Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Uma Interferência Matemática: Proposta para o Ensino de MDC e MMC

Marcio Luiz Duarte da Silva

Orientadora
Profa. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares

2015

Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Departamento de Matemática

Uma Interferência Matemática: Proposta para o Ensino de MDC e MMC

Marcio Luiz Duarte da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares

2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S586i Silva, Marcio Luiz Duarte da.
Uma interferência matemática: proposta para o ensino de mdc e mmc / Marcio Luiz Duarte da Silva. – Teresina, 2015.
55f. il. color

Dissertação (Mestrado Profissional) – Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Piauí, 2015.
Orientadora: Profa. Dra. Liane Mendes Feitosa Soares.

1. Matemática - Didática. 2. Aritmética - Álgebra. 3. Aritmética - Geometria. Título.

CDD 513.14

PROFMAT

SBM

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: Uma Interferência Matemática: Proposta para o Ensino de M.D.C e M.M.C, defendida por Marcio Luiz Duarte da Silva em 23/09/2015 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Liane Mendes Feitosa Soares

Presidente da Banca Examinadora

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Examinador

Edivan Alano Luz

Examinador Externo

A Deus, à minha Iza e a minha família.

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que, em todos os momentos, é o Maior Mestre que alguém pode conhecer.

Agradeço à minha esposa Izani, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Aos meus pais, Manoel e Jacinta, pelo amor e apoio incondicional.

Obrigado a meus irmãos e sobrinhos, pelo apoio e suporte constante.

À Universidade Federal do Piauí, pela oportunidade de fazer o curso.

A todos os professores e amigos do Mestrado Profmat 2013 da Universidade Federal do Piauí, pelos importantes conselhos e contribuições nesta caminhada.

À minha orientadora, Profª. Dra. Liane, sem a qual este trabalho não seria realizado: pelo suporte, pelas correções e incentivos.

Meus agradecimentos aos amigos, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida.

Aos diretores das escolas onde trabalho, pela compreensão nestes anos de luta.

À CAPES, pelo incentivo financeiro à pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação: o meu muito obrigado.

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito.
Não sou o que deveria ser, mas, Graças a Deus, não sou o que era antes.
Marthin Luther King

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo a apresentação de uma intervenção para o ensino de Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC). A proposta de ensino desenvolveu-se em duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental e consiste em utilizar jogos, modelos geométricos e materiais manipulativos em forma de oficinas para desenvolver os conceitos de mdc e mmc, procurando despertar a capacidade dos alunos, de analisar, interpretar e construir soluções para problemas fazendo uso de mmc e mdc. A análise da eficiência da metodologia aplicada ocorreu através do pré-teste e pós-teste, cujos resultados se mostraram satisfatórios para a aprendizagem. Entende-se que a abordagem através da resolução de problemas com a utilização de jogos, de modelos geométricos e materiais manipulativos em forma de oficinas pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de mmc e mdc.

Palavras-chave: Divisibilidade, Números Primos, MDC, MMC.

Abstract

This paper aims to present an intervention in the teaching Greatest Common Divisor (GCD) and Least Common Multiple (LCM). This proposal was developed in two classes of the 6th year of elementary school and it was used games, geometric models and manipulative materials in workshops to develop the concepts about GCD and LCM, this work is trying to arouse the ability of students to analyze, interpret and build solutions of problems about the use of GCD and LCM. The analysis of the methodology applied effectively occurred based on the pretest and post test results, where they were satisfactory for learning. It concluded that the approach by solving problems using games, geometric models and manipulative materials in workshops may contribute to the teaching and learning of GCD and LCM.

Keywords: Division, Prime Numbers, GCD, LCM.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Vivemos um momento em que a fragmentação do saber limita o entendimento da realidade. Nesse sentido, a educação, em especial a educação matemática, precisa adotar uma nova postura, buscar um novo paradigma que substitua o já desgastado ensino-aprendizagem. É necessário querer mudar e acreditar que isso é possível; é necessário ter a convicção de que sempre há um novo jeito de ensinar, que sempre é possível mudar.

Ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Nós, como educadores matemáticos, devemos procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção, o raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, promovendo a socialização e aumentando a interação do indivíduo com outras pessoas.

O ensino da Matemática tem passado, ao longo últimos dos anos, por sucessivas reformas; mesmo assim, a dificuldade no processo ensino-aprendizagem continua. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) desempenham importante papel para que as Secretarias Municipais e Estaduais de Educação se esforcem para minimizar tais problemas, entendendo que:

> É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação. (PCN's,1997)

Como se vê, de certo modo, os PCN's já estão conseguindo alcançar, em parte, seus objetivos, isto é, estão desacomodando o professor, fazendo-o parar para refletir sobre sua prática pedagógica, o que é o primeiro passo para uma eventual mudança na mesma.

Insistentemente, questionamo-nos - ou pelo menos, deveríamos - sobre quais seriam os verdadeiros culpados por tais dificuldades: é o sistema, é o professor ou é o aluno? Na minha prática educacional, observei que todos tem uma parcela de culpa: o sistema, por suas políticas públicas falhas; o professor, por, muitas vezes, ter uma má formação, por trabalhar em área diferente de sua formação, por, não raramente, ter uma carga horária extensa, etc; e o aluno, que, por sua vez, tem poucas perspectivas em relação ao aprendizado, sendo também vítima do sistema e do professor.

Como professor, acredito que o fracasso do sistema educacional pode ser remediado com a mudança das práticas pedagógicas, especificamente no "fazer matemática"na sala de aula convidando este aluno a aprender diferente, através de recursos didáticos, como:

- a resolução de problemas;
- a história da matemática;
- as tecnologias da informação;
- os jogos.

Daí, decidimos desenvolver este trabalho, focando nas dificuldades enfrentadas no ensino da Aritmética e, em especial, no cálculo do máximo divisor comum (mdc) e do mínimo múltiplo comum (mmc), conteúdos ministrados no 6º ano do ensino fundamental.

A proposta foi de investigar, através de pré-teste e pós-teste, o ensino e a aprendizagem desses conteúdos matemáticos. E sua escolha se deu tendo em vista as questões de múltiplos e divisores estarem presentes no cotidiano dos alunos e sua compreensão ser necessária para a tomada de decisões.

O processo deste estudo esteve norteado pelo uso de jogos e modelos geométricos como recurso manipulativo, além de suscitar uma releitura da Matemática dando ênfase a números primos, primos entre si, múltiplos e divisores, levando o aluno a descobrir, conjecturar, experimentar e estabelecer relações entre diferentes conteúdos.

Assim, neste trabalho, primeiramente, realiza-se a discussão sobre a sustentação teórica da proposta e, em seguida, faz-se a análise dos resultados do pré-teste e pós-teste.

O presente trabalho está dividido em 5 capítulos, assim organizado: o primeiro capítulo descreve a forma como os PCN's tratam os Conteúdos Matemáticos; no segundo capítulo, é feita a sustentação teórica dos conteúdos abordados na interferência; o terceiro capítulo esboça a metodologia aplicada; enquanto o quarto capítulo mostra o resultado atingido entre o pré-teste e o pós-teste por turmas. E, por fim, no quinto e último capítulo, são feitas algumas considerações sobre o resultado alcançado, ao tempo em que se destaca também a importância do lúdico no processo ensino-aprendizagem.

1 Conteúdos Matemáticos e jogos embasados nos Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN)

As ideias básicas contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais em Matemática refletem, muito mais do que uma mera mudança de conteúdos, uma mudança de filosofia de ensino e de aprendizagem. Como não poderia deixar de ser, apontam para a necessidade de mudanças urgentes não somente relacionado ao que ensinar, mas, principalmente, em como ensinar e avaliar e, ainda, como organizar as situações de ensino e de aprendizagem.

1.1 Os conteúdos matemáticos no ensino fundamental segundo os PCNs

Nos PCNs, os conteúdos aparecem organizados em blocos, diferentemente do modo tradicional, a saber:

- Números e operações (Aritmética e Álgebra);
- Espaço e formas (Geometria);
- Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria);
- Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade).

Fica evidente, pois, a orientação de se pensar e de se organizar as situações de ensino-aprendizagem, privilegiando as chamadas intraconexões das diferentes áreas da Matemática e as interconexões com as demais áreas do conhecimento, o que entendemos como um caminho possível e desejável para o ensino da Matemática.

As intraconexões favorecem uma visão mais integrada, menos compartimentalizada da Matemática. Algumas orientações de cunho didático são colocadas ao professor, através de exemplos práticos, mostrando que é possível interligar Aritmética com Álgebra ou Aritmética com Geometria e Álgebra, numa mesma atividade. Por outro lado, as interconexões têm nos Temas Transversais - Ética, Saúde, Meio Ambiente, Pluralidade Cultural e Orientação Sexual - uma infinidade de possibilidades de se concretizarem. Para isso, torna-se necessário que o professor trabalhe cada vez mais com colegas de outras disciplinas, integrando uma equipe interdisciplinar. A interação com seus colegas permitirá que os projetos desenvolvidos sejam mais interessantes e mais voltados aos problemas da realidade.

Os objetivos para o Ensino Fundamental, de acordo com os PCNs, e aqui trazidos de modo resumido, visam levar o aluno a compreender e transformar o mundo à sua volta, estabelecer relações qualitativas e quantitativas, resolver situações-problema, comunicar-se matematicamente, estabelecer as intraconexões matemáticas e as interconexões com as demais áreas do conhecimento, desenvolver a autoconfiança no fazer matemático e interagir adequadamente com seus pares. A Matemática pode colaborar para o desenvolvimento de novas competências, novos conhecimentos, para o desenvolvimento de diferentes tecnologias e linguagens que o mundo globalizado exige das pessoas:

> Para tal, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.(MEC/SEF, 1997,p.31).

Os conteúdos nos PCNs não são entendidos como uma listagem, mas como um meio para desenvolver atitudes positivas diante do saber em geral e do saber matemático, em particular, o gosto pela Matemática e o incentivo a procedimentos de busca exploratória, desenvolvendo uma atitude investigativa diante de situações-problema fornecidas pelo professor. São alguns exemplos dessa compreensão mais ampla do que é ensinar e aprender em Matemática.

Ao analisar-se os Parâmetros Curriculares Nacionais em Matemática, percebe-se ideias básicas, a saber:

- eliminação do ensino mecânico da Matemática;
- prioridade para a resolução de problemas;
- conteúdo como meio para desenvolver ideias matemáticas fundamentais (proporcionalidade, equivalência, igualdade, inclusão, função, entre outras);
- ênfase no ensino da Geometria;
- introdução de noções de Estatística e probabilidade e estimativa;
- organização dos conteúdos em espiral e não em forma linear, desprivilegiando a ideia de pré-requisitos como condição única para a organização dos mesmos;

- uso da história da Matemática como auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos;
- revigoramento do cálculo mental, em detrimento da Matemática do "papel e lápis";
- uso de recursos didáticos (calculadoras, computadores, jogos) durante todo Ensino Fundamental;
- ênfase ao trabalho em pequenos grupos em sala de aula;
- atenção aos procedimentos e às atitudes a serem trabalhadas, além dos conteúdos propriamente ditos, como já foi mencionado acima;
- avaliação como processo contínuo no fazer pedagógico.

As ideias acima apresentadas não são novas para quem pesquisa e acompanha as tendências da Educação Matemática no mundo. Muitos países já passaram por essas reformulações, com maior ou menor grau de sucesso. Nos PCNs, há avanços importantes, caso se consiga entender os parâmetros como tal e não como uma listagem de conteúdos.

