida requer o uso de computadores, não existindo ainda nenhum argumento matemático simples que o demonstre.

Apresentaremos alguns passos da tentativa de demonstração do teorema feita por Kempe e a correção feita por Heawood, o que na verdade sugeriu a demonstração do teorema das 5 cores. Faremos também o esboço de uma demonstração do teorema das cinco cores.

4.1 SOBRE MAPAS E GRAFOS

Antes de entender a relação entre mapas e grafos, vamos primeiro entender mais detalhadamente o principal problema deste capítulo: a coloração de mapas.

Não seremos muito formais na definição do que entenderemos por mapa, mas o leitor pode pensar em um mapa como uma divisão de uma região em sub regiões menores, assim como em mapas de países separados por estados.

Como dito no preambulo deste capítulo, colorir um mapa significa atribuir cores as suas regiões, de forma que regiões que possuem uma linha comum em suas fronteiras recebam cores distintas. Vale ressaltar aqui que um ponto apenas, não é considerado uma fronteira.

Considere, por exemplo, os mapas das Figuras 33, 34 e 35, que possuem 5, 6 e 7 regiões respectivamente.

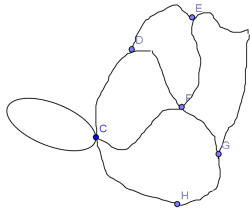


Figura 33: mapa 1.

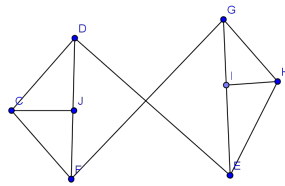


Figura 34: mapa 2.

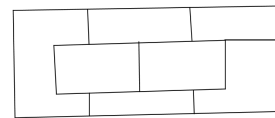


Figura 35: mapa 3.

Um exercício interessante é tentar colorir tais mapas de modo a usar o menor número de cores possível.

Para o mapa da Figura 33, por exemplo, são necessárias apenas 2 cores.

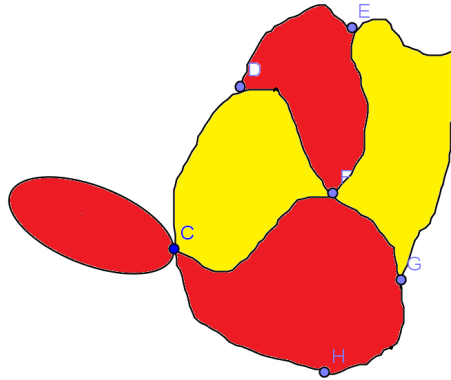


Figura 36: Mapa da Figura 33 colorido.

Para o mapa da Figura 34, vemos que duas cores já não são suficientes, sendo necessário o uso de mais uma cor.

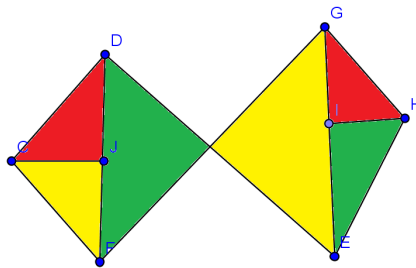


Figura 37: mapa da Figura 34 colorido.

Observando o mapa da Figura 35, podemos concluir que são necessárias mais de 3 cores para colori-lo.

Mas por mais interessante que possa parecer este problema, ainda resta uma questão importante: como ele se relaciona com o resto do trabalho? Em outras palavras, como modelar nosso problema usando grafos? Existem duas formas clássicas de fazermos isso, e a seguir explicaremos ambas.

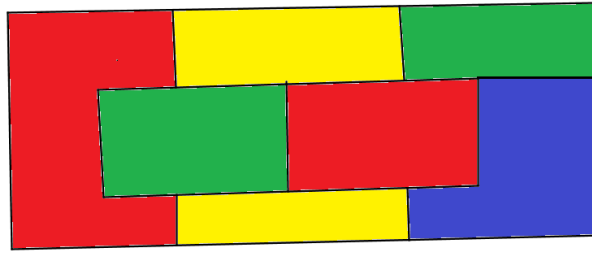


Figura 38: mapa da Figura 35 colorido.

A primeira delas é ver o próprio mapa como um grafo. Para isso coloque um vértice em cada ponto de encontro de duas ou mais curvas que definem fronteiras. Estes vértices estão naturalmente ligados uns aos outros por partes de fronteiras, que neste caso farão parte de arestas. Podemos exemplificar isso observando as Figuras 33, 34 e 35.

Temos assim um grafo planar com algumas peculiaridades. Mas antes de listá-las note que por coerência com o que fizemos até este ponto, a face externa deste grafo não será considerada no problema de coloração.

Voltando as peculiaridades do grafo que descrevemos, primeiro observe que cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces. Outra propriedade importante é que todos os vértices tem grau maior ou igual a 3. Esta última propriedade não é válida para regiões isoladas, que fazem fronteira apenas com a face externa, mas como a face externa não será colorida, podemos pintar uma região isolada usando qualquer cor que desejarmos.

É fácil ver também que o caminho inverso pode ser facilmente feito. Em outras palavras, se tomarmos a representação planar de um grafo planar onde todas as arestas fazem parte de exatamente duas faces, temos um mapa com regiões dadas pelas faces internas do grafo.

A Figura 33 mostra um grafo que dá origem a um mapa com 5 regiões. É interessante notar que neste caso o vértice H pode ser descartado sem nenhum prejuízo ao mapa representado. Já na Figura 34 temos um grafo que dá origem a um mapa com 6 faces.

A Figura 39 é um grafo com 7 faces mas não dá origem a um mapa, pois a aresta que incide sobre os vértices F e G não compartilha de duas faces.

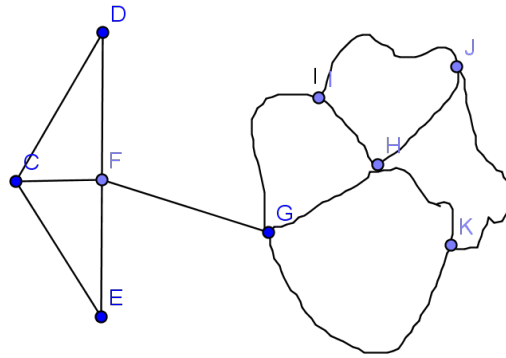


Figura 39: grafo com 7 faces que não é um mapa

A segunda, e talvez a mais usada, forma de se relacionar mapas e grafos é através do chamado de *grafo dual*. Para construir o grafo dual de um mapa planar, primeiro marcamos um novo vértice no interior de cada uma das faces do mapa, em seguida, para cada duas regiões vizinhas, desenhamos uma aresta ligando os novos vértices marcados em suas faces.

Assim, se temos um mapa que representa países de um determinado continente, no grafo dual os vértices serão os países e as arestas serão a ligação entre dois países vizinhos.

Observação. *A definição colocada acima pode ou não incluir a região exterior ao mapa, de acordo com a necessidade do modelo estudado.*

As Figuras 40 e 41 representam um mapa e seu grafo dual respectivamente (o vértice O do grafo dual é a região externa).

O problema de coloração de um mapa é equivalente ao problema de colorir os vértices do grafo dual associado de modo que dois vértices adjacentes tenham cores distintas.

4.2 COLORINDO MAPAS E GRAFOS

Apesar de sabermos de antemão que quatro cores são sempre suficientes para colorir qualquer mapa, encontrar um procedimento para colorir um determinado mapa utilizando apenas quatro cores é uma tarefa bem complicada.

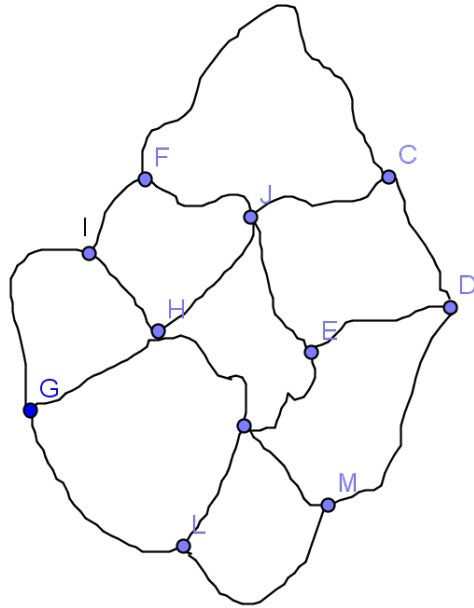


Figura 40: mapa com 9 faces.

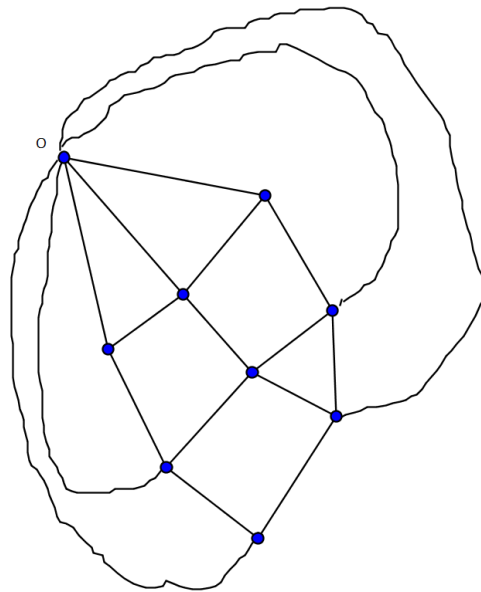


Figura 41: grafo dual do mapa da figura 40.

Considere o mapa da Figura 42, por exemplo.

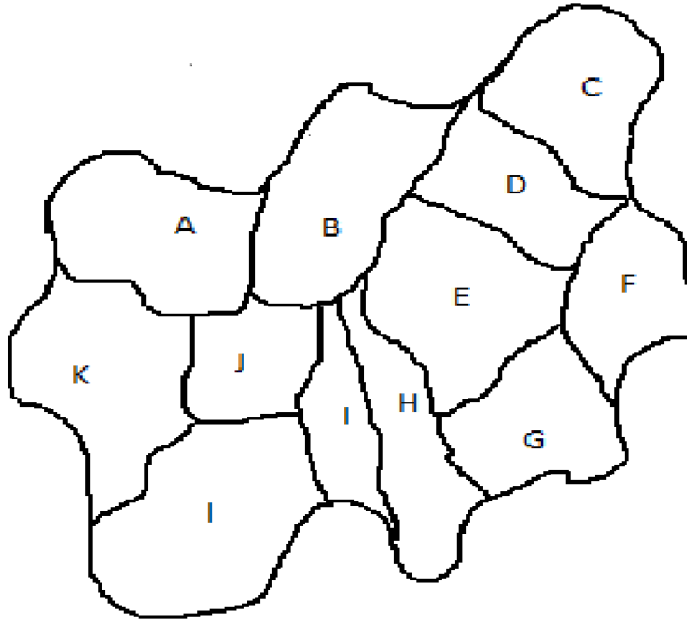


Figura 42: mapa com 13 faces.

Encontrar uma coloração usando apenas 4 cores pode não ser um exercício simples! Sugerimos ao leitor que faça este exercício antes de seguir com a leitura do capítulo.

Pintar as regiões sem uma estratégia, pode ser problemático. É possível, por exemplo, que se encontre problemas como o exemplificado na coloração apresentada na Figura 43. Nela a região I não poderá receber as cores vermelho, amarelo, azul ou verde, uma vez que seus vizinhos já foram pintados com essas cores. Então seria necessário uma quinta cor nesse caso.

Será então que o teorema das quatro cores não funcionou nesse caso? Deve estar claro que uma coloração falha não é o suficiente para desacreditar o resultado, de modo que o exemplo acima não nos diz nada.

Uma estratégia possível para reduzir o número de cores utilizadas seria, por exemplo sempre começar a atribuir uma cor à região que tem mais fronteiras e, depois por ordem decrescente de fronteiras. Seria interessante que em cada passo, repetirmos cores já utilizadas, reduzindo assim o total de cores necessárias.

Estas ideias podem ser esquematizadas da seguinte forma, utilizando como ferramenta de apoio do grafo dual ao mapa.

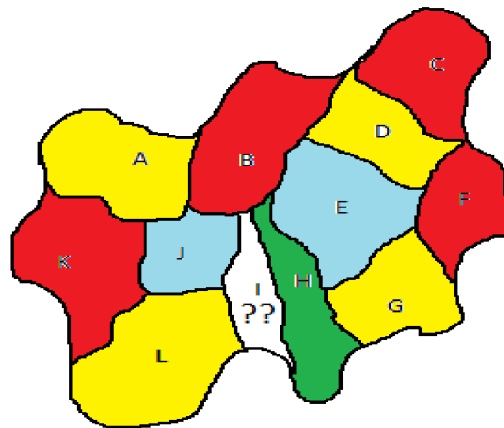


Figura 43: Mapa da Figura 42 colorido incorretamente.

