UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

THIAGO DO CARMO LIMA

TRIGONOMETRIA, NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES

FORTALEZA
2015

THIAGO DO CARMO LIMA

TRIGONOMETRIA, NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

L711t Lima, Thiago do Carmo.
Trigonometria, números complexos e aplicações / Thiago do Carmo Lima. – 2015.
92 f. : il., color.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional, Fortaleza, 2015.
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Trigonometria. 2. Números complexos. 3. Matemática - Estudo e ensino (Secundário). I. Título.

CDD 510

THIAGO DO CARMO LIMA

TRIGONOMETRIA, NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 25 / 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Valter Lopes Nunes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr.José Othon Dantas Lopes, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora José Valter Lopes Nunes e Ângelo Papa Neto pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores entrevistados, pelo tempo concedido nas entrevistas.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

Aos meus pais, que dedicaram-se a minha educação.

A minha esposa, pelo carinho, paciência e companherismo.

”Conseguem imaginar um jovem a estudar trigonometria apenas pelo prazer de o fazer? Foi o que eu fiz.”

Clyde Tombaugh

RESUMO

O presente trabalho foi dividido em três partes: trigonometria no triângulo retângulo, trigonometria no ciclo trigonométrico, números complexos. No triângulo retângulo foram definidos os valores do seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante dos ângulos notáveis: 18°, 30°, 45°, 60° além das suas derivações. Propriedades importantes como a relação trigonométrica fundamental foram demostradas. No ciclo trigonométrico além das propriedades advindas do triângulo retângulo foram apresentadas e provadas outras como as leis do seno e do cosseno, relações trigonométricas de ângulos maiores que 90° e da soma e diferença de arcos, equações trigonométricas. Na parte de números complexos foi apresentado o número i e suas propriedades juntamente com as formas algébrica e geométrica de um número complexo. Neste ponto foi visto a importância da trigonometria para o desenvolvimento da fórmula de Moivre. No apêndice temos, provado, as potências do número (i) e a tabela trigonométrica.

Palavras-chave: Relações Trigonométricas. Números Complexos. Fórmula de Moivre.

ABSTRACT

This study was divided into three parts: the right triangle trigonometry, trigonometry in trigonometric cycle, complex numbers. In the right triangle the sine values were defined, cosine, tangent, cotangent, cosecant and drying of the remarkable angles: 18°, 30°, 45°, 60° beyond its derivations. Important properties as the fundamental trigonometric relationship were demostradas. Trigonometric cycle in addition to the resulting properties of the right triangle were presented and other proven as the laws of sine and cosine, trigonometric relationships of angles greater than 90° and the sum and difference of arcs, trigonometric equations. In the complex numbers was made the number ie their properties along with the algebraic and geometric forms a complex number. At this point it has been seen trigonometry to the importance of the development of Moivre formula. In the appendix we have tasted the powers of the number (i) and the trigonometric table.
Keywords: Trigonometric relations. Complex numbers. Formula Moivre.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

sen	seno
cos	cosseno
tan	tangente
sec	secante
cossec	cossecante
cotan	cotangente
arcsen	arco seno
arccos	arco cosseno
arctan	arco tangente
arcsec	arco secante
arccossec	arco cossecante
arccotan	arco cotangente

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Mesmo sendo ensinado em séries diferentes, trigonometria no 2^o ano e números complexos no 3^o ano, são conceitos que estão totalmente interligados. Apresentamos aos estudantes a importância destes conteúdos para outras carreiras como engenharia, astronomia, medicina entre outras. No desenvolvimento deste trabalho nosso objetivo principal foi abordar os temas propostos e sintetizá-los de maneira que um estudante possa conhecê-los melhor e aprofundar seus conhecimentos. Para tanto, tivemos como base principal o livro: Trigonometria e Números Complexos, do professor Manfredo Perdigão do Carmo. Também utilizamos como apoio os livros: Tópicos de Matemática Elementar, vol. 02 do professor Antônio Caminha Muniz Neto; A Matemática do Ensino Médio, vol. 02 e 03, Medida e forma em Geometria, Meu Professor de Matemática e outras Histórias todas do professor Elon Lages Lima; Geometria Euclidiana Plana, do professor João Lucas Barbosa. Começamos este trabalho tratando de trigonometria no triângulo retângulo, definindo as relações trigonométricas fundamentais, demonstrando algumas propriedades e encontrando valores trigonométricos dos ângulos notáveis e seus derivados. Neste interim, abordamos o ângulo de $18°$, este está intimamente ligado ao número áureo. Passamos então a adentrar no ensino médio com a trigonometria no ciclo trigonométrico. Vemos neste ponto uma generalização da trigonometria, pois avaliamos ângulos de todo tipo: negativo e positivo. As definições são feitas de modo a valer a trigonometria anterior e novas propriedades são demonstradas. Neste caso serão apresentadas algumas propriedades que vão ser utilizadas posteriormente no estudo dos números complexos, como as relações trigonométricas das somas e subtrações de arcos. Ainda aqui fazemos a transformação de ângulos de graus para radianos, sendo de suma importância pois assim podemos definir as funções trigonométricas e as inversas com respectivos gráficos finalizando com as equações trigonométricas. No último terço abordamos os números complexos através das propriedades fundamentais dos reais acrescentando as características do número (i). Conceitualmente esta parte da matemática está sendo deixada de lado no ensino médio devido a não utilização no ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, mas é preciso ressaltar sua importância para as ciências e sua atuação como em eletricidade na física. Fizemos construções algébricas e geométricas dos números complexos com propriedades e operações. Daí veio a grande ajuda da trigonometria, pois tratando um número complexo como vetor escrevemo-os na forma polar, ou trigonométrica, e conseguimos desvendar as potências de complexos através da fórmula de Moivre e suas consequências. Para isso utilizamos em larga escala as propriedades trigonométricas desenvolvidas no texto. Portanto, o presente trabalho será de excelente uso, voltado ao ensino médio.

2 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

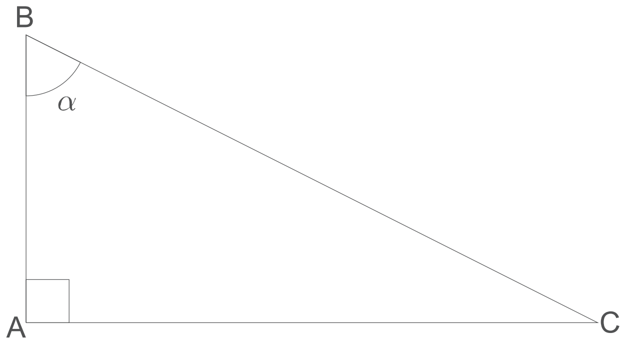
Geralmente o conteúdo de trigonometria é apresentado aos estudantes no último ano do ensino fundamental. Nesta fase da aprendizagem, começa-se com as definições de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, no triângulo retângulo. Segundo CARMO (2005), um ângulo é formado por duas semi-retas que possuem mesma origem. Um ângulo qualquer pode ser medido com o uso de um transferidor, geralmente graduado em graus e será dito agudo quando seu valor estiver entre $0°$ e $90°$.

2.1 Funções trigonométricas do ângulo agudo

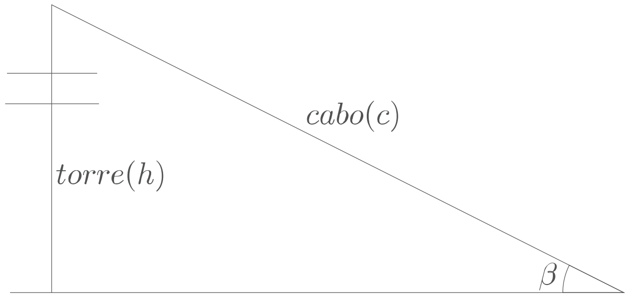
Sabe-se que em todo triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são chamados catetos. Seja dado um triângulo retângulo ABC, reto em A. Seja $\widehat{ABC} = \alpha$ um ângulo agudo desse triângulo.

Definição 1. *Definimos seno do ângulo α a divisão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo ABC. Portanto,* $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CA}{BC}$.

Figura 1 – Seno do ângulo agudo α.



Exemplo 1. *Uma torre vertical, construída sobre um plano horizontal tem h metros de altura. Um cabo de aço, esticado, liga o topo da torre até o plano, formando com o mesmo, um ângulo β. Qual é o comprimento c do cabo?*

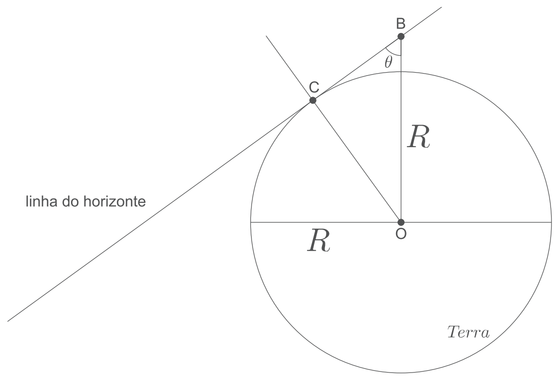


A figura formada pelo pelo cabo, a torre e a distância entre a base do cabo e o pé da torre é um triângulo retângulo, como mostra a figura. Seja h a altura da torre e c o comprimento do cabo de aço. Logo pela definição acima temos:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h}{c} \Longrightarrow c = \frac{h}{\operatorname{sen}\beta}$$

Exemplo 2. *Método utilizado pelos gregos para calcular o raio da Terra.*

De acordo com CARMO (2005, p. 12):



Sobe-se a uma torre de altura h e mede-se o ângulo θ que faz a reta BC do horizonte de B com a reta vertical BO do lugar. Pela figura, vê-se que

$$\frac{R}{R+h} = \operatorname{sen}\theta,$$

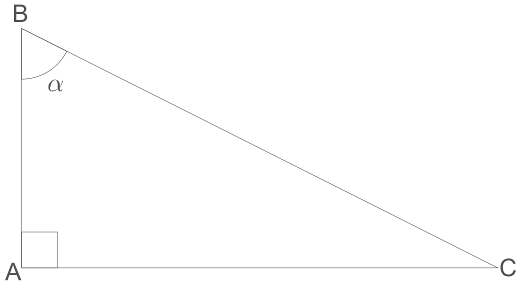
donde $R\operatorname{sen}\theta + h\operatorname{sen}\theta = R$*, isto é,*

$$R = \frac{h\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$$

Portanto, se tivermos as medidas de h e θ (que são acessíveis) e uma tabela de senos, poderemos então calcular o raio de Terra.

Definição 2. *Definimos cosseno do ângulo α a divisão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa do triângulo ABC. Portanto,* $\cos\alpha = \frac{AB}{BC}$.

Figura 2 – Cosseno do ângulo agudo α.



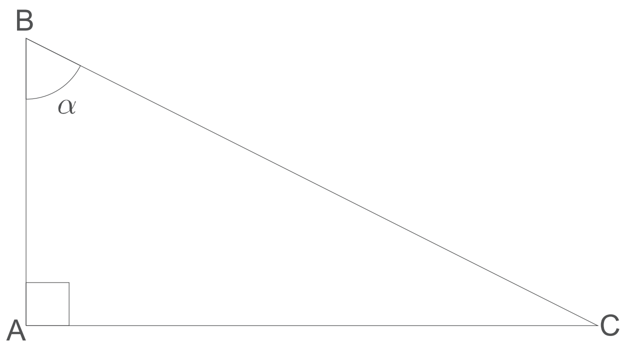
Exemplo 3. *Um barco está a uma distância d de uma ilha. Na margem desta ilha há um farol, que ilumina o caminho deste barco. Sabendo que o ângulo de visão entre a reta do barco à ilha e a linha entre o barco e o topo do farol é θ, calcule a distância do barco ao topo do farol.*

Seja x a distância do barco até o topo do farol. Pela definição:

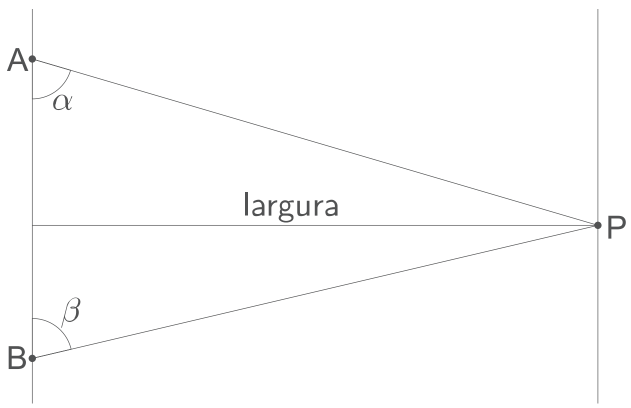
$$\cos\theta = \frac{d}{x} \Longrightarrow x = \frac{d}{\cos\theta}$$

Definição 3. *Definimos tangente do ângulo α a divisão entre o cateto oposto a α e o cateto adjacente a α no triângulo ABC. Portanto,* $\tan\alpha = \frac{AC}{AB}$.

Figura 3 – Tangente do ângulo agudo α.



Exemplo 4. *Dois observadores A e B estão a beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver uma pedra P na outra margem. Com seus teodolitos eles medem os ângulos $\widehat{PAB} = \alpha$ e $\widehat{PBA} = \beta$. Sabendo que AB = 120 m,* $\tan\alpha = 2$ *e* $\tan\beta = 3$, *determine a largura do rio.*



Chamemos de l a largura do rio e de x a distância do ponto A até a marcação de largura, consequentemente a distância de B até a marcação de largura será $120 - x$. Assim

$$\tan\alpha = \frac{l}{x} = 2 \Longrightarrow l = 2x$$

$$\tan\beta = \frac{l}{120-x} = 3 \Longrightarrow l = 360 - 3x$$

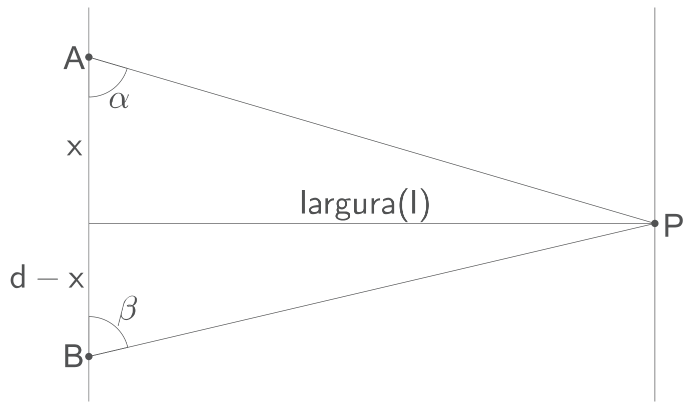
igualando temos

$$2x = 360 - 3x \Longrightarrow 5x = 360 \Longrightarrow x = 72$$

portanto

$$l = 144m$$

Exemplo 5. *Como descobrir a largura l de um rio sem atravessá-lo e utilizando somente o teodolito?*



Suponhamos por aproximação que as margens do rio sejam paralelas e façamos uma generalização do exemplo anterior. Marcamos dois pontos A e B em uma das margens do rio e definamos uma pedra ou uma árvore na margem oposta como um ponto P. Com o teodolito medimos a angulação $\widehat{PAB} = \alpha$ e $\widehat{PBA} = \beta$. Seja d a distância entre A e B e seja x a distância de A até a marcação da largura. Assim

$$\frac{l}{x} = \tan\alpha \Longrightarrow x = \frac{l}{\tan\alpha}$$

Por outro lado

$$\frac{l}{d-x} = \tan\beta \Longrightarrow l = (d-x)\tan\beta \Longrightarrow l = d\tan\beta - l\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$$

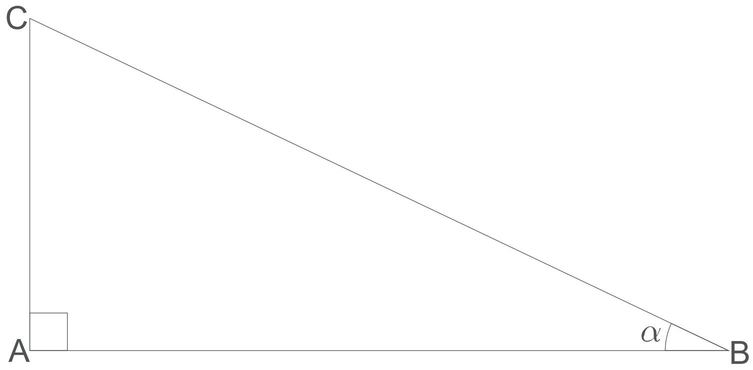
$$l\left(1+\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right) = d\tan\beta \Longrightarrow l = \frac{d\tan\beta}{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha}} \Longrightarrow l = \frac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta} \Longrightarrow l = \frac{d}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}}$$

$$\Longrightarrow l = \frac{d}{2}\cdot\frac{2}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}}$$

Vemos assim qiue a largura do rio é a média harmônica das tangentes multiplicado pela metade da distância entre os pontos A e B.

