UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDNARDO LINO DA SILVA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA
2015

EDNARDO LINO DA SILVA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará como requisito parcial, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S579a Silva, Ednardo Lino da
Aplicação do método de indução matemática no ensino médio / Ednardo Lino da Silva. – 2015.
51 f. : il. enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

1. Indução matemática. 2. Axiomas. 3. Matemática – Ensino médio. I. Título.

CDD 510

EDNARDO LINO DA SILVA

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 28 / 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Fabrício Siqueira Benevides

____

Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Júlio César Silva Araújo

____

Prof. Dr. Júlio Cesar Silva Araújo

Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos meus pais e a minha esposa que sempre deram incentivos para a realização dos meus trabalhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me concedido forças e disposição no decorrer deste trabalho.

Ao Professor Fabrício Benevides pela orientação dedicada e atenciosa.

RESUMO

O presente trabalho trata da importância de se utilizar o Método de Indução Matemática em demonstrações no Ensino Básico da Matemática, pois, atualmente, percebe-se que essa técnica de prova é raramente abordada nesse nível de ensino. Para isso, percorremos um caminho que vai desde a importância das demonstrações, seguido de uma seção na qual procuramos mostrar a diferença entre indução e indução matemática, passando pela definição e explicação desse método. Mostramos também, as equivalências entre as diversas formas do Princípio da Indução e o Princípio da Boa Ordenação. Concluímos com a resolução de vários exemplos, seguidos da sugestão de alguns problemas que visam facilitar o entendimento e a aplicação do Método de Indução Matemática no Ensino Médio.

Palavras chaves: Axioma. Demonstração. Ensino Básico. Princípio da Indução.

ABSTRACT

This dissertation deals with the importance of using Mathematical Induction Method demonstrations in Basic Mathematics Teaching, because, currently, it is clear that this proof technique is rarely approached at that level of education. For this, we pursue a path that goes from the importance of the demonstrations, followed by a section in which we show the difference between induction and mathematical induction, including the definition and explanation of this method. We also show the equivalence between different forms of the Induction Principle and the Well Ordering Principle. We conclude with the resolution of some examples, followed by suggestions of some problems to facilitate the understanding and application of mathematics Induction Method in High School.

Keywords: Axiom. Demonstration. Basic Education. Principle of Induction.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente percebe-se que no Ensino Médio é dada pouca importância ao ensino de demonstrações em matemática. Assim, se faz necessário propor, no decorrer das aulas, atividades que envolvam demonstrações com o intuito de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo em matemática.

Nesse sentido, o tratamento dado ao tema abordado procura ser agradável, com a finalidade de ampliar o conhecimento dos alunos e motivar o surgimento de discussões frente à resolução de cada atividade.

Assim, um dos objetivos desse trabalho é mostrar para professores e estudantes da Educação Básica, mais especificamente os do Ensino Médio, que é possível inserir o *Método de Indução Matemática* nesse nível de estudo. Para tanto, são resolvidos diferentes exercícios que servem de base para o entendimento desse método de demonstração. Procura-se com essas atividades, despertar o interesse e a curiosidade dos alunos para o entendimento e aprendizado desta técnica de demonstração.

Nesta mesma linha de pensamento, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, p. 252), ressaltam que cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível ele continuar aprendendo. Dessa forma, um dos objetivos para que o ensino dessa disciplina possa resultar em aprendizagem real e significativa para os alunos é utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas com intuito de desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos.

O embasamento teórico deste trabalho tem como principais referências, livros de autores renomados tais como: Elon, Morgado, Polya, Sominski, Fossa, dentre outros. Outras fontes utilizadas são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, além do Plano Nacional do Livro Didático de Matemática, para o Ensino Médio (PNLD – 2015).

Por fim, são propostos alguns problemas que têm como objetivo exercitar as técnicas aqui expostas, assim como, desenvolver o gosto pela argumentação em geral e pela demonstração como elemento central da própria matemática. Dentre estes problemas propostos, a maioria deles, pode ser aplicada no Ensino Médio. Espera-se que, esse trabalho sirva de auxílio para resgatar, o ensino da matemática em que se utilizam provas e demonstrações recorrendo ao *Método de Indução Matemática*.

2 POR QUE DEMONSTRAR NO ENSINO MÉDIO?

As demonstrações têm ocupado, nos últimos anos, um lugar de reduzida importância no currículo do Ensino Médio. Percebe-se que são poucos os alunos que, ao concluírem o Ensino Básico, tenham adquirido a capacidade de desenvolver a noção do que seja uma demonstração em matemática.

Por diversos motivos isso vem ocorrendo, seja por que o professor não considera importante comprovar a validade de certos fatos, ou por que o professor acredita que uma demonstração seja difícil para seus alunos.

Observa-se também, que, atualmente, o ensino de matemática se resume praticamente à resolução de sentenças e problemas matemáticos, o que pouco ajuda no desenvolvimento do raciocínio. Diante do exposto, é importante propor, mesmo no nível Médio, atividades que favoreçam o desenvolvimento do pensamento autônomo e crítico, pois do contrário, a matemática não passa de um simples amontoado de resultados interessantes, porém desconexos.

Então, por que demonstrar? “Conta-se que Newton, quando estudante, começou a aprender Geometria, como era habitual no seu tempo, pela leitura dos Elementos de Euclides. Ele estudou os teoremas, viu que eram verdadeiros e omitiu as demonstrações. Não entendia porque alguém se dava ao trabalho de demonstrar coisas tão evidentes. Alguns anos mais tarde, porém, ele mudou de opinião e fez elogios a Euclides, referentes à importância de realizar as demonstrações daqueles teoremas.” (POLYA, p. 115).

“As demonstrações são necessárias para assegurar a verdade dos teoremas. Mas demonstrar não é um ato mecânico, mas sim um ato criativo. Logo, as várias técnicas e estratégias são nada mais do que instrumentos que podemos usar em uma demonstração.” (FOSSA, 2009, p. 48).

Neste mesmo contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1999, p. 252), trazem, em relação ao conceito de demonstração em matemática, uma pretensão clara no sentido do quanto é importante ao aluno perceber que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Nesse sentido, se faz necessário enfatizar a importância da demonstração para os alunos do Ensino

Médio. Além de considerar que a Matemática nesse nível de estudo, tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo em matemática.

3 FUNDAMENTOS LÓGICOS DO MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA

3.1 Dedução e Indução

Denomina-se *proposição* uma sentença declarativa cujo conteúdo poderá ser considerado verdadeiro ou falso. Ela pode ser expressa por meio de palavras ou de símbolos.

Então, a afirmação “2 é um número primo” é uma proposição, cujo valor lógico é verdadeira.

As proposições são classificadas em dois tipos: gerais e particulares.

São proposições gerais, por exemplo, as seguintes:

a) Em todo paralelogramo as diagonais cortam-se, ambas, no seu ponto médio.

b) Todos os números inteiros que terminam em zero são divisíveis por 5.

Já as proposições particulares correspondentes a essas proposições gerais são:

a) As diagonais do paralelogramo ABCD (Figura 3.1) cortam-se, ambas, no seu ponto médio.

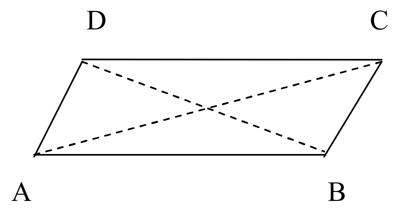

Figura 3.1

b) 120 é divisível por 5.

A passagem das proposições gerais às particulares denomina-se *dedução*. Por exemplo:

Todo número inteiro terminado em zero é divisível por 5. $(*)$

120 tem o último dígito igual a zero. $(**)$

120 é divisível por 5. $(***)$

Nestes exemplos, a proposição particular $(***)$ foi deduzida da proposição geral $(*)$ mediante a proposição $(**)$.

A tentativa de generalização de uma afirmação particular, isto é, a passagem de uma afirmação particular para uma geral, é chamada *indução*.

Considere agora, a seguinte afirmação particular:

120 é divisível por 5. (1)

É possível fazer, com base nesta afirmação particular, uma série de afirmações gerais. Por exemplo:

Todo número inteiro terminado em zero é divisível por 5. (2)

Todo número inteiro terminado em 20 é divisível por 5. (3)

Todo número inteiro com três dígitos é divisível por 5. (4)

Todo número cuja soma de seus algarismos é 3 é divisível por 5. (5)

As afirmações (2), (3), (4) e (5) são tentativas de generalização do caso particular (1). Note que as afirmações (2) e (3) são verdadeiras, enquanto (4) e (5) são falsas. Conclui-se então, que a indução pode levar a conclusões verdadeiras e a conclusões falsas.

3.2 Indução versus Indução Matemática

Considerando as definições da subseção anterior, é possível inferir, que a indução é o processo ou método de descoberta de leis gerais pela observação ou estudo de casos particulares. Esse método indutivo é amplamente utilizado em todas as ciências experimentais.

Em algumas ciências não matemáticas, a observação e comparação de um certo número de casos semelhantes habilitam aos que trabalham nessas ciências a formular uma lei geral. Entretanto em Matemática, é preciso tomar certos cuidados ao formular leis gerais a partir de casos particulares, pois a precipitação pode conduzir a conclusões falsas. Ou seja, ao contrário do que ocorre nas ciências experimentais, em matemática, uma demonstração não pode consistir apenas da observação de um certo número de resultados semelhantes.

