



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto



Evandro Luís Bonjovani

Construção de gráficos de funções polinomiais de grau 3

São José do Rio Preto
2015

Evandro Luís Bonjovani

Construção de gráficos de funções polinomiais de grau 3

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos

São José do Rio Preto
2015

Bonjovani, Evandro Luís.

Construção de gráficos de funções polinomiais de grau 3 /
Evandro Luís Bonjovani. -- São José do Rio Preto, 2015
53 f. : il.

Orientador: Jéfferson Luiz Rocha Bastos

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Cálculo.
3. Funções (Matemática) 4. Derivadas (Matemática)
5. Matemática - Metodologia. I. Bastos, Jéfferson Luiz Rocha.
II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 517(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Evandro Luís Bonjovani

Construção de gráficos de funções polinomiais de grau 3

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

São José do Rio Preto
25 de setembro de 2015

Dedico este trabalho à memória de meu pai, José Luiz Bonjovani que não pôde, em vida, participar da conclusão de mais esta importante conquista em minha vida.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida, pela oportunidade de estudar e me aprimorar.

Agradeço ao meu orientador Jéfferson Luiz Rocha Bastos pelo apoio e pelo seu brilhantismo ao me conduzir na construção deste trabalho.

A minha esposa Mariana, pelo companheirismo, apoio e paciência nas horas difíceis de árduos estudos.

Aos meus amigos, essenciais no decorrer do curso: Franciéli, Matheus, Natania e Viviane; pelo apoio, cooperação e união.

A todos que, de maneira direta ou indireta, me auxiliaram chegar nesta etapa.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar aos alunos do Ensino Médio um roteiro para a construção de gráficos de funções polinomiais do terceiro grau utilizando conceitos básicos de limites e derivadas, que não costumam ser trabalhados na Educação Básica.

A maneira proposta provém da necessidade de se ampliar o entendimento de conteúdos que o aluno utiliza sem se aprofundar em sua origem, muitas vezes memorizando as técnicas sem, de fato, compreendê-las.

Para tal objetivo, fazemos uma análise das principais definições e teoremas relacionados a seqüências, limites e derivadas. Em seguida, há o estudo das variações das funções e, por fim, a proposta de um roteiro para a construção de gráficos.

Palavras Chave: Gráficos de Função Polinomial. Limites. Derivadas. Atividade Prática.

Abstract

This work aims to introduce some guidelines to High School students in order to build on third degree polynomial function graphs. It is intended to use basic concepts of limit and derivatives, which are not usually taught at Junior School.

The suggested approach outlines the necessity of enlarging and improving the understanding of syllabus that is used by the student with no adequate knowledge of its origin, and occasionally trying to know techniques by heart without understanding them. Thus, we do an analysis of the main definitions and theorems related to sequences, limit and derivatives. Afterwards, there is the study of function variation and, finally, the proposed guidance to graph construction.

Keywords: Polynomial function graphs. Limits. Derivatives. Practical Activity.

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Pré-Requisitos | 9 |
| 1.1 | Supremo e Ínfimo de um Conjunto | 9 |
| 1.2 | Limite e Continuidade | 12 |
| 1.3 | Derivada de uma função | 17 |
| 1.4 | Extensões dos Conceitos de Limite | 18 |
| 2 | Gráficos de Funções | 23 |
| 2.1 | Resultados auxiliares | 23 |
| 2.2 | Teorema do Valor Médio | 25 |
| 2.3 | Crescimento, Decrescimento e Concavidade | 28 |
| 2.4 | Gráficos | 31 |
| 3 | Minicurso proposto aos alunos do Ensino Médio | 34 |
| | Referências | 53 |

Capítulo 1

Pré-Requisitos

No presente capítulo estudamos alguns conceitos e resultados utilizados como pré-requisitos para o restante deste trabalho.

1.1 Supremo e Ínfimo de um Conjunto

Definição 1.1.1. *Seja A um conjunto de números reais. O maior elemento de A , quando existe, denomina-se máximo de A e indica-se por $\max(A)$. O menor elemento de A , quando existe, denomina-se mínimo de A e indica-se por $\min(A)$.*

Definição 1.1.2. *Dizemos que um número M é uma cota superior de A se M for máximo de A ou, se M for estritamente maior que todo número de A . Dizemos que M é uma cota inferior de A se M for mínimo de A ou, se M for estritamente menor do que todo número de A . A menor cota superior de um conjunto A , quando existe, denomina-se supremo de A e indica-se por $\sup(A)$.*

A maior cota inferior de um conjunto A , quando existe, denomina-se ínfimo de A e indica-se por $\inf(A)$.

Se A admitir uma cota superior, então diremos que A é limitado superiormente. Se A admitir uma cota inferior, diremos que A é limitado inferiormente.

Proposição 1.1.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Um elemento $c \in \mathbb{R}$ é o supremo de A se, e somente se, c é um limite superior de A e, dado $\epsilon > 0$ em \mathbb{R} , existe $a \in A$ de maneira que $c - \epsilon < a$.*

Demonstração:

(\implies) Temos de provar apenas a segunda afirmação. Suponhamos que dado $\epsilon > 0$ tivéssemos $x \leq c - \epsilon$, para todo $x \in A$. Então $c - \epsilon$ seria um limite superior de A e como $c - \epsilon < c$ haveria uma contradição com a definição de supremo. Logo, deve existir $a \in A$ de maneira que $c - \epsilon < a$.

(\impliedby) Seja c' um limite superior de A e suponhamos $c' < c$. Sendo $\epsilon = c - c'$ então $\epsilon > 0$ e $c' = c - \epsilon$. Por hipótese decorre então que existe $a \in A$ tal que $c' < a$ o que é absurdo uma vez que c' é um limite superior de A . \square

Teorema 1.1.4 (Propriedade do Supremo). *Todo conjunto de números reais não-vazio e limitado superiormente (inferiormente) admite supremo (ínfimo).*

Definição 1.1.5. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado de n -ésimo termo da sequência. Denotaremos por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n) , a sequência $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Definição 1.1.6. *Uma sequência (x_n) é dita limitada, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Quando uma sequência (x_n) não é limitada, dizemos que ela é ilimitada.*

Definição 1.1.7. *Seja (x_n) uma sequência.*

- (x_n) é decrescente se $x_{n+1} < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (x_n) é não crescente se $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (x_n) é crescente se $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (x_n) é não decrescente se $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

As sequências crescentes, não decrescentes, decrescentes ou não crescentes são chamadas de sequências monótonas.

Definição 1.1.8. *Sejam (x_n) uma sequência de números reais e l um número real. Definimos*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 > 0, \text{ tal que } |x_n - l| < \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Quando não existir um número l para o qual (x_n) convirja, dizemos que a sequência (x_n) diverge, ou que é divergente.

Teorema 1.1.9. *Toda sequência monótona e limitada de números reais é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência de números reais não decrescente e limitada e considere $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ o conjunto de seus termos. Por hipótese A é limitado superiormente e, pelo Teorema 1.1.4, existe $c = \sup(A)$. Vamos mostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = c$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $c = \sup(A)$, pela proposição 1.1.3, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c - \epsilon < x_{n_0} < c$. Como a sequência é não decrescente temos que se $n > n_0$ então $x_{n_0} \leq x_n$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow c - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n < c + \epsilon, \text{ isto é } |x_n - c| < \epsilon.$$

A demonstração para sequências crescentes é feita de forma análoga e para sequências decrescentes ou não crescentes também, apenas trocando o supremo pelo ínfimo. \square

Observação 1.1.1. *Na demonstração desse teorema mostra-se que se a sequência for crescente ou não decrescente ela converge para o supremo do conjunto de seus termos $\{x_1, x_2, \dots\}$ e se for decrescente ou não crescente ela converge para o ínfimo.*

Teorema 1.1.10 (Conservação do sinal). *Seja (x_n) uma sequência, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.*

a) *Se $l > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n > 0$, para todo $n > n_0$.*

b) *Se $l < 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n < 0$, para todo $n > n_0$.*

Demonstração:

a) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ tomando-se em particular $\epsilon = l$ (por hipótese $l > 0$), existirá um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, l - l < x_n < l + l,$$

e, portanto, $x_n > 0$.

b) Como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ tomando-se em particular $\epsilon = -l$ (por hipótese $l < 0$), existirá um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, l + l < x_n < l - l,$$

e, portanto, $x_n < 0$. \square

Corolário 1.1.11. *Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.*

a) *Se $x_n \geq 0$ então $l \geq 0$.*

b) *Se $x_n \leq 0$ então $l \leq 0$.*

1.2 Limite e Continuidade

Nesta seção estudamos os conceitos de limite e continuidade e mostramos algumas de suas propriedades que serão utilizadas posteriormente. Para tanto, trabalharemos com funções cujo domínio são intervalos, $D_f = I$, ou intervalos menos um ponto, $D_f = I \setminus \{p\}$.

