UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

LUIS PAULO PINTO

OS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GRÉCIA ANTIGA

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2015

LUIS PAULO PINTO

OS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GRÉCIA ANTIGA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2015

Pinto, Luis Paulo.
Os problemas clássicos da grécia antiga / Luis Paulo Pinto. -- São José do Rio Preto, 2015
82 f. : il.

Orientador: Clotílzio Moreira dos Santos
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria euclidiana - Estudo e ensino. 3. Matemática - Metodologia. 4. Tecnologia educacional. I. Santos, Clotilzio Moreira dos. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.
CDU – 513.81(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

LUIS PAULO PINTO

OS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GRÉCIA ANTIGA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof.ª Dra. Tatiana Miguel Rodrigues
UNESP - Bauru

Prof.ª Dra. Tatiana Bertoldi Carlos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - Paranaíba

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
07 de agosto de 2015

Dedico este trabalho à minha esposa Vera, que com muito carinho e compreensão, incentivou e permaneceu ao meu lado em todos os momentos dessa minha jornada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre me guiou.

Aos meus pais, pela educação que me deram.

À minha família, pelo incentivo e compreensão.

Aos meus amigos pela paciência e, em especial, Márcio José Noronha e Rogério Menezes de Moraes, pela ajuda na revisão deste trabalho.

À diretora Silmara Teixeira e à vice-diretora Sandra Rodrigues, da E.E. Prof.ª Aurea de Oliveira, que me proporcionaram horários compatíveis de modo a ser possível realizar meus estudos, além do estímulo para tal tarefa.

Aos meus professores que foram tão pacientes, e em particular, a meu orientador Prof. Dr. Clotilzio Moreira dos Santos, pela paciência, sugestões e estímulo no desenvolvimento deste trabalho.

À Sociedade Brasileira da Matemática – SBM – pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

“O homem não é nada além daquilo que a educação faz dele. ”

(Immanuel Kant)

RESUMO

Na Grécia Antiga, os sábios buscaram a resolução de problemas que se baseavam na construção geométrica utilizando exclusivamente dois instrumentos: a régua não graduada e o compasso. Alguns desses problemas se tornaram clássicos por exigirem, dentro do desenvolvimento da Matemática, grandes esforços para se chegar a uma solução. São eles: *a duplicação de um cubo*, determinando o lado de um cubo, cujo volume é o dobro do volume de um outro cubo dado, *a trisseção de um ângulo*, que é dividir um ângulo em três partes iguais ou três ângulos de medidas exatamente iguais e *a quadratura de um círculo*, que consiste em construir um quadrado com área igual à de um círculo dado. Neste trabalho apresentaremos algumas construções geométricas com régua não graduada e compasso, algumas soluções encontradas que não estavam de acordo com as regras estabelecidas e desenvolveremos a fundamentação algébrica que demonstra a insolubilidade dos três problemas clássicos citados.

Palavras-chave: régua. compasso. fundamentação algébrica. problemas clássicos.

ABSTRACT

In ancient Greece, the sages sought to solve problems that were based on geometric construction using only two instruments: non-graduated ruler and compass. Some of these problems have become classics because they require within the development of Mathematics, great efforts to reach a solution. They are: the duplication of the cube, the side of a cube whose volume is twice the volume of a given cube; the trisseção of an angle, which is to divide an angle into three equal parts or three measures angles exactly equal and the squaring of a circle, which consists of constructing a square with the same area as a given circle. *In this work we present some geometric constructions with non-graded ruler and compass,* some solutions that were not in accordance with the rules laid down and develop the algebraic reasoning which demonstrates the insolubility of the three classic problems cited.

Keywords: ruler. compass. algebraic reasoning. classic problems.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Antiga Grécia foi o berço da geometria que conhecemos nos dias atuais. Os três primeiros séculos da matemática grega são considerados o período de maior relevância das importantes contribuições para o desenvolvimento dessa ciência. Durante esse período, iniciando com Tales de Mileto (por volta de 600 a.C.), três linhas de desenvolvimento se destacaram. A geometria, iniciada pelos pitagóricos que já dispunham de notáveis conhecimentos matemáticos, é uma delas. Os geômetras, até então, já sabiam como utilizar a régua não graduada e o compasso de modo a transformar um triângulo em um quadrado de área equivalente ou ainda, por um ponto qualquer traçar uma reta perpendicular a uma reta dada, bem como dividir um ângulo na metade. Todos esses resultados culminaram no mais importante trabalho de Euclides (por volta de 300 a.C.): *Os Elementos*. As outras duas são a geometria superior (voltada para o tratamento de curvas além da reta e da circunferência) e o tratamento dos processos infinitesimais, das quantidades infinitas e das somas infinitas.

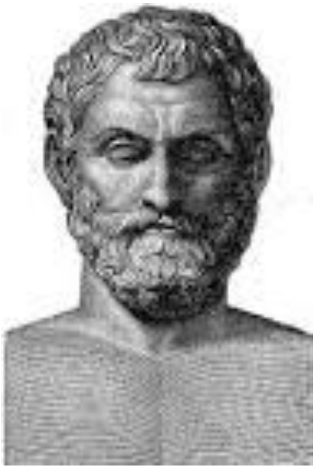
Grande parte da evolução destes conceitos surgiu da tentativa de se resolver três grandes problemas, conhecidos como *os problemas clássicos da Grécia Antiga,* fazendo uso apenas de régua não graduada e compasso: *a duplicação do cubo, a trisseção de um ângulo* e *a quadratura do círculo.* Neste trabalho, apresentaremos um breve panorama histórico e o enunciado dos problemas; mostraremos algumas tentativas de resolvê-los e algumas resoluções que não atendiam as condições impostas. Com mais formalidade e detalhes caracterizaremos os números reais que são construtíveis com régua não graduada e compasso e, com isso, a impossibilidade de solucionar os problemas clássicos com os instrumentos citados.

2. UM BREVE PANORAMA HISTÓRICO

Muitas culturas antigas, como a babilônica e a egípcia, desenvolveram vários tipos de Matemática, dentre elas as que vinham ao encontro de suas necessidades cotidianas, tais como o cálculo de áreas e de volumes. Todavia, foram os gregos que introduziram o raciocínio lógico, as rigorosas provas dedutivas e o encadeamento sistemático de teoremas demonstrativos que tornaram a Matemática uma ciência. A matemática grega tinha como foco a geometria, embora existiam estudos sobre as propriedades dos números inteiros, astronomia e mecânica.

Tales de Mileto (625 a.C. – 547 a.C.) é considerado o precursor da nova concepção do pensamento matemático, buscando demonstrar teoremas geométricos. São dele as seguintes proposições:

- *Os triângulos equiângulos têm os seus lados proporcionais (Euc.IV, ou II).*
- *O ângulo inscrito num semicírculo é reto (Euc.III.31).*
- *Quando duas retas se cortam, os ângulos opostos pelo vértice são iguais (Euc.I.15).*
- *Se dois triângulos têm dois ângulos de um, iguais a dois ângulos do outro e um lado de um, igual a um lado do outro (lado este adjacente ou oposto a ângulos iguais), terão também iguais os outros lados que se correspondem num e noutro triângulo, bem como o terceiro ângulo (Euc.I.26).*



Tales de Mileto

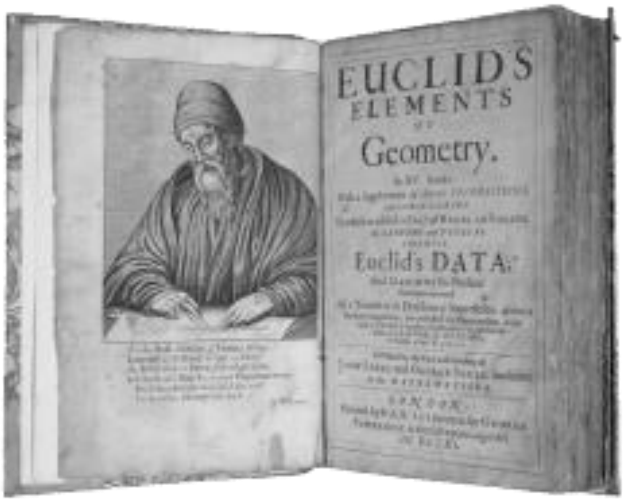
Pitágoras de Samus (586 a.C. – 500 a.C.), um dos grandes matemáticos da Antiguidade, viajou bastante pelo mundo, tendo visitado o Egito e Babilônia, onde entrou em contato com vários matemáticos. Quando voltou à Grécia, fundou a Escola Pitagórica. Os pitagóricos acreditavam firmemente que a essência de tudo, tanto na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, podia ser explicada através das propriedades dos números inteiros e/ou das suas razões.

Além do teorema que leva seu nome, deve-se também a ele o conceito geométrico do espaço, como ente contínuo e ilimitado, o estudo e construção dos poliedros regulares e o dos polígonos. Pelo estudo das propriedades das figuras, traduzindo-se por meio de relações entre números, e das propriedades dos números em relação com a geometria, chegou à noção de número irracional e de grandezas incomensuráveis [1, p. 16]

Pitágoras de Samus

Por volta de 499 a.C. nasceu Anaxágoras, filósofo, biólogo, astrônomo, físico e matemático grego. Descendente da escola jônica de Tales, foi um dos responsáveis por mudanças fundamentais na matemática de sua época. Defendia que há em cada coisa uma pequena parte de todas as outras coisas.

Euclides de Alexandria (325 a.C. – 265 a.C.), ficou conhecido pelo seu mais famoso trabalho: "*Os Elementos*", conjunto de treze livros que reuniam todo o conhecimento matemático desenvolvido até então sobre geometria (plana e espacial), teoria dos números e álgebra geométrica elementar. Seu nome ficou na história da ciência para sempre associado à primeira concepção da Geometria como um conjunto sistematizado e lógico de propriedades, organizando-as de forma lógica e demonstrando-as, tomando como ponto de partida um conjunto reduzido de proposições que são aceitas como verdadeiras, sem necessidade de demonstração e que são chamados de axiomas ou postulados.



Versão do livro *Os Elementos*

Arquimedes, nascido em 287 a. C. na ilha Siracusa, atual Sicília, foi matemático e inventor grego. Criou o método para calcular o número PI (π) com uma aproximação tão grande quanto se queira: o método dos perímetros, através do qual são calculados perímetros e diâmetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo. Apresentou soluções para certos problemas e estudou os sólidos gerados pela revolução das cônicas em torno dos seus eixos. Em mecânica, são atribuídas a ele algumas invenções, tais como a rosca sem fim, a roldana móvel, a roda dentada e a alavanca. Em física, no seu Tratado dos Corpos Flutuantes, estabeleceu as leis fundamentais da estática e da hidrostática.

Papus, que viveu por volta de 300 a.C., escreveu "*Coleções Matemáticas*", reunião de trabalhos anteriores acompanhado de comentários de uma grande quantidade de proposições originais com aprimoramentos, extensões e notas biográficas [4, p. 211].

Outros matemáticos contribuíram significativamente para a expansão do conhecimento grego, tais como: Arquitas (440 a.C.), Hipasus (400 a.C.), Demócrito (480 a.C.), Hípias de Elis (480 a.C.), Hipócrates de Quios (viveu por volta de 430 a.C.), Platão (427 a.C.–347a.C.), Eudóxio (408 a.C.–355 a.C.), e Apolônio (nascido por volta de 462 a.C.).

A Matemática da Grécia Antiga, que prevaleceu entre 600 a.C. e 600 d.C., disseminou-se por vários lugares, entre os quais Jônia, Atenas e Alexandria, e se revelou sem uniformidade no que concerne a intervalos de tempo e, mesmo em certo tempo e local, foi marcada por diferenças de nível de interesse e realização matemática [3, p.120]. Foi neste período, marcado por guerras políticas e o estabelecimento dos Impérios Macedônio e Romano, que surgiram contribuições significativas na germinação e florescimento do conhecimento da humanidade, tanto no campo da estrutura da Matemática como em outras ciências.

3. OS INSTRUMENTOS EUCLIDIANOS

Na obra “*Os Elementos”*, as proposições se apresentam na forma de problemas de construções geométricas. Tais problemas são, de certa forma, um jogo de construções que estabelece regras a serem seguidas. Elas estipulam quais são os instrumentos que podem ser utilizados para efetuar as construções. São eles: a régua não graduada e o compasso euclidiano. Na verdade, Euclides não menciona a régua e o compasso como instrumentos de construção, mas sim a linha reta e o círculo. Existe uma linha de pensamento que considera que as construções geométricas aceitáveis, no tempo de Euclides e por influência de Platão, deviam ser realizadas com régua não graduada e compasso. Devido à valorização da matemática teórica, Platão desprezava as construções mecânicas, ao passo que as retas e os círculos, por possuírem propriedades especiais, seriam figuras mais aceitáveis do que as outras:

> *“Nos três primeiros postulados dos Elementos, Euclides enuncia as três “construções” permitidas em geometria: (i) traçar uma reta por dois pontos; (ii) prolongar uma reta limitada continuamente segundo uma reta; (iii) descrever um círculo com qualquer centro e qualquer distância [...] A restrição de que essas construções devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua sem escalas e um compasso tem tradicionalmente sido atribuída a Platão”* [4, p. 29].

Como os postulados de “*Os Elementos”* restringem o uso da régua e do compasso, esses instrumentos são conhecidos como instrumentos euclidianos [4, p. 134].

A régua não graduada não possui marcas e serve apenas para traçar um segmento cujas extremidades são dois pontos distintos ou traçar uma reta que os contém. Ou seja, a régua euclidiana é não graduada e infinita.

O compasso euclidiano é muito diferente do compasso que conhecemos. Ele serve apenas para traçar um círculo com o centro num ponto A qualquer, passando por um ponto B, de forma que o raio seja o segmento $\overline{AB}$. Com esse compasso não é possível transportar segmentos, haja vista que seus braços se fecham quando uma de suas pontas é tirada do papel. Essas operações individuais feitas com régua e compasso são chamadas de construções elementares. São elas:

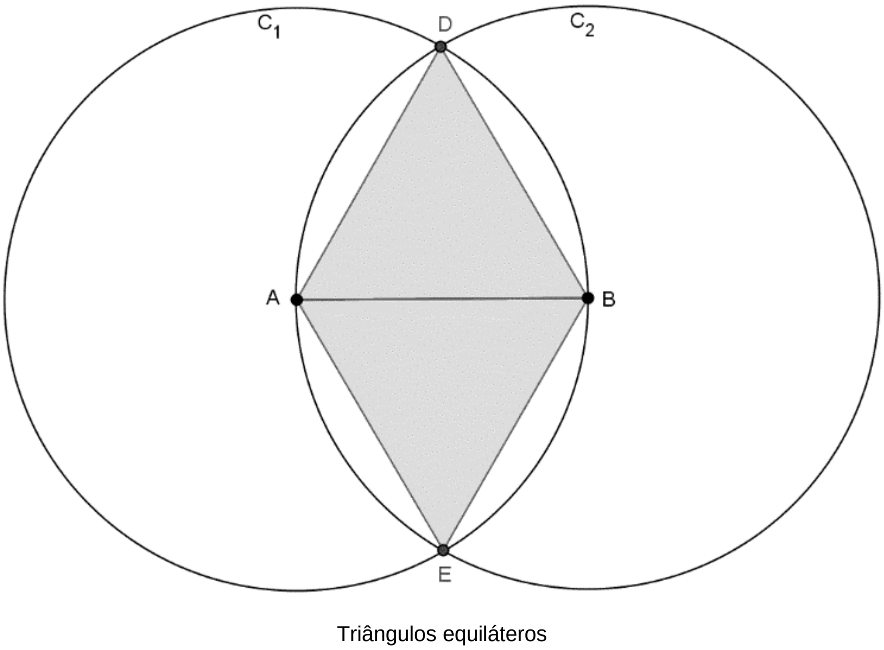
- Dados dois pontos, traçar uma reta que passe por eles.
- Dados dois pontos, traçar o segmento de reta que os conecta.
- Dado um ponto e um segmento de reta, traçar a circunferência que tem centro no ponto e raio igual ao comprimento do segmento de reta.

É permitido obter pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: interseções de retas, interseções de circunferências e interseções de retas com circunferências. Com esses pontos obtidos, podemos traçar novas retas e novas circunferências e assim sucessivamente.

Alguns exemplos de construções com régua e compasso[1] [6]:

- **Construir um triângulo equilátero dado um de seus lados**

É dado o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$. Com centro em A e raio $|\overline{\mathrm{AB}}|$, traçar uma circunferência $\mathcal{C}_1$. Com centro em B e raio $|\overline{\mathrm{AB}}|$, traçar uma circunferência $\mathcal{C}_2$. A interseção entre $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são os pontos D e E. Os triângulos ABD e ABE são equiláteros, ou seja, possuem os três lados com mesma medida $|\overline{\mathrm{AB}}|$.

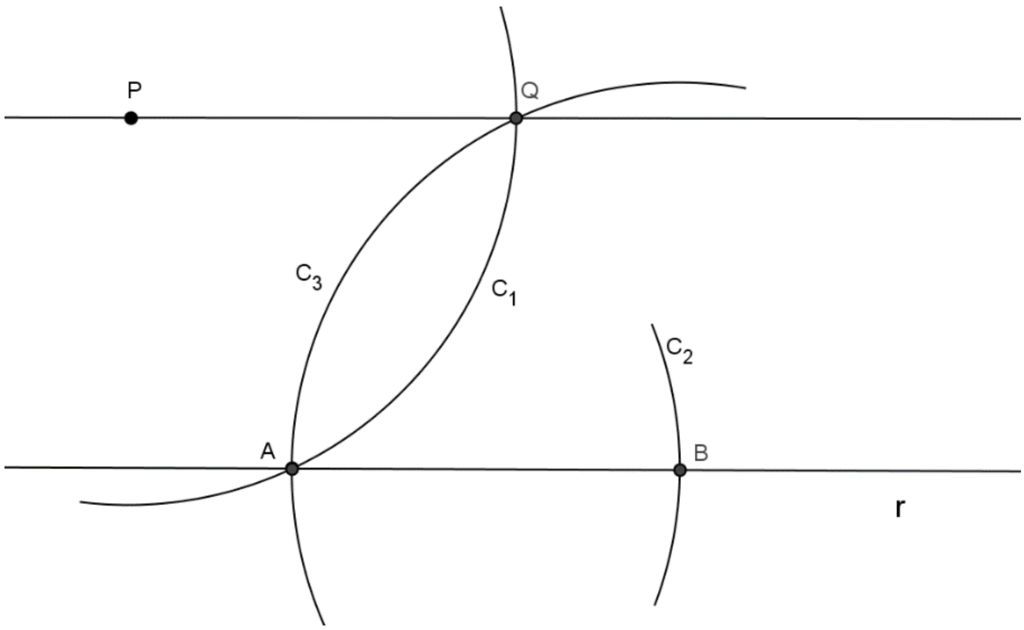


Triângulos equiláteros

1: As construções geométricas deste trabalho foram feitas com uso do software Geogebra

- **Construir uma reta paralela à outra reta dada, passando por um ponto dado.**

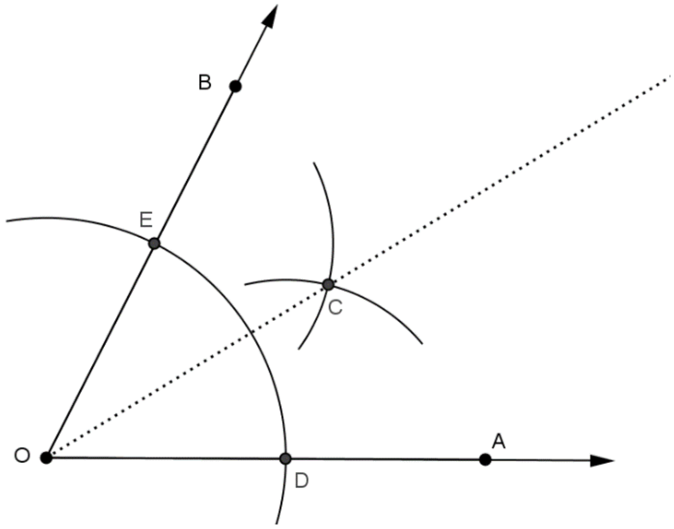
Para traçar por um ponto P, uma reta paralela a uma reta dada *r*, devemos construir três círculos com o mesmo raio: o primeiro ($\mathcal{C}_1$), com centro em P, determinando um ponto A na reta *r*. O segundo ($\mathcal{C}_2$) com centro em A, determinando o ponto B na reta *r*. O terceiro ($\mathcal{C}_3$) com centro em B, determinando o ponto Q no primeiro círculo. Pelos pontos P e Q traçamos a reta paralela à reta *r*.



Retas paralelas

- **Construir a bissetriz de um ângulo.**

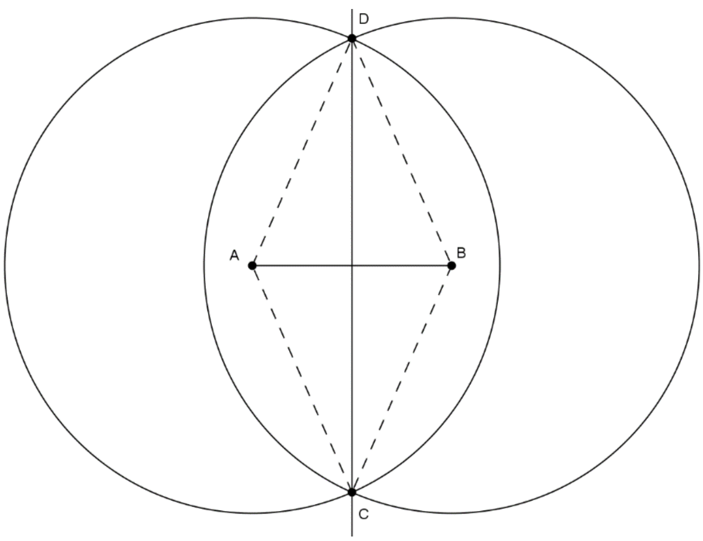
A bissetriz de um ângulo AÔB é a semirreta $\overrightarrow{OC}$, tal que a medida de AÔC é igual à medida de CÔB, isto é, a semirreta que "divide" AÔB em dois ângulos iguais. Para construir a bissetriz usando régua e compasso, traçamos uma circunferência de centro em O que determina os pontos D e E nos lados do ângulo AÔB. Em seguida, traçamos duas outras circunferências de mesmo raio com centros em D e E de tal forma que elas se cruzem no ponto C. A semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo AÔB.