1.2 Importância da utilização dos jogos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática

Entre os recursos didáticos citados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), destacam-se os "jogos". Segundo os PCNs, volume 3, não existe um caminho único e melhor para o ensino da Matemática, no entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática:

> Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. (PCN, 1997,48-49)

Entendemos, portanto, que a aprendizagem deve acontecer de forma interessante e prazerosa e um recurso que possibilita isso são os jogos. Já que são tão importantes, em sala de aula, devemos ocupar um horário dentro de nosso planejamento, de modo a permitir que o professor possa explorar todo esse potencial lúdico, processos de solução, registros e discussões sobre possíveis caminhos que poderão surgir. Os jogos podem ser utilizados para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o aluno para aprofundar os itens já trabalhados. Devem ser escolhidos e preparados com cuidado para levar o estudante a adquirir conceitos matemáticos de importância.

Devemos utilizá-los não como instrumentos recreativos na aprendizagem, mas como facilitadores, colaborando para trabalhar os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos:

> Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. (Borin,1996,9)

Moura, 1991, afirma que "o jogo aproxima-se da Matemática via desenvolvimento de habilidades de resoluções de problemas".

Assim, devemos escolher jogos que estimulem a resolução de problemas, principalmente quando o conteúdo a ser estudado for abstrato, difícil e desvinculado da prática diária, não nos esquecendo de respeitar as condições de cada comunidade e o querer de cada aluno. Essas atividades, nem muito fáceis nem muito difíceis, devem ser testadas antes de sua aplicação, a fim de enriquecer as experiências através de propostas de novas atividades, propiciando mais de uma situação.

Os jogos estão em correspondência direta com o pensamento matemático. Em ambos, temos regras, instruções, operações, definições, deduções, desenvolvimento, utilização de normas e novos conhecimentos (resultados).

O trabalho com jogos matemáticos em sala de aula nos traz alguns benefícios:

- conseguimos detectar os alunos que estão com dificuldades reais;
- o aluno demonstra para seus colegas e professores se o assunto foi bem assimilado;
- existe uma competição entre os jogadores e os adversários, pois almejam vencer e, para isso, aperfeiçoam-se e ultrapassam seus limites;
- durante o desenrolar de um jogo, observamos que o aluno se torna mais crítico, alerta e confiante, expressando o que pensa, elaborando perguntas e tirando conclusões sem necessidade da interferência ou aprovação do professor;
- não existe o medo de errar, pois o erro é considerado um degrau necessário para se chegar a uma resposta correta;
- o aluno se empolga com o clima de uma aula diferente, o que faz com que aprenda sem perceber.

Mas devemos, também, ter alguns cuidados ao escolher os jogos a serem aplicados:

- não tornar o jogo algo obrigatório;
- escolher jogos em que o fator sorte não interfira nas jogadas, permitindo que vença aquele que descobrir as melhores estratégias;

- utilizar atividades que envolvam dois ou mais alunos, para oportunizar a interação social;
- estabelecer regras, que podem ou não ser modificadas no decorrer de uma rodada;
- trabalhar a frustração pela derrota na criança, no sentido de minimizá-la;
- estudar o jogo antes de aplicá-lo (o que só é possível, jogando).

Muitos ouvimos falar e falamos em vincular teoria à prática, mas quase não o fazemos. Utilizar jogos como recurso didático é uma chance que temos de fazê-lo. Eles podem ser usados na classe como um prolongamento da prática habitual da aula. São recursos interessantes e eficientes, que auxiliam os alunos.

Miguel de Guzmán, 1986, expressa muito bem o sentido que essa atividade tem na educação matemática: "O interesse dos jogos na educação não é apenas divertir, mas sim extrair dessa atividade matérias suficientes para gerar um conhecimento, interessar e fazer com que os estudantes pensem com certa motivação".

2 Fundamentação Teórica

O nosso objeto de estudo neste trabalho é o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Porém, iremos nos fundamentar no conjunto dos números inteiros, formado pelo zero e todos os valores cujo módulo é natural, representado por

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Além do mais, descreveremos sobre quatro conceitos fundamentais, que aparecerão em destaque durante este trabalho: Divisibilidade, Números Primos, Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum, assim como a relação existente entre eles. Como veremos ao longo de todo este capítulo.

2.1 Divisibilidade

Antes das definições sobre divisibilidade, gostaráamos de enunciar uma propriedade fundamental dos números naturais que utilizaremos ao longo deste capítulo, é o princípio da boa ordenação, que afirma o seguinte:

Axioma 2.1. Princípio da Boa Ordenação: *todo subconjunto não vazio $B \subseteq \mathbb{N}$ possui um elemento menor que todos os outros elementos deste, ou seja, existe $b \in B$ tal que $b \leq n$ para todo $n \in B$.*

Por exemplo, se B é o conjunto dos números ímpares, o menor elemento de B é o número 1. Por outro lado, observamos que o conjunto dos números inteiros não gozam da boa ordenação.

O princípio da boa ordenação parece ser inocente e natural, mas muitos dos importantes resultados a respeito dos números naturais procedem do mesmo.

Definição 2.1. *Se x e y são inteiros, dizemos que x divide y, da qual denotaremos por $x \mid y$, se existir um inteiro z tal que $y = x \cdot z$.*

Se x não divide y escreveremos $x \nmid y$.

Exemplo 2.1. a) 3 divide 15, pois existe $z = 5$ tal que $15 = 3 \cdot 5$

b) 4 não divide 9, pois não existe um z tal que $9 = 4 \cdot z$.

Existem outras linguagens para expressar a relação de divisibilidade $x \mid y$. Podemos dizer:

- x é um divisor de y;
- x é um fator de y;
- y é múltiplo de x.

Proposição 2.1. *Se x, y e z são inteiros, $x \mid y$ e $y \mid z$, então $x \mid z$.*

Demonstração. Como $x \mid y$ e $y \mid z$, existem inteiros q e t com $y = q \cdot x$ e $z = t \cdot y$. Substituindo o valor de y na equação $z = t \cdot y$, encontraremos $z = t \cdot q \cdot x$ que implica $x \mid z$. □

Exemplo 2.2. Temos que $4 \mid 8$ e $8 \mid 32$, logo $4 \mid 32$. Por outro lado, não existe z tal que $14 = 5 \cdot z$, logo $5 \nmid 14$.

Proposição 2.2. *Se x, y, z, m e n são inteiros,$z \mid x$ e $z \mid y$ então $z \mid (m \cdot x + n \cdot y)$.*

Demonstração. Se $z \mid x$ e $z \mid y$ implica que $x = q \cdot z$ e $y = t \cdot z$. Multiplicando-se estas duas equações respectivamente por m e n, encontraremos $m \cdot x = m \cdot q \cdot z$ e $n \cdot y = n \cdot t \cdot z$. Somando essas equações, membro a membro, obtemos $m \cdot x + n \cdot y = (m \cdot q + n \cdot t) \cdot z$, o que nos diz que $z \mid (m \cdot x + n \cdot y)$. □

Exemplo 2.3. Temos que $4 \mid 12$ e $4 \mid 28$, logo $3 \mid (6 \cdot 12 + 5 \cdot 28)$.

Teorema 2.1. *A divisão tem as seguintes propriedades:*

i) $m \mid m$

ii) $w \mid m \Rightarrow x \cdot w \mid x \cdot m,\ x \neq 0$

iii) $x \cdot w \mid x \cdot m$ *e* $x \neq 0 \Rightarrow w \mid m$

iv) $1 \mid m$

v) $m \mid 0$

vi) $w \mid m$ *e* $m \neq 0 \Rightarrow |w| \leq |m|$

vii) $w \mid m$ *e* $m \mid w \Rightarrow |w| = |m|$

viii) $w \mid m$ *e* $w \neq 0 \Rightarrow (m/w) \mid m$.

Demonstração. i) Como $m = 1 \cdot m$ da definição segue que $m \mid m$, inclusive para $m = 0$. ii) Se $w \mid m$, logo $m = y \cdot w$ para algum y inteiro. Logo $x \cdot m = y \cdot x \cdot w$ o que conclui a demonstração. iii) Se $x \cdot w \mid x \cdot m$, então $x \cdot m = y \cdot x \cdot m$ para algum y inteiro. Como $x \neq 0$. Dividido ambos os membros por x logo $m = y \cdot w$ o que demonstra o item.

Agora, demonstraremos viii). Se $w \mid m$ implica $m = q \cdot w$ e portanto m/w é um inteiro. Como $(m/w) \cdot w = m$ da definição temos que $(m/w) \mid m$. Os itens iv), v), vi) e vii) são consequência imediata da definição e não iremos demonstrá-las. □

E, para finalizar este tópico, o teorema a seguir nos diz o que acontece no caso geral da divisão de um inteiro b por um inteiro positivo a.

Teorema 2.2. *(Divisão Euclidiana). Sejam a e b dois números inteiros com $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que $b = a \cdot q + r$; com $0 \leq r < a$.*

Se $a \nmid b$, então r satisfaz a desigualdade estrita $0 < r < a$

Demonstração. Para simplificar, suponhamos que b positivo. Se $b < a$, devemos tomar $q = 0$ e $r = b$. Se $b = a$, então tomamos $q = 1$ e $r = 0$. Com isso, garantiremos que $b > a > 0$. Agora, consideremos o conjunto

$$K = \{b - aq \in Z; b - aq \geq 0\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{2.1}$$

Notemos que o conjunto K é não vazio, pois $b - a \in K$, já que $b - a > 0$. Dessa forma, pelo princípio da boa ordenação, temos que K admite um menor elemento, que denotaremos por r. Claramente $r = b - aq \geq 0$, para algum $q \geq 0$. Além disso, $r < a$ pois, caso contrário,

$$r = b - aq \geq a \Rightarrow b - a(q + 1) \geq 0 \tag{2.2}$$

Por outro lado,

$$a > 0 \Rightarrow b - a(q + 1) < b - aq. \tag{2.3}$$

Das desigualdades (2.2) e (2.3), segue que

$$0 \leq b - a(q + 1) < b - aq,$$

contradizendo o fato de que $r = b - aq$ é o menor elemento não negativo de K.

Agora, provaremos que, de fato, que r e q, escolhidos desta forma, são únicos. Com efeito, suponhamos que existem outros inteiros r_1 e q_1, tais que

$$b = aq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < a.$$

Então, resulta que $aq + r = aq_1 + r_1$. Logo,

$$(r - r_1) = (q_1 - q)a; \tag{2.4}$$

sendo assim, $r - r_1$ é múltiplo de a. Mas, em virtude de $-a < r - r_1 < a$, o único valor que $r - r_1$ pode tomar, sendo este múltiplo de a, é $r - r_1 = 0$. Potanto, $r = r_1$, de onde deduz diretamente de (2.4) que $q = q_1$. $\square$

Observação 2.1. Os números q e r no enuciado do teorema acima são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

2.2 Números Primos e Compostos

Definição 2.2. *Dizemos que um número inteiro positivo n maior que 1 é primo se, e somente se, n possui exatamente dois divisores positivos distintos, o* 1 *e o próprio* n*; e, se o inteiro* n *admite outros divisores além de* 1 *e* n*, o mesmo é chamado de composto.*

Observação 2.2. De modo geral, o número 1 não é considerado nem primo e nem composto.

Exemplo 2.4. Os números $2, 3, 5, 7, 11$ e 13 são primos e os números $4, 6, 8, 9, 10, 15$ e 174 são compostos.