De fato, a simples observação dos resultados particulares de um experimento ou fenômeno não é aceita como uma prova. Temos como únicas excessões, os *axiomas*, que são proposições que podem ser consideradas verdadeiras sem a necessidade de uma demonstração, mas destes, falaremos na subseção seguinte.

A demonstração em matemática é uma prova irrefutável sobre a veracidade de uma proposição e a *indução matemática* é uma das muitas técnicas de demonstração, utilizada exclusivamente nesta ciência, para demonstrar a validade de certas proposições ou teoremas envolvendo os números naturais, aqui considerados como: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Ela, a indução matemática, é um método de prova bastante específico que estudaremos em detalhes nas seções seguintes.

Mostraremos a seguir, alguns exemplos que apresentam propriedades válidas em alguns casos particulares, mas que são falsas para casos gerais.

Exemplo 3.2.1 *É verdade que o número* $n^2 + n + 41$ *é primo qualquer que seja o número natural* n? (Este exemplo foi elaborado por *Leonard Euler*).

Solução: Substituindo n sucessivamente por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, obtemos em cada substituição um número primo (43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131 e 151, respectivamente). Com base nesses resultados somos tentados a concluir que, ao substituir n por qualquer número natural, sempre obtemos um número primo como resultado. Porém, isso não é verdade, pois para $n = 40$, o valor do número é $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot 41 = 41^2$ e para $n = 41$, temos $41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$, ou seja, há pelo menos dois valores de n para os quais $n^2 + n + 41$ é um número composto. Logo $n^2 + n + 41$ não é um primo para qualquer que seja o número natural n. □

Exemplo 3.2.2 *Na tabela* 3.1 *seguinte, para cada número natural n de* 2 *a* 10, *calculou-se o número* $2^n - 1$ *obtendo-se os seguintes resultados*:

n	É primo?	$2^n - 1$	É primo?
2	Sim	3	Sim
3	Sim	7	Sim
4	Não	15	Não
5	Sim	31	Sim
6	Não	63	Não
7	Sim	127	Sim
8	Não	255	Não
9	Não	511	Não
10	Não	1023	Não

Tabela 3.1

Solução: A partir desses resultados, somos levados a supor que dado um número inteiro n superior a 1, se n for primo então o número $2^n - 1$ é primo. Contudo, isso pode ser refutado imediatamente, pois basta continuar a calcular os valores da tabela para valores de n maiores do que 10, que logo concluímos que para $n = 11$, teremos $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$, que é um número composto. □

Curiosidade: Os números da forma $2^n - 1$ que são primos são chamados de primos de Mersene. Um fato curioso é que o maior número primo que se conhece hoje é um primo de Mersene: ele é o número $2^{57.885.161} - 1$ que possui 17.425.170 algarismos. Para se ter uma ideia, precisaríamos de mais de 9 mil páginas para escrever sua representação decimal aqui.

Exemplo 3.2.3 *Considere os números inteiros da forma* $F_n = 2^{2^n} + 1$ (*para n inteiro não negativo*).

Temos que:

Se $n = 0$, então $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$.

Se $n = 1$, então $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$.

Se $n = 2$, então $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$.

Se $n = 3$, então $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$.

Se $n = 4$, então $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$.

Observe que todos esses números encontrados são números primos. Pierre de Fermat (1601−1665), ilustre matemático francês do século XVII acreditava que a fórmula F_n representaria números primos qualquer que fosse o valor positivo para n inteiro. Entretanto, Leonhard Euler (1707 − 1783), já no século XVIII, concluiu que para $n = 5$, obtém-se $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 34294967297 = 641 \cdot 6700417$, que é um número composto. □

Exemplo 3.2.4 Leibniz (1646 – 1716), ilustre matemático alemão, demonstrou que, para qualquer que seja o inteiro positivo n, temos que $n^3 - n$ é divisível por 3, que $n^5 - n$ é divisível por 5 e $n^7 - n$ é divisível por 7. A partir destas observações, Leibniz supôs que para todo inteiro ímpar positivo k, temos que $n^k - n$ é divisível por k, mas logo observou que $2^9 - 2 = 510$ não é divisível por 9. Um fato curioso, provado por Fermat, é que quando k é primo é verdade que $n^k - n$ é divisível por k. □

Exemplo 3.2.5 *Dada a relação* $A_n = -\frac{n^3}{6} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{3} + 3$, *definida para todo n pertencente aos naturais, temos:*

Se $n = 1$, então $A_1 = -\frac{1^3}{6} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{7 \cdot 1}{3} + 3 = \frac{-1 + 9 - 14 + 18}{6} = 2$.

Se $n = 2$, então $A_2 = -\dfrac{2^3}{6} + \dfrac{3 \cdot 2^2}{2} - \dfrac{7 \cdot 2}{3} + 3 = \dfrac{-8 + 36 - 28 + 18}{6} = 3.$

Se $n = 3$, então $A_3 = -\dfrac{3^3}{6} + \dfrac{3 \cdot 3^2}{2} - \dfrac{7 \cdot 3}{3} + 3 = \dfrac{-27 + 81 - 42 + 18}{6} = 5.$

Se $n = 4$, então $A_4 = -\dfrac{4^3}{6} + \dfrac{3 \cdot 4^2}{2} - \dfrac{7 \cdot 4}{3} + 3 = \dfrac{-64 + 144 - 56 + 18}{6} = 7.$

A partir desses resultados, poderíamos tirar a seguinte conclusão precipitada: A_n é um número primo, para todo n pertencente aos naturais. Mas, esta afirmação é falsa, pois para $n = 5$, temos:

$A_5 = -\dfrac{5^3}{6} + \dfrac{3 \cdot 5^2}{2} - \dfrac{7 \cdot 5}{3} + 3 = \dfrac{-125 + 225 - 70 + 18}{6} = 8$, que é composto. □

Exemplo 3.2.6 *Em quantas partes n planos dividem o espaço, passando todos por um mesmo ponto sem que nunca passem três deles por uma mesma reta*?

Solução: Consideremos alguns casos particulares desse problema. Um plano divide o espaço em duas partes; dois planos passando por um ponto dividem o espaço em 4 partes; três planos passando por um ponto, mas não contendo uma reta em comum, dividem o espaço em 8 partes.

À primeira vista, parece que quando o número de planos aumenta de uma unidade, o número de partes nas quais se divide o espaço é dobrado, e, portanto, quatro planos dividiriam o espaço em 16 partes, cinco planos o divide em 32 partes, n planos dividem o espaço em 2^n partes. Porém, isso pode ser refutado imediatamente, pois, considerando a figura abaixo (Figura 3.2), temos que para 4 planos, o espaço fica dividido em 14 regiões.

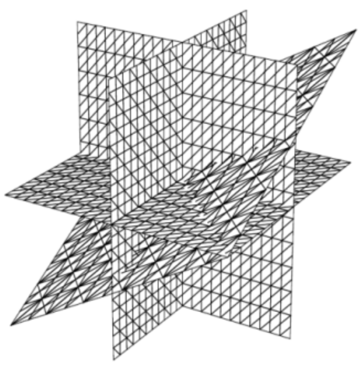

Figura 3.2 □

Os exemplos apresentados mostram que não é legítimo concluir que uma proposição é válida para todo o inteiro positivo *n*, pelo simples fato de ela ser válida para um determinado número, embora grande, de valores de *n*. Assim, a única maneira de concluir a veracidade de uma proposição é fazer uma demonstração geral, que seja válida para qualquer caso, independentemente de exemplos. Na maioria dos casos, podemos resolver essa questão aplicando um método particular de raciocínio, chamado *Método de Indução Matemática*, baseado no *Princípio de Indução Finita.* Pois, quando conseguimos aplicar esse método para uma determinada proposição sobre um número natural, podemos ter a certeza de que a proposição em questão será verdadeira para todo número natural.

3.3 Os Axiomas de Peano

Em matemática, a maneira que se utiliza para se fazer uma teoria denomina-se *estrutura axiomática*. Esta técnica consiste em observar um objeto de estudo e tentar reduzi-lo aos seus conceitos mais básicos, a partir dos quais seja possível deduzir tudo o que se deseja saber a respeito desse objeto.

Segundo PINEDO (2013, p. 120), a base da construção de qualquer disciplina matemática é o método axiomático. Isto é, o estabelecimento de um conjunto de regras de raciocínio, de enunciados e axiomas (ou postulados) a partir dos quais, e por regras de inferência do sistema, derivam-se outros enunciados ou proposições chamados de teoremas.

Os números naturais oferecem uma oportunidade de um primeiro contato com uma estrutura axiomática. Assim, é possível pensar em uma estrutura axiomática da seguinte forma: o que é essencial que se diga a respeito dos números naturais para alguém que nunca teve nenhuma experiência com eles?

Esse esforço sobre os números naturais foi feito, no início do século XX, pelo matemático *Giuseppe Peano* (1858-1932) que estabeleceu os axiomas necessários que nos permitem definir e construir com precisão o conjunto dos números naturais assim como demonstrar todas as propriedades aritméticas que ele possui. Tais axiomas foram divulgados numa obra de 1889, denominada *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*. É nesta obra que Peano apresenta seus axiomas e enuncia a base de um processo demonstrativo designado como *Indução Finita*.