Lema 1 (Relações Fundamentais)**.** *Dado α um ângulo do vértice B do triângulo retângulo ABC reto em A. Então as seguintes relações são verdadeiras:*

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad e \quad \tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$



Demonstração. Para demonstrar a primeira relação fundamental, faremos uso do Teorema de Pitágoras: "Em todo triângulo retângulo o quadrado da medida hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos." Seja h a medida da hipotenusa do triângulo ABC, c_1 a medida do cateto oposto a α e c_2 a medida do cateto adjacente a α. Pelas definições acima temos que $c_1 = h \times \operatorname{sen}\alpha \quad \text{e} \quad c_2 = h \times \cos\alpha$ portanto:

$$c_1^2 + c_2^2 = h^2 \Longrightarrow h^2 \times (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = h^2$$

Dividindo por h^2 em ambos os lados temos: $\boxed{(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1}$. Por outro lado:

$$\tan\alpha = \frac{c_1}{c_2} \Longrightarrow \tan\alpha = \frac{h \times \operatorname{sen}\alpha}{h \times \cos\alpha}$$

Assim: $\boxed{\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$. □

Exemplo 6. *Mostre que:*

1. $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

2. $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

Solução:

1.

$$\frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{1\cdot\cos^2}{1} = \cos^2\alpha$$

2.

$$\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2}{1} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1} = \operatorname{sen}^2\alpha$$

Exemplo 7. *Sabendo que* $\operatorname{sen}\beta = 0,6$ *e que* $0° < \beta < 90°$, *calcule* $\cos\beta$ *e* $\tan\beta$.

Pela relação fundamental temos que $\operatorname{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1$ logo:

$$0,6^2+\cos^2\beta=1 \Longrightarrow \cos^2\beta=1-0,36=0,64$$

como $0° < \beta < 90°$ implica que $\cos\beta > 0$ portanto

$$\cos\beta = 0,8$$

Por outro lado $\tan\beta=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}$ assim

$$\tan\beta=\frac{0,6}{0,8}=0,75$$

Exemplo 8. *Sabendo que* $\tan\theta=5$ *e que* $0°<\theta<90°$*, calcule* $\cos\theta$ *e* $\operatorname{sen}\theta$*.*

Como $\tan\theta=5$ temos

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=5 \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta=5\cos\theta$$

utilizando a relação fundamental temos

$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1 \Longrightarrow 25\cos^2\theta+\cos^2\theta-1=0$$

utlizando a fórmula de Bhaskara temos

$$\cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 25\cdot(-1)}}{2\cdot 25} \Longrightarrow \cos\theta=\frac{-1\pm\sqrt{101}}{50}$$

assim

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{101}}{50} \quad \text{ou} \quad \cos\theta=\frac{-1-\sqrt{101}}{50}$$

como $0°<\theta<90°$ então

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{101}}{50}.$$

Por outro lado

$$\operatorname{sen}^2\theta=1-\cos^2\theta \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta=1-\frac{102-2\sqrt{101}}{2500} \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta=\frac{2398+2\sqrt{101}}{2500}$$

como $0°<\theta<90°$ temos

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\sqrt{2398+2\sqrt{101}}}{50}$$

Exemplo 9. *Sabendo que* $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0,4$*, calcule* $\tan\alpha$*.*

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0,4 \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha=\frac{0,4}{\cos\alpha} \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha=\frac{0,16}{\cos^2\alpha}$$

Pela relação fundamental temos

$$\frac{0,16}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^4\alpha - \cos^2\alpha + 0,16 = 0$$

Fazendo uma troca de variáveis faremos $x = \cos^2\alpha$, logo

$$x^2 - x + 0,16 = 0$$

pela fórmula de Bhaskara tem-se

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 0,16}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{0,36}}{2} = \frac{1 \pm 0,6}{2}$$

$$x = 0,8 \quad \text{ou} \quad x = 0,2$$

assim

$$\cos^2\alpha = 0,8 \quad \text{ou} \quad \cos^2\alpha = 0,2$$

Fazendo $\cos^2\alpha = 0,8$ encontramos $\operatorname{sen}^2\alpha = 0,2$. Fazendo $\cos^2\alpha = 0,2$ encontramos $\operatorname{sen}^2\alpha = 0,8$. Como o produto de $\operatorname{sen}\alpha$ por $\cos\alpha$ é positivo, então ou ambos são positivos ou ambos são negativos. Portanto $\tan\alpha$ é positivo. Assim no primeiro caso

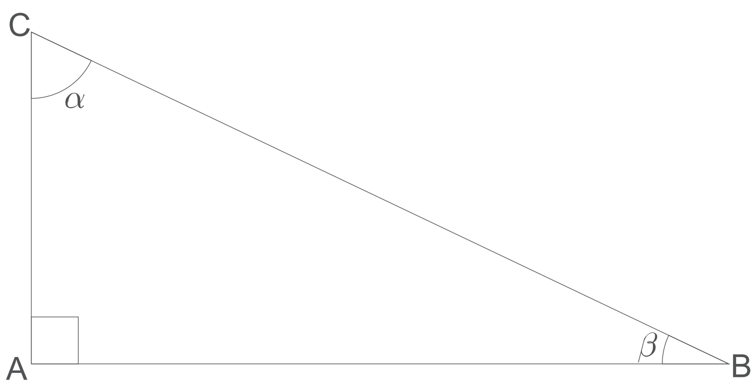
$$\tan^2\alpha = \frac{0,2}{0,8} = 0,25 \Longrightarrow \tan\alpha = 0,5$$

no segundo caso

$$\tan^2\alpha = \frac{0,8}{0,2} = 4 \Longrightarrow \tan\alpha = 2$$

Definição 4. *Dois ângulos são ditos complementares, quando a soma deles é* $90°$.

Figura 4 – Ângulos complementares.



Teorema 1. *Se dois ângulos* α *e* β *são complementares então:*

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \quad , \quad \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \quad e \quad \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

Demonstração. Sejam α e β dois ângulos agudos do triângulo retângulo ABC da figura. Sabe-se da geometria euclidiana plana, que em qualquer triângulo a soma dos ângulos internos vale 180°, assim, no triângulo ABC, $\alpha + \beta = 90°$. Logo:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \cos\beta \quad , \quad \cos\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{sen}\beta$$

Também temos que:

$$\tan\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \tan\beta = \frac{c}{b} \Longrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$$

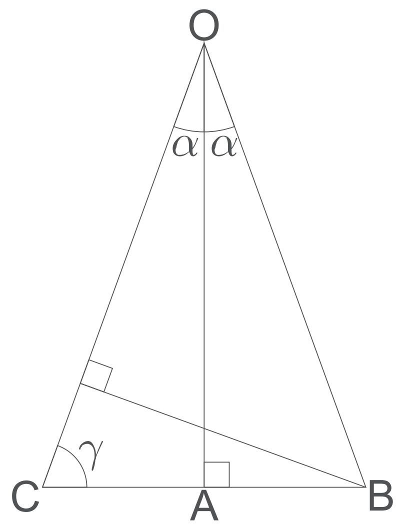
□

Proposição 1. *Se* $0° < \alpha < 45°$ *então:*

1. $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
2. $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

temos a necessidade do ângulo α ser entre $0°$ e $45°$ para garantirmos que ainda estamos tratando de ângulos agudos ao calcularmos $\operatorname{sen} 2\alpha$.

Figura 5 – Figura para demonstração da proposição 1.



Demonstração. (Prova da primerira parte) Seja BOC um triângulo isósceles formado pela junção de dois triângulos retângulos: AOB e AOC retângulos em A como mostra a figura 5. Seja OB = OC = 1. Da geometria euclidiana plana, sabemos que num triângulo isósceles a altura também é bissetriz. Seja $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \alpha$. Neste caso, temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{1}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \frac{AC}{1}$ logo, AB = AC = $\operatorname{sen}\alpha$ e OA = $\cos\alpha$. Tracemos uma perpendicular BD ao lado OC do triângulo BOC. Assim, BD = $\operatorname{sen} 2\alpha$. Logo:

$$\text{Área do triângulo BOC} = \frac{BC \times OA}{2} = \frac{OC \times BD}{2}$$

Portanto:

$$BC \times OA = OC \times BD \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

(Prova da segunda parte) Seja γ o ângulo $\widehat{BCO}$ e vejamos que γ e α são ângulos complementares, logo pelo teorema 1, $\cos \gamma = \operatorname{sen} \alpha$. Por outro lado, BC = $2 \times \operatorname{sen} \alpha$, OD + DC = OC = 1 e BD = $\cos 2\alpha$, ou seja,

$$1 \times \cos 2\alpha + \mathrm{BC} \times \cos \gamma = 1 \Longrightarrow \cos 2\alpha + 2 \times \operatorname{sen} \alpha \times \operatorname{sen} \alpha = 1 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Substituindo 2α por α e α por $\frac{\alpha}{2}$ temos:

$$\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}}$$

□

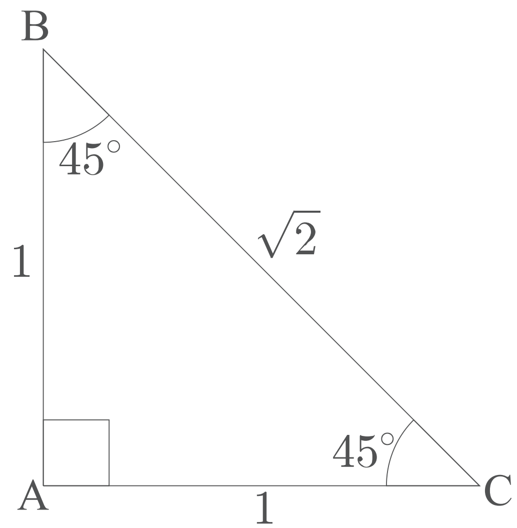
2.1.1 Valores de Seno, Cosseno e Tangente de alguns ângulos agudos

Os principais ângulos agudos, cujos valores de seno, cosseno e tangente serão utilizados tanto no decorrer do estudo da trigonometria, quanto no estudo de números complexos, são os ângulos de 18°, 30°, 45° e 60° e outros ângulos que possuem relações com eles.

2.1.1.1 Seno, cosseno e tangente de 45°.

Seja ABC um triângulo retângulo isósceles, cujos catetos AB e AC são iguais a 1 e ângulos agudos de 45°. Pelo teorema de Pitágoras temos que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Logo $BC = \sqrt{2}$. Temos também que:

Figura 6 – Seno, cosseno e tangente de 45°.



$$\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \tfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

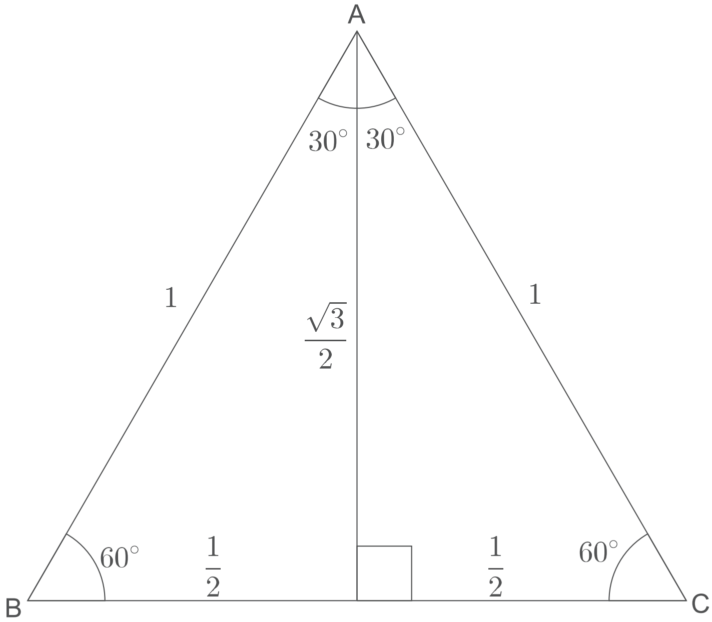
Como pelo lema 1, se α é um ângulo agudo temos que $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, então:

$$\tan 45° = \frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} \Longrightarrow \tan 45° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longrightarrow \boxed{\tan 45° = 1}$$

2.1.1.2 **Seno, cosseno e tangente de** $30°$ **e** $60°$**.**

Seja ABC um triângulo equilátero de lado igual a 1. Tracemos a altura AD, que também será a mediana do lado BC e bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$. Temos assim que $BD = CD = \frac{1}{2}$ e pelo teorema de Pitágoras $AD^2 + BD^2 = AB^2 \Longrightarrow \mathrm{AD}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Longrightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $\widehat{ACD}$ =60° e $\widehat{CAD}$ =30°, temos que ambos são complementares, logo pelo teorema 1 e pelas definições temos:

Figura 7 – Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°.



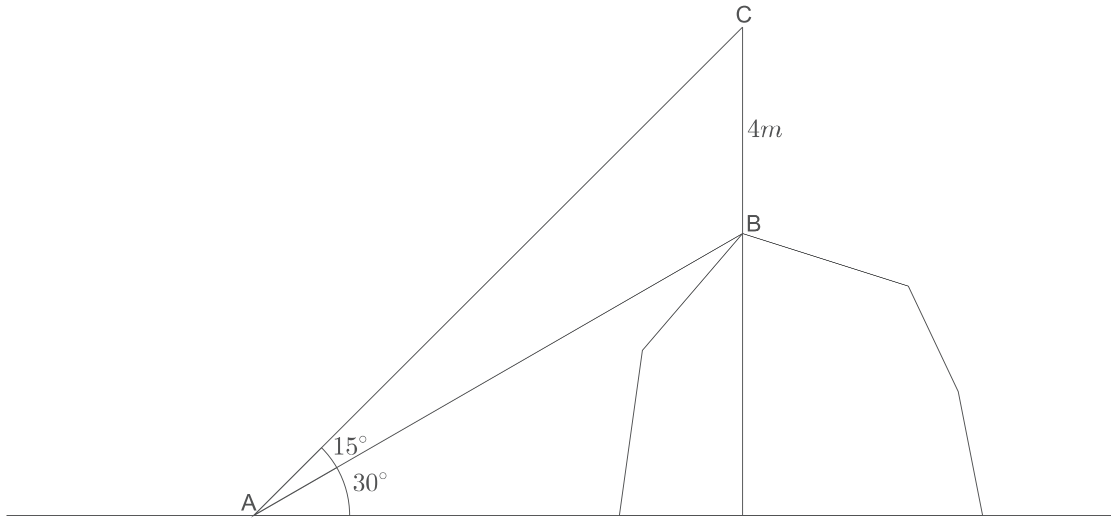
$$\boxed{\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \tfrac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\operatorname{sen} 60° = \cos 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

Temos também que:

$$\tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow \boxed{\tan 30° = \tfrac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \boxed{\tan 60° = \sqrt{3}}$$

Exemplo 10. *(PUC-RS-Adaptada) De um ponto A no solo, visam-se a base B e o topo C de um bastão colocado verticalmente no alto de uma colina, sob ângulos de* $30°$ *e* $45°$*,* *respectivamente. Se o bastão mede $4m$ de comprimento qual a altura da colina em metros?*



Chamemos de h a altura da colina e x a distância entre o ponto A e a base da colina. Assim

$$\frac{h}{x} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = \frac{3h}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = h\sqrt{3}$$

temos também que

$$\frac{h+4}{x} = \tan 45^\circ = 1 \Longrightarrow x = h + 4$$

igualando os resultados

$$h + 4 = h\sqrt{3} \Longrightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 4 \Longrightarrow h = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} \Longrightarrow h = 2(\sqrt{3} + 1)m$$

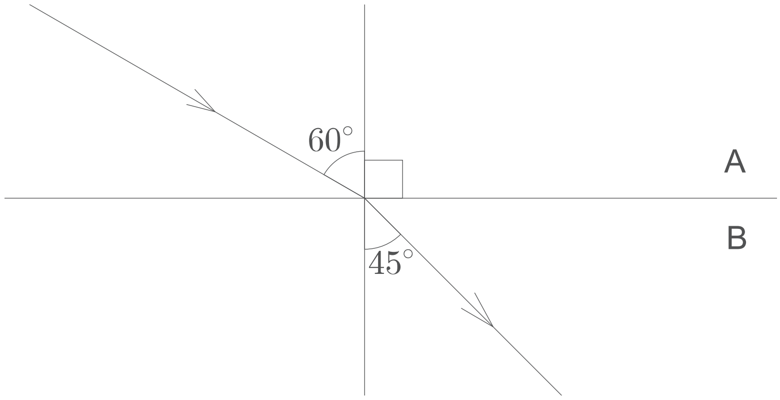
utilizando $\sqrt{3} = 1,7$ temos

$$h = 2 \times 2,7 \Longrightarrow h = 5,4m$$

Exemplo 11. *Um raio luminoso monocromático passa de um meio A para um meio B. O meio A é o ar, onde $n_A = 1$. Determine o índice de refração absoluto do meio B. Para isso use a lei de Snell-Descartes: $n_A \times \operatorname{sen} i = n_B \times \operatorname{sen} r$. (Onde i é o ângulo de incidência e r é o ângulo de refração).*