1. Obtemos o grafo dual deste mapa;
2. Colocamos os vértices do grafo dual em ordem decrescente de grau;
3. Atribuimos uma cor ao primeiro vértice da sequência;
4. Verificamos se o segundo vértice da sequência é adjacente ao primeiro. Caso seja, atribuímos a segunda cor, caso contrário será atribuído a mesma cor;
5. Verificamos se os próximos vértices são adjacentes a algum vértice anterior. Caso seja adjacente a todos, deve ser atribuído uma nova cor, caso contrário, podemos atribuir a mesma cor que foi atribuída a algum vértice não adjacente a ele;

Para exemplificar, vamos colorir o mapa da Figura 42 de acordo com o procedimento acima.

- obtemos o grafo dual do mapa que está representado na Figura 44
- a sequência por ordem decrescente dos graus é B, E, J, D, H, I, A, F, G, K, L, C.
- atribuímos a cor 1 ao vértice B;
- como E é adjacente a B, atribuímos a cor 2 ao vértice E. ;
- J é adjacente à B, portanto não pode receber a cor 1, então receberá a cor 2;
- D é adjacente a B e E, então receberá a cor 3;
- H é adjacente à B e E, mas não é adjacente à D, então poderá receber a mesma cor de D, ou seja a cor 3;

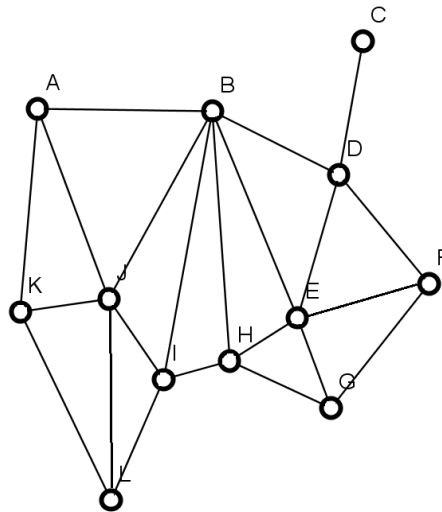


Figura 44: grafo dual do mapa da figura 42.

- I é adjacente a B, H e J, então não pode receber as cores 1, 2 e 3, logo receberá a cor 4;
- A é adjacente à B e J e por isso não poderá receber as cores 1 e 2, então receberá a cor 3;
- F é adjacente aos vértices D e E, portanto não podem receber as cores 2 e 3, então recebe a cor 1;
- G é adjacente à E, F e H, assim não poderá receber as cores 1, 2 ou 3, então deverá receber a cor 4;
- K não pode receber as cores 2 e 3 pois é adjacente à A e J, assim receberá a cor 1;
- L é adjacente a I, J e K e não pode receber as cores 1, 2 ou 4, logo recebe a cor 3;
- finalmente, C é adjacente a D e não pode receber a cor 3, logo ele pode receber a cor 1.

Podemos organizar as cores e os vértices na tabela

| Vértices | cor |
|----------|----------|
| A | amarelo |
| B | azul |
| C | azul |
| D | amarelo |
| E | vermelho |
| F | azul |
| G | verde |
| H | amarelo |
| I | verde |
| J | vermelho |
| K | azul |
| L | amarelo |

O grafo dual e o mapa colorido estão representadas nas Figuras 45 e 46.

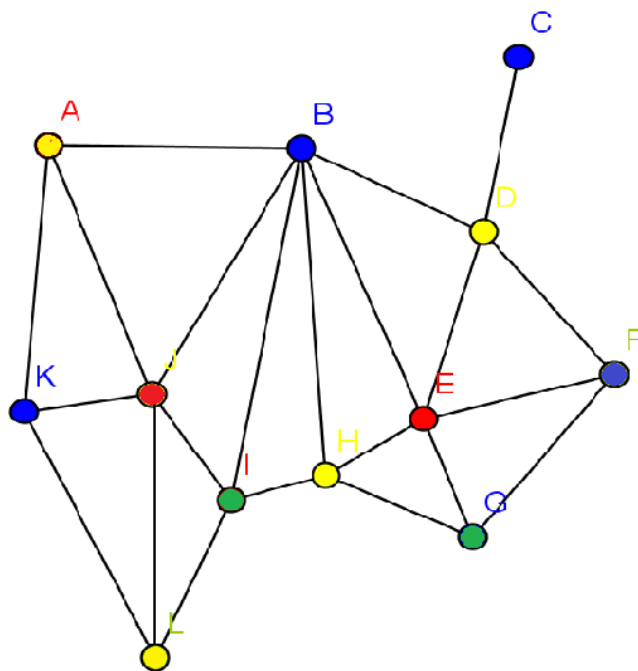


Figura 45: grafo dual do mapa da Figura 42 colorido.

De um modo geral esse algoritmo funciona, mas o mesmo não nos garante que o número mínimo de cores para colorir um mapa seja 4.

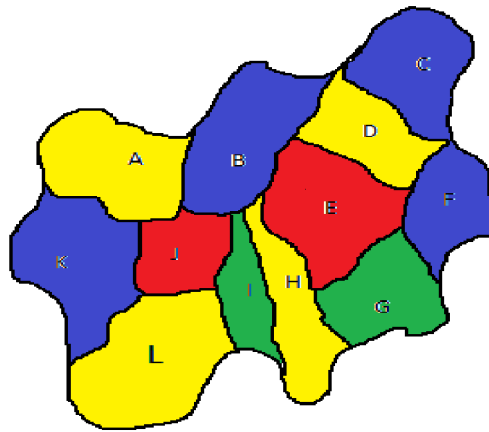


Figura 46: mapa da Figura 42 colorido corretamente.

O estudo da coloração de um grafo, tem inúmeras aplicações como por exemplo a elaboração de horários, alocação de produtos, etc. Abaixo apresentamos um exemplo de aplicação deste problema.

Exemplo 4.1. Suponhamos que em uma sala do 9º ano há 9 alunos que realizarão exames finais de várias disciplinas e, queremos saber qual é o número mínimo de horários de realização dos exames de modo que todos realizem os exames no mesmo dia e sem sobreposição de horários. A seguir temos uma tabela com os alunos que farão os exames nas respectivas disciplinas:

| Alunos | Português | Matemática | História | Geografia | Ciências | Artes | Inglês |
|--------------|-----------|------------|----------|-----------|----------|-------|--------|
| Alexandre | | X | | | X | | |
| Ana Carolina | X | | X | | | | |
| Caique | | X | | X | | | X |
| Daniele | | X | X | | | | |
| Manoela | | | | X | | | X |
| Miguel | X | X | | X | | | |
| Pedro | X | | | | X | X | |
| Sheila | X | X | | | X | | |
| Vicente | | X | | X | X | | |

Vamos transportar as informações para um grafo. Os vértices do grafo podem, por exemplo, ser as disciplinas e podemos considerar adjacentes duas disciplinas que

possuem ao menos um aluno de recuperação em comum. Assim, como o Alexandre fará exame final de Matemática e Ciências, colocaremos uma aresta entre os vértices M (matemática) e C (ciências).

Na Figura 47 temos o grafo que representa essa situação.

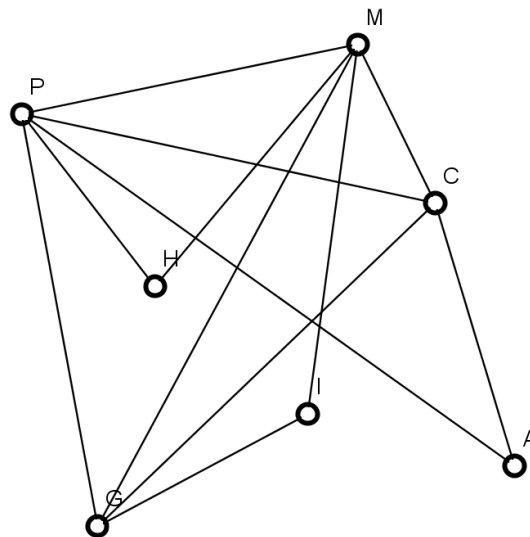


Figura 47: Grafo que representa a tabela.

Para colorir o grafo da Figura 47, devemos colocar os vértices em sequência por ordem decrescente de grau. Assim podemos formar a seguinte sequência: P, M, G, C, H, A, I.

Podemos aplicar a cor azul ao vértice P. Como M é adjacente ao vértice P, temos que atribuir uma nova cor, que pode ser vermelha. O vértice G é adjacente aos dois vértices P e M já coloridos, temos que atribuir outra cor, que pode ser verde. Agora, temos que o vértice C é adjacente aos vértices P, M e G, sendo necessário uma nova cor, amarelo. O vértice H é adjacente à P e M, então não pode ser azul e nem vermelho, podendo ser verde ou amarelo: vamos pintá-lo de verde. O vértice A é adjacente aos vértices P e C, por isso não pode ser azul e nem amarelo, mas pode ser vermelho ou azul: vamos atribuir a cor vermelho. Finalmente, o vértice I é adjacente aos vértices M e G, portanto não pode ser vermelho e nem verde, mas pode ser azul ou amarelo: vamos colorir com azul.

De acordo com a Figura 48, podemos verificar que foram necessárias quatro cores para colorir seus vértices, sendo então necessários quatro horários distintos para realização dos exames finais, podendo ser de acordo com a tabela a seguir:

| Horário | Disciplina |
|----------------|----------------------|
| 1 ^o | Português e Inglês |
| 2 ^o | Matemática e Artes |
| 3 ^o | Geografia e História |
| 4 ^o | Ciências |

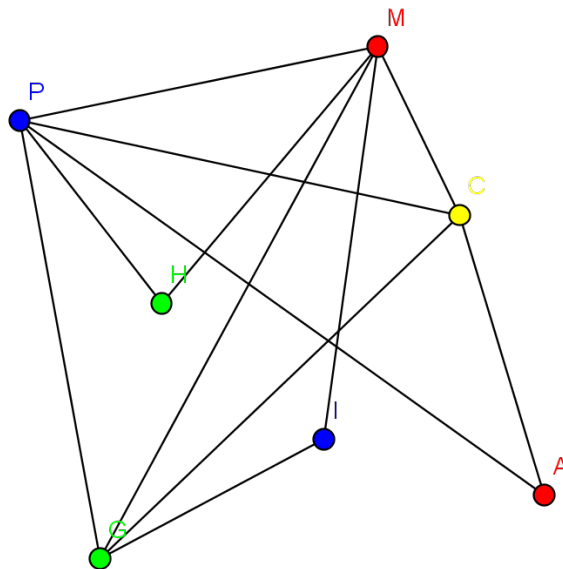


Figura 48: Grafo que representa a tabela.

4.3 O PROBLEMA DAS 4 CORES

Historicamente, o Problema das 4 Cores foi proposto por Francis Guthrie em 1852, que após ter concluído seus estudos, estava colorindo um mapa da Inglaterra e, estando atento para não colorir regiões que tivessem fronteira em comum com a

mesma cor, notou que eram necessárias apenas quatro cores para colorir o mapa e, fez a mesma coisa com vários outros mapas, se convencendo que apenas quatro cores bastariam para colorir qualquer mapa.

Por ser matemático, tentou demonstrar esse fato, mas não obteve êxito, passando o problema então ao seu irmão Frederick Guthrie, que passou o problema para outros matemáticos da época, incluindo De Morgan e seus alunos.

O problema teve sua primeira publicação apenas em 1878 pela London Mathematical Society. Um ano depois, em 1879, Alfred Bray Kempe publicou um artigo em que apresentava uma demonstração de que bastam 4 cores para colorir qualquer mapa. Aconteceu que, em 1890, passados 11 anos da publicação de Kempe, a demonstração de Kempe foi invalidada por Percy John Heawood que apontou um pequeno erro na mesma, porém, parte da demonstração utilizada por Kempe foi salva por Heawood para demonstrar que cinco cores batariam para colorir qualquer mapa.

Em 1º de abril de 1975, Martin Gardner publicou em uma revista americana que o mapa representado pela Figura 49, não era possível colorir com apenas quatro cores, o que gerou muita confusão entre matemáticos da época que até chegaram a cogitar que o teorema das quatro cores era falso.

