INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Paulo César Antunes Pereira

O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA – uma abordagem no ensino médio

Rio de Janeiro - RJ

2013

PAULO CÉSAR ANTUNES PEREIRA

O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA – uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA

Rio de Janeiro - RJ

2013

PAULO CÉSAR ANTUNES PEREIRA

O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA – uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial de obtenção do Grau de Mestre. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em ______________ de 2013

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. ROBERTO IMBUZEIRO OLIVEIRA - IMPA

____

Prof. Dr. PAULO CEZAR PINTO CARVALHO - IMPA

____

Prof.ª Dr. WALCY SANTOS - UFRJ

Rio de Janeiro - RJ

2013

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, razão de toda a minha existência, aos meus pais, por todo apoio, à minha esposa, por sua compreensão, e à minha filha, por seu carinho e amor.

Agradecimentos

A todos os professores que tive ao longo de minha trajetória neste curso de mestrado, são eles *Elon Lages Lima*, da disciplina Números, Conjuntos e Funções Elementares, *Paulo Cezar Pinto Carvalho*, das disciplinas Matemática Discreta e Preparação para o TCC, *Eduardo Wagner*, das disciplinas Geometria I e Geometria Espacial, *Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira*, da disciplina Aritmética I, *Roberto Imbuzeiro*, da disciplina Resolução de Problemas, *Marcelo Vianna*, da disciplina Cálculo I, e *Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva*, da disciplina Geometria Analítica, por contribuírem fortemente à minha formação e qualificação profissional.

Ao professor Roberto Imbuzeiro por sua orientação segura, dedicada e atenciosa.

À professora Walcy Santos por todo apoio, incentivo e amizade.

A todos os meus colegas de curso, especialmente aos amigos *Rodrigo Fraga* e *Iury Kersnowsky*, por serem verdadeiros companheiros.

À *Ana Cristina da Silva, Isabel Cherques, Andrea Nascimento, Kenia Rosa e Josenildo Pedro,* da Divisão de Ensino, por serem sempre tão solícitos em meus pedidos.

A toda minha família, especialmente meus pais, *Paulo Pereira* e *Maria de Fátima Pereira*, minha esposa e minha filha, *Natália Barrozo* e *Giulia Pereira*, por me apoiarem, torcerem por mim e principalmente compreenderem os momentos de ausência em virtude dos estudos.

Finalmente, agradeço a Deus, por me prover, me sustentar e me conduzir até aqui.

Resumo

Este trabalho realiza uma discussão dos principais conceitos de Indução Matemática em nível de Ensino Médio; destaca o Princípio da Indução Finita, o terceiro axioma de Peanno, e sua importante utilização em demonstrações relativas a proposições indexadas pelos números naturais; e ainda relata uma breve experiência com uma turma de 3ª série da Fundação de Apoio as Escolas Técnicas Estaduais do Rio de Janeiro – FAETEC.

Nesta experiência expõe-se a fundamentação teórica do assunto e aplicam-se atividades que não só contribuem para fixação do conceito trabalhado, mas também permitem constatações de como este aprendizado se dá em aspectos cognitivos.

Além disto, procura-se identificar as principais dúvidas e dificuldades encontradas por estes alunos e um meio de contorná-las. Procura-se também entender de que maneira este tema pode ser levado para a sala de aula.

Este estudo constitui, portanto, uma sugestão metodológica para a abordagem do Princípio da Indução Finita em nível de Ensino Médio.

Palavras chave: Indução, Axiomas de Peano e Nível Médio.

Abstract

This project analyzes some of the key concepts of Mathematical Induction-level high school; highlights the Principle of Finite Induction, the third axiom Peanno, and their use in important statements concerning propositions indexed by the natural numbers; and reports a brief experiment with reports a class of 3rd grade Fundação de Apoio as Escolas Técnicas do Rio de Janeiro - FAETEC.

This experience exposes the theoretical foundation of the subject and applies activities that not only contribute to fixing the concept worked, but also allow observations of how this learning occurs in cognitive.

Moreover, it seeks to identify the key questions and difficulties encountered by these students and a way to get around them. It also seeks to understand how this issue can be taken to the classroom.

This study is therefore a suggestion for the methodological approach of the Principle of Induction Finite-level school.

Keywords: Induction, Peano Axioms and high school level.

Sumário

Capítulo 1 – Introdução

Os gregos antigos foram os primeiros a utilizarem as demonstrações matemáticas. Euclides (360 a.C./295 a.C.) e seu texto *Elementos* exerceram papel especial no campo da ciência por conta do desenvolvimento do método axiomático. Não há dúvidas que as demonstrações possuem um caráter essencial na matemática.

Atualmente em nível de Ensino Médio as demonstrações são, em sua grande maioria, postas de lado, e os resultados matemáticos costumam ser exibidos como verdades absolutas sem questionamentos. Em alguns casos as fórmulas são apenas conjecturadas por meio de deduções empíricas. É bastante comum os professores intuírem fórmulas dizendo "*Se vale para* $n = 1$, $n = 2$ *e* $n = 3$*, então, intuitivamente, vale para todo* n*...*". Em vários destes casos o Princípio da Indução poderia ser aplicado promovendo um aprendizado mais sólido e completo.

Os axiomas de Peano constituem um modelo de construção dos números naturais. Este modelo foi proposto pelo matemático italiano *Giuseppe Peano* (1858-1932) e por isto tais postulados recebem seu nome. O Princípio da Indução é um destes axiomas e configura uma poderosa ferramenta de demonstração que é o foco deste trabalho. Sua importância é tal que o professor Abramo Hefez, em seu artigo sobre Indução, afirma que este tema deveria ser de conhecimento de todo aluno de Ensino Médio.

Apesar do Princípio da Indução não constar no programa do Ensino Médio sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e tão pouco nas diretrizes curriculares do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, que atualmente é a principal porta de entrada para a universidade, a experiência se justifica devido à incontestável relevância do assunto quanto ao apelo por um rigor matemático mínimo, que muitas vezes é deixado de lado nos livros didáticos adotados nas escolas.

São objetivos deste trabalho fundamentar teoricamente o Princípio da Indução e principalmente explorar sua aplicação nas demonstrações relativas a proposições indexadas pelos números naturais; identificar as principais dificuldades encontradas pelos alunos de Ensino Médio na realização sequencial do método indutivo; e exibir as habilidades e competências necessárias ao entendimento abstrato deste conceito.

Buscamos compreender como o princípio da Indução pode ser levado, de maneira eficiente, para a sala de aula, respeitando-se a maturidade intelectual dos alunos. Os capítulos dois e três deste texto servem de subsídios a professores que desejem abordar este tema em suas aulas.

No capítulo 4 descrevemos a componente empírica deste trabalho. A experiência em sala se deu por meio de aulas expositivas, nas quais foram explicados todos os conceitos necessários à compreensão do tema e também realizadas problemáticas de Indução e demonstrações por Indução. Posteriormente os alunos realizaram algumas atividades que foram criteriosamente selecionadas a fim de seguir uma sequência didática facilitadora da aprendizagem. Com a realização destas atividades puderam ser inferidos os seguintes questionamentos: Como é a compreensão do conceito abstrato de Indução por parte dos alunos? Há dificuldades lógicas? Por exemplo, na compreensão da sentença “Se A então B”, largamente utilizada no método, ou de outras naturezas, tais como déficit de certos conteúdos que de alguma forma constituem pré-requisitos a este assunto? Como contornar estes problemas?

Com a realização deste estudo empírico, e respeitando-se suas limitações, pôde-se responder a estes questionamentos e concluir que a empregabilidade do tema em nível de ensino médio é bastante razoável. Estes pontos são discutidos em maior detalhe no capítulo 5.