Em conformidade com FOSSA (2009, p. 47), os axiomas são os princípios fundamentais de uma teoria matemática, eles são as últimas razões, das quais todo o resto depende. De forma semelhante, PINEDO (2013, p. 9) afirma que axioma é uma proposição que se admite como verdadeira porque dela se podem deduzir as proposições de uma teoria ou de um sistema lógico ou matemático.

As afirmações seguintes são conhecidas como os *axiomas de Peano*. Elas são as únicas proposições sobre o conjunto dos números naturais que podem ser aceitas sem a necessidade de uma demonstração.

1) Todo número natural n tem um único sucessor $s(n)$;

2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

3) Existe um número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

4) Seja X um subconjunto dos números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

O Axioma (4) acima é chamado de "axioma da indução". E o conjunto X que possui as propriedades do axioma (4) é denominado de *conjunto indutivo*. Este quarto axioma garante que $\mathbb{N} = \{1, s(1), s(s(1)), ...\}$. É comum, dado um natural n, definirmos $n + 1$ como $s(n)$ e a partir daí, é possível deduzir as propriedades aritméticas sobre os números naturais. Contudo, neste trabalho, focaremos em como utilizar o axioma da indução para demonstrar proposições.

4 A INDUÇÃO MATEMÁTICA E O PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

4.1 Primeira forma do Princípio da Indução

O axioma da indução é a base para um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais, denominado *Demonstrações* por *Indução Matemática*. Enunciado sob a forma de proposição em vez de conjunto tem-se o que denominamos primeira forma do Princípio da Indução Finita.

Primeira forma do Princípio da Indução

Seja P(n) uma proposição relativa aos números naturais. Suponhamos que:

(i) P(1) é verdadeira; e

(ii) Para um certo $n \in \mathbb{N}$, a veracidade de P(n) implica a veracidade de P(n + 1).

Então, P(n) é verdadeira para qualquer que seja o número natural n.

Observe que, a primeira forma do Princípio da Indução afirma que se (i) e (ii) são verdadeiras então P(n) é verdadeira para qualquer que seja o número natural n.

Como efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ para os quais P(n) é verdadeira, veremos que $1 \in X$, em virtude de (i) e que "$n \in X \Rightarrow (n + 1) \in X$", em virtude de (ii). Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

A afirmação (i) é chamada de *base da indução* ou *passo básico* e a afirmação (ii) de *passo indutivo*. Na base da indução, verificamos que a proposição é válida para um valor inicial $n = 1$. O passo indutivo consiste em mostrar como utilizar a validade da proposição para um determinado n natural (que denominamos *hipótese de indução*) com a finalidade de provar a validade da mesma proposição para o número natural seguinte $n + 1$. Uma vez verificados a base e o passo indutivo, temos a "cadeia de implicações":

$$
\begin{aligned}
\text{P(1) é verdadeira (base)} &\overset{\substack{\text{passo}\\ \text{indutivo}}}{\Rightarrow} \text{P(1 + 1) é verdadeira,}\\
&\overset{\substack{\text{passo}\\ \text{indutivo}}}{\Rightarrow} \text{P(2 + 1) é verdadeira,}\\
&\overset{\substack{\text{passo}\\ \text{indutivo}}}{\Rightarrow} \text{P(3 + 1) é verdadeira,}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

de modo que P(n) é verdadeira para todo n natural

Em conformidade com FOSSA (2009, p. 105), a base é absolutamente necessária para a validade da demonstração. Mas, por outro lado, não é necessário que a base seja a prova da veracidade de P(1). Podemos começar provando que P(2) ou P(3), ou mesmo P(r) para algum r natural fixo, seja verdadeira. Entretanto, se utilizarmos P(r) como a base da indução, o princípio da indução nos garante apenas que P(n) será verdadeira para os naturais n maiores ou iguais a r, não fornecendo qualquer informação sobre a veracidade de P(1), P(2), . . . , P(r – 1).

As propriedades do Princípio da Indução podem ser comparadas ao efeito dominó, isto é, se temos uma fila de dominós dispostos verticalmente de modo que as distâncias entre as peças permitam que umas toquem nas outras ao caírem, então, para derrubar todas as peças, basta dar um empurrão na primeira porque esta derrubará a segunda que, por sua vez, derrubará a terceira e assim por diante até o fim da fila. Logo, o resultado final é que todas as peças de dominó dessa fila cairão (Figura 4.1). O interessante, é que isso é verdade mesmo quando a fila de dominós é infinita.

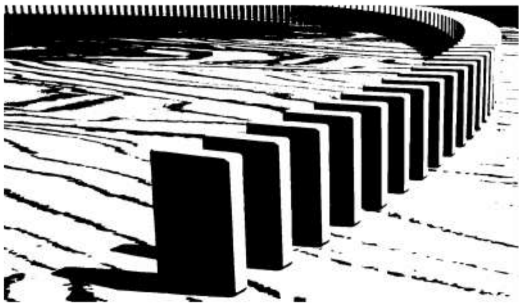

Figura 4.1

Apresentamos a seguir, um esquema de demonstração que visa facilitar a prova da veracidade de uma proposição P(n), relativa aos números naturais, aplicando o Princípio da Indução Finita.

Esquema de demonstração por Indução Finita

1) Verificar a veracidade da proposição P(n) para n = 1. Denominamos essa etapa de *base da indução* ou *passo básico*.

2) O *passo indutivo*, que consiste em supor que P(n) seja verdadeira para um determinado valor de n, digamos $n = k$ (*hipótese de indução*). E em seguida, usar a hipótese de indução para provar que P(n) também é verdadeira quando substituirmos n por k + 1.

Verificados os itens anteriores, podemos concluir que a proposição P(n) é verdadeira para todo n pertencente aos naturais.

"Uma vez demonstrados o *passo básico* e o *passo indutivo*, todas as proposições na série estão demonstradas simultaneamente, já que é possível chegar a qualquer uma delas a partir da base - passo a passo". (FOMIN, 2012, p. 91).

É importante destacar que este esquema de demonstração não é uma "receita" pronta que devemos seguir rigorosamente. O leitor pode fazer as modificações apropriadas quando necessárias.

Entre os casos mais frequentes do uso do Princípio da Indução Finita (Indução Matemática) está o de demonstrar identidades relativas à soma de parcelas que cumpram certo padrão.

A seguir, exibimos alguns exemplos onde utilizamos a primeira forma do Princípio da Indução Finita.

Exemplo 4.1.1 *Determinar uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais ímpares. Em seguida, prove esta fórmula por indução matemática.*
Solução: Observemos as igualdades:

$$1 = 1,$$
$$1 + 3 = 4,$$
$$1 + 3 + 5 = 9,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25\ .$$

É possível perceber até esse ponto, um padrão de construção. Somos levados a desconfiar, que provavelmente, a regra que está por traz dessa construção é:

"A soma dos n primeiros números naturais ímpares será igual a n^2". (∗)

Isso porque, o primeiro ímpar é o quadrado de 1; a soma dos dois primeiros números ímpares é o quadrado de 2; a soma dos três primeiros números ímpares é o quadrado de 3; e a soma dos quatro primeiros números ímpares é o quadrado de 4.

Alguns alunos acreditam que encontrar um padrão já é o suficiente para demonstrar a veracidade desta regra encontrada. Mas como vimos na Seção 3, esse não é caso. É importante mostrar para os estudantes da Educação Básica que esse tipo de argumentação, que se esgota na simples observação de um número razoável de casos, não é uma argumentação aceita em matemática.

Denomina-se *conjectura* uma afirmação com base em certa quantidade de casos observados. [1]As conjecturas são importantes para fazer investigações, mas não podem fazer parte da teoria enquanto não forem confirmadas por um processo dedutivo, que consiste em constatar a veracidade de uma afirmação partindo de outra (possivelmente mais simples) e usando implicações lógicas.

Assim, como a sentença ($*$) é algo que acreditamos ser verdade, mas que ainda não foi demonstrada temos então uma conjectura. Logo, estamos conjecturando que *"A soma dos n primeiros números naturais ímpares será igual a n^2"*.

Expressando o problema em linguagem matemática, temos a seguinte igualdade:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad (**)$$

Em que $2n$ - 1 representa o n-ésimo número natural ímpar. Note que caso queiramos encontrar o primeiro número desta soma basta substituir o n por 1 em $(2n - 1)$, para encontrar o segundo número ímpar da soma basta substituir o n por 2 e assim sucessivamente.

Para demonstrar que a equação ($**$) é verdadeira, ou seja, que ela funciona sempre para todo n natural, vamos utilizar a primeira forma do Princípio da Indução.

Considere então, a seguinte proposição:

$$\mathrm{P}(n): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \qquad (1)$$

Observemos que $\mathrm{P}(n)$ é verdadeira para $n = 1$. Pois, substituindo n por 1 nesta proposição, obtemos $\mathrm{P}(1)$: $1 = 1^2$, o que é verdadeiro. Logo a base da indução é verdadeira.