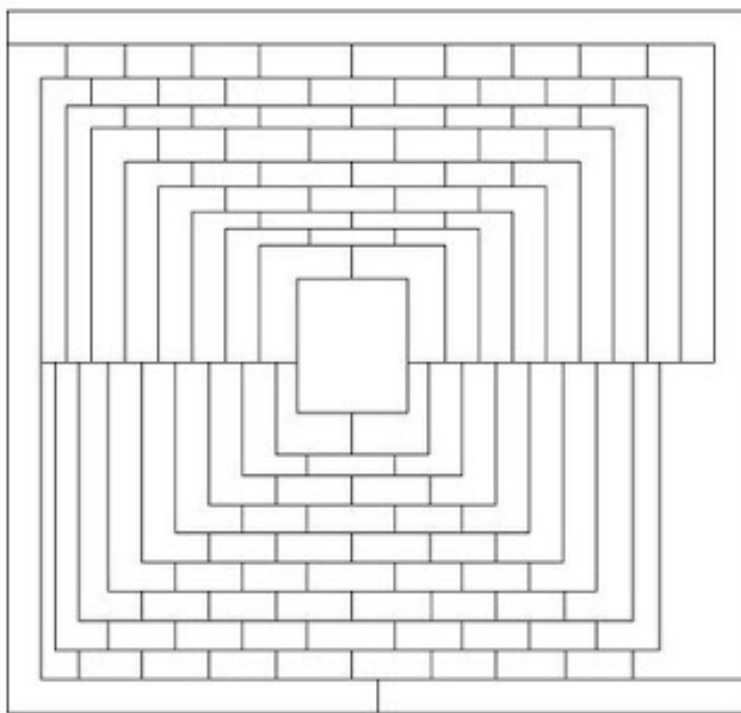


Figura 49: mapa de Martin Gardner.

Mas tudo não passou de um mal entendido (uma mentirinha de 1º de abril) e o mapa pode ser colorido com quatro cores sim. Veja a Figura 50.

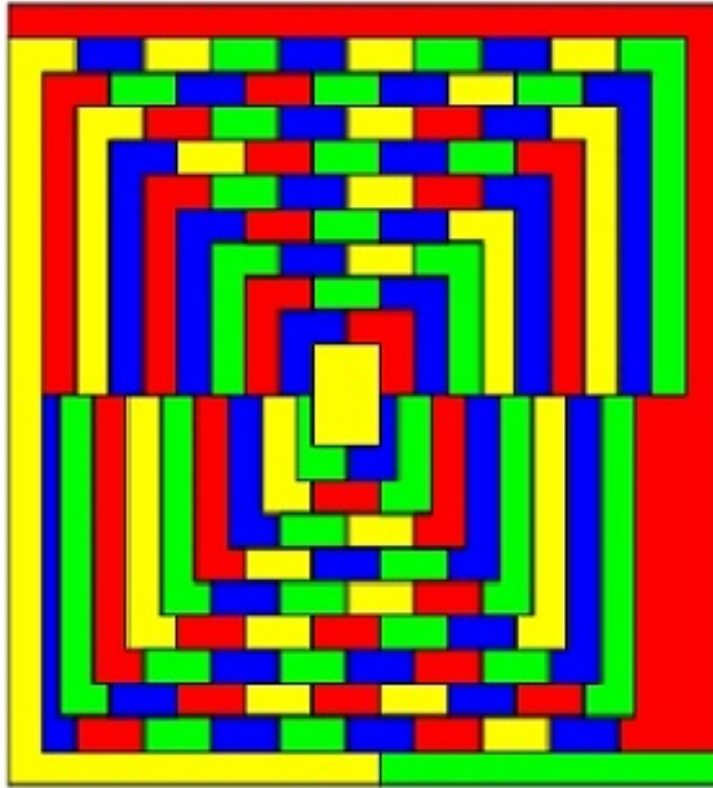


Figura 50: Mapa de Martin Gardner colorido.

A primeira demonstração válida para o problema original foi publicada em 1976 por Appel e Haken, mas tal demonstração não era manual, era feita com uso de computador em vários de seus passos, o que gerou algumas dúvidas sobre sua validade.

4.3.1 *A Demonstração Errada de Kempe*

Vamos comentar agora a tentativa falha de Alfred Bray Kempe para demonstrar o teorema das quatro cores, que foi publicada em 1879.

Para compreender a demonstração desse teorema, faz-se necessário alguns esclarecimentos primordiais. Não faremos uma exposição minuciosa da demonstração,

mas sim, uma apresentação geral de sua estrutura e os principais conceitos e procedimentos que a envolveram.

Para Kempe, a demonstração do teorema das 4 cores se daria pelo método de redução ao absurdo, ou seja, teria como hipótese a existência de pelo menos um mapa que exige cinco cores para ser colorido o qual chamava de *mapa pentacromático* e chegaria numa contradição.

Provar o teorema das quatro cores era portanto equivalente a mostrar que não existem mapas pentacromáticos.

Kempe começou mostrando que a propriedade só valia para os mapas em que considerava *normais*. Um mapa é considerado normal se não contém um país isolado dentro de outro, e se na sua representação como grafo planar, não existam vértices com mais de 3 vizinhos.

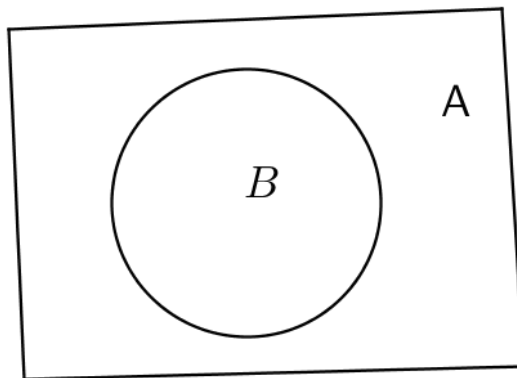


Figura 51: Mapa que contém um país dentro de outro.

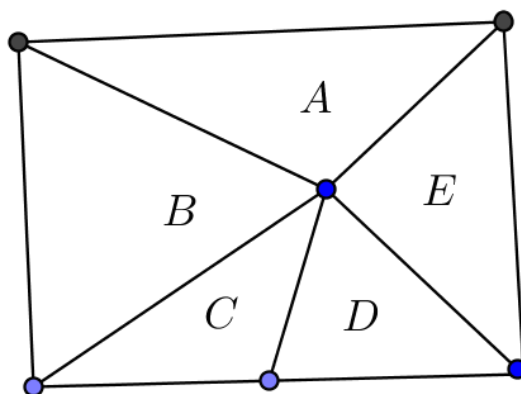


Figura 52: Mapa com um ponto com mais de 3 vizinhos.

Quando passamos ao grafo dual de um mapa, dizer que ele é normal, significa dizer que todos os vértices tem grau maior que 1 e suas faces são todas triangulares.

Os mapas que contém configurações iguais as das Figuras 51 e 52 não são considerados mapas normais.

Segundo Lourdes Sousa [7], a demonstração de Kempe de que não existem mapas pentacromáticos estruturava-se na demonstração de quatro afirmações.

1. Se existir algum mapa pentacromático, então também existe um mapa pentacromático normal.
2. Se existe mapa pentacromático normal, então existe mapa pentacromático normal mínimo.
3. Qualquer mapa normal contém pelo menos uma região com menos de seis regiões vizinhas.
4. Nenhum mapa pentacromático normal e mínimo pode conter uma região com menos de seis regiões vizinhas.

Os itens 3 e 4 levam, por contradição, a inexistência de mapas pentacromáticos mínimos. Isso junto com a afirmativa 2, mostra que não existem mapas pentacromáticos normais. A afirmativa 1, quando unida as demais, conclui a prova, mostrando que não existem mapas pentacromáticos.

Para a *primeira afirmação*, observe que de um mapa M qualquer, obtemos um mapa normal M' fazendo as seguintes operações.

- retiramos todas as regiões isoladas, como a da Figura 51;
- se existir alguma região cuja fronteira tenha um ponto com mais de 3 regiões vizinhas, acrescenta-se uma região neste ponto da fronteira, conforme mostra a Figura 53.

Assim, se tivermos um mapa com mais de três regiões se encontram num mesmo vértice, então poderemos obter um novo mapa, que será exatamente idêntico original, exceto no fato de ter uma região nova, formado ao redor do vértice em questão, conforme a figura 54. Essa nova região não deve cobrir por completo nenhuma das fronteiras.

O novo mapa tem uma região a mais, e claramente tem mais vértices do que o mapa original. No entanto, apenas três regiões se encontram em cada um dos

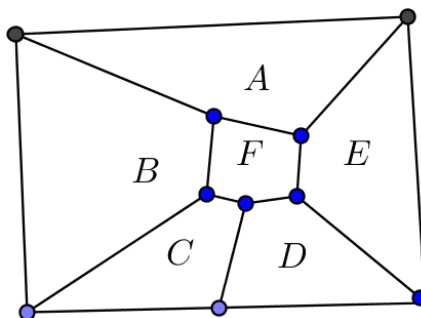


Figura 53: Mapa da Figura 52 normalizado.

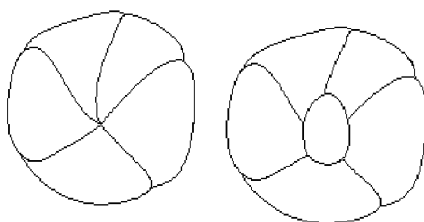


Figura 54: Retirando vértices com mais de 3 vizinhos.

vértices novos. Dessa forma, eliminamos o vértice que era comum a mais de três regiões. Podemos repetir o procedimento para qualquer vértice do nosso mapa que tenha em comum mais de três regiões. Assim, teremos um novo mapa com mais vértices, onde cada vértice terá apenas três regiões em comum.

É fácil verificar que se o novo mapa exige uma certa quantidade de cores, o mapa original exigirá uma cor a menos, pois a região que foi acrescentada terá uma cor diferente de suas vizinhas.

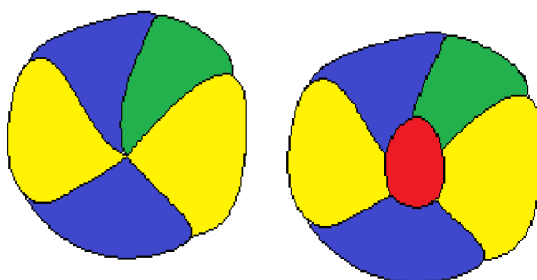


Figura 55: Mapa da Figura 54 colorido.

Assim, não precisamos de considerar os mapas em que se encontram mais de três regiões em cada vértice, basta considerar apenas os mapas em que se encontram exatamente três regiões em cada vértice.

Da mesma forma, regiões isoladas dentro de outras regiões devem ser pintadas de uma cor diferente da região na qual está inserida. Mas isso pode ser feito usando qualquer outra cor já usada no mapa, e portanto a sua retirada não reduz o total de cores utilizadas.

Assim, se o mapa original era pentacromático, o mapa normalizado também o será.

Para a *segunda afirmação*, precisamos primeiro entender o que Kempe entendia por mapa pentacromático normal mínimo. Um mapa pentacromático normal mínimo é aquele com o menor número de regiões dentre todos os mapas pentacromáticos normais.

Agora fica fácil se convencer que de todos os mapas pentacromáticos normais, deve existir ao menos um que tenha o menor número de regiões.

A *terceira afirmação*, Kempe utilizou a fórmula de Euler para mapas planares que é análoga ao Teorema 3.6, que nos diz que um grafo qualquer tem pelo menos um vértice com grau menor ou igual a 5.

Se considerarmos o grafo dual do referido mapa, teremos que o este terá pelo menos um vértice com grau menor que 6. Como o vértice do grafo dual de um mapa refere-se a uma região do mapa, teremos pelo menos uma região com cinco vizinhos ou menos.

Em outras palavras, qualquer mapa pentacromático normal têm pelo menos uma dessas configurações:

- (i) uma região com dois vizinhos;
- (ii) uma região com três vizinhos;
- (iii) uma região com quatro vizinhos;
- (iv) uma região com cinco vizinhos;

A *quarta e última afirmação*, completaria a demonstração de que não existe nenhum mapa que exige cinco cores para ser colorido. Kempe tentou provar que as quatro configurações da terceira afirmação não poderiam fazer parte de um mapa *pentacromático e mínimo* (isso ele chamava de configuração redutível).

Para mostrar que a primeira configuração é *redutível*, vamos supor que temos um mapa M pentacromático e mínimo que possui tal configuração. Vamos chamar de M' o mapa obtido através da remoção da região que faz fronteira com duas regiões.