Chamamos de refração da luz o fenômeno em que ela é transmitida de um meio para outro diferente. Nesta mudança de meios a frequencia da onda luminosa não é alterada, embora sua velocidade e o seu comprimento de onda sejam. Com a alteração da velocidade de propagação ocorre um desvio da direção original. Assim a lei de Snell-Descartes é utilizada para calcular o desvio dos raios de luz ao mudarem de um meio para

Figura 8 – Ângulos de incidência e refração



outro, e é expressa por:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{V_i}{V_r}$$

onde V_i é a velocidade de incidência da luz, e V_r é a velocidade de refração da luz. Por outro lado

$$\frac{V_i}{V_r} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{n_B}{n_A}$$

onde λ_i é o comprimento de onda de inidência da luz e λ_r é o comprimento de onda da refração da luz. Portanto

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n_B}{n_A} \Longrightarrow n_A \times \operatorname{sen} i = n_B \times \operatorname{sen} r$$

Seja $i = 60°$ e $r = 45°$. Usando a lei de Snell-Descartes temos

$$1 \times \operatorname{sen} 60° = n_B \times \operatorname{sen} 45° \Longrightarrow n_B = \frac{\operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \Longrightarrow n_B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Longrightarrow n_B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Longrightarrow n_B = \frac{\sqrt{6}}{2} \Longrightarrow n_B = 1,225$$

Exemplo 12. *(ENEM) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto da medição.*

Disponível em: www.correiodobrasil.com.br, acessado em 2 de maio de 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a $1,8km$ da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de $60°$; a outra estava a $5,5km$ da posição vertical do balão, alinhado com a primeira, e no mesmo sentido e o avistou sob um ângulo *de $30°$. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?*

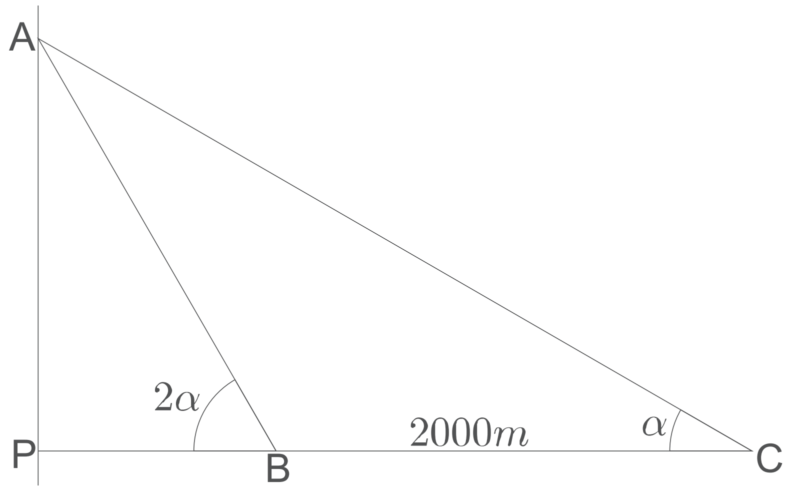
Seja h a altura do balão. Utlizando a tangente de $60°$ temos

$$\tan 60° = \frac{h}{1,8} \Longrightarrow h = 1,8\sqrt{3}km$$

fazendo $\sqrt{3} = 1,7$ concluimos que

$$h = 3,06km = 3060m$$

Exemplo 13. *(ENEM) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até o ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido $2000m$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, qual a menor distância entre o ponto P e o barco?*



Seja P o pé da perpendicular do barco até a praia e C o barco. Sabe-se que $\widehat{ACP}$ vale $30°$ e $\widehat{ABP}$ vale $60°$ e CB vale $2000m$. Definamos x como sendo a distância de A a P e d a distância entre B e P. Temos assim que:

$$\tan 30° = \frac{x}{2000 + d} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow 3x = 2000\sqrt{3} + d\sqrt{3}$$

$$\tan 60° = \frac{x}{d} = \sqrt{3} \Longrightarrow x = d\sqrt{3}$$

Substituindo os valores temos

$$3x = 2000\sqrt{3} + x \Longrightarrow x = 1000\sqrt{3} \Longrightarrow d = 1000m$$

Exemplo 14. *(UnB/DF) Um observador, estando a L metros da base de uma torre, vê seu topo sob um ângulo de $60°$. Afastando-se $100m$ em linha reta, passa a vê-lo sob um ângulo de $30°$. Determine $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} h$, onde h é a altura da torre.*

Utilizando os dados temos

$$\tan 60° = \frac{h}{L} = \sqrt{3} \Longrightarrow h = L\sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{h}{L+100} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow 3h = L\sqrt{3} + 100\sqrt{3}$$

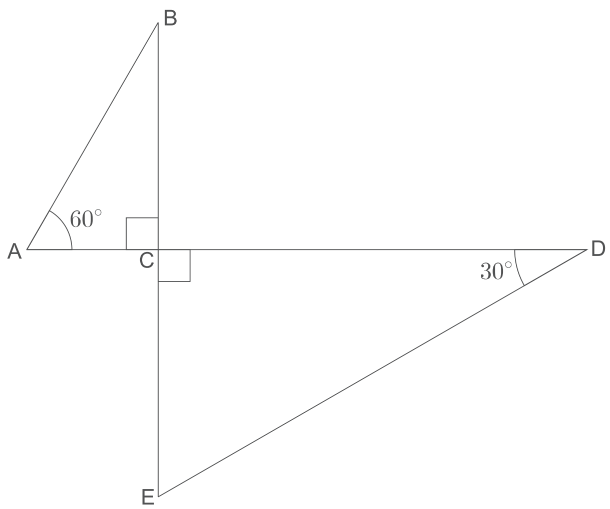
assim

$$3h = h + 100\sqrt{3} \Longrightarrow h = 50\sqrt{3}m$$

Portanto

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50\sqrt{3} = 75m$$

Exemplo 15. *(UEL - PR/ Adaptada) Com respeito aos pontos A, B, C, D e E, representados na figura abaixo, sabe-se que $CD = 2BC$ e que a distância de D a E é $12m$. Então, qual a distância de A a C em metros?*



Definamos $BC = x$, $CD = 2x$, $AC = d$. Assim

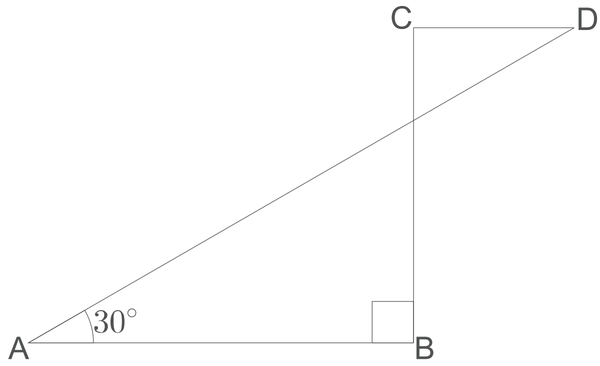
$$\cos 30° = \frac{2x}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow 4x = 12\sqrt{3} \Longrightarrow x = 3\sqrt{3}$$

Por outro lado

$$\tan 30° = \frac{x}{d} = \sqrt{3} \Longrightarrow x = d\sqrt{3} \Longrightarrow d = 3m$$

Exemplo 16. *(Unifor-CE/Adaptada) Na figura abaixo $CD//AB$, $CD = 12m$ e $AB = 48m$. Qual a medida do segmento AD em metros?*

Definamos P o ponto de interseção entre os segmentos AD e BC. Seja $AP = a$



e $PD = b$. Temos que o ângulo $\widehat{CDP} = 30°$, logo

$$\cos 30° = \frac{48}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow a = \frac{96}{\sqrt{3}} \Longrightarrow a = 32\sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{12}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow b = \frac{24}{\sqrt{3}} \Longrightarrow b = 8\sqrt{3}$$

concluimos que $AD = a + b = 40\sqrt{3}m$. Fazendo $\sqrt{3} = 1,7$ então

$$AD = 68m$$

2.1.1.3 **Seno, cosseno e tangente de $18°$.**

Seja ABC um triângulo isósceles com BA = BC = 1, cujos ângulos da base valem $72°$. Tracemos AD a bissetriz do ângulo $\widehat{BAC}$. Temos então que os triângulos CAD e ABD são isósceles. Seja AD = x, assim por CAD ser isósceles o segmento AC também vale x e por ABD ser isósceles o segmento BD também vale x e por consequência DC vale $1 - x$. Utilizando a semelhança de triângulos em CAD e ABC temos:

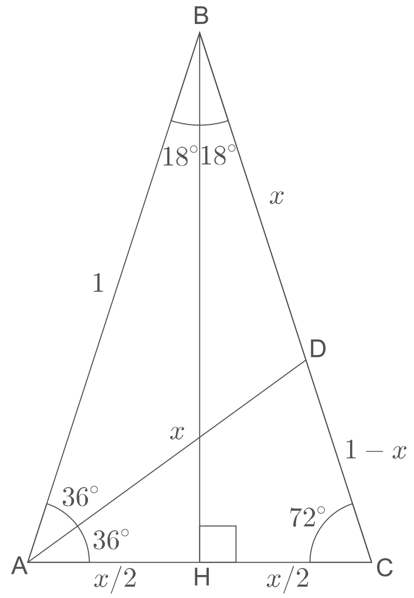
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Desenvolvendo esta proporção obtemos a seguinte equação: $x^2 + x - 1 = 0$. Utilizando a fórmula de Bhaskara para $a = 1$, $b = 1$ e $c = -1$ temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Figura 9 – Seno, cosseno e tangente de 18°.



Como o valor de x é positivo então $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Logo:

$$\text{BD} = \text{AD} = \text{AC} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Por outro lado tracemos a altura BH em relação ao lado AC do triângulo. Como esse triângulo é isósceles temos que a altura também é bissetriz do ângulo $\widehat{ABC}$. Assim $\widehat{ABH} = \widehat{HBC} = 18°$. Logo:

$$\operatorname{sen} 18° = \frac{AH}{AB} \Longrightarrow \operatorname{sen} 18° = \frac{x}{2} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Para encontrar o o cosseno de 18° utilizaremos a primeira relação fundamental do lema 1:

$$\operatorname{sen}^2 18° + \cos^2 18° = 1 \Longrightarrow \cos^2 18° = 1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}$$

$$\cos^2 18° = 1 - \frac{\left(6-2\sqrt{5}\right)}{16} \Longrightarrow \cos^2 18° = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\boxed{\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

Portanto:

$$\tan 18° = \frac{\operatorname{sen} 18°}{\cos 18°} \Longrightarrow \tan 18° = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} \Longrightarrow \tan 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Multipliquemos o numerador e o denominador desta fração por $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, assim temos:

$$\tan 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 18^\circ = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}$$

Multiplica-se, agora, numerador e denominador por $10-2\sqrt{5}$:

$$\tan 18^\circ = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}$$

$$\tan 18^\circ = \frac{10\sqrt{50+10\sqrt{5}}-10\sqrt{10+2\sqrt{5}}-2\sqrt{5}\sqrt{50+10\sqrt{5}}+2\sqrt{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80}$$

Obtemos assim que

$$\tan 18^\circ = \frac{12\sqrt{50+10\sqrt{5}}-20\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80} \Longrightarrow \boxed{\tan 18^\circ = \frac{3\sqrt{50+10\sqrt{5}}-5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{20}}$$

2.1.1.3.1 Seno, cosseno e tangente de 72°, 36° e 9° e outros ângulos relacionados.

Em vários dos resultados obtidos abaixo será utilizado um método muito importante para simplificar cálculos matemáticos: Método do Radical Duplo. Este método será enunciado no lema abaixo.

Lema 2. *Toda expressão irracional da forma* $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ *com* A *e* B *reais positivos é denominada radical duplo. Se as afirmações abaixo forem satisfeitas*

- $A^2 > B$
- B *não é quadrado perfeito*
- $A^2 - B$ *é quadrado perfeito*

então poderemos escrever

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

onde $C = \sqrt{A^2-B}$.

Demonstração. Façamos

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

e mostraremos que $x = \frac{A+C}{2}$ e $y = \frac{A-C}{2}$.

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y} \Longrightarrow \left(\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\right)^2 = \left(\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\right)^2 \Longrightarrow A\pm\sqrt{B} = x+y+2\sqrt{xy}$$

ou seja, cada membro desta igualdade é formado por uma parte racional A e $x+y$ e por uma parte irracional $\pm\sqrt{B}$ e $2\sqrt{xy}$ que são conjuntos disjuntos. Portanto da igualdade compreende-se que

$$A = x+y \quad \text{e} \quad \sqrt{B} = \pm 2\sqrt{xy}$$

assim

$$x+y = A \quad \text{e} \quad xy = \frac{B}{4}$$

então x e y são raizes da equação: $k^2 - Ak + \frac{B}{4} = 0$.

$$k^2 - Ak + \frac{B}{4} = 0 \Longrightarrow 4k^2 - 4Ak + B = 0 \Longrightarrow k = \frac{4A \pm \sqrt{16A^2 - 16B}}{8}$$

$$\Longrightarrow k = \frac{4A \pm 4\sqrt{A^2 - B}}{8} \Longrightarrow k = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Assim, fazendo $C = \sqrt{A^2 - B}$ concluimos que

$$x = k_1 = \frac{A+C}{2} \quad \text{e} \quad y = k_2 = \frac{A-C}{2}$$

$\square$

Os ângulos de $18°$ e $72°$ são complementares logo pelo teorema 1 temos:

$$\boxed{\operatorname{sen} 72° = \cos 18° = \tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos 72° = \operatorname{sen} 18° = \tfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Por outro lado temos que

$$\tan 72° = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{5}+1$ temos:

$$\tan 72° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} \Longrightarrow \boxed{\tan 72° = \tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

Pela proposição 1 observemos que $\operatorname{sen} 36° = 2 \operatorname{sen} 18° \cos 18°$ logo:

$$\operatorname{sen} 36° = 2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 36° = \tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$$

Temos assim que $\boxed{\cos 54° = \tfrac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$, pois são ângulos complementares. Vejamos que $\operatorname{sen}^2 36° + \cos^2 36° = 1$ logo:

$$\cos^2 36° = 1 - \frac{(\sqrt{50+10\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}})^2}{64} = 1 - \frac{60+12\sqrt{5} - 20\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{64}$$

$$\cos^2 36° = 1 - \frac{15+3\sqrt{5} - 5\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{16} = \frac{1-3\sqrt{5}+5\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{16}$$

Utilizando o método de radical duplo para $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ tem-se

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{6+\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+\sqrt{6^2-20}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{6^2-20}}{2}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}+1$$

Assim

$$\cos^2 36° = \frac{1-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{16} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\Longrightarrow \cos 36° = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} \Longrightarrow \boxed{\cos 36° = \tfrac{\sqrt{5}+1}{4}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 54° = \tfrac{\sqrt{5}+1}{4}}$$

Com esses resultados temos

$$\tan 36° = \frac{\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\left(\sqrt{5}+1\right)}$$

Multiplicando por $\sqrt{5}-1$ numerador e denominador

$$\tan 36° = \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\left(\sqrt{5}+1\right)} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{250+50\sqrt{5}} + \sqrt{10+2\sqrt{5}} - 2\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{8}$$

$$\tan 36° = \frac{6\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 2\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{8} \Longrightarrow \boxed{\tan 36° = \tfrac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{4}}$$

Pelo teorema 1 observa-se que $\tan 54° = \frac{1}{\tan 36°}$ logo:

$$\tan 54° = \frac{4}{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{50+10\sqrt{5}}}$$

Racionalizando a equação temos

$$\tan 54° = \frac{4}{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{50+10\sqrt{5}}} \times \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{50+10\sqrt{5}}}{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{50+10\sqrt{5}}}$$

$$\tan 54^\circ = \frac{12\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{40+8\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}}$$

$$\tan 54^\circ = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \Longrightarrow \boxed{\tan 54^\circ = 3+\sqrt{5}}$$