Agora, suponhamos que a proposição $\mathrm{P}(n)$ seja verdadeira para um determinado valor de n, digamos, $n = k$, sendo $k \in \mathbb{N}$ (hipótese de indução). Isto é, estamos supondo que:

$$\mathrm{P}(k): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2, \text{ seja válida.} \qquad (2)$$

Vamos usar isso para mostrar que a fórmula em (1) valerá também quando substituirmos n por $k + 1$ (passo indutivo). Isto é, queremos ainda mostrar que vale:

$$\mathrm{P}(k + 1): 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2. \qquad (3)$$

Agora, partindo do primeiro membro da equação em (3) e usando a hipótese de indução $\mathrm{P}(k)$, obtemos:

[1] Fonte: http://www.dm.ufscar.br/~ptlini/livros/livro_geo.html. Acesso em 02 de mar. 2015.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + (2k + 1)$$
$$= k^2 + (2k + 1)$$
$$= (k + 1)^2.$$

A expressão final coincide com o segundo membro da equação em (3). Assim, veja que usando a equação em (2) conseguimos demonstrar a equação em (3).

Portanto, por indução matemática, concluímos que P(n) é verdadeira para todo n pertencente aos naturais. □

Exemplo 4.1.2 *Determinar uma fórmula para a soma dos n primeiros números naturais. Em seguida, prove esta fórmula por indução matemática.*

Solução: Para conjecturar uma fórmula, primeiro fazemos os cálculos para alguns valores de n, como mostra a Tabela 4.1 seguinte, onde S_n representa o valor da soma desejada.

n	1	2	3	4	...
S_n	1	$1 + 2 = 3$	$1 + 2 + 3 = 6$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	...
$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$	$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$	$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$	$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$	$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$	...

Tabela 4.1

Os resultados na tabela sugerem que $S_n = \frac{1}{2} \cdot n\ (n + 1)$. Agora, demonstraremos que a fórmula conjecturada é válida usando a primeira forma do Princípio da Indução Finita.

Definamos aqui, a seguinte proposição:

$$P(n){:}\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} \cdot n\ (n + 1). \qquad (1)$$

Veja que para $n = 1$, temos:

$$P(1){:}\quad 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1).$$

Logo, P(n) é verdadeira para $n = 1$ (base da indução). Agora suponhamos que P(n) seja verdadeira para um determinado valor de n, digamos, $n = k$, sendo $k \in \mathbb{N}$ (hipótese de indução). Isto é:

$$P(k): \quad 1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2} \cdot k\,(k + 1), \text{ seja verdadeira.} \tag{2}$$

E vamos mostrar que P(n) também é verdadeira quando substituirmos n por $k + 1$ (passo indutivo). Isto é:

$$P(k + 1): 1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{1}{2} \cdot (k + 1)\,(k + 2). \tag{3}$$

Partindo do primeiro membro da equação em (3) e usando a hipótese de indução P(k), temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) &= (1 + 2 + \ldots + k\,) + (k + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot k\,(k + 1) + (k + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (k + 1)\,(k + 2). \end{aligned}$$

A expressão final coincide com o segundo membro da equação em (3).

Logo, usando o Princípio da Indução, concluímos que P(n) é verdadeira para todo n pertencentes aos naturais. □

Observação: Note que, nas demonstrações acima, poderia parecer que estamos usando o fato de $P(k)$ ser verdadeira para deduzir que $P(k + 1)$ é verdadeira para em seguida concluir que $P(k)$ é verdadeira. Na verdade, o que se deve demonstrar é a veracidade da implicação "$P(k) \Rightarrow P(k + 1)$", e não a veracidade de $P(k + 1)$ isoladamente. Isso, em conjunto com a base é o que nos garante que P(n) será válida para todo n natural. Por outro lado, quando a base é falsa, é possível que a implicação acima seja verdadeira, mas P(k) seja falsa para todo k natural.

4.2 Segunda forma do Princípio da Indução

Até agora, estivemos usando apenas a versão básica do Princípio da Indução Finita. Mas, muitas vezes, para conseguir mostrar que P(k + 1) é verdadeira, não é suficiente assumir apenas a validade de P(k). E então, precisamos supor que P(r) é verdadeira para todo r, onde $n_0 \leq r \leq k$, e n_0 é algum natural fixo adequado ao problema. Neste caso, temos que recorrer a uma reformulação da versão básica denominada *Segunda Forma do Princípio da Indução* ou *Indução Forte*.

Segunda forma do Princípio da Indução – Indução forte

Considere um número natural n_0. Suponhamos que, para todo natural $n \geq n_0$, seja dada uma proposição P(n) e que valem as propriedades:

(i) P(n_0) é verdadeira;

(ii) Para um natural arbitrário k, se a veracidade de P(r) para todo r, em que $n_0 \leq r \leq k$, implica a veracidade de P(k + 1).

Então, a proposição P(n) é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Observe que na segunda forma do Princípio da Indução, também há a *base da indução* em que se prova que a proposição P(n_0) é verdadeira, e o *passo indutivo* em que assumimos que P(r) é verdadeira para todo r natural, em que $n_0 \leq r \leq k$, para em seguida mostramos que P(k + 1) é verdadeira. A diferença entre essas duas formas do Princípio de Indução Matemática está na hipótese de indução. Na primeira forma do Princípio, supõe-se que P(k) seja verdadeira para um número natural arbitrário k, e na segunda forma, supõe-se que P(n_o), P(n_0 + 1), . . . , P(k – 1), P(k) sejam todas verdadeiras.

Ou seja, a segunda forma do Principio da Indução é útil para os casos em que a validade de P(k + 1) não puder ser obtida facilmente da validade de P(k), mas sim da validade de algum P(r), em que $n_0 \leq r \leq k$.

Na verdade, estes dois Princípios de Indução Finita são equivalentes, ou seja, pode-se demonstrar (o que será feito na Subseção 4.4) que qualquer um deles é um método de prova válido considerando o outro válido.

A seguir, temos alguns exemplos onde utilizamos a segunda forma do Princípio da Indução.

Exemplo 4.2.1 *Considere a sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...) definida recursivamente por:* $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, *para* $n \geq 3$. *Prove, por indução em n, que:*

(a) $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$, *para todo* $n \geq 1$.

(b) $F_n > \left(\frac{5}{4}\right)^n$, *para todo* $n \geq 3$.

Solução:

(a) Seja P(n) a proposição: $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Vamos mostrar que P(n) é válida para todo $n \geq 1$.

Observe que para $n = 1$, temos que $F_1 = 1 < \frac{7}{4}$, e para $n = 2$, temos que $F_2 = 1 < \frac{49}{16}$, de modo que a base é verdadeira.

Suponhamos agora, que para algum k natural a proposição P(r) é verdadeira para todo r onde $1 \leq r \leq k$. Em particular, estamos supondo que a proposição P(n) é válida para $n = k - 1$ e $n = k$. Isto é:

$$F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \text{ e } F_k < \left(\frac{7}{4}\right)^k.$$

Devemos provar que P(n) também é verdadeira para $n = k + 1$. Isto é:

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

Reescrevendo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ em termos de $k + 1$ obtemos:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \text{ para } k \geq 2.$$

De onde segue que:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(1 + \frac{4}{7}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{11}{7}\right).$$

Mas, $\frac{11}{7} < \frac{7}{4}$, segue então que:

$$F_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \geq 1$. □

(b) Agora, seja Q(n) a proposição: $F_n > \left(\frac{5}{4}\right)^n$.

Vamos mostrar que Q(n) é válida para todo $n \geq 3$.

Para $n = 3$, temos que $F_3 = 2 > \frac{125}{64}$, de modo que Q(3) é verdadeira.

Suponhamos agora, que para algum k natural a proposição Q(r) é verdadeira para todo r tal que $3 \leq r \leq k$. Em particular, estamos supondo que a proposição Q(n) é válida para $n = k - 1$ e $n = k$. Isto é:

$$F_{k-1} > \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1} \text{ e } F_k > \left(\frac{5}{4}\right)^k.$$

Devemos provar que Q(n) também é verdadeira para $n = k + 1$. Isto é:

$$F_{k+1} > \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}.$$

Aqui, escrevemos:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \text{ para } k \geq 2.$$

E, portanto, temos:

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} > \left(\frac{5}{4}\right)^k + \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{5}{4}\right)^k \left(1 + \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^k \left(\frac{9}{5}\right).$$

Mas, $\frac{9}{5} > \frac{5}{4}$, segue então que:

$$F_{k+1} > \left(\frac{5}{4}\right)^k \left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}.$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que Q(n) é verdadeira $\forall n \geq 3$. □

Exemplo 4.2.2 *Seja a sequência* (a_1, a_2,..., a_n,...) *definida com*:

$$a_1 = 3$$

$a_2 = 5$

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, para $n > 2$.

Ache uma fórmula fechada para o n-ésimo termo desta sequência e prove o resultado encontrado por Indução Matemática.