Definição 1.2.1. *Sejam f uma função, p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f e $L \in \mathbb{R}$. Definimos:*

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } \forall p \in D_f, \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definição 1.2.2. *Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. Definimos:*

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } \forall p \in D_f, \\ |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Dizemos que f é contínua em $A \subset D_f$, se f for contínua em todo $p \in A$. Dizemos, simplesmente, que f é uma função contínua se f for contínua em todo p de seu domínio.

Observação 1.2.1. *Suponhamos f definida em p . Comparando as definições de limite e continuidade, resulta*

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Exemplo 1.2.1. *Vamos provar que $f(x) = x^2$ é contínua em \mathbb{R} .*

Primeiro vamos mostrar que f é contínua em 0 . Vamos provar que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0^2| < \epsilon.$$

Temos

$$|x^2| < \epsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\epsilon}.$$

Tomando-se $\delta = \sqrt{\epsilon}$ teremos

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0^2| < \epsilon.$$

Logo, $f(x) = x^2$ é contínua em 0.

Vamos provar, agora, a continuidade de f em todo $p \neq 0$. Seja $\epsilon > 0$ dado, $\epsilon < p^2$. O conjunto solução da inequação

$$|x^2 - p^2| < \epsilon$$

é dado por $I_1 \cup I_2$, onde $I_1 = (\sqrt{p^2 - \epsilon}, \sqrt{p^2 + \epsilon})$, $I_2 = (-\sqrt{p^2 + \epsilon}, -\sqrt{p^2 - \epsilon})$.

Se $p > 0$ então $p \in I_1$ e, como I_1 é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta) \subseteq I_1$. Assim

$$|x - p| < \delta \Rightarrow x \in I_1 \Rightarrow |x^2 - p^2| < \epsilon.$$

Se $p < 0$ então $p \in I_2$ e, como I_2 é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta) \subseteq I_2$. Assim

$$|x - p| < \delta \Rightarrow x \in I_2 \Rightarrow |x^2 - p^2| < \epsilon.$$

Logo, $f(x) = x^2$ é contínua para todo p real.

Exemplo 1.2.2. Vamos provar que $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em todo $p \neq 0$.

• $p > 0$

Seja $\epsilon > 0$ dado, $\epsilon < \frac{1}{p}$. A solução da inequação

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{p} \right| < \epsilon$$

é o intervalo aberto $I = \left(\frac{p}{1 + p\epsilon}, \frac{p}{1 - p\epsilon} \right)$. Como I é aberto e $p \in I$, existe $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta) \subseteq I$. Assim,

$$|x - p| < \delta \Rightarrow x \in I \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{p} \right| < \epsilon$$

e, portanto, $\frac{1}{x}$ é contínua.

• $p < 0$

Seja $\epsilon > 0$ dado, $\epsilon < -\frac{1}{p}$. A solução da inequação

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{p} \right| < \epsilon$$

é o intervalo aberto $I = \left(\frac{p}{1+p\epsilon}, \frac{p}{1-p\epsilon} \right)$. Como I é aberto e $p \in I$, existe $\delta > 0$ tal que $(p - \delta, p + \delta) \subseteq I$. Assim,

$$|x - p| < \delta \Rightarrow x \in I \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{p} \right| < \epsilon$$

e portanto, $\frac{1}{x}$ é contínua.

O teorema a seguir estabelece a relação entre limite e sequência.

Teorema 1.2.3. *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in X$ e L um número real. A fim de que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos x_n em $X - \{p\}$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = p$, tenha-se $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.*

Demonstração: Suponhamos, primeiro, que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e considere uma sequência $x_n \in X - \{p\}$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = p$. Seja $\epsilon > 0$ dado, como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \quad (1.1)$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = p$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - p| < \delta, \quad (1.2)$$

pois $x_n \neq p$ para todo n . Assim,

$$n > n_0 \stackrel{(1.2)}{\Rightarrow} 0 < |x_n - p| < \delta \stackrel{(1.1)}{\Rightarrow} |f(x_n) - L| < \epsilon.$$

Logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$.

Reciprocamente, suponhamos que dada x_n em $X - \{p\}$ com $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = p$ tenhamos $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$. Vamos provar que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Façamos por absurdo, isto é, vamos supor que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) \neq L$. Então existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: $\forall \delta > 0, \exists x \in X$ tal que $0 < |x - p| < \delta$ mas $|f(x) - L| \geq \epsilon$. Fazendo $\delta = \frac{1}{n}$ teremos $x_n \in X, 0 < |x_n - p| < \frac{1}{n}$ mas $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Assim, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = p$ mas $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq L$, contrariando a hipótese. \square

Teorema 1.2.4. *Sejam f e g funções tais que $Im(f) \subseteq D_g$. Se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e g contínua em L , então*

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow L} g(u) = g(L).$$

Demonstração: Sendo g contínua em L , $\lim_{u \rightarrow L} g(u) = g(L)$. Precisamos provar que, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow g(L) - \epsilon < g(f(x)) < g(L) + \epsilon.$$

Como g é contínua em L , dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$L - \delta_1 < u < L + \delta_1 \Rightarrow g(L) - \epsilon < g(u) < g(L) + \epsilon. \quad (1.3)$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, para $\delta_1 > 0$ acima existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow L - \delta_1 < f(x) < L + \delta_1. \quad (1.4)$$

De 1.3 e 1.4 segue-se que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow g(L) - \epsilon < g(f(x)) < g(L) + \epsilon.$$

Assim, segue o resultado. □

Observação 1.2.2. *O teorema acima mostra que, se g for contínua em L e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = g(L) = g\left(\lim_{x \rightarrow p} f(x)\right)$.*

Teorema 1.2.5 (Propriedades Operatórias dos Limites). *Sejam f, g funções tais que*

$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1$ e k uma constante, então:

a) $\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = L + L_1.$

b) $\lim_{x \rightarrow p} (kf)(x) = kL.$

c) $\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = LL_1.$

d) $\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{L_1}$, desde que $L_1 \neq 0$.

Demonstração:

a) Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (L + L_1)| < \epsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\forall p \in D_f$

$$0 < |x - p| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.5)$$

Como $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1$, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\forall p \in D_g$

$$0 < |x - p| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.6)$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $0 < |x - p| < \delta$ então

$$|f(x) + g(x) - (L + L_1)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - L_1| \stackrel{(1.5), (1.6)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Daí, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (L + L_1)| < \epsilon$.

b) Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |(kf)(x) - (kL)| < \epsilon.$$

- $k = 0$

$kf(x) = 0$ para todo $x \in D_f$, logo

$$\lim_{x \rightarrow p} kf(x) = 0 = k \lim_{x \rightarrow p} f(x).$$

- $k \neq 0$

Como $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall p \in D_f$

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|k|}. \quad (1.7)$$

Como

$$|k(f(x) - L)| = |k||f(x) - L|, \quad (1.8)$$

temos

$$|kf(x) - kL| \stackrel{(1.7), (1.8)}{<} |k| \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

Daí, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |kf(x) - kL| < \epsilon$.

c) Temos que $f(x)g(x) = \frac{1}{4}[(f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2]$. Assim, pelo teorema 1.2.4 e pelo exemplo 1.2.1, temos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x))^2 &= (\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)))^2 = (L + L_1)^2 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - g(x))^2 &= (\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - g(x)))^2 = (L - L_1)^2. \text{ Daí} \\ \lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) &= \frac{1}{4} [(L + L_1)^2 - (L - L_1)^2] = LL_1.\end{aligned}$$

d) Pelo teorema 1.2.4 e pelo exemplo 1.2.2, temos que $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_1}$ e pelo item anterior,

$$\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{g(x)} = \frac{L}{L_1}.$$

□

1.3 Derivada de uma função

Nesta seção estudamos o conceito de derivada e suas propriedades.