Pela proposição 1, $\operatorname{sen} 9^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 18^\circ}{2}}$ logo:

$$\operatorname{sen} 9^\circ = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\operatorname{sen} 9^\circ = \frac{\sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}}}{4}$$

Vamos agora utlizar o método do radical duplo:

$$\sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}} - \sqrt{\frac{8-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}}$$

$$= \sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}} - \sqrt{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

Por outro lado $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{6-\sqrt{20}}$. Assim

$$\sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}-1$$

Logo $\sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}$ e

$$\boxed{\operatorname{sen} 9^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}} \Longrightarrow \boxed{\cos 81^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}}$$

Para encontrar o $\cos 9^\circ$ utilizaremos a relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 9^\circ + \cos^2 9^\circ = 1 \Longrightarrow \cos^2 9^\circ = 1 - \left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}\right)^2$$

$$\cos^2 9^\circ = 1 - \left(\frac{3+\sqrt{5}+5-\sqrt{5}-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{16}\right) = 1 - \frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$$

$$\cos^2 9^\circ = \frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} \Longrightarrow \cos 9^\circ = \sqrt{\frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$$

$$\cos 9^\circ = \frac{\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}}}{4}$$

Temos assim que

$$\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}} + \sqrt{\frac{8-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2}}$$

$$= \sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

Como $\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{6-\sqrt{20}} = \sqrt{5}-1$ então

$$\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}} = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos 9^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 81^\circ = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}}$$

Para encontrar a tangente basta dividirmos $\operatorname{sen} 9^\circ$ por $\cos 9^\circ$:

$$\tan 9^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

$$\tan 9^\circ = \frac{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-2+2\sqrt{5}} = \frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}$$

Multiplicando numerador e denominador por$-1-\sqrt{5}$ temos

$$\tan 9^\circ = \frac{\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(-1-\sqrt{5}\right)}{-4} \Longrightarrow \boxed{\tan\ 9^\circ = \frac{\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}}$$

Vamos encontrar a tangente de 81°:

$$\tan 81^\circ = \frac{\operatorname{sen} 81^\circ}{\cos 81^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{5-\sqrt{5}}} \times \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

$$\tan 81^\circ = \frac{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-2+2\sqrt{5}} = \frac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}$$

Multiplicando numerador e denominador por$-1-\sqrt{5}$ temos

$$\boxed{\tan 81^\circ = \frac{\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}}$$

Vamos agora encontrar os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos relacionados com o ângulo de 30° que são os ângulos de 15° e 75°. Para encontrar o $\operatorname{sen} 15°$ utilizaremos o item 2 da proposição 1.

$$\operatorname{sen} 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Utilizando o método do radical duplo temos

$$\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \Longrightarrow \boxed{\cos 75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

Encontremos o cosseno de 15°:

$$\cos^2 15° = 1 - \operatorname{sen}^2 15° \Longrightarrow \cos^2 15° = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{8-2\sqrt{3}}{16} = 1 - \frac{4-\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos^2 15° = \frac{4+\sqrt{3}}{8} \Longrightarrow \cos 15° = \sqrt{\frac{4+\sqrt{3}}{8}} \Longrightarrow \boxed{\cos 15° = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}{4}} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}{4}}$$

Temos também que

$$\tan 15° = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}{\sqrt{8+2\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{12+3\sqrt{3}}-2\sqrt{4+\sqrt{3}}}{8+2\sqrt{3}}$$

$$\tan 15° = \frac{\sqrt{12+3\sqrt{3}}-\sqrt{4+\sqrt{3}}}{4+\sqrt{3}}$$

Multiplicando numerador e denominador por $4-\sqrt{3}$ tem-se

$$\tan 15° = \frac{\sqrt{12+3\sqrt{3}}-\sqrt{4+\sqrt{3}}}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{12+3\sqrt{3}}-7\sqrt{4+\sqrt{3}}}{13}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tan 15° = \frac{\left(5\sqrt{3}-7\right)\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)}{13}}$$

Por último vamos encontrar a tangente de 75°:

$$\tan 75° = \frac{\operatorname{sen} 75°}{\cos 75°} = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{12+3\sqrt{3}}+2\sqrt{4+\sqrt{3}}}{4}$$

$$\tan 75° = \frac{\sqrt{12+3\sqrt{3}}+\sqrt{4+\sqrt{3}}}{2} \Longrightarrow \boxed{\tan 75° = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)}{2}}$$

Exemplo 17. *Um observador em uma planície vê ao longe uma montanha segundo um ângulo de 15°. Após caminhar uma distância d em direção à montanha, ele passa a vê-la* *segundo um ângulo de* $30°$*. Qual é a altura da montanha?*

Seja h a altura da montanha. Como não temos o valor da distância d, acharemos o valor de h em função de d. Faremos x a distância entre a marcação do ângulo de $30°$ e a base da montanha. Utlizando as relações trigonométricas temos:

$$\frac{h}{x} = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow x = h\sqrt{3}$$

Temos também que

$$\frac{h}{d+x} = \tan 15° = \frac{(5\sqrt{3}-7)(\sqrt{4+\sqrt{3}})}{13} \Longrightarrow \frac{h}{d+h\sqrt{3}} = \frac{(5\sqrt{3}-7)(\sqrt{4+\sqrt{3}})}{13}$$

$$\Longrightarrow 13h = \sqrt{4+\sqrt{3}} \cdot \left[d(5\sqrt{3}-7) + h(15-7\sqrt{3})\right]$$

$$\Longrightarrow 13h = d \cdot (5\sqrt{3}-7)\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}\right) + h \cdot (15-7\sqrt{3})\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)$$

$$\Longrightarrow h = \frac{(5\sqrt{3}-7)\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)}{13-(15-7\sqrt{3})\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)} \cdot d$$

Utilizando $\sqrt{3} = 1,7$ temos

$$h = \frac{(5 \cdot 1,7 - 7)\left(\sqrt{4+1,7}\right)}{13-(15-7 \cdot 1,7)\left(\sqrt{4+1,7}\right)} \cdot d \Longrightarrow h = \frac{1,5 \cdot 2,4}{13 - 3,1 \cdot 2,4} \cdot d \Longrightarrow h = \frac{3,6}{5,56} \cdot d$$

$$h = 0,65d$$

Exemplo 18. *Em um exercício de tiro esportivo, o alvo encontra-se em uma parede cuja base está a* $30m$ *do atirador. Sabendo que o atirador vê o alvo sob um ângulo de* $15°$*, qual será a altura do alvo em relação ao chão?*

Chamando de h a altura do alvo então

$$\tan 15° = \frac{h}{30} = \frac{(5\sqrt{3}-7)(\sqrt{4+\sqrt{3}})}{13}$$

$$\Longrightarrow h = 30 \cdot \frac{(5\sqrt{3}-7)(\sqrt{4+\sqrt{3}})}{13}$$

Utilizando $\sqrt{3} = 1,7$ temos

$$h = 30 \cdot \frac{(5 \cdot 1,7 - 7)\left(\sqrt{4+1,7}\right)}{13} \Longrightarrow h = 30 \cdot \frac{3,6}{13} \Longrightarrow h = 8,3m$$

3 TRIGONOMETRIA NO CICLO TRIGONOMÉTRICO

Sabemos que arcos de círculo que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes, e que a razão entre eles é a mesma razão entre os raios.

Definição 5. *A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio do círculo.*

Decorre da definição que se C é o comprimento do arco determinado pelo ângulo central de α radianos em um círculo de raio R, temos:

$$\alpha = \frac{C}{R} \Longrightarrow \boxed{\text{C}=\alpha \times R}$$

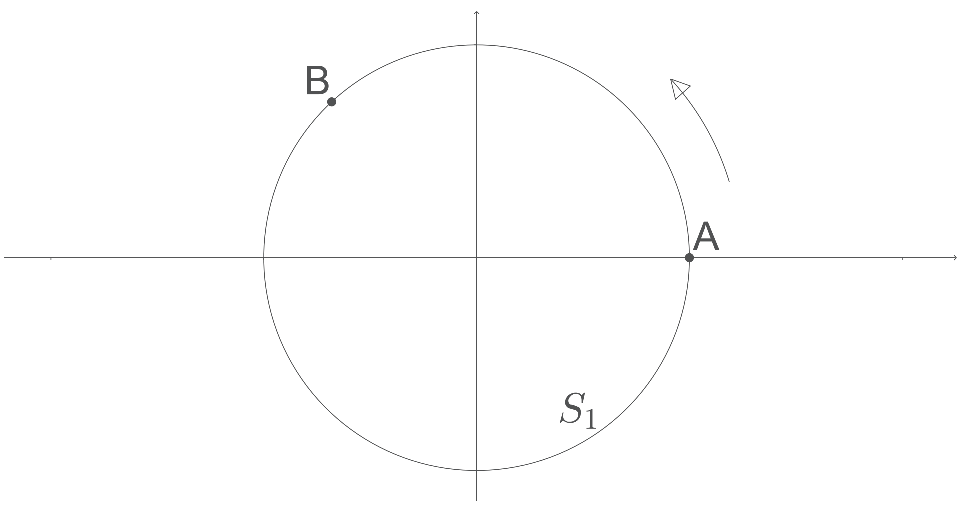
Fazendo R = 1, então o comprimento do arco terá o mesmo valor do ângulo α em radianos, onde 1 radiano $\approx 57°$. Indentifiquemos assim, no círculo de raio 1, arcos e ângulos correspondentes.

3.1 Círculo orientado e funções trigonométricas.

Um círculo é dito orientado, quando percorre-se um de seus sentidos e o denominamos de sentido positivo. Por convenção o sentido anti-horário é definido como sentido positivo. Utilizemos o círculo unitário, e vamos definir medida algébrica de um arco.

Definição 6. *A medida algébrica de um arco AB do círculo unitário é o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de A para B for o anti-horário ou negativo se o sentido for o horário. Representação desta medida: mAB*

Figura 10 – Círculo orientado unitário.



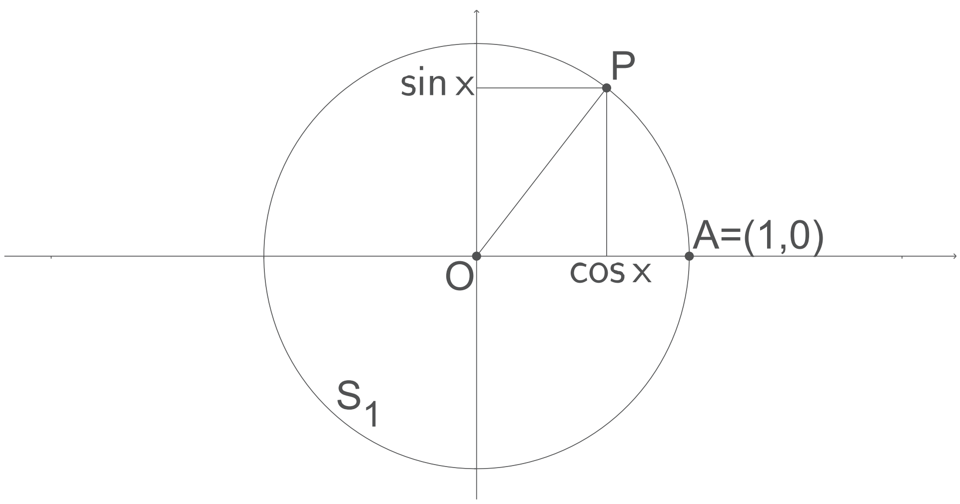
Até agora as funções trigonométricas só estão definidas para ângulos entre 0° e 90° e como estes ângulos podem ser medidos em radianos, logicamente os valores de seno, cosseno e tangente desses estão bem definidos para números reais entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Tentaremos agora extender as definições dessas funções a todos os números reais de modo as relações básicas do lema 1 continuem sendo mantidas para todos os números reais.

Seja S^1 a representação do círculo unitário, orientado e com origem. Considere $E : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ uma função definida onde para cada x real ele está associado a E(x) que é um ponto sobre o círculo S^1. Se $x > 0$ e $x > 2\pi$ então será necessário dar mais uma volta em torno do círculo S^1, no sentido positivo, para chegar ao valor de E(x), o que também é válido se $x < 0$. De todo jeito E(x) é um ponto bem definido do círculo unitário.

Seja P um ponto qualquer de S^1, pela função E este ponto é imagem de todos os números reais da forma $x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x < 2\pi$. Podemos perceber que x e $x + 2k\pi$ são arcos côngruos, ou seja, possuem a mesma medida.

Definição 7. *Seja dado um sistema de coordenadas cuja origem é o centro do círculo* S^1 *com A = (1,0). Definamos:*

$$\cos x = \textit{abscissa de P} \quad ; \quad \operatorname{sen} x = \textit{ordenada de P} \quad ; \quad \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \textit{se} \quad \cos x \neq 0$$

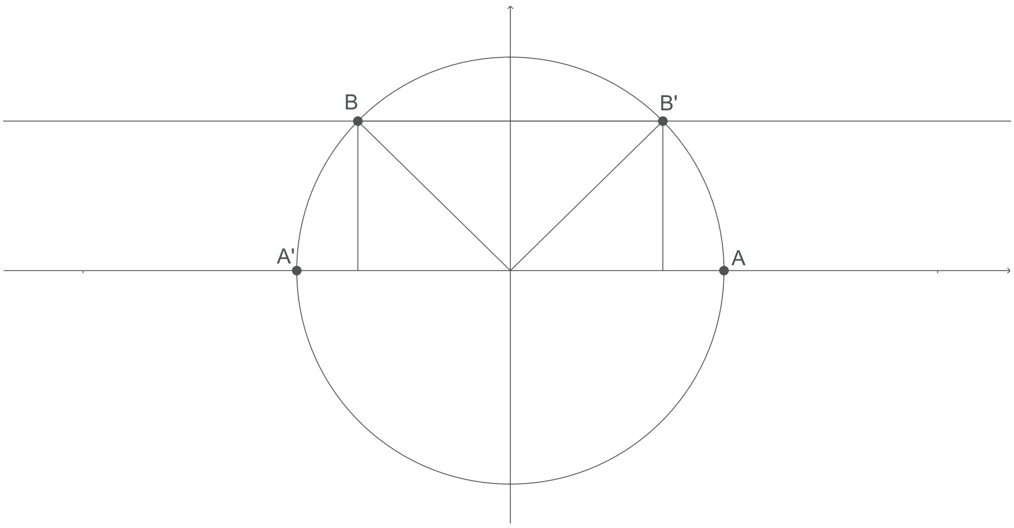


Vemos que esta definição coincide com as definições de seno, cosseno e tangente para ângulos entre 0 rad e $\frac{\pi}{2}$ rad que são os correspondentes aos ãngulos de 0° e 90°. Assim, quando P = A tem-se $\cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$. Quando $\widehat{AOP}$ for reto tem-se $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$. Como todo ponto P de S^1 é da forma $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ e a distância até a origem é 1 então: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Naturalmente percebe-se que qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$ temos,

$$\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x \quad ; \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

isso ocorre porque $E(x + 2k\pi) = E(x) =$ P. Podemos concluir que as funções seno e cosseno são periódicas, com período 2π, fazendo com que o comportamento delas no intervalo $[0, 2\pi]$ se repita a cada 2π rad. Agora, determinaremos os valores das funções trigonométricas para valores que encontram-se em qualquer quadrante a partir de resultados obtidos no primeiro quadrante.

Seja AB o arco pertencente ao segundo quadrante com $mAB = x$ e $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$. Passando por B tracemos uma reta t paralela ao eixo das abscissas. Esta reta intersecta o círculo S^1 no ponto B', o qual encontra-se na mesma altura que o ponto B em relação ao eixo horizontal.