Proposição 2.3. *Seja* $n > 1$ *um número inteiro. Então*

a) o menor divisor de n *diferente de* 1 *é um número primo;*

b) se n *é composto, o seu menor divisor diferente de* 1 *não é maior que* $\sqrt{n}$*. Ou melhor, se* n *não possui divisores diferentes de* 1*, menores ou igual que* $\sqrt{n}$*, então* n *é primo.*

Demonstração. Ininiciremos com a prova de a). Seja p o menor divisor de n, diferente de 1. Se p fosse composto, teria algum divisor q tal que $1 < q < p$; mas

$$q \mid p \text{ e } p \mid n,$$

o que nos diz que $q \mid n$, isto contradiz a hipótese levantada em p.

Na prova de b) denotaremos por p o menor divisor de n, diferente de 1. Logo, $n = pq$ com $q \geq p$, multiplicando ambos lados da desigualdade por p, obteremos

$$n = pq \geq p^2,$$

e, consequentemente, vale $\sqrt{n} \geq p$. □

Proposição 2.4. *Um número inteiro positivo p é primo. Então, satisfaz a seguinte propriedade:*

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \ ou \ p \mid b$$

onde $a, b \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Suponhamos que, p primo, se $p \nmid a$, então $(p, a) = 1$, o que implica que $p \mid b$. □

2.3 Máximo Divisor Comum

Dados dois ou mais números naturais não nulos, denomina-se máximo divisor comum (MDC) o maior número que é divisor de todos eles.

Entenda, por divisor, um número natural não nulo, que, ao dividir um outro número natural, produz uma divisão com resto igual a zero, isto é, produz uma divisão exata.

Com este sentido, o conjunto dos números formados pelos divisores de um número natural qualquer é um conjunto finito.

Caso o número 1 seja o único divisor comum a um conjunto de números naturais, dizemos que os números deste conjunto são primos entre si.

A fatoração de um número inteiro em um produto de primos evidencia os seus divisores. Dois ou mais números inteiros têm, pelo menos, um divisor positivo comum (o número 1). Se esses números inteiros apresentam fatores primos em comum nas suas fatorações, então eles terão outros divisores comuns além do número 1. Dos divisores comuns, um deles merece atenção especial: o Máximo Divisor Comum.

Exemplo 2.5. Observando que $10 = 2.5$ e $15 = 3.5$ temos que máximo divisor comum de 10 e 15 é igual a 5, da qual denotaremos como $mdc(10, 15) = 5$ ou simplemente por $(10, 15) = 5$.

Na definição 2.1, existe a restrição de que o divisor seja diferente de zero. Quando escrevemos a notação $x \mid y$, fica entendido, de agora em diante, que $x \neq 0$.

Exemplo 2.6. Mostre que se x divide y então $-x$ também divide y.

Demonstração. De fato:

$$x \mid y \iff \exists \text{ z} \in \mathbb{Z}; \text{ y} = \text{x.z} \iff y = (-x).(-z) \iff -x \mid y.$$

□

De posse do exemplo 2.6, concluímos que os divisores de todo inteiro ocorre em pares. Assim, para obter os divisores de um inteiro, basta procurarmos os divisores positivos e, então, adicionamos a eles os correspondentes inteiros negativos.

Por esta razão, daqui por diante, iremos limitar nossas considerações aos divisores positivos dos números.

Agora, será desenvolvida a teoria sobre Máximo Divisor Comum (M.D.C), que é um caso significante do Algoritmo da Divisão onde o resto é zero.

Definição 2.3. *Se a e b são inteiros arbitrários, então um inteiro d é dito um* **divisor comum** *de a e b se $d \mid a$ e $d \mid b$.*

Como 1 é um divisor de qualquer inteiro, então 1 é divisor comum de a e b. Assim, o conjunto dos divisores comuns é não vazio.

Como todo inteiro divide o zero e se $a = b = 0$, então todo inteiro serve como divisor comum de a e b. Nesse caso, o conjunto dos inteiros que são divisores de a e b é infinito.

Entretanto, se pelo menos um dos divisores de a e b é diferente de zero, existe somente um número finito de divisores comuns. Assim, existe o maior deles, chamado o maior divisor comum entre a e b. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.4. *Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito o* **Máximo Divisor Comum** *de a e b, denotado por mdc(a, b) ou (a, b), se possui as seguinte propriedades:*

i) d é um divisor comum de a e b, ou seja, $d \mid a$ e $d \mid b$;

ii) Se c é tal que $c \mid a$ e $c \mid b$ então $c \leq d$.

Essa é, basicamente, a definição dada por Euclides e se constitui em um dos pilares de sua aritmética.

Podemos afirmar que o número natural d é um máximo divisor comum de a e b (donde, a partir de agora, utilizaremos como (a, b)), não simultaneamente nulos, se possuir as propriedades a seguir:

- c é um divisor comum de a e de b;
- c é divisível por todo divisor comum de a e de b, ou seja, se d é um divisor comum de a e de b, então d divide c;
- Propriedade Fundamental do mdc: todo divisor comum de dois ou mais números inteiros é divisor do m.d.c. destes números;
- Dizemos que dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, $(a, b) = 1$;
- se p é primo, então
$$(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad p \nmid a, \\ p, & \text{se} \quad p \mid a. \end{cases}$$
- Se a divide c, então (a,b) divide (c,b);
- Se (a,b) = 1, então (ac,b) = (c,b);
- O Lema de Euclides diz que: sejam a, b, n pertencentes aos Inteiros. Se existe (a,b − na), então (a,b) existe e (a,b) = (a,b − na);
- Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros n e m tais que na + mb = 1.

Proposição 2.5. *Sejam a e b dois inteiros. Então valem as seguintes afirmações.*

i) Se a é múltiplo de b, então $(a, b) = b$.

ii) Se $a = bq + c, c \neq 0$, então o conjunto dos divisores comuns dos números a e b coincide com o conjunto de todos divisores comuns dos números b e c. Particularmente, $(a, b) = (b, c)$.

Demonstração. Iniciaremos a demonstração com a prova de i). Com efeito, todo divisor comum dos números a e b é um divisor de b.

Reciprocamente, usando que a é múltiplo de b, todo divisor de b é também um divisor de a, ou seja, um divisor comum dos números a e b. Portanto, o conjunto dos divisores comuns dos números a e b é igual ao conjunto dos divisores de b. Como o maior divisor de b é ele mesmo, resulta que $(a, b) = b$.

Por fim, a demonstração de b). Utilizando o fato de se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (b + c)$ e $a \mid (b - c)$, para a, b e c números inteiros, logo temos que todo divisor comum de a e b também divide c e, consequentemente, é um divisor de b e c. Pela mesma razão, todo divisor comum de b e c também divide a e, por consequência, é um divisor de a e b. Portanto, os divisores comuns de a e b são os mesmos que os divisores comuns de b e c. Particularmente, também coincidem os maiores divisores comuns, ou seja, $(a, b) = (b, c)$. □

Teorema 2.3. *(Teorema de Bachet-Bézout) Seja d o máximo divisor comum de a e b, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = x_0a + y_0b$.*

Demonstração. Seja M o conjunto de todos as combinações lineares $xa + yb$ onde x e y são inteiros. Este conjunto de inteiros, inclui valores positivos e negativos. Além disso, escolhendo $x = y = 0$, vemos que M contém o zero. Vamos escolher x_0 e y_0 tais que $c = x_0a + y_0b$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto M. Vamos provar que $c \mid a$ e $c \mid b$. Como as demonstraçções são similares, mostraremos apenas que $c \mid a$. A prova é por contradição. Suponhamos que $c \nmid a$. Neste caso, pelo Teorema 2.2, existem q e r tais que $a = qc + r$ com $0 < r < c$. Portanto $r = a - qc = a - q(x_0a + y_0b) = (1 - qx_0)a + (-qy_0b)b$. Isto mostra que $r \in M$, pois $(1 - qx_0)$ e$(-qy_0)$ são inteiros, o que é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ e c é o menor elemento positivo de M. Logo, $c \mid a$ e de forma analóga se prova que $c \mid b$.

Como d é um divisor comum de a e b, existem inteiros t_1 e t_2 tais que $a = t_1d$ e $b = t_2d$ e, portanto $c = x_0a + y_0b = x_0t_1d + y_0t_2d = d(x_0t_1 + y_0t_2)$, o que implica $d \mid c$. Do Teorema 2.1(vi), temos que $d \leq c$ (ambos são positivos) e como $d < c$ não é possível, uma vez que d é o máximo divisor comum, concluimos que $d = x_0a + y_0b$. □

Proposição 2.6. *Sejam d,$t \in \mathbb{N}$. Então, valem as seguintes afirmações:*

a) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (a, b)$.

b) O (a, b) é o menor valor positivo de $ax + by$, onde x e y percorrem todos os números inteiros.

c) $(ta, tb) = t(a, b)$.

d) Se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = \frac{1}{d}(a, b)$. Consequentemente, $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = 1$.

e) Se $(a, c) = (b, c) = 1$, então $(ab, c) = 1$

f) Se $c \mid ab$ e $(b,c)=1$, então $c \mid a$.

Demonstração. A prova de $a)$ é consequência imediata da igualdade $(a,b)=ax_0+by_0$ anuciada no Teorema 2.3; assim como $b)$ segue diretamente da demonstração dada a este teorema.

Para provar $c)$, inicialmente, observamos que

$$(ta)x+(tb)y=t(ax+by) \text{ onde } x,y\in\mathbb{Z}.$$

Usando o item $a)$ e o fato de t ser positivo, de igualdade acima segue que

$$(ta,tb)=min\{(ta)x+(b)y>0; x,y\in\mathbb{Z}\}$$

$$=min\{ax+by; x,y\in\mathbb{Z}\}$$

$$=(a,b).$$

A afirmação feita em $d)$ segue diretamente de $c)$, observando que

$$(a,b)=(d\tfrac{a}{d},d\tfrac{b}{d})=d(\tfrac{a}{d},\tfrac{b}{d}).$$

Continuamos com a prova de $e)$. de $(a,c)=(b,c)=1$, temos que existem inteiros x_k e y_k, $k=1,2$, tais que

$$ax_1+cy_1=1,$$

$$bx_2+cy_2=1.$$

Multiplicando lado a lado as igualdades, obtemos

$$(x_1x_2)ab+(ax_1y_2+y_1bx_2+cy_1y_2)c=1.$$

Então, usando o item $b)$ e a igualdade acima, resulta que $(ab,c)=1$.

Finalmente, provaremas $f)$. Das hipóteses, temos que existem inteiros x_0 e y_0 tais que

$$bx_0+cy_0=1$$

Multiplicando a igualdade acima por a em ambos lados para obtermos

$$abx_0+acy_0=a.$$

Por outro lado, $ab=cq$ para algum inteiro q. Usando esta condição na últiima igualdade, temos que

$$cqx_0+acy_0=c(qx_0+ay_0)=a,$$

logo $c \mid a$. $\square$

2.3.1 Método para encontrar o mdc

Até aqui conhecemos algumas propriedades teóricas do mdc entre dois números; encontrá-lo de fato pode ser uma tarefa complicada, se não tivermos de posse das ferramentas corretas. Por isso, nesse tópico, iremos descrever 2 deles: o método da divisão sucessiva e a decomposição em fatores primos.