Definição 1.3.1. *Sejam f uma função real e p um ponto de seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p , então diremos que f é derivável ou diferenciável em p .

Dizemos que f é derivável ou diferenciável em $A \subset D_f$ se f for derivável em cada $p \in A$. Diremos, simplesmente, que f é uma função derivável ou diferenciável se f for derivável em cada ponto de seu domínio.

O próximo teorema apresenta as regras de derivação.

Teorema 1.3.2. *Sejam f e g deriváveis em p e considere k uma constante. Então*

a) $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p).$

b) $(kf)'(p) = kf'(p).$

$$c) (f \cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

$$d) \left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g(p)^2}, \text{ se } g(p) \neq 0.$$

Demonstração:

$$a) (f + g)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(p) + g(p))}{x - p} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) = f'(p) + g'(p).$$

$$b) (kf)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{kf(x) - kf(p)}{x - p} = k \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = kf'(p).$$

$$c) (f \cdot g)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x - p} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)g(x) - f(p)g(x) + f(p)g(x) - f(p)g(p)}{x - p} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot g(x) + f(p) \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right] = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

$$d) \left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(p)}{g(p)}}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f(x)g(p) - f(p)g(x)}{x - p} \right) \left(\frac{1}{g(x)g(p)} \right).$$

Somando e subtraindo $f(p)g(p)$ ao numerador resulta

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot g(p) - f(p) \cdot \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) \left(\frac{1}{g(x)g(p)} \right) \text{ e, portanto,}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g(p)^2}. \quad \square$$

1.4 Extensões dos Conceitos de Limite

Nesta seção estudamos os conceitos de limites infinitos e limites no infinito e algumas de suas propriedades.

Definição 1.4.1. Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$.

Definimos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{array}$$

Definição 1.4.2. Seja f uma função e suponhamos que exista a tal que $] -\infty, a[\subset D_f$.

Definimos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{array}$$

Exemplo 1.4.1. Nesse exemplo vamos mostrar, usando as definições acima, que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Devemos provar que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $x > \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} \right| < \epsilon$ no caso de $x \rightarrow +\infty$ ou

$x < -\delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x^n} \right| < \epsilon$ no caso de $x \rightarrow -\infty$.

Temos que

$$\left| \frac{1}{x^n} \right| < \epsilon \Leftrightarrow |x^n| > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}} \text{ ou } x < -\frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}.$$

Assim, tomando-se $\delta = \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$ segue o resultado.

Definição 1.4.3. Suponhamos que exista a tal que $]a, +\infty[\subset D_f$. Definimos:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{array}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } \delta > a, \text{ tal que} \\ x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{array}$$

Definição 1.4.4. Suponhamos que exista a tal que $] -\infty, a[\subset D_f$. Definimos:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow f(x) > \epsilon. \end{array}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ com } -\delta < a, \text{ tal que} \\ x < -\delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon. \end{array}$$

Teorema 1.4.5. *Sejam f e g funções e L um número real.*

$$a) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).g(x) = +\infty \text{ se } L > 0 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).g(x) = -\infty \text{ se } L < 0.$$

$$b) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ então } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).g(x) = -\infty \text{ se } L > 0 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).g(x) = +\infty \text{ se } L < 0.$$

$$c) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ então } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).g(x) = +\infty \text{ se } L > 0 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).g(x) = -\infty \text{ se } L < 0.$$

$$d) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ então } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).g(x) = -\infty \text{ se } L > 0 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).g(x) = +\infty \text{ se } L < 0.$$

Demonstração:

a) (Caso $L > 0$): Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Rightarrow f(x).g(x) > \epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e $L > 0$, usando a definição, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$x > \delta_1 \Rightarrow L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}, \text{ isto é, } 0 < \frac{L}{2} < f(x).$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, por definição, $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$x > \delta_2 \Rightarrow g(x) > \frac{2\epsilon}{L}.$$

Tomando-se $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$x > \delta \Rightarrow f(x).g(x) > \epsilon.$$

(Caso $L < 0$): Agora queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Rightarrow f(x).g(x) < -\epsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e $L < 0$, temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -L > 0$ e usando a definição, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$x > \delta_1 \Rightarrow \frac{L}{2} - L < -f(x) < -\frac{L}{2} - L, \text{ isto é, } 0 < -\frac{L}{2} < -f(x).$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$x > \delta_2 \Rightarrow g(x) > -\frac{2\epsilon}{L} > 0.$$

Tomando-se $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$x > \delta \implies -f(x).g(x) > \epsilon \implies f(x).g(x) < -\epsilon.$$

b) (Caso $L > 0$): Queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Rightarrow f(x).g(x) < -\epsilon.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e $L > 0$, usando a definição, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$x > \delta_1 \Rightarrow L - \frac{L}{2} < f(x) < L + \frac{L}{2}, \text{ isto é, } 0 < \frac{L}{2} < f(x).$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, por definição, $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$x > \delta_2 \Rightarrow g(x) < -\frac{2\epsilon}{L}, \text{ isto é, } -g(x) > \frac{2\epsilon}{L} > 0.$$

Tomando-se $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$x > \delta \implies -f(x).g(x) > \epsilon \implies f(x).g(x) < -\epsilon.$$

(Caso $L < 0$): Agora queremos mostrar que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Rightarrow f(x).g(x) > \epsilon.$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e $L < 0$, temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -L > 0$ e usando a definição, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$x > \delta_1 \Rightarrow \frac{L}{2} - L < -f(x) < -\frac{L}{2} - L, \text{ isto é, } 0 < -\frac{L}{2} < -f(x).$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que

$$x > \delta_2 \Rightarrow g(x) < \frac{2\epsilon}{L} < 0, \text{ isto é, } -g(x) > -\frac{2\epsilon}{L} > 0.$$

Tomando-se $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$ temos

$$x > \delta \Rightarrow f(x).g(x) > \epsilon.$$

c) Demonstração análoga ao ítem a).

d) Demonstração análoga ao ítem b). □

Exemplo 1.4.2. Nesse exemplo vamos mostrar, usando a definição que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar então que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x > \delta \Rightarrow x^n > \epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$ temos

$$x^n > \epsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{x^n} > \sqrt[n]{\epsilon} \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x > \sqrt[n]{\epsilon}$$

Tomando $\delta = \sqrt[n]{\epsilon}$, segue o resultado.

Exemplo 1.4.3. Como no exemplo anterior, usando a definição mostraremos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty; n \text{ par} \\ -\infty; n \text{ ímpar} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Queremos mostrar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$x < -\delta \Rightarrow \begin{cases} x^n > \epsilon, \text{ se } n \text{ é par.} \\ x^n < -\epsilon, \text{ se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Se n par temos:

$$x^n > \epsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{x^n} > \sqrt[n]{\epsilon} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} |x| > \sqrt[n]{\epsilon} \Leftrightarrow x > \sqrt[n]{\epsilon} \text{ ou } x < -\sqrt[n]{\epsilon}.$$

Em (*), usamos que $|x| = \sqrt[n]{x^n}$, se n é par.

Se n ímpar temos:

$$x^n < -\epsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{-\epsilon} \Leftrightarrow x < -\sqrt[n]{\epsilon}.$$

Assim, tomando $\delta = \sqrt[n]{\epsilon}$ em ambos os casos, segue o resultado.

Capítulo 2

Gráficos de Funções

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados que nos auxiliarão a esboçar gráficos de funções.

2.1 Resultados auxiliares

Nesta seção apresentamos uma série de resultados importantes para este trabalho.

Teorema 2.1.1. (*Teorema dos Intervalos Encaixantes*)

Seja $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ uma sequência de intervalos fechados satisfazendo as seguintes condições:

$$i) [a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots;$$

$$ii) \forall r > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } b_n - a_n < r.$$

$$\text{Nessas condições, } \bigcap_{i \geq 0} [a_i, b_i] = \{c\}.$$

Demonstração: Considere os conjuntos $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ e $B = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$. Vamos mostrar que A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente. Para isso, vamos mostrar que

$$a_m \leq b_n, \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m > n$ temos, por (i), $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$. Logo, $a_m \leq b_m \leq b_n$.