Solução: Vamos calcular alguns termos iniciais para tentar encontrar uma fórmula fechada, em termos de n. Calculando, temos:

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17,$$
$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 17 - 2 \cdot 9 = 33,$$
$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 3 \cdot 33 - 2 \cdot 17 = 65.$$

A partir desses resultados, já é possível perceber que os números 3, 5, 9, 17, 33 e 65 são uma potências de 2, somada com 1. Isto nos sugere que a fórmula fechada para encontrar o n-ésimo termo da sequência poderá ser:

$$a_n = 2^n + 1. \qquad (*)$$

Vamos provar, por Indução Matemática, que a fórmula $(*)$ é verdadeira.

Seja P(n) a proposição: $a_n = 2^n + 1$.

Vamos mostrar que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observe que para $n = 1$, temos: $a_1 = 2^1 + 1 = 3$. Logo, P(1) é verdadeira.

Suponhamos agora, que para algum k natural a proposição P(r) é verdadeira para todo r onde $1 \leq r \leq k$. Em particular, estamos supondo que a proposição P(n) é válida para $n = k - 1$ e $n = k$. Isto é:

$$a_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \text{ e } a_k = 2^k + 1.$$

Vamos mostrar que a P(n) também é verdadeira para $n = k + 1$. Ou seja, queremos ainda mostrar que:

$$a_{k+1} = 2^{k+1} + 1, \text{ também seja válida.}$$

Reescrevendo a igualdade $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ em termos de a_{k+1}, temos:

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}.$$

Usando a hipótese de indução nesta última igualdade, obtemos:

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) \\
&= 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \\
&= 2^{k+1} + 1.
\end{aligned}
$$

Logo, P($k + 1$) verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in$. □

4.3 Princípio da Boa Ordenação (PBO)

Outra propriedade importante referentes aos números naturais é o *Princípio da Boa Ordenação*. O PBO é uma propriedade sobre os números naturais equivalente à indução matemática (o que será demonstrado na Subseção 4.4) e que é, em alguns casos, de mais fácil aplicação na demonstração de resultados referentes a números naturais.

Definição: Um número $p \in X$ é o *menor elemento* de X (ou *elemento mínimo* de X) quando se tem $p \leq n$ para todo $n \in X$. Por exemplo, o número 1 é o menor elemento do conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais. De maneira semelhante, qualquer que seja $X \subset \mathbb{N}$ com $1 \in X$, temos que 1 é o menor elemento de X.

Teorema 4.1. (Princípio da Boa Ordenação). *Todo subconjunto A não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo.*

Demonstração[2]: O menor elemento de A, cuja existência queremos provar, deverá ser da forma $n + 1$. Devemos encontrar um número natural n tal que $n + 1 \in A$ e, além disso, todos os elementos de A são maiores do que n, logo maiores do que 1, 2, …, n. Considere então, I_n o conjunto dos números naturais p tais que $1 \leq p \leq n$, considere também o conjunto $X \subset \mathbb{N}$, formado pelos números $n \in \mathbb{N}$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Dizer que $n \in X$ significa afirmar que $n \notin A$ e que todos os números naturais menores do que n também não pertencem a A. Se tivermos $1 \in A$, o *Teorema* estará demonstrado pois 1 será o menor elemento de A. Se, porém, tivermos $1 \notin A$ então $1 \in X$. Mas, por outro lado, temos que $X \neq \mathbb{N}$, pois $X \subset \mathbb{N} - A$ e o

[2] Demonstração adaptada da revista *Eureka,* n.3, p. 34, 1998.

conjunto A não é vazio. Então, pelo axioma da indução, vemos que o conjunto X não é indutivo, isto é, dever existir algum $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Isto significa que todos os elementos do conjunto A são maiores do que n, mas nem todos são maiores do que $n + 1$. Como não há números naturais entre n e $n + 1$, concluímos que $n + 1$ pertence ao conjunto A. Logo, $n + 1$ é o menor elemento de A, o que demonstra o *teorema*. □

Existem conjuntos que não possuem elemento mínimo. Um exemplo é o conjunto dos números inteiros representado por: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, +1, +2, ...\}$. Seja r um elemento qualquer deste conjunto, se $r \in \mathbb{Z}$, temos que $(r - 1)$ também pertence a $\mathbb{Z}$. Logo, o conjunto dos inteiros não possui menor elemento. Outro exemplo de conjunto que não possui menor elemento é o conjunto $S = \{t \in \mathbb{R}: 0 < t < 1\}$. Seja t um elemento de S, se $t \in S$, temos então que $\frac{t}{2}$ também pertence a S.

A seguir, temos alguns exemplos que provamos usando o Princípio da Boa Ordenação.

Exemplo 4.3.1 Mostre que não existe um número inteiro r tal que $0 < r < 1$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe tal $r \in \mathbb{Z}$, em que $0 < r < 1$. Assim o conjunto $F = \{r \in \mathbb{Z}: 0 < r < 1\}$ é não vazio e pelo Princípio da Boa Ordenação existe um elemento $t \in F$ tal que $t \leq r$ para todo $r \in F$. Como $t \in F$ temos que $0 < t < 1$ e daí segue que $0 < t^2 < t < 1$. Como t^2 é um inteiro, temos que t^2 pertence a F, mas isso contradiz o fato de t ser o elemento mínimo de F. Concluindo assim, a demonstração. □

Exemplo 4.3.2 *Demonstre que todo natural maior ou igual a 2 é primo ou é um produto de números primos.*

Demonstração: Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos, e sejam r e s números naturais diferentes de 1 que pertencem ao conjunto X. Observemos que se r e s pertencem a X então, o produto $r \cdot s$ também pertence a X. Seja então A o complementar de X. Assim, A é o conjunto dos números naturais que não são primos nem são produtos de fatores primos. Vamos então provar que A é vazio. Suponhamos por absurdo que A não é vazio. Nesse caso, haveria um menor elemento t pertencente a A, e então todos os números menores do que t pertenceriam a X. Como t não é primo, teríamos então que $t = r \cdot s$, com $1 < r < t$ e $1 < s < t$, e dessa forma, $r \in X$ e $s \in X$. Sendo assim $r \cdot s \in X$. Mas, como $r \cdot s = t$, teríamos $t \in X$, uma contradição. Logo, o conjunto A é vazio, encerrando assim, a demonstração. □

4.4 Equivalências entre as diversas formas do Princípio da Indução e o PBO

Como havíamos dito, nesta subseção mostraremos as equivalências entre as diversas formas do Princípio da Indução e o Princípio da Boa Ordenação. Mas, para um melhor entendimento do que será apresentado em seguida, vamos enunciar novamente o Princípio da Indução e suas versões variantes. Desta vez, usando a linguagem dos conjuntos.

***P_1* Princípio da Boa Ordenação (PBO).** *Todo subconjunto A não vazio de $\mathbb{N}$ tem um elemento mínimo.*

***P_2* Primeira forma do Princípio da Indução**. *Seja F um subconjunto dos números naturais. Se F possui as seguintes propriedades:*

(i) $1 \in F$

(ii) $k + 1 \in F$ sempre que $k \in F$,

então, F contém todos os números naturais. Ou seja, $F = \mathbb{N}$.

***P_3* Segunda forma do Princípio da Indução.** *Seja F um subconjunto dos números naturais. Se F possui as seguintes propriedades:*

(i) $1 \in F$

(ii) $k + 1 \in F$ sempre que $1, 2, \ldots, k \in F$,

então, F contém todos os números naturais. Ou seja, $F = \mathbb{N}$.

Mostraremos a seguir, que as afirmações P_1, P_2 e P_3 são equivalentes, ou seja, vamos mostrar que as seguintes implicações são verdadeiras.

P_1 (Princípio da Boa Ordenação)

$\Downarrow$

P_2 (Primeira forma do Princípio da Indução)

$\Downarrow$

P_3 (Segunda forma do Princípio da Indução)

$\Downarrow$

P_1 (Princípio da Boa Ordenação).

Teorema 4.2 ($P_1 \Rightarrow P_2$). *O Princípio da Boa Ordenação implica a primeira forma do Princípio da Indução.*

Vamos supor o Princípio da Boa Ordenação válido e provar a primeira forma do Princípio da Indução.

Demonstração[3]: A demonstração será feita por contradição.

Queremos provar que: se F é um subconjunto dos números naturais, possuindo as propriedades (i) e (ii), então $F = \mathbb{N}$.

Vamos supor que, mesmo possuindo as propriedades (i) e (ii) o conjunto F não contenha todos os números naturais. Seja então X o conjunto dos naturais não contidos em F, ou seja, $X = \mathbb{N} - F$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, X possui um menor elemento. Ademais, este é maior do que 1 pois $1 \in F$. Seja então x este menor elemento. É claro que $x - 1$ pertence a F e como F satisfaz (ii) então o sucessor de $x - 1$, que é x, também deve pertencer a F o que é uma contradição. Logo, $X = \emptyset$ e o *Teorema 4.2* está demonstrado. □

Teorema 4.3 ($P_2 \Rightarrow P_3$). *A primeira forma do Princípio da Indução implica a segunda forma do Princípio da Indução.*

Vamos supor agora que a primeira forma do Princípio da Indução é válida e provar a segunda forma do Princípio da Indução.

Demonstração[3]: Seja F um conjunto qualquer dos naturais satisfazendo as condições de P_3. Devemos mostrar que F contém todos os números naturais.