Método da divisão sucessiva

Também conhecida como *Algoritmo de Euclides.*

Teorema 2.4. *Dados dois inteiros positivos, a e b, aplicamos sucessivamente a divisão euclidiana para obter a sequência de igualdades*

$$\begin{aligned} b &= aq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < a \\ a &= r_1q_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}, \end{aligned}$$

até algum r_n dividir r_{n-1}. Assim, o $mdc(a,b) = r_n$, ou seja, é o último resto não-nulo no processo de divisão anterior.

Demonstração. Começamos observando que o processo da divisão euclidiana é finita. Com efeito, a sequência de números inteirs r_k é estritamente decrescente e está contida no conjunto $\{r \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < a\}$, portanto não pode conter mais do que a inteiros positivos. Examinando as igualdades da divisão euclidiana de cima para baixo e, usando a Proposição 2.5, temos que

$$(a,b) = (a,r_1) = (r_1,r_2) = \cdots = (r_{n-1},r_n) = r_n.$$

□

Observação 2.3. Quando lidamos com números pequenos, achar o mdc é uma tarefa fácil, pois podemos calcular o mdc valendo-nos das fatorações dos números envolvidos. No entanto, quando estamos trabalhando com números grandes, o algoritmo de Euclides, em geral, é mais fácil que a fatoração, podendo ser esta última bem difícil.

Observação 2.4. Perceba que o teorema de Bézout também pode ser obtido como consequência do processo de divisão euclidiana. Com efeito, podemos escrever

$$r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$$

Exemplo 2.7. Achar o máximo divisor comum dos números 522 e 1126.

Solução:

Aplicando o algoritmo de Euclides, obtemos a seguinte sequência de divisões com resto:

$$1126 = 2 \cdot 522 + 82$$
$$522 = 6 \cdot 82 + 30$$
$$82 = 2 \cdot 30 + 22$$
$$30 = 1 \cdot 22 + 8$$
$$22 = 2 \cdot 8 + 6$$
$$8 = 1 \cdot 6 + 2$$
$$6 = 3 \cdot 2 + 0,$$

então o $mdc(522, 1126) = 2$.

Método da decomposição em fatores primos

A decomposição de um número natural em um produto de fatores primos é chamada de fatoração.

Para realizarmos a decomposição de um número em fatores primos, devemos procurar pelo menor número primo capaz de dividí-lo (divisão exata) e realizarmos a sua divisão por este número enquanto for possível. Depois, devemos procurar pelo próximo número primo capaz de dividí-lo e continuar neste procedimento até que o quociente da divisão resulte em 1. Neste momento, teremos todos os fatores primos que compõe tal número.

O máximo divisor comum (mdc) entre dois números naturais é obtido a partir da interseção dos divisores naturais, escolhendo-se a maior. O mdc pode ser calculado pelo produto dos fatores primos que são comuns, tomando-se sempre o de menor expoente. Para melhor entendimento, mostraremos agora o método para encontrar o *mdc* entre dois números, através de um exemplo.

Exemplo 2.8. Veja como se pode encontrar o *mdc* de 120 e 36 pelo método da fatoração.

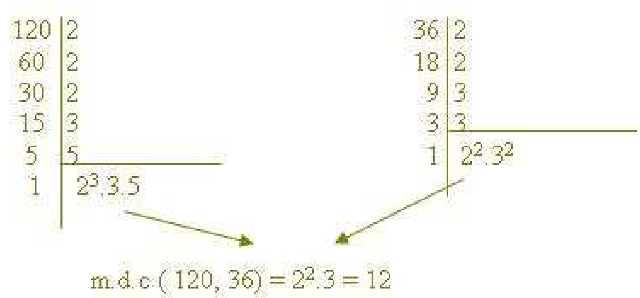


Figura 2.1: Cálculo do mdc de 120 e 36

Fonte: Arquivo Pessoal

2.4 Mínimo Múltiplo Comum

Dados dois ou mais números naturais não nulos, denomina-se mínimo múltiplo comum (MMC) o menor dos seus múltiplos que é comum a todos eles, com exceção do número zero, pois este é menor dos números naturais e é múltiplo de todos eles.

Os múltiplos de um número natural são todos aqueles que divididos por este número têm zero como o resto da divisão. Por exemplo, 0, 4, 8 e 12 são todos múltiplos de 4, pois qualquer um deles pode dividido por 4 em uma divisão exata. Neste caso, o quociente da divisão seria, respectivamente, 0, 1, 2 e 3. Percebe-se, portanto, que os múltiplos de um número natural são o resultado do produto deste número por um outro número natural.

Já que o conjunto dos números naturais é um conjunto infinito, os múltiplos de um número também são infinitos.

Por definição, múltiplo é um número inteiro cuja divisão por outro número inteiro não deixa resto, ou seja, podemos interpretar o múltiplo de um número como o dividendo de uma divisão de inteiros com resto zero. Verifica-se facilmente que dois ou mais números inteiros tem infinitos múltiplos comuns. Dentre esses infinitos múltiplos comuns, um deles merece destaque: o Mínimo Múltiplo Comum.

Exemplo 2.9. Tomemos, por exemplo, os números naturais, 8 e 12. Seus múltiplos são respectivamente:
$\{0, 8, 16, 24, 32, 40, ...\}$
$\{0, 12, 24, 36, 48, 60, ...\}$
Podemos notar que, com exceção do número 0, o número 24 é o menor dos múltiplos comum a todos eles.
Temos, então, que:
$mmc(8, 12) = 24$

Definição 2.5. *Sejam a e b inteiros diferentes de zero. O mínimo múltiplo comum, resumidamente mmc, entre a e b é o inteiro positivo m que satisfaz as seguintes condições:*

a) m é um múltiplo comum de a e b, isto é, $a \mid m$ e $b \mid m$;

b) se $a \mid c$ e $b \mid c$ então $m \leq c$.

Neste caso, denotaremos o mmc entre a e b por $m = mmc[a, b]$ ou por $m = [a, b]$.

De forma resumida, apresentaremos algumas das principais propriedades do mmc de dois números.

Proposição 2.7. *Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$ e $t \in \mathbb{Z}$. Então, valem as seguintes afirmações:*

a) se c é múltiplo comum de a e b, então $[a, b] \mid c$;

b) $[ta, tb] = t[a, b]$;

c) $|ab| = [a, b] \cdot (a, b)$.

Demonstração. Iniciaremos com a prova de a). A divisão com resto de c por $[a, b]$ nos dá

$$c = [a, b]q + r, 0 \leq r < [a, b]. \tag{2.5}$$

Da igualdade anterior, basta provar que $r = 0$ para obter o resultado desejado. Suponhamos, pelo contrário, que $0 < r < [a, b]$. Notemos que tanto a como b dividem c e $[a, b]$. Logo, se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (b + c)$ e a $a \mid (b - c)$ e a igualdade 2.5, temos que a e b também dividem r, ou seja, r é múltiplo comum de a e b e não pode ser menor que $[a, b]$, contradizendo nossa suposição.

Prosseguimos com a prova de b). Observemos que $t[a, b]$ é múltiplo comum de ta e tb, logo pelo item a) vale que

$$[ta, tb] \leq t[a, b]. \tag{2.6}$$

Por outro lado, $[ta, tb] = q_1ta = r_2tb$, para alguns inteiros q_1 e q_2; logo, $\frac{[ta,tb]}{t}$ é um múltiplo comum de a e b. Portanto,

$$[a, b] \leq \frac{[ta, tb]}{t} \Leftrightarrow t[a, b] \leq [ta, tb]. \tag{2.7}$$

Das igualdades 2.6 e 2.7, segue que

$$t[a, b] \leq [ta, tb] \leq t[a, b],$$

de onde vem diretamente o resultado.

Para provar c) podemos supor sem perda de generalidade que a e b são positivos devido às igualdades

$$[a, b] = [a, -b] = [-a, b] = [-a, -b].$$

Dividiremos a prova em dois casos:

caso 1: $(a, b) = 1$.

Sabemos que $b \mid [a, b]$ e $[a, b] = qa$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Então, $b \mid qa$ e, além disso, $(a, b) = 1$. Logo, pelo item (e) da Proposição 2.6 temos que $b \mid q$. Portanto, $b \leq q$ e, consequentemente,

$$ab \leq aq = [a, b]. \tag{2.8}$$

Entretanto, da definição de $[a, b]$ vale que

$$[a, b] \leq ab. \tag{2.9}$$

Das desigualdades 2.8 e 2.9, segue que $ab \leq [a, b] \leq ab$. Assim, $ab = [a, b] \cdot 1 = [a, b] \cdot (a, b)$.

caso 2: $(a, b) > 1$.

Da parte c) da Proposição 2.6, sabemos que $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = 1$.

Aplicando o caso anterior, vale que

$$\frac{a}{(a,b)} \cdot \frac{b}{(a,b)} = [\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}] \cdot (\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}).$$

Multiplicando esta última igualdade por $(a,b)^2$ e usamos o item $b)$ provado anteriormente, assim como a parte $d)$ da Proposição 2.6 para obter

$$ab = (a,b)[\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}](a,b)(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = [a,b] \cdot (a,b).$$

□

Observação 2.5. Devemos lembrar que o item $c)$ da Proposição 2.7 é válida apenas para o mmc/mdc entre exatamente dois números. Para três números ou mais, esta propriedade não se verifica.

2.4.1 Método para encontrar o mmc

Assim como no mdc, conhecemos aqui algumas propriedades teóricas do mmc entre dois números, encontrá-lo de fato pode ser uma tarefa complicada, se não tivermos de posse das ferramentas corretas. Por isso, nesse tópico, iremos descrever uma maneira de encontrá-lo, que é a decomposição em fatores primos.

Decomposição em fatores primos

Mostraremos o método com a resolução de um exemplo.

Exemplo 2.10. Veja como se encontra o mmc de 40 e 56 pelo método da fatoração.

Solução:

40 , 56	2
20 , 28	2
10 , 14	2
5 , 7	5
1 , 7	7
1 , 1	

Figura 2.2: Cálculo do mmc de 40 e 56

Fonte: Arquivo Pessoal

Logo, mmc de 40 e 56 é dado pelo produto da fatoração, ou seja, $mmc(40,56) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 280$.

3 Desenvolvimento Metodológico

Neste capítulo, conheceremos o espaço, o público alvo, a metodologia utilizada em cada uma das oficinas aplicadas.

3.1 Ambiente Escolar

A aplicação das oficinas ocorreu na Escola Municipal Monsenhor Deusdedit Craveiro de Melo-CAIC, situada à Rua Benedito Avelino, S/N Bairro: Cidade Nova, em José de Freitas-PI. Por se localizada na periferia da cidade, a escola dispõe de uma variada clientela compondo o corpo discente da escola.

Esta fase teve início com visita à escola, onde fomos recebidos pelo diretor, que apresentou o espaço físico e relatou o processo de funcionamento da escola. A proposta do trabalho foi apresentada à direção da escola, ao professor de matemática e aos alunos envolvidos no trabalho. Esta etapa da pesquisa teve como objetivo solicitar a autorização para realizar a aplicação do trabalho com os alunos da escola.

A escola tem 710 alunos matriculados num total de 27 turmas de ensino fundamental, sendo 17 turmas no turno da manhã (1º ao 5º ano) e outras 10 turmas no turno da tarde (6º ao 9º ano).

A escola possui o Projeto Político Pedagógico (PPP), que vem sendo atualizado anualmente. A gestão da escola é composta por um diretor, um vice-diretor, duas coordenadoras pedágogicas e uma coordenadora do projeto Mais Educação. O acesso é facilitado entre os atores que compõem a unidade escolar, e o diálogo acontece de maneira cordial, porém há necessidade constante da equipe estabelecer, com os alunos, limites e regras de convivência pautadas na parceria e no respeito, com vistas ao bem estar da comunidade.