Como M é um mapa normal, M' continuará sendo normal (lembra da definição de mapa normal?). Além disso, M' terá uma região a menos do que M . Assim, M' não pode ser pentacromático (uma vez que M é pentacromático normal e mínimo), bastando apenas quatro cores para ser colorido. Mas todas as regiões do mapa original (exceto a região removida) podem ser coloridas com apenas quatro cores, bastando a região que supostamente seria removida ser colorida com uma cor que não foi atribuída a nenhum dos dois vizinhos. O que é um absurdo, portanto que M é pentacromático.

Mostrar que a segunda configuração é *reduzível* é um procedimento análogo ao anterior e pode ficar a cargo do leitor.

Para mostrar que a terceira configuração é *reduzível*, torna-se necessária as idéias das *cadeias de Kempe*.

Uma **cadeia de Kempe** é um subgrafo conexo contendo vértices coloridos com apenas duas cores. Este subgrafo deve ser *maximal*, isto é, não pode ser acrescentado mais nenhum vértice com essas duas cores.

Nas cadeias de Kempe a troca de cores é sempre possível, obtendo assim uma nova coloração do grafo, pois pela maximalidade da cadeia, todas as regiões vizinhas de alguma região da cadeia deve estar colorida com uma cor distinta das usadas na cadeia.

Vamos agora utilizar as cadeias de Kempe para mostrar que a terceira configuração é *reduzível*.

Suponha então que exista um mapa pentacromático mínimo (normal ou não) que possui uma região com quatro regiões vizinhas. Procedendo como no caso anterior, vamos remover a região que possui quatro vizinhos. Assim como nos casos anteriores, a minimalidade do grafo original mostra que podemos colorir o novo mapa com apenas quatro cores.

Vamos agora determinar de que cor podemos pintar a região retirada.

No caso em que as quatro regiões vizinhas serem coloridas com menos de quatro cores, basta escolher uma outra cor para a região que foi removida. Já pra o caso em que as quatro regiões vizinhas estarem coloridas com quatro cores, procedemos da seguinte maneira.

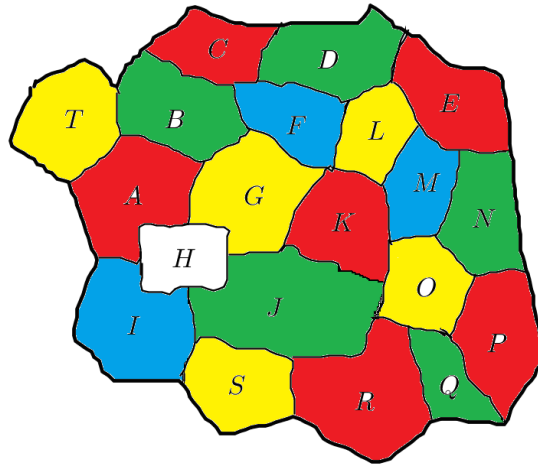


Figura 56: Mapa com uma região que possui quatro regiões vizinhas.

Para melhor ilustrar o método, observe o mapa apresentado na Figura 56. Nesse mapa, a região H possui quatro regiões vizinhas coloridas com quatro cores distintas.

Vamos considerar que a região H foi removida, e analisemos as cores de cada par de regiões que se encontram opostas com relação a região H. Na Figura 56 são as regiões A (vermelha) e J (verde), ou as regiões G (amarela) e I (azul).

Para cada um destes pares, verifique se existe uma cadeia de Kempe que vai de uma região a outra. Da região A até a região J, por exemplo, encontramos o caminho formado pelas regiões A, B, C, D, E, N, P, Q, R e J, que foram coloridas com as cores verde e vermelho.

Por outro lado, não há uma cadeia de Kempe que vai de G até I (outro par de regiões opostas). Essa que nos interessa.

Observe que se existisse uma cadeia de kempe em cada um dos pares de regiões opostas, haveria ao menos uma região comum entre os dois caminhos, o que não é possível. Dessa forma, um dos pares não formará uma cadeia de kempe.

Agora escolha uma das duas regiões opostas que não formam uma cadeia de kempe, por exemplo G, e liste todas regiões pintadas de amarela ou azul que, unidas a G, formam uma única região conexa. No nosso exemplo são as regiões G, F, L, M, O. Como a união destas regiões só faz fronteira com regiões vermelhas e verdes, podemos trocar as cores das regiões listadas, obtendo uma nova coloração, como na Figura 57.

E note que mesmo poderia ser feita com a região I.

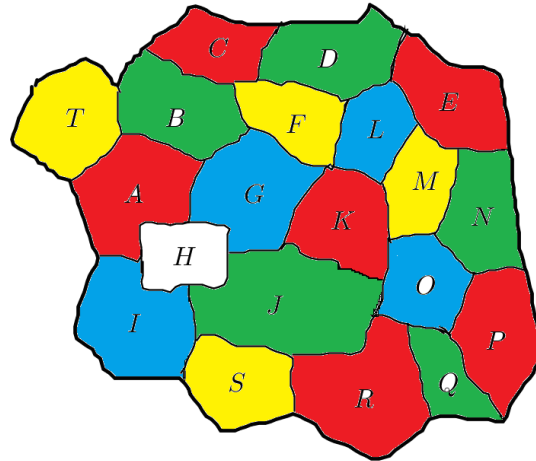


Figura 57: Mapa com aplicação das cadeias de Kempe.

Assim, as regiões que são vizinhas à região que será removida serão coloridas com apenas três cores, uma vez que das regiões que sofreram troca de cor, uma delas é vizinha à região H (no caso é a região G) e terá a mesma cor da região oposta à H. Podemos então concluir que a região que seria removida pode ser colorida com a cor que a região G tinha antes de sofrer a troca de cor (no caso, é amarelo).

Portanto, o mapa original pode ser colorido com quatro cores, o que contradiz a suposição de ser pentacromático.

Para mostrar que a quarta configuração é *reduzível*, Kempe também utilizou o método das cadeias. Sua atenção foi mais voltada para o caso de uma região com cinco regiões vizinhas coloridas com quatro cores diferentes, pois se fossem coloridas com menos de quatro cores, basta escolher outra cor para pintar a região removida.

No mapa da Figura 58, a região L tem 5 vizinhos coloridos com as cores amarelo, azul, verde, amarelo e vermelho.

Vamos começar escolhendo duas regiões opostas (não adjacentes) com cores distintas, e verificando se há uma cadeia de kempe conectando essas regiões.

Se as regiões escolhidas forem E e K, coloridas com verde e vermelho, não formará uma cadeia de Kempe. Podemos então escolher uma das duas regiões e listarmos as regiões conectadas a ela e que foram coloridas por uma das duas cores (no caso verde e vermelho), e podemos trocar as cores das regiões listadas, obtendo uma nova coloração, sem afetar a coloração da região oposta. Conforme se pode verificar na Figura 59, podemos colorir a região E com vermelho e, dessa forma, a região L

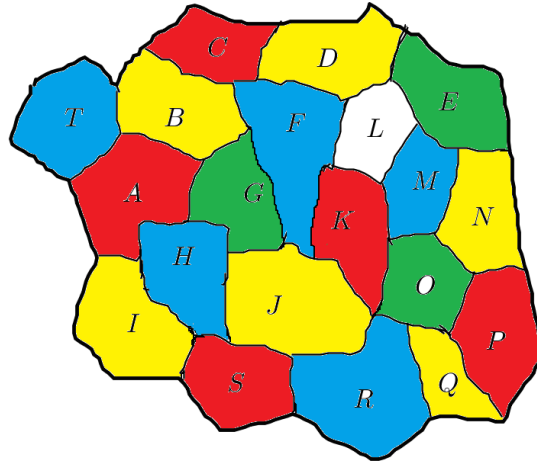


Figura 58: Mapa com uma região com 5 vizinhos.

estará cercada por regiões com as cores amarelo, azul e vermelho. Assim, L poderá ser colorido com a cor verde e completará a coloração do mapa com apenas quatro cores.

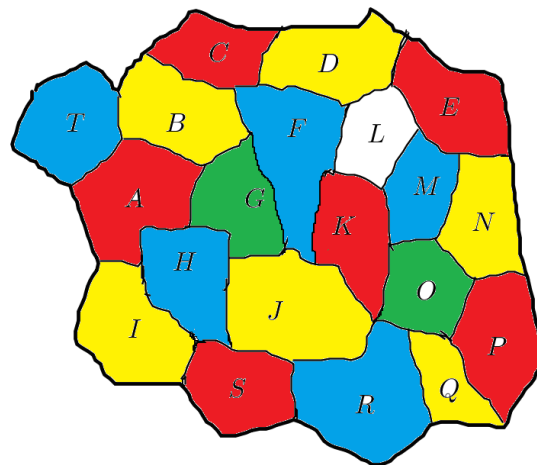


Figura 59: Mapa com a troca de cor da região E.

O principal problema aqui é que a existência de uma cadeia, não exclui a existência da segunda. No exemplo da Figura 58, se escolhermos as regiões D e K, temos uma cadeia de Kempe formada pelas regiões D, C, B, A, I, S, J, K. Mas mesmo com esta cadeia, ainda seria possível que existisse uma cadeia de Kempe entre, digamos, E e K. Basta que esta cadeia passe por trás da região M, e não por trás de F como a cadeia entre D e K.

Vamos considerar então novamente as regiões opostas E e K, coloridas com verde e vermelho respectivamente, mas vamos supor que exista uma cadeia de Kempe entre estas regiões.

Neste caso devemos observar que as regiões M e N coloridas com azul e amarelo à direita da região L não se conectam com as regiões F e J que também estão coloridas com azul e amarelo à esquerda de L, pois teria de atravessar a cadeia que vai de E até K. Podemos então trocar as cores das regiões M e N sem afetar a coloração da outra parte. Isso pode ser verificado na Figura 60.

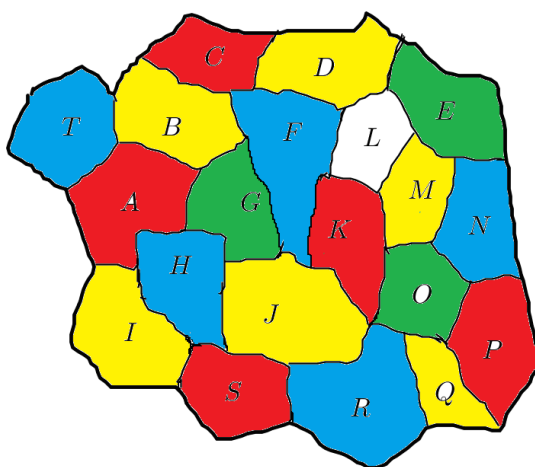


Figura 60: Mapa com a troca de cores das regiões M e N.

Do mesmo modo, as regiões F, G e H coloridas com azul e verde não se conectam com as regiões E, M, O e R que também estão coloridas com as cores azul e verde, pois teria de atravessar a cadeia que vai de D até K. Podemos então efetuar a troca de cores das regiões F, G e H, sem afetar a coloração da outra parte. Podemos verificar isso na Figura 61.

Fazendo as duas trocas simultâneas, conforme se verifica na Figura 62, a região L ficará cercada pelas regiões coloridas com amarelo, verde e vermelho. Assim, L poderá ter a cor azul e a coloração do mapa estará completa com quatro cores.

Isso completa a ideia da prova de que nenhum mapa pentacromático normal e mínimo pode conter uma região com menos de seis vizinhos.

Os passos 1, 2 e 3 são mais tranquilos de se formalizar, e generalizar para qualquer grafo. Mas o mesmo não é verdade para a afirmativa 4. O exemplo que acabamos de

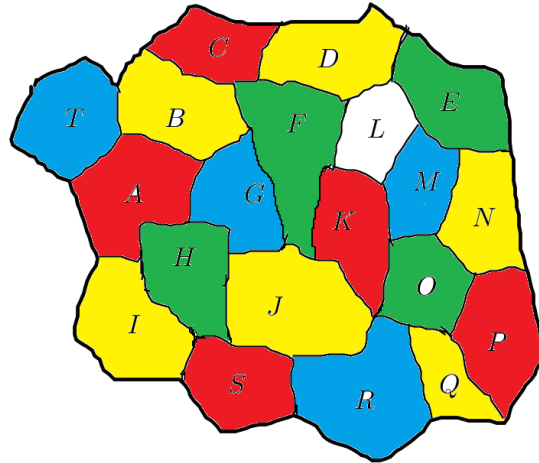


Figura 61: Mapa com a troca de cores das regiões F, G e H.