Capítulo 2 – Fundamentação Teórica

O livro dos recordes, *Guinness Book*, de 2008, aponta o grupo holandês Endemol como recordista mundial na categoria *dominós enfileirados e derrubados por grupo*. Na ocasião foram enfileirados 4 milhões de dominós e derrubados 3.847.295. Atualmente este recorde já foi batido.

(http://esportes.r7.com/mais-esportes/fotos/preparacao-para-o-recorde-mundial-da-derrubada-de-dominos-5.html)

Esta prática traduz, em essência, a ideia central por trás do Principio da Indução Finita e a expressão *efeito dominó*, comumente utilizada na língua portuguesa, se apropria bem ao seu significado.

Note que o grupo Endemol não conseguiu derrubar todos os dominós. Isto provavelmente se deu por conta de elementos físicos, tais como uma possível imperfeição das peças envolvidas, a resistência do ar ou outros fatores adversos e até mesmo falha humana.

Imagine agora um modelo ideal de enfileiramento de dominós e digamos que eles estão em um número infinito. Neste modelo os dominós estão, entre si, a uma distância tal que se um deles cai para frente, então necessariamente derruba o seguinte. Assim, se derrubado o primeiro dominó o que aconteceria?

Pensando de modo atemporal, isto é, sem considerar o tempo que seria necessário para derrubar os dominós, a resposta a esta pergunta é bem intuitiva e é a seguinte: todos os outros dominós cairiam também. Afinal, se supormos que um determinado dominó ficaria de pé, digamos o de posição k, $k \in Z$ e $k > 1$, teríamos que o dominó imediatamente anterior a este, o de posição $k - 1$, também teria ficado de pé, pois, se tivesse caído, por hipótese, derrubaria o de posição k que está logo a sua frente. Procedendo assim, suficientemente e reiteradas vezes, concluiríamos que o primeiro dominó não teria sido derrubado, chegando, portanto, a um absurdo.

O parágrafo anterior mostrou que não podemos supor que algum dominó vai ficar de pé. Isto se dá por que duas condições foram respeitadas: a primeira é que o *dominó de posição* $k = 1$ *é derrubado* e a segunda é que *se um dominó cai então derruba o da frente*. Repare que as duas condições são igualmente necessárias, uma vez que se apenas a primeira fosse verdade, nada nos garantiria que os demais dominós cairiam, e se somente a segunda fosse verdade, o processo de queda dos dominós poderia jamais iniciar.

Como já dito, esta ideia revela uma essência do assunto, vamos agora as formalidades, supondo-se que o leitor possua uma noção geral de fatos básicos a respeito de conjuntos e funções.

Os Axiomas de Peano

Peano *nasceu no dia 27 de agosto de 1858 em Cuneo, Piemont, Itália, e morreu em 20 de abril de 1932 em Turim, Itália*

Em 1889 Peano publicou os seus axiomas famosos, chamados axiomas de Peano, que definiram os números naturais em termos de conjuntos. (http://www.somatematica.com.br/biograf/peano.php)

Enunciaremos a seguir os axiomas de Peano sem nos aprofundar. Estes axiomas são os pilares de toda teoria dos números naturais. Daremos destaque exclusivo ao terceiro axioma. Este, quando enunciado sob a forma de proposições, constitui uma excelente ferramenta para demonstrações relativas a números naturais. Demonstrações que se utilizam deste axioma são denominadas *provas por Indução Finita,* ou simplesmente *provas por Indução.* Para maiores elucidações sobre a axiomatização dos números naturais aconselhamos a leitura do artigo sobre o Princípio da Indução Finita, de Elon Lages Lima, na revista *EUREKA, nº3,* de 1998.

Considere primitivamente, isto é, sem requerer definição, um conjunto N cujos elementos n são chamados de números naturais e uma função, chamada sucessor, $s: N \to N$ que leva n em $(n+1) := s(n)$, sendo $(n+1)$ denominado o sucessor de n.

A função sucessor s satisfaz os seguintes axiomas:

i) s é injetiva – Se $a \neq b$ então $s(a) \neq s(b)$(números naturais distintos possuem sucessores distintos);

ii) $N - s(N)$ é um conjunto unitário. (Existe um único número natural, representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro número natural);

iii) (Axioma da Indução) Se $A\ c\ N, 1 \in A$ e $\forall\ a \in A$, ocorre também $a + 1 \in A$, então $A = N$ (Se um subconjunto de N possui o número 1 e tem a propriedade de possuir o sucessor de todos os seus elementos, então ele é o próprio N).

Um subconjunto de N com a propriedade de possuir o sucessor de todos os seus elementos é denominado conjunto *hereditário*. Se além desta propriedade ele também possuir o número 1 então será chamado conjunto *indutivo*.

A partir daqui estaremos considerando que é sabido o que é um número natural, assim como suas operações e propriedades básicas e que é conhecida a notação simbólica de seus elementos, $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Antes de enunciarmos o axioma iii em termos de proposições, vamos deixar bem claro o que é uma proposição relativa a números naturais e dar alguns exemplos.

As Proposições nos Naturais

Uma *proposição* ou *sentença aberta* $P(n)$ que depende da variável n é uma afirmação que pode ser ou verdadeira ou falsa toda vez que substituímos n por algum número natural. Seguem-se alguns exemplos de proposições em N:

a) $P(n)$: n é um quadrado perfeito.

$P(1), P(4)$ e $P(9)$, por exemplo, são verdadeiras, pois $1 = 1^2, 4 = 2^2\ e\ 9 = 3^2$, enquanto que $P(2)$ e $P(3)$ são falsas, uma vez que sabidamente, 2 e 3 não são quadrados perfeitos.

b) (A soma dos n primeiros cubos)

$$P(n): \sum_1^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$P(1): 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$ é verdadeira, $P(2): 1^3 + 2^3 = \left(\frac{2(2+1)}{2}\right)^2 = 9$ é verdadeira e $P(3): 1^3 + 2^3 + 3^3 = \left(\frac{3(3+1)}{2}\right)^2 = 36$ também é verdadeira. Será que $P(n)$ é verdadeira para todo n? Responderemos esta pergunta mais adiante.

c) (O trinômio de Euler) $P(n): n^2 + n + 41$ resulta em um número primo qualquer que seja n.

Este é um caso interessante onde se pode pensar que um polinômio de grau 2 nos números naturais sempre gere números primos, uma vez que, a proposição se verifica para os 40 primeiros números naturais, isto é, $P(1), P(2), \ldots, P(40)$são verdadeiras, verifiquemos para os dois primeiros casos.

$P(1): 1^2 + 1 + 41 = 43$, que é primo e $P(2): 2^2 + 2 + 41 = 47$, que também é primo. No entanto, $P(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41.43$ não é primo, obviamente.

O Primeiro Princípio da Indução

O terceiro axioma de Peano pode também ser enunciado como a seguir:

> (Primeiro Princípio da Indução) Seja $P(n)$ uma proposição relativa a números naturais. Suponha que:
>
> i) $P(1)$ é verdadeira, e
>
> ii) Se $P(n)$ é verdadeira, para algum n, segue-se que $P(n+1)$ também é verdadeira.
>
> Então $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais.

A fim de certificar a equivalência entre esta forma de enunciado e a anterior, pense numa proposição $P(n)$ com as características (i) e (ii) acima e tome o conjunto $A = \{n;\ P(n)$ é verdadeira$\}\ c\ N$. Como $P(1)$ é verdadeira, por (i), segue que $1 \in A$. Por (ii), conclui-se de imediato, que A é hereditário, isto é, possui o sucessor de todos os seus elementos. Logo $A = N$.