Se $m < n$ temos $[a_n, b_n] \subseteq [a_m, b_m]$. Logo $a_m \leq a_n \leq b_n$. Pelo Teorema 1.1.4 existe $a = \sup(A)$ e $b = \inf(B)$ e por 2.1 temos que $a_n \leq a \leq b_n$ e $a_n \leq b \leq b_n$.

Vamos mostrar que $a = b$. De fato, $|b - a| \leq b_n - a_n, \forall n$ e assim, pela condição (ii) temos $|b - a| < r, \forall r > 0$, então $b - a = 0$. Logo $a = b$. \square

Teorema 2.1.2. (Teorema do Anulamento) *Se f for contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração: Vamos supor que $f(a)f(b) < 0$ e, sem perda de generalidade, vamos supor $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

Faça $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Se $f(c_0) = 0$, segue o resultado. Se $f(c_0) > 0$ faça $a_1 = c_0, b_1 = b_0$. Se $f(c_0) < 0$ faça $a_1 = a_0, b_1 = c_0$.

Em ambos os casos temos $f(a_1) > 0, f(b_1) < 0$ e $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$.

Seja $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Se $f(c_1) = 0$ o resultado está demonstrado. Se $f(c_1) > 0$ faça $a_2 = c_1, b_2 = b_1$. Se $f(c_1) < 0$ faça $a_2 = a_1, b_2 = c_1$.

Em ambos os casos temos $f(a_2) > 0, f(b_2) < 0$ e $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{4}(b_0 - a_0)$. Seguindo o raciocínio, para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos a_n, b_n, c_n satisfazendo $f(c_n) = 0$ ou $f(a_n) > 0, f(b_n) < 0$ e $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

Se, para algum $n, f(c_n) = 0$ o resultado está demonstrado. Caso contrário, temos uma sequência de intervalos fechados $[a_n, b_n]$ satisfazendo as condições do Teorema 2.1.1. Nesse caso existe um c real tal que $c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$ e, além disso, pela observação 1.1.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} b_n = c.$$

Como f é uma função contínua, pelo Teorema 1.2.3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c)$$

e pelo Corolário 1.1.11 $f(c) \geq 0$ e $f(c) \leq 0$. Logo $f(c) = 0$. \square

Teorema 2.1.3. (Teorema do Valor Intermediário) *Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se γ for um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade vamos supor $f(a) < \gamma < f(b)$. Consideremos a função $g(x) = f(x) - \gamma$ definida em $[a, b]$. Sendo f contínua em $[a, b]$, g também é contínua e temos

$$g(a) = f(a) - \gamma < 0, \quad g(b) = f(b) - \gamma > 0.$$

Pelo Teorema 2.1.2, existe c em $[a, b]$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, $f(c) = \gamma$. \square

2.2 Teorema do Valor Médio

Nesta seção enunciamos e demonstramos o Teorema do Valor Médio, que é um resultado fundamental para os objetivos deste trabalho.

Definição 2.2.1. *Sejam f uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo de f em A ou em p um ponto de máximo de f em A se $f(x) \leq f(p)$, para todo x em A . Se $f(x) \geq f(p)$ para todo x em A , dizemos então que $f(p)$ é o valor mínimo de f em A ou que p é um ponto mínimo de f em A .*

Definição 2.2.2. *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo global de f ou que p é um ponto de máximo global de f se, para todo x em D_f , $f(x) \leq f(p)$. Se, para todo x em D_f , $f(x) \geq f(p)$, diremos então que $f(p)$ é o valor mínimo global de f ou que p é um ponto de mínimo global de f .*

Definição 2.2.3. *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que p é ponto de máximo local de f se existir $r > 0$, tal que*

$$f(x) \leq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$. Por outro lado, dizemos que p é ponto de mínimo local de f , se existir $r > 0$, tal que

$$f(x) \geq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$.

Teorema 2.2.4. *Seja f uma função derivável em um ponto p interior a seu domínio. Se p é ponto de máximo ou mínimo de f então $f'(p) = 0$.*

Demonstração: Vamos supor que p seja um ponto de máximo local de f . Como p é ponto interior, podemos supor que existe $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(p), \forall x \in (p-r, p+r) \subseteq D_f.$$

Se f derivável em p temos $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$. Queremos mostrar que $f'(p) = 0$. Sejam $(x_n), (y_n)$ sequências satisfazendo $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = p$, $x_n \leq p$ e $y_n \geq p$. Pelo Teorema 1.2.3, temos que

$$\frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} \rightarrow f'(p); \quad \frac{f(y_n) - f(p)}{y_n - p} \rightarrow f'(p).$$

Como

$$\frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p} \geq 0 \text{ e } \frac{f(y_n) - f(p)}{y_n - p} \leq 0,$$

pelo corolário 1.1.11 temos $f'(p) \geq 0$ e $f'(p) \leq 0$. Logo $f'(p) = 0$. A demonstração é análoga para o caso de p ser ponto de mínimo local. \square

Teorema 2.2.5 (Teorema de Weierstrass). *Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.*

Teorema 2.2.6 (Teorema de Rolle). *Se f for contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existirá pelo menos um c em (a, b) tal que, $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Se f for constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ em (a, b) ; logo existirá c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Suponhamos, então, que f não seja constante em $[a, b]$. Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, pelo Teorema de Weierstrass, existem x_1 e x_2 em $[a, b]$, tais que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$. Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, pois estamos supondo f não-constante em $[a, b]$, segue que x_1 ou x_2 pertence a (a, b) (usando a hipótese $f(a) = f(b)$), daí $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$ pelo Teorema 2.2.4. Portanto, existe c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$. \square

Agora podemos, então, demonstrar o Teorema do Valor Médio.

Teorema 2.2.7 (Teorema do Valor Médio). *Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existirá pelo menos um c em (a, b) , tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demonstração: Considere a função $S(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ e seja g dada por $g(x) = f(x) - S(x)$, x em $[a, b]$. Sendo f e S contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b) , então g é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) , além disso, $g(a) = g(b)$. Assim, pelo Teorema 2.2.6 existe c em (a, b) tal que $g'(c) = 0$. Temos

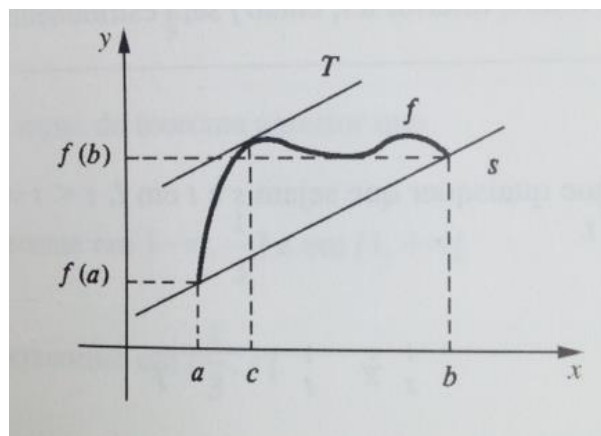
$$g'(x) = f'(x) - S'(x), \quad S'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

e assim $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Então

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Observação 2.2.1. *Geometricamente este teorema mostra que se S é a reta passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$, tal que a reta T , tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, é paralela à reta S .*



Exemplo 2.2.1. *Neste exemplo vamos mostrar que todo polinômio de grau ímpar possui uma raiz real. Seja então $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, com n um inteiro ímpar e $a_n \neq 0$. Temos então que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a_n > 0. \\ -\infty, & \text{se } a_n < 0. \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } a_n > 0. \\ +\infty, & \text{se } a_n < 0. \end{cases}$$

Isso significa que, $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e, pelo Teorema 2.1.2, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$. Logo c é raiz de $p(x)$.

2.3 Crescimento, Decrescimento e Concavidade

Nesta seção estudamos as funções com relação à concavidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

Definição 2.3.1. *Sejam f uma função e A um subconjunto do domínio de f .*

- f é crescente (decrescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A , $s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$ ($f(s) > f(t)$).
- f é não decrescente (não crescente) em A se, quaisquer que sejam s e t em A , $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$ ($f(s) \geq f(t)$).

Teorema 2.3.2. *Seja f derivável no intervalo I .*

- a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I , então f será crescente em I .
- b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I , então f será decrescente em I .