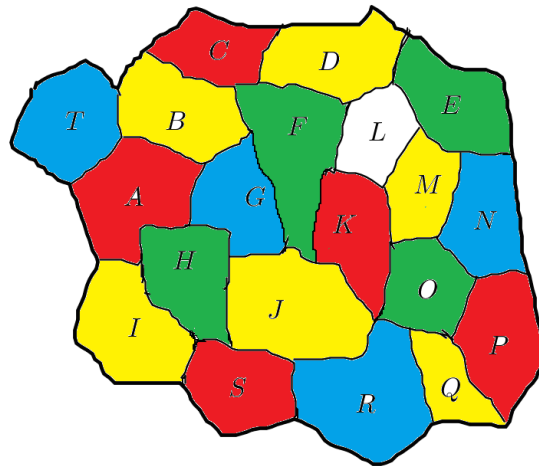


Figura 62: Mapa com as duas trocas simultâneas.

dar, dificilmente é generalizável para qualquer grafo com a configuração requerida, mas a falha nos argumentos de Kempe era tão sutil que foram necessários outros 11 anos para que alguém a percebesse.

4.3.2 O contra-exemplo de Heawood e o Problema das 5 Cores

Vimos que Kempe utilizou simultaneamente duas trocas de cores para colorir novamente um mapa que tinha uma região com cinco vizinhos. Essa abordagem foi refutada por Percy Heawood que em 1890 apresentou um contra-exemplo para a demonstração feita por Kempe.

Para mostrar que não pode haver duas trocas simultâneas, Heawood apresentou um mapa idêntico ao que pode ser visto na Figura 63.

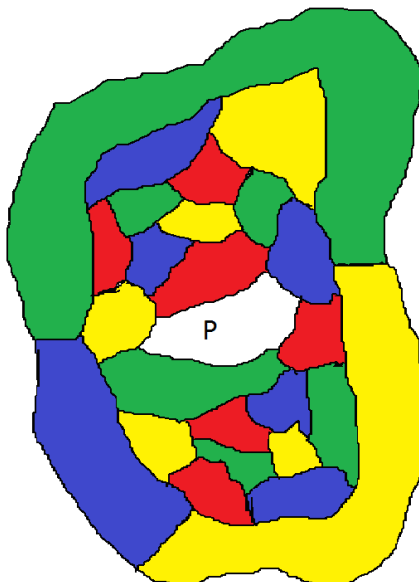


Figura 63: Mapa de Heawood apresentado como contra-exemplo para demonstração de Kempe.

No mapa de Heawood temos vinte e cinco regiões que foram coloridas com as cores vermelho, azul, amarelo ou verde, exceto a região central que possui cinco vizinhos, denotada por P .

Esse mapa com certeza pode ser colorido com quatro cores, conforme Figura 64, mas a pretensão de Heawood é mostrar que o método utilizado por Kempe não é correto.

No procedimento utilizado por Kempe, devemos efetuar trocas de cores entre os vizinhos da região P , de modo que sobre uma cor para colorir essa região. Observe que os vizinhos azul e amarelo formam uma cadeia de Kempe. Por outro lado, as regiões opostas à P , coloridas com verde e vermelho não formam uma cadeia de Kempe. Podemos então trocar as cores verde e vermelho das regiões que estão acima da região P , sem afetar a coloração das regiões verde e vermelho das regiões que estão abaixo de P , como se verifica na Figura 65.

Do mesmo modo, verificamos que as regiões opostas à P , coloridas com verde e azul formam uma cadeia de Kempe. Mas, por outro lado, as regiões opostas a P ,

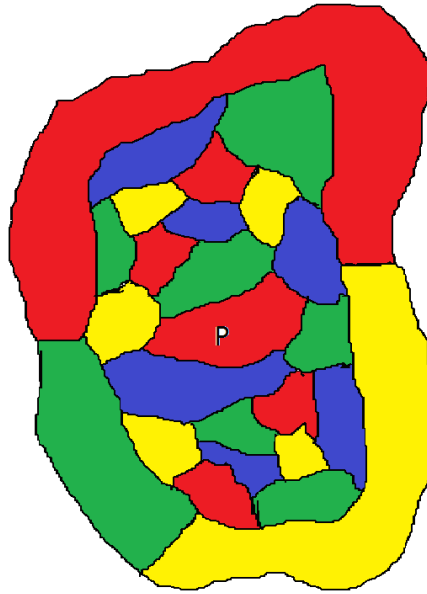


Figura 64: Mapa de Heawood colorido com quatro cores.

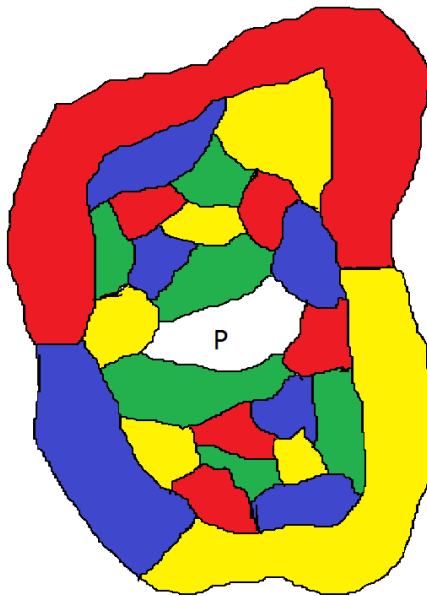


Figura 65: Mapa de Heawood efetuando a primeira troca de cores.

coloridas com vermelho e amarelo não formam uma cadeia de kempe. Podemos então trocar as cores vermelho e amarelo das regiões que estão abaixo da região P, sem afetar a coloração das regiões vermelho e amarelo das regiões que estão acima de P, como se verifica na Figura 66.

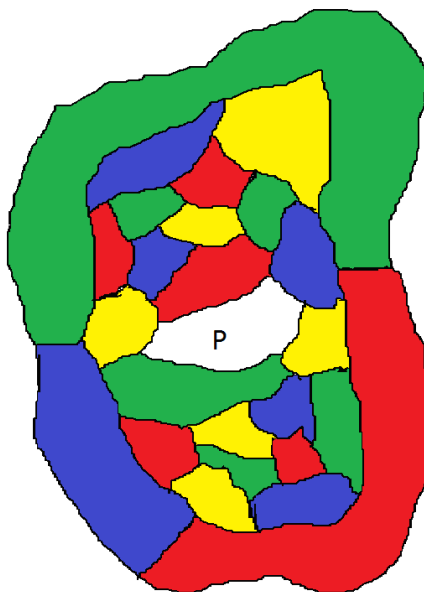


Figura 66: Mapa de Heawood efetuando a segunda troca de cores.

As duas alterações isoladas são possíveis, mas Kempe errou em tentar efetuar a troca simultaneamente. Ao realizar as trocas de cores simultaneamente, teremos duas regiões vizinhas coloridas com a cor vermelho, conforme se pode verificar na figura 67.

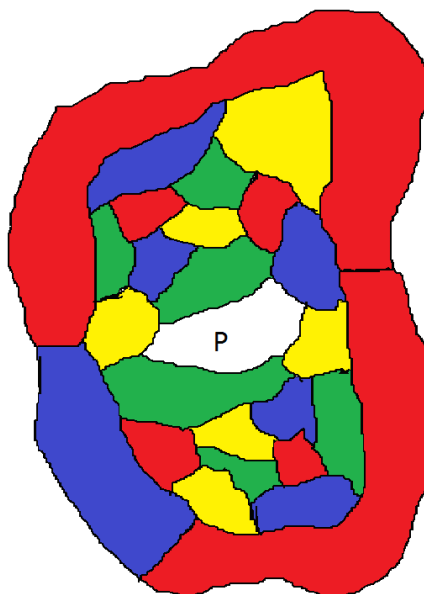


Figura 67: Mapa de Heawood efetuando a troca simultânea de cores.

Assim, Heawood mostrou que a demonstração de kempe que permite trocas simultâneas de cores é inválida. Mas Heawood aproveitou as idéias de kempe para mostrar que qualquer mapa planar pode ser colorido com cinco cores ou menos, o chamado de **Teorema das Cinco Cores**.

4.3.3 O teorema das cinco cores

Como acabamos de ver, Heawood conseguiu um contra-exemplo que tornava o argumento de Kempe no teorema das 4 cores inválido. Mas Heawood não parou por aí. Usando os mesmos argumentos no trabalho de Kempe, ele mostrou que é possível colorir qualquer mapa usando apenas 5 cores.

Este teorema ficou conhecido como *Teorema das Cinco Cores*, e mesmo depois de encontrada a demonstração computacional do teorema das 4 cores, ele permanece como um resultado importante, por ser o mais forte teorema de cores com uma demonstração matemática elegante.

Conforme vimos anteriormente, o análise de Kempe é perfeitamente válida até o momento que ele analisa regiões com 5 regiões vizinhas no grafo.

A primeira alteração nos argumentos de Kempe é pequena e clara, mas ainda assim necessária. Como queremos mostrar que é possível colorir com 5 cores, se formos usar o mesmo tipo de contradição usada por Kempe, precisaremos supor a existência de grafos que exigem ao menos 6 cores para serem coloridos. Chamaremos estes grafos de *hexacromáticos*.

Os argumentos de Kempe seguiriam então a seguinte ordem:

1. Se existir algum mapa hexacromático, então também existe um mapa hexacromático normal.
2. Se existe mapa hexacromático normal, então existe mapa hexacromático normal mínimo.
3. Qualquer mapa normal contém pelo menos uma região com menos de seis regiões vizinhas.
4. Nenhum mapa hexacromático e mínimo pode conter uma região com menos de seis regiões vizinhas.

Os itens 1, 2 e 3 seguem exatamente a mesma argumentação proposta por Kempe. E do mesmo modo, as primeiras partes do quarto argumento também estão corretas.

Para mostrar o item 4, seguindo a ideia de Kempe, vamos começar supondo que exista um grafo hexacromático e mínimo com alguma região com menos de 6 regiões vizinhas.

Nos casos em que a região possui duas, três ou quatro regiões vizinhas, o argumento de Kempe ainda é válido. Ou seja, podemos reduzir os grafos retirando tais regiões (ver Figuras 68, 69 e 70), e obtendo assim um grafo com uma região a menos. Pela minimalidade do grafo original, o grafo reduzido pode agora ser colorido com 5 cores. Como a região retirada era cercada de no máximo outras 4, podemos colocá-la de volta no mapa, colorindo-a com a cor ainda não utilizada, contradizendo a hipótese do grafo original ser hexacromático.

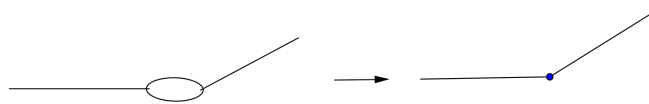


Figura 68: Redução com 2 vizinhos.

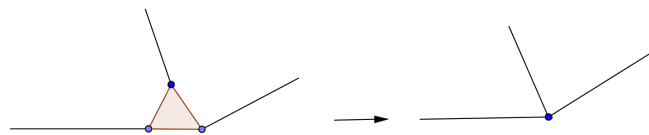


Figura 69: Redução com 3 vizinhos.

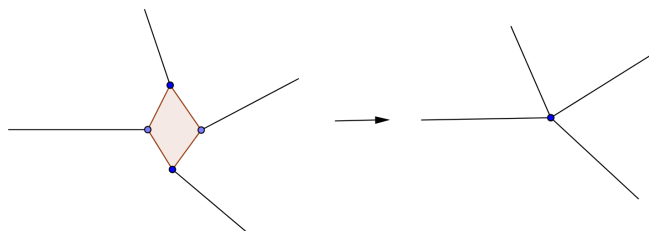


Figura 70: Redução com 4 vizinhos.

No caso da região com 5 vizinhos, como mostrado na Figura 71, vamos novamente nos valer das cadeias de Kempe.

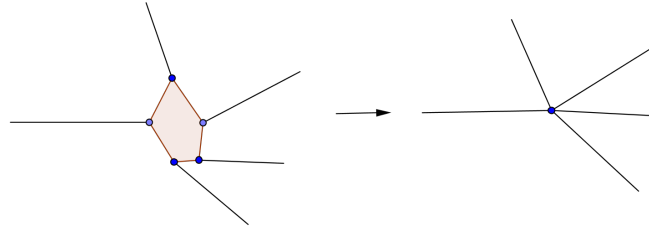


Figura 71: Redução com 5 vizinhos.