Seja A' o ponto diametralmente oposto ao ponto A sobre o eixo das abscissas, temos assim que a medida do arco BA' tem a mesma medida do arco AB'. Chamando $mAB' = mBA' = \pi - x$ teremos

$$mAB = x \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)}$$

Por outro lado temos que

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2(\pi - x) = \cos^2(\pi - x) \Longrightarrow \cos x = |\cos(\pi - x)|$$

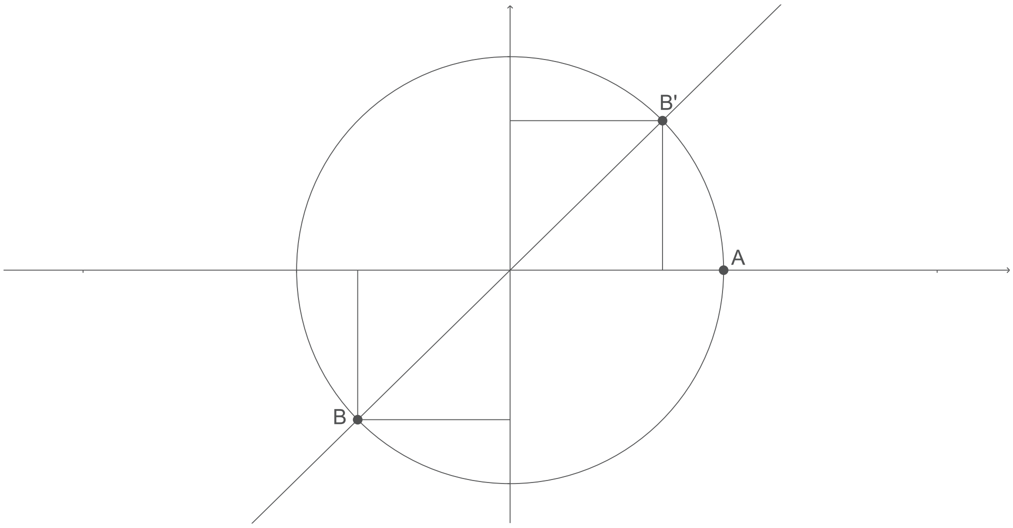
Como estamos no segundo quadrante os valores dos cossenos são todos negativos então

$$\boxed{\cos x = -\cos(\pi - x)}$$

Seja AB o arco pertencente ao terceiro quadrante com $mAB = x$ e $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$. Seja B' o ponto diametralmente oposto ao ponto B e B' pertencente ao primeiro quadrante. Vemos assim que o seno do arco AB é o oposto do arco AB' logo:

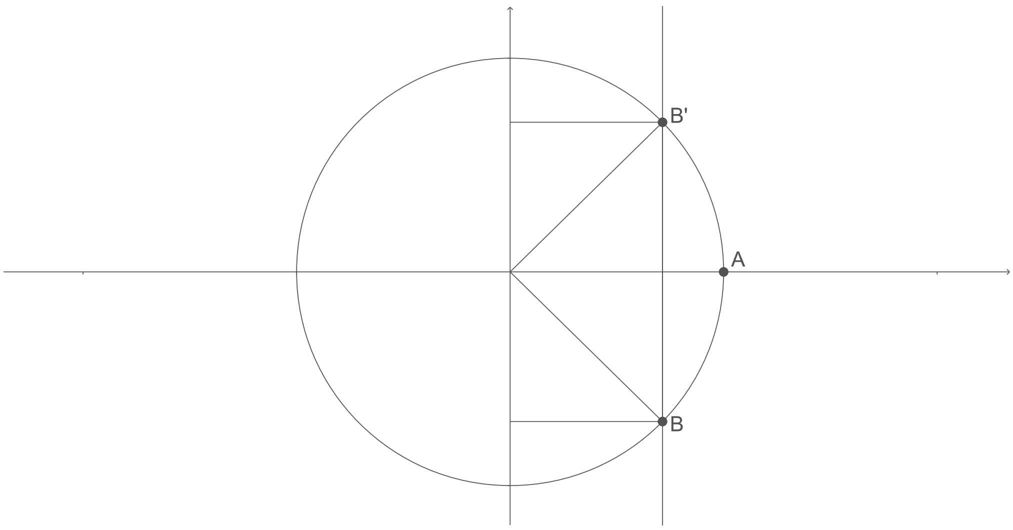
$$\boxed{\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x - \pi)} \Longrightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2(x - \pi) = \cos^2(x - \pi)$$

$$\cos x = \sqrt{\cos^2(x - \pi)} \Longrightarrow \cos x = |\cos(x - \pi)|$$



Como no terceiro quadrante os valores dos cossenos são todos negativos então

$$\boxed{\cos x = -\cos(x - \pi)}$$



Seja AB o arco pertencente ao quarto quadrante, onde $mAB = x$ e $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right)$. Seja s a reta paralela ao eixo das ordenadas e que passa pelo ponto B. Esta reta intersecta o círculo S^1 no ponto B', definindo $mAB' = 2\pi - x$ então tem-se

$$\boxed{\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)} \Longrightarrow \boxed{\cos x = \cos(2\pi - x)}$$

Chegamos assim a conclusão que os valores das funções trigonométricas de um arco AB qualquer estão determinados pelos valores destas funções no primeiro quadrante.

Para se ter uma melhor noção do comportamento de tais funções basta traçarmos os seus gráficos. Para a função seno, onde o gráfico é formado pelos pontos da forma $(x, \operatorname{sen} x)$, e para a função cosseno, onde o gráfico é formado pelos pontos da forma $(x, \cos x)$ basta tomarmos os valores que estão entre 0 e 2π rad, pois a partir disso os valores se repetem.

Podemos perceber pelos gráficos que tanto a função seno, como a função cosseno, variam entre -1 e 1 e que para obtermos a função cosseno basta transladarmos o gráfico da função seno $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda.

Gráfico 1 – Função Seno

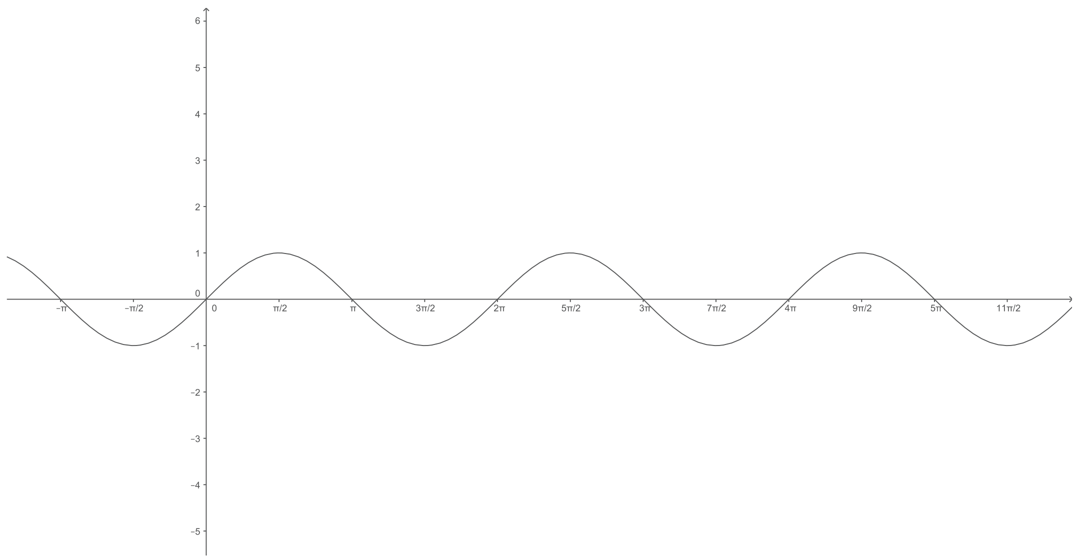
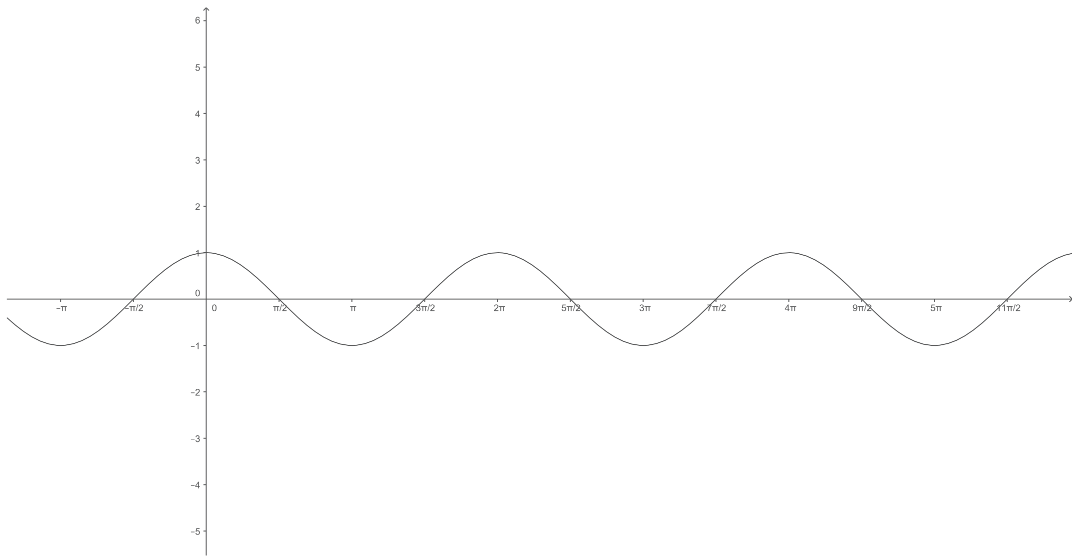


Gráfico 2 – Função Cosseno



Pelo lema 1 a tangente é definida por $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Temos assim que a tangente não está definida para ângulos da forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, pois do contrário teríamos divisão por

0. Mostraremos que a tangente é a medida algébrica de um segmento de reta tangente ao círculo S^1 e perpendicular ao eixo das abscissas no ponto $(1,0)$. Em termos mais técnicos, seja t uma reta orientada tangente ao círculo S^1 passando pelo ponto $A(1,0)$ e seja AB um arco com $mAB = x$. Uma reta r que passa pelo centro do círculo e o ponto B determina mais dois pontos:B' na interseção com o círculo S^1 e T no eixo t. Vamos mostrar que $\tan x$ tem a medida do segmento AT.

Figura 11: Arco no primeiro e terceiro quadrante

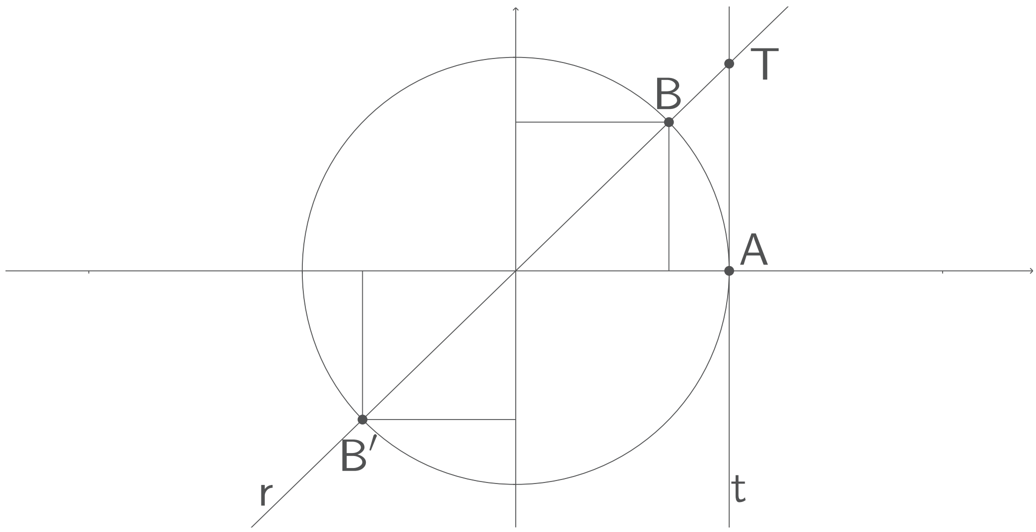
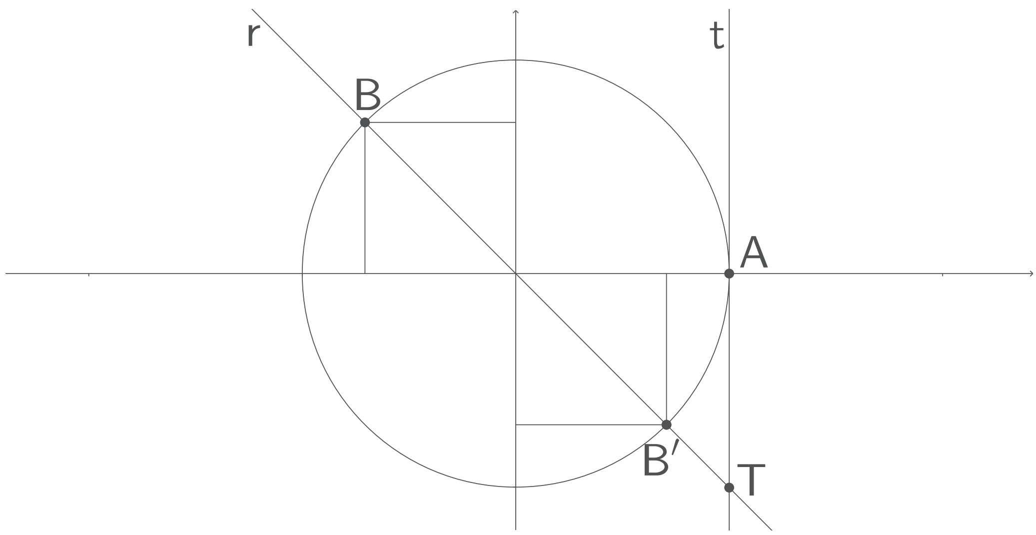


Figura 12: Arco no segundo e quarto quadrante



No primeiro caso suponhamos que o arco AB pertença ao primeiro ou terceiro quadrante. Seja C o pé da altura do ponto B em relação ao eixo x e S o pé de altura do ponto B em relação ao eixo y. Seja C' o pé da altura do ponto B' em relação ao eixo x e S' o pé de altura do ponto B' em relação ao eixo y. Os seguintes triângulos são congruentes:

OCB, OSB, $OC'B'$, $OS'B'$ e além disso são semelhantes ao triângulo OAT. Logo,

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{CB}{OC} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = mAT$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{CB'}{OC'} = \frac{AT}{1} = mAT$$

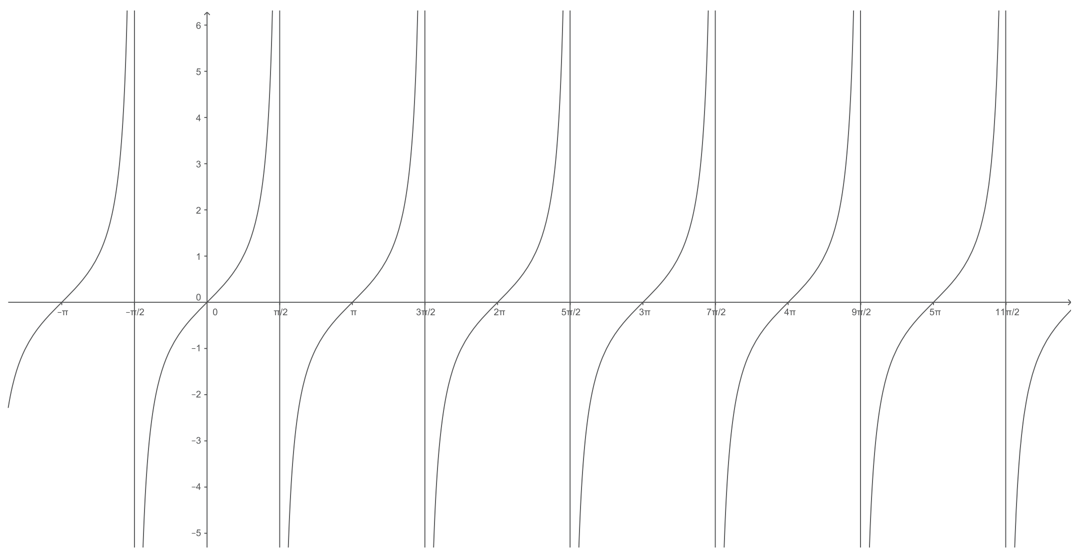
No segundo caso suponhamos que o arco AB pertença ao segundo ou quarto quadrante. Seja C o pé da altura do ponto B em relação ao eixo x e S o pé de altura do ponto B em relação ao eixo y. Seja C' o pé da altura do ponto B' em relação ao eixo x e S' o pé de altura do ponto B' em relação ao eixo y. os seguintes triângulos são congruentes: OCB, OSB, $OC'B'$, $OS'B'$ e além disso são semelhantes ao triângulo OAT. Logo,

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{CB}{OC} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = mAT$$

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{CB'}{OC'} = \frac{AT}{1} = mAT$$

Vemos que em ambos os casos $\tan x = \tan(x+\pi)$, mostrando que o período da função tangente é π. Para montarmos o gráfico da função tangente com pontos da forma $(x, \tan x)$ basta tomarmos valores entre $-\frac{\pi}{2}$ rad e $\frac{\pi}{2}$ rad, pois a partir disto os valores serão repetidos.