Demonstração:

- a) Precisamos provar que quaisquer que sejam s e t em I ,

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t).$$

Sejam então, s e t em I , com $s < t$. Da hipótese, segue que f é contínua em $[s, t]$ e derivável em $]s, t[$. Pelo Teorema 2.2.7 existe $\bar{x} \in]s, t[$ tal que

$$f(t) - f(s) = f'(\bar{x})(t - s).$$

Como $f'(\bar{x}) > 0$, pois \bar{x} está no interior de I e $t - s > 0$ segue que $f(t) - f(s) > 0$ ou $f(s) < f(t)$.

Portanto

$$\forall s, t \in I, s < t \Rightarrow f(s) < f(t).$$

b) Precisamos provar que quaisquer que sejam s e t em I ,

$$s < t \Rightarrow f(s) > f(t).$$

Sejam então, s e t em I , com $s < t$. Da hipótese, segue que f é contínua em $[s, t]$ e derivável em $]s, t[$. Pelo Teorema 2.2.7 existe $\bar{x} \in]s, t[$ tal que

$$f(t) - f(s) = f'(\bar{x})(t - s).$$

Como $f'(\bar{x}) < 0$, pois \bar{x} está no interior de I e $t - s > 0$ segue que $f(t) - f(s) < 0$ ou $f(s) > f(t)$.

Portanto

$$\forall s, t \in I, s < t \Rightarrow f(s) > f(t).$$

□

Definição 2.3.3. *Seja f derivável no intervalo aberto I e considere p um ponto de I . A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é*

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \text{ ou } y = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função T dada por

$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 2.3.4. *Dizemos que f tem a concavidade para cima no intervalo aberto I se $f(x) > T_p(x)$ quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.*

Dizemos que f tem a concavidade para baixo no intervalo aberto I se $f(x) < T_p(x)$ quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

Definição 2.3.5. *Seja $p \in D_f$ e considere f uma função contínua em p . Dizemos que p é ponto de inflexão de f se existirem números reais a e b , com $p \in]a, b[\subset D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e $]p, b[$.*

Teorema 2.3.6. *Seja f uma função que admite derivada até a 2ª ordem no intervalo aberto I .*

a) *Se $f''(x) > 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .*

b) *Se $f''(x) < 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .*

Demonstração:

a) *Seja p um real qualquer em I . Precisamos mostrar que, para todo x em I ,*

$$x \neq p, f(x) > T_p(x).$$

Consideremos a função $g(x) = f(x) - T_p(x)$, $x \in I$. Vamos provar que $g(x) > 0$ para todo x em I , $x \neq p$.

Temos

$$\begin{cases} g'(x) = f'(x) - T'_p(x) \\ T'_p(x) = f'(p) \end{cases}$$

daí

$$g'(x) = f'(x) - f'(p), x \in I.$$

Como $f''(x) > 0$ em I , segue que f' é estritamente crescente em I . Então,

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \text{ para } x > p \\ g'(x) < 0 \text{ para } x < p. \end{cases}$$

Segue que g é estritamente decrescente em $\{x \in I \mid x < p\}$ e estritamente crescente em $\{x \in I \mid x > p\}$. Como $g(p) = 0$, então

$$g(x) > 0, \forall x \text{ em } I, x \neq p.$$

b) *Seja p um real qualquer em I . Precisamos mostrar que, para todo x em I ,*

$$x \neq p, f(x) < T_p(x).$$

Consideremos a função $g(x) = f(x) - T_p(x)$, $x \in I$. Vamos provar que $g(x) < 0$ para todo x em I , $x \neq p$.

Temos

$$\begin{cases} g'(x) = f'(x) - T'_p(x) \\ T'_p(x) = f'(p) \end{cases}$$

daí

$$g'(x) = f'(x) - f'(p), \quad x \in I.$$

Como $f''(x) < 0$ em I , segue que f' é estritamente decrescente em I . Então,

$$\begin{cases} g'(x) < 0 \text{ para } x > p \\ g'(x) > 0 \text{ para } x < p. \end{cases}$$

Segue que g é estritamente crescente em $\{x \in I \mid x < p\}$ e estritamente decrescente em $\{x \in I \mid x > p\}$. Como $g(p) = 0$, então

$$g(x) < 0, \quad \forall x \text{ em } I, x \neq p.$$

□

2.4 Gráficos

Utilizando tudo o que foi visto até agora, para o esboço do gráfico de uma função f , podemos seguir o seguinte roteiro:

- a) explicitar o domínio;
- b) determinar os intervalos de crescimento e de decrescimento;
- c) estudar a concavidade e destacar os pontos de inflexão;
- d) calcular os limites laterais de f em p , nos casos:

- (i) $p \notin D_f$, mas p é extremo de um dos intervalos que compõem D_f ;
- (ii) $p \in D_f$, mas f não é contínua em p ;
- e) Calcular os limites para $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$;
- f) determinar ou localizar as raízes de f .

Exemplo 2.4.1. *Esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.*

a) $D_f = \mathbb{R}$, uma vez que a função é polinomial.

b) *Intervalos de crescimento e decrescimento.*

Para isso, calculamos $f'(x)$ e estudamos seu sinal:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \text{ para } x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > 1;$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } -\frac{1}{3} < x < 1.$$

c) *Concavidade e pontos de inflexão.*

Agora, calculamos $f''(x)$ e estudamos o seu sinal:

$$f''(x) = 6x - 2.$$

$$6x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{3}. \text{ (ponto de inflexão)}$$

$$f''(x) > 0 \text{ para } x > \frac{1}{3};$$

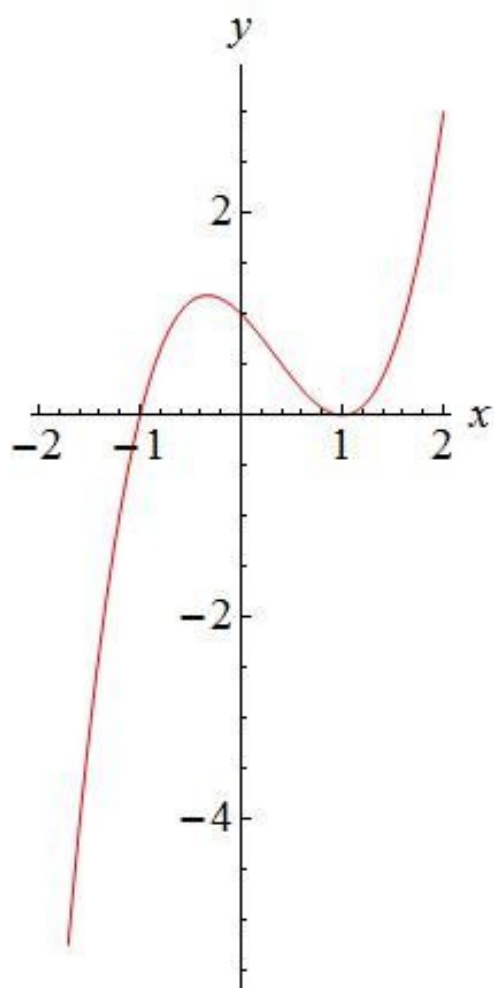
$$f''(x) < 0 \text{ para } x < \frac{1}{3}.$$

d) *Como f é contínua em \mathbb{R} , precisamos apenas calcular os limites para $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 - x^2 - x + 1] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^3 - x^2 - x + 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right] = -\infty$$

e) *As raízes de f são -1 e 1 (1 é raiz dupla).*



Capítulo 3

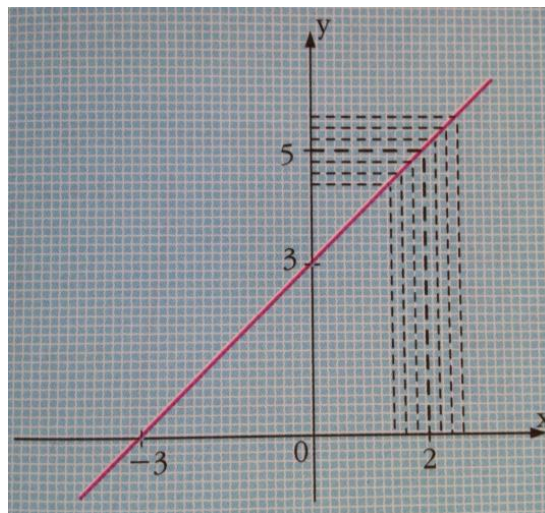
Minicurso proposto aos alunos do Ensino Médio

Neste capítulo, descrevemos como foi proposta aos alunos da terceira série do Ensino Médio a ideia da construção de gráficos das funções polinomiais do 3º grau com base no Cálculo, utilizando-se dos conceitos de limite e derivada. O tema foi abordado com o nome de “Noções de limites e derivadas para construção de gráficos de função polinomial”.