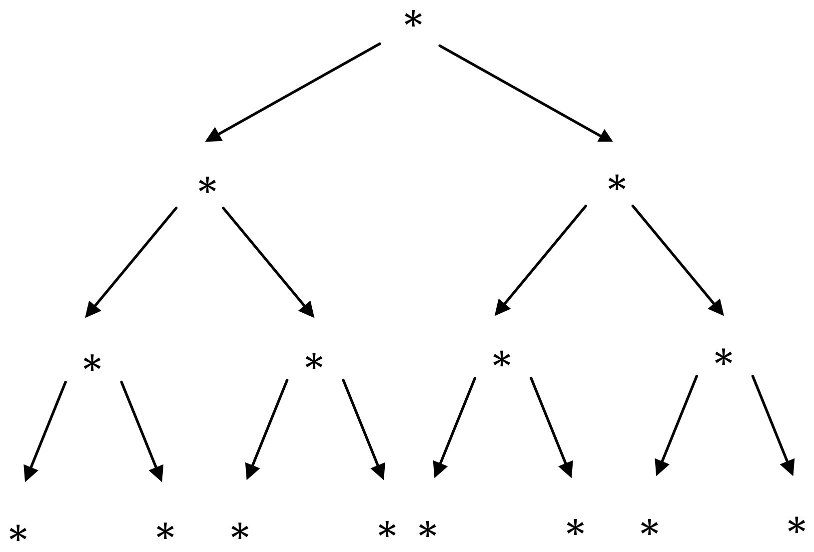
Vejamos agora uma demonstração por indução:

Problema

A árvore genealógica da família Pereira tem uma característica bem singular. Cada indivíduo tem sempre dois filhos e cada um dos dois filhos tem sempre dois filhos também, e assim sucessivamente. Quantos descendentes terá a 3ª geração da família Pereira? E a enésima geração?

Solução

Determinar o número de descendentes da 3ª geração é uma tarefa bem simples. Pode-se montar um gráfico, como a seguir, e contar o número de descendentes de cada geração, teremos uma solução investigativa. Já para a segunda pergunta, a história é outra, não dá para simplesmente contar o número de descendentes, pois a pergunta exige uma resposta literal. Veja o gráfico e a tabela que expõe os resultados nele obtidos:



Geração	Nº de descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = \ 2^2$
3	$8 = 2^3$
(...)	(...)

A terceira geração terá 8 descendentes. Quanto à segunda pergunta, temos uma boa suspeita para a resposta: na enésima geração teremos 2^n descendentes. Mas isso tem que ser provado. Vamos à demonstração por indução:

i) $P(1)$ significa que a 1ª geração tem dois descendentes. O que é verdade pelo nosso gráfico;

ii) Suponha que para algum n, $P(n)$ é verdadeira, isto é, a enésima geração tem 2^n descendentes. Como, por hipótese, cada individuo tem sempre dois filhos, uma geração qualquer sempre terá o dobro de indivíduos da geração anterior. Logo, a geração de ordem $(n+1)$ terá $2.2^n = 2^{n+1}$ elementos.

Conclui-se, portanto, que $P(n+1)$ é verdadeira e assim, por indução, a proposição vale para qualquer número natural, o que significa que a enésima geração da família Pereira terá 2^n descendentes.

Há uma forma mais geral de enunciar o Primeiro Princípio da Indução. Esta forma é importante, pois alguns problemas são satisfeitos somente para naturais a partir de certo ponto.

A Generalização do Primeiro Princípio da Indução

(Generalização do primeiro princípio da Indução) Seja $P(n)$ uma proposição relativa a números naturais. Suponha que:

i) $P(a)$ é verdadeira, e
ii) Se $P(n)$ é verdadeira, para algum n, segue-se que $P(n+1)$ também é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todos os números naturais iguais a ou maiores do que a.

Vejamos alguns problemas.

Problema 1

Prove que $\forall n \geq 3,\ 2n+1 < 2^n$.

Demonstração

i) $P(3):\ 2.3+1 = 7 < 8 = 2^3$ é verdadeira.
ii) Suponha que para algum n, $P(n)$ é verdadeira. Como $2(n+1)+1 = 2n+1+2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Conclui-se, portanto, que $P(n+1)$ é verdadeira.

Assim, por indução, a proposição está demonstrada.

Problema 2

Prove que para todo natural maior do que 4 tem-se $2^n > n^2$

Demonstração

i) Para $n = 5$, temos que $2^5 = 32 > 25 = 5^2$, logo a proposição é verdadeira para este valor inicial.

ii) Suponhamos que para algum n valha $2^n > n^2$, se $n > 4$, então

$2^{n+1} = 2^n.2 > n^2.2$. Como $n > 4$, em particular $n > 3$ e, multiplicando ambos os lados por n, temos que $n^2 > 3n = 2n + n > 2n + 1$, logo vimos que sendo $n > 4, n^2 > 2n + 1$, assim,

$$2^{n+1} = 2^n.2 > n^2.2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Isto conclui a demonstração.

A Boa Ordenação

Dizemos que a é o *elemento mínimo* (ou menor elemento) de um subconjunto A de N, se $a \leq n, \forall n \in A$. É fácil ver que o menor elemento de um conjunto é único, afinal se forem a e b ambos os menores elementos de um subconjunto A de N então teremos $a \leq b$ e $b \leq a$ o que nos diz que $a = b$.

(O teorema da boa ordenação) Todo subconjunto dos Números Naturais possui um elemento mínimo.

Uma elegante demonstração deste teorema pode ser vista em *Curso de Análise* de Elon Lages Lima.

Vamos a alguns problemas.

Problema 1

Mostre que $\forall\, n \in N,\ S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Demonstração

Seja $B = \{n \in N, S_n \neq \frac{n}{n+1}\}$. Observe que se mostrarmos que B é vazio teremos então demonstrado a afirmação. Suponha, por absurdo, que B não é vazio. Assim, pela boa ordenação, B possui um menor elemento, digamos que seja b este tal menor elemento. Logo $S_b \neq \frac{b}{b+1}$ e como $S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, temos que $1 < b$, portanto faz sentido escrever $S_{b-1} = \frac{b-1}{(b-1)+1} = \frac{b-1}{b}$. Então, somando em ambos os lados desta igualdade o termo $\frac{1}{b(b+1)}$, temos:

$$S_{b-1} + \frac{1}{b(b+1)} = \frac{b-1}{b} + \frac{1}{b(b+1)}\ .$$

Uma vez que $S_{b-1} + \frac{1}{b(b+1)} = S_b$ e ,fazendo as devidas contas, verificamos que $\frac{b-1}{b} + \frac{1}{b(b+1)} = \frac{b}{b+1}$, conclui-se que $S_b = \frac{b}{b+1}$, o que é um absurdo. Portanto B é vazio.

Problema 2

Há muitos números famosos, tais como o número irracional π, que pode ser obtido calculando-se a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência qualquer, e o número irracional e, que é a base do logaritmo natural, entre outros. Já os números naturais são, normalmente, considerados medíocres, o que não é verdade. Prove que todos os números naturais são interessantes.

Demonstração

Seja D o conjuntos de todos os números naturais desinteressantes. Se D é vazio, então não há o que provar. Vamos supor que D seja não vazio. Pela Boa Ordenação, D possui um menor elemento, digamos d. Será d o número 1? De forma alguma, o número 1 é, por exemplo, o elemento neutro da multiplicação nos naturais, e isto é interessante. Será d o número 2? Muito menos, o número 2 é o único número que é par e primo, o que é muito interessante. Então, independentemente de quem seja d, uma coisa é certa, d é o primeiro número desinteressante. Mas isto até que é interessante! Logo d não pertence a D e, portanto, D é vazio.