3.2 Público-Alvo

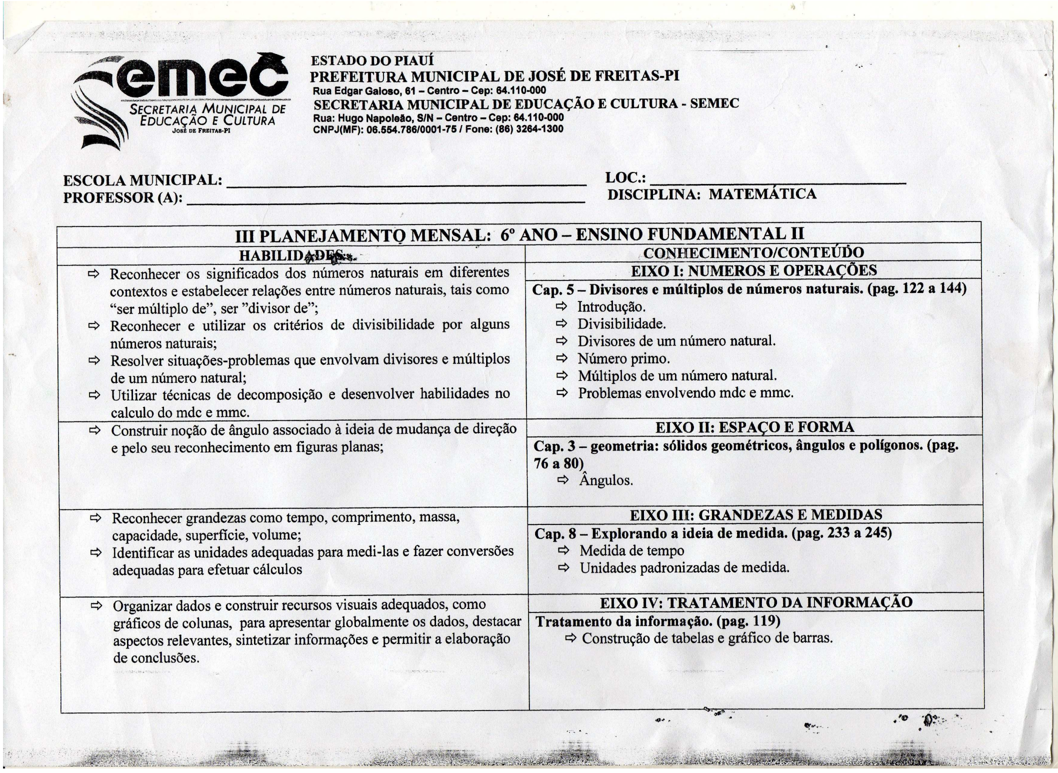
O trabalho de interferência foi aplicado nas turmas do 6º ano A e B, turno vespertino, nos horários das aulas de Matemática, sendo o 6ºano A com 30 alunos e o B com 29. Escolhemos trabalhar com os alunos do 6º ano, devido ao conteúdo mmc e mdc, o nosso objeto de estudo, está presente na grade curricular desta série do ensino fundamental.

Na primeira semana, fomos às salas de aula para conhecer o ambiente e planejar as aulas para a aplicação das oficinas. Neste primeiro momento, pudemos observar que os alunos correspondem a energia da idade, com muita agitação e que as aulas pareciam enfadonhas apenas com o livro didático e a exposição no quadro de acrílico. Outro aspecto que deve ser considerado é a falta de conhecimento sobre os conteúdos em geral, provavelmente motivada pelo desinteresse ou pouca expectativa em relação ao que está se buscando.

Durante a observação nas turmas e em conversas com os demais professores, percebemos, e confirmamos, que a turma do 6ºB era bem melhor em relação à diciplina, à atenção, e, consequentemente, isso refletia no resultado das avaliações quantitativas, o que fazia com que essa turma tivesse notas bem melhores em relação ao 6ºA. Então, por esses motivos, optamos por trabalhar as oficinas com os alunos da turma do 6ºA, com a intenção de motivá-los no processo de ensino-aprendizagem.

3.3 Metodologia aplicada

A metodologia utilizada foi executada em 6 encontros, a príncipio, se deu de forma tradicional, em que os conceitos, as definições e as expressões foram expostas no quadro pelo professor titular da turma, que segue a orientação da Secretaria Municipal, como veremos no planejamento mensal a seguir:



ESTADO DO PIAUÍ
PREFEITURA MUNICIPAL DE JOSÉ DE FREITAS-PI
Rua Edgar Galoso, 61 – Centro – Cep: 64.110-000
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA - SEMEC
Rua: Hugo Napoleão, S/N – Centro – Cep: 64.110-000
CNPJ(MF): 06.554.786/0001-75 / Fone: (86) 3264-1300

semec
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO E CULTURA
JOSÉ DE FREITAS-PI

ESCOLA MUNICIPAL: ____________ LOC.: ____________
PROFESSOR (A): ____________ DISCIPLINA: MATEMÁTICA

III PLANEJAMENTO MENSAL: 6º ANO – ENSINO FUNDAMENTAL II

HABILIDADES	CONHECIMENTO/CONTEÚDO
⇨ Reconhecer os significados dos números naturais em diferentes contextos e estabelecer relações entre números naturais, tais como "ser múltiplo de", ser "divisor de"; ⇨ Reconhecer e utilizar os critérios de divisibilidade por alguns números naturais; ⇨ Resolver situações-problemas que envolvam divisores e múltiplos de um número natural; ⇨ Utilizar técnicas de decomposição e desenvolver habilidades no calculo do mdc e mmc.	**EIXO I: NUMEROS E OPERAÇÕES** **Cap. 5 – Divisores e múltiplos de números naturais. (pag. 122 a 144)** ⇨ Introdução. ⇨ Divisibilidade. ⇨ Divisores de um número natural. ⇨ Número primo. ⇨ Múltiplos de um número natural. ⇨ Problemas envolvendo mdc e mmc.
⇨ Construir noção de ângulo associado à ideia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas;	**EIXO II: ESPAÇO E FORMA** **Cap. 3 – geometria: sólidos geométricos, ângulos e polígonos. (pag. 76 a 80)** ⇨ Ângulos.
⇨ Reconhecer grandezas como tempo, comprimento, massa, capacidade, superfície, volume; ⇨ Identificar as unidades adequadas para medi-las e fazer conversões adequadas para efetuar cálculos	**EIXO III: GRANDEZAS E MEDIDAS** **Cap. 8 – Explorando a ideia de medida. (pag. 233 a 245)** ⇨ Medida de tempo ⇨ Unidades padronizadas de medida.
⇨ Organizar dados e construir recursos visuais adequados, como gráficos de colunas, para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de conclusões.	**EIXO IV: TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** **Tratamento da informação. (pag. 119)** ⇨ Construção de tabelas e gráfico de barras.

Figura 3.1: Plano mensal elaborado pelo Município
Fonte: Secretaria Municipal de Educação

No dia 30/06, em nosso segundo encontro, com o objetivo de conhecer e investigar possíveis conhecimentos dos participantes sobre os assuntos Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Maior Divisor Comum (MDC), foi aplicado, nas duas turmas um pré-teste com 10 questões em forma de situações-problema, que exigiam do aluno tanto uma interpretação matemática, quanto, para encontrar a solução, o domínio dos conceitos ministrados anteriormente.

Figura 3.2: Aplicação do pré-teste 6ºA
Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 3.3: Aplicação do pré-teste 6ºB
Fonte: Arquivo Pessoal

Nas aulas, após a aplicação do pré-teste, enquanto o professor regente das turmas ministrava suas aulas normais no 6º ano B, apresentamos a nossa forma de trabalhar o conteúdo mmc e mdc, apenas na turma do 6º ano A; o que aconteceu em nosso terceiro, 01/07, momento em que iniciamos nossa primeira oficina: o tabuleiro de mmc e mdc, que já teve um impacto visual logo de início, pois deixamos os alunos manuseá-lo sem definirmos, ainda, o devido fim.

Figura 3.4: Alunos Manuseando o Tabuleiro

Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 3.5: Produção dos alunos no Tabuleiro

Fonte: Arquivo Pessoal

Em seguinda, pedimos aos alunos que retornassem aos seus lugares. Daí, explicamos que a real função do tabuleiro, era calcular geometricamente o valor do mmc e mdc de dois números sem a necessidade de cálculo. Neste momento, em conjunto com os alunos, foi feito o cálculo do mmc e mdc dos números 6 e 9.

Inicialmente, pedimos a um aluno que construísse (elástico vermelho) no tabuleiro um retângulo de dimensões 6 por 9. Depois, solicitamos a um segundo aluno que traçasse (elástico verde) uma das diagonais; em seguida, pedimos a todos que observassem em quantas partes iguais ficou dividida a diagonal, e que o total de partes seria o mdc de 6 e 9. Observou-se que a maioria dos alunos percebeu que a forma estava dividida em três partes, donde conclui-se que o $mdc(6, 9) = 3$.

Para encontramos o mmc, outro aluno traçou (elástico lilás) linhas verticais passando pelos pontos que dividiram a diagonal em partes iguais, unindo os lados opostos do retângulo. Percebeu-se que a figura ficou dividida em três retângulos menores, e, mais uma vez, solicitamos que contassem o total de quadradinhos que aparecia em cada um destes retângulos, e que este total representaria o mmc de 6 e 9. Imediatamente, perceberam que em cada um dos retângulo menores havia 18 quadradinhos; logo, concluíram que o $mmc(6, 9) = 18$.

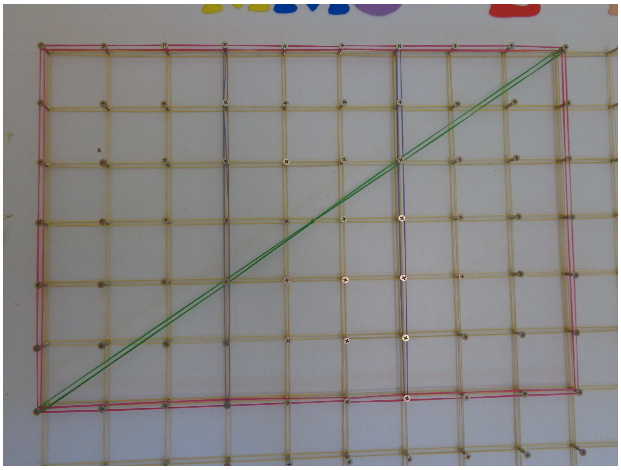


Figura 3.6: Cálculo do mmc e mdc do 6 e do 9
Fonte: Arquivo Pessoal

Após termos encontrado o mdc e o mmc de 6 e 9, fizemos a generalização do método para encontramos o mmc e mdc de dois números a e b.

Vejamos o Procedimento:

- Construa um retângulo de lados medindo a e b, sendo a e b números inteiros, dividido em quadradinhos unitários. Marque os pontos que são vértices de algum quadradinho unitário. Faça a contagem de quantas partes esses pontos dividem a diagonal. O número encontrado é o $mdc(a, b)$.

- Trace linhas verticais (horizontais), passando em cada ponto marcado, unindo os lados oposto do retângulo. O número de quadradinhos existentes em qualquer um dos retângulos determinados é $mmc(a, b)$.

Dando prosseguimento a aula, solicitamos ao alunos que encontrassem o mdc e o mmc dos números a = 10 e b = 15.