Gráfico 3 – Função Tangente



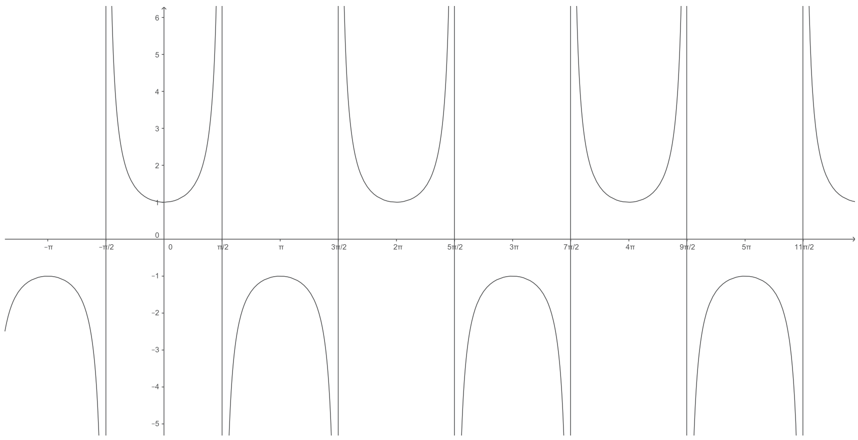
3.2 Funções trigonométricas complementares.

Vamos agora definir três funções complementares ao estudo de seno, cosseno e tangente dos ângulos no ciclo trigonométrico.

Definição 8. *Definimos a secante de um ângulo x como sendo o inverso do seu cosseno, contanto que este seja diferente de* 0*, ou seja,*

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad se \quad \cos x \neq 0$$

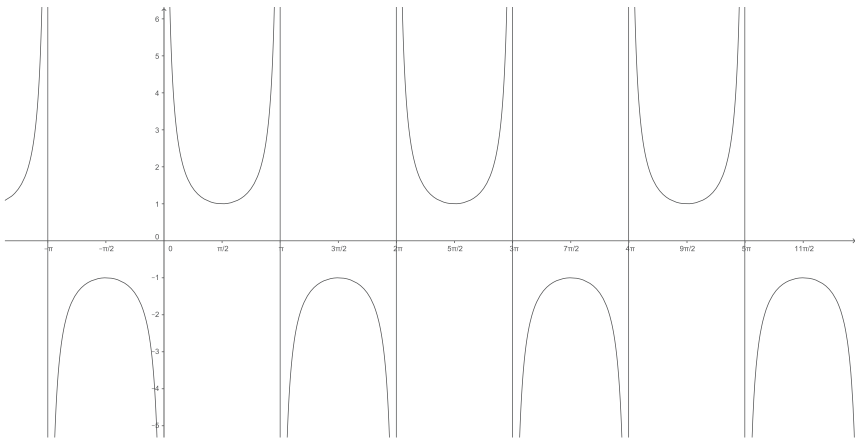
Gráfico 4 – Função Secante



Definição 9. *Definimos a cossecante de um ângulo x como sendo o inverso do seu seno, contanto que este seja diferente de* 0*, ou seja,*

$$\text{cossec} \quad x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \quad se \quad \text{sen}\, x \neq 0$$

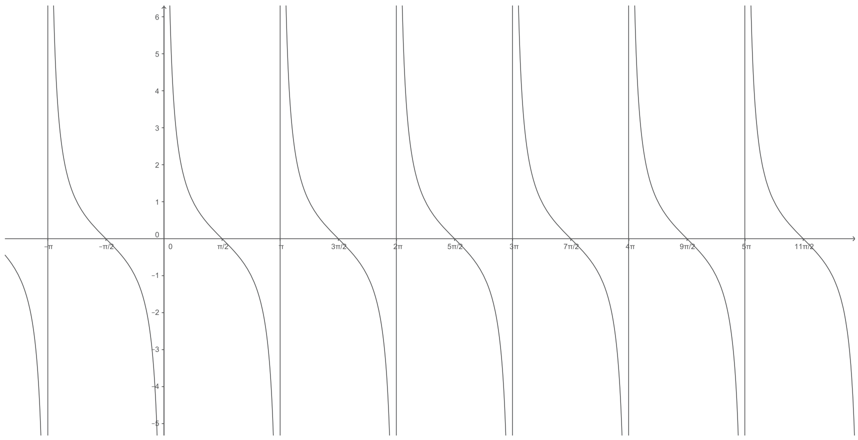
Gráfico 5 – Função Cossecante



Definição 10. *Definimos a cotangente de um ângulo x como sendo o inverso da sua tangente, contanto que o seno seja diferente de* 0*, ou seja,*

$$\text{cotg} \quad x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} \quad se \quad \text{sen}\, x \neq 0$$

Gráfico 6 – Função Cotangente



Exemplo 19. *Verifique que as igualdades abaixo valem para todo valor de* $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ *rad, onde* k *é um inteiro qualquer.*

1. $\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$

2. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

Solução:

1. Temos que mostrar que $\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Pelo primeiro membro tem-se

$$\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} \times \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

2. Temos que mostrar que $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$. Pelo segundo membro tem-se

$$\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Exemplo 20. *Seja* s *o lado de um polígono regular de* n *lados e* R *o raio do círculo inscrito neste polígono. Mostre que* $s = 2R\tan\frac{\pi}{n}$

Primeiramente dividimos o polígono regular em n triângulos equiláteros de lado s, a altura R. Assim

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{s}{2}}{R} = \frac{s}{2R} \Longrightarrow s = 2R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Exemplo 21. *Prove a identidade trigonométrica abaixo, válida para todo* x *real e onde a expressão do lado esquerdo está bem definida.*

$$\frac{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} = \tan x$$

$$\frac{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x(1 - 2\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(2\cos^2 x - 1)} = \frac{\operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(\cos^2 x + \cos^2 x - 1)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} = \tan x$$

Exemplo 22. *(ITA/Adaptado) Qual o valor da expressão*

$$x = \frac{2\tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

quando $\cos\theta = -\frac{3}{7}$ *e* $\tan\theta < 0$*?*

Como $\cos\theta < 0$ e $\tan\theta < 0$ então $\operatorname{sen}\theta > 0$. Dado que $\cos\theta = \frac{-3}{7}$ tem-se que

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{9}{49} \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{40}{49} \Longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

assim

$$\tan\theta = \frac{\frac{2\sqrt{10}}{7}}{\frac{-3}{7}} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{-2\sqrt{10}}{3}$$

logo

$$x = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \Longrightarrow x = \frac{2\cdot\left(\frac{-2\sqrt{10}}{3}\right)}{1 - \frac{40}{9}} \Longrightarrow x = \frac{\frac{-4\sqrt{10}}{3}}{\frac{-31}{9}} \Longrightarrow x = \frac{12\sqrt{10}}{31}$$

3.3 Adição e subtração de arcos

Vamos definir os valores das funções trigonométricas para a soma e a diferença de dois arcos e para isso vamos utilizar a fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Definição 11. *Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer do plano cartesiano. A distância d entre estes dois pontos será:*

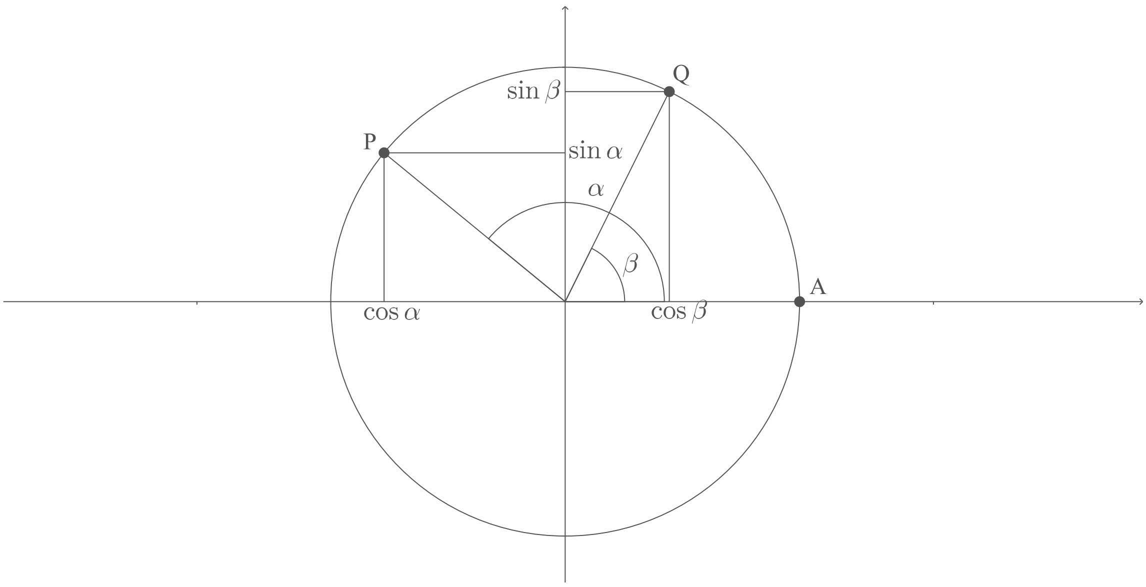
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Sejam P e Q dois pontos do círculo unitário onde $mAP = \alpha$ e $mAQ = \beta$. Como sabemos estes pontos são da forma $P = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e $Q = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$. Pela definição anterior temos que a distância d entre P e Q será:

$$d = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2}$$

$$d = \sqrt{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}$$

Figura 13 – Seno e cosseno da subtração de arcos



Pela relação fundamental tem-se que

$$d = \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}$$

Façamos agora uma rotação dos eixos coordenados no sentido positivo de modo que o ponto Q torne-se $(1,0)$, como consequência o ponto P será $(\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$. Utilizando novamente a fórmula da distância temos,

$$d = \sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)} = \sqrt{(\cos^2(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) + 1 - 2\cos(\alpha-\beta)}$$

$$d = \sqrt{2 - 2\cos(\alpha-\beta)}$$

Igualando as duas distâncias encontradas tem-se,

$$\sqrt{2 - 2\cos(\alpha-\beta)} = \sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)}$$

Eliminando os radicais e desenvolvendo a igualdade concluimos que

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Pela relação fundamental sabemos que $\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) = 1$ logo

$$\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = 1 - \cos^2(\alpha-\beta) = 1 - cos^2\alpha\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$

Substituindo $\cos^2\alpha$ por $1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ e $\operatorname{sen}^2\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$ temos

$$\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = 1 - \cos^2\beta \times (1 - \operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\beta \times (1 - \cos^2\alpha) - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$

$$\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = 1-\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta$$

Como $1-\cos^2\beta = \operatorname{sen}^2\beta$ e percebendo que

$$\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\beta+\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha)^2$$

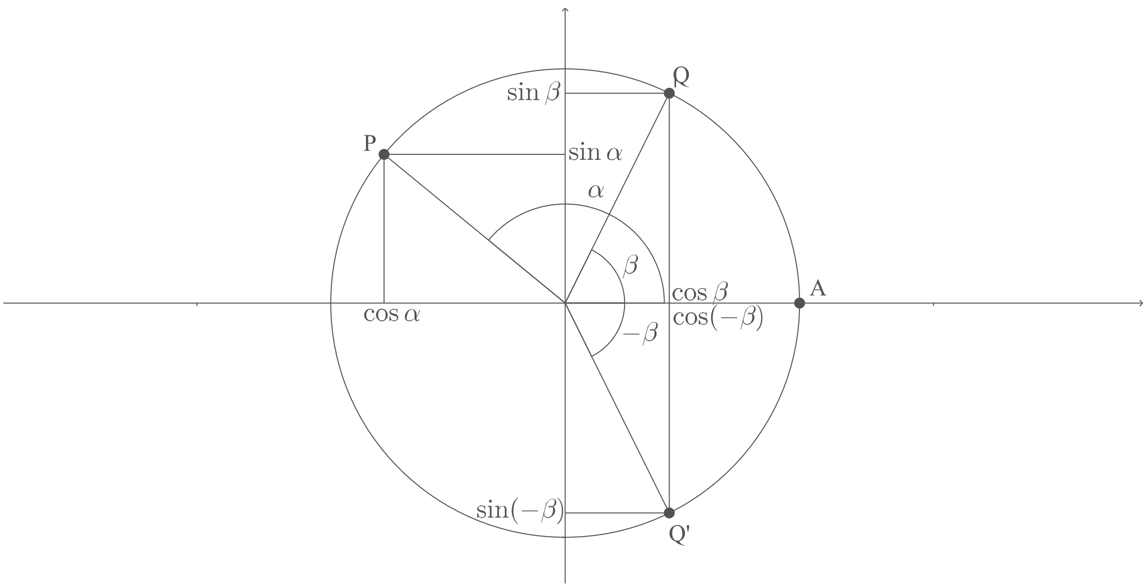
Concluimos que

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$$

Agora marquemos sobre o círculo unitário um ponto Q' de forma que $mAQ' = -\beta$. Temos assim $mAQ = -mAQ'$, ou seja, $\beta = -\beta$, logo

$$\cos(\alpha-(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta)+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta)$$

Figura 14 – Seno e cosseno da soma de arcos



Como β e $-\beta$ são arcos opostos pela reta das abscissas então seus valores do cosseno são iguais e os valores do seno tem sinais opostos, $\cos\beta = \cos(-\beta)$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$ então

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Utilizando o mesmo processo para o seno temos

$$\operatorname{sen}(\alpha-(-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)-\operatorname{sen}(-\beta)\cos\alpha \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}$$

Para calcularmos a tangente de $\alpha-\beta$ façamos a divisão do seu seno pelo seu cosseno, ou seja,

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Dividindo numerador e denominador por $\cos\beta$ temos

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \frac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\beta}}{\cos\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \tan\beta\cos\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\tan\beta}$$

Dividindo numerador e denominador por $\cos\alpha$ temos

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \tan\beta}{1 + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\tan\beta} \Longrightarrow \boxed{\tan(\alpha-\beta) = \tfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

Para encontrar a tangente de $\alpha+\beta$ basta lembrar que, como $\cos\beta = \cos(-\beta)$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$ então

$$\tan(-\beta) = \frac{\operatorname{sen}(-\beta)}{\cos(-\beta)} = \frac{-\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = -\tan\beta$$

Logo

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan(-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(-\beta)} \Longrightarrow \boxed{\tan(\alpha+\beta) = \tfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$$

Exemplo 23. *Como calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de* $105°$*?*

$$\operatorname{sen}105° = \operatorname{sen}(45°+60°) = \operatorname{sen}45°\cos60° + \operatorname{sen}60°\cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}105° = \tfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

$$\cos105° = \cos(45°+60°) = \cos45°\cos60° - \operatorname{sen}45°\operatorname{sen}60° = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\cos105° = \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

$$\tan105° = \tan(45°+60°) = \frac{\tan45° + \tan60°}{1-\tan45°\tan60°} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

Multiplicando numerador e denominador por $1+\sqrt{3}$ *temos*

$$\tan105° = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} \Longrightarrow \boxed{\tan105° = -2-\sqrt{3}}$$

Exemplo 24. *Calcular a secante, cossecante e a cotangente do ângulo de* $105°$*.*

Como sabemos a secante de um ângulo é o inverso do seu cosseno. Como $\cos105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, então

$$\sec105° = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$$

Multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ temos

$$\sec 105^\circ = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{4(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{-4} = -\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

Por outro lado a cossecante é o inverso do seno e $\operatorname{sen} 105^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ logo:

$$\text{cossec} \quad 105^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

Multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{2}-\sqrt{6}$ temos

$$\text{cossec} \quad 105^\circ = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{-4} = -\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

Finalmente temos que a cotangente é o inverso da tangente, como $\tan 105^\circ = -2-\sqrt{3}$ então

$$\text{cotan} \quad 105^\circ = \frac{1}{-2-\sqrt{3}}$$

multiplicando numerador e denominador por $-2+\sqrt{3}$ tem-se

$$\text{cotan} \quad 105^\circ = \frac{1}{-2-\sqrt{3}} \times \frac{-2+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}} = \frac{-2+\sqrt{3}}{4-3}$$

$$\Longrightarrow \text{cotan} \quad 105^\circ = -2+\sqrt{3}$$

Exemplo 25. *Sabendo que*

$$\begin{cases} a\sec x = 1+\tan x \\ b\sec x = 1-\tan x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

$$\begin{cases} a\sec x = 1+\tan x \\ b\sec x = 1-\tan x \end{cases}$$

dividindo a primeira pela segunda equação temos

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\tan x}{1-\tan x} \Longrightarrow a - a\tan x = b + b\tan x \Longrightarrow a-b = (a+b)\tan x$$

$$\Longrightarrow \frac{a-b}{a+b} = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

fazendo $a-b = k\operatorname{sen} x$ tem-se $(a-b)^2 = k^2\operatorname{sen}^2 x$ e fazendo $a+b = k\cos x$ tem-se $(a+b)^2 = k^2\cos^2 x$ assim

$$k^2\operatorname{sen}^2 x + k^2\cos^2 x = k^2 \Longrightarrow (a-b)^2 + (a+b)^2 = k^2 \Longrightarrow 2a^2+2b^2 = k^2$$

$$\Longrightarrow a^2 + b^2 = \left(\frac{k\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

portanto a relação entre os valores a e b será: $P(a, b)$ é o centro de uma circunferência C de raio $\frac{k\sqrt{2}}{2}$.