Evidentemente que o conceito de número “interessante” não está bem definido e o problema anterior se presta tão somente a título de entretenimento. No entanto, este problema apresenta as características tradicionais de uma prova por Boa Ordenação que em geral se dão por contradição.

O Segundo Princípio da Indução

(Segundo Princípio da Indução) Seja A um subconjunto de N que goze da seguinte propriedade: Dado o natural n, se A possui todos os naturais m menores que n então A também possui n. Assim sendo, $A = N$.

A fim de demonstrar este teorema toma-se um conjunto $M = N - A$. Se M é vazio não há nada a provar. Se M é não vazio, então pela boa ordenação, existe $x \in M$ seu menor elemento. Então para todo natural $m < x$, teríamos $m \in A$. Mas se A possui todos os naturais menores que x então A possui x, o que é uma contradição.

Enunciaremos a seguir o segundo princípio da indução em termos de proposições e de maneira mais geral.

(Segundo Princípio da Indução) Consideremos uma proposição $P(n)$ e um natural a. Suponhamos que

i) $P(a)$ é verdadeira, e

ii) Dado $m \geq a$, Se $P(m)$ é verdadeira para todo $a \leq m \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Problema

Mostre que a sequência definida por $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \end{cases}$ *possui uma fórmula fechada não recursiva.*

Demonstração

Vamos realizar uma breve investigação matemática. Se $n = 3$, $a_3 = 4a_2 - 4a_1 = 4.4 - 4.2 = 16 - 8 = 8 = 2^3$ e é fácil ver que também ocorre $a_4 = 2^4$. Como $a_1 = 2 = 2^1$ e $a_2 = 4 = 2^2$, já podemos conjecturar que $a_n = 2^n, \forall\, n \in N$. Vamos a prova:

Como já é definido que $a_1 = 2^1$ e $a_2 = 2^2$ tomemos $n \geq 2$ um natural e suponhamos que para todo natural m com $1 \leq m \leq n$ valha $a_m = 2^m$. Como $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} = 4.2^n - 4.2^{n-1} = 2^{n+2} - 2^{n+1} = 2^{n+1}(2-1) = 2^{n+1}$, temos pelo segundo princípio da Indução, que a sequência, de fato, possui uma fórmula fechada não recursiva, a saber $a_n = 2^n, \forall\, n \in N$.

É razoável se perguntar por que utilizar o Segundo Princípio da Indução e não o Primeiro? Uma resposta a esta pergunta será dada no próximo capítulo, no problema 7.

Capítulo 3 – Exemplos Aprofundados

Este capítulo destina-se a resolução de alguns problemas de aprofundamento que envolvem o Princípio da Indução. Alguns destes problemas são considerados clássicos e são bastante conhecidos.

Uma observação a se fazer é que o método da Indução se presta a demonstrar proposições que devem ser indexadas pelos naturais, mas podendo provar resultados acerca de qualquer objeto matemático.

Problema 1 *(A desigualdade de Bernoulli)*

(UNICAMP-1997) Seja x um número real, $x > -1$. Prove que para todo natural n tem-se $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Demonstração

Seja $P(n)$: $(1+x)^n \geq 1+nx,\ \forall n \in N$.

i) $P(1)$: $(1+x)^1 = 1+x = 1+1.x$, é verdadeira.

ii) Suponha que para algum n, $P(n)$ é verdadeira. Como

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2$ e observando que $nx^2 \geq 0$, temos que

$(1+x)^{n+1} = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$, portanto $p(n+1)$ é verdadeira, e assim, por indução, a desigualdade de Bernoulli está provada.

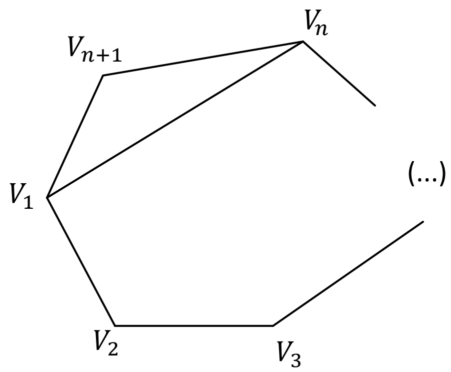
Problema 2 *(Diagonais de um Polígono)*

Prove que um polígono convexo de n lados possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Demonstração

i) Se $n = 3$, o polígono é um triângulo e possui $\frac{3(3-3)}{2} = 0$ diagonais, ou seja, não possui diagonais;

ii) Suponhamos que, para algum $n > 3$, seja verdade que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados seja $\frac{n(n-3)}{2}$ e consideremos um polígono de $n+1$ lados, com vértices $V_1, \; V_2, \dots, V_n \; e \; V_{n+1}$. Se unirmos V_1 a V_n teremos um polígono de n lados que, por hipótese, possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais. Veja o gráfico



Assim, o número de diagonais do polígono de $n+1$ lados será

$$\frac{n(n-3)}{2} + \; 1 \; + (n+1-3)$$

Número de diagonais do polígono de n lados (hipótese de indução).

O lado V_1V_n do polígono de n lados é uma diagonal na ótica do polígono de $n+1$ lados.

O vértice V_{n+1} se une a todos os vértices para formar diagonais, excetuando-se V_1 , V_n e ele mesmo.

Efetuando-se as devidas contas vemos, sem maiores dificuldades, que

$$\frac{n(n-3)}{2} + 1 + (n+1-3) = \frac{(n+1)(n+1-3)}{2}$$

O que prova, via indução, a proposição.

Problema 3 *(A Propriedade Arquimediana)*

Se a e b são números naturais tal que $a < b$, então existe o natural n tal que $na \geq b$.

Demonstração

Como de costume em provas por boa ordenação, resultado que utilizaremos neste caso, vamos supor por absurdo que a propriedade não seja verdadeira. Isto diz que devem existir a e b naturais com $a < b$ tal que para todo natural $n,\ na < b$. Consideremos o conjunto $M = \{b - na,\ n \in N\}$. Observe que M consta somente de números naturais. Se M é vazio, não há o que provar, pois assim não existiriam tais a e b e já teríamos nossa contradição. Suponha que M não é vazio e assim pela boa ordenação deve existir $m \in M$ seu menor elemento. É claro que $b - (m+1)a$ também está em M, pois $(m+1)$ é natural. No entanto

$$b - (m+1)a = b - ma - a < b - ma$$

O que contradiz o princípio da boa ordenação. Logo M é vazio e temos provada a propriedade arquimediana.

Problema 4 *(Aplicações em Aritmética)*

A) (O Teorema Fundamental da Aritmética) Prove que qualquer número natural maior que 1 *é primo ou é um produto de primos.*

Demonstração

2 é um número primo assim como o número 3 também é primo. $4 = 2.2$ e 5 é primo. Bom, não é tão difícil acreditar nesta proposição. Vamos demonstra-la.

Consideremos um natural n e suponhamos que para todo natural m com $2 \leq m \leq n$, m seja primo ou produto de primos. Se $n+1$ é primo não há o que provar. Vamos supor $n+1$ não primo, digamos que $n+1 = a.b$, $a,b \in N$e $a < n+1$ e $b < n+1$. Como $a < n+1$ e $b < n+1$, por hipótese, a é primo ou produto de primos e o mesmo ocorre para b, em qualquer caso, $n+1 = a.b$ é um produto de primos. Portanto, pelo segundo princípio da Indução, a proposição está provada.