Para resolução, escolhemos três alunos: um para construir o retângulo, outro para traçar a diagonal e o terceiro para colocar as linhas verticais(horizontais). Mesmo de posse da figura no tabuleiro, uma parte dos alunos ainda tiveram dificuldade para identificar quem seria o $mdc(10, 15)$ e o $mmc(10, 15)$. Após alguns instantes observando, chegaram à conclusão de que a diagonal (elástico vermelho) ficou dividida em 5 partes e que, em cada um dos retângulos determinados, existiam 30 quadradinhos; então, puderam ver que o $mdc(10, 15) = 5$ e o $mmc(10, 15) = 30$.

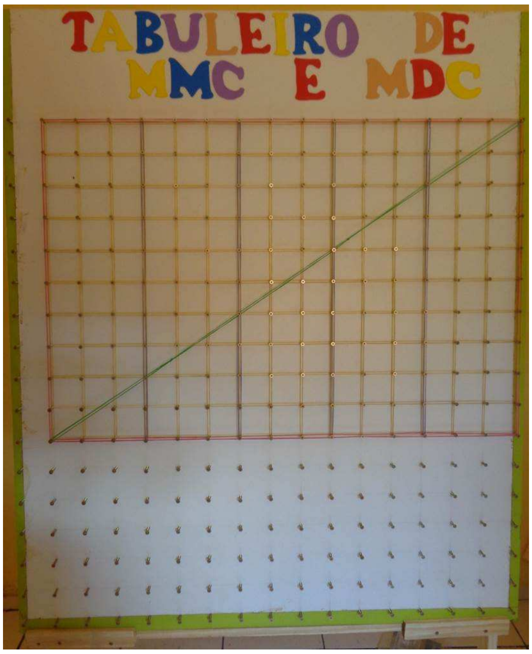


Figura 3.7: Cálculo de mmc e mdc do 10 e 15
Fonte: Arquivo Pessoal

No dia 03/07, em nosso quarto encontro, a aula foi dividida em dois momentos: no primeiro, continuamos com o cálculo do mmc e mdc através do tabuleiro, já visto na aula anterior.

O método foi repetido várias vezes, sempre com o objetivo de encontrarmos o mdc e mmc de dois números. Na maioria deles, foram os alunos que pensavam e construíam os retângulos, entre os quais um dele causou grande discussão: o retângulo com dimensões 5 e 7, construído por uma aluna.

Neste exemplo, tivemos algumas dificuldade para determinar tanto o mdc quanto o mmc. A maioria dos alunos, quando perguntamos quem seriam o $mdc(5,7)$ e o $mmc(5,7)$, responderam que seria zero. De imediato, retornamos ao tópico que tratava do método para encontrar tais respostas, e refizemos, algumas vezes, a leitura do procedimento. Em seguinda, voltamos a observar o retângulo-problema no tabuleiro, como, os alunos ainda não tinham compreendido o exemplo, mostramos de um vértice a outro da diagonal e perguntamos em quantas partes aquela linha estava dividida, e, aos poucos, foram compreendendo que a resposta era apenas uma parte, logo $mdc(5,7) = 1$.

Como já tinhamos encontrado o mdc, a maior parte da turma achava que o $mmc(5,7)$ também seria 1. Mais uma vez, voltamos a fazer a leitura do texto que fala como encontramos o mdc e mmc de dois números. A partir dessa leitura, percebemos que os alunos, em sua grande maioria, observaram que o valor procurado era a quantidade de quadradinhos existentes no retângulo de lados 5 e 7. Assim, ficou compreendido que o $mmc(5,7) = 35$, pois no retângulo existiam 35 quadradinhos.

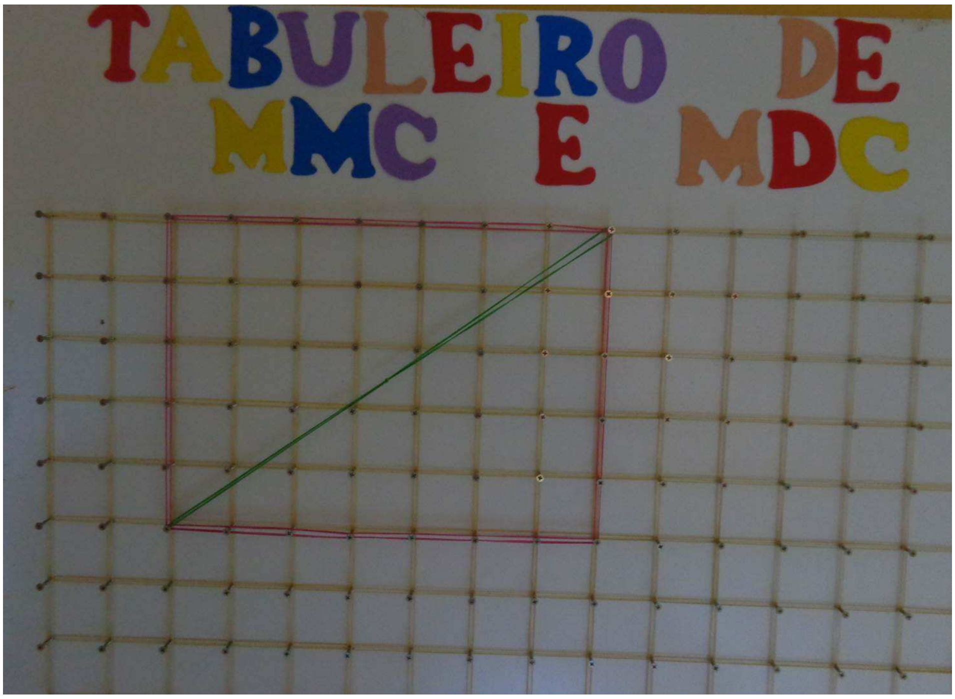


Figura 3.8: Cálculo do mmc e mdc do 5 e 7

Fonte: Arquivo Pessoal

Conscientes de que, na Matemática, assim como nas demais disciplinas, quanto mais se pratica, mais se aprende, deixamos, mais uma vez, os alunos executarem os conhecimentos adquiridos no decorrer da aula com a prática de exemplos elaborados por eles mesmos.

Ao final desse momento, compreende-se que várias interpretações podem ser utilizada para se consolidar um conhecimento matemático em sala de aula. Haja vista, que o mdc e mmc são de cunho essencialmente aritmético, portanto podem ser interpretados geometricamente.

No segundo momento do encontro, apresentamos aos alunos o segundo material das nossas aulas: o jogo das trilhas, que tem como objetivo o aprimoramento do cálculo do mmc e mdc, de forma divertida e agradável.

Assim como na primeira oficina, deixamos os alunos manuseá-lo sem que explicássemos o jogo. No decorrer da aula, com os alunos motivados, fizemos a explanação sobre as regras do jogo, que seria utilizado no aprimoramento do ensino-aprendizagem do mmc e mdc.

Figura 3.9: Alunos jogando na Trilha
Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 3.10: Orientação das Regras
Fonte: Arquivo Pessoal

Vejamos o Procedimento:

O jogo consiste em uma trilha de mmc e mdc, onde existem quatro caminhos: um para cada grupo de jogadores.

- Caminho Vermelho: múltiplos de 2
- Caminho Rosa: múltiplos de 3
- Caminho Roxo: múltiplos de 4
- Caminho Laranja: múltiplos de 5

Para jogarmos, utilizamos também um dado com faces numeradas de 1 a 6. Cada grupo, em sua vez, joga o dado e deve dizer no 1º lançamento o mmc, no 2º lançamento o mdc, entre o número que saiu no dado e o número que se encontra no seu caminho. Se o grupo acertar, avança quantas casas foi o número que saiu no dado. Se errar, fica na mesma casa.

Na trilha, estão marcados os números que representam os mmc's entre as combinações de pares dos quatro números escolhidos para trilhas. Se um grupo cai em um número desses (que está marcado em tamanho maior na trilha), ele vai escolher fazer uma pergunta (que é um problema de mdc preparado pelo professor) para o grupo cujo caminho é o mmc dele; ou, então, ele próprio responde à pergunta do professor (tipo responde ou passa). Se ele escolher responder, e acertar, avança quantas casas for o número que saiu no dado. Se ele escolher responder, e errar, volta para onde estava antes. Se ele escolher passar a pergunta para o outro grupo e o grupo acertar, então é o outro grupo que vai andar a quantidade de casas que tenha saído na face do dado, enquanto quem passou volta para onde estava. Se o outro grupo errar a pergunta, então o primeiro grupo avança quantas casas tenha saído na face do dado.

Vence o jogo quem for o 1º a chegar no 30, ou seja, o final da trilha.

Após termos explicado a metodologia do jogo, dividimos os alunos em quatro grupos e, em seguida, pedimos a eles que identificassem em cada caminho da trilha todos os múltiplos daquele número que representavam seus caminhos.

Nesse momento, houve bastante discussão entre os integrantes de cada grupo, e, com o nosso auxílio, todos conseguiram identificar os múltiplos dos números que representavam seus caminhos na trilha. Por exemplo, na trilha vermelha, deveriam identificar os números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 e 30.

Em seguida, cada grupo escolheu um líder para representar seu grupo. Com os líderes escolhidos, demos início ao jogo, solicitando a cada representante que jogasse o dado para que, assim, eles pudessem se posicionar nos seus respectivos caminhos. Começamos pelo grupo Vermelho que, ao jogar o dado, apareceu 1, depois o grupo Rosa sorteou 3, o Roxo 6 e, por fim, o Laranja que sorteou 1. A sequência para o proseguimento do jogo ficou assim definido: Vermelho, Laranja, Rosa e Roxo.

Neste primeiro contato com o jogo, sugerimos aos alunos que utilizassem o tabuleiro para construir os retângulos com as dimenssões da casa onde estão e o valor sorteado no dado.

Daí, o grupo Vermelho que estava na casa 1 sorteou 5 e, com ajuda do tabuleiro, construíram o retângulo de dimensões 1 por 5 e deram como resposta 5 que foi o mesmo total de casa que o grupo andou, se posicionando na casa **6**. Continuou o jogo com o grupo Laranja, que sorteou 4, como estavam na casa 1, logo construíram o retângulo e deram 4 como resposta, que também foi o mesmo número de casa andado pelo grupo, se posicionando na casa **5**. Seguiu-se o jogo com o grupo Rosa, que sorteou 3 e também estava na casa 3, construíram o retângulo e deram como resposta 3 que foi a mesma quantidade de casas andadas, se posiconando na casa **6**. Para finalizar a 1ª rodada, o grupo Roxo, que estava na casa 6, sorteou 2, então fizeram a figura e deram como respota 12, andaram apenas duas casas, que foi o valor que apareceu na face do dado e se posicionaram na casa **8**. Prosseguiu-se o jogo e tivemos como vencedor da partida o grupo Rosa.

No quinto encontro, no dia 07/07, continuamos com o jogo das trilhas sem a utilização do tabuleiro, o que tornou o jogo bem mais difícil.

Assim como no encontro anterior, dividimos os alunos em quatro grupos, escolhemos os líderes, que foram posicionados em seus caminhos de tal forma que a sequência inicial ficou assim definida: Laranja (na casa 2), Roxo (na casa 4), Rosa (na casa 4) e Vermelho (na casa 5).