Limites

Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$ e o gráfico cartesiano correspondente:

| x | $f(x) = x + 3$ |
|------|----------------|
| 0 | 3 |
| 1 | 4 |
| 1,5 | 4,5 |
| 1,75 | 4,75 |
| 2,25 | 5,25 |
| 2,5 | 5,5 |
| 3 | 6 |
| 4 | 7 |



Notamos que, para valores de x cada vez mais próximos de 2, temos valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de 5.

Em símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5.$$

Outro exemplo:

Seja a função $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, observe a tabela:

| x | $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ |
|------|--------------------------------|
| 2 | 5 |
| 2,5 | 5,5 |
| 2,75 | 5,75 |
| 2,9 | 5,9 |
| 3,1 | 6,1 |
| 3,25 | 6,25 |
| 3,5 | 6,5 |
| 4 | 7 |

Observe que, embora a função não esteja definida em $x = 3$, para valores de x cada vez mais próximos de 3, temos valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de 6.

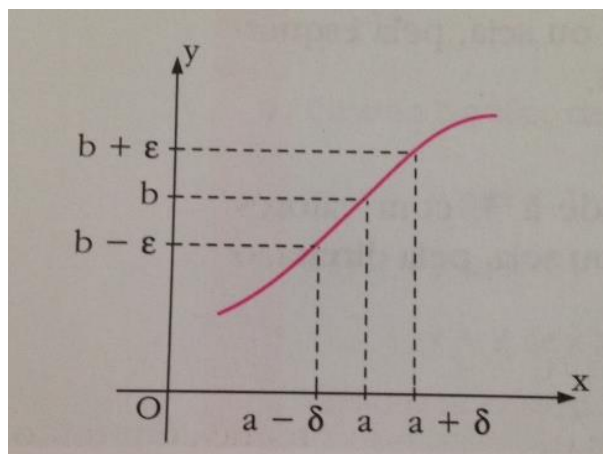
Em símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Definição 3.0.1. Considerando uma função $f(x)$, definida num intervalo I , temos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é o número b , se para todo $\varepsilon > 0$, existir, em correspondência, um número $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Em símbolos:

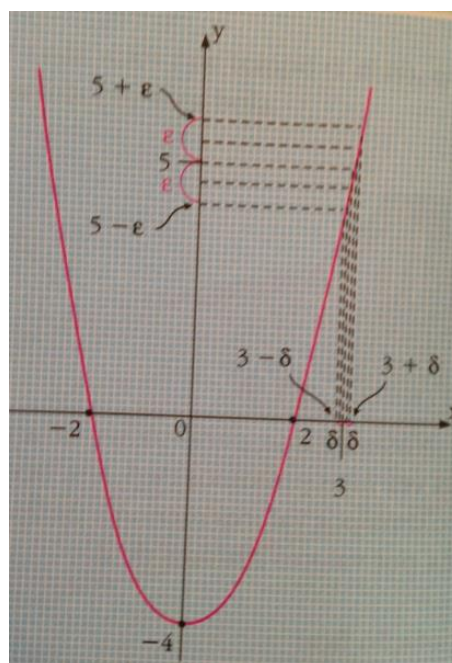
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$



Exemplo:

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 4$ e seu gráfico:

| x | $f(x) = x^2 - 4$ |
|-----|------------------|
| 2,5 | 2,25 |
| 2,6 | 2,76 |
| 2,7 | 3,29 |
| 2,8 | 3,84 |
| 2,9 | 4,41 |
| 3,1 | 5,61 |
| 3,2 | 6,24 |



Sendo que o domínio de $f(x)$ é o conjunto dos números reais, que $f(3) = 5$ e que os valores de $f(x)$ se aproximam de 5, para valores de x próximos de 3, então:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5.$$

Propriedades dos Limites

Ao definir limite, chegamos à expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas num certo domínio D , tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, valem as seguintes propriedades:

1. Limite da soma: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$
2. Limite do produto: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x).g(x)] = L.M$

Exemplo:

Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 1) = 3.(1)^2 + 2.(1) - 1 = 4.$

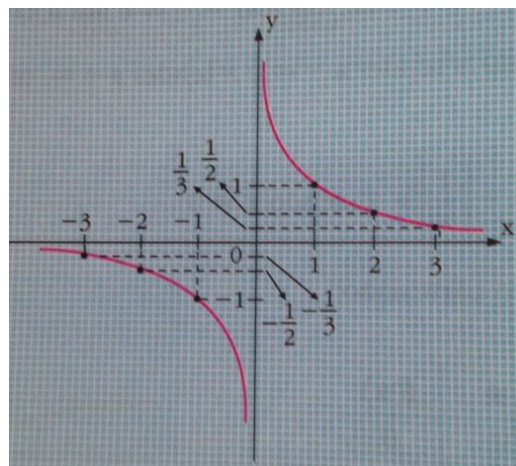
b) $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3).(x - 5) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) . \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) = 5.(-3) = -15.$

Limites envolvendo os símbolos $-\infty$ e $+\infty$

Analisemos as seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, sendo $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

| x | $f(x) = \frac{1}{x}$ |
|-----|----------------------|
| -10 | $-\frac{1}{10}$ |
| -5 | $-\frac{1}{5}$ |
| -3 | $-\frac{1}{3}$ |
| -2 | $-\frac{1}{2}$ |
| -1 | -1 |
| 1 | 1 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | $\frac{1}{3}$ |
| 5 | $\frac{1}{5}$ |
| 10 | $\frac{1}{10}$ |



Note que, quando x assume valores cada vez maiores, $f(x)$ se aproxima cada vez mais de zero. Assim:

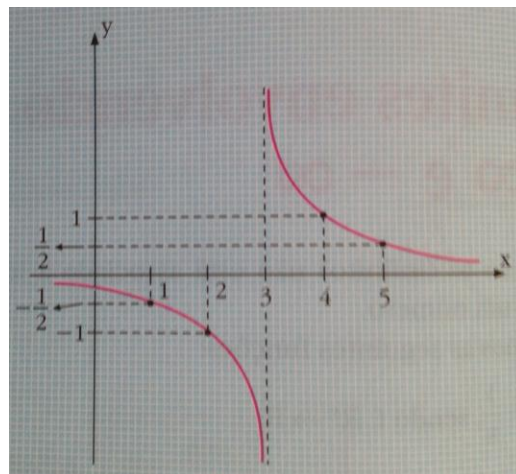
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

E quando x assume valores cada vez menores, $f(x)$ se aproxima de zero. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, sendo $f : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$

| x | $f(x) = \frac{1}{x-3}$ |
|-----|------------------------|
| 1 | $-\frac{1}{2}$ |
| 2 | -1 |
| 4 | 1 |
| 5 | $\frac{1}{2}$ |



Fazendo x tender a $-\infty$ e x tender a $+\infty$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

c) Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos que:

$$\text{Se } a < 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Se } a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Portanto, toda função polinomial de grau 3, possui, pelo menos, uma raiz real.

Exercícios

1. Determinar os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1000000)$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+5)}{4}$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2+x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

2. Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1}{5x^2 + x + 1}$;

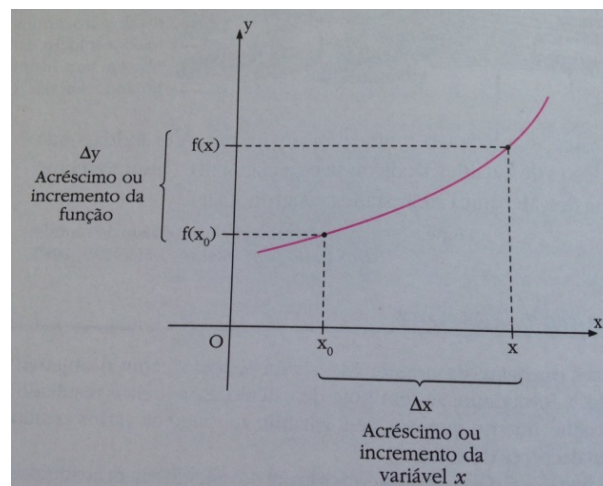
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + x - 3}{x^4 + x + 5}$.