Mais uma vez, por minimalidade do grafo original, sabemos que o grafo reduzido pode ser colorido com 5 cores ou menos. Se não 5 regiões que faziam fronteira com a região retirada forem usadas apenas 4 cores, então o mesmo argumento dos outros casos resolve o problema.

Suponha então que foram usadas todas as 5 cores para colorir estas regiões no grafo reduzido. Para facilitar, numere as regiões em sentido horário, denotando-as por r_1, r_2, r_3, r_4 e r_5 . Tome agora as regiões não vizinhas r_1 e r_3 , e suponha que não exista uma cadeia de Kempe entre estas regiões. Assim como no teorema das 4 cores, podemos agora tomar o conjunto de todas as regiões que formem com r_1 uma única região conexa usando apenas as cores de r_1 e r_3 . Se alternarmos agora a cor de todas estas células, conseguimos uma nova coloração de 5 cores para o grafo reduzido, mas onde r_1 e r_3 possuem a mesma cor, deixando as cinco regiões com apenas 4 cores, e terminando o problema.

Se existir uma cadeia de Kempe entre r_1 e r_3 , tome r_2 e r_4 . É fácil perceber que, pela planaridade do grafo dual, não pode existir cadeia de Kempe entre r_2 e r_4 . Isso por que qualquer caminho entre estes dois vértices deve passar pela cadeia entre r_1 e r_3 , o que é impossível uma vez que r_2 e r_4 são coloridos com cores distintas das usadas em r_1 e r_3 . Agora, o mesmo argumento anterior encerra a demonstração do resultado.

PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Nesta seção, vamos apresentar as atividades propostas e o desenvolvimento de duas oficinas de grafos, uma sobre caminhos Eulerianos e outra sobre coloração de mapas e grafos, ambas aplicadas em salas do Ensino Fundamental e Médio. A oficina foi realizada na escola E. E. Iraci Sartori Vieira da Silva, em dias distintos do ano de 2014 durante as aulas de Matemática. Foram aplicadas a duas séries do Ensino Básico: na 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental e à 3ª série do Ensino Médio. A oficina de grafos Eulerianos foi aplicada também a alguns professores da rede (dentre eles a professora Márcia Regina de Jesus) em uma reunião de ATPC (reunião semanal com professores da escola cuja sigla significa Aula de Trabalho de Participação Coletiva). Estavam presentes na oficina 22 professores de diversas áreas e o coordenador pedagógico Luiz Cláudio Rosa.

5.1 GRAFOS EULERIANOS

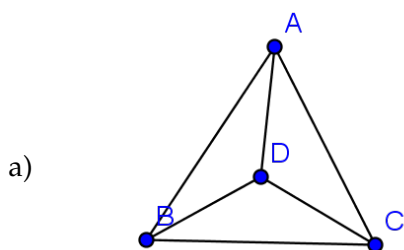
O objetivo desta oficina era trabalhar os grafos eulerianos propondo atividades de investigação, com o objetivo de relacionar o número de vértices com o número de arestas, incluindo a paridade dos vértices, convergindo de maneira gradativa para descoberta das condições necessárias e suficientes para que um grafo possua um ciclo ou caminho euleriano, além de problemas contextualizados que podem ser modelados com o uso desses resultados. Compareceram à oficina do 9º ano trinta e dois alunos e esta durou duas aulas consecutivas de cinquenta minutos cada. Para a oficina da 3ª série compareceram vinte e cinco alunos e esta durou uma aula completa de 50 minutos e mais 30 minutos. Na sala do 9º ano, a oficina foi aplicada por mim, e na sala do 3º ano, a oficina foi aplicada por mim e pela professora Márcia

Regina de Jesus, que aceitou a proposta com maior empenho conhecendo um pouco sobre o assunto (pois já havia participado da oficina com os professores).

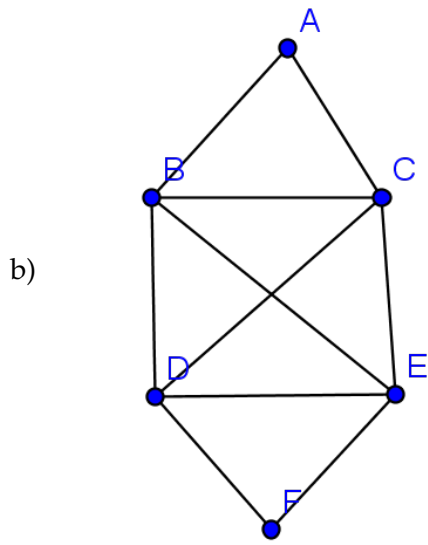
A seguir apresentamos algumas sugestões de atividades, dentre elas, as cinco primeiras fizeram parte de uma oficina que foi realizada na escola mencionada no início do capítulo. Antes de iniciar as atividades, comuniquei os alunos que estaríamos trabalhando um assunto novo que se chamava *grafos*. Muitos alunos entenderam gráficos, mas logo escrevi na lousa que se tratava de grafos e não gráficos. Inicialmente expliquei as idéias básicas da estrutura de um grafo (vértice, aresta e grau) e sua representação na forma de diagrama através de exemplos na lousa. Depois disso começamos a oficina.

Atividade 1

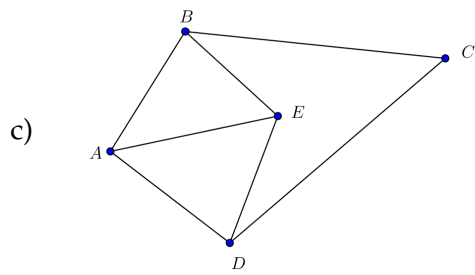
Preencha a tabela a seguir com os graus de cada vértice, a soma de todos os graus, a quantidade de arestas e o número de arestas com grau ímpar.



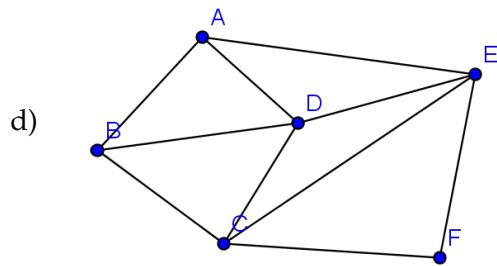
| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |
| Soma os graus | |
| Nº de arestas | |
| Nº de vértices de grau ímpar | |



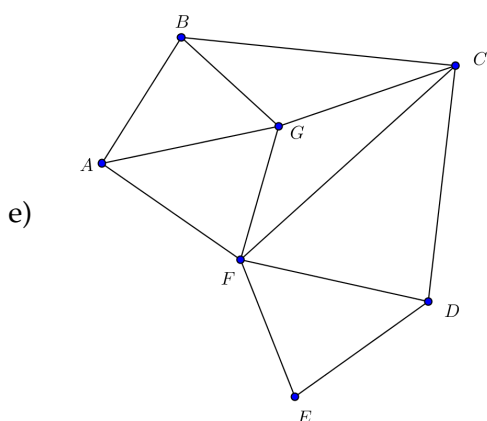
| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |
| E | |
| F | |
| Soma os graus | |
| Nº de arestas | |
| Nº de vértices de grau ímpar | |



| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |
| E | |
| Soma os graus | |
| Nº de arestas | |
| Nº de vértices de grau ímpar | |



| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |
| E | |
| F | |
| Soma os graus | |
| Nº de arestas | |
| Nº de vértices de grau ímpar | |



| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |
| E | |
| F | |
| G | |
| Soma os graus | |
| Nº de arestas | |
| Nº de vértices de grau ímpar | |

Com base nessa atividade, o que podemos afirmar sobre a soma dos graus em relação ao número de arestas?

Atividade 2

Observando os grafos da atividade 1, será possível desenhá-los sem levantar o lápis do papel e sem passar duas vezes pela mesma aresta e passando por todas as arestas? Caso seja possível, anote o caminho percorrido, destacando o ponto inicial e final.

Nessas duas primeiras atividades, os alunos investigaram grafos diferentes, que além de identificar um possível caminho euleriano, anotavam as informações sobre o grau de cada vértice, soma de todos os graus, o número total de arestas, o número de vértices com grau ímpar, de forma a estabelecer algumas relações que pudessem ajudar na construção de uma explicação de quando um grafo é euleriano.

Além disso, foi verificado e discutido alguns fatos mencionados no Capítulo 1: a soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas; a quantidade de vértices com grau ímpar é par.

Muitos alunos conseguiram observar a relação entre o número de arestas e a soma dos graus.

Com relação aos professores, os da área de exatas e alguns das demais áreas conseguiram fazer a atividade e responder a questão sem nenhuma dúvida. Mas alguns professores tiveram dúvidas na pergunta e não conseguiam observar nenhuma relação.

A atividade 2, foi encarada como um desafio e foi bem aceita tanto pelos alunos como pelos professores. Os professores a acharam muito divertida e desafiadora. Ficaram muito bravos por não conseguirem solucionar os que não eram possíveis.

Ao final dessa atividade, eu pedi para que eles verificassem se havia alguma relação entre os que foram possíveis e os que não foram possíveis. Um aluno me respondeu que tem que ter algum grau par para ser possível. Foi a resposta que chegou mais perto. Então expliquei sobre grafos eulerianos e semi-eulerianos. Falei que para cada vértice deve haver um número par de caminhos, com exceção do vértice de partida e do vértice que finaliza o caminho, pois em cada vértice ele tem que entrar e sair. No ponto de partida ele não necessariamente tem que chegar e no vértice final ele não precisa sair. Por isso, se o grafo possui apenas dois vértices com grau ímpar, então um deles será o início e o outro será o fim do caminho. E, se todos os vértices possuírem apenas vértices de grau par, então o caminho terminará por onde começou.

Acredito que não conseguiram observar a relação pretendida por ter poucos grafos para serem analisados. Sugiro a quem for realizar a atividade, colocar mais alguns grafos diversificados para melhorar a análise.

Atividade 3

Sr. Joaquim veio da roça para cidade. O objetivo da sua viagem era ir à missa de 7^o dia do seu compadre Manuel. Aproveitou a viagem para resolver uns problemas no banco e depois foi à casa de sua irmã para levar uns doces e frutas do sítio em que mora. Quando desembarcou na rodoviária, ficou muito contente vendo que cada lugar em que passaria era ligado a cada um dos outros três por uma rua sendo que cada rua ligava somente dois lugares. Na lanchonete da rodoviária, foi tomar um café e aproveitou para desenhar um mapa para orientá-lo em suas caminhadas pela cidade.

Faça você um diagrama representando os locais por pontos e as ruas por linhas e responda:

- 1) Quantas linhas saem de cada ponto?
- 2) Quantas linhas tem o diagrama?
- 3) É possível Sr. Joaquim sair e voltar à rodoviária, passando por todas as ruas uma única vez?

Essa atividade é uma contextualização das atividades 1 e 2. Alguns alunos e professores tiveram um pouco de dificuldade em fazer o diagrama, e solicitaram nossa ajuda. Depois de solucionar o diagrama a maioria deles tiveram problema nenhum em responder as perguntas. Mas alguns ainda tiveram problema em responder o item 3).

Atividade 4 - O famoso problema das sete pontes.

A cidade de Königsberg é banhada pelo rio Pregel que contém uma ilha (Kneiphof) que está ligada ao restante da cidade por sete pontes. Os habitantes da cidade tentavam realizar um percurso que os fizesse passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma. Como as suas tentativas foram sempre falhas, muitos deles acreditavam que não era possível encontrar tal percurso. Será que é possível encontrar um percurso nas condições dadas?

Esse problema famosíssimo gerou uma discussão entre os professores e alunos, pois eles tentavam encontrar a solução e não observaram que o problema deveria ser modelado por um grafo. A partir do momento que a dica foi dada, ainda houve dificuldade em montar o diagrama. Após montado o diagrama, a maioria percebeu que o problema não tinha solução, porque não era um grafo euleriano ou semieuleriano.

Atividade 5

Considerando o problema da atividade anterior, e se houvesse mais uma ponte, seria possível? E se retirasse uma ponte, seria possível?

Essa atividade foi respondida sem problemas. Eles perceberam que retirando ou acrescentando qualquer ponte, teríamos apenas dois vértices com grau ímpar.

Atividade 6

Um grupo de ilhas estão ligadas por pontes de tal modo que é possível andar de uma ilha qualquer até a outra. Um turista percorreu todas as ilhas cruzando cada ponte exatamente uma vez, tendo visitado a ilha de Tripla três vezes. Quantas pontes há em Tripla se:

- a) O turista não começou nem terminou seu percurso em Tripla?
- b) O turista começou seu percurso em Tripla mas não terminou lá?
- c) O turista começou e terminou seu percurso em Tripla?