Vamos denotar por D_n a sentença "os naturais de 1 a n (inclusive) estão em F". A sentença D_1 é verdadeira por hipótese. Assumimos, agora, D_k verdadeira para um natural qualquer k. Então os naturais de 1 a k inclusive estão em F. Portanto, pela hipótese (ii) de P_3, $k + 1$ está em F e portanto D_{k+1} é verdadeira. Agora, por P_2, temos que D_n é verdadeira para

[3] Demonstrações adaptadas do livro: *Introdução à Teoria dos Números* de José Plínio de Oliveira Santos.

todo número natural n e, portanto, F contém todos os naturais. Logo, o *Teorema 4.3* está provado. □

Teorema 4.4 ($P_3 \Rightarrow P_1$). *A segunda forma do Princípio da Indução implica o Princípio da Boa Ordenação.*

Para concluir, vamos supor que a segunda forma do Princípio da Indução é verdadeira e provar o Princípio da Boa Ordenação.

Demonstração[3]: Seja A um conjunto não vazio dos números naturais. Devemos mostrar que A possui um elemento mínimo.

Assumimos que A não possua elemento mínimo e denotamos por D_n a sentença "n não é um elemento de A". Logo, D_1 é verdadeira, pois, 1 é o menor número natural.

Agora, assumimos que D_n seja verdadeira para todo n de 1 até k inclusive. Disto podemos concluir que D_{k+1} dever ser verdadeira, pois, caso contrário, $k + 1$ seria o menor elemento de A.

Nesta última sentença, utilizamos a não-existência de naturais n entre dois naturais consecutivos k e $k + 1$. Portanto, por P_3, segue que D_n é verdadeira para todo número natural n. Mas isto implica que o conjunto A é vazio. Contrário à hipótese. Logo, a afirmação "A não possui elemento mínimo" é falsa e o *Teorema 4.4* está provado. □

5 MAIS EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DA INDUÇÃO

Existe uma grande variedade de problemas que podem ser abordados aplicando o Método de Indução Matemática. A seguir, apresentamos diferentes exemplos onde, de início, mostramos casos particulares, conjecturamos e finalmente demonstramos as afirmações. Dentre estes exemplos, a maioria deles pode, sem dificuldades, ser aplicado no Ensino Médio.

Para POLYA (1995 p. 3), o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas dever incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar. Além disso, quando o professor resolve um problema em aula, deve dramatizar um pouco as suas ideias e fazer a si próprio as mesmas indagações que utiliza para ajudar os alunos. Graças a estas orientações, o estudante acabará por descobrir o uso correto das indagações e sugestões e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático qualquer.

Nesta mesma linha de pensamento, SAVIOLI (2007, p. 5), afirma que, apresentar problemas e discutir as soluções são elementos imprescindíveis na formação dos estudantes que apresentam dificuldade de compreender o método de indução finita. De acordo com a mesma autora, a motivação constitui uma questão essencial nos processos de ensino e de aprendizagem desse método de demonstração.

Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1995, p. 251), afirmam que a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirindo autoconfiança e sentido de responsabilidade; ampliando sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

Apresentamos então a seguir, vários exemplos resolvidos.

Exemplo 5.1 *Determine uma fórmula para o número de diagonais de um polígono convexo de n lados. Em seguida, prove esta fórmula por Indução Matemática.*

Solução: Vamos chamar de $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ os vértices de um polígono convexo de n lados (Figura 5.1).

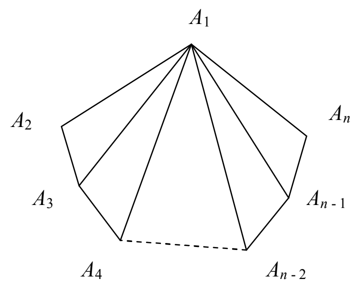

Figura 5.1

Com extremidade num dos vértices deste polígono (vértice A_1, por exemplo), há $(n - 3)$ diagonais, porque ligando A_1 com cada um dos demais vértices – com exceção de A_1, A_2 e A_n – obtemos diagonais.

Se tivermos $(n - 3)$ diagonais com extremidade em cada vértice, então, com extremidades nos n vértices, teremos $n \cdot (n - 3)$ diagonais.

Nesse processo de contagem cada diagonal é contada duas vezes, pois elas têm extremidades em dois vértices. Por exemplo, a diagonal $\overline{A_1A_3}$ (com extremidade em A_1) e a diagonal $\overline{A_3A_1}$ (com extremidade em A_3) foram contadas duas vezes, quando na realidade, $\overline{A_1A_3} = \overline{A_3A_1}$, representa uma única diagonal. Logo, o número de diagonais de um polígono convexo com n lados é $\dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

Agora, faremos uma demonstração deste resultado encontrado, usando o Princípio da Indução. É importante ressaltar que o argumento acima já é uma demonstração completa e não apenas um “chute”. O fato de queremos fazer uma prova por indução matemática é apenas para ilustrar como aplicar esse método, assim como apresentado na Subseção 4.1.

Considere então, a seguinte proposição P(n): todo polígono convexo de n lados possui o número de diagonais a_n igual a $\dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

Observemos que a proposição P(n) é válida para n = 3, pois temos que existem $0 = 3 \cdot (3 - 3)/2$ diagonais num triângulo. Para n = 4, temos $2 = 4 \cdot (4 - 3)/2$ diagonais num quadrilátero convexo. Logo, a base da indução está provada.

Suponhamos agora que, para um determinado valor de $n \geq 3$, a proposição P(n) é verdadeira, ou seja, $a_n = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$. Vamos provar então, que essa mesma proposição P(n) também é verdadeira quando substituindo n por n + 1, isto é, $a_{n+1} = \dfrac{(n+1) \cdot (n-2)}{2}$.

Considere então, um polígono convexo com n + 1 lados, representado na Figura 5.2 (a). Podemos decompô-lo como a união do n-ágono de vértices $A_1 A_2 \ldots A_n$ e o triângulo $A_1 A_n A_{n+1}$, como mostra a Figura 5.2 (b).

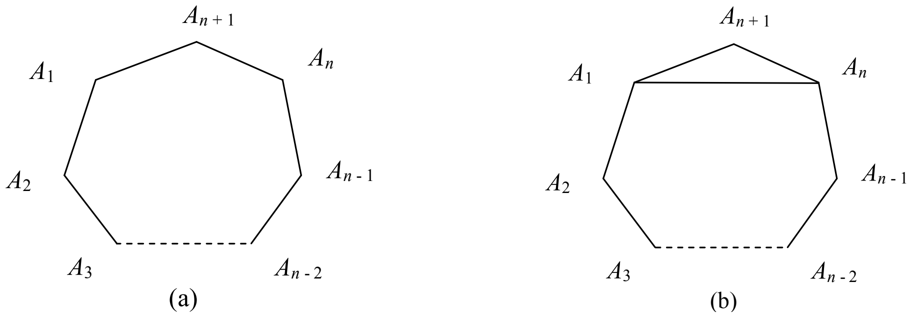

Figura 5.2

Assim, para contarmos as diagonais do (n + 1)-ágono, devemos considerar que o número de diagonais do n-ágono é $n(n - 3)/2$ (por hipótese de indução), e que partem do vértice A_{n+1}, um total de (n – 2) diagonais, e além disso, $\overline{A_1A_n}$ é uma diagonal dele. Logo, temos que o número de diagonais de um polígono convexo de n + 1 lados é:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{n \cdot (n-3)}{2} + (n-2) + 1 \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - n - 2}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n-2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, P(n + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 3$. □

Exemplo 5.2 *Determine uma fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados. Em seguida, prove esta fórmula por Indução Matemática.*

Solução: Para deduzir uma expressão, vamos usar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual 180 graus, o que não será demonstrado aqui.

Agora, consideremos um polígono convexo de n lados e tracemos as $n - 3$ diagonais que partem de um vértice escolhido ao acaso, como mostra a Figura 5.3. Não é difícil perceber que essas diagonais determinam $n - 2$ triângulos de maneira que a soma das medidas dos ângulos internos de todos esses $n - 2$ triângulos é exatamente a soma das medidas dos ângulos internos do polígono convexo considerado.

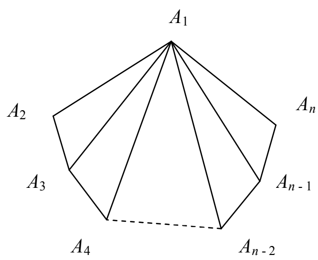

Figura 5.3

Logo, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180º$.

Agora, vamos demonstrar, usando o Princípio da Indução, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180º$.

Consideremos então, a seguinte proposição P(n): todo polígono convexo de n lados possui a soma dos ângulos internos S_n igual a $(n - 2) \cdot 180º$.

Observemos que esta proposição é válida para $n = 3$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Logo, a base da indução está provada.

Suponhamos agora que, para um determinado valor de $n \geq 3$, a proposição P(n) é verdadeira, ou seja que $S_n = (n - 2) \cdot 180º$. Vamos prova então, que esta mesma proposição também é verdadeira para um polígono convexo de $n + 1$ lados, isto é, $S_{n+1} = (n - 1) \cdot 180º$.