B) Observe as seguintes igualdades:

i) $8 = 3+5 = 3.1 + 5.1$

ii) $9 = 3+3+3 = 3.3+5.0$

iii) $10 = 5+5 = 3.0+5.2$

iv) $11 = 3+3+5 = 3.2+5.1$

v) $12 = 3+3+3+3 = 3.4+5.0$

(...)

Será que qualquer número natural, a partir de 8, pode ser escrito na forma $3a+5b$, com $a,b \in \{0\}UN$?

Solução

A resposta é positiva. Vamos à prova por Indução:

i) Para $n = 8$, temos $8 = 3.1+5.1$, como já havia sido exibido;

ii) Supondo-se que para algum natural n valha $n = 3.a+5.b$, vamos analisar o caso $n+1$ em duas situações: $b=0$ e $b \neq 0$.

Se $b=0$, $n+1 = (3.a+5.0)+1 = 3.a+1$, como devemos ter $n = 3a \geq 8$, concluímos que $a \geq 3$, assim faz sentido escrever $n+1 = 3.a+1 = 3.(a-3)+3.3+1 = 3.(a-3)+ 5.2$.

Agora, se $b \neq 0$, $n+1 = (3.a+5.b)+1 = 3.a+5.(b-1)+ 5+1 = 3.a+5.(b-1)+6 = 3.(a+2)+5.(b-1)$.

Logo, por Indução, temos provada a afirmação.

C) Prove que $n^3+(n+1)^3+\ (n+2)^3$ *é múltiplo de três.*

Demonstração

Para $n=\ 1$, a afirmação fica igual a $1^3\ +2^3\ +\ 3^3\ =\ 1\ +\ 8\ +\ 27\ =\ 36\ =$ 3.12, múltiplo de três e, portanto, temos uma verdade.

Supondo que para algum n valha a proposição, isto é $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\ =3k,$ para algum k natural, vamos analisar o que ocorre para $n+1$.

$(n+1)^3+(n+2)^3+\ (n+3)^3=(n+1)^3+(n+2)^3+\ (n^3+9n^2+27n+27)=\ n^3+(n+1)^3+\ (n+2)^3\ +3(3n^2+\ 9n\ +\ 9)=3k+\ 3(3n^2+\ 9n\ +\ 9)$, que é múltiplo de três.

Logo, por indução, a proposição está demonstrada.

Problema 5 *(A Caracterização da Função Exponencial)*

(ITA) (adaptado) Considere uma função $f\colon R\to R$*, não constante, tal que* $\forall x,y\in R, f(x+y)=f(x).f(y)$ *e prove que* $f(nx)=\ f(x)^n, \forall n\in N^*$

Provaremos por Indução sobre n.

Solução

i) Se $n=1,\ f(1.x)\ =\ f(x)\ =f(x)^1$, o que procede;

ii) Supondo que para algum natural n valha $f(nx)=\ f(x)^n$,

Assim, como $f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx).f(x)=\ f(x)^n.f(x)=f(x)^{n+1}$, temos que a proposição vale para $n+1$ e, portanto, por Indução, a proposição vale $\forall n\in N^*$

Problema 6 (*A Soma dos n Primeiros Cubos)*

Para todo natural n*, prove que*

$$P(n)\colon \sum_1^n i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Demonstração

i) $P(1): \sum_1^1 i^3 = 1^3 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ é verdadeira;

ii) Suponha que para algum n, $P(n)$ é verdadeira. Como:

$$\sum_1^{n+1} = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \sum_1^n i^3 + (n+1)^3 =$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2(n+1) =$$

$$(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) =$$

$$(n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Conclui-se, portanto, que $P(n+1)$ é verdadeira e assim, por indução, a soma dos n primeiros cubos é, de fato, dada por $\sum_1^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Problema 7 *(Propriedades da Sequência de Fibonacci)*

Leonardo Pisano nasceu em 1170 e morreu depois de 1240. Também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci, foi o primeiro grande matemático da Europa Cristã medieval. Ele representou um papel importante revivendo matemáticas antigas e fazendo contribuições significantes.

Foi Fibonacci quem descobriu a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$ *e por isto sequências com a característica de que cada termo, a partir do terceiro, equivale a soma dos dois termos imediatamente anteriores, recebem seu nome.* (http://www.somatematica.com.br/biograf/fibo.php)

A) *Determine o próximo número na sequência:* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,$ *...e prove que o seu termo de posição n é sempre menor que* $\left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Solução

Analisando com atenção não é difícil descobrir que o que está acontecendo nesta sucessão é que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos imediatamente anteriores, pois, $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $5 = 3 + 2$, e assim por diante, onde se conclui que o termo desejado vale $8 + 13 = 21$.

Esta sequência é bastante conhecida e é tratada como a sequência de Fibonacci. Uma maneira elegante de defini-la é a seguinte:

Seja uma sequência de números naturais (F_n) tal que

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_{n-1} + F_n, \forall\, n \geq 2, \qquad n \in N \end{cases}$$

Vamos utilizar o segundo princípio da Indução e provar que $\forall\, n \in N, F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

É claro que se $n = 1$ e $n = 2$ a proposição é verdadeira, pois $1 < \frac{7}{4}$. Seja $n \geq 2$ um natural e vamos supor que para todo natural m com $1 \leq m \leq n$, vale que $F_m < \left(\frac{7}{4}\right)^m$. Vamos mostrar que $F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^n = \left(\frac{7}{4}\right)^n . \left(1 + \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^n . \frac{11}{7} < \left(\frac{7}{4}\right)^n . \frac{7}{4}$$
$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}.$$

Logo pelo segundo princípio da Indução, a proposição está demonstrada.

Como dito no capítulo anterior uma dúvida natural seria porque não aplicar o primeiro princípio da Indução na prova acima? Bom, vamos tentar.

Como já dito, é trivial que se $n = 1$ a proposição é verdadeira. Vamos supor que tenhamos então $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ para algum n e tentemos provar, mediante isto, que $F_{n+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}$. Analisando, como de costume, o termo F_{n+1}, temos que

$$F_{n+1=} F_{n-1} + F_n < F_{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

o que gera um impasse por conta de não termos informações suficientes sobre F_{n-1}, e assim demonstrar a implicação indutiva torna-se bastante difícil e a utilização do segundo princípio da Indução se justifica.

B) Considerando a sequência de Fibonacci, definida anteriormente, prove que

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Demonstração

Se $n = 1$, temos que $F_1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$, o que é verdade, uma vez que, $F_3 = 2$.

Vamos supor que a proposição valha para algum n e verificar que, a partir disto,vale também para $n + 1$.

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n + F_{n+1} &= (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} = (F_{n+1} + F_{n+2}) - 1 \\ &= F_{n+3} - 1 \end{aligned}$$

Logo a proposição vale para $n + 1$ e, portanto, via indução, vale para todo

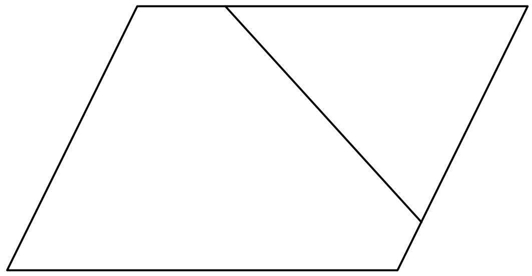
natural n.