Atividade 7

Desejamos montar um cubo com canudos de 20 cm de comprimento, passando um arame pelo interior dos canudos. Com um pedaço de arame de 240 cm será que podemos montar esse cubo sem cortar o arame?

Atividade 8

A figura 72, mostra um pequeno mapa de um condomínio fechado, com alguns quarteirões, que pode ser modelado por meio de um grafo, onde as esquinas são os vértices e as ruas, as arestas.

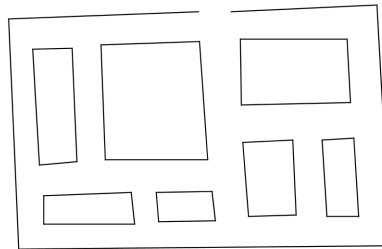


Figura 72: mapa do condomínio

Faça um diagrama que represente esse condomínio e verifique se é possível um carteiro passar por todas as ruas uma única vez, voltando ao ponto de entrada. Caso seja impossível realizar o percurso, diga quantas ruas irá repetir de modo que o trajeto seja o mais econômico, ou seja, apresente o menor número de ruas repetidas.

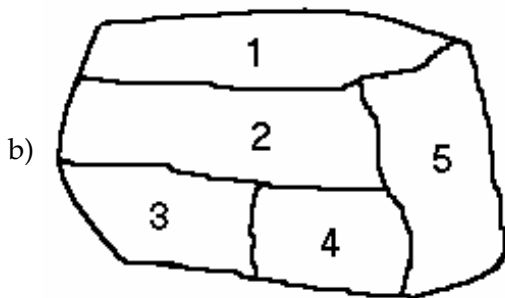
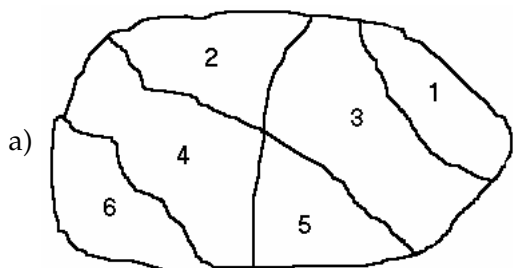
As atividades 6, 7 e 8 não foram trabalhadas na oficina mas são ótimas sugestões para que os alunos desenvolvam várias habilidades como analisar, relacionar, modelar, entre outras que ajudam a solucionar problemas, despertando o interesse e ajudando em seu desempenho escolar, uma vez que seu raciocínio pode ser aprimorado.

5.2 COLORAÇÃO DE MAPAS

O objetivo desta oficina era trabalhar a coloração de grafos por seus vértices, juntamente com o teorema das quatro cores, que nos diz que apenas 4 cores são necessárias para colorir qualquer mapa. Parte das atividades dessa oficina vem do trabalho já realizado por Lozano em [6]. A primeira e a terceira atividades tem como objetivo

trabalhar o problema de coloração de mapas e, a segunda e quarta atividades traz o problema de coloração de grafos . Compareceram à oficina do 9º ano vinte e oito alunos e esta durou também duas aulas consecutivas de cinquenta minutos cada. Para a oficina da 3ª série compareceram vinte e sete alunos e esta durou uma aula completa de 50 minutos e mais 20 minutos de outra aula.

Atividade 1 - Colorir cada mapa dado com o menor número de cores que você conseguir, sem que regiões com fronteira comum (regiões adjacentes) recebam a mesma cor. Observe que regiões com apenas um ponto em comum não são consideradas regiões adjacentes.



Atividade 2 - Vamos relacionar cada mapa da atividade anterior a um grafo (o grafo dual). Agora vamos aplicar a coloração de vértices que consiste em atribuir cores aos vértices do grafo, tal que vértices adjacentes não recebam a mesma cor, ou seja, se existir uma aresta entre dois vértices, eles devem receber cores diferentes.

Atividade 3 – Vamos colorir o mapa do Brasil nas mesmas condições da atividade anterior. Qual o número mínimo de cores necessário para colorir o mapa do Brasil?



Figura 73: mapa do Brasil

Atividade 4 - Uma companhia industrial deseja armazenar sete produtos farmacêuticos diferentes C_1, C_2, \dots, C_7 , mas alguns não podem ser armazenados juntos por motivos de segurança. A tabela a seguir mostra, assinalados com um X, os produtos que não podem estar no mesmo local. Você consegue encontrar o número mínimo de locais necessários para armazenar estes produtos.

| | C_1 | C_2 | C_3 | C_4 | C_5 | C_6 | C_7 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| C_1 | | X | | | | X | X |
| C_2 | X | | X | X | | | |
| C_3 | | X | | X | X | | |
| C_4 | | X | X | | X | X | |
| C_5 | | | X | X | | X | X |
| C_6 | X | | | X | X | | X |
| C_7 | X | | | | X | X | |

O objetivo principal desta oficina é desenvolver no aluno a habilidade de resolver problemas utilizando a coloração de grafos, bem como o teorema das quatro cores.

Para realização da oficina, dividimos a sala em grupos de quatro e três alunos respectivamente no 9º ano do EF e no 3º ano do EM. Foram distribuídos para cada aluno uma folha com as atividades e para cada grupo, uma caixa com 12 lápis de cores diferentes.

Primeiro, foi solicitado que fizessem apenas o item a) da primeira atividade e depois discutiríamos a quantidade de cores necessárias para colorir este mapa. Eles utilizaram menos de 5 minutos para concluir esse item da atividade. Alguns alunos conseguiram colorir o mapa com duas cores e outros com 3 cores. A maioria dos alunos que utilizaram três cores para colorir o mapa, disse que não se atentaram que a terceira cor era desnecessária e verificaram que era possível colorir o mapa com apenas duas cores.

Após a discussão, foi solicitado que eles colorissem os mapas 2 e 3, isto é, fizessem os itens b) e c) da atividade 1. Para esses dois mapas foi necessário cerca de 20 minutos para que concluíssem. Estes, quase por unanimidade foram necessárias 3 cores para o mapa 2 e 4 cores para o mapa 3. Os alunos que encontraram mais cores do que o necessário no mapa 1, ficaram mais atentos na coloração dos mapas 2 e 3 e não cometeram o mesmo equívoco.

Na atividade 2, foi feita uma breve explicação sobre como montar um grafo relacionado a um mapa (grafo dual). Isso levou cerca de 10 minutos. Montei com eles o grafo relacionado ao mapa 1 e pedi que fizessem o que a atividade estava propondo somente com este mapa a princípio. Rapidamente começaram a dizer que apenas duas cores eram necessárias para colorir o grafo.

Pedi então que montassem os grafos relacionados aos mapas 2 e 3 e que o colorissem. A maioria dos alunos não teve problemas em montar os grafos e todos obtiveram a mesma resposta da atividade 1: 3 cores para o mapa 2 e 4 cores para o mapa 3. O que vale destacar é que apenas um dos grupos percebeu que bastava usar as mesmas cores que utilizaram para colorir os mapas da atividade 1.

Na atividade 3, muitos alunos não conseguiram colorir o mapa com apenas quatro cores. Eles disseram que em mapas com muitas regiões fica mais difícil colorir com poucas cores. Os alunos que conseguiram, disseram que começaram a coloração pelo estado da Bahia que possui mais fronteiras e foi mantendo esse raciocínio com as demais regiões.

Finalizada a atividade 3, pedi que os alunos iniciassem a atividade 4. Eles estavam tentando resolver o problema sem o uso de grafos e não chegavam a nenhuma conclusão. Então expliquei que o problema poderia ser modelado por um grafo em que os vértices seriam os produtos e as arestas indicariam os produtos que deveriam ser armazenados separadamente. Mostrei então que a simples análise do grafo também não resolveria o problema e se tratava de um problema de coloração de vértices tal

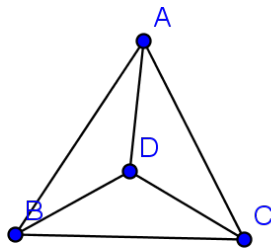
como a atividade 2 e a quantidade de cores necessárias seria a quantidade de locais para armazenar os produtos. Depois que compreenderam a solução do problema, acharam a atividade muito fácil.

SOLUÇÃO DAS PROPOSTAS DE ATVIDADES

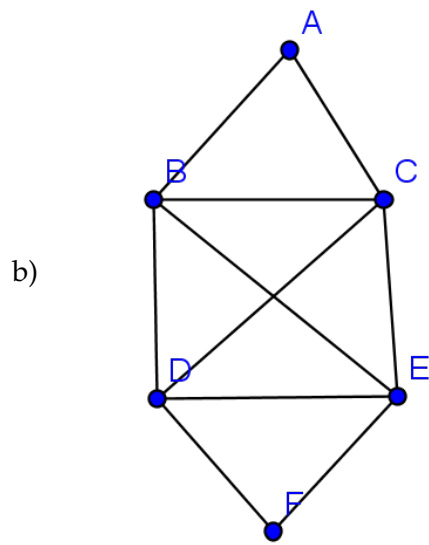
A.1 GRAFOS EULERIANOS

Atividade 1

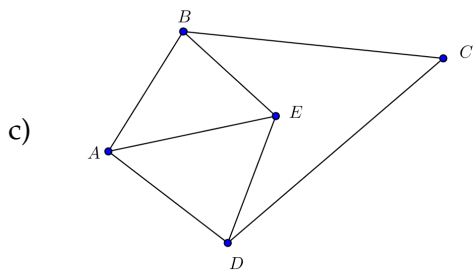
a)



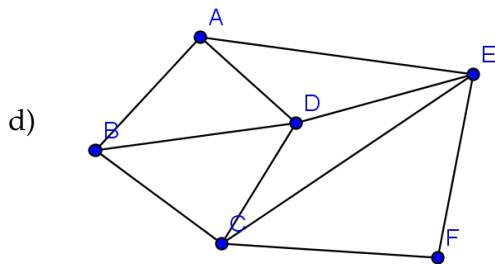
| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | 3 |
| B | 3 |
| C | 3 |
| D | 3 |
| Soma os graus | 12 |
| Nº de arestas | 6 |
| Nº de vértices de grau ímpar | 4 |



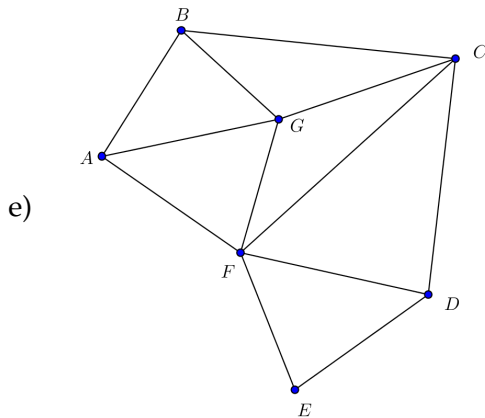
| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | 2 |
| B | 4 |
| C | 4 |
| D | 4 |
| E | 4 |
| F | 2 |
| Soma os graus | 20 |
| Nº de arestas | 10 |
| Nº de vértices de grau ímpar | 0 |



| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | 3 |
| B | 3 |
| C | 2 |
| D | 3 |
| E | 3 |
| Soma os graus | 14 |
| Nº de arestas | 7 |
| Nº de vértices de grau ímpar | 4 |



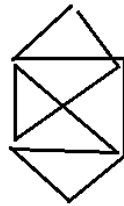
| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | 3 |
| B | 3 |
| C | 4 |
| D | 4 |
| E | 4 |
| F | 2 |
| Soma os graus | 20 |
| Nº de arestas | 10 |
| Nº de vértices de grau ímpar | 2 |



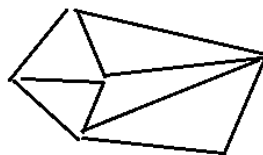
| Vértices | Grau |
|------------------------------|------|
| A | 3 |
| B | 3 |
| C | 4 |
| D | 3 |
| E | 2 |
| F | 5 |
| G | 4 |
| Soma os graus | 24 |
| Nº de arestas | 12 |
| Nº de vértices de grau ímpar | 4 |

Atividade 2

- a) Não é possível, pois temos mais de 2 vértices com grau ímpar.
- b) Uma possível solução é: A - B - C - E - F - D - E - B - D - C - A

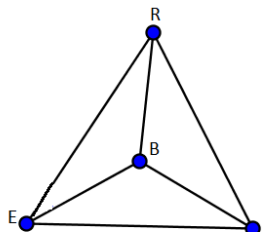


- c) Não é possível, pois temos mais de 2 vértices com grau ímpar.
- d) Uma possível solução é: A - B - C - F - E - A - D - E - C - D - B



e) Não é possível, pois temos mais de 2 vértices com grau ímpar.