Exemplo 26. *Calcular*

1. $y = \cos 36° \times \cos 72°$
2. $y = \operatorname{sen} 10° \times \cos 20° \times \cos 40°$

Solução:

1.

$$y = \cos 36° \times \cos 72° = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

2. Sabemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

somando ambos os membros e desenvolvendo a igualdade temos

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

assim

$$y = \operatorname{sen} 10° \times \cos 20° \times \cos 40° = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen}(-10°)] \cdot \cos 40°$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen} 30° \cdot \cos 40° - \operatorname{sen} 10° \cdot \cos 40°] = \frac{1}{4} \cdot [\operatorname{sen} 70° - \operatorname{sen} 10° - \operatorname{sen} 50° + \operatorname{sen} 30°]$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot [\operatorname{sen}(60° + 10°) - \operatorname{sen} 10° - \operatorname{sen}(60° - 10°) + \operatorname{sen} 30°]$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot [\operatorname{sen} 10° \cos 60° - \operatorname{sen} 10° + \operatorname{sen} 10° \cos 60° + \operatorname{sen} 30°]$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot [\operatorname{sen} 10° \cdot (2\cos 60° - 1) + \operatorname{sen} 30°] = \frac{1}{4} \cdot [\operatorname{sen} 10° \cdot 0 + \operatorname{sen} 30°] \Longrightarrow y = \frac{1}{8}$$

Exemplo 27. *(ITA/Adaptado) Sabendo que x e y são ângulos do primeiro quadrante tais que $\cos x = \frac{5}{6}$ e $\cos y = \frac{4}{5}$, então se $\alpha = x - y$ e $T = \sqrt{\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \operatorname{sen}^2\alpha}$, a qual quadrante pertence o ângulo α e qual o valor de T?*

Como x é um ângulo do primeiro quadrante então $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x > 0$. Logo

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

ao mesmo tempo o ângulo y também pertence ao primeiro quadrante, logo $\operatorname{sen} y > 0$ e

$\cos y > 0$ assim
$$\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Longrightarrow \operatorname{sen} y = \frac{3}{5}$$
Como $\alpha = x - y$ então

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x\cos y - \operatorname{sen} y\cos x = \frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4\sqrt{11}-15}{30}$$

logo $\operatorname{sen}\alpha < 0$ e

$$\cos\alpha = \cos(x-y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{11}+20}{30}$$

logo $\cos\alpha > 0$, portanto o ângulo α pertence ao quarto quadrante. Temos que $T = \sqrt{\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \operatorname{sen}^2\alpha}$, desenvolvendo o radical temos

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$$

logo
$$T = \sqrt{\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} + \operatorname{sen}^2\alpha} \Longrightarrow T = \sqrt{\cos^2\alpha} \Longrightarrow T = |\cos\alpha| = \cos\alpha$$
portanto
$$T = \frac{3\sqrt{11}+20}{30}.$$
Exemplo 28. *Verifique as seguintes identidades:*

1. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
2. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$
3. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
4. $\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Solução:

1. Partiremos de $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\operatorname{sen}(a-b)$:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a\cos b - \operatorname{sen} b\cos a$$

somando as equações membro a membro temos

$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen} a\cos b$$

fazendo $a+b=x$ e $a-b=y$ obtemos $a=\frac{x+y}{2}$ e $b=\frac{x-y}{2}$ logo

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

2. Partiremos de $\operatorname{sen}(a+b)$ e $\operatorname{sen}(a-b)$:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a$$

subtraindo a segunda equação da primeira temos:

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen} b\cos a$$

fazendo $a+b=x$ e $a-b=y$ obtemos $a=\frac{x+y}{2}$ e $b=\frac{x-y}{2}$ logo

$$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

3. Partiremos de $\cos(a+b)$ e $\cos(a-b)$:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$$

somando as equações membro a membro temos

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b$$

fazendo $a+b=x$ e $a-b=y$ obtemos $a=\frac{x+y}{2}$ e $b=\frac{x-y}{2}$ logo

$$\cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

4. Partiremos de $\cos(a+b)$ e $\cos(a-b)$:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$$

subtraindo a segunda equação da primeira temos:

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

fazendo $a+b=x$ e $a-b=y$ obtemos $a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$ logo

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Exemplo 29. *Determine que* $\operatorname{sen} 31° + \operatorname{sen} 29° = \operatorname{sen} 89°$.

Pelo item (a) da questão anterior temos:

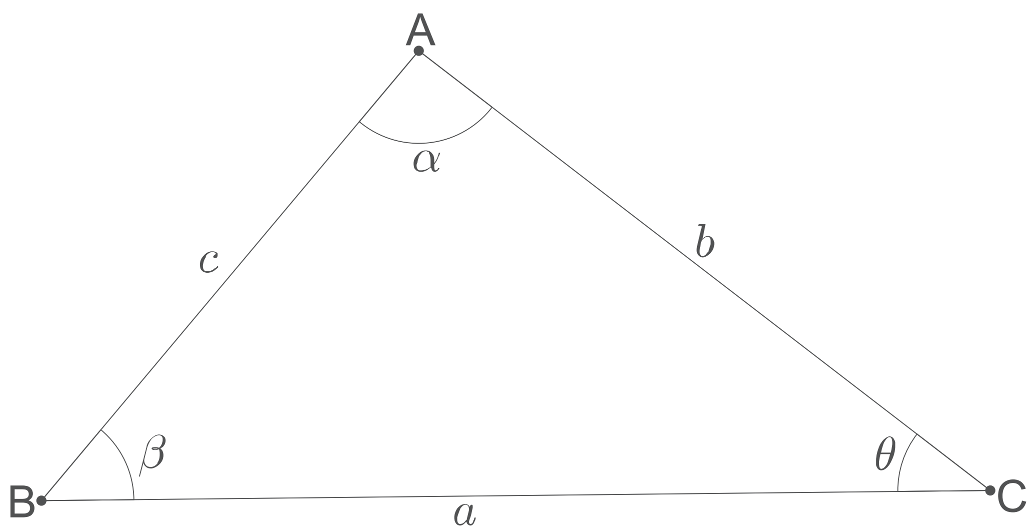
$$\operatorname{sen} 31° + \operatorname{sen} 29° = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{31° + 29°}{2}\right) \cos\left(\frac{31° - 29°}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} 30° \cos 1° = \cos 1° = \operatorname{sen} 89°$$

pois 89° e 1° são ângulos complementares.

3.4 Leis do seno e do cosseno

Proposição 2. *Seja ABC um triângulo qualquer, onde $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ e $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \theta$. É válida as relações abaixo chamadas de lei do cosseno:*

Figura 15 – Lei do Cosseno

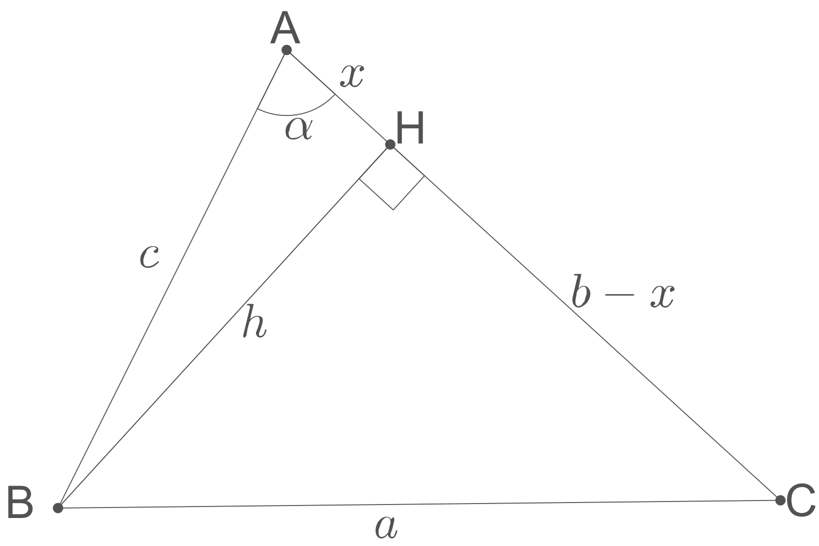


$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \quad ou \quad \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} \quad ou \quad \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

Demonstração. 1º caso

Tracemos a altura BH deste triângulo e separemos esse caso em duas partes. Na primeira parte suponhamos que o ângulo α seja agudo e definamos $BH = h$ e $AH = x$.

O triângulo CBH é retângulo valendo assim o teorema de pitágoras logo



$$a^2 = h^2 + (b-x)^2 \Longrightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

Por outro lado pode-se perceber que $h^2 = c^2 - x^2$, substituindo na equação anterior temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - x^2 - 2bx + x^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Por definição, $\cos\alpha = \frac{x}{c}$ assim $x = c \times \cos\alpha$ e utilizando este resultado concluimos que

$$\boxed{\mathrm{a}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Na segunda parte suponhamos que o ângulo α seja obtuso então tomando mais uma vez $BH = h$ e $AH = x$ temos

$$a^2 = h^2 + (b+x)^2 \Longrightarrow a^2 = h^2 + b^2 + 2bx + x^2 \Longrightarrow a^2 = c^2 - x^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$$

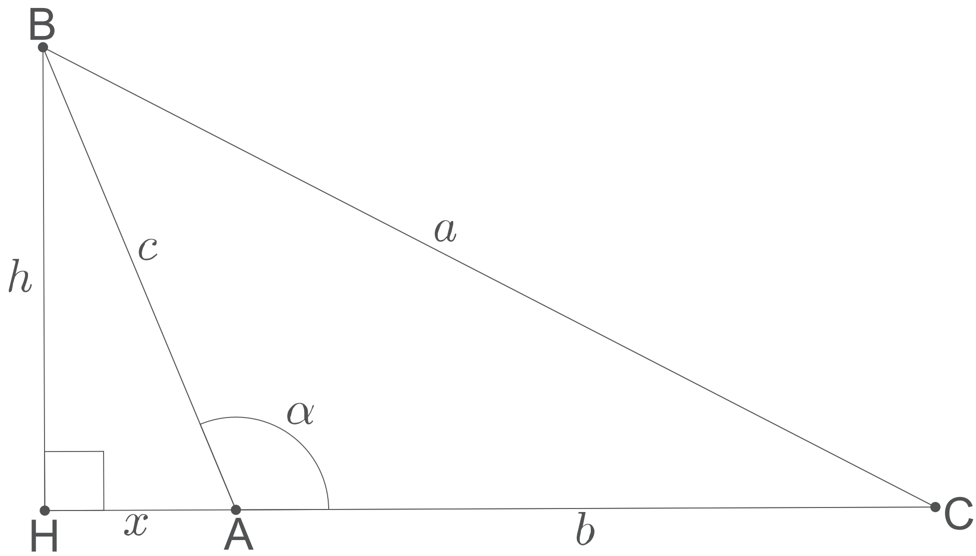
Temos que $\cos(\pi-\alpha) = \frac{x}{c}$ e $\cos(\pi-\alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\alpha \Longrightarrow \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ logo $x = -c \times \cos\alpha$, logo

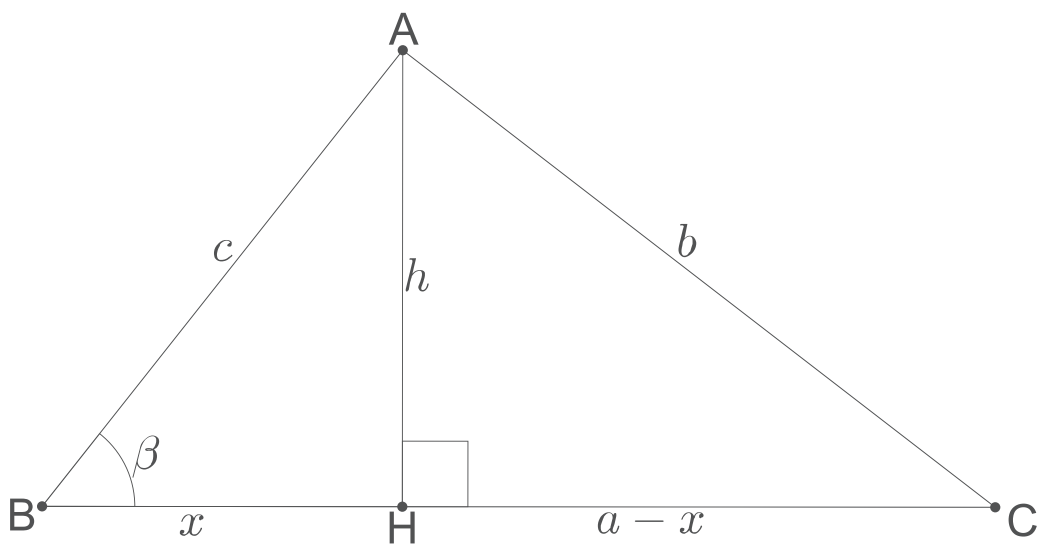
$$\boxed{\mathrm{a}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

2º caso

Neste caso traçaremos a altura AH do triângulo, definiremos $AH = h$ e $BH = x$. Suponhamos, a primeira vista, que o ângulo β seja agudo, assim

$$b^2 = h^2 + (a-x)^2 \Longrightarrow b^2 = h^2 + a^2 - 2ax + x^2$$





Como $h^2 = c^2 - x^2$ e $x = c \times \cos\beta$ então

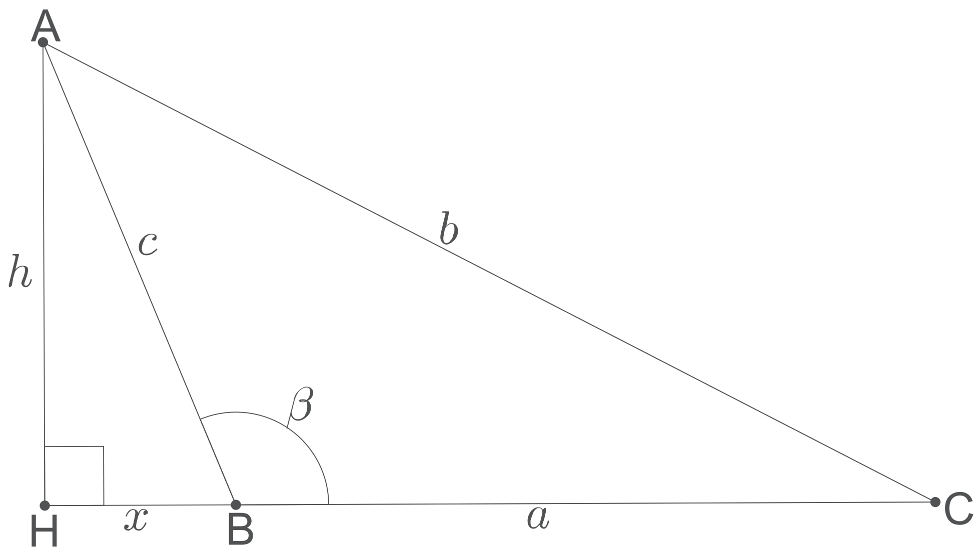
$$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{b}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$

Suponhemos agora que o ângulo β seja obtuso e definamos mais uma vez $AH = h$ e $BH = x$.