Problema 8 *(A Pizza de Steiner)*

Mostre que o maior número de partes possíveis em que se pode dividir o plano com n retas deste plano é $p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

Solução

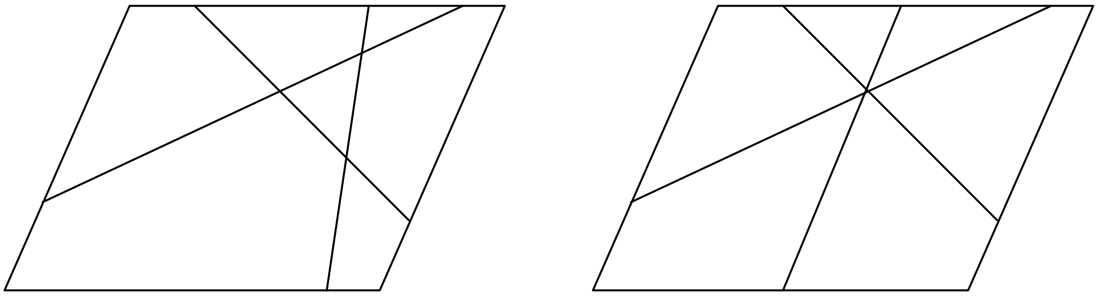
Vamos a prova por indução. Se $n = 1$, $p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$, o que é claramente verdade. Veja o gráfico



Vamos supor que para algum n tenhamos $p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ e analisemos o caso $n + 1$.

Traçando-se n retas obtemos, por hipótese, $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ partes. A questão é como podemos traçar a reta de ordem $n + 1$ de modo a obter o maior número de partes?

Obteremos o maior número de partes se a reta de ordem $n + 1$ encontrar cada uma das outros retas em pontos que não sejam de intersecção. Vejamos um gráfico que auxilie este entendimento.



Repare que neste exemplo, o desenho à esquerda mostra três retas que cortam o plano sem que uma delas passe pela intersecção das outras duas e isto gera sete partes enquanto o desenho à direita, no qual uma das retas passa exatamente na intersecção das outras duas, há somente seis partes.

Note agora que a reta de ordem $n+1$ ao tocar a primeira reta divide em dois pedaços a parte em que se encontrava inicialmente. Em seguida divide, também em dois pedaços, a parte seguinte, assim que toca a segunda reta e sucessivamente ela vai sempre dividindo em dois espaços as partes em que passa antes de encontrar cada uma das n retas. Com isso são geradas $n+1$ partes a mais do que se tinha e, portanto, o número de partes máximas obtidas com $n+1$ retas é

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

Assim, por indução provamos a proposição.

Problema 9 *(A Moeda Falsa do Rei)*

Uma das 3^n moedas de ouro de um Rei é falsa e pesa menos que as verdadeiras que tem todas o mesmo peso. Essa diferença de peso é quase imperceptível e não se pode determinar a moeda falsa sem o uso de uma balança de dois pratos. Mostre que com n pesagens o Rei pode descobrir qual é a moeda falsa.

Solução

Para $n = 1$, temos três moedas. Coloca-se uma em cada prato e deixa-se a outra de fora. Assim, descobre-se sem maiores problemas a falsa, uma vez que se os pratos ficarem equilibrados, a de fora será a falsa, e caso isto não ocorra, a falsa será, naturalmente, a que estiver no prato mais alto. Suponha que, para algum n, com n pesagens se possa descobrir a moeda falsa dentre 3^n moedas. Considerando 3^{n+1} moedas, basta dividi-las em três grupos de 3^n moedas, observando que $3^{n+1} = 3^n.3$, e com um método similar ao aplicado para o caso $n = 1$ descobre-se com uma só pesagem em qual destes três grupos se encontra a moeda falsa. Assim sendo, realizam-se então as n pesagens necessárias para se descobrir a moeda falsa utilizando o grupo que a contém. Com isso o total de pesagens será $n+1$.

Logo, por indução, a proposição está demonstrada.

Problema 10 *(Definição por Recorrência)*

Umas das fortes aplicações de Indução ocorrem em situações que envolvem definições por recorrência. Vejamos um destes casos.

Seja $a \in N$. Definimos a potência a^n como

$$\begin{cases} a^0 = 1, \forall\, a \neq 0 \\ a^1 = a \\ a^{n+1} = a^n . a \end{cases}$$

Diante disto demonstre a propriedade $a^m . a^n = a^{m+n}$

Demonstração

Sejam fixos a e m e vamos realizar a prova por indução sobre n.

Se $n = 1, a^m . a^1 = a^m . a = a^{m+1}$, temos, portanto, a propriedade verdadeira para este caso.

Vamos supor que a proposição vale para algum natural n, isto é, que ocorre $a^m . a^n = a^{m+n}$, e verifiquemos o que acontece para o caso $n + 1$.

$$a^m . a^{n+1} = a^m . (a^n . a) = (a^m . a^n) . a = a^{m+n} . a = a^{m+n+1} = a^{m+(n+1)}$$

Isto nos mostra que, por indução, a proposição vale para todo natural n.

Problema 11 *(O Erro Indutivo)*

Prove que todas as flores são da mesma cor.

Solução

Vamos provar este problema por indução. Se $n = 1$, a proposição é verdadeira, claramente. Suponhamos que para um conjunto com n flores todas sejam de mesma cor e provemos que, diante disto, para um conjunto com $n + 1$ flores também valha a proposição. Seja F um conjunto de $n + 1$ flores, digamos $F = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n+1}\}$.

Considere os conjuntos, de n elementos cada, $F_a = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ e $F_b = \{f_2, f_3, f_4, \dots, f_{n+1}\}$. Por hipótese as flores de cada um dos dois conjuntos são iguais. Como há intersecção entre os conjuntos essa cor é a mesma e evidentemente $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, f_{n+1}$ possuem todas a mesma cor.Assim, por indução, a proposição está provada.

Este problema é uma variação do caso clássico de erro indutivo. Quando se aplica Indução é preciso ter bastante cuidado. O problema distorce o segundo item da prova por indução e o erro acontece uma vez que em momento algum se prova a implicação $P(n) \rightarrow P(n+1)$. Trata-se, portanto, de como não aplicar a Indução.

Capítulo 4 – Descrição das Atividades e Constatações

Neste capítulo descrevemos e analisamos as atividades de sala de aula que compõem o cerne deste trabalho e exibimos o plano de aula aplicado. Tais atividades foram propostas a alunos de 3ª série da Fundação de Apoio a Escolas Técnicas Estaduais do Estado do Rio de Janeiro – FAETEC. A turma constituía-se de 28 alunos com média de idade entre 17 e 18 anos e a carga horária total despendida no processo foi de seis tempos de aula perfazendo um total de 300 minutos distribuídos em três semanas.

PLANO DE AULA TEMA: A INDUÇÃO FINITA			
	1ª SEMANA	2ª SEMANA	3ª SEMANA
ASSUNTO	*Axiomas de Peano e o 1º Princípio da Indução*	*A Generalização do 1º Princípio da Indução, a Boa Ordenação e o 2º Princípio da Indução*	*Resolução de problemas*
OBJETIVOS	*Fundamentar os Axiomas de Peano. Destacar o axioma da Indução e enunciá-lo em termos de proposições. Realizar demonstrações que empreguem o 1º princípio da Indução*	*Generalizar o 1º princípio da Indução. Enunciar o teorema da Boa Ordenação e o 2º princípio da Indução e exemplificar casos em que o 2º princípio deve ser empregado*	*Mensurar o aprendizado e identificar as principais dúvidas e dificuldades dos alunos*
METODOLOGIA	*Aula Expositiva*	*Aula Expositiva*	*Proposição de Atividades*
TEMPO	*Dois tempos de 50 minutos*	*Dois tempos de 50 minutos*	*Dois tempos de 50 minutos*

Atividade 1

Prove por Indução que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in N$$

A escolha desta primeira atividade, que propõe uma fórmula fechada para a soma dos n primeiros números naturais, se deu primeiramente por ser bem simples e tratar de um problema inicial e clássico quando se aborda o assunto. Além disso, esta fórmula, de modo geral, é bastante familiar aos alunos. Desejava-se que eles pudessem aplicar o método da indução sem maiores problemas quanto ás questões técnicas da prova, como por exemplo, as manobras algébricas necessárias ao exercício, que neste caso são bem simples. O intuito era fixar a sequência operacional da demonstração.