Considere então, um polígono convexo com $n + 1$ lados, representado na Figura 5.4 (a). Ao traçarmos a diagonal $\overline{A_1 A_n}$, obteremos o n-ágono de vértices $A_1 A_2 \ldots A_n$ e o triângulo $A_1\ A_n\ A_{n+1}$, representados na Figura 5.4 (b). Assim, a soma dos ângulos internos de um $(n + 1)$-ágono é igual a soma dos ângulos internos do n-ágono mais a soma dos ângulos internos do triângulo $A_1\ A_n\ A_{n+1}$.

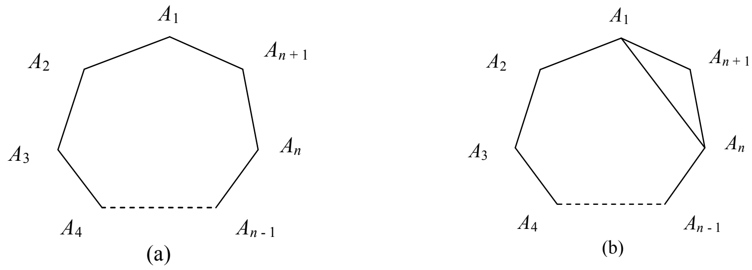

Figura 5.4

De fato, com $S_n = (n - 2) \cdot 180°$ por hipótese de indução, e 180 graus é a soma dos ângulos internos do triângulo $A_1\ A_n\ A_{n+1}$, temos então, que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com $n + 1$ lados é:

$$S_{n+1} = (n - 2) \cdot 180° + 180° = (n - 1) \cdot 180°.$$

Logo, $P(n + 1)$ é verdadeira e concluímos, por indução, que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 3$. □

Nota: Acreditamos que até aqui, o leitor já tenha adquirido certa familiaridade com as demonstrações por indução finita. Em vista disso, na resolução dos exemplos seguintes, em alguns deles, omitiremos a citação explícita das expressões (base da indução, hipótese de indução e passo indutivo).

Exemplo 5.3 *Em quantas partes n retas distintas traçadas por um mesmo ponto dividem um plano*?

Solução: Observemos que para $n = 1$, o plano fica dividido em duas partes (semiplanos). Para $n = 2$, as retas dividem o plano em quatro partes. Para $n = 3$, as retas dividem o plano em seis partes. E, quando n for igual a quatro (Figura 5.5), o plano fica dividido em oito partes.

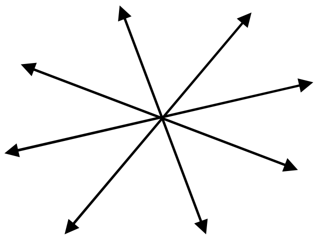

Figura 5.5

Consideremos então, um ponto P de um plano β e tracemos n retas que passam por P determinando n pares de ângulos *opostos pelo vértice*. E seja P(n) a seguinte proposição: n retas traçadas por um mesmo ponto dividem um plano $2n$ partes, sendo estas correspondentes a n pares de ângulos oposto pelo vértice.

Vamos demonstrar, usando o Princípio da Indução, que a proposição P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

A base é evidente, pois para $n = 1$, temos que uma reta divide um plano em 2 partes. Suponhamos agora, que a proposição P(n) seja verdadeira para um determinado valor de n, digamos, $n = k$. Ou seja, estamos supondo que k retas dividem um plano em $2k$ partes.

Vamos mostrar que esta mesma proposição P(n) também é verdadeira quando substituirmos n por $k + 1$, isto é, $k + 1$ retas dividem um plano em $2(k + 1)$ partes.

Observemos que para $n = k$, temos que k retas dividem um plano em $2k$ partes, que, por sua vez, corresponde a k pares de ângulos opostos pelo vértice. Observemos também que quando traçamos a $(k + 1)$-ésima reta, está divide em duas partes, 2 ângulos opostos pelo vértice, e, em consequência, aumenta em dois o número de partes em que o plano fica dividido. Além disso, essas novas partes, também correspondem a dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Logo, $k + 1$ retas dividem um plano em $2k + 2 = 2\ (k + 1)$ partes, que também correspondem a pares de ângulos oposto pelo vértice.

Portanto, P($k + 1$) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 5.4 *Determinar uma fórmula para o termo geral de uma progressão aritmética em função de sua razão e seu primeiro termo. Em seguida prova esta fórmula por indução em n.*

Solução: Consideremos a progressão aritmética de razão r apresentada a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...).$$

Qualquer termo dessa progressão aritmética pode ser representado em função de a_1 e r, da seguinte forma:

o 1º termo é $a_1 = a_1 + 0r$,

o 2º termo é $a_2 = a_1 + 1r$,

o 3º termo é $a_3 = a_1 + 2r$,

o 4º termo é $a_4 = a_1 + 3r$.

Diante desses resultados, conjecturamos que o termo geral representado por a_n é igual à soma do termo a_1 com o produto $(n - 1) \cdot r$, ou seja, a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética poderá ser:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \qquad (*)$$

em que a_1 é o primeiro termo desta progressão e r é a razão da mesma.

Faremos agora, uma demonstração, usando o Princípio da Indução, para provar que o n-ésimo termo de uma progressão aritmética realmente satisfaz a expressão acima $(*)$.

Observemos que para $n = 1$, a equação $(*)$ é verdadeira, pois temos que $a_1 = a_1$. Logo, a base da indução está provada.

Agora, suponhamos que a equação $(*)$ seja verdadeira para um determinado valor de n que será representado pela letra k, sendo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, estamos supondo que:

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r.$$

Vamos mostrar que essa mesma equação $(*)$ também é verdadeira quando substituirmos n por $k + 1$, isto é:

$$a_{k+1} = a_1 + k \cdot r.$$

Então, pela definição de razão de uma progressão aritmética e pela hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + r \\ &= a_1 + (k - 1) \cdot r + r \\ &= a_1 + k \cdot r, \end{aligned}$$

de modo que a equação $(*)$ também se verifica para $n = k + 1$. Logo, concluímos por indução, que $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 5.5 *Determinar uma fórmula para o termo geral de uma progressão geométrica em função de sua razão e seu primeiro termo. Em seguida prova esta fórmula por indução em n.*

Solução: Consideremos a progressão geométrica de razão q representada a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...).$$

Qualquer termo desta sequência pode ser representado em função de a_1 e q, da seguinte forma:

o 1º termo é $a_1 = a_1 \cdot q^0$,
o 2º termo é $a_2 = a_1 \cdot q^1$,
o 3º termo é $a_3 = a_1 \cdot q^2$,
o 4º termo é $a_4 = a_1 \cdot q^3$.

Diante desses resultados, conjecturamos que o termo geral a_n é igual ao produto do termo a_1 pela potência q^{n-1}, ou seja, a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica poderá ser:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \qquad (*)$$

em que a_1 é o primeiro termo desta progressão e q é a razão da mesma.

Faremos agora, uma demonstração, usando o Princípio da Indução, para provar que o n-ésimo termo de uma progressão geométrica realmente satisfaz a expressão acima $(*)$.

Observemos que para $n = 1$, a equação $(*)$ é verdadeira, pois temos que $a_1 = a_1$. O que prova a base da indução.

Suponhamos agora que a equação $(*)$ seja verdadeira para um determinado valor de n que será representado pela letra *k,* sendo $k \in \mathbb{N}$. Isto é, estamos supondo que:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}.$$

Vamos mostrar que essa mesma equação $(*)$ também é verdadeira quando substituirmos n por $k + 1$, isto é:

$$a_{k+1} = a_1 \cdot q^k.$$

Então, pela definição de razão de uma progressão geométrica e pela hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cdot q \\ &= a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q \\ &= a_1 \cdot q^k, \end{aligned}$$

de modo que a equação $(*)$ também se verifica para $n = k + 1$. Logo, concluímos por indução, que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 5.6 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Determine* A^n *para todo n natural.*

Solução: Calculando os valores de A^2, A^3 e A^4, obtemos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = 5 \cdot A = 5^{(2-1)} \cdot A.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix} = 25 \cdot A = 5^{(3-1)} \cdot A.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 250 \\ 250 & 500 \end{pmatrix} = 125 \cdot A = 5^{(4-1)} \cdot A.$$

A partir destes cálculos, conjecturamos que $A^n = 5^{(n-1)} \cdot A$, para todo $n \geq 1$.

Vamos provar esta conjectura usando o Princípio da Indução.

Considera $P(n)$ a seguinte proposição: $A^n = 5^{(n-1)} \cdot A$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Mostraremos que a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Já verificamos que a proposição $P(n)$ é verdadeira para $n = 1, 2, 3$ e 4. Suponhamos agora que $P(n)$ seja verdadeira para um determinado valor de n, digamos, $n = k$. Ou seja, estamos supondo que:

$$P(k): A^k = 5^{(k-1)} \cdot A.$$

Então, vamos mostrar que $P(n)$ também é verdadeira quando substituirmos n por $k + 1$. Ou seja, vamos mostrar que:

$$P(k+1): A^{k+1} = 5^k \cdot A.$$

Das propriedades das potências obtemos que:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A. \qquad (*)$$

Considerando por hipótese que $A^k = 5^{(k-1)} \cdot A$, e considerando também que para $n = 2$ obtemos $A^2 = 5 \cdot A$, e substituindo estes dois resultados na igualdade $(*)$, temos:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= 5^{(k-1)} \cdot A \cdot A \\ &= 5^{(k-1)} \cdot A^2 \\ &= 5^{(k-1)} \cdot 5 \cdot A \\ &= 5^k \cdot A. \end{aligned}$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 5.7 *Seja* $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Determine* A^n *para todo n natural.*

Solução: Calculando os valores de A^2, A^3 e A^4, obtemos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A partir destes cálculos, conjecturamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para todo $n \geq 1$.