Iniciamos a partida com o Laranja sorteando o número 2 e, como estavam na casa 2, o grupo não teve dúvidas e respondeu que o $mmc(2,2) = 2$, logo andaram duas casas e se posicionaram na casa **4**. O próximo a jogar foi o grupo Roxo que sorteou 1 e como estavam na casa 4 responderam de forma errada que o $mmc(1,4) = 1$. Nesse momento, tivemos que intervir no jogo com o intuito de esclarecer que a resposta seria 4, pois estávamos falando do mínimo múltiplo comum (mmc) e não do maior divisor comum (mdc), sendo que, nesta rodada, o grupo Roxo continuou na casa **4**. Dando continuidade ao jogo com o grupo Rosa, que estava na casa 4, e sorteou 6, mais uma vez, houve dúvida por parte da equipe que, erradamente, respondeu 8. Como tínhamos feito anteriormente, intervimos com propósito de ajudar, não somente aquele grupo mas também os demais. Assim continuou o jogo, e sempre que acontecia um erro de um grupo intervíamos no sentido de auxiliar e não dando segunda chance para as respostas, ou seja, o grupo permanecia em sua casa até quando chegasse novamente sua vez de jogar e, de fato, acertasse a resposta. Então, entre erros e acertos, continuamos a partida, a qual teve como vencedor o grupo Laranja.

Nessa aula jogamos mais três partidas, cujos vencedores foram respectivamente: Rosa, Roxo e Rosa. Sendo que a equipe Vermelha não obteve nenhuma vitória entre todas as partidas disputadas, a considerar as quatro partidas deste encontro e uma do encontro anterior (totalizando cinco partidas).

Figura 3.11: Vitória da equipe rosa
Fonte: Arquivo Pessoal

Por fim, no dia 10/07, no nosso sexto e último encontro, foi realizado o pós-teste nas duas turmas para avaliar se as oficinas realmente ajudaram e influenciaram positivamente no aprendizado dos alunos.

Figura 3.12: Aplicação do pós-teste 6ºA
Fonte: Arquivo Pessoal

Figura 3.13: Aplicação do pós-teste 6ºB
Fonte: Arquivo Pessoal

4 Comparação entre pré-teste e pós-teste por turma

Insatisfeito com os maus resultados continuamente obtidos pelo corpo discente, sobretudo na disciplina de Matemática, viu-se a necessidade de fazer algo que pudesse transformar a realidade comodista que se instalou na prática dessa disciplina. Quando iniciamos o estudo, tivemos como objetivo avaliar se a utilização de jogos, de modelos geométricos em forma de oficinas, facilitaria, como ferramenta, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática/Aritmética, em em especial, no ensino do mmc e mdc.

Busca-se esta comprovação por meio do gráfico, a seguir:

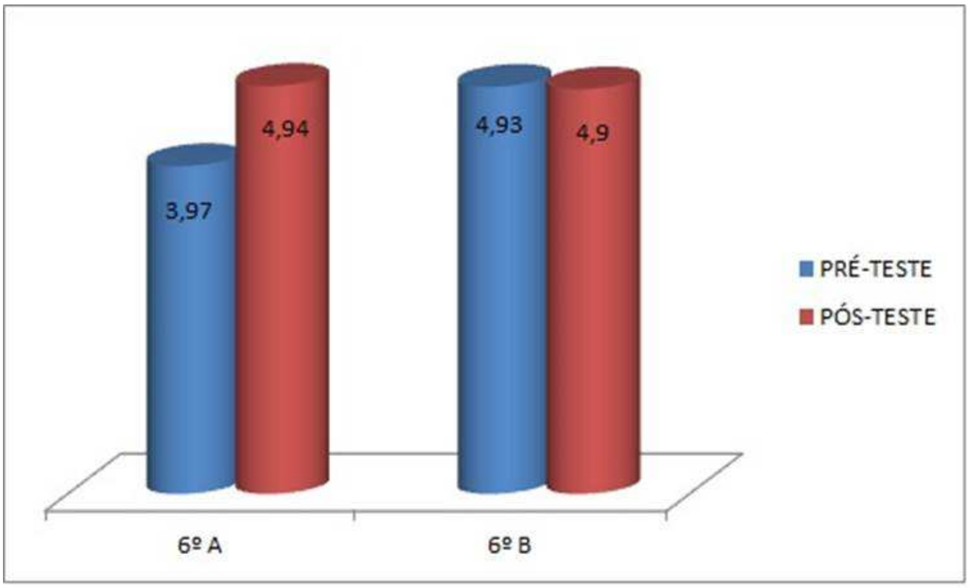


Figura 4.1: Gráfico comparativo entre pré-teste e pós-teste em cada turma
Fonte: Arquivo Pessoal

É sabido que o pré-teste tem por finalidade verificar os conhecimentos fundamentais que os participantes possuem a respeito dos conteúdos mmc e mdc, enquanto o pós-teste tem o objetivo de perceber os conhecimentos adquiridos durante a exposição das oficinas, onde é possível avaliar se essas metodologias trabalhadas ajudaram a melhorar o desempenho dos alunos. Vale ressaltar que, tanto as questões do pré-teste como as do pós-teste, foram retiradas de livros do 6º ano do ensino fundamental.

Então, o que observamos nas médias quer do pré-teste quer do pós-teste é que, em ambas as turmas, as médias não foram altas, talvez tenham sido influenciados, dentre outros fatores, pelo pouco tempo destinado para a realização das oficinas, ou até mesmo pela dificuldade do tema abordado, o que, para um bom entendimento, necessita-se de conhecimentos anteriores. No entanto, comprovamos que o objetivo da interferência foi atingido, ou seja, a turma na qual aplicamos as oficinas obteve um crescimento considerável na aprendizagem em relação à turma que assistiu apenas a aula tradicional, isso é percebido quando se faz o comparativo entre pré-teste e pós-teste por turma.

Percebemos, com o resultado das oficinas em relação às aulas tradicionais, que a motivação em participar da aula tem papel importante não somente no ensino e na aprendizagem da Aritmética, ou melhor, no ensino e aprendizagem de mmc e mdc, mas para a aprendizagem, de modo geral, da Matemática.

Na figura 4.1 em que aparecem os resultados das turmas no pré-teste e no pós-teste, constatamos que, ao compararmos o resultado entre o pré-teste e pós-teste da turma do 6º A, podemos perceber um aumento médio de $0,196$ $(19,6\%)$ de eficiência média na aprendizagem quando fazemos a comparação entre os dois testes (pré-teste e pós-teste). Enquanto, na turma do 6º B, as médias são parecidas: ao comparamos de forma quantitativa, observa-se que, do pré-teste para o pós-teste, houve uma pequena queda de $0,0061$ $(0,61\%)$.

Enfim, conscientes de que, mesmo havendo falhas na elaboração das atividades utilizadas na avaliação, observamos que o uso de oficinas ajuda de forma objetiva na aprendizagem de Aritmética, especificamente, no aprendizado do mmc e mdc.

No entanto, vale salientar que o esforço para encontrar meios de ensino e diferentes métodos para os alunos aprenderem mmc e mdc mostrou resultados positivos e, ao mesmo tempo, vê-se a evolução deles - os estudantes.

Não temos dúvida de que é trabalhoso criar e planejar aulas diferenciadas, mas este esforço se torna prazeroso quando a evolução do aluno acontece, não somente com relação aos conteúdos, mas em relação ao ser humano. E, na realidade, esse deve ser o verdadeiro caminho que um professor preocupado com a aprendizagem efetiva de seus alunos deveria percorrer.

5 Considerações finais

A proposta deste trabalho foi pensada para ser um caminho metodológico a mais para o ensino da Matemática/Aritmética, dando ênfase aos múltiplos e divisores e, em particular, ao ensino do mmc e mdc. Em nossa análise, podemos concluir que o lúdico é um fator que sempre encanta o aprendiz, ou seja, ensinar Matemática através de oficinas é bem mais satisfatório e menos enfadonho do que o ensino abstrato e expositvo baseado apenas no livro didático. Entendemos que a preocupação inicial do professor, antes de abordar um assunto, deve ser a de criar nos alunos condições motivadoras de assimilação para o que se deseja ensinar, isto é, em linguagem mais técnica e formal, verificar em quais esquemas de assimilação se fará a aprendizagem e diligenciar para que todos os alunos dele disponham e alcancem, além da competência e da habilidade, também o conhecimento. Embora não devendo dizer que apenas a ludicidade é a salvação do ensino, podemos provar que pode ser um caminho para ajudar a resolver algumas dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem, que é o que buscamos com este trabalho: propor que o uso de jogos, e de modelos geométicos em forma de oficinas em sala de aula podem mudar a perspectiva de aprendizado dos discentes.

Vale resaltar que a utilização de atividades lúdicas, como instrumento de aprendizagem da Matemática, é bastante valiosa e significativa. Pois, em dados concretos deste trabalho, foi demonstrado que os alunos que participaram das oficinas, obtiveram resultados positivos, enquanto que os alunos que não participaram permaneceram no mesmo nível de conhecimento. Outro ponto a ser citado é que os alunos aprendem e compreendem com mais facilidade e qualidade os conteúdos quando estes são abordados de forma mais concreta e divertida.

Portanto, esperamos ter apresentado aqui um trabalho que destaque a real importância dos assuntos: múltiplos, divisores, números primos, fatoração, mmc e mdc, os quais são tão relevantes no ensino da Matemática. Esperamos também ter estimulado o cuidado e a criação de elementos que substituam o ensino tradicional pela provocação constante de raciocínio, visando a construção, pelo aluno, dos seus instrumentos e modelos matemáticos, relacionados à sua realidade, diminuindo assim a difernça entre o pensamento lógico matemático e o concreto.

Referências

[1] ALCÂNTARA, Francisco Ailton. Tópicos de aritmética: uma proposta para a educação básica / Francisco Ailton Alcântara. 2014.

[2] BIANCHINI, Edwaldo. Matemática: Bianchini - Edwaldo Bianchini - 7ª. ed. - São Paulo: Moderna, 2011.

[3] BIGODE, Antonio José Lopes. Projeto Velear; Matemática/Antonio Lopes (Bigode). 1ª. ed. - São Paulo: Scipione, 2012. - (Projeto Velear Matemática).

[4] BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetro Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] DANTE, Luiz Roberto. Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: teoria e prática/Luiz Roberto Dante. - 1ª. ed. - São Paulo: Ática, 2010.

[6] DANTE, Luiz Roberto. Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: teoria e prática/Luiz Roberto Dante. - 1ª. ed. - São Paulo: Ática, 2010.

[7] GUZMAN, Miguel de. Tendencias inovadoras en Educación Matemática. Olimpiada Matematica Argentina, 1992.

[8] HEFEZ, Abramo. Aritmética - Abramo Hefez. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[9] MONTEIRO, Alexandrina. A Matemática e os temas tranversais/ Alexandrina Monteiro, Geraldo Pompeu Jr.-São Paulo: Moderna, 2001. -(Educação em pauta: temas transversais).

[10] MOTA, Paula Cristina Costa Leite de Moura. Jogos no Ensino da Matemática. Universidade Portucalense Infante Dom Henrique. Departamento de Inovação, Ciência e Tecnologia. Porto, set. 2009. Disponível em: <http://repositorio.uportu.pt/dspace/bitstream/123456789/198/1/TMMAT.

[11] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções/Krerley Irraciel Martins Oliveira, Adán Jose Corcho Fernández. - 2ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[12] PROJETO ARARIBÁ: Matemática/organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fábio Martins de Leonardo. - 3ª. ed. - São Paulo: Moderna, 2010.

[13] RIBEIRO, Jackson da Silva. Projeto Radix: Matemática/Jackson da Silva Ribeiro. - 2ª. ed. - São Paulo: Scipione, 2012.