Após o tempo de 10 minutos, destinados à solução do problema, constatou-se que a maioria dos alunos conseguiu realizar a atividade. Alguns poucos não conseguiram realizar a demonstração e outros, em número também pequeno, utilizaram a soma de n termos de uma Progressão Aritmética por acharem que não era vantajoso utilizar Indução. Os alunos que utilizaram a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$ para progressões aritméticas alegaram não ver sentido em realizar o exercício por uma maneira mais "difícil" e tal atitude não foi confrontada neste momento. De modo geral não houve muitas dificuldades neste problema e boa parte dos alunos acabou antes do tempo.

Atividade 2

Prove por Indução que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

A razão da escolha desta atividade não é muito diferente da primeira, exceto, pelo fato de que para o nível médio as contas necessárias ao exercício não são tão triviais, uma vez consideradas as possíveis defasagens de aprendizado. No entanto, como boa parte das demonstrações por Indução costumam requerer manobras algébricas, e em alguns casos, manobras bastante complexas, a escolha da atividade pôde contribuir para o desenvolvimento desta habilidade ou, ao menos, mostrar sua importância.

Este problema foi considerado bem difícil pela turma. Pouco menos da metade dos alunos conseguiu realizar a demonstração dentro dos 10 minutos previstos. Quase todos os alunos tiveram dificuldades quanto à manipulação algébrica necessária para se ajustar a expressão envolvida e concluir a tese, evidenciando-se grande dificuldade com respeito à fatoração que era requerida pelo exercício, a saber

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}.$$

Os alunos que anteriormente utilizaram a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, na atividade 1, puderam perceber que por vezes o conceito mais geral pode não ser o melhor para resolver determinados problemas, mas é importante dominá-lo a fim de estar apto a realizar uma gama maior de exercícios, afinal, desta vez os termos da soma em questão não configuravam uma sequência tão familiar e, portanto, não tinham uma fórmula pronta para utilizarem.

Atividade 3

Observe as demonstrações por indução a seguir e julgue-as:

a) $\forall\, n \in N, n! \leq n^2$

Demonstração: Se $n = 1$*, temos* $1! = 1 \leq 1^2$*, Se* $n = 2$*, temos* $2! = 2 \leq 4 = 2^2$ *e se* $n = 3$*, temos* $3! = 6 \leq 9 = 3^2$*, assim, por investigação matemática, pode-se concluir, indutivamente, que a proposição é verdadeira para todo natural.*

a) $\forall\, n \in N, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(2n+1)^2}{8}$

Demonstração: Vamos supor que seja verdadeira a proposição para o natural n *e vamos verificar se, a partir disto, a proposição vale também para* $n + 1$*.*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(2n+1)^2}{8} + (n + 1) =$$

$$\frac{(2n + 1)^2 + 8(n + 1)}{8} = \frac{4n^2 + 4n + 1 + 8n + 8}{8} =$$

$$\frac{4n^2 + 12n + 9}{8} = \frac{(2n + 3)^2}{8} =$$

$$\frac{(2(n+1)+1)^2}{8} \ ,$$

o que nos diz que, de fato, a proposição vale para $n + 1$*, logo temos concluida a demonstração.*

A escolha desta atividade, que exibe duas demonstrações por indução, propositalmente equivocadas e incompletas, teve por finalidade avaliar a percepção dos alunos quanto ao processo sequencial requerido no método da indução. As duas etapas do método indutivo são igualmente importantes e necessárias e a omissão de qualquer uma delas pode configurar uma prova falsa. Na letra (a) não aparece a parte (ii), na qual se deveria provar que se vale para n então vale para seu sucessor $n + 1$, enquanto que na letra (b) ocorre justamente o contrário, há somente a parte (ii) e falta a (i).

Neste problema boa parte da turma se ateve, inicialmente, a ficar refazendo as contas e verificando se as operações estavam todas corretas em ambas as demonstrações. Quanto à letra (a), todos os alunos afirmaram que a demonstração estava errada, mas nem todos justificaram do ponto de vista da Indução, que era o objetivo do exercício. Boa parte somente exibiu o contraexemplo $n = 4$, que fornece a afirmação falsa $24 \leq 16$, o que, claro, procede e serve como solução. Outros sim, afirmaram que a demonstração estava incompleta, pois faltava a segunda parte da demonstração por Indução. Quanto à letra (b) houve, em geral, três tipos de respostas, todas afirmando que a demonstração estava errada. Uma parte da turma apenas afirmou que estava incompleta, pois faltava a verificação para $n = 1$, mas não sabiam apontar erro nas contas. Outra parte afirmou que devia estar errado, pois já existia uma fórmula para esta soma, a saber, $\frac{n(n+1)}{2}$, que, inclusive, haviam provado na atividade 1, mas não souberam dizer se as fórmulas eram equivalentes. Somente a minoria da turma afirmou que as contas estavam certas, mas isso não validava a proposição, uma vez que não se verificou o primeiro passo do método da Indução.

Atividade 4

Por meio de experimentações, sem uso de fórmulas e tomando como sabido somente que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale $180°$, Calcule a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de quatro lados, cinco lados e seis lados. Após isto, tente inferir o resultado para um polígono convexo de n lados. Prove por Indução o resultado encontrado.

Esta atividade foi proposta com o intuito de mostrar aos alunos que o princípio da indução não se presta somente a problemas exclusivamente algébricos, mas sim, a problemas que podem abranger diversas áreas da matemática. O método indutivo permite uma experiência matemática completa na busca de soluções para um determinado problema, no qual se inicia de maneira investigativa e exploratória, desenvolve-se o passo a passo até se conjecturar um possível resultado, e por fim prova-se o tal resultado via Indução.

O desempenho da turma nesta questão foi bastante satisfatório, uma vez que, a maioria dos alunos realizou a tarefa dentro do tempo limite e sem maiores problemas. Ainda que boa parte dos alunos lembrasse a fórmula que fornecia a soma dos ângulos internos de um polígono convexo em função do número de lados, fato que favoreceu, naturalmente, a solução do problema, a ideia por trás da atividade pôde ser capitada pela maioria da turma.

Atividade 5

(IME-2012) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$*. Seja a matriz* $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$*, com* k *e* n *números inteiros. Determine a soma, em função de* n*, dos quatro elementos da matriz* B*.*

Esta questão do IME, considerado por muitos o vestibular mais difícil do Brasil, é de nível elevado de dificuldade, ao menos para alunos que não fazem curso preparatório com foco exclusivo neste concurso. Mesmo assim a escolha desta atividade se justifica pelo intuito de mostrar que o tema Indução pode ser abordado no vestibular, ainda que nos mais seletos. Sua escolha trata-se também de uma motivação para os alunos que desejam ingressar na carreira militar. Não se esperava que os alunos realizassem a questão na íntegra, até mesmo porque há conceitos envolvidos nela que fogem ao conhecimento deles. A ideia era que eles tivessem um primeiro contato com questões desta natureza.

No desenvolvimento desta questão o aluno deveria provar que $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$, o que naturalmente pode ser feito via indução sobre k.