Bissetriz

- **Construir a mediatriz de um segmento.**

Consideremos um segmento de reta $\overline{AB}$. Chamamos de mediatriz do segmento $\overline{AB}$ a reta perpendicular a ele, que passa pelo seu ponto médio. Para construí-la, utilizamos os seguintes procedimentos: com centros em A e B, traçamos duas circunferências de mesmo raio, sendo este maior que a medida do comprimento do segmento. Chamemos de C e D os pontos de interseção destas duas circunferências. Em seguida, traçamos a reta que passa pelo ponto C e D. Essa reta é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. A justificativa é que, por construção, ADBC forma um losango, e com isso, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio.



Mediatriz

4. OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA GREGA

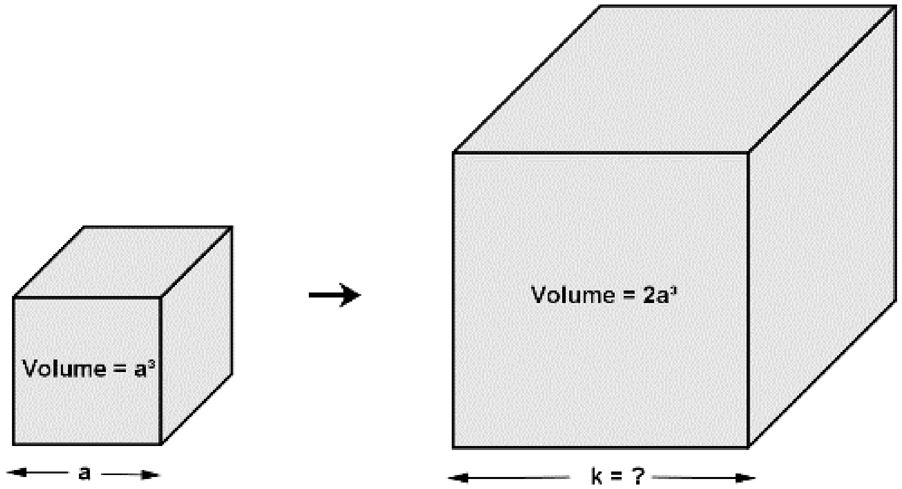
Por volta do século VI a.C. tiveram início os estudos que tentavam resolver três problemas geométricos que desafiaram inúmeros matemáticos durante mais de dois mil anos. Nesse período diversas soluções foram propostas, mas não estavam de acordo com as regras do jogo, que permitiam apenas a utilização de régua não graduada e compasso para se efetuar as construções. Estes problemas tornaram-se clássicos, talvez por serem os primeiros onde surgiram grandes dificuldades de resolução, com obediência às regras inicialmente colocadas. São conhecidos pelos *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*.

4.1 A DUPLICAÇÃO DO CUBO

A origem desse problema é relatada ao longo da história que conta sobre a insatisfação do rei Minos com o tamanho do túmulo erguido para seu filho Glauco. Ordenou que o tamanho fosse dobrado e, para tanto, pensou-se que bastaria dobrar as dimensões do túmulo para resolver a questão. Não sendo essa a solução do problema, os geômetras começaram a estudar qual o modo correto de como dobrar um dado sólido mantendo-se sua forma.

Outro relato diz respeito da orientação dada pelo oráculo de Delos (atualmente um dos grandes sítios arqueológicos da Grécia, localizado em uma ilhota pequena e desabitada) aos delianos de modo a livrarem-se de uma peste que os castigava. Para tanto, seria necessário dobrar o tamanho do altar cúbico de Apolo.

A origem deste problema não é muito clara, mas, verdadeiras ou falsas as lendas e suposições sobre ele, uma coisa é certa: ele foi estudado na Academia de Platão, onde geômetras como Arquitas e Menecmo atribuíram soluções que não se enquadravam na geometria do primeiro livro de Euclides. O enunciado do problema é simples*: dada a aresta de um cubo, construir, com régua e compasso, a aresta de outro cubo cujo volume é o dobro do cubo inicial.*

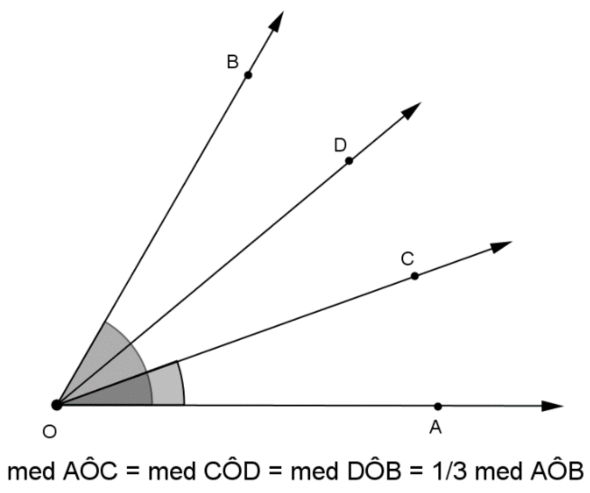


Representação da duplicação do cubo

4.2 A TRISSEÇÃO DE UM ÂNGULO

Não é conhecida a origem do problema da trisseção do ângulo, mas é muito provável que tenha surgido na construção de polígonos regulares. Por exemplo, para construir um polígono regular de nove lados é necessário trissecar um ângulo de 120° [4, p.137]. Isto geralmente não é possível. Podemos, também, inferir que este problema surgiu como uma extensão natural da bisseção de um ângulo, tarefa extremamente fácil e possível de executar com régua não graduada e compasso

Eis o problema: *trissecar um ângulo qualquer, ou seja, dividi-lo em três partes iguais, usando apenas uma régua não graduada e um compasso.*

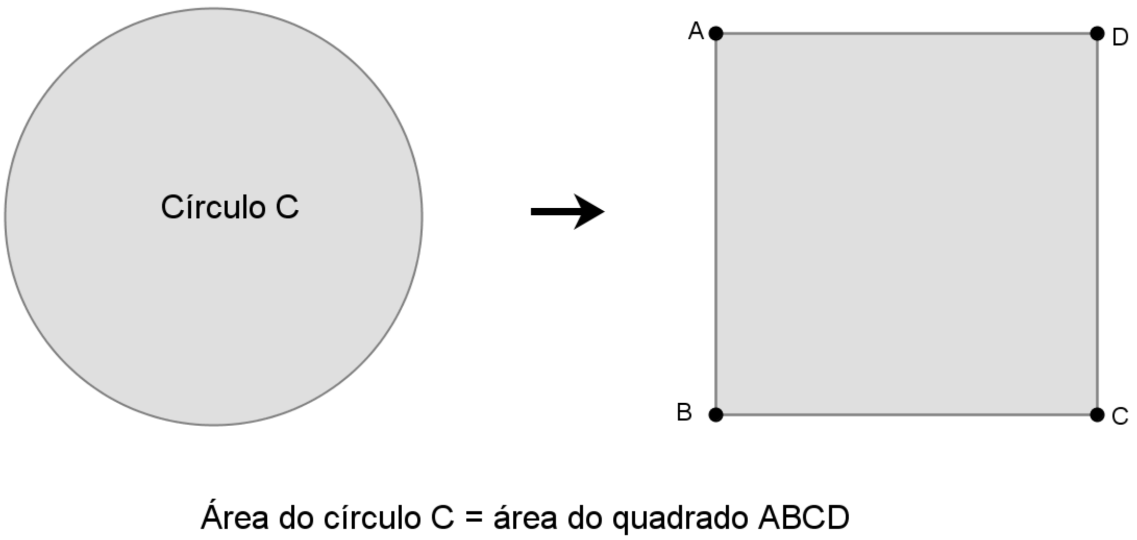


Representação da trisseção de um ângulo

4.3 A QUADRATURA DO CÍRCULO

Quadrar um círculo significa *construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado*. Muitos matemáticos da Grécia Antiga tentaram solucionar esse problema utilizando curvas ou construções mecânicas. O primeiro registro que se tem da busca da solução desse problema refere-se a Anaxágoras.

Hipócrates de Quios conseguiu quadrar certas lúnulas (figuras em forma de lua) limitadas por dois arcos de circunferência, mas não obteve sucesso em quadrar o círculo. Provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que este [4, p. 140].



Representação da quadratura do círculo

5. TENTATIVAS DE RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

O problema de quadrar um círculo talvez tenha chegado aos gregos, possivelmente pelo interesse em se quadrar polígonos. Um primeiro registro do problema faz menção ao Papiro Rhind (ou Papiro de Ahmes) que contém 85 problemas. Segundo fontes históricas, ele é um dos mais conhecidos e antigos papiros da Matemática Antiga. O amplo desenvolvimento matemático dos egípcios possibilitou que fossem considerados os pioneiros na resolução do problema da quadratura. No problema 50, segundo o escriba Ahmes, sem mostrar qualquer explicação, a área de um círculo é dada pela área de um quadrado cujo lado é o diâmetro diminuído de $\frac{1}{9}$, isto é, a área de um círculo com diâmetro *d* é igual a área de um quadrado de lado $\frac{8d}{9}$. Sabemos que a área do círculo de raio *r* é igual a πr^2 e a área do quadrado de lado *l* é igual a l^2. Considerando as informações do problema contido no papiro, temos:

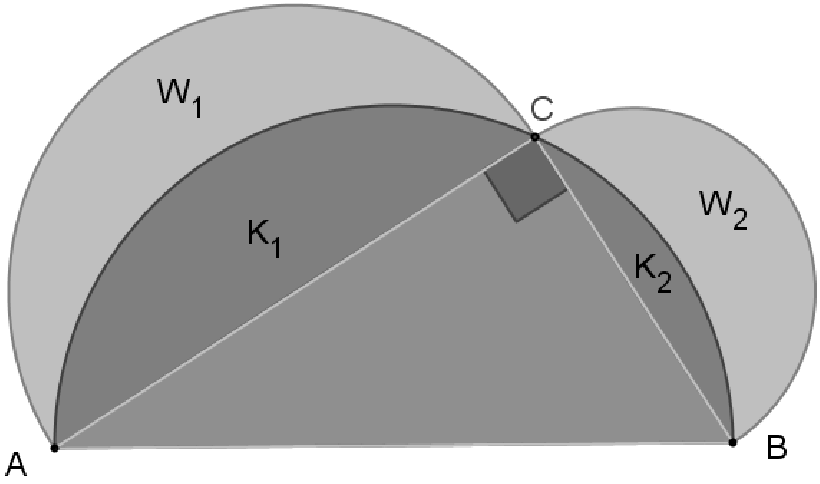
área do círculo = $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

área do quadrado = $\left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \frac{64d^2}{81}$

Fazendo $\pi \frac{d^2}{4} = \frac{64d^2}{81}$, obtemos um valor aproximado de π: 3,1605. Embora esta não seja uma construção geométrica precisa é uma boa aproximação para o número π. Observemos que a diferença para o valor de π, calculado após o século XIV, foi de apenas 0,0190.

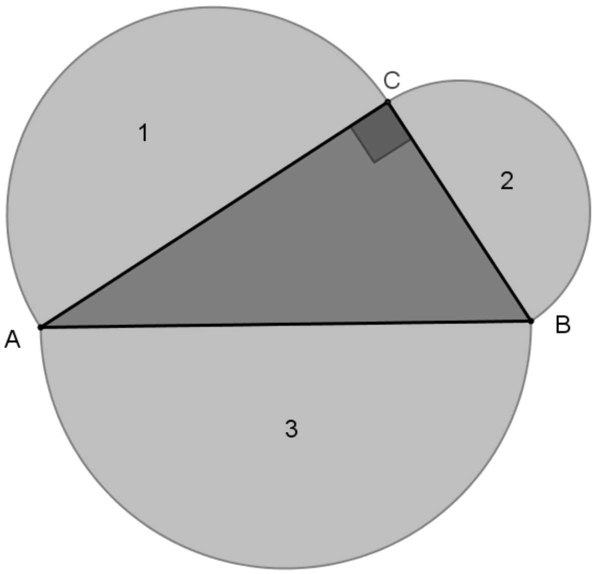
Na segunda metade do século V a.C., na ilha de Quios, nasceu Hipócrates. Um de seus maiores trabalhos foi a demonstração que *as áreas de dois círculos (ou semicírculos) estão entre si na mesma razão que os quadrados de seus diâmetros*, resultado este, descoberto por Pitágoras.

Na tentativa de resolver o problema da quadratura do círculo, Hipócrates foi o primeiro a quadrar lúnulas [4, p. 140], que consistem em figuras que possuem a forma semelhante à uma lua limitada por dois arcos de circunferência.



Lúnulas de Hipócrates

Para obtermos as lúnulas $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$, consideremos um triângulo retângulo ABC, e circunscrevemos um semicírculo de diâmetro $|\overline{AB}|$. Sobre os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, traçamos os semicírculos de diâmetros iguais aos catetos. Hipócrates demonstrou que a área W_1 adicionada à área W_2 é igual à área do triângulo ABC. Para provar tal afirmação, Hipócrates desenhou três semicírculos cujos diâmetros são lados de um triângulo retângulo ABC, conforme figura a seguir.



Semicírculos

Utilizando-se dos resultados de Pitágoras, Hipócrates estabeleceu as seguintes relações:

$$\frac{\text{área 1}}{\text{área 3}} = \frac{|\overline{AC}|^2}{|\overline{AB}|^2} \quad \text{e} \quad \frac{\text{área 2}}{\text{área 3}} = \frac{|\overline{CB}|^2}{|\overline{AB}|^2}.$$

Fazendo:

$$\frac{\text{área 1}}{\text{área 3}} + \frac{\text{área 2}}{\text{área 3}} = \frac{\text{área 1+área 2}}{\text{área 3}} \Rightarrow \frac{|\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2}{|\overline{AB}|^2} = \frac{|\overline{AB}|^2}{|\overline{AB}|^2} = 1.$$

Com estes resultados e os associando à figura das lúnulas, obtém-se:

área W_1 + área K_1 + área W_2 + área K_2 = área 1 + área 2 = área 3.

Porém,

área 3 = área K_1 + área K_2 + área do triângulo ABC, pode-se escrever, então:

área W_1 + área K_1 + área W_2 + área K_2 = área K_1 + área K_2 + área do triângulo ABC. Cancelando termos iguais em ambos os lados da igualdade, obtém-se:

área W_1 + área W_2 = área do triângulo ABC.

Tal resultado parece ter encorajado Hipócrates, bem como seus contemporâneos, a pensar que algum dia se conseguiria quadrar o círculo [2, p. 46].

Segundo Eves [4], Hipócrates também apresentou o primeiro progresso em relação à duplicação do cubo, utilizando-se do conceito de médias proporcionais[2] entre dois segmentos de reta de comprimentos *s* e *2s*.

Denotando-se as médias proporcionais por x e y tem-se:

$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s} \Rightarrow x^2 = sy$ e $y^2 = 2sx$. Desse resultado, obtém-se que:

$$y = \frac{x^2}{s} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{s}\right)^2 = 2sx \Rightarrow \frac{x^4}{s^2} = 2sx \Rightarrow x^3 = 2s^3,$$

2: Média proporcional é outra denominação de média geométrica. A média geométrica ou proporcional é igual à raiz quadrada do produto de dois números.

onde *x* é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo de aresta *s*. Notadamente, trata-se de uma equação cúbica cuja resolução não era do conhecimento matemático até então.

Depois de Hipócrates fazer sua redução do problema, as tentativas subsequentes de duplicação do cubo tomaram como caminho a construção de duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados.

Apesar de persistir a impossibilidade de solução usando apenas a régua não graduada e o compasso, a contribuição de Hipócrates possibilitou o desenvolvimento de novos mecanismos geométricos às resoluções posteriores, contribuindo com a ampliação do conhecimento matemático.

Quanto à trisseção de um ângulo, Papus de Alexandria, no Livro IV da sua *Colecção Matemática,* afirma que os geômetras gregos foram incapazes de resolver o problema usando apenas métodos planos, isto é, utilizando unicamente régua não graduada e compasso, pelo fato do problema não ser “plano”, mas sim “sólido”. Acrescenta ainda que, como os primeiros geômetras não estavam familiarizados com as seções cônicas, o problema ficou na incerteza. Apesar disso, mais tarde, executaram a trisseção do ângulo após o terem reduzido a um outro tipo de problema que veremos adiante.

6. SOLUÇÕES PARA OS PROBLEMAS

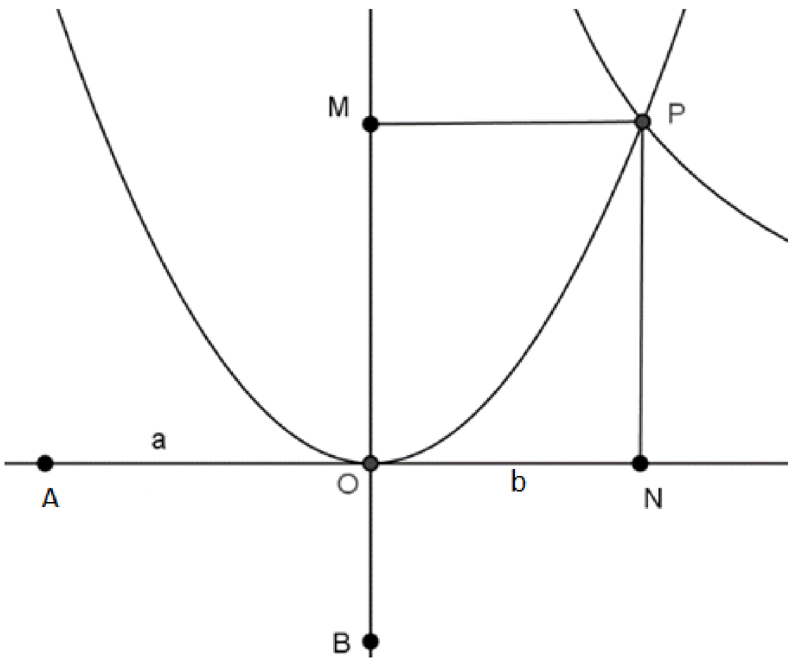
Quando escrevemos soluções, estamos considerando uma solução para o problema que não está de acordo com os requisitos das construções com régua não graduada e compasso.

6.1 A DUPLICAÇÃO DE CUBO

SOLUÇÕES DE MENAECMO

Menaecmo, matemático do século IV a.C., está intrinsicamente associado à ideia de certas curvas, que hoje conhecemos como elipse, hipérbole e parábola. Suas descobertas surgiram durante a procura de uma solução para o problema da duplicação do cubo que envolvia curvas com propriedades que permitissem encontrar dois meios proporcionais da redução de Hipócrates. As soluções encontradas têm como base a construção de um determinado ponto de interseção entre uma parábola e uma hipérbole equilátera (primeira solução), ou ainda, entre duas parábolas (segunda solução).

Primeira solução:



Primeira solução de Menaecmo

Ele supôs que $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ são dois segmentos de reta, sendo $|\overline{AO}| > \overline{|OB|}$ e que eles formam um ângulo reto em O. O próximo passo foi traçar a média proporcional $\overline{OM}$ ao longo de $\overleftrightarrow{BO}$ e a média proporcional $\overline{ON}$ ao longo de $\overleftrightarrow{AO}$. Logo após ele completou o retângulo OMPN.

Como $\dfrac{\overline{|AO|}}{|\overline{OM}|} = \dfrac{|\overline{OM}|}{\overline{|ON|}} = \dfrac{|\overline{ON}|}{|\overline{OB}|}$, temos:

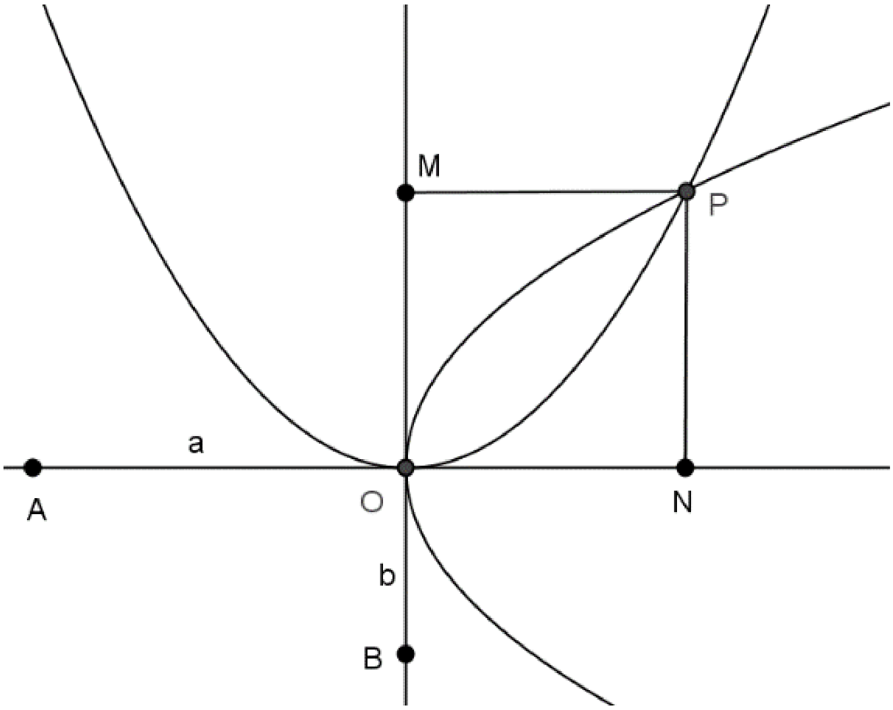
(I) $\overline{|OB|} \,.\, |\overline{OM}| = |\overline{ON}|^2 = |\overline{PM}|^2$ de modo que o ponto P está sobre uma parábola que tem como vértice o ponto O, $\overline{OM}$ como eixo e $\overline{OB}$ como corda focal de menor comprimento.

(II) $|\overline{AO}| \,.\, |\overline{OB}| = |\overline{OM}| \,.\, |\overline{ON}| = |\overline{PN}| \,.\, |\overline{PM}|$ de modo que o ponto P está sobre uma hipérbole com o ponto O como centro e $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ como assíntotas. Assim, para encontrar o ponto P, temos que construir uma parábola com vértice em O, $\overline{OM}$ como eixo e $\overline{OB}$ como corda focal de comprimento mínimo. Construímos, agora, uma hipérbole com assíntotas $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ de modo que a área do retângulo compreendido pelos segmentos de retas $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$ construído a partir do ponto P, seja igual a área do retângulo compreendido pelos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$.

Sendo o ponto P a interseção da parábola com a hipérbole, o problema fica então resolvido, pois

$$\frac{|\overline{AO}|}{|\overline{OM}|} = \frac{|\overline{OM}|}{|\overline{ON}|} = \frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OB}|}.$$

Segunda solução:



Segunda solução de Menaecmo

Do mesmo modo que na primeira solução, Menaecmo considerou o problema resolvido a partir da relação

$$\frac{|\overline{AO}|}{|\overline{OM}|} = \frac{|\overline{OM}|}{|\overline{ON}|} = \frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OB}|}.$$

Assim, estabeleceu as seguintes relações:

(I) $|\overline{OB}| \,.\, |\overline{OM}| = |\overline{ON}|^2 = |\overline{PM}|^2$, de modo que o ponto P está sobre uma parábola que tem como vértice o ponto O, $\overline{OM}$ como eixo e $\overline{OB}$ como corda focal de comprimento mínimo.

(II) $|\overline{AO}|.\ |\overline{ON}| = |\overline{OM}|^2 = |\overline{PN}|^2$, de modo que o ponto P está sobre uma parábola que tem o ponto O como vértice, $\overline{ON}$ como eixo e $\overline{AO}$ como corda focal de comprimento mínimo. Assim, para encontrar o ponto P devemos construir duas parábolas com eixos $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$, e $\overline{OB}$ e $\overline{AO}$ como cordas de comprimento mínimo, respectivamente.

Sendo o ponto P a interseção das duas parábolas, o problema fica então resolvido, pois $\frac{|\overline{AO}|}{|\overline{OM}|} = \frac{|\overline{OM}|}{|\overline{ON}|} = \frac{|\overline{ON}|}{|\overline{OB}|}$.

Analisando as resoluções vemos que o problema que se coloca é encontrar dois meios proporcionais entre dois segmentos *a* e *2a* (sendo *a* a aresta do cubo que será duplicado), ou seja, a determinação de x e y tais que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} .$$

Que nos leva às seguintes expressões:

(I) $x^2 = ay \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{a}$.

(II) $y^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{2a}$.

(III) $xy = 2a^2$.

Utilizando os conceitos da Geometria Analítica, podemos reconhecer que (I) e (II) representam parábolas e (III) representa uma hipérbole equilátera. Dessa forma podemos obter *x* de dois modos:

a) como abscissa do ponto de interseção da parábola $y = \frac{x^2}{a}$ com a hipérbole equilátera $xy = 2a^2$ (primeira solução de Menaecmo). Substituindo (I) em (III), temos:

$$x\left(\frac{x^2}{a}\right) = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 2a^3.$$

b) como abscissa do ponto de interseção das parábolas $y = \frac{x^2}{a}$ e $x = \frac{y^2}{2a}$ (segunda solução de Menaecmo). Substituindo (I) em (II), temos:

$$x = \frac{1}{2a}\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2a} \cdot \frac{x^4}{a^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x^4}{2a^3} \quad \Rightarrow \quad x^3 = 2a^3.$$

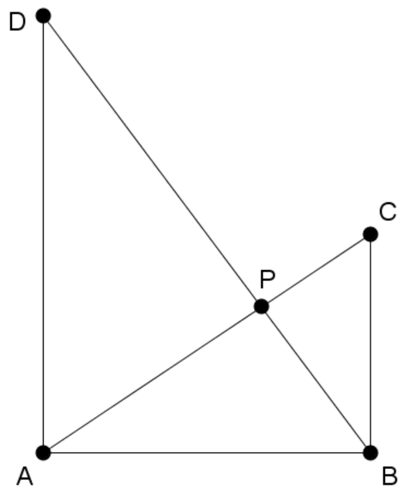
Podemos notar que, em ambos os casos, se conclui que $x^3 = 2a^3$, ou seja, x é a aresta do cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo dado, de aresta *a.* É importante ressaltar que, embora se encontre a aresta do cubo procurado, esta solução não se restringe ao uso exclusivo da régua não graduada e do compasso, haja vista que não é possível desenhar todos os pontos de uma parábola (ou de uma hipérbole) com tais instrumentos.

SOLUÇÃO DE PLATÃO, SEGUNDO EUTÓCIO

Eutócio (480 d.C. – 540 d.C.), foi o primeiro matemático grego a atribuir a Platão a solução que será apresentada a seguir. Como essa solução usa meios mecânicos[3] e estes eram reprovados por Platão, percebe-se que a atribuição é errada [4, p.136].

Consideremos dois triângulos DAB e CBA retos em A e B, respectivamente, de modo que o cateto $\overline{AB}$ seja comum. Suponhamos que as hipotenusas $\overline{DB}$ e $\overline{AC}$ se interceptam perpendicularmente no ponto P. Sendo os triângulos CPB, BPA e APD semelhantes.

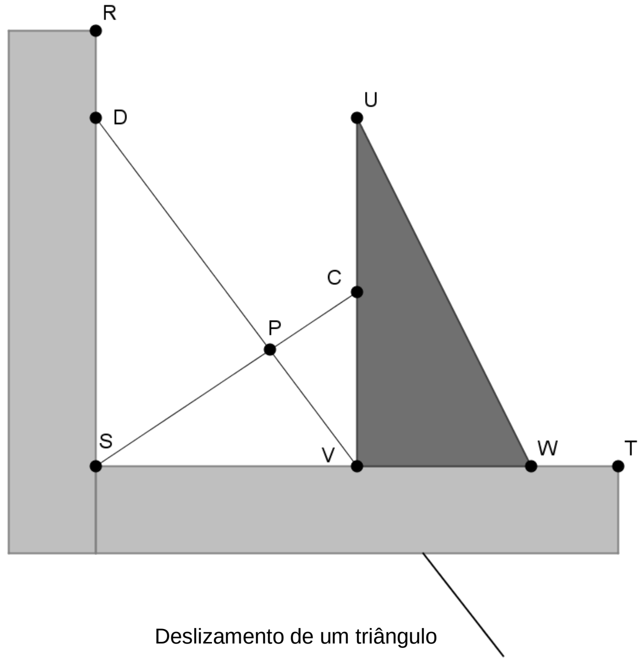
Segue que $\frac{|\overline{PC}|}{|\overline{PB}|} = \frac{|\overline{PB}|}{|\overline{PA}|} = \frac{|\overline{PA}|}{|\overline{PD}|}$. Logo, $|\overline{PB}|$ e $|\overline{PA}|$ são duas médias proporcionais entre $|\overline{PC}|$ e $|\overline{PD}|$. Desse modo o problema fica resolvido desde que se possa construir uma figura em que $|\overline{PD}| = 2|\overline{PC}|$.



Triângulos sobrepostos

3: Chamamos de meios mecânicos os procedimentos que se utilizam do movimento de objetos ou figuras com o propósito de se obter pontos e/ou retas.

A figura a seguir mostra como construir, mecanicamente, a figura desejada.



Tracemos duas retas perpendiculares interceptando-se no ponto P e marquemos $\overline{PC}$ e $\overline{PD}$ sobre elas, com $|\overline{PD}| = 2|\overline{PC}|$. A seguir, coloquemos um esquadro de carpinteiro, de lados internos $\overline{RS}$ e $\overline{ST}$, sobre a figura de modo que $\overline{SR}$ passe por D e o vértice S do ângulo reto fique no prolongamento de $\overline{CP}$. Faça escorregar sobre $\overline{ST}$ um triângulo retângulo UVW com o cateto $\overline{VW}$ no lado $\overline{ST}$, até que $\overline{VU}$ passe por C. A seguir, manipule o triângulo até que V esteja sobre o prolongamento de $\overline{DP}$.

No decorrer da história, outras soluções são encontradas, como por Nicomedes (280 a.C. – 210 a.C.) através da construção dos dois meios proporcionais utilizando a construção por nêusis (construção por ajustamento ou a inserção de um segmento de reta predefinido entre duas curvas ou retas, de modo que um ponto fixo se encontre ou neste segmento ou no seu prolongamento), que resolveu por meio de uma curva - a conchóide - também usada para resolver o problema da trisseção do ângulo.

Outras soluções vieram de Diócles (240 a.C. – 210 a.C.) que utilizou uma curva – chamada posteriormente de cissóide – para a resolução do problema e de Herão (10 d. C. – 80 d. C.) que utilizou, também, a ideia de duas médias proporcionais.

6.2 A TRISSEÇÃO DE UM ÂNGULO

As primeiras tentativas de solucionar a trisseção do ângulo utilizam, primeiramente, a geometria plana, ou seja, usam apenas retas e círculos. Posteriormente, com o avanço do conhecimento matemático e a descoberta das seções cônicas, o problema da trisseção do ângulo foi reduzido ao que se conhece hoje como construção por nêusis.

Consideremos um ângulo $A\hat{B}C$ qualquer, que pretendemos trissecar. Basta-nos pensar num ângulo agudo, pois no caso de um ângulo reto é possível trissecá-lo com régua não graduada e compasso, recorrendo a um triângulo equilátero. Vejamos: tomemos o ângulo reto $A\hat{B}C$ e tendo como base o segmento $\overline{BC}$, construímos o triângulo equilátero BCD. Em seguida, traçamos a bissetriz do ângulo $D\hat{B}C$. Assim, obtemos a trisseção do ângulo reto. Se considerarmos um ângulo obtuso, podemos decompô-lo na soma de um ângulo reto com um ângulo agudo.

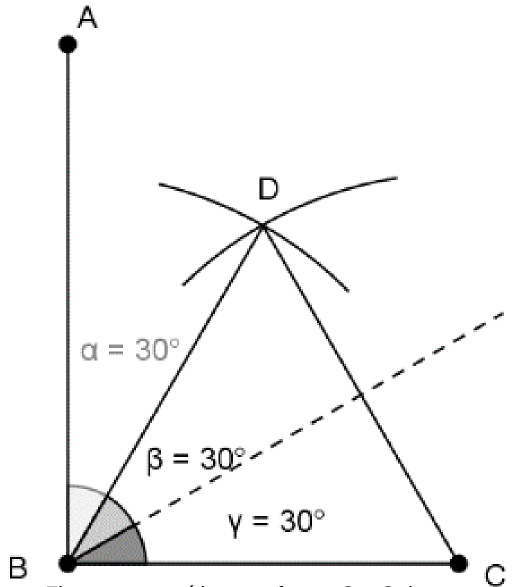


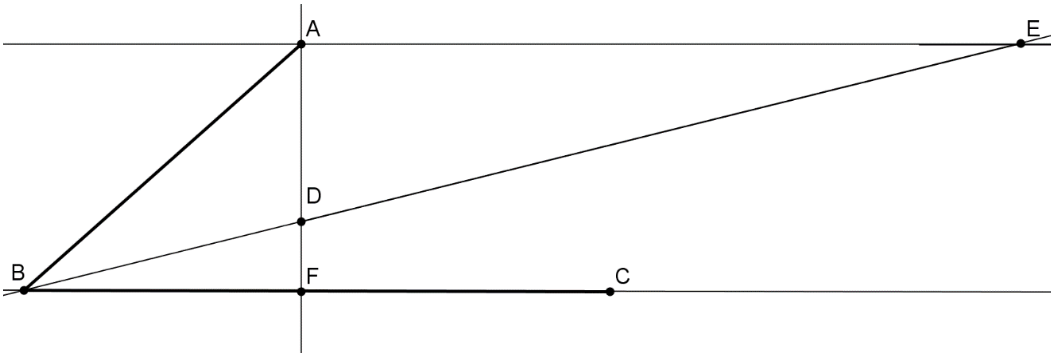
Figura construída no *software* GeoGebra

SOLUÇÃO DE PAPUS

Papus indica estes dois casos como corolários da proposição 32 do Livro IV da sua *Colecção Matemática*.

Vejamos, agora, a trisseção de um ângulo agudo onde se utiliza a construção por nêusis.

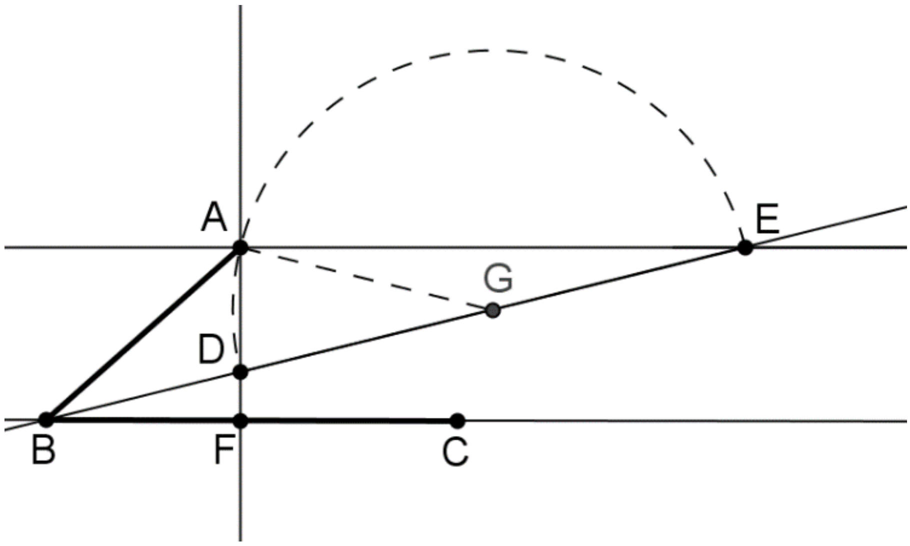
Consideremos um ângulo qualquer $A\hat{B}C$, que pretendemos trissecar. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ os lados desse ângulo, como mostra a figura a seguir.



Construção, por nêusis, no *software* GeoGebra

Traçamos, pelo ponto A, uma reta paralela e uma reta perpendicular ao lado $\overline{BC}$. O segmento $\overline{DE}$ é inserido entre estas duas retas de modo que o seu comprimento seja o dobro do comprimento do segmento $\overline{AB}$ e que o ponto B, vértice do ângulo a trissecar, esteja no seu prolongamento. Então, o ângulo $D\hat{B}C$ é a terça parte do ângulo $A\hat{B}C$.

A construção que se segue tem como objetivo verificar que o ângulo $A\hat{B}C$ é trissecado pela reta $\overleftrightarrow{DB}$.



Construção, por nêusis, no *software* GeoGebra

Marcamos G, ponto médio do segmento $\overline{DE}$ e traçamos o segmento de reta $\overline{AG}$. A reta $\overline{DE}$ intercepta as retas paralelas $\overline{AE}$ e $\overline{BC}$, formando os ângulos alternos internos $\mathrm{G\hat{E}A}$ e $\mathrm{D\hat{B}C}$ que têm medidas iguais. O ângulo $\mathrm{E\hat{A}D}$ é reto, então podemos inscrevê-lo em uma semicircunferência cujo diâmetro seja $|\overline{\mathrm{DE}}|$ e centro no ponto G. Assim, $|\overline{\mathrm{GE}}| = |\overline{\mathrm{GA}}|$ (ambos são raios), o triângulo AGE é isósceles e, portanto, os ângulos EÂG e GÊA (ângulos da base) têm medidas iguais. Temos, ainda, que $|\overline{\mathrm{DE}}|$ é o dobro de $|\overline{\mathrm{BA}}|$, G é o ponto médio de $\overline{\mathrm{DE}}$ e $|\overline{\mathrm{AB}}|$ é igual a $|\overline{\mathrm{AG}}|$. Chegamos à conclusão que o triângulo ABG é isósceles, portanto os ângulos $\mathrm{A\hat{B}G}$ e $\mathrm{B\hat{G}A}$ têm medidas iguais. Como o ângulo $\mathrm{B\hat{G}A}$ é um ângulo externo ao triângulo AGE, podemos afirmar que a medida do ângulo $\mathrm{B\hat{G}A}$ é igual à soma das medidas dos ângulos internos opostos, $\mathrm{E\hat{A}G}$ e $\mathrm{G\hat{E}A}$. Mas, a medida do ângulo $\mathrm{B\hat{G}A}$ é o dobro da medida do ângulo $\mathrm{G\hat{E}A}$ (ou do ângulo $\mathrm{E\hat{A}G}$) e como os ângulos $\mathrm{A\hat{B}D}$ e $\mathrm{B\hat{G}A}$ são iguais, tem-se que a medida do ângulo $\mathrm{D\hat{B}C}$ é a metade da medida ângulo $\mathrm{A\hat{B}D}$ e, finalmente, que a medida do ângulo $\mathrm{D\hat{B}C}$ é a terça parte da medida do ângulo $\mathrm{A\hat{B}C}$.

Pelo que foi exposto acima, o problema da trisseção de um ângulo agudo fica resolvido se soubermos inserir o segmento $\overline{\mathrm{DE}}$ (cuja medida é o dobro da medida de $\overline{\mathrm{BA}}$) entre as retas $\overleftrightarrow{\mathrm{FA}}$ e $\overleftrightarrow{\mathrm{AE}}$ apontando para o ponto B. Assim, o problema da trisseção do ângulo, foi reduzido a outro, que os geômetras gregos designaram por “*problema de construção por nêusis*”.

SOLUÇÃO ATRAVÉS DA CURVA DE HÍPIAS

A curva de Hípias, curva exótica mais antiga conhecida, foi criada pelo grego Hípias de Elis com o objetivo de resolver o problema da trisseção de um ângulo arbitrário. Outro grego, Diostrato de Atenas, usando a mesma curva, solucionou a questão da quadratura. Por estes motivos, a curva recebeu o nome de trissetriz ou quadratriz de Hípias.

Uma curva é mecânica quando seus pontos são gerados pela interseção de figuras geométricas em movimento. É o caso da curva de Hípias.

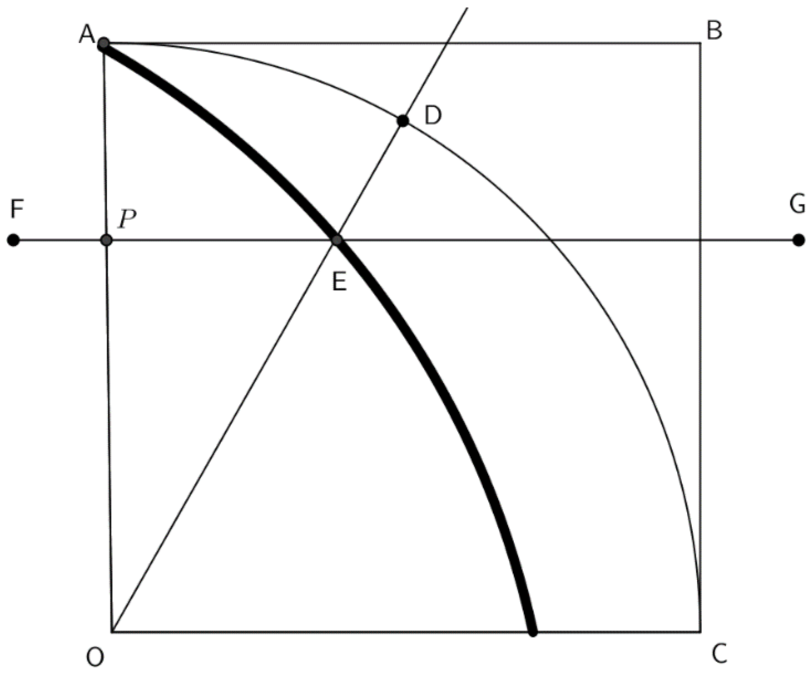
Podemos descrever a sua construção do seguinte modo:

a) seja um quadrado OABC, de acordo com a figura seguinte;

b) construímos uma reta $\overleftrightarrow{\mathrm{FG}}$, paralela ao lado $\overline{\mathrm{AB}}$ e que gradualmente desce, a uma velocidade constante, desde a sua posição inicial coincidente com o lado $\overline{\mathrm{AB}}$, até coincidir com o lado $\overline{\mathrm{OC}}$;

c) fazemos o lado $\overline{OA}$ rotacionar em torno do ponto O, com movimento circular uniforme, desde a posição inicial $\overline{OA}$ até à posição final coincidente com o lado $\overline{OC}$.

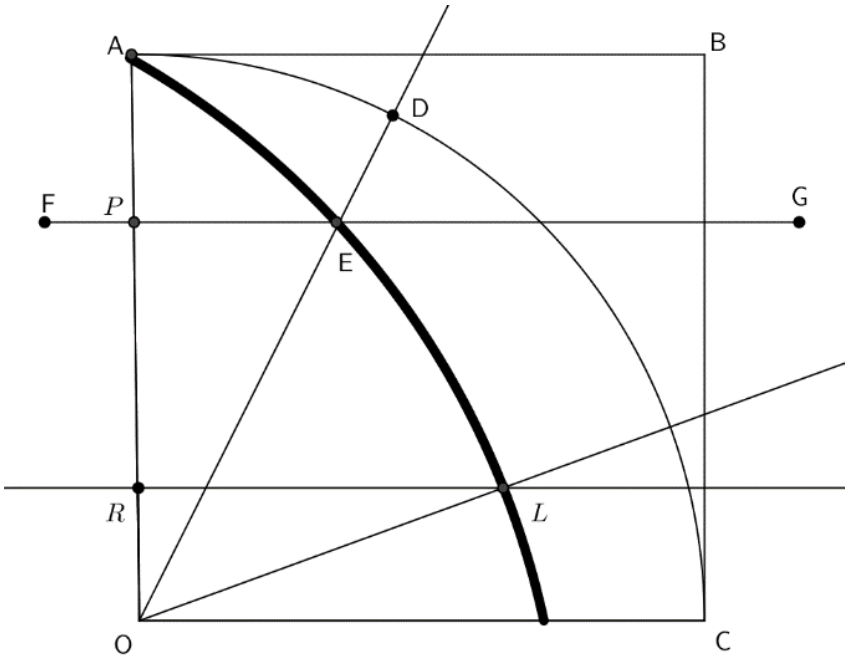
Ambos os movimentos descritos acima começam e terminam simultaneamente e têm velocidades constantes. Enquanto se deslocam, as duas linhas interceptam-se num determinado ponto E, ponto esse que descreve a trissetriz de Hípias, em destaque na figura abaixo.



Construção da curva de Hípias

Do modo como foram considerados os movimentos anteriores podemos afirmar que a distância percorrida pela reta $\overleftrightarrow{FG}$ é proporcional ao tempo gasto no seu percurso. Do mesmo modo, a amplitude do arco determinado na circunferência de centro *O* e raio $|\overline{OA}|$ é proporcional ao tempo percorrido no percurso circular deste raio. Assim, existe proporcionalidade entre a distância retilínea percorrida pela reta $\overleftrightarrow{FG}$ e a amplitude angular percorrida pelo lado $\overline{AO}$, ou seja, em todas as posições do ponto A, a condição $\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OP}|} = \frac{\text{arc AC}}{\text{arc DC}}$ é verificada.

Para trissecarmos um ângulo agudo $\text{E}\hat{\text{O}}\text{C}$, utilizando a trissetriz de Hípias, começamos por construir um quadrado OABC, a partir do lado $\overline{OC}$ do ângulo $\text{E}\hat{\text{O}}\text{C}$. Construímos a curva trissetriz de Hípias e designamos por E (sem perda de generalidade) o ponto de interseção de um dos lados do ângulo $E\hat{O}C$ com a curva. Por E, traçamos uma paralela ($\overleftrightarrow{FG}$) ao lado $\overline{AB}$ e designamos por P o ponto de interseção dessa paralela com o segmento $\overline{OA}$. Trissecamos o segmento $\overline{OP}$ (a trisseção de um segmento é possível com régua não graduada e compasso), sendo $\overline{OR}$ a sua terça parte. Por R, traçamos uma outra paralela a $\overline{AB}$ e designamos por L o ponto de interseção dessa paralela com a trissetriz de Hípias. Assim, a medida do ângulo $L\hat{O}C$ é a terça parte da medida do ângulo $E\hat{O}C$.



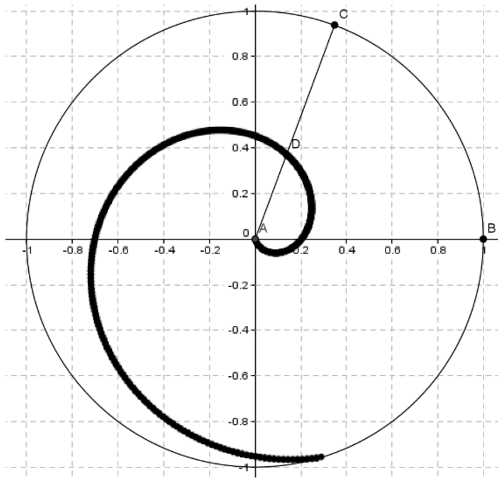
Construção da curva de Hípias (trisseção)

Tendo em vista que uma questão de proporcionalidade entre ângulos se reduziu a uma questão de proporcionalidade entre segmentos de reta, a curva trissetriz de Hípias permite dividir um ângulo agudo em *n* partes iguais dividindo um segmento de reta em *n* partes iguais. Observemos que, embora seja possível construir com régua não graduada e compasso alguns pontos da curva trissetriz de Hípias, não é possível desenhar a curva na sua totalidade, com o uso apenas dos instrumentos euclidianos. Continuamos, assim, sem uma solução para o problema de acordo com as regras de resolução inicialmente impostas.

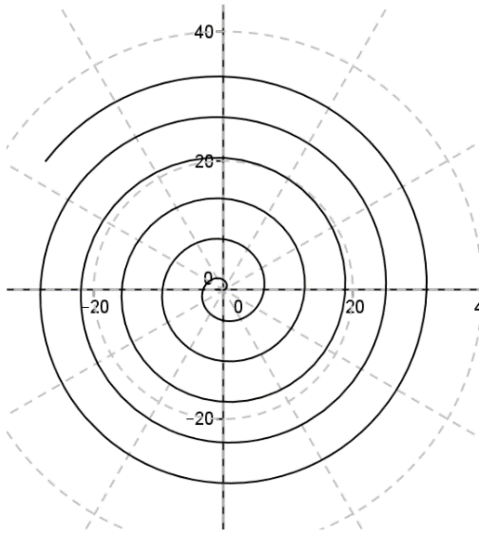
SOLUÇÃO DE ARQUIMEDES

Arquimedes deu uma grande contribuição matemática ao tentar resolver o problema da trisseção de um ângulo bem como o problema da duplicação do cubo. Para esse fim ele usou uma construção por nêusis, criando um lugar geométrico chamado de *espiral de Arquimedes*.

A espiral é definida como o lugar geométrico de um ponto que se move no plano, partindo da extremidade de um raio ou semirreta, uniformemente ao longo do raio enquanto este, por sua vez, gira uniformemente em torno de sua origem [2, p. 87].

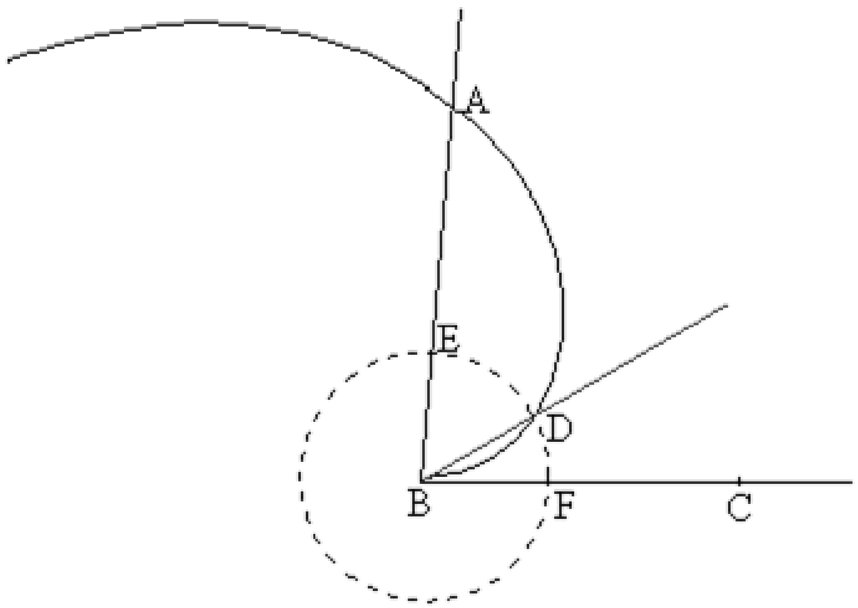


Espiral de Arquimedes com uma volta



Espiral de Arquimedes com várias voltas

Ao utilizarmos a espiral de Arquimedes para trissecar o ângulo, nos fixamos ao fato de que a distância entre a origem da espiral (B), e o ponto sobre a espiral (A), na figura abaixo, é proporcional ao ângulo cujos lados são a reta inicial e a reta $\overleftrightarrow{BA}$. Isto é, a ideia para a trisseção, como no caso da curva trissetriz de Hípias, é a da proporcionalidade entre uma distância em linha reta e uma medida angular. A curva espiral de Arquimedes permite dividir um ângulo em *n* partes iguais dividindo um segmento de reta em *n* partes iguais. No nosso caso particular, para trissecar o ângulo necessitamos apenas de trissecar um segmento de reta.



Uso da espiral de Arquimedes na trisseção de um ângulo

Consideremos o ângulo agudo $A\hat{B}C$ que pretendemos trissecar. Construímos a espiral de Arquimedes cuja origem é o vértice do ângulo (ponto B), fazendo coincidir um dos lados do ângulo, o lado $\overline{BC}$, com a reta inicial e o outro lado do ângulo, o lado $\overline{BA}$ interceptando a espiral no ponto A. Como o nosso objetivo é trissecar o ângulo, basta trissecarmos o segmento $\overline{AB}$, que é possível executar com reta não graduada e compasso. Designamos por E o ponto de $\overline{BA}$ tal que $|\overline{BE}| = \frac{1}{3}|\overline{BA}|$. Com centro no ponto B, construímos a circunferência de raio $|\overline{BE}|$, a qual vai intersecar a espiral de Arquimedes no ponto D e o lado $\overline{BC}$, no ponto F . Assim, a medida do ângulo $D\hat{B}F$ é a terça parte da medida do ângulo $A\hat{B}C$.

Vamos, agora, provar que a medida do ângulo $D\hat{B}F$ é de fato a terça parte da medida do ângulo dado $A\hat{B}C$. O fundamental da espiral é relacionar o comprimento do segmento de reta, que chamaremos de μ, com o ângulo gerado pelo segmento de reta a partir da sua posição inicial, o qual chamaremos de θ, ou seja, em coordenadas polares, $\mu = k\theta$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

Como A e D são dois pontos da espiral vem que $|\overline{BA}| = k\theta$ e $|\overline{BD}| = k\theta_1$, considerando θ a amplitude do ângulo $A\hat{B}C$ e θ_1 a amplitude do ângulo $D\hat{B}C$. Da maneira como o ponto E foi obtido, temos que $|\overline{BA}| = 3|\overline{BE}| = 3|\overline{BD}|$. Assim, temos que k$\theta$ = 3kθ_1, ou seja, $\theta_1 = \frac{\theta}{3}$. Portanto, a medida do ângulo $B\hat{D}C$ é a terça parte da medida do ângulo $A\hat{B}C$.

Notemos que se quisermos dividir o ângulo $A\hat{B}C$ em sete partes iguais, basta dividirmos o segmento $\overline{BA}$ em sete partes iguais. No entanto, não é possível construir a espiral de Arquimedes com régua não graduada e compasso.

6.3 A QUADRATURA DO CÍRCULO

O problema da quadratura do círculo era, para Papus, um problema "linear", ou seja, que faz uso de construção de curvas especiais.

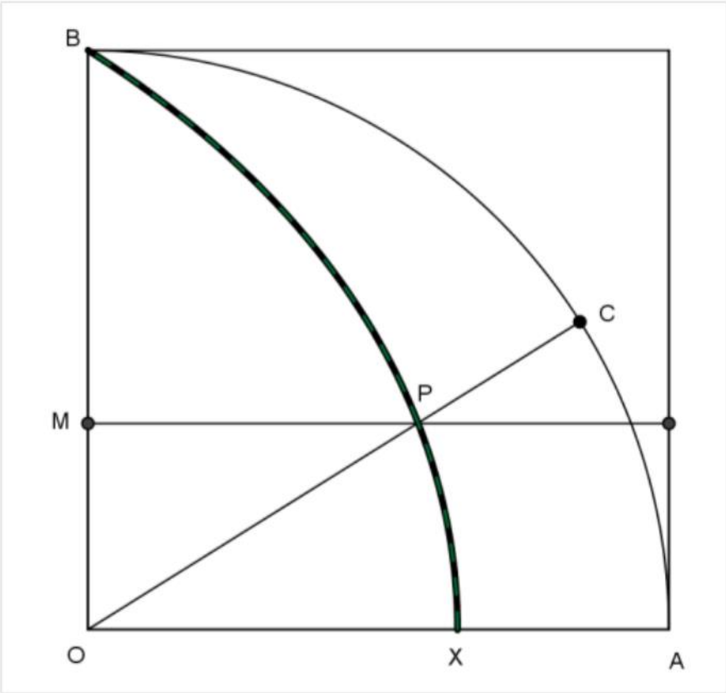
De acordo com Sebastiani [8]:

> *"O primeiro matemático grego que apresentou uma solução foi Anaxágoras (499-428 a.C.), considerado por Papus o maior filósofo grego que viveu por volta de 450 a.C. Não conhecemos a construção de Anaxágoras, mas o que se tem é o que escreveu Plutarco, que ele se ocupou desse problema quando estava preso. Em 1964, Gershenson e Greenber questionaram tal afirmação no livro: "Anaxagoras and the birth of Physics" publicado pela Baisdell, N.Y. Por outro lado, os pitagóricos disseram ter sido resolvido o problema por Sextus, o que também foi facilmente refutado, pois, no período em que Sextus viveu não poderia ter frequentado a escola de Pitágoras."*

Como vimos anteriormente, Hípias inventou a trissetriz (ou quadratriz), que pode ser usada tanto na trisseção de um ângulo como na quadratura do círculo. Não se sabe ao certo quem a usou, mas credita-se o uso desse método a Dionóstrato (350 a.C.). Tal método foi criticado por Esporo de Niceia (séc. III a. C.) tendo como base dois fatores: só conseguimos construir a curva se conseguirmos sincronizar as velocidades, ou seja, se conhecermos a relação entre o comprimento do círculo e seu diâmetro (nesse caso o problema estaria resolvido) e a impossibilidade de definir o ponto que se procura para a quadratura do círculo, no último momento em que as retas se interceptam, pois, elas se tornam coincidentes.

Vejamos, agora, uma solução para o problema, mencionado por Papus, através da quadratriz.

SOLUÇÃO DE PAPUS



Quadratriz

Podemos provar que $|\overline{OX}| = \frac{2r}{\pi}$, onde *r* é o raio da circunferência. Ao determinar $\overline{OX}$ seria possível, com régua e compasso, quadrar o círculo. Tomemos $|\overline{MO}| = y$, $|\overline{MP}| = x$, $|\overline{OB}| = |\overline{OA}| = r$ e med $(A\hat{O}C) = \theta$, com $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Como mostrado anteriormente, na quadratriz existe proporcionalidade entre os dois movimentos que nela estão contidos. Desse modo, podemos escrever:

$$\frac{y}{\theta} = k. \qquad \text{(I)}$$

com k uma constante de proporcionalidade. Quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos $y = r$. Substituindo em (I), obtemos:

$$\frac{2r}{\pi} = k . \qquad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), podemos escrever:

$$y = \frac{2.r.\theta}{\pi}. \qquad \text{(III)}$$

Em coordenadas polares $y = \rho.sen(\theta)$, ou ainda, $\rho = \frac{y}{sen\ (\theta)}$ **.** Substituindo (III) nessa última expressão, obtemos:

$$\rho = \frac{2.r.\theta}{\pi.sen\ (\theta)} . \qquad \text{(IV)}$$

Quando $\theta \to 0$, em (IV) temos:

$$\rho = \lim_{\theta\to 0} \frac{2.r.\theta}{\pi.sen\ (\theta)} = \lim_{\theta\to 0} \frac{2.r}{\pi}. \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{sen\ (\theta)} .$$

Do Cálculo, sabemos que

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{2.r}{\pi} = \frac{2r}{\pi} \quad \text{e} \quad \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\text{sen}\ (\theta)} = 1.$$

Assim, substituindo em (IV), concluímos que:

$$\rho = \frac{2r}{\pi} .$$

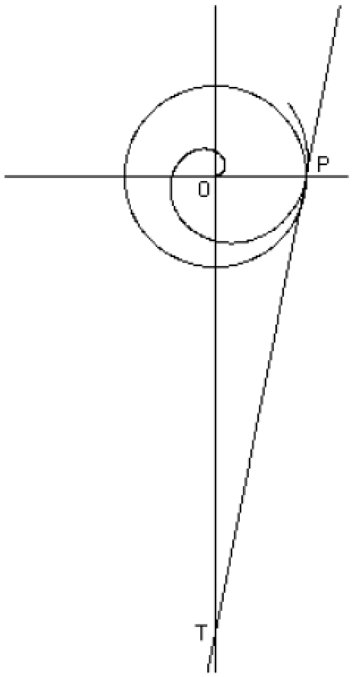
Quando $\theta = 0$, temos que $\rho = |\overline{OX}|$.

Após obtermos um segmento de comprimento $\frac{2r}{\pi}$, é possível construir π para obter a quadratura do círculo. Com efeito, é possível dividir, usando somente régua e compasso, $\frac{2r}{\pi}$ por $2r$ (desde que r seja construtível) e, em seguida, considerar o inverso de $\frac{1}{\pi}$.

Essa é uma solução da quadratura do círculo, porém não nos moldes propostos no problema original de utilizar apenas régua e compasso, pois a quadratriz não é construtível com esses instrumentos.

SOLUÇÃO DE ARQUIMEDES

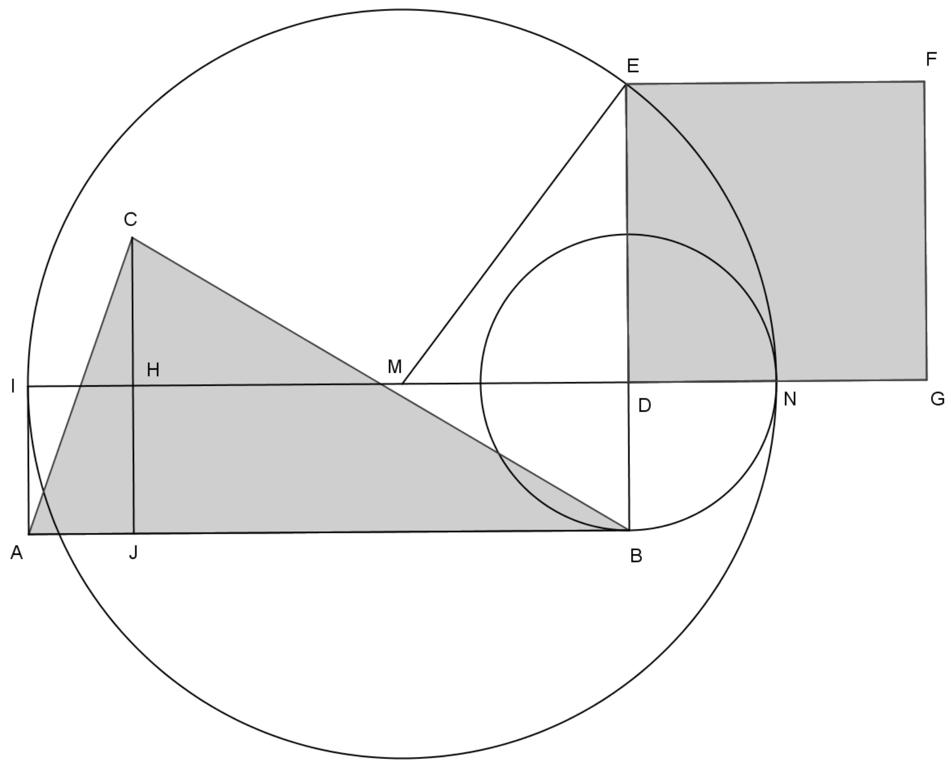
Arquimedes usou a espiral que leva seu nome para encontrar a solução. Sua equação em coordenadas polares é $\rho = a.\theta$. Sendo o ponto fixo O, encontramos P o ponto da curva que completou uma volta. Nesse ponto traçamos sua tangente, que corta a reta perpendicular $\overline{OP}$ no ponto T. Arquimedes provou que $|\overline{OT}|$ é o comprimento da circunferência do círculo de raio $|\overline{OP}|$. Isso, é claro, não mostra como achar a quadratura do círculo, mas ele já tinha mostrado que a área de um círculo é igual à área de um triângulo retângulo cujo cateto menor é igual ao raio e o maior é igual ao comprimento da circunferência, isto é, a área da circunferência de centro O e raio $|\overline{OP}|$ é igual à área do triângulo OPT.



Solução de Arquimedes

Agora basta achar um quadrado cuja área seja igual à do triângulo. Para tanto, recordemos como fazê-lo.

Para construir um quadrado cuja área seja igual a um triângulo dado, conhecidos seus lados, procedemos como se segue:



Quadrado de área igual a de um triângulo

- Seja um triângulo ABC qualquer. Traçamos sua altura $\overline{\mathrm{CJ}}$ e encontramos seu ponto médio e o chamamos de H.
- Construímos um retângulo com base $\overline{\mathrm{AB}}$ que passe por H. Este retângulo ABDI possui a mesma área que o triângulo ABC.
- Com centro em D descrevemos uma circunferência de raio $|\overline{\mathrm{BD}}|$.
- Prolongamos o segmento $\overline{\mathrm{ID}}$ interceptando a circunferência em N.
- Marcamos o ponto médio do segmento $\overline{\mathrm{IN}}$ e que chamaremos de M.
- Com centro em M, descrevemos uma circunferência de raio $|\overline{\mathrm{MN}}|$.
- Traçamos a perpendicular a $\overline{\mathrm{IM}}$ por D e marcamos o ponto E na circunferência maior.
- Construímos um quadrado sobre o segmento $\overline{\mathrm{DE}}$. Este quadrado terá a mesma área do triângulo ABC.

<u>Demonstração</u>:

A área do triângulo é dada por:

$A_T = \frac{\text{base . altura}}{2} = \frac{|\overline{AB}|\,|.\overline{CJ}|}{2} = \overline{|AB|}\ .\ |\overline{HJ}| = A_R$,

onde A_T é a área do triângulo e A_R é a área do retângulo de mesma área que o triângulo.

A área do retângulo é dada por:

$A_R = |\overline{ID}|.|\overline{DB}| = |\overline{ID}|.|\overline{DN}|$.

Da figura, temos:

$|\overline{ID}| = |\overline{IM}| + |\overline{MD}|$ e $|\overline{DN}| = |\overline{MN}| - |\overline{MD}|$.

Assim:

$A_R = |\overline{ID}|.\ |\overline{DN}| = (|\overline{IM}| + |\overline{MD}|)\ .\ (|\overline{IM}| - |\overline{MD}|) = (|\overline{IM}|)^2 - (|\overline{MD}|)^2$.

Do triângulo retângulo MDE, temos que:

$(|\overline{ME}|)^2 = (|\overline{MD}|)^2 + (|\overline{DE}|)^2$.

Mas $|\overline{ME}| = |\overline{IM}|$, logo:

$(|\overline{IM}|)^2 = (|\overline{MD}|)^2 + (|\overline{DE}|)^2$.

$(|\overline{DE}|)^2 = (|\overline{IM}|)^2 - (|\overline{MD}|)^2 =$ A_Q (área do quadrado DEFG). Portanto,

$A_T = A_R = A_Q$.

■

Como vimos, vários matemáticos tentaram resolver os três problemas, ora por aproximações, ora com uso de curvas e meios mecânicos. Porém, somente com régua não graduada e compasso, nenhum obteve êxito. Todas as tentativas contribuíram significativamente para a evolução do conhecimento matemático. Somente com o uso da Álgebra na Geometria, iniciada por Descartes com a sua Geometria Analítica, e com o advento da Álgebra e da Teoria das Equações Algébricas é que se pôde comprovar a insolubilidade da quadratura do círculo, da trisseção do ângulo e da duplicação do cubo.

7. FUNDAMENTAÇÕES ALGÉBRICAS

Podemos, agora, perguntar: que relação existe entre a geometria euclidiana e as teorias algébricas modernas?

Sabemos que a matemática grega teve seu percurso subordinado à geometria, cujo desenvolvimento foi influenciado pelas tentativas de resolver matematicamente os três problemas clássicos da Grécia Antiga.

Foram necessários mais de vinte séculos para que se desenvolvessem novas teorias matemáticas que pudessem responder às impossibilidades de algumas construções com régua não graduada e compasso.

Como é que se pode demonstrar que é impossível efetuar uma determinada construção com régua e compasso? É claro que para mostrar que uma certa construção é possível, basta efetuá-la. O primeiro matemático a publicar efetivamente uma demonstração da impossibilidade de se efetuarem determinadas construções geométricas (duplicação do cubo e a trisseção de um ângulo) apenas com régua e compasso foi o francês Pierre Laurent Wantzel, em 1837. O que Wantzel conseguiu provar, influenciado pelas ideias de Gauss, foi que se conseguir, partindo de dois pontos A e B, construir um ponto C com régua e compasso, então o quociente q entre as distâncias de A a C e de A a B tem as seguintes propriedades:

- O número q é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos (ou seja, é aquilo que se designa por um número algébrico);
- Se $p(x) = 0$ for uma equação polinomial de grau mínimo entre as equações polinomiais com coeficientes inteiros não todos nulos das quais q é uma solução, então o grau de $p(x)$ é uma potência de 2.

Em 1882 o matemático alemão Ferdinand Von Lindemann demonstrou que π é transcendente (ou seja, não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos) o que torna impossível efetuar a quadratura do círculo apenas com régua e compasso.

Dentre os diversos matemáticos que contribuíram para a criação e o desenvolvimento da álgebra moderna estão o norueguês Niels H. Abel (1802–1829), o italiano Paolo Ruffini (1765–1822) e o francês Évariste Galois (1811–

1832). Os dois primeiros dominaram expressivamente a álgebra clássica enquanto Galois foi pioneiro na atual teoria dos corpos. A reunião dos trabalhos desses renomados matemáticos culminou na prova da impossibilidade de solucionar equações de grau superior a quatro empregando fórmulas envolvendo operações racionais e extração de raízes sobre os coeficientes das equações.

Apresentaremos a seguir, um estudo dos fundamentos da álgebra que permitem caracterizar todos os números construtíveis e, portanto, delinear os critérios para as resoluções dos problemas construtíveis de uma forma geral.

7.1 NÚMEROS ALGÉBRICOS E POLINÔMIOS

Um número complexo é algébrico se ele é raiz de um polinômio com coeficientes racionais, ou equivalentemente, se ele é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Caso contrário, o número é dito transcendente.

Desse modo, todo número racional $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0)$ é algébrico pois α é raiz do polinômio $f(x) = qx - p$. No entanto, existem infinitos números algébricos que não são racionais. Um exemplo disso são os números irracionais como $\sqrt[n]{2}$ (com $n \in \mathbb{N}$) que é raiz do polinômio $g(x) = x^n - 2$.

Seja F um subcorpo do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, isto é, $F \subset \mathbb{R}$. A reunião de todos os polinômios sobre F, na incógnita x é representado por $F[x]$, ou seja,

$$F[x] = \{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in F,\ n \geq 0\}$$

Considerando $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio não nulo, com coeficientes em F, se $a_n \neq 0$, dizemos que o grau de $f(x)$ é igual a n e denotamos por $\partial f(x) = n$.

Dizemos que o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é mônico se seu coeficiente a_n for igual a 1, ou seja, se

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Na teoria de polinômios, um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[x]$ é dito irredutível sobre o corpo $F \subset \mathbb{R}$ se o grau de $p(x)$ é maior ou igual a 1 e, além disso, é impossível escrevermos $p(x)$ como o produto de $g(x)$ e $h(x) \in F[x]$, com $\partial g(x) \geq 1$ e $\partial h(x) \geq 1$.

O polinômio mônico em $F[x]$ de menor grau, que tem *α* como raiz, é chamado de polinômio irredutível de *α* sobre F , e é denotado por irr(*α;* F). O termo irredutível é aqui empregado sem um segundo sentido, porque um tal polinômio é irredutível sobre F . De fato, se $p(x)$ é redutível sobre *F*, então $p(x) = g(x) . h(x)$ para certos polinômios não nulos $g(x), h(x) \in F[x]$ com $\partial g(x) \geq 1$ e $\partial h(x) \geq 1$. Como *α* é raiz de *p*(*x*) e *p*(*x*) = $g(x) . h(x)$, então *α* também é raiz de $g(x)$ ou de $h(x)$. Suponhamos que $g(\alpha) = 0$ e que b_m seja o coeficiente dominante de g . Então $g_1(\alpha) = 0$, onde $g_1(x) = b_m^{-1} \; g(x)$. Como $g_1(x)$ e $g(x)$ tem o mesmo grau e $g_1(x)$ é mônico, $p(x)$ deixa de ser o polinômio de menor grau que tem *α* como raiz, o que é absurdo.

Outro fato sobre irr(*α,* F) é que ele é único com as condições impostas, caso contrário, não poderíamos dizer "o" polinômio irredutível de *α* sobre *F*. De fato, se $g(x)$ e $p(x)$ são polinômios mônicos de $F[x]$ de menor grau que tem *α* como raiz, então $\partial g(x) \leq \partial p(x)$, pois $g(x) =$ irr(*α*, *F*) e $\partial p(x) \leq \partial g(x)$ pois também $p(x)$ = irr(*α*, *F*). Assim, $g(x)$ e $p(x)$ tem o mesmo grau, digamos *n*. Como ambos são mônicos e de mesmo grau, o polinômio $h(x) = p(x) - g(x)$ tem grau menor que *n* e tem *α* como raiz. Então $h(x) = 0$ (polinômio nulo). Logo $p(x) = g(x)$.

Lema 7.1.1:

(a) Seja $f(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$, tal que $f(\alpha) = 0$. Então existe irr(*α,F*) e irr(*α*,*F*) divide $f(x)$.

(b) Se $p(x) \in F[x]$ é um polinômio mônico irredutível, tal que *α é raiz de p*(x), então $p(x)$ é o polinômio irr(*α, F*).

<u>Demonstração</u>:

(a) Desde que *α* é zero de $f(x)$, *α* é algébrico e existe irr(*α, F*). Seja *p*(*x*):= irr(*α,F*). Dividindo $f(x)$ por $p(x)$ obtemos $f(x) = p(x).h(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$, ou $\partial r(x) < \partial p(x)$. Se $r(x)$ não for o polinômio nulo, então *α* é zero de $r(x)$, pois *α* é zero de $f(x)$ e de $p(x)$. Mas isto é absurdo, pois senão *α* seria zero de um polinômio mônico de grau menor que $p(x)$. Logo, $r(x) = 0$ e $p(x)$ divide $f(x)$.

(b) Pelo item (a), $p(x) = q(x).h(x)$. Mas $p(x)$ sendo irredutível vem que $h(x)$ é uma constante. Agora, como $p(x)$ e $q(x)$ são mônicos vem que $h(x)$ =1, ou seja $p(x) = q(x)$.

■

Antes ainda de mostrarmos exemplos, enunciemos o seguinte critério de irredutibilidade de polinômios sobre o corpo dos números racionais:

Lema 7.1.2: (Critério de Eisenstein):

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ um polinômio de grau *n.* Se existe um número primo $p > 0 \in \mathbb{Z}$, tal que para todo *i*, com $0 \leq i \leq n-1$, *p* divide a_i, *p* não divide a_n e p^2 não divide a_0, então $p(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Z}$ e, portanto, irredutível sobre $\mathbb{Q}$ também.

Exemplos:

(1) Tomando o número primo *p* = 3, no critério de Eisenstein, vemos que o polinômio $p(x) = x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Pelo Lema 7.1.1 (b)

$$\operatorname{irr}(\sqrt{3}, \mathbb{Q}) = x^2 - 3.$$

Por outro lado, $p(x)$ é redutível sobre $\mathbb{R}$, pois em $\mathbb{R}[x]$, $p(x) = \left(x + \sqrt{3}\right).\left(x - \sqrt{3}\right)$. Logo, irr $(\sqrt{3}, \mathbb{R}) = \left(x - \sqrt{3}\right)$.

(2) Tomando o número primo *p* = 5, no critério de Eisenstein, vemos que o polinômio $p(x) = x^3 - 5 \in \mathbb{Z}[x]$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Pelo Lema 7.4.1 (b), irr $\left(\sqrt[3]{5}, \mathbb{Q}\right) = x^3 - 5$.

7.2 CORPOS E EXTENSÃO DE CORPOS

Quando nos referimos ao conceito de corpos e, mais precisamente, de extensão de corpos, fazemos menção ao campo das Estruturas Algébricas desenvolvida após o século XIX, a qual tem um papel fundamental no tema que estamos desenvolvendo.

A partir do conceito de extensão de corpos, introduzido por Galois, foi possível obter resultados que garantiriam a impossibilidade de algumas construções por meio de régua não graduada e do compasso, e também da impossibilidade de solução de equações polinomiais gerais de graus superiores a quatro.

Consideremos, agora, as relações entre dois corpos K e L, quando $\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{K} \subseteq \mathrm{L} \subseteq \mathbb{C}$

Definição 7.2.1. Um número $\alpha \in$ L é *algébrico sobre um corpo* K, K ⊆ L, se existe um polinômio não nulo $f(x) \in \mathrm{K}[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Um número real ou complexo α é dito algébrico se ele é algébrico sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Um número que não é algébrico sobre K, é dito transcendente sobre K. Dizemos simplesmente *número transcendente*, se ele é transcendente sobre $\mathbb{Q}$.

O número complexo *i* é algébrico, pois é raiz do polinômio $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Certamente, se $\alpha \in$ K, então α é um número algébrico sobre K, pois α é raiz do polinômio não nulo $f(x) = x - \alpha \in \mathrm{K}[x]$. Todavia, podem existir elementos de L que não são elementos de K, mas que são algébricos sobre K.

Exemplo desse fato é que se $\alpha = \sqrt{5}$, então α é uma raiz de $f(x) = x^2 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$, sendo α , portanto, um número algébrico sobre $\mathbb{Q}$.

Os números reais e e π são transcendentes, conforme mostram os resultados obtidos por Charles Hermite (1822-1905) e por Ferdinand Lindermann (1852-1939).

Definição 7.2.2. Um corpo L é uma extensão de um corpo K, se K $\subseteq$ L. Como L é um espaço vetorial sobre K com as operações usuais de L, a dimensão do espaço vetorial L sobre K é dito grau da extensão e é denotado por [L:K]. Se [L:K] é finito dizemos que a extensão é finita.

Definição 7.2.3 Uma extensão L de K é dita extensão algébrica se todo elemento de L é algébrico sobre K. Caso contrário, a extensão é dita transcendente.

Teorema 7.2.1: Toda extensão finita é algébrica.

Demonstração: Seja L uma extensão finita de K, de grau [L:K] = n. Então, para qualquer $u \in$ L, $1, u, u^2, \cdots, u^n \in$ L são linearmente dependentes, pois ao todo são n + 1 elementos. Logo existem escalares $a_0, a_1, \cdots, a_n \in$ K, não todos nulos tais que $a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0$. Assim, u é raiz do polinômio não nulo $a_0 + a_1 x \cdots + a_n x^n$ em K [x]. Por definição, K $\subseteq$ L é uma extensão algébrica.

■

Teorema 7.2.2 (Multiplicidade dos Graus*).* Consideremos as extensões K $\subseteq$ L $\subseteq$ E, com [L:K] e [E:L] finitos. Então [E:K] é finito e [E:K] = [E:L].[L:K].
Demonstração: Basta demonstrar que C = { $c_{ij} = e_i . f_j , 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m$ } é base do K-espaço vetorial E, onde B_1 = {$e_i, 1 \leq i \leq n$} é base do L-espaço vetorial E e B_2 = { $f_j, 1 \leq j \leq m$ } é base do K-espaço vetorial L.

Seja $u \in$ E. Então $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, com $x_i \in L$. Como $x_i = \sum_{j=1}^{m} y_{ij} f_j$, com $y_{ij} \in$ K, substituindo vem que $u = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} f_j \right) e_i = \sum_{i,j=1}^{n,m} (y_{ij}) c_{ij}$. Portanto, *C* gera o K-espaço vetorial E. Agora, se existem $y_{ij} \in$ K, tais que $\sum_{i,j=1}^{n,m} y_{ij} c_{ij} = 0$, então substituindo c_{ij} e destacando os e_i nesta soma finita, temos: $0 = \sum_{i,j=1}^{n,m} y_{ij} e_i . f_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} f_j \right) e_i$. Como B_1 é base do L-espaço vetorial E, vem que $\sum_{j=1}^{m} y_{ij} f_j = 0$ em L, para i = 1, ..., n. Como B_2 é base do K-espaço vetorial L, segue que $y_{ij} = 0$, para i = 1, ..., n e j = 1, ..., m. Isto conclui a demonstração.

■

Para o que segue, se d é um elemento de um corpo K, por $K(\sqrt{d})$ entendemos o conjunto $\{a + b\sqrt{d}, a, b \in K\}$. Se d é um quadrado em K (isto é, se $d \in K^2$, equivalentemente, $\sqrt{d} \in K$) então $K(\sqrt{d}) = K$, portanto, $K(\sqrt{d})$ é um corpo. Se d não é um quadrado em K, definimos adição e multiplicação por:

$$(a + b\sqrt{d}) + (c + e\sqrt{d}) = (a + c) + (b + e)\sqrt{d} \text{ e}$$

$$(a + b\sqrt{d}) \cdot (c + e\sqrt{d}) = (ac + dbe) + (ae + bc)\sqrt{d}.$$

Com isto, prova-se facilmente que $K(\sqrt{d})$ é um corpo, onde $0 + 0\sqrt{d}$ e $1 + 0\sqrt{d}$ são os elementos neutros para adição e multiplicação, respectivamente. O inverso de um elemento não nulo $(a + b\sqrt{d}) \in K(\sqrt{d})$ é $\frac{a}{a^2 - db^2} - \frac{b}{a^2 - db^2}\sqrt{d}$. Note que pelo fato de $\sqrt{d}$ não pertencer a K^2, vem que $a^2 - db^2$ não é zero. Com isto temos:

Lema 7.2.1: Sejam K um corpo e $d \in K - K^2$. Então $K(\sqrt{d})$ é uma extensão de K de grau dois.

<u>Demonstração</u>: Note que dois elementos $A = x + y\sqrt{d},\ B = z + t\sqrt{d} \in K\left(\sqrt{d}\right)$ são iguais se, e somente se, $x = z$ e $y = t$ em K. De fato, se $A = B$ mas $y \neq t,$ então $\sqrt{d} = -\dfrac{x-z}{t-y} \in K,$ contradição. Logo $y = t$ o que acarreta $x = z.$

Portanto, se $A = 0,$ prova-se que $\{1, \sqrt{d}\}$ é uma $K-$base para $K\left(\sqrt{d}\right).$ O resto da demonstração segue dos cálculos anteriores. ■

A extensão quadrática $K\left(\sqrt{d}\right)$ é dita obtida de K por *adjunção* de $\sqrt{d}$.

7.3 PONTOS, RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS CONSTRUTÍVEIS

Seja $\mathcal{P}$ um subconjunto do plano que contém pelo menos dois pontos distintos. Note que, a princípio pode ser até mesmo todo o plano, mas abaixo especificaremos quais subconjuntos $\mathcal{P}$ estaremos interessados. Dizemos que uma reta *r* do plano é uma reta em $\mathcal{P}$ se *r* contém dois pontos distintos de $\mathcal{P}$, e dizemos que uma circunferência $\mathcal{C}$ do plano é uma circunferência em $\mathcal{P}$ se o centro de $\mathcal{C}$ é um ponto de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ contém um ponto de $\mathcal{P}$.

Sendo assim, chamaremos os itens (I), (II) e (III) a seguir de *operações elementares em* $\mathcal{P}$.

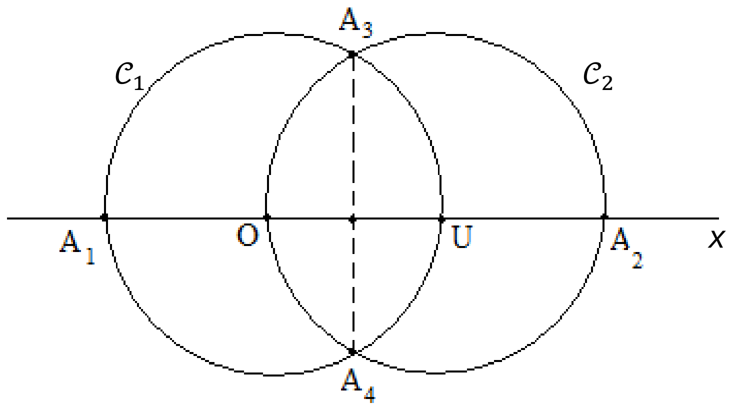
(I) Interseção de duas retas em $\mathcal{P}$.

(II) Interseção de uma reta em $\mathcal{P}$ e uma circunferência em $\mathcal{P}$.

(III) Interseção de duas circunferências em $\mathcal{P}$.

Dizemos que um ponto P do plano é construtível a partir de $\mathcal{P}$ se pudermos determinar P através de uma dessas operações elementares em $\mathcal{P}$. Denotaremos por $<\mathcal{P}>$ o subconjunto dos pontos do plano que são construtíveis a partir de $\mathcal{P}$.

De agora em diante, vamos partir de dois pontos distintos no plano, O e U, e sem perda de generalidade, podemos supor que esses pontos são tais como mostra a figura que segue. Note que a reta *x*, que passa por O e U, e as circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são retas e circunferências em $\mathcal{P}$ se os pontos O e U pertencem a $\mathcal{P}$.



Se $\mathcal{P}_0$ = {O, U}, então, por definição < $\mathcal{P}_0$> = {O, U, A_1, A_2, A_3, A_4}.

Note que a reta *x*, que passa por A_1e A_2, é uma reta em < $\mathcal{P}_0$ > e, portanto, o ponto médio do segmento $\overline{OU}$ é construtível a partir de < $\mathcal{P}_0$ >.

Sejam $\mathcal{P}_0$ = {O, U}, $\mathcal{P}_1$ = < $\mathcal{P}_0$ > e $\mathcal{P}_2$ = < $\mathcal{P}_1$>.

O ponto O é o ponto médio do segmento $\overline{A_1U}$ e a reta *r* perpendicular ao segmento $\overline{A_1U}$ que passa por O é uma reta em $\mathcal{P}_2$. Denotando esta reta por OY e a reta suporte de $\overline{OU}$ por OX vemos que este sistema ortogonal de coordenadas cartesiano é constituído por retas em $\mathcal{P}_2$.

De acordo com as construções os pontos de $\mathcal{P}_1$ com suas respectivas coordenadas são: O(0,0), U(1,0), A_1(-1,0), A_2(2,0), $A_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_4\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mais geralmente, sejam:

$\mathcal{P}_0$ = {O, U}, $\mathcal{P}_1$ = < $\mathcal{P}_0$ > , $\mathcal{P}_2$ = < $\mathcal{P}_1$>, ... , $\mathcal{P}_{n+1}$= < $\mathcal{P}_n$>, para todo n ∈ $\mathbb{N}$.

Então

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1} \subset \ldots \subset \mathbb{R}^2$$

Seja $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$. Podemos notar que $\mathcal{P}_\infty$ é um conjunto infinito do plano embora para cada *n*, $\mathcal{P}_n$ seja um subconjunto finito do plano. Também < $\mathcal{P}_\infty$> = $\mathcal{P}_\infty$ e P(*m, v*) ∈ $\mathcal{P}_\infty$, para todo *m* ∈ $\mathbb{Z}$ e todo *v* ∈ $\mathbb{Z}$.

Definição 7.3.1: Os pontos do plano que pertencem a $\mathcal{P}_\infty$ são chamados de pontos construtíveis e as retas em $\mathcal{P}_\infty$, isto é, retas contendo pelo menos dois pontos construtíveis distintos, são chamadas de retas construtíveis e; as circunferências em $\mathcal{P}_\infty$, isto é, circunferências com centro em $\mathcal{P}_\infty$ e contendo um ponto de $\mathcal{P}_\infty$ são ditas circunferências construtíveis. Um número real *a* diz-se construtível se P(*a*,0) é construtível, isto é, P(*a*,0) $\in \mathcal{P}_\infty$.

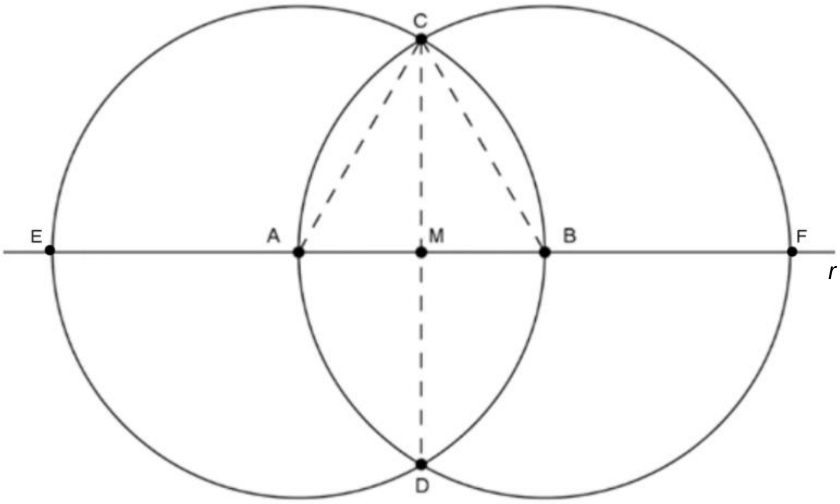
7.4 PONTOS CONSTRUTÍVEIS ESPECIAIS

A seguir vamos construir alguns pontos especiais a partir de outros pontos construídos, retas e circunferências construtíveis, a fim de relacionar pontos construtíveis com números construtíveis.

Proposição 7.4.1: Se os pontos distintos A e B são construtíveis então o ponto médio M do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ é construtível.

Demonstração:

Consideremos dois pontos distintos A e B e a reta *r* que passa por eles. Tracemos duas circunferências com centros nesses pontos e raio igual à distância entre eles, obtendo os pontos C e D na interseção entre elas. O segmento $\overline{\mathrm{CD}}$ corta a reta no ponto M.

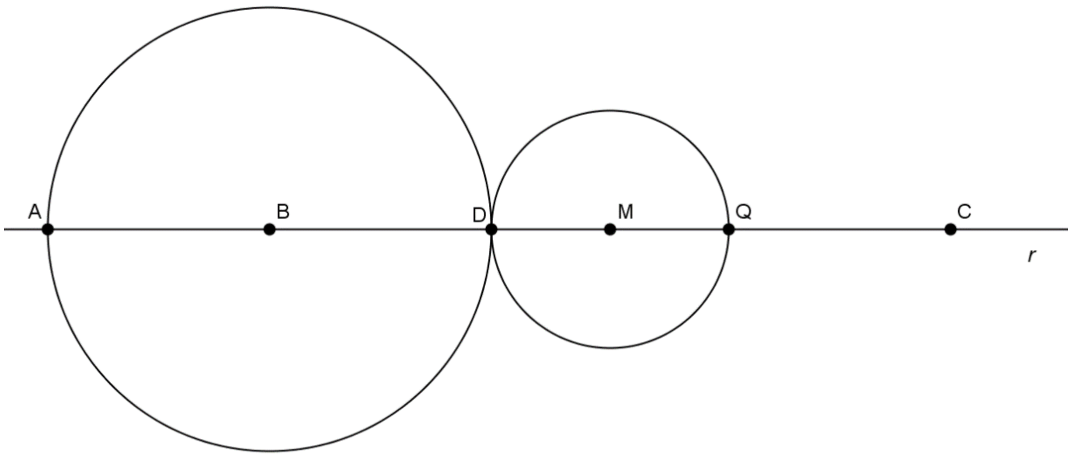


Como $\overline{\mathrm{AC}} \equiv \overline{\mathrm{BC}}$, o triângulo ABC é isósceles e os ângulos da base são congruentes. Os triângulos ACM e CMB são congruentes, pois $\overline{\mathrm{AC}} \equiv \overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{CM}}$ é lado comum. Assim, $\overline{\mathrm{AM}} \equiv \overline{\mathrm{BM}}$. Portanto, M é ponto médio de $\overline{\mathrm{AB}}$, assim como o ponto B é o ponto médio de $\overline{\mathrm{AF}}$ e o ponto A é o ponto médio de $\overline{\mathrm{BE}}$. A reta que passa por C e D é mediatriz de $\overline{\mathrm{AB}}$, sendo perpendicular à reta *r*.

■

Proposição 7.4.2: Consideremos um ponto A e uma reta *r*, ambos construtíveis de modo que A ∈ *r*. Se B e C são pontos construtíveis, então existe um ponto construtível Q tal que Q ∈ *r* e os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$ possuem o mesmo comprimento.

Demonstração: Traçando circunferências centradas em A e em B, podemos assumir que os pontos A, B e C ∈ *r*. Caso os pontos B e C não pertençam à *r*, traçarmos a reta *s*, passando por B e C. Com centro em A e raio $\overline{AB}$, obtemos o ponto B'. Por B e B', traçamos a reta *t* e, em seguida, pelo ponto C, traçamos uma reta *w*, paralela à reta *t*. Pelo ponto B', traçamos uma reta y, paralela à reta *s*, obtendo o ponto C', interseção das retas *y* e *w* . Finalizando, com centro em B' e raio $\overline{B'C'}$ obtemos o ponto C'', interseção com a reta *r*, de modo que $\overline{BC}$ e $\overline{B'C''}$ tenham o mesmo comprimento e assim consideremos os três pontos sobre a reta *r*. Utilizando agora a proposição 7.4.1, determinamos o ponto médio M do segmento $\overline{BC}$. Marcamos sobre *r* o ponto D de modo que as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ sejam iguais. Dessa forma, os pontos A, B, C, M e D são construtíveis.

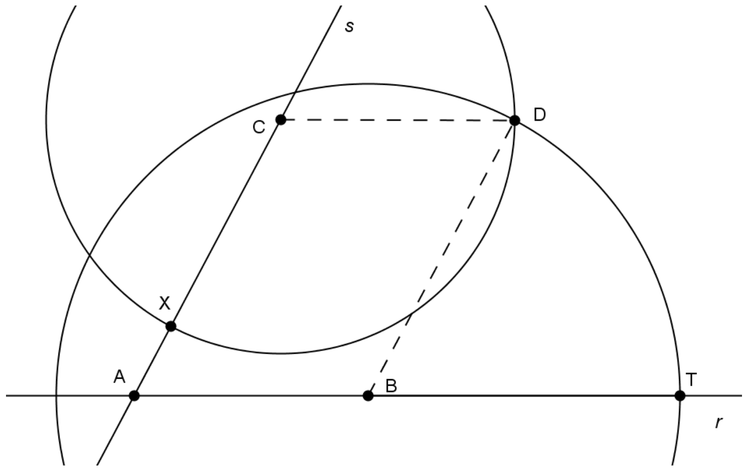


Traçando a circunferência com centro em M e raio $\overline{|MD|}$, obtemos o ponto Q, interseção da reta *r* com a circunferência traçada. Temos que $\overline{DM}$ e $\overline{MQ}$ possuem o mesmo comprimento. Assim, os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$ têm o mesmo comprimento.

■

Proposição 7.4.3: Sejam A, B e C três pontos construtíveis não colineares. Então existe um ponto construtível D tal que A, B, C e D formam um paralelogramo. Em particular, a reta passando por C e paralela ao segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ é construtível.

Demonstração: Consideremos os pontos A e B sobre uma reta *r* e o ponto C não pertencente à *r*. Por A e C, traçamos a reta *s*. Utilizando a proposição 7.4.2, obtemos o ponto T tal que $\overline{\mathrm{BT}}$ e $\overline{\mathrm{AC}}$ tenham o mesmo comprimento. Ainda utilizando a mesma proposição, obtemos o ponto X sobre a reta *s* tal que $\overline{\mathrm{CX}}$ e $\overline{\mathrm{AB}}$ tenham o mesmo comprimento. Traçamos a circunferência de centro em B e raio igual ao comprimento de $\overline{\mathrm{BD}}$. Em seguida, traçamos a circunferência de centro em C e raio igual ao comprimento de $\overline{\mathrm{CX}}$. Obtemos o ponto D, uma das interseções dessas duas circunferências.



A reta que passa pelos pontos B e D é paralela à reta *s* e a reta que passa pelos pontos C e D é paralela à reta *r*. Dessa forma, os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelogramo. Portanto, a reta que passa pelo ponto C e paralela ao segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ é construtível.

■

7.5 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

A matemática grega foi, por longo período, essencialmente geométrica. O conceito de número estava associado ao comprimento de um segmento. Desta maneira, a determinação de um número correspondia à construção de um segmento de comprimento identificado com esse número. Para as operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão de dois números, existiam métodos geométricos e construção, a partir de segmentos de retas e circunferências. Desta forma, a partir da unidade, eram construídos os números naturais e os números fracionários. Alguns números irracionais também podiam ser construídos como, por exemplo, a raiz quadrada de 2, que é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos têm medida 1, ou seja, corresponde à diagonal do quadrado de lado 1. Um número α era (e é) chamado de *construtível* se fosse possível construir, utilizando somente régua não graduada e compasso, um segmento de medida α, a partir de um segmento cujo comprimento era tomado como a unidade. Números construtíveis utilizando régua não graduada e compasso nada mais são do que números que podem ser obtidos, a partir da unidade, por iteradas aplicações das quatro operações básicas e a extração da raiz quadrada. No entanto, não sabemos se isto é possível sem o uso de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas ou mesmo, e ainda, sem um tal sistema demonstrar que a raiz cúbica de um número real positivo não é construtível. Em todos os casos, ainda sem considerar um sistema de coordenadas cartesianas temos o seguinte resultado:

Teorema 7.5.1 Se a e b são números reais positivos construtíveis, então $a + b$, $a - b$ (com $a > b$), $a.b$, $\frac{a}{b}$ e $\sqrt{a}$ são construtíveis.

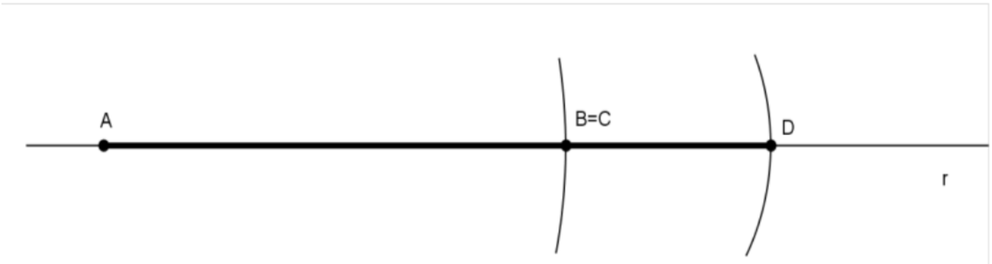
Antes da demonstração temos o resultado imediato.

Corolário: O conjunto dos números reais construtíveis é um subcorpo do corpo dos números reais.

<u>Demonstração</u>:

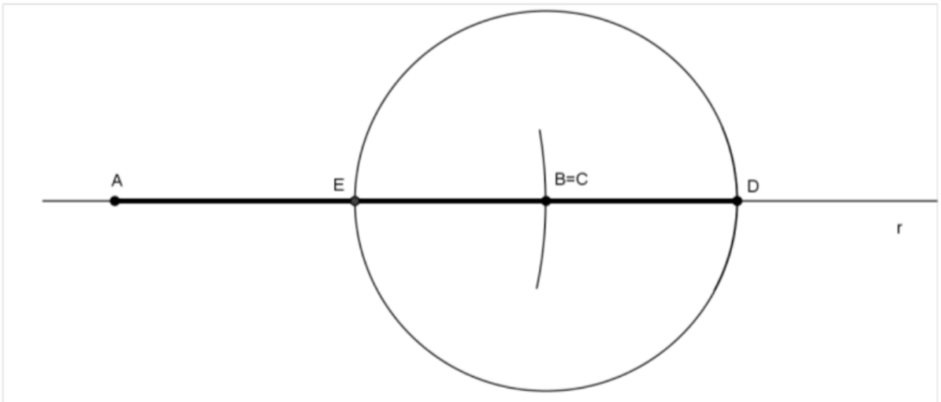
Consideremos três segmentos de reta: u sendo a unidade, a e b, sendo esses dois últimos construtíveis, conforme figura abaixo

Consideremos a reta *r* e sobre ela marcamos o segmento $\overline{AB}$ tal que $|\overline{AB}| = a$. Em seguida marcamos o segmento $\overline{CD}$ tal que $|\overline{CD}| = b$ de modo que C coincida com B e esteja entre A e D.



Construção da soma de a + b

Agora, construímos a circunferência de centro em B e raio *b*, determinando o ponto E ≠ D, interseção da circunferência com a reta *r*.

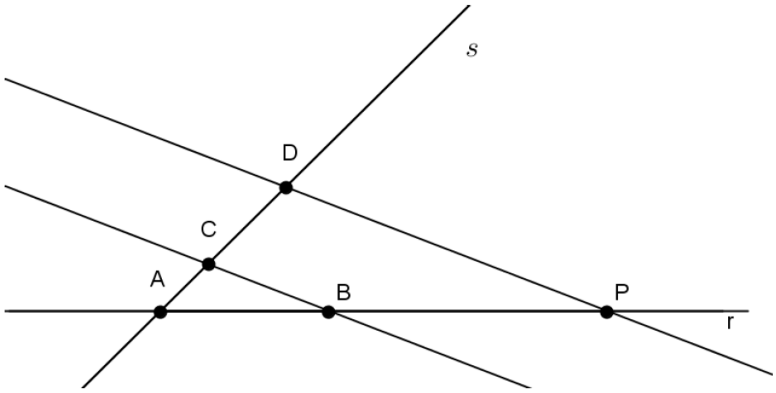


Construção da soma de (a + *b*) e (a – *b*)

Então $|\overline{AD}| = a + b$ e $|\overline{AE}| = a - b$ o que mostra que (a + *b*) e (a – *b*) são números construtíveis.

Agora, mostremos que $a.b$ é construrtível.

Sobre uma reta *r* traçamos um segmento $\overline{AB}$, tal que $|\overline{AB}| = a$. Por A traçamos uma outra reta *s*, concorrente com *r*, onde marcamos o segmento unitário $|\overline{AC}| = 1$. Em seguida, sob a reta *s*, marcamos o segmento $|\overline{AD}| = b$. Supomos *b* > 1 (se *b* < 1 a construção será análoga). Traçamos a reta que passa por C e B e traçamos uma paralela a essa reta passando por D e que intercepta *r* num ponto P.



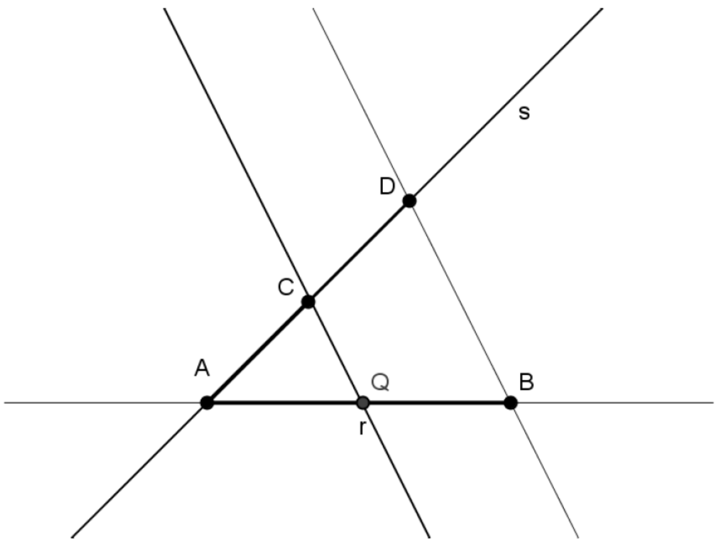
Construção do produto a.b

Considerando os triângulos ACB e ADP e a semelhança entre eles, teremos que:

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AP}|} \Rightarrow \frac{1}{1+b} = \frac{a}{|\overline{AP}|} \Rightarrow |\overline{AP}| = a + ab\,.$$

Mas $|\overline{AP}| = |\overline{AB}| + |\overline{BP}| = a + |\overline{BP}|$. Logo, $ab = |\overline{BP}|$, o que mostra que ab é construtível.

Vamos considerar agora as mesmas condições do caso anterior. Construímos uma reta que passa por B e D e uma reta paralela a $\overline{BD}$ passando por C e interceptando $\overline{AB}$ num ponto Q.



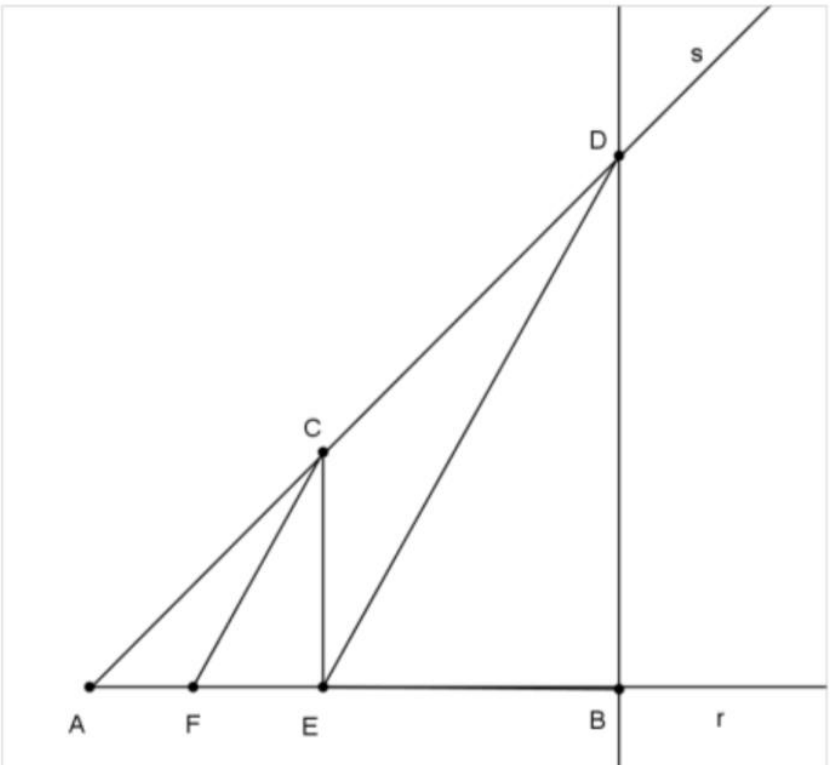
Construção de $\frac{a}{b}$

Considerando os triângulos ACQ e ADB e a semelhança entre eles, teremos que:

$$\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AQ}|} \Rightarrow \frac{b}{1} = \frac{a}{|\overline{AQ}|}.$$

Logo, $\frac{a}{b} = |\overline{AQ}|$ o que mostra que $\frac{a}{b}$ é construtível.

Se a é um número positivo já construído, então podemos construir o número $\frac{1}{a}$. Se $a = 1$ nada temos a fazer. Tomemos $a \neq 1$. Consideremos duas semirretas *r* e *s*, com origem comum em A, de modo a formar um ângulo de 45^0. Tomamos os pontos B e E da semirreta *r*, tais que $|\overline{AB}| = a$ e $|\overline{AE}| = 1$. Ao traçarmos retas perpendiculares à reta *r*, pelos pontos B e E, obtemos as interseções destas retas com a semirreta *s*, respectivamente, os pontos D e C. Como o ângulo $D\hat{A}B$ mede 45º, então $|\overline{CE}| = 1$ e $|\overline{BD}| = a$. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{DE}$ e por C, traçamos uma reta paralela a $\overline{DE}$, obtendo o ponto F como interseção.



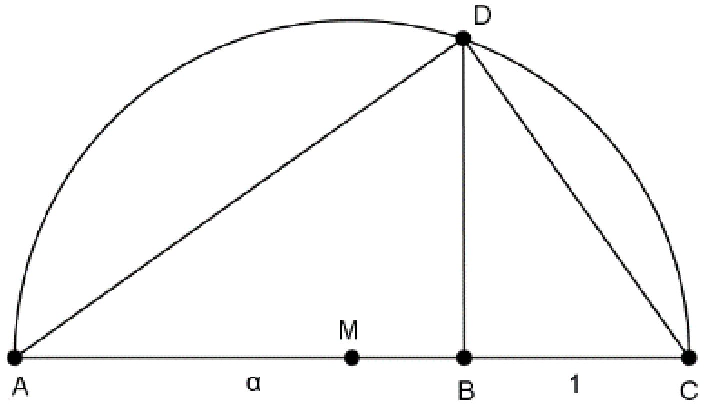
Construção de $\frac{1}{a}$

Considerando os triângulos FCE e EDB e a semelhança entre eles, teremos que:

$$\frac{|\overline{FE}|}{|\overline{EB}|} = \frac{|\overline{EC}|}{|\overline{BD}|} \Rightarrow \frac{1-\overline{AF}}{a-1} = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} = \frac{1}{a}\,.$$

Assim, obtemos o inverso multiplicativo de a.

Por fim, sobre uma reta *r* consideremos o segmento $|\overline{AB}| = a$ e o segmento $|\overline{BC}| = 1$. Determinamos o ponto médio M do segmento $\overline{AC}$ e traçamos a semicircunferência com centro em M e extremos A e C. Traçamos a reta perpendicular ao segmento $\overline{BC}$, passando por B, obtendo o ponto D, interseção da reta perpendicular com a semicircunferência.



Construção de $\sqrt{a}$

Observando o triângulo retângulo ADC (ele está inscrito numa semicircunferência) e utilizando as relações métricas, temos que:

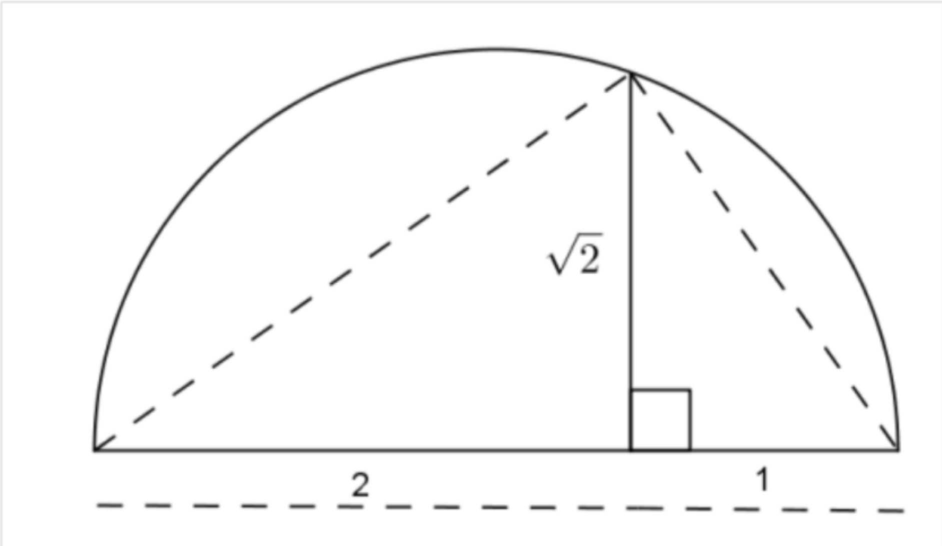
$$|\overline{AB}| \,.\, |\overline{BC}| = |\overline{BD}|^2 \quad \Rightarrow \quad a.1 = |\overline{BD}|^2 \quad \Rightarrow \quad a = |\overline{BD}|^2\,.$$

Logo, $\sqrt{a} = |\overline{BD}|$ o que mostra que $\sqrt{a}$ é construtível.

■

No caso de não se usar um sistema de coordenadas cartesianas, dizemos que um número real a é construtível se for zero ou se seu módulo for um número real construtível, isto é, a é construtível quando $|\,a\,|$ é construtível.

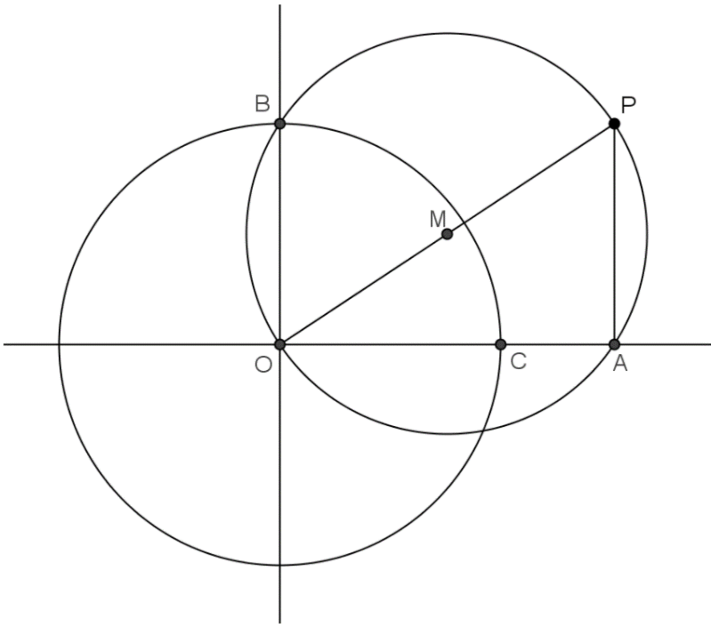
Pelo Teorema 7.5.1 concluímos que partindo da unidade, podemos construir todos os números naturais, assim como todos os números inteiros. Logo, os números racionais também são construtíveis. Além destes, uma vez que a raiz quadrada de um número (não negativo) construtível é construtível, então os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{8}+\sqrt{15}}$ são exemplos de números construtíveis. A figura a seguir dá um método da construção de $\sqrt{2}$.



Proposição 7.5.1: Um ponto P(a, b) será construtível se, e somente se, os números *a* e *b* forem construtíveis.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Sejam P(a, b) um ponto construtível, O a origem do plano cartesiano e M o ponto médio (construtível de acordo com a proposição 7.4.1) do segmento construtível $\overline{OP}$. Traçando a circunferência de centro em M e raio $|\overline{MP}|$, obtemos o ponto A, interseção da circunferência com o eixo OX. O triângulo OPA é inscrito na circunferência e um dos lados é o diâmetro. Assim, segue que esse triângulo é retângulo em A que, por sua vez, é a projeção de P sobre o eixo OX. Logo, A tem coordenadas (a, 0) e, portanto, é construtível.



Para determinarmos o ponto C(b, 0). Traçamos a circunferência de centro em O e raio $|\overline{PA}|$. Portanto, b também é construtível.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos a e b construtíveis. Como a reta OX e os pontos O(0, 0), U(1, 0) são construtíveis (7.3), sabemos também construir Q(a, 0) e R(b, 0). A partir de uma circunferência de centro em O passando por R(b, 0) podemos construir B(0, b). Traçando paralelas (ou perpendiculares) segue de imediato a construção de P(a, b) a partir de Q(a, 0) e B(0, b), e isto prova a proposição.

■

Desde que um ponto P fica determinado por suas coordenadas (*x'*,*y'*), a última proposição diz que para determinar os pontos construtíveis P, basta determinar as coordenadas (*x'*,*y'*) de P com *x'* e *y'* construtíveis. Por definição, estas coordenadas, são soluções de equações do tipo

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \end{cases}$$

que equivale a interseção de duas retas.

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

que equivale a interseção de uma reta com uma circunferência.

(III) $$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0, \end{cases}$$

que equivale a interseção de duas circunferências.

Para conhecer melhor os números construtíveis, precisamos mostrar que:
(A) Se *r*: ax+by+c=0 é uma reta construtível, então os coeficientes a, b e c são números reais construtíveis.
(B) Se *C*: x^2+y^2+ax+by+c=0 é uma circunferência construtível, então a, b e c são números reais construtíveis. E, finalmente,
(C) as coordenadas x' e y' de um ponto construtível P sendo solução de um dos sistemas (I), (II) ou (III) então elas pertencem ao corpo K ou K($\sqrt{\mathrm{d}}$), onde K é o corpo o qual pertence os coeficientes das equações.

De fato, para demonstrar (A), sejam Q($x_{1,}y_1$) e R(x_2, y_2) pontos construtíveis pertencentes à reta *r*. Então, um ponto X(x, y) do plano pertence à *r*, se e somente se, o determinante da matriz $\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ é nulo.
Desenvolvendo o determinante, obtemos X $\in$ r se, e somente se, ax + by + c = 0, onde a = y_2 - y_1, b = x_1 $-$ x_2 e c = x_1 (y_1 - y_2) + y_1 (x_2 - x_1). Como os coeficientes de Q e R são construtíveis segue da proposição 7.5.1 que a, b e c também são construtíveis.

Para o caso (B), sejam C($x_{1,}y_1$) o centro da circunferência construtível $\mathcal{C}$ que passa por um ponto construtível P(x_2, y_2). Então um ponto X(x, y) do plano pertence a $\mathcal{C}$, se e somente se, a distância de X a C é igual à distância de P a C, ou seja: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.
Desenvolvendo encontramos: x^2+ y^2 + ax + by + c = 0, onde:

$$\text{a} = -2x_1,\ b = -2y_1 \ \text{ e c} = -x_2^2 - y_2^2 + 2x_1x_2 + 2y_1y_2$$

Novamente, como os coeficientes de C e P são construtíveis segue da proposição 7.5.1 que *a*, *b* e *c* também são construtíveis.

O caso (C) vai nos levar a um resultado importante sobre números construtíveis, resultado este que será usado para demonstrar a impossibilidade de construção da quadratura do círculo, duplicação do cubo e da trisseção de um ângulo qualquer. Por isso enunciaremos o caso (C) em forma de proposição.

Proposição 7.5.2: Suponha que os coeficientes a, a_1, b, b_1, c, c_1 das equações em (I), (II) e (III) sejam números construtíveis pertencentes a um corpo K. Então as soluções x', y' destas equações pertencem ao corpo K ou ao corpo K($\sqrt{d}$), para algum d ∈ K – K^2.

<u>Demonstração</u>:

As soluções *x*' e *y*' do sistema

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \end{cases}$$

que equivale a interseção de duas retas não paralelas são:

$$x = \frac{b_1 c - b c_1}{a_1 b - a b_1}, \quad y = \frac{a c_1 - a_1 c}{a_1 b - a b_1}.$$

Como as retas não são paralelas, o denominador $a_1 b - a b_1 \neq 0$. Logo, as soluções deste sistema estão no próprio K.

Vamos determinar agora as soluções x' e y' do sistema

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ ax + by + c = 0, \end{cases}$$

que equivale a interseção de uma reta com uma circunferência.

Como *a* ou *b* é não nulo, na segunda equação podemos isolar *x* ou *y* (suponhamos *y*) e obter:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

E, substituindo-o na primeira equação, teremos:

$$x^2 + \left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + a_1 x + b_1\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + c_1 = 0$$

ou

$$\left(a^2 + b^2\right)x^2 + \left(2ac + b^2 a_1 - abb_1\right)x + \left(c^2 - bb_1 c + b^2 c_1\right) = 0$$

Chamando de $A = a^2 + b^2$, $B = 2ac + b^2 a_1 - abb_1$, $C = c^2 - bb_1 c + b^2 c_1$ podemos escrever

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

cuja solução é dada por:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Como A, B e C são números construtíveis (Teorema 7.5.1) vem que x é um número construtível. Além disso, se os coeficientes a, a_1, b, b_1, c, c_1 do sistema (II) estão em um corpo K, então A, B e C também pertencem ao corpo K e, portanto, x pertence ao corpo K (se B^2 - 4AC pertence a K^2), ou x pertence ao corpo $K(\sqrt{d})$, com d = B^2 - 4AC Analogamente, podemos obter y através de uma fórmula semelhante.

Agora vamos determinar as soluções x' e y' do sistema

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \end{cases}$$

que equivale a interseção de duas circunferências. Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\text{(*)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ (a - a_1)x + (b - b_1)y + (c - c_1) = 0, \end{cases}$$

que é um sistema composto por uma equação do segundo grau e uma equação linear. As soluções do sistema (III) são exatamente as mesmas soluções do sistema (*). Como as circunferências correspondentes aos sistemas acima são distintas, então $a - a_1 \neq 0$ ou $b - b_1 \neq 0$. Assim o sistema (*) é análogo ao sistema (II), já analisado e, a conclusão é a mesma do caso anterior, ou seja, as soluções x' e y' estão no corpo original dos coeficientes em K ou em $K(\sqrt{d})$, $d \in K - K^2$.

Pode-se notar que, ambas as coordenadas x' e y' são obtidas por meio de iteradas aplicações das operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas nos coeficientes a, a_1, b, b_1, c, c_1 das equações. Supondo estes coeficientes em um corpo F, acabamos de ver que a partir da extração de uma raiz quadrada não podemos garantir mais que a solução procurada também esteja no corpo F, pois a raiz quadrada de um elemento de F nem sempre é elemento de F.

Desde que um ponto R é construtível, isto é, um ponto de $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ é obtido por uma sequência finita de operações elementares em $\mathcal{P}$, pois *R* pertence a $\mathcal{P}_n$ para algum *n*, segue das proposições 7.5.1 e 7.5.2 que os números construtíveis são obtidos por meio de uma sequência iterada das operações básicas: adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes sobre elementos obtidos inicialmente do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Sendo assim, os números construtíveis se encontram em alguma extensão finita do corpo dos números racionais. A seguir vamos demonstrar isto e veremos que esta extensão não é qualquer extensão finita do corpo dos números racionais e sim de um tipo especial o que nos possibilitará dar uma resposta negativa aos problemas de trisseção de um ângulo e duplicação do cubo.

Teorema 7.5.2. O corpo dos números reais construtíveis é uma extensão algébrica dos racionais tal que cada número construtível está em alguma extensão K do corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ cujo grau $[\mathrm{K} : \mathbb{Q}]$ é uma potência de 2.

<u>Demonstração:</u>

Como toda extensão finita é algébrica é suficiente demonstrarmos que cada número construtível pertence a uma extensão K do corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ com $[\mathrm{K} : \mathbb{Q}] = 2^m$.

Pela Proposição 7.5.1 sabemos que se α é construtível, então ele é uma das coordenadas de um ponto construtível R pertencente a $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$. Assim R pertence a $\mathcal{P}_n$, para algum natural *n* e, portanto, *R* é obtido por uma sequência finita de iterações das operações elementares. Consequentemente, α também é obtido por uma sequência finita de iterações de operações básicas a partir do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Em outras palavras, existe uma sequência de corpos

$$\mathbb{Q} = \mathrm{K}_0 \subset \mathrm{K}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{K}_{m-1} \subset \mathrm{K}_m, \qquad \textbf{(*)}$$

tais que $\alpha \in \mathrm{K}_m - \mathrm{K}_{m-1}$ e $\mathrm{K}_{j+1} = \mathrm{K}_j(\sqrt{\mathrm{d}_j})$ onde $\mathrm{d}_j \in \mathrm{K}_j - \mathrm{K}_j^2$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Como todos os elementos de $\mathbb{Q}$ são construtíveis e o teorema é verdadeiro para $\mathrm{K}_0 = \mathbb{Q}$, pois $[\mathrm{K}_0 : \mathbb{Q}] = 1 = 2^0$, podemos supor $m \geq 1$ e demonstrar por indução em *m*, que para uma sequência de corpos como em (*), tem-se $[\mathrm{K}_m : \mathbb{Q}] = 2^m$.

Se $m = 1$, então $[\mathrm{K}_1 : \mathbb{Q}] = 2^1 = 2$

Suponhamos, para hipótese de indução, que para uma sequência de corpos como em (*) para $m = r - 1 \geq 1$ tem-se $[\mathrm{K}_{r-1} : \mathbb{Q}] = 2^{r-1}$ e provemos que, se $\mathbb{Q} = \mathrm{K}_0 \subset \mathrm{K}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{K}_{r-1} \subset \mathrm{K}_r$ é uma sequência de corpos que satisfaz as mesmas condições da sequência (*), então $[\mathrm{K}_r : \mathbb{Q}] = 2^r$.

Pelo Teorema 7.2.2 (multiplicidade dos graus) temos:

$$[\mathrm{K}_r : \mathbb{Q}] = [\mathrm{K}_r : \mathrm{K}_{r-1}].[\mathrm{K}_{r-1} : \mathbb{Q}]$$

Como $[\mathrm{K}_r : \mathrm{K}_{r-1}] = 2$, a hipótese de indução nos dá que $[\mathrm{K}_r : \mathbb{Q}] = 2^r$

■

Portanto, podemos concluir que, solucionar os problemas geométricos da duplicação do cubo, quadratura do círculo e da trisseção do ângulo θ, com régua não graduada e compasso, é equivalente a darmos uma expressão iterada dos números reais $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{\pi}$ $e \cos\frac{\theta}{3}$ a partir dos números racionais utilizando as operações básicas de adição, subtração, multiplicação, divisão e a extração de raízes quadradas.

8. IMPOSSIBILIDADE DE RESOLUÇÃO DOS TRÊS PROBLEMAS

A impossibilidade de resolução dos três problemas clássicos da Grécia Antiga só foi completamente esclarecida no final do século XIX, depois dos trabalhos de Niels Henrik Abel (1802-1829) e Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) sobre a resolução de equações algébricas por meio de radicais. A prova da impossibilidade de resolução dos problemas já mencionados depende da teoria das equações cúbicas, isto é, de conceitos algébricos que foram sendo desenvolvidos ao longo de vários séculos. A primeira demonstração efetiva da impossibilidade da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo foi apresentada por Pierre Laurent Wantzel no artigo “Recherches sur les Moyens de Reconnaître si un Problème de Géométrie Peut se Résoudre avec la Règle et le Compas”, publicado em 1837 no Journal de Liouville. Nesse trabalho, Wantzel fez uso das ideias iniciadas por Descartes e terminou de uma vez com as discussões sobre dois dos três problemas clássicos.

Em 1882, o alemão Ferdinand Von Lindemann (1852-1939) demonstrou formalmente que $\boldsymbol{\pi}$ é um número transcendente, isto é, não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais, o que torna impossível efetuar a quadratura do círculo apenas com régua não graduada e compasso.

8.1 A DUPLICAÇÃO DO CUBO

Retomando o enunciado do problema: *dada a aresta de um cubo, construir, com régua e compasso, a aresta de outro cubo cujo volume é o dobro do cubo inicial.* Como, a partir da unidade, eram construídos os números naturais, os números fracionários e alguns números irracionais, consideraremos o cubo inicial de aresta unitária.

Queremos encontrar a aresta β de outro cubo, de modo que o volume deste último seja o dobro do inicial. Assim, temos:

$$\beta^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta^3 - 2 = 0$$

Vamos demonstrar que isto é impossível, em dois passos:

(I) Vamos demonstrar primeiro que $\mathbb{Q}[\beta]$ definido por:

$$\mathbb{Q}\,[\beta]:=\{\,a+b\beta+c\beta^2, a,b,c\ \in\ \mathbb{Q}\}$$

é um subcorpo de $\mathbb{R}$ tal que $[\mathbb{Q}[\beta]:\mathbb{Q}]=3$. De $\beta^3-2=0$, β é raiz do polinômio $p(x)=\ x^3-\ 2\ \in\ \mathbb{Q}[\mathrm{x}]$. Pelo critério de Eisenstein irr($\beta,\mathbb{Q}$) = p(x). A adição e multiplicação em $\mathbb{Q}[\beta]$ são as mesmas do corpo $\mathbb{R}$ e portanto $\mathbb{Q}[\beta]$ é um anel de integridade. Agora basta demonstrar que todo elemento não nulo de $\mathbb{Q}[\beta]$ tem inverso em $\mathbb{Q}[\beta]$. Para isto seja u = $a+b\beta+c\beta^2\ \in\ \mathbb{Q}[\beta]$ não nulo e considere o polinômio não nulo $r(x)=\ a+bx+cx^2$ de $\mathbb{Q}\,[x]$. Como $p(x)$ é irredutível, vem que $1=\mathrm{mdc}(p(x),r(x))$. Pela identidade de Bezout existem $h(x),f(x)\in\ \mathbb{Q}[x]$ tais que $1=h(x).p(x)+\ f(x).r(x)$. Aplicando em β obtemos: $1=1(\beta)=h(\beta).p(\beta)+\ f(\beta).r(\beta)$ e como $p(\beta)=\ 0$ ficamos com:

$$1=f(\beta).r(\beta)\qquad (*)$$

Mas dividindo $f(x)$ por $p(x)$ podemos escrever: $f(x)=\ q(x).p(x)+\ s(x)$ onde $s(x)=\ a_0+\ a_1x+\ a_2x^2\ \in\ \mathbb{Q}[x]$ é o resto da divisão. Consequentemente, $f(\beta)=\ q(\beta).p(\beta)+\ s(\beta)=\ q(\beta).0+s(\beta)=\ s(\beta)$. Substituindo em (*) obtemos

$$1=s(\beta).r(\beta)=s(\beta).u,$$

com $s(\beta)\in\ \mathbb{Q}[\beta]$. Portanto, u é inversível em $\mathbb{Q}[\beta]$ e $\mathbb{Q}[\beta]$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$.

Agora vamos demonstrar que $[\mathbb{Q}[\beta]:\mathbb{Q}]=3$ e para isto basta demonstrar que $\mathrm{B}=\{1,\beta,\beta^2\}$ é uma $\mathbb{Q}$ –base de $\mathbb{Q}[\beta]$. Evidentemente, B gera $\mathbb{Q}[\beta]$. Agora, se existem $a,b,c\ \in\ \mathbb{Q}$ não todos nulos tais que $a.1+b\beta+c\beta^2=0$, então β é raiz do polinômio não nulo $h(x)=\ a+bx+cx^2$. Caso c é não nulo, então β é raiz do polinômio mônico e irredutível $c^{-1}h(x)\in\mathbb{Q}[x]$. Absurdo, pois $\mathrm{irr}(\beta,\mathbb{Q})=\ p(x)$. Portanto, c = 0 e analogamente b e a são nulos. Portanto, B é linearmente independente. Isto conclui a demonstração da parte (I).

(II) Agora vamos demonstrar que se β é construtível, então $\mathbb{Q}[\beta]$ está contido em alguma extensão de $\mathbb{Q}$ cujo grau é uma potência de 2.

Isso ocorre pois, se β é construtível então, pelo Teorema 7.5.2, β pertence a uma extensão K do corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ cujo grau [K:$\mathbb{Q}$] = 2^n. Desde que $\beta\in\mathrm{K}$, vem que todo elemento da forma $a+b\beta+c\beta^2$ (com $a,b,c\ \in$

$\mathbb{Q}$) pertence a K ou seja, $\mathbb{Q}[\beta]$ está contido em K. Assim temos a sequência de inclusões de corpos: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\beta] \subset \mathrm{K}$. Pelo Teorema 7.2.2 (multiplicidade dos graus) vem que $2^n = [\mathrm{K}: \mathbb{Q}] = [\mathrm{K}: \mathbb{Q}[\beta]].[\mathbb{Q}[\beta]: \mathbb{Q}] = \big[\mathrm{K}: \mathbb{Q}[\beta]\big].3$ Isto mostra que 3 divide 2^n, o que é absurdo. Portanto, β não é construtível. Isto conclui a demonstração da impossibilidade da duplicação do cubo utilizando régua não graduada e compasso.

■

8.2 A TRISSEÇÃO DE UM ÂNGULO

O problema consiste em *trissecar um ângulo qualquer, ou seja, dividi-lo em três partes iguais, usando apenas uma régua não graduada e um compasso.* Podemos interpretar esse enunciado da seguinte maneira: *dado um ângulo de medida 3θ construtível, construir três ângulos de medida igual a θ.*

Podemos notar que não definimos o que vem a ser *construir ângulos*, mas o conceito é claro e, podemos notar que construir um ângulo θ equivale a construir o cosseno ou seno deste ângulo. Uma vez obtida uma destas medidas também obtemos a outra e assim obtemos $P(\cos\theta, sen\,\theta)$, obtendo o ângulo.

Desse modo, consideremos um ângulo de medida 60°. Seja $\theta = 20^o$, de modo que 60° $= 3\theta$. Temos:

cos (60º) = $\frac{1}{2}$. Logo, 3θ é construtível. Por outro lado,

$\cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta) - sen(\theta)sen(2\theta) \Rightarrow$

$\cos(3\theta) = \cos(\theta).[\cos^2(\theta) - sen^2(\theta)] - sen(\theta).[2.sen(\theta)\cos(\theta)] \Rightarrow$

$\cos(3\theta) = \cos(\theta).[\cos^2(\theta) - [1 - \cos^2(\theta]] - 2sen^2(\theta)\cos(\theta) \Rightarrow$

$\cos(3\theta) = \cos(\theta).[2\cos^2(\theta) - 1] - 2.[1 - \cos^2(\theta)]\cos(\theta)] \Rightarrow$

$\cos(3\theta) = 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2\cos(\theta) + 2\cos^3(\theta) \Rightarrow$

$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$. Assim,

$\cos(60°) = 4\cos^3(20°) - 3\cos(20°)$. Logo,

$\frac{1}{2}$ = 4cos³(20°) – 3cos(20°) ⇒ 8cos³(20°) - 6cos(20°) - 1 = 0

Fazendo z = cos(20°), temos

$$8z^3 - 6z - 1 = 0.$$

Portanto, z é raiz do polinômio $f(x) = 8x^3 - 6x - 1.$

Vamos demonstrar que este polinômio é irredutível e, consequentemente, irr$(Z, \mathbb{Q}) = 8^{-1}f(x)$.

O critério de Eisenstein não se aplica neste polinômio. No entanto se $f(x)$ fosse redutível ele teria um fator de grau um e, portanto, teria uma raiz em $\mathbb{Q}$. Considere então uma raiz racional $u = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ com $\mathrm{mdc}(r,s) = 1.$ Segue-se que $8\left(\frac{r}{s}\right)^3 - 6\left(\frac{r}{s}\right) - 1 = 0,$ ou depois de alguns cálculos podemos escrever:

$$8r^3 - 6rs^2 - s^3 = 0, \qquad (**)$$

ou ainda:

$$r(8r^2 - 6s^2) = s^3.$$

Como pela hipótese feita, *r* não divide *s*, vem que $r = \pm 1.$

Agora, escrevendo a igualdade (**) na forma: $8r^3 = s(6rs + s^2),$ e notando que *s* não divide r^3 vem que *s* divide 8. Logo $u \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}\}.$ Por tentativa podemos ver que nenhum destes elementos é raiz de $f(x)$. Absurdo. Segue, então, que $f(x)$ é irredutível. Agora com mesmo raciocínio anterior, feito no caso da duplicação do cubo, podemos demonstrar que

$$\mathbb{Q}[\cos\theta] := \{a + b.cos\theta + c.cos^2\theta, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

é uma extensão de grau 3 de $\mathbb{Q}$ e está contido em alguma extensão de $\mathbb{Q}$ cujo grau é uma potência de 2. E isto gera um absurdo, como anteriormente. Concluímos que o ângulo de 20^o não é construtível com régua não graduada e compasso.

■

8.3 A QUADRATURA DO CÍRCULO

O problema consiste em *construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado*.

Consideremos um círculo de raio construtível e um quadrado de lado *k*. Queremos encontrar a medida de *k* de modo que

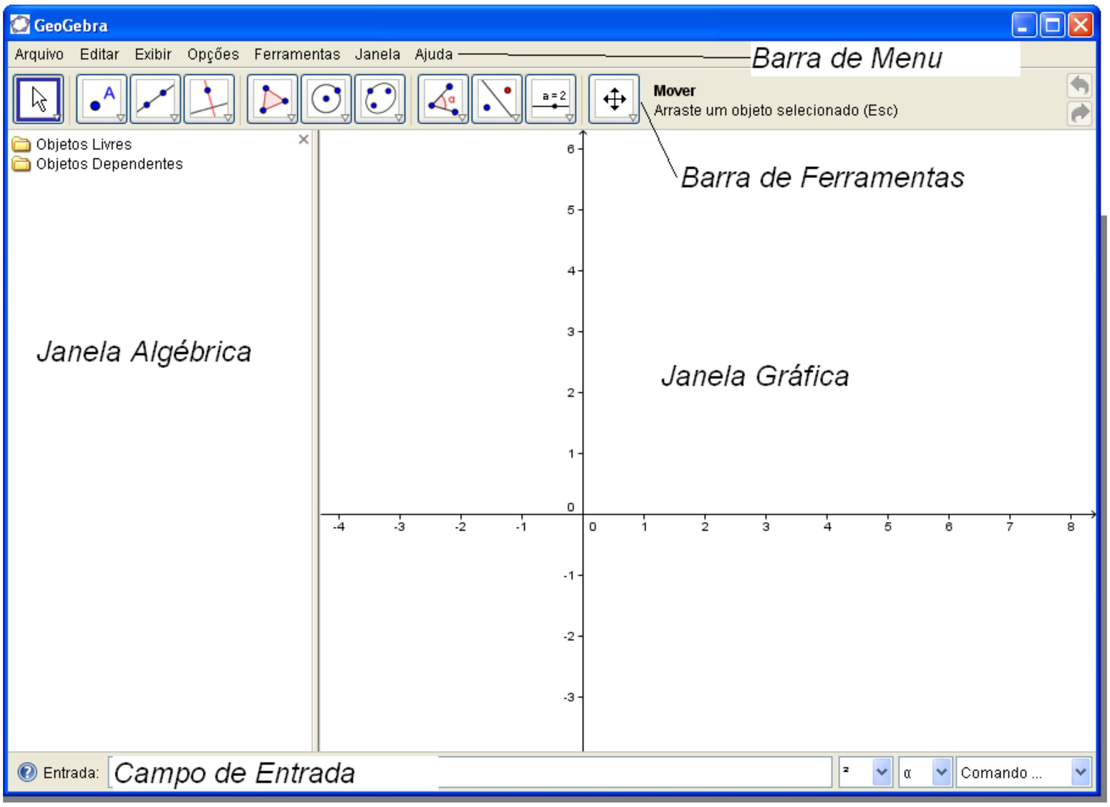
$$\pi r^2 = k^2 \quad \text{ou} \quad k = r\sqrt{\pi}$$

Mas se $\sqrt{\pi}$ fosse construtível, pelo Teorema 7.5.1 vem que $\pi = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}$ seria construtível. Daí π estaria em uma extensão finita de $\mathbb{Q}$, cujo grau é uma potência de dois e seria um número algébrico, o que é absurdo. Daí a impossibilidade de se quadrar um círculo.

9. ATIVIDADES PARA OS ALUNOS, COM O GEOGEBRA

Geogebra é um programa livre de geometria dinâmica criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. Por ser um software livre, os usuários podem fazer alterações em seus códigos fontes da maneira que necessitarem, melhorando, aprimorando atualizando ferramentas nele disponível ou acrescentando novas ferramentas. É possível realizar construções utilizando pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas bem como funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a construção estar finalizada, explorando a parte geométrica do software.

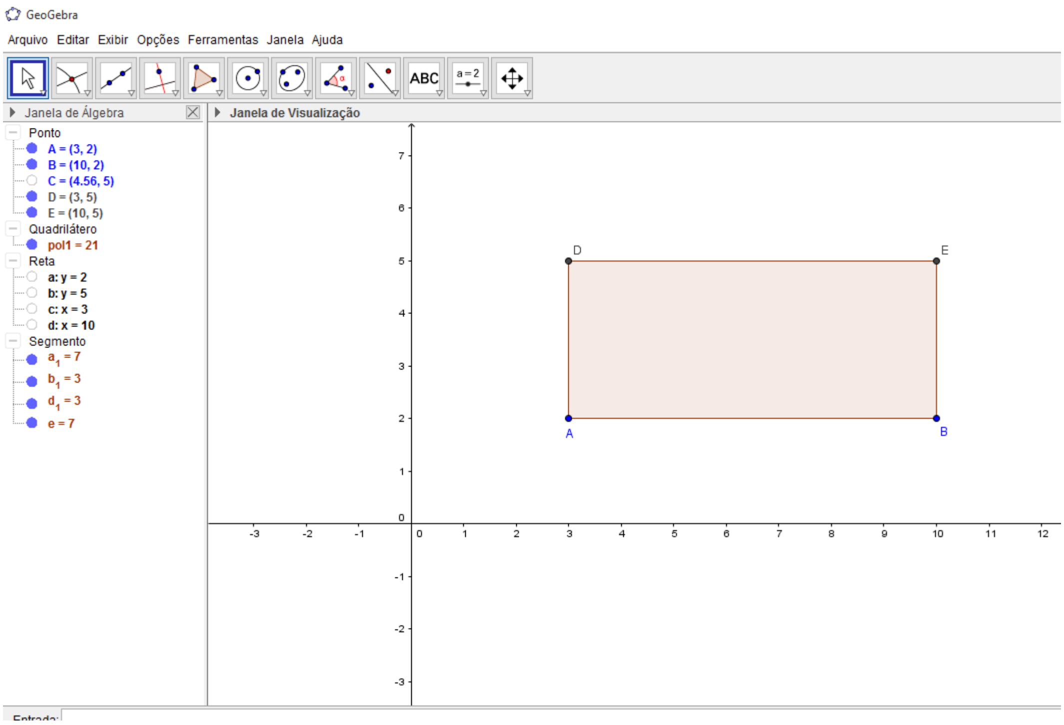
Você pode baixar o Geogebra gratuitamente pela internet acessando a página: http://www.geogebra.org.



Tela inicial do geogebra

ATIVIDADE 1: construindo um retângulo

- Selecione a opção RETA DEFINIDA POR DOIS PONTOS e clique em dois pontos na horizontal.
- Selecione a opção PONTO e clique em qualquer lugar na janela de construção.
- Selecione a opção RETA PARALELA e clique na reta e depois no ponto criado anteriormente.
- Selecione a opção RETA PERPENDICULAR e clique no ponto A e na outra reta. Faça o mesmo no ponto B e na outra reta.
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS e clique na reta que passa por C e na outra reta, perpendicular à primeira e que passa por A. Também faça o mesmo com a reta que passa por C e na outra reta, perpendicular à primeira e que passa por B.
- Selecione a opção POLÍGONO e clique nos pontos ABED. E também clique uma quinta vez no ponto inicial para fechar o retângulo.
- Selecione a opção EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique em todas as quatro retas e também no ponto que não é vértice do retângulo.
- Em seguida, selecione a opção MOVER para desaparecer todos os itens selecionados.

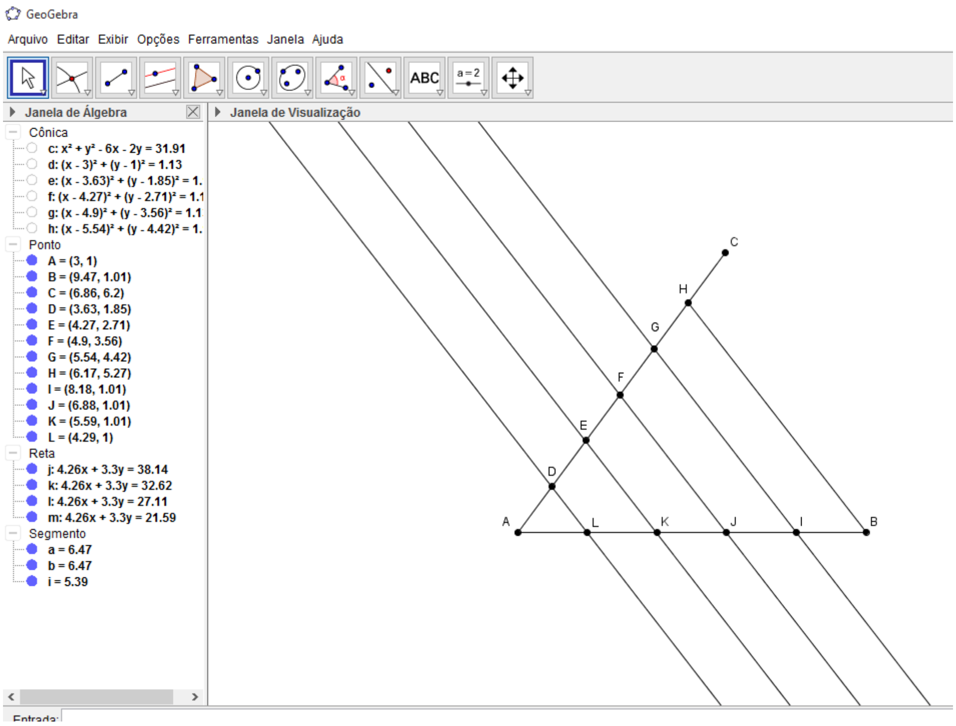


Atividade 2: dividindo um segmento em cinco partes iguais.

- Selecione a opção SEGMENTO e clique em dois locais diferentes no plano, obtendo os pontos A e B.
- Selecione a opção PONTO e clique num local fora do segmento construído, obtendo o ponto C.
- Selecione a opção SEMIRRETA e clique nos pontos A e C.
- Selecione a opção EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique no ponto C e em seguida MOVER.
- Selecione a opção CÍRCULO DADOS O CENTRO E RAIO. Clique no ponto A e em seguida digite 1 na janela e clique ok. Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS e clique na semirreta e no círculo criado.
- Repita a operação, com centro em D, obtendo o ponto E.
- Repita a operação, com centro em E e no ponto D, obtendo o ponto F.
- Repita a operação, com centro em F e no ponto E, obtendo o ponto G.
- Repita a operação, com centro em G e no ponto F, obtendo o ponto H.
- Selecione a opção EXIBIR/ESCONDER OBJETO e clique em cada circunferência construída.
- Em seguida, selecione a opção MOVER para desaparecer todos os itens selecionados.
- Na janela de álgebra, selecione os segmentos e com um clique no lado direito do mouse, clique em EXIBIR RÓTULOS.
- Selecione a opção SEGMENTO e clique nos pontos H e B.
- Selecione a opção RETA PARALELA, clique no segmento $\overline{\mathrm{BH}}$ e no ponto G.
- Selecione a opção RETA PARALELA, clique na reta que passa por G e no ponto F.
- Selecione a opção RETA PARALELA, clique na reta que passa por F e no ponto E.
- Selecione a opção RETA PARALELA, clique na reta que passa por E e no ponto D.
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS e clique em cada reta e no segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, obtendo os pontos I, J, K e L.

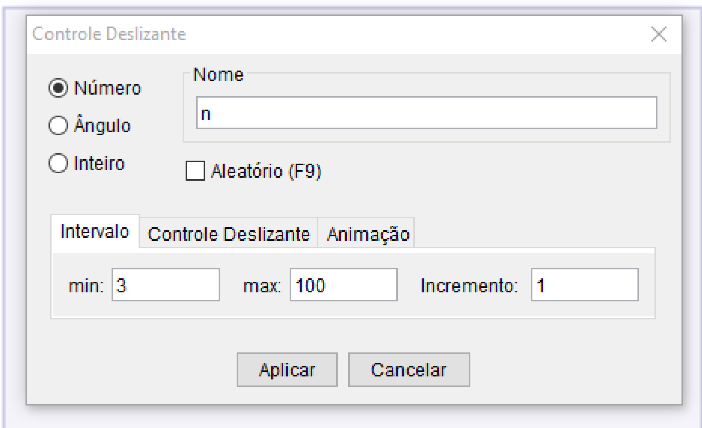
- Na janela de álgebra, selecione as retas e com um clique no lado direito do mouse, clique em EXIBIR RÓTULOS.

  Observe que o segmento $\overline{AB}$ foi dividido em cincos partes iguais, ou seja: $|\overline{AL}| = |\overline{LK}| = |\overline{KJ}| = |\overline{JI}| = |\overline{IB}|$

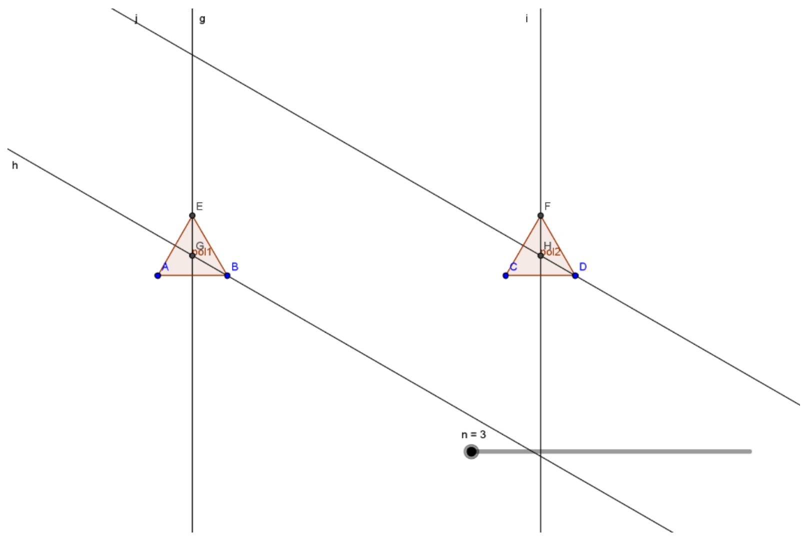


Atividade 3: aproximação do número π, por Arquimedes

- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE, clique na janela de visualização, utilize a letra n como nome, mínimo 3, máximo 100 e incremento 1. Clique em aplicar.



- Na janela de entrada, digite A=(5,2) e dê ENTER. Faça o mesmo para os pontos B=(6,2). C=(10,2) e D=(11,2).
- Com a opção POLÍGONO REGULAR clique nos pontos A e B e na janela digite n para vértices. Faça o mesmo para os pontos C e D.
- Utilize a opção MEDIATRIZ e clique, na sequência, sobre os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{CF}$.
- Com a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clique nas mediatrizes, obtendo os pontos G e H.

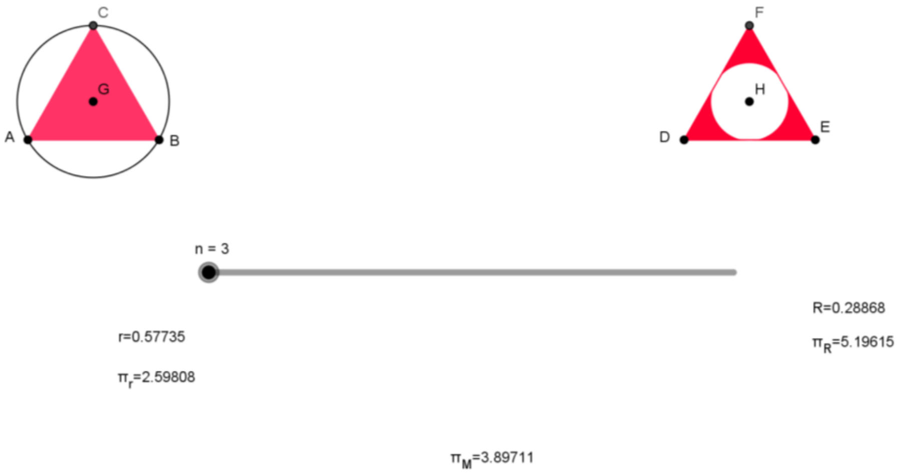


- Com a opção ÂNGULO COM AMPLITUDE FIXA marque dois pontos na janela de visualização e em seguida troque 45° por 360°/n.
- Selecione, na janela de Álgebra, as retas e com o lado direito do mouse clique em EXIBIR RÓTULOS. Faça o mesmo com os polígonos e segmentos.

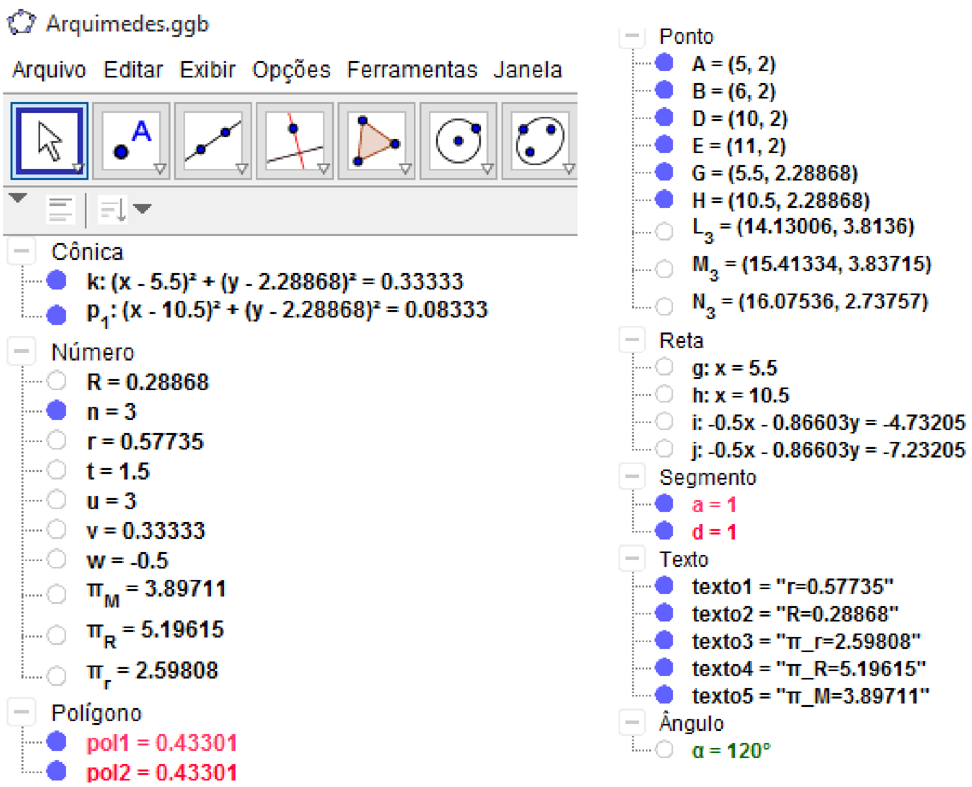
  Vamos, agora, construir alguns números. Para cada um é necessário criar um controle deslizante. Criaremos o primeiro. Para os demais, repetem-se os procedimentos, alterando apenas a definição.

- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE, clique na janela de visualização, utilize a letra w como nome. Clique em aplicar. Em seguida, na janela de Álgebra, selecione o número w e com o lado direito do mouse, vá até PROPRIEDADES e na aba BÁSICO, digite cos(α) no campo DEFINIÇÂO.

- Crie os seguintes números: t e definição 1- w; u definição 2t; v definição 1/u; r definição sqrt(v); R definição sqrt(r^2 -1/4); π_r definição n/(2r); π_R definição n/(2R) e π_M definição $(\pi_r + \pi_R)/2$.
- Com a opção TEXTO, no campo editar, digite r = e selecione objeto r. Clique em OK.
- Com a opção TEXTO, no campo editar, digite R = e selecione objeto R. Clique em OK.
- Com a opção TEXTO, no campo editar, digite π_r = e selecione objeto π_r. Clique em OK.
- Com a opção TEXTO, no campo editar, digite π_R = e selecione objeto π_R. Clique em OK.
- Com a opção TEXTO, no campo editar, digite π_M = e selecione objetoπ_M. Clique em OK.
- Com a opção CÍRCULO DADOS CENTRO E RAIO, clique no ponto G e raio r.
- Com a opção CÍRCULO DADOS CENTRO E RAIO, clique no ponto H e raio R.
- Selecione o polígono 1 e 2, e nas propriedades, pinte-o de vermelho.
- Selecione o círculo 2 e pinte-o de branco.
- Na janela de Álgebra, selecione retas e, com o lado direito do mouse clique em EXIBIR OBJETO de modo a esconder as retas na construção.
- Com a opção MOVER, clique no controle deslizante e mova-o.O aluno pode observar que o valor de π está aproximado por falta (polígono inscrito), por excesso (polígono circunscrito) e a média entre esses valores. O professor pode discutir os valores atribuídos aos números e outras propriedades de objetos construídos.



Abaixo mostraremos a janela de visualização e em seguida a janela de Álgebra, dividida em duas colunas.



10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Longo foi o caminho percorrido pelos matemáticos ao tentarem resolver estes três famosos problemas da Antiguidade; caminhos que conduziram a conceitos modernos de álgebra. Os geômetras gregos falharam nas suas buscas porque procuravam algo de impossível, como o próprio Papus afirmou, foram incapazes de resolver o problema usando apenas métodos planos, isto é, utilizando unicamente régua não graduada e compasso, pelo fato do problema não ser “plano”, mas sim “sólido”. A busca de solução para estes, e outros problemas geométricos permitiu, ao longo destes dois mil anos, que inúmeros desenvolvimentos matemáticos surgissem e novos horizontes se abrissem no universo da Álgebra. Problemas de enunciados muito simples levaram à criação de ramos da matemática mais complexos.

Assim, a busca pelo impossível acarretou num crescimento da matemática. A popularidade dos problemas levou muitos matemáticos amadores a buscar solução para os mesmos. Mesmo quando já se sabia que isto era impossível, o Royal Society de Londres, recebia grande quantidade de provas falsas.

Esses três problemas são exemplos de que a beleza de um problema matemático não está na resposta, e sim, nos métodos usados para resolvê-lo. A não existência de uma solução pode ser frustrante, mas os raciocínios que afloram nas tentativas infrutíferas da solução deles, constituem um material rico e cheio de descobertas interessantes, que proporcionam ao homem a evolução de seu conhecimento.

11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F.Q. **A matemática através dos tempos**. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

[2] BICUDO, I. Introdução e tradução. In: EUCLIDES, **Os Elementos**. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

[4] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Higino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Unicamp, 1995.

[5] NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. **Estruturas Algébricas**. São Paulo: Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2013.

[6] REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M.L.B. **Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas***.* Campinas, São Paulo: Unicamp, 2012.

[7] ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012 (Coleção PROFMAT).

[8] SEBASTIANI, E.F. **Nicomede e os três problemas clássicos gregos.** Revista Brasileira de História da Matemática - Vol. 10 – nº 20. São Paulo: Sociedade Brasileira de História da Matemática – SBHMat, 2010.

[9] SOUSA, J. M. R. de. **Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as soluções na Antiga Grécia.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática): Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2001.

[10] VENDEMIATTI, A. D. **A Quadratura do Círculo e a Gênese do Número π***.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

[11] WAGNER, E. **Uma Introdução às Construções Geométricas**. Disponível em: <http://www.mtm.ufsc.br/ensinomedio/jul-09/const-geometricas.pdf>. Acesso em: 20 de outubro de 2014.