[14] SADOVSKY, Patrícia, 1953. O ensino de Matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios - Patricia Sadovsky; tradução Antonio de Pádua Danesi; apresentação e revisão da tradução Ernesto Rosa Neto. 1ª ed.- São Paulo: Ática, 2010.

[15] SOUSA, Joamir Roberto de. Vontade de saber Matemática, 6º ano/Joamir Roberto de Sousa, Patrícia Rosana Moreno Pataro. - 1ª ed. - São Paulo: FTD, 2009.

[16] http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2462-8.pdf.

A TESTES

A.1 PRÉ-TESTE

1- (PROJETO RADIX- JACKSON) Observe a sequência dos 12 primeiros múltiplos de 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22. Agora, observe a sequência dos 10 primeiros múltiplo de 3. 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27. Escreva os números que aparecem tanto na sequência dos múltiplos de 2 como na sequência dos múltiplos de 3.

2- (VONTADE DE SABER MATEMÁTICA- JOAMIR) Observe a sequência dos divisores de 24, 32 e 36.

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$D(32) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

a) Quais são os divisores comuns (dc) de:
$dc(24, 32) =$
$dc(24, 36) =$
$dc(32, 36) =$
$dc(24, 32, 36) =$

b) Determine:
Maior Divisor Comum, ou seja, o $mdc(24, 32) =$
Maior Divisor Comum, ou seja, o $mdc(24, 36) =$
Maior Divisor Comum, ou seja, o $mdc(32, 36) =$
Maior Divisor Comum, ou seja, o $mdc(24, 32, 36) =$

3- (PROJETO RADIX- JACKSON) Responda as questões de acordo com os números indicados nas etiquetas.

20	24	64	16	10	48
30	50	60	36	28	72

a) Quais destes números são múltiplos de 4?

b) Quais deles são múltiplo de 5?

c) Quais deles são múltiplos de 4 e de 5 ao mesmo tempo?

d) Quem é o menor múltiplo comum de 4 e 5, ou seja, o $mmc(4, 5)$?

4- (PROJETO TELÁRIS-DANTE) Dona Clotilde quer colocar 255 pirulitos em saquinhos, todos com a mesma quantidade de pirulitos, mas de modo que não sobre nenhum. Que quantidade de pirulitos ela pode colocar em cada saquinho:

a) 8 pirulitos

b) 12 pirulitos

c) 10 pirulitos

d) 15 pirulitos

e) 18 pirulitos

5- (PROJETO TELÁRIS-DANTE) De acordo com o que aconteceu na atividade anterior, indique as afirmações verdadeiras.

a) 255 é múltiplo de 8.

b) 255 é divisível por 12.

c) 255 é divisível por 15.

d) 15 é divisor de 255.

e) 12 é divisor de 255.

f) 255 é múltiplo de 15.

g) 255 não é múltiplo de 8.

h) 255 é múltiplo de 12.

i) 12 não é divisor de 255.

6- (MATEMÁTICA-BIANCHINI) O mdc de três números primos entre si é:

a) O menor deles

b) O maior deles

c) O número 1

d) O produto deles

7- (PROJETO TELÁRIS-DANTE) Uma escada tem 30 degraus. Robinho está subindo essa escada de 3 em 3 degraus, e Félix de 2 em 2 degraus.

Responda.

a) Algum deles vai pisar no 15º degrau?

b) Algum deles vai pisar no 23º degrau?

c) Algum deles vai pisar no 18º degrau?

d) Em quais degraus os dois vão pisar?

e) Qual é o mínimo múltiplo comum de 3 e 2, isto é, qual é o valor de $mmc(3, 2)$?

8- (PROJETO TELÁRIS-DANTE) Uma empresa possui dois funcionários que viajam a serviço. O primeiro viaja de 15 em 15 dias e o segundo viaja de 20 em 20 dias. Se viajarem hoje, daqui a quantos dias eles voltarão a viajar no mesmo dia?

a) 15 dias

b) 20 dias

c) 30 dias

d) 60 dias

e) 90 dias

9- (VONTADE DE SABER MATEMÁTICA- JOAMIR) Indique, dentre as opções a seguir, aquela que apresenta todas as afirmações corretas:

a) 12 é múltiplo de 2, de 3 e de 9

b) 2, 3 e 7 são divisores de 7

c) 2, 3 e 6 são divisores de 12

d) 12 é múltiplo de 24 e de 39

10- (PROJETO TELÁRIS-DANTE) Qual é o quociente entre o $mmc(10, 8)$ e o $mdc(12, 20)$?

a) 20

b) 5

c) 8

d) 10

A.2 PÓS-TESTE

1- (ADAPTADO/VONTADE DE SABER MATEMÁTICA- JOAMIR) Observe a sequência dos divisores positivos de 24, 40 e 36.

$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

a) Quais são os divisores comuns(dc) de:
   $dc(18, 24) =$
   $dc(24, 40) =$
   $dc(18, 40) =$
   $dc(18, 24, 40) =$

b) Determine:
   Maior Divisor Comum de 18 e 24, ou seja, o $mdc(18, 24) =$
   Maior Divisor Comum de 24 e 40, ou seja, o $mdc(24, 40) =$
   Maior Divisor Comum de 18 e 40, ou seja, o $mdc(18, 40) =$
   Maior Divisor Comum de 18, 24 e 40, ou seja, $mdc(18, 24, 40) =$

2- (ADAPTADO/PROJETO RADIX- JACKSON) Observe a sequência dos 15 primeiros múltiplos de 3.

$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45\}$.

Agora, observe a sequência dos 12 primeiros múltiplo de 5.

$M(5) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$.

Escreva os números comuns que aparecem tanto na sequência dos múltiplos de 3 como na sequência dos múltiplos de 5.

3- (PROJETO VELEAR- ANTONIO LOPES) Indique quais afirmações são verdadeiras(V) e quais são falsas(F).

a) ( ) 1 é divisor de qualquer número natural.
b) ( ) 0 é divisor de qualquer número natural.
c) ( ) 1 é múltiplo de qualquer número natural.
d) ( ) 0 é múltiplo de qualquer número natural.
e) ( ) 147 é múltiplo de 147.
f) ( ) 13 é divisor 13.
g) ( ) 35 não é divisor de 35.
h) ( ) 321 não é múltiplo de 231.
i) ( ) O dobro de 142857 é múltiplo de 142857.

4- (ADAPTADO/MATEMÁTICA-BIANCHINI) Em um edifício de 20 andares há vários elevadores. O elevador A só para nos andares cujo número é múltiplo de 2; e o elevador B só para nos andares cujo número é múltiplo de 5.

Agora responda:

a) Em quais andares o elevador A irá parar?

b) E o elevador B?

c) Em quais andares os dois (A e B) vão parar?

d) Alguns dos dois (A ou B) irá parar no 17º andar? Justifique.

5- (PROJETO ARARIBÁ- MODERNA) Três corredores largaram juntos em uma prova cujo percurso é circular. Eles correm com velocidade constante. Bruno leva 3 minutos para completar cada volta, Henrique leva 4 minutos e Davi, 6 minutos.

Dada a largada, depois de quanto tempo os três passarão juntos pela primeira vez por esse local?

a) 10 minutos

b) 12 minutos

c) 14 minutos

d) 16 minutos

e) 18 minutos

6- (PROJETO ARARIBÁ- MODERNA) Observe os divisores de alguns números e depois responda.

Divisores de 100: $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50$ e 100

Divisores de 101: 1 e 101

Divisores de 102: $1, 2, 3, 6, 17, 34, 51$ e 102

Divisores de 103 : 1 e 103

Quais desses números são primos?

7- (PROJETO RADIX- JACKSON) Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

a) 24 é múltiplo de $2, 5$ e 6.

b) 153 é divisível por 18.

c) 8 não é divisor de 36.

d) 35 não é múltiplo de 7.

8- (MATEMÁTICA- BIANCHINI) O Zé da Cantina gosta de complicar as coisas. Quando lhe perguntaram sua idade, ele respondeu:

Tenho mais de 40 anos, menos de 50 e minha idade é um múltiplo de 3 e de 8?.

Qual é a idade dele?

a) 40 anos

b) 42 anos

c) 45 anos

d) 46 anos

e) 48 anos

9- (VONTADE DE SABER MATEMÁTICA-JOAMIR) Observe os números nas fichas.

14	12	15	21	42
32	70	76	85	100

Em relação aos números apresentados acima, quais:

a) São múltiplos de 3?

b) São múltiplos de 4?

c) São múltiplos de comuns de 3 e 4?

d) O mínimo múltiplo comum de 3 e 4, ou seja, o $mmc(3, 4)$?

10- (PROJETO TELÁRIS-DANTE) O produto entre o $mmc(10, 4)$ e o $mdc(6, 20)$?

a) 10

b) 20

c) 40

d) 80

e) 160

B SOBRE AS OFICINAS

B.1 TABULEIRO DE MMC E MDC

(Adaptado do artigo POLEZZI, MARCELO COMO OBTER O MDC E O MMC SEM FAZER CONTAS? REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA-RPM, São Paulo Nº 51, pag. 29-32, maio/agosto. 2003)

Neste tópico, trataremos do cálculo do m.m.c. e do m.d.c. sem fazer contas.

B.1.1 Introdução

Tendo conhecimento das dificuldades do aluno para entender as regras matemáticas e sabendo que o aprendizado, em geral, torna-se muito mais significativo quando é feito de maneira prazerosa, propõe-se uma oficina na qual o mmc e mdc de dois números podem ser apreendidos com muita facilidade, sem a necessidade de cálculo.

B.1.2 Justificativa

Contribuir para estimular o interesse do aluno pela Matemática, facilitando, assim, o processo de ensino-aprendizagem.

B.1.3 Objetivo Geral

Mostrar aos alunos que aprender Matemática pode ser fácil e divertido.

B.1.4 Objetivos Específicos

- Desenvolver a capacidade de calcular geometricamente o mmc e o mdc.
- Compreender o conceito geométrico do mmc e mdc.

B.1.5 Material Utilizado

- Um retângulo de compensado com dimensões 120 cm de comprimento por 100 cm de largura;

- Lâmina de P.V.C;
- Parafusos;
- Adesivo de contato (cola);
- Madeira;
- 2 parafusos com porcas;
- Elásticos coloridos;
- Esticador.

B.2 TRILHAS DE MMC E MDC

(Adaptada do endereço https://www.facebook.com/groups/798703536846234/)

B.2.1 Introdução

Esta é uma oficina diferente da primeira. Visto que o aluno interessado sente-se mais atraído pela disciplina, procuramos mostrar aos alunos que a Matemática se aprende brincando e que, ao estudá-la, eles devem procurar despertar o raciocínio, a atenção, a concentração, a percepção e a memória, por meio das coisas mais simples que os cercam, os jogos, por exemplo.

B.2.2 Justificativa

O uso de jogos tem se tornado muito importante, pois faz com que o aluno se interesse mais pela disciplina e auxilia o professor a ministrar de forma melhor a sua aula.

B.2.3 Objetivo Geral

Mostrar aos alunos que na Matemática seu aprendizado pode ser divertido e agradável.

B.2.4 Objetivos Específicos

- Aprimorar o conhecimento sobre múltiplos e divisores.
- Identificar o mmc e o mdc entre dois números.

B.2.5 Material Utilizado

- Folhas de E.V.A com cores variadas.
- Cola
- Pincel
- Régua Numérica
- Régua Alfabética