Derivada de uma função em um ponto

O desenvolvimento dos estudos matemáticos acompanhou a necessidade do homem de conhecer melhor o universo físico que o cerca. Particularmente, o cálculo teve sua aplicação estendida aos fenômenos físicos mensuráveis como, por exemplo, eletricidade, ondas de rádio, som, luz, calor e gravitação.

A seguir, estudaremos as derivadas, parte fundamental do cálculo.

Considerando uma função f dada por $y = f(x)$, contínua e definida num intervalo A , e x_0 um elemento desse intervalo representada no gráfico.



Se à variável x for acrescentando Δx a partir do ponto x_0 , teremos $x_0 + \Delta x = x$ ou $\Delta x = x - x_0$ (incremento da variável x).

Logo, à função $f(x)$ também será acrescentado Δy a partir de $f(x_0)$. Então $f(x_0) + \Delta y = f(x)$ ou $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ (incremento da função).

Chamamos de razão incremental da função $f(x)$, a partir do ponto x_0 , a razão entre esses acréscimos Δy e Δx ,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dizemos que a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0 , se o limite da razão incremental $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existir e for finito.

Nesse caso, a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 será determinada pelo valor desse limite é representada por $f'(x_0)$, ou seja

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Exemplo: Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 3$.

Significado geométrico da derivada

Para entender o significado geométrico da derivada é importante rever o conceito de coeficiente angular da reta, abordado em Geometria Analítica.

Considere a função $y = f(x)$ contínua e definida no intervalo A , cujo gráfico é representado pela curva C , sendo x e x_0 elementos desse intervalo, com $x \neq x_0$.

Se a reta s , secante à curva C , é determinada pelos pontos $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P(x, f(x))$, podemos dizer que o coeficiente angular de s é $tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, que corresponde à razão incremental de $f(x)$ no ponto x_0 .

Observe que se Δx tende a 0, ou seja, se x tende a x_0 , o ponto P se aproxima de P_0 e a reta secante s tenderá a reta t , tangente à curva C no ponto P_0 .

Se a reta s tende à reta t , então α tende a β . Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\beta.$$

Então, concluímos que:

$$f'(x_0) = tg\beta.$$

A derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular ($tg\beta$) da reta t , tangente ao gráfico da função $f(x)$ no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$.

A equação da reta t pode ser assim representada: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, ou ainda, se $f(x) = y$, temos:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Exemplo:

Considere a reta t , tangente à curva definida por $f(x) = x^2$, no ponto de abscissa 2, determinar:

- a) o coeficiente angular da reta t ;
- b) a equação da reta t .

Derivadas de funções elementares

Vamos calcular as derivadas das principais funções elementares, utilizando a definição já vista, de tal forma que a sistematização dos resultados obtidos facilite o nosso estudo.

1. $f(x) = c$ (função constante).

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

$$\therefore f'(x) = 0.$$

2. $f(x) = cx$ (função linear).

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cx - cx_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x - x_0)}{x - x_0} = c.$$

$$\therefore f'(x) = c.$$

3. $f(x) = cx^2$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cx^2 - cx_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = c \cdot 2x_0 =$$

$$= 2cx_0.$$

$$\therefore f'(x) = 2cx.$$

4. $f(x) = cx^3$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{cx^3 - cx_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} c(x^2 + xx_0 + x_0^2) = c \cdot 3x_0^2 = 3cx_0^2.$$

$$\therefore f'(x) = 3cx^2.$$

Sejam duas funções $u(x)$ e $v(x)$, deriváveis no ponto x , temos:

a) Derivada da soma: $f(x) = u(x) + v(x) = u'(x) + v'(x)$.

b) Derivada da diferença: $f(x) = u(x) - v(x) = u'(x) - v'(x)$.

Exercícios:

1. Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = -x$;

b) $f(x) = -9x + 2$;

c) $f(x) = 7x - 4$;

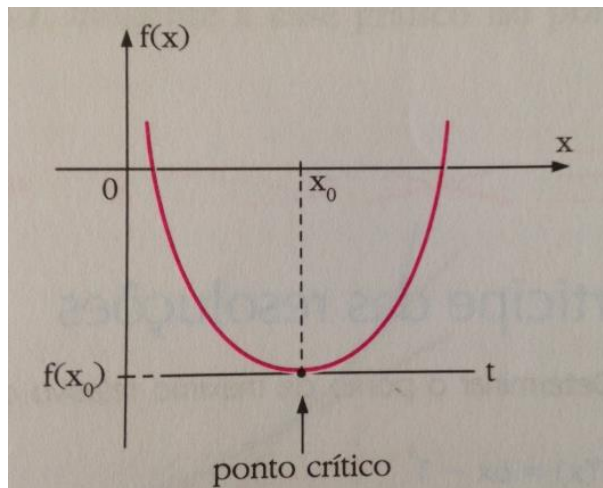
d) $f(x) = x^2 + x + 2$;

e) $f(x) = -7x^3 + 2x^2 + 5x + 6$.

2. Considere $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 7$ e $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, determine $f'(0) - 2g'(1)$.

Crescimento e decrescimento das funções

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.



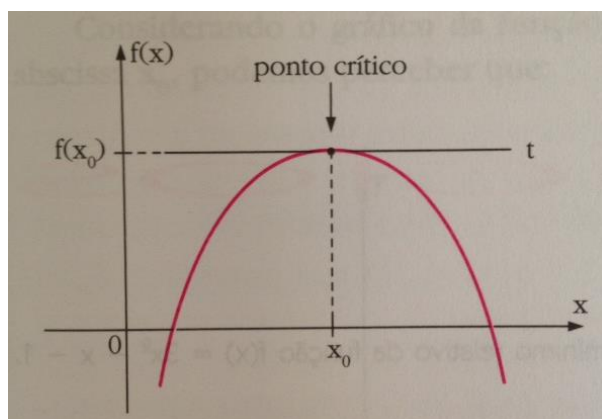
Sabemos que

- o vértice da parábola é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$;
- nesse ponto a reta tangente é paralela ao eixo $0x$;
- no ponto $x_0 = -\frac{b}{2a}$ a função assume seu menor valor (x_0 é chamado de mínimo local da função);
- no intervalo $I_1 = \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ a função é decrescente, isto é, dados $x_1, x_2 \in I_1$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_2) < f(x_1)$;
- no intervalo $I_2 = \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ a função é crescente, isto é, dados $x_1, x_2 \in I_2$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Todas essas informações podem ser obtidas da seguinte forma:

- calculamos $f'(x) = 2ax + b$;
- fazendo o estudo do sinal de f' , percebemos que:
 - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$;
 - $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in I_1$ e
 - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in I_2$.

Agora, analisemos a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$.



Percebemos que, ao fazer o estudo do sinal de f' :

$$- f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a};$$

$$- f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in I_2 \text{ e}$$

$$- f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in I_1.$$

Neste caso, temos que $x_0 = -\frac{b}{2a}$ é o ponto em que a função assume seu maior valor (x_0 é chamado de máximo local da função).