Os alunos, de modo geral, tiveram bastante dificuldade de realizar esta atividade. Muitos se sentiram inseguros e sequer começaram a rascunhar alguma coisa. Foram dadas algumas dicas quanto ao manuseio do somatório envolvido na questão e também acerca da forma geral da matriz A. Somente a minoria da turma conseguiu desenvolver a questão e ainda assim parcialmente. Ao fim da experiência esta atividade foi resolvida em conjunto com a turma e a solução é a que segue:

Solução

Afirmação: $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$

Se $k = 1$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, o que é verdade.

Vamos supor que valha, para algum k, que $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$ e analisemos o que ocorre para A^{k+1}:

$$A^{k+1} = A.A^k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2^k & k.2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & (k+1).2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix}$$

Isto mostra que, por indução, a afirmação é verdadeira.

Resta-nos agora calcular os coeficientes da matriz B. Antes, observemos que B fica assim

$$B = \begin{bmatrix} 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n & 1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + \cdots + n.2^n \\ 0 & 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n \end{bmatrix}$$

Logo $b_{11} = b_{22} = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, $b_{21} = 0$ e para calcularmos b_{12} vamos utilizar ma fórmula

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}$$

que derivando fica

$$1 + 2p + 3p^2 + \cdots + np^{n-1} = \frac{np^{n+1} - (n+1)p^n + 1}{(p-1)^2}$$

e fazendo $p = 2$, obtemos

$$b_{12} = 1 + 2.2 + 3.2^2 + \cdots + n.2^{n-1} = \frac{n.2^{n+1} - (n+1)2^n + 1}{(2-1)^2} = 2^n(n-1) + 1$$

assim, a soma desejada é $2.(2^{n+1} - 2) + 2^n(n-1) + 1 = 2^n(n+3) - 3$

Uma constatação comum verificada na realização de todas as atividades foi a desconfiança dos alunos quanto ao segundo passo da demonstração Indutiva. Em todo o processo eles não se sentiam confortáveis ao supor o que se queria provar. Muitos diziam que se estava utilizando justamente o que se queria provar na própria demonstração e que isso configurava uma incoerência.

Quanto a esta dúvida comum entre os alunos, referente a parte (ii) do Princípio da Indução, transcrevemos o seguinte trecho do texto sobre Indução do professor Abramo Hefez:

"*(...) Estamos usando a tese para provar o teorema? A resposta é não! Preste bem atenção, pois esta é a parte mais difícil de toda a história. Dado um natural n temos duas possibilidades:*

(a) $P(n)$ é verdadeira.

(b) $P(n)$ é falsa.

A hipótese (ii) do teorema não exige em absoluto que assumamos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in N$, podendo eventualmente ser falsa para algum valor de n, ou mesmo para todos os valores de n. O que a hipótese (ii) exige é que sempre que algum n pertença a categoria (a) acima, então $n+1$ também pertença a essa mesma categoria; não exigindo nada quando n pertencer a categoria (b)"

Uma maneira eficiente de reduzir as possíveis dificuldades na hora de trabalhar a Indução com alunos de nível médio é realizar uma diagnose com respeito às dúvidas que possam existir no campo dos pré-requisitos relacionados a este tema e realizar uma boa revisão sobre noções de conjuntos, lógica matemática e manipulações algébricas em geral.

Capítulo 5 – Conclusão

Esta dissertação de mestrado assumiu como objetivo procurar compreender como o tópico Indução Matemática pode ser levado para a sala de aula em nível de ensino médio. Este estudo propôs também delinear as principais dúvidas e dificuldades apresentadas pelos alunos face ao conceito abstrato deste assunto e sua utilização enquanto ferramenta de demonstração.

Realizou-se, em primeiro lugar, a fundamentação teórica do tema, destacando-se principalmente o método Indutivo aplicado a proposições indexadas pelos números naturais. Demonstrou-se que este método permite a realização de uma experiência matemática completa quanto à solução de problemas indutivos, uma vez que realizada a investigação matemática e conjecturado determinado resultado, o passo final pode ser dado provando-se tal resultado, via indução, e reduzindo a zero qualquer dúvida a seu respeito. Esta completude que a demonstração por Indução vem a proporcionar pode contribuir para aquisição de significados matemáticos mais sólidos.

O trabalho empírico envolveu uma breve experiência em sala de aula com alunos de nível médio da Fundação de Apoio a Escolas Técnicas Estaduais do Estado do Rio de Janeiro – FAETEC. Deste estudo empírico extraíram-se alguns resultados. Em primeiro lugar constatou-se que os alunos, de modo geral, não têm familiaridade com provas matemáticas. Eles, de certa forma, confundem dedução com demonstração. Foi também possível concluir que existe uma preferência por fórmulas e resultados prontos na hora de resolver questões, mas que provavelmente, este fato se dê por conta do condicionamento a qual estão submetidos estes alunos, tendo em vista o sistema de aprendizagem tradicional.

Conclui-se ainda que certas dúvidas referentes, digamos, a pré-requisitos do tópico Indução Matemática, tais como, noções gerais de conjuntos, operações numéricas, produtos notáveis, fatoração e implicações lógicas acarretam numa dificuldade hereditária na hora de se realizar uma prova por indução.

Mesmo apesar das dúvidas, até certo ponto naturais, observadas nos alunos, pôde-se constatar que a aplicação deste tema em nível de ensino médio, dentro de uma abordagem metodológica adequada, não configura nenhum delito pedagógico. De modo geral, os alunos atribuíram significado matemático ao método indutivo sem maiores problemas e puderam notar sua importância e aplicabilidade.

O estudo empírico deste trabalho apresenta, naturalmente, limitações nomeadas ao nível da amostra que foi selecionada. Tal amostra, produto de uma escolha de conveniência, não necessariamente deve implicar na extrapolação destes resultados a todos os alunos de ensino médio. No entanto, apesar das limitações obvias, considera-se que este estudo proporcionou certo entendimento quanto ao panorama geral do que seria trabalhar a Indução Matemática em nível de Ensino Médio, levando-se em conta as características deste perfil de estudante.

Futuros estudos investigativos a este respeito poderiam atribuir-se de amostras maiores e probabilísticas considerando-se, por exemplo, questões geográficas, faixa etária, e até mesmo níveis sociais dos alunos envolvidos no processo.

Por fim, este texto constitui-se de tão somente um contributo para o entendimento de como se daria a inserção da Indução Matemática no Ensino Médio, uma vez que a importância do assunto é notória e seus principais conceitos se dão em níveis relativamente fáceis de compreensão. Dada a relevância do tema, considera-se que há muito que ser abordado a este respeito e, portanto, há também um vasto campo de trabalho para estudos posteriores nesta área. Esperamos que os problemas apresentados acima e nas nossas referências possam servir de subsídios para futuros trabalhos teóricos e práticos.

Referências Bibliográficas

LIMA, E. L. - Artigo: **Indução Matemática** – Revista Eureka. (www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/.../inducao.doc) Acesso em 28/01/2013;

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C., Wagner, E. – **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 1, 2 e 3, Rio de Janeiro. SBM, 2002;

LIMA, E. L – **Curso de Análise**; Rio de Janeiro, Impa, Cnpq, 1976;

HEFEZ, A. – **Elementos de Aritmética**; SBM, 2011;

HEFEZ, A. – Artigo: **Indução Matemática** – Obmep. (http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/296654.o) Acesso em 28/01/2013;

VIDIGAL, Ângela (et.al.). **Fundamentos de Álgebra.** Belo Horizonte: UFMG, 2005;

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para o Curso de Licenciatura.**São Paulo: Edgar Blucher, 2005.