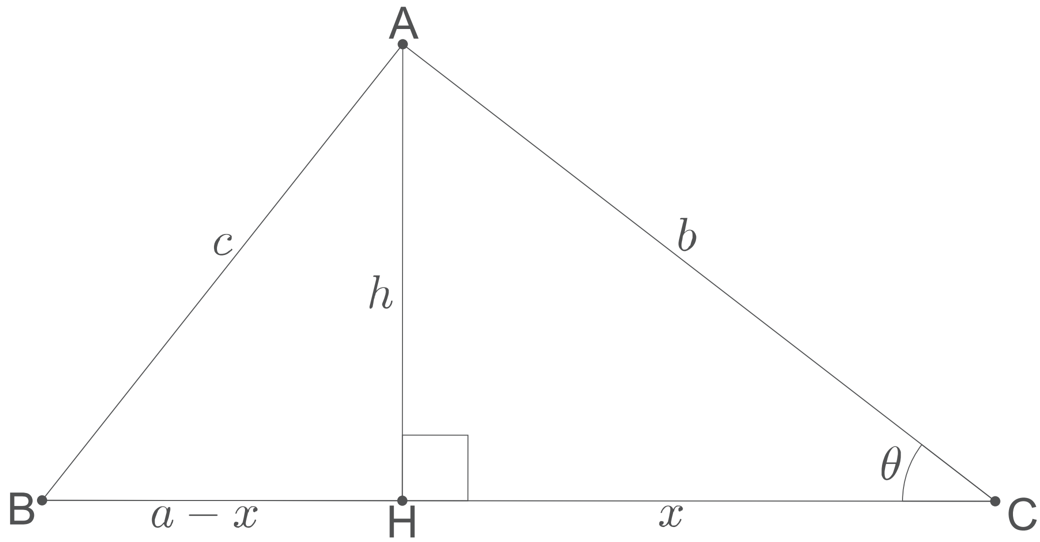
$$b^2 = h^2 + (a + x)^2 \Longrightarrow b^2 = h^2 + a^2 + 2ax + x^2$$

Sabendo que $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$ descobre-se que $x = -c \times \cos\beta$ e como $h^2 = c^2 - x^2$ então

$$b^2 = c^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ac\cos\beta \Longrightarrow \boxed{\mathrm{b}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$



3º caso: Suponhamos que o ângulo θ seja agudo. Definamos, desta vez, a



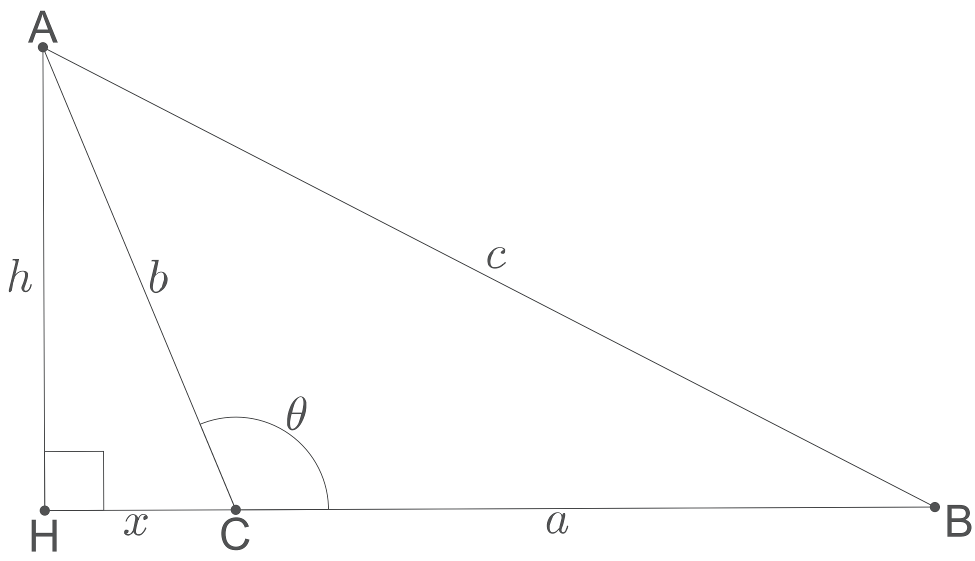
altura $AH = h$ do triângulo e $CH = x$.

$$c^2 = h^2 + (a-x)^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 + x^2 + h^2 - 2ax$$

Temos que $x^2 + h^2 = b^2$ e que $x = b \times \cos\theta$ logo

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

Por outro lado se o ângulo θ for obtuso e traçando a altura AH como na parte anterior tem-se:



$$c^2 = h^2 + (a+x)^2 \Longrightarrow c^2 = a^2 + h^2 + x^2 + 2ax$$

Lembremos que $x^2 + h^2 = b^2$ e que $x = -b \times \cos\theta$, pois $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ portanto

$$\boxed{\mathrm{c}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$

□

Para demonstrar a lei dos senos vamos nos utilizar do lema abaixo.

Lema 3. *Seja ABC um triângulo qualquer onde $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ e com ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. A área (S) deste triângulo pode ser dado pelas seguintes fórmulas:*

$$S = \frac{b \times c \times \operatorname{sen}\widehat{A}}{2} \quad ou \quad S = \frac{a \times b \times \operatorname{sen}\widehat{C}}{2} \quad ou \quad S = \frac{a \times c \times \operatorname{sen}\widehat{B}}{2}$$

Demonstração. Faremos a demonstração do 1º caso já que os outros dois casos serão semelhantes. Separemos este caso em três subcasos.

No primeiro subcaso se o ângulo $\widehat{A}$ é agudo e fazendo $h = c \times \operatorname{sen}\widehat{A}$ temos:

$$S = \frac{b \times h}{2} \Longrightarrow S = \frac{b \times c \times \operatorname{sen}\widehat{A}}{2}$$

No segundo subcaso se o ângulo $\widehat{A}$ é obtuso e fazendo $h = c \times \operatorname{sen}(\pi - \widehat{A})$ temos:

$$S = \frac{b \times h}{2} \Longrightarrow S = \frac{b \times c \times \operatorname{sen}(\pi - \widehat{A})}{2}$$

Temos que $\operatorname{sen}(\pi - \widehat{A}) = \operatorname{sen}\pi\cos(\pi - \widehat{A}) - \operatorname{sen}(\pi - \widehat{A})\cos\pi$. Como $\cos\pi = -1$ e $\operatorname{sen}\pi = 0$

então $\operatorname{sen}(\pi - \widehat{A}) = \operatorname{sen}\widehat{A}$, assim

$$S = \frac{b \times c \times \operatorname{sen}\widehat{A}}{2}$$

No terceiro subcaso se o ângulo $\widehat{A}$ é reto então tem-se que $\operatorname{sen}\widehat{A} = 1$ logo

$$S = \frac{b \times c}{2} = \frac{b \times c \times 1}{2} = \frac{b \times c \times \operatorname{sen}\widehat{A}}{2}$$

$\square$

Proposição 3. *Seja ABC um triângulo qualquer com lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. As seguintes relações abaixo são válidas e conhecidas como lei do seno:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

Demonstração. Utilizando os resuldados do lema anterior temos

$$S = \frac{b \times c \times \operatorname{sen}\widehat{A}}{2} \quad , \quad S = \frac{a \times b \times \operatorname{sen}\widehat{C}}{2} \quad , \quad S = \frac{a \times c \times \operatorname{sen}\widehat{B}}{2}$$

Multiplicando em ambos os lados da primeira igualdade pelo comprimento a, na segunda igualdade pelo comprimento c e na terceira igualdade pelo comprimento b temos

$$a \times S = \frac{a \times b \times c \times \operatorname{sen}\widehat{A}}{2} \quad , \quad c \times S = \frac{c \times a \times b \times \operatorname{sen}\widehat{C}}{2} \quad , \quad b \times S = \frac{b \times a \times c \times \operatorname{sen}\widehat{B}}{2}$$

Assim

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{a \times b \times c}{2S} \quad , \quad \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{a \times b \times c}{2S} \quad , \quad \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = \frac{a \times b \times c}{2S}$$

Portanto

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

$\square$

Exemplo 30. *Um balão foi visto simultaneamente de três estações A, B e C sob ângulos de elevação $45°$, $45°$ e $60°$, respectivamente. Sabendo que A está 3 km a oeste de C e que B está 4 km ao norte de C, determine a altura do balão.*

Seja ABC a base da pirâmide onde o balão P é o cume. Seja Q o pé da perpendicular do ponto P a base ABC. Vamos calcular o valor do comprimento PQ. Fazendo ABC um triângulo retângulo em C e como $AC = 3km$, $BC = 4km$ tem-se que $AB = 5km$. Temos que $\widehat{PAB} = \widehat{PBA} = 45°$ logo o triângulo ABP é isósceles. Traçando a altura de P em relação a base AB encontramos o ponto O. Como esta altura divide o segmento AB na metade então $AO = OB = \frac{5}{2}km$. Por outro lado

$$\tan 45^\circ = \frac{OP}{AO} = \frac{OP}{\frac{5}{2}} = 1 \Longrightarrow OP = \frac{5}{2}km$$

Pela lei dos cossenos

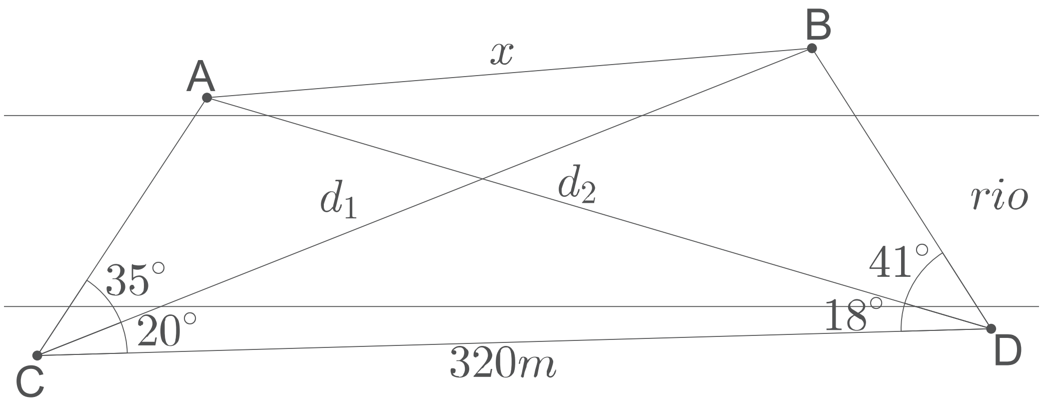
$$(OC)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3^2 - 2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\cos(\widehat{BAC}) \Longrightarrow (OC)^2 = \frac{25}{4} + 9 - 2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{3}{5} = \frac{25}{4}$$

$$\Longrightarrow OC = \frac{5}{2}km$$

percebe-se assim que o triângulo POC é isósceles de lados iguais PO e OC com respectivos ângulos opostos de 60°. Concluimos assim que além isósceles este triângulo também é equilátero de lado $\frac{5}{2}km$ e todos os ângulos iguais a 60°. Portanto a altura do balão PQ que também é altura do triângulo equilátero será:

$$PQ = \frac{\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow PQ = \frac{5\sqrt{3}}{4}km$$

Exemplo 31. *Para determinar a distância entre dois pontos A e B situados além do rio, marcou-se dois pontos C e D aquém do rio e mediu-se os ângulos $\widehat{ACB} = 35^\circ$, $\widehat{BCD} = 20^\circ$, $\widehat{ADC} = 18^\circ$, $\widehat{ADB} = 41^\circ$ e a distância $CD = 320m$. Calcular a distância AB.*



Definimos $BC = d_1$, $AD = d_2$ e $AB = x$. Como no triângulo BCD tem-se $\widehat{BCD} = 20^\circ$ e $\widehat{BDC} = 59^\circ$ então $\widehat{CBD} = 101^\circ$. Logo, pela lei dos senos temos:

$$\frac{d_1}{\operatorname{sen} 59^\circ} = \frac{320}{\operatorname{sen} 101^\circ} \Longrightarrow d_1 = \frac{320 \operatorname{sen} 59^\circ}{\operatorname{sen} 101^\circ}$$

$$\frac{d_2}{\operatorname{sen} 18^\circ} = \frac{320}{\operatorname{sen} 107^\circ} \Longrightarrow d_2 = \frac{320 \operatorname{sen} 18^\circ}{\operatorname{sen} 107^\circ}$$

pela lei dos cossenos temos

$$x^2 = \frac{320^2 \operatorname{sen}^2 59^\circ}{\operatorname{sen}^2 101^\circ} + \frac{320^2 \operatorname{sen}^2 18^\circ}{\operatorname{sen}^2 107^\circ} - 2 \cdot \frac{320^2 \operatorname{sen} 18^\circ \operatorname{sen} 59^\circ}{\operatorname{sen} 101^\circ \operatorname{sen} 107^\circ} \cdot \cos 35^\circ$$

como $\operatorname{sen} 59^\circ = 0,857167$, $\operatorname{sen} 101^\circ = \operatorname{sen} 79^\circ = 0,981627$, $\operatorname{sen} 18^\circ = 0,309017$, $\operatorname{sen} 107^\circ = \operatorname{sen} 73^\circ = 0,956305$ e $\cos 35^\circ = 0,819152$ então

$$x^2 = \frac{102400 \operatorname{sen}^2 59^\circ}{\operatorname{sen}^2 101^\circ} + \frac{102400 \operatorname{sen}^2 18^\circ}{\operatorname{sen}^2 107^\circ} - 2 \cdot \frac{102400 \operatorname{sen} 18^\circ \operatorname{sen} 59^\circ}{\operatorname{sen} 101^\circ \operatorname{sen} 107^\circ} \cdot \cos 35^\circ$$

$$x^2 = 78079,64888 + 10692,31753 - 47336,84854 \Longrightarrow x^2 = 41435,11787$$

$$\Longrightarrow x = 203,56m$$

Exemplo 32. *Um observador O situado no topo de uma montanha vê dois outros situados no nível do mar. Os observadores A e B medem os ângulos α e β que as linhas AO e BO formam com o plano horizontal e o observador O mede o ângulo $\widehat{AOB} = r$. Conhecendo a distância $AB = d$, calcule a altura da montanha.*

Façamos $AO = x$, $BO = y$ e definamos a altura da montanha de h. Então teremos

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{x} \Longrightarrow x = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{h}{y} \Longrightarrow y = \frac{h}{\operatorname{sen} \beta}$$

pela lei dos cossenos temos que

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos r \Longrightarrow d^2 = \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \frac{2h^2}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \cdot \cos r$$

multiplicando ambos os membros por $\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta$ temos

$$d^2(\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta) = h^2 \operatorname{sen}^2 \beta + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 2h^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos r$$

$$\Longrightarrow d^2(\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta) = h^2(\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos r)$$

$$\Longrightarrow h^2 = \frac{d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos r}$$

$$\Longrightarrow h = \frac{d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos r}}$$

Exemplo 33. *Em um triângulo ABC o lado AB mede $4\sqrt{2}$ e o ângulo $\widehat{C}$, oposto ao lado AB, mede 45°. Determine o raio da circunferência que circunscreve o triângulo.*

Seja O o centro desta circunferência. Da geometria plana sabe-se que um ângulo inscrito na circunferência tem a metade do ângulo central, logo $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{ACB} =$

$90°$ e como $AO = BO = r$ temos

$$(4\sqrt{2})^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos 90° \Longrightarrow 2r^2 = 32 \Longrightarrow r^2 = 16 \Longrightarrow r = 4$$

Exemplo 34. *Uma circunferência de raio* $14cm$ *circunscreve um triângulo* ABC*. Calcule a medida do lado* AB*, sabendo-se que o triângulo* ABC *não é retângulo e que o ângulo* $\widehat{ACB}$ *mede* $30°$*.*

Seja O o centro desta circunferência. Temos que $AO = BO = CO = 14cm$. Da geometria plana sabe-se que um ângulo inscrito na circunferência tem a metade do ângulo central, logo $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{ACB} = 60°$. Pela lei dos cossenos temos

$$(AB)^2 = 14^2 + 14^2 - 2 \cdot 14^2 \cdot \cos 60° \Longrightarrow (AB)^2 = 196 + 196 - 2 \cdot 196 \cdot 0,5 = 196$$

$$\Longrightarrow AB = 14cm$$

3.5 Equações Trigonométricas.

Antes de apresentarmos as equações trigonométricas, definiremos aqui as funções inversas e posteriormente veremos a importância dessas equações para mostrar como as funções estarão bem definidas.

Definição 12. *Definiremos* (arcsen) *a função inversa da função seno da forma* $\text{arcsen} \quad y = x$*. Esta função está definida para* $-1 \leq y \leq 1$ *e equivale a dizer que* $\operatorname{sen} x = y$ *para* $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*.*

Definição 13. *Definiremos* (arccos) *a função inversa da função cosseno da forma* $\arccos y = x$*. Esta função está definida para* $-1 \leq y \leq 1$ *e equivale a dizer que* $\cos x = y$ *para* $x \in [0, \pi]$*.*

Definição 14. *Definiremos* (arctan) *a função inversa da função tangente,* $\arctan \quad y = x$*. Esta função está definida para* $y \in \mathbb{R}$ *e equivale a dizer que* $\tan x = y$ *para* $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*.*

Definição 15. *Como a secante é o inverso do cosseno então já podemos perceber que a secante não está definida para valores entre* -1 *e* 1*, pois caso isto ocorresse teríamos* $-1 < \frac{1}{\cos x} < 1 \Longrightarrow \cos x < -1 \quad ou \quad \cos x > 1$*. Definiremos* (arcsec) *a função inversa da função secante onde* $\text{arcsec} \quad y = x$*, está definida para* $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ *e equivalente a dizer que* $\sec x = y$ *para* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$*.*

Definição 16. *A cossecante é o inverso do seno então, parecido com a secante, não está definida para valores entre* -1 *e* 1*. Definiremos* (