Concavidade

Consideremos novamente a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabemos que o gráfico dessa função é uma parábola com a “boca” voltada para cima se $a > 0$ e com a “boca” voltada para baixo se $a < 0$. Note que $f''(x) = 2a$ e, portanto, o sinal de f'' depende do sinal de a . Podemos desconfiar, então, que a segunda derivada de uma função (f'') nos fornece informações sobre a concavidade das funções. Essa desconfiança pode ser confirmada olhando o exemplo a seguir:

Seja a função $f(x) = x^3$, temos:

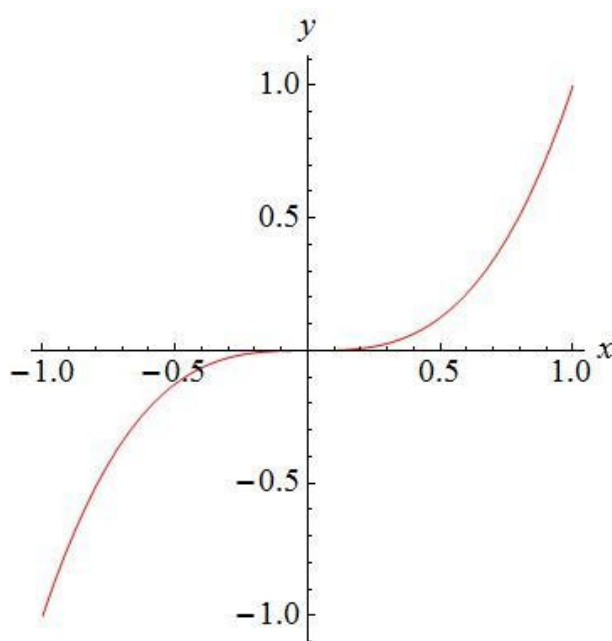
$$\bullet f'(x) = 3x^2;$$

$$- f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$- f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ (função crescente).}$$

- $f''(x) = 6x$;
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (ponto de inflexão);
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ (concavidade para baixo);
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (concavidade para cima).

Observe seu gráfico:



Baseado nas informações anteriores, podemos montar um roteiro para desenharmos gráficos de funções:

1. Verificamos o crescimento da função e seus extremos (através de $f'(x)$);
2. Verificamos a concavidade e o ponto de inflexão (através de $f''(x)$);
3. Determinamos a raiz, se possível.

Construa o gráfico das funções, de acordo com o roteiro acima:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9$;

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;

3. $f(x) = -x^3 - 2x^2 - x$;

4. $f(x) = 4x^3 - x^2 - 24x - 1$;

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Atividades

Aqui estão alguns dos exercícios realizados pelos alunos na aplicação deste minicurso.

João Vitor Souza Kleriano

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
 $f'(x) = 3x^2 - 6x$
 $3x(x-2) = 0$
 $x=0$ $x=2$

$f''(x) = 6x - 6$
 $6x - 6 = 0$
 $6x = 6$
 $x = 1$
 ↳ ponto de inflexão

Substituindo

$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2$
 $f(0) = \underline{2}$

$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2$
 $f(2) = 8 - 12 + 2$
 $f(2) = \underline{-2}$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2$
 $f(1) = 1 - 3 + 2$
 $f(1) = \underline{0}$

Gráfico:

The final graph shows a coordinate system with x and y axes. The curve passes through the points (0, 2), (1, 0), and (2, -2). The x-axis is labeled with 0, 1, and 2. The y-axis is labeled with -2, 1, and 2. The curve has a local maximum at (0, 2), crosses the x-axis at (1, 0), reaches a local minimum at (2, -2), and then increases again.

Paolo Simeoni D'Adda

$$\textcircled{1} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

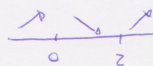
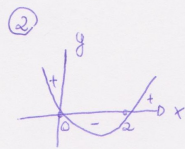
$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$0 = 3x^2 - 6x$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

$$x = 0$$



$$\textcircled{3} f(0) = 0 - 3(0) + 2$$

$$f(0) = 2$$

$$f(2) = 8 - 3 \cdot 4 + 2$$

$$f(2) = 8 - 12 + 2$$

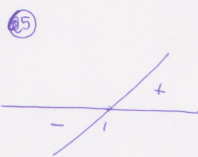
$$f(2) = -2$$

$$\textcircled{4} f''(x) = 6x - 6$$

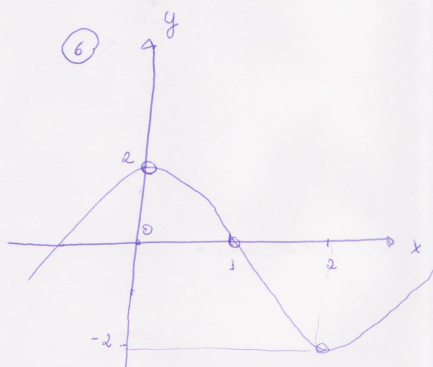
$$0 = 6x - 6$$

$$x = \frac{6}{6}$$

$$x = 1$$



$\textcircled{6}$



$$(4) f(x) = 4x^3 - x^2 - 24x - 7$$

$$12x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$6x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Delta = 289$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1045}{27} \approx 38,7$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-703}{4} \approx -25,75$$

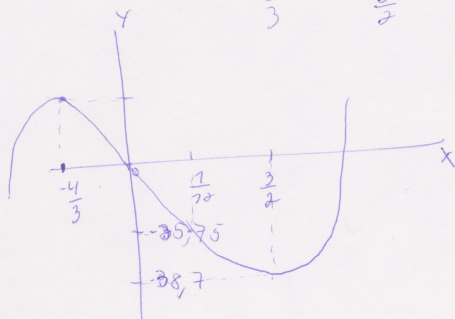
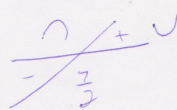
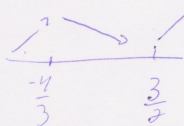
André nº 3
Barisom 3º D
Ribeiro

$$f'(x) = 24x - 2$$

$$f\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{-5389}{12} \approx -3$$

$$24x = 2$$

$$x = \frac{1}{12}$$



Vincenzo Leon Morelli n°22 3°D

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$x' = 2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

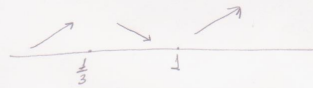
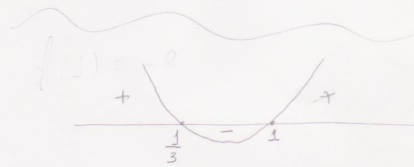
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$$

$$\Delta = 16 - 12$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6} \quad x' = 1$$

$$x'' = \frac{1}{3}$$

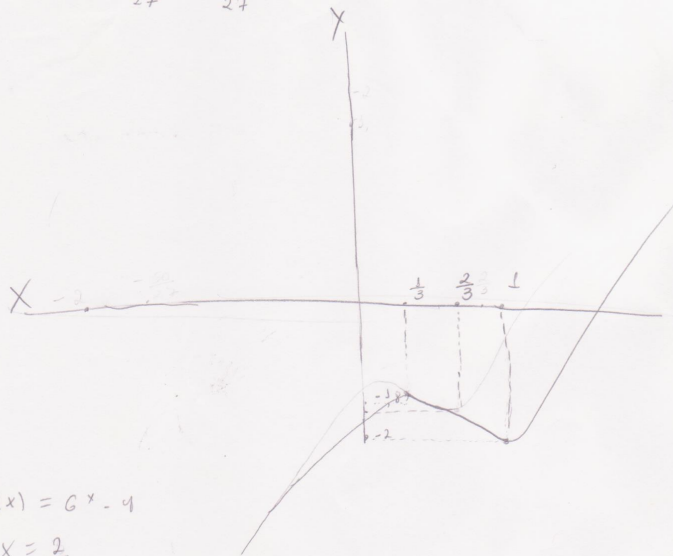


$$f(1) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - 2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-3}{27} + \frac{17}{27} - 2$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27} - \frac{54}{27} = \frac{-50}{27}$$



$$f''(x) = 6x - 4$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -1,92$$

Referências Bibliográficas

- [1] AVILA, G. Cálculo das funções de uma variável, volume 1. *LTC*. São Paulo, 2003.
- [2] FLEMMING, D. M; GONÇALVES, M. B. Cálculo *A.PRENTICE HALL BRASIL*. 6^a ed. 2006.
- [3] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo, volume 1. *LTC*. 5^a ed. Rio de Janeiro, 2001.
- [4] IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. Fundamentos de matemática elementar - limites derivadas noções de integral. *ATUAL* 7^a ed. São Paulo, 2013.
- [5] LIMA, E. L. Análise Real, volume 1. *IMPA*. 2^a Ed. Rio de Janeiro, 1993.
- [6] SILVA, C. X; BENIGNO B.F. Matemática aula por aula - 3^a série. *FTD*. 2^a ed. São Paulo, 2005.
- [7] STEWART, J Calculus. *CENGAGE LEARNING* 7^a ed. 2012.