Atividade 3



- 1) Saem 3 linhas de cada ponto.
- 2) O diagrama possui 6 linhas.
- 3) Não é possível, pois o grafo que representa essa situação não é um grafo euleriano ou semieuleriano, pois possui mais de 2 vértices com grau ímpar.

Atividade 4

Euler mostrou que não é possível encontrar tal percurso. Ele chegou a esta conclusão, através do uso da teoria dos grafos, que

Podemos modelar o problema a um grafo que será representado a seguir, em que os vértices indicam as regiões ligadas a parte continental e as arestas indicam as pontes.

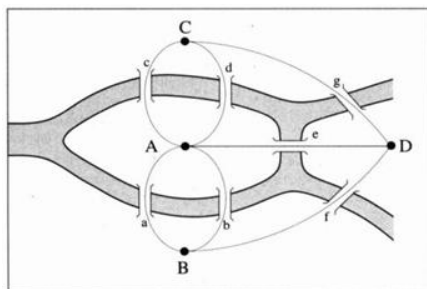


Figura 74: Representação gráfica do problema das 7 pontes

Verificamos que o grau do vértice A é 5 e os vértices B, C e D tem grau 3. Como todos os vértices desse grafo possui grau ímpar, chegamos a conclusão de que o problema não possui solução.

Assim, em qualquer um dos casos teríamos apenas dois vértices com grau ímpar, o que faz com que o grafo seja semieuleriano.

Atividade 5

Se retirarmos qualquer uma das pontes, o problema tem solução.

- Retirando as pontes a ou b, os graus de A e B seriam pares.
- Se retirarmos as pontes c ou d, os graus de A e C seriam pares.
- Retirando a ponte e, teríamos os vértices A e D com grau pares.
- Retirando a ponte f, teríamos os vértices B e D com grau pares.
- Se retirarmos a ponte G, os graus de C e D seriam pares.

Em qualquer um desses casos, haveriam apenas dois vértices com grau ímpar.

Da mesma forma, acrescentando-se uma ponte, o problema tem solução.

- Acrescentando uma ponte que liga A e B, os graus de A e B seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga A e C, os graus de A e C seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga A e D, os graus de A e D seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga C e B, os graus de C e B seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga C e D, os graus de C e D seriam pares.
- Acrescentando uma ponte que liga B e D, os graus de B e D seriam pares.

Novamente, em qualquer um dos casos, haveriam apenas dois vértices com grau ímpar.

Atividade 6

- a) seis pontes
- b) cinco pontes
- c) quatro pontes

Atividade 7

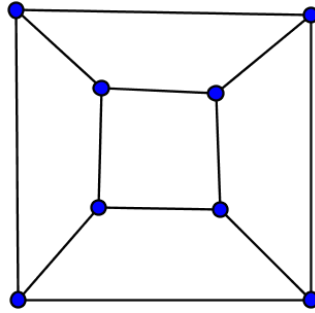


Figura 75: um cubo representado na forma de grafo planar

Não é possível formar esse cubo. O problema é equivalente a desenhar o grafo da figura 75 sem levantar o lápis do papel, passando por cada aresta uma única vez. Mas este grafo tem oito vértices com grau ímpar, que o significa que não possui caminho euleriano.

Atividade 8

Um diagrama que representa essa situação é o da figura 76, em que o vértice P , indica o ponto de partida. Esse grafo possui 12 vértices com grau ímpar, portanto não é possível realizar o trajeto passando por todas as ruas uma única vez e chegando ao ponto de partida. Precisamos então repetir ruas cujos vértices tem grau ímpar (isso chama-se *eulerização de grafos*).

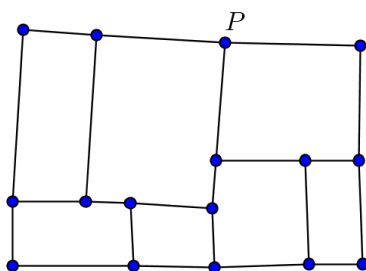


Figura 76: grafo que representa o mapa do condomínio

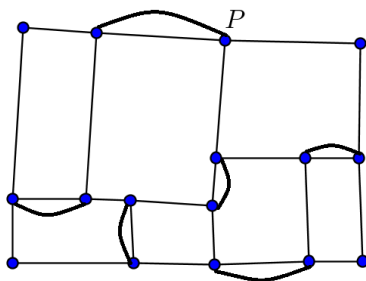
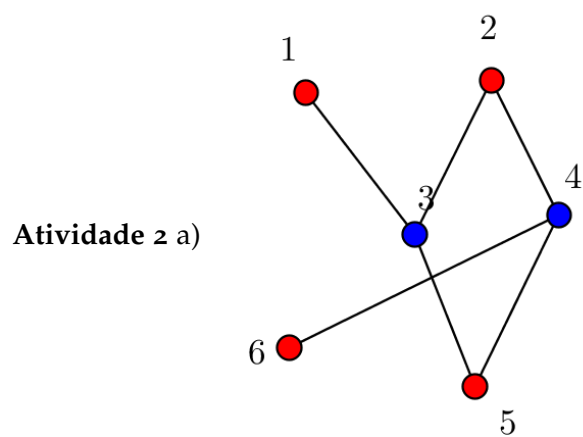
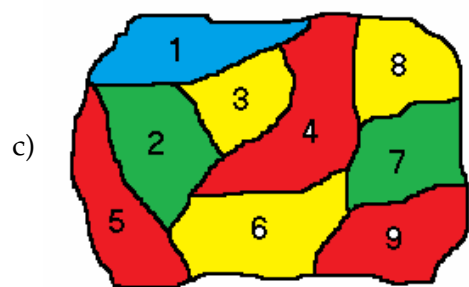
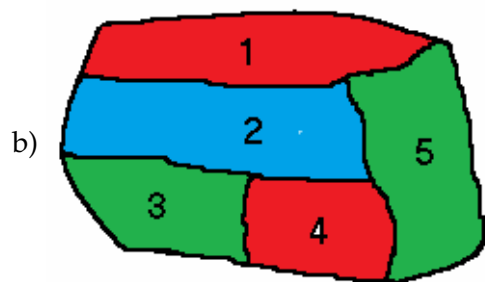
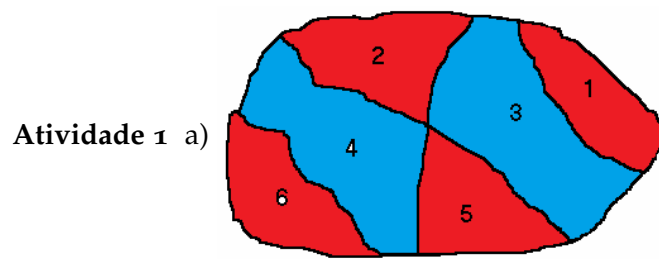
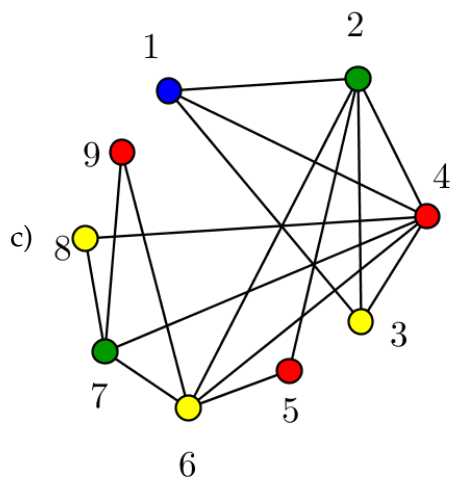
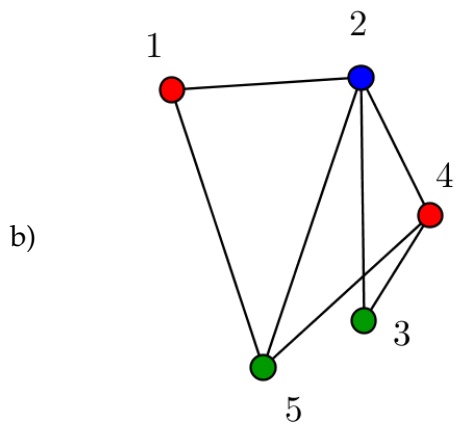


Figura 77: grafo eulerizado

Uma possível solução eulerizada é apresentada na figura 77. Dessa forma, serão repetidas seis ruas para que o trajeto seja o mais econômico.

A.2 COLORAÇÃO DE MAPAS





Atividade 3

Uma solução pode ser a da figura 78

Atividade 4

| | C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| C1 | | X | | | | X | X |
| C2 | X | | X | X | | | |
| C3 | | X | | X | X | | |
| C4 | | X | X | | X | X | |
| C5 | | | X | X | | X | X |
| C6 | X | | | X | X | | X |
| C7 | X | | | | X | X | |

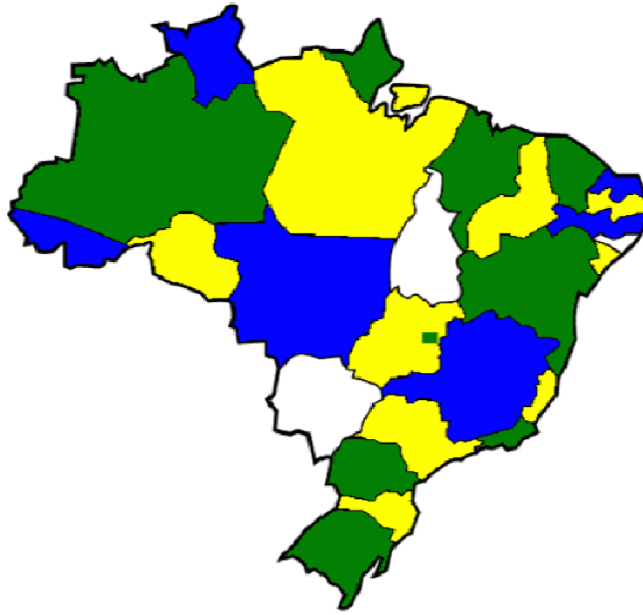


Figura 78: mapa do Brasil colorido com 4 cores

Colocando as informações em um grafo, em que os vértices são os produtos e as arestas incidem sobre os vértices cujos produtos não podem ser armazenados juntos. Obtemos o grafo da figura 79.

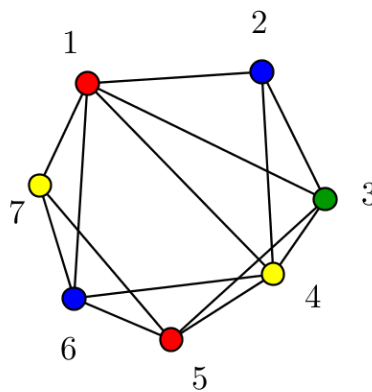


Figura 79:

Como são necessárias quatro cores para colorir o grafo, podemos concluir que são necessários quatro locais distintos para armazenar os produtos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] NETTO, P. O. B. *Grafos: Teoria, modelos, algoritmos*. São Paulo: Blücher, 2006.
- [2] NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. *Grafos: Introdução e prática*. São Paulo: Blücher, 2009.
- [3] WILSON, R. *Graphs, colourings and the four-colour theorem*. UK: Oxford University Press, 2002.
- [4] JURKIEWICZ, S. Apostilas pic - 2012. In: *Grafos - Uma Introdução*. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.
- [5] GERSTING, J. L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1995.
- [6] LOZANO, D.; RANGEL, S.; PIRES, C. Uma proposta de oficina de coloração de mapas e grafos para o ensino fundamental e médio. *Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, Rio de Janeiro, v. 2, p. 216–225, 2010.
- [7] SOUSA, L. O teorema da quatro cores. *Millenium - Revista do Instituto Politécnico de Viseu*, Viseu, v. 24, p. 125–151, 2001.
- [8] DA COSTA E OLIVEIRA, A. T. *Lições sobre o problema das quatro cores*. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso - Licenciatura em Computação, Universidade de Brasília, Brasília, 2010.
- [9] SAMPAIO, J. C. V. Quatro cores e matemática - notas de minicurso da ii bienal da sb<. <http://www.bienasbm.ufba.br/M35.pdf>. Acesso em: 23 dez 2014.
- [10] LIMA, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. *RPM* 12, v. 24, p. 2–3, 2010.