Vamos provar esta conjectura usando o Princípio da Indução.

Considera P(n) a seguinte proposição: P(n): $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mostraremos que a proposição P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Já verificamos acima que a proposição P(n) é verdadeira para n = 1, 2, 3 e 4. Agora, vamos supor que P(n) seja verdadeira para um determinado valor de n, digamos, $n = k$. Ou seja, estamos supondo que:

$$P(k)\text{: } A^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que P(n) também é verdadeira quando substituirmos n por k + 1. Isto é, queremos mostrar que:

$$P(k+1)\text{: } A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das propriedades das potências obtemos que:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A. \qquad (*)$$

Agora, considerando que, por hipótese, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e considerando também que $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e substituindo estes dois resultados na igualdade representada em $(*)$, obtemos:

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, P(k + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 5.8 *Mostre, por indução, que para todo n natural, vale que* $2^n > n$.

Solução: Considere a seguinte proposição:

$$P(n)\colon 2^n > n.$$

Vamos mostrar, usando o Princípio da Indução, que a proposição P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe que proposição é válida para $n = 1$, pois temos que $2^1 > 1$.

Agora, suponhamos que a proposição P(n) seja verdadeira para um determinado valor de n, digamos, $n = k$. Ou seja, estamos supondo que:

$$P(k)\colon 2^k > k. \qquad (1)$$

Vamos mostrar que a proposição P(n) também é verdadeira quando substituirmos n por k + 1. Isto é, vamos mostra que:

$$P(k+1)\colon 2^{k+1} > k + 1. \qquad (2)$$

Multiplicando por 2 ambos os membros da desigualdade representada em (1) temos:

$$2^k \cdot 2 > 2 \cdot k \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2 \cdot k.$$

E como $2k = k + k \geq k + 1$, segue que:

$$2^{k+1} > k + 1.$$

Este último resultado representa a desigualdade em (2). Logo, P(k + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 5.9 *Mostre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.*

Solução: Seja $S_n = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ a soma dos cubos de três números naturais consecutivos. E definamos a seguinte proposição:

P(n): S_n é um número divisível por 9.

Vamos mostrar, usando o Princípio da Indução, que a proposição P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ a proposição P(n) é válida, pois temos que $S_1 = 1^3 + (1 + 1)^3 + (1 + 2)^3 = 36$, e o número 36 é divisível por 9.

Suponhamos agora que a proposição P(n) seja verdadeira para um determinado valor de n que será representado pela letra k. Isto é, estamos supondo que:

P(k): S_k é um número divisível por 9.

Vamos mostrar que a proposição P(n) também é válida quando substituirmos n por $k + 1$. Ou seja, vamos mostrar que:

P(k + 1): S_{k+1} também é um número divisível por 9.

Reescrevendo S_{k+1} em termos de S_k, temos:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 \\ &= (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k^3 + 9k^2 + 27k + 27) \\ &= k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (9k^2 + 27k + 27) \\ &= S_k + 9(k^2 + 3k + 3). \end{aligned}$$

Como S_k é divisível por 9 (pela hipótese de indução), temos então que S_{k+1} também é divisível por 9. Portanto, P(k + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 5.10 *Mostre que para todo natural n, o número $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ é um múltiplo de 7.*

Solução: Denotamos por P(n) a seguinte proposição: a_n é um número múltiplo de 7, em que $a_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Vamos mostrar, usando o Princípio da Indução, que a proposição P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe que a proposição é válida para $n = 1$, pois temos que $a_1 = 27 + 8 = 35$, é um número múltiplo de 7.

Suponhamos agora que a proposição P(n) seja verdadeira para um determinado valor de n que será representado pela letra k. Ou seja, estamos supondo que:

P(k): a_k é um número múltiplo de 7.

Vamos mostrar então, que a proposição P(n) também é válida quando substituirmos n por $k + 1$. Isto é, vamos mostrar que:

P(k + 1): a_{k+1} também é um número múltiplo de 7.

Reescrevendo a_{k+1} em termos de a_k, temos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3^{2k+3} + 2^{k+3} \\ &= 9 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2} \\ &= 2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2} + 7 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 2 \cdot (3^{2k+1} + 2^{k+2}) + 7 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 2 \cdot a_k + 7 \cdot 3^{2k+1}. \end{aligned}$$

Como a_k é um número múltiplo de 7 (pela hipótese de indução), temos então que a_{k+1} também é um múltiplo de 7. Portanto, P(k + 1) é verdadeira e concluímos, por indução, que P(n) é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. □

6 PROBLEMAS PROPOSTOS

Os problemas deste capítulo têm como objetivo, complementar a teoria abordada e fornecer aos leitores uma oportunidade de enriquecer os conceitos mais importantes apresentados nos exemplos anteriores.

Problema 6.1 Considere uma progressão aritmética de razão r e termo inicial a_1. Mostre, por Indução Matemática, que a soma S_n dos n primeiros termos desta progressão, é dado por: $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$.

Problema 6.2 Considere uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e termo inicial a_1. Mostre, por Indução Matemática, que a soma S_n dos n primeiros termos desta progressão, é dada por: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

Problema 6.3 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 e A^3 para conjecturar uma fórmula para A^n. Em seguida, prove por Indução Matemática, que esta fórmula é válida $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 6.4 Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, o número $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ é um múltiplo de 11.

Problema 6.5 Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, vale que $2^n > n^2$.

Problema 6.6 Seja $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$, a sequência de Fibonacci. Mostre que: $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 6.7 A sequência de número $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ é tal que:

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 1$$
$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ para } n > 2.$$

Ache uma fórmula fechada para o n-ésimo termo desta sequência e prove o resultado encontrado por Indução Matemática.

7 CONCLUSÃO

Como havíamos dito, a proposta inicial deste trabalho é mostrar para professores e estudantes da Educação Básica, que é possível inserir o Método de Demonstração por Indução Matemática no Ensino Médio.

Para tal, fizemos uma abordagem da importância de se realizar demonstrações neste nível de Ensino, apresentando alguns motivos que levam muitos dos alunos a concluírem o Ensino Médio sem ter adquirido a capacidade de desenvolver a noção do que seja uma demonstração em matemática.

Na sequência, realizamos um estudo sobre a diferença entre indução e indução matemática, onde foi possível perceber que a indução matemática é uma das muitas técnicas de demonstração formal que é utilizada exclusivamente na matemática para demonstrar a validade de certas proposições ou teoremas envolvendo os números naturais.

Abordamos a importância de se aplicar corretamente os passos básicos e indutivos durante a aplicação do Princípio de Indução Finita. E em seguida, realizamos um estudo sobre a Primeira e a Segunda forma do Princípio da Indução e o Princípio da Boa Ordenação.

Verificamos também, que alguns exemplos tiveram como objetivo mostrar que a única maneira de concluir a veracidade de uma proposição é fazendo uma demonstração geral, que, conforme visto na resolução de muitos exemplos, tal demonstração foi efetuada por Indução Matemática. Por fim, foi possível concluir que dentre os exercícios resolvidos e os problemas propostos, a maioria deles pode ser aplicada no decorrer das aulas do Ensino Médio.

Logo, acreditamos que este trabalho seja um auxílio no decorrer das aulas de Matemática no Ensino Médio, e que o mesmo contribua para resgatar o estudo das demonstrações recorrendo a Indução Matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**, v. 2, Brasília: MEC, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015,** (Matemática: Ensino Médio), Brasília: MEC, 2014.

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos**: A Experiência Russa. 1. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

FOSSA, John A; **Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática**. 2. ed., São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2012. v.1-3. (Coleção do Professor de Matemática, 13).

LIMA, Elon Lages. O Princípio da Indução. **Eureka -** A Revista da Olimpíada Brasileira de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, n. 3, p. 34, 1998.

LOPES, Luís. **Manual de Indução Matemática**. 1. ed., Rio de Janeiro: Interciência,1999.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNANDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática**: um curso com problemas e soluções. 2. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. **Geometria Elementar:** Gênese das ciências geométricas**,** parte III. p. 78. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/html>. Acesso em 02 de mar. 2015.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Um novo aspecto do Método Matemático. Rio de janeiro: Interciência, 1995.

PINEDO, Christian Q. **Fundamentos da Matemática**. Universidade Federal do Tocantins, 2003.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária).

SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. Uma Reflexão sobre a Indução Finita: relato de uma experiência. **Boletim de Educação Matemática**, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita, São Paulo, v. 20, n. 27, p. 6, 2007.

SOARES, João Luís. Lição de Indução Matemática. **Gazeta de Matemática**, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, n. 147, p. 4, jul. 2004.

SOMINSKI, I. S. **Método de Indução Matemática.** São Paulo: Atual, 1996. (Coleção matemática: aprendendo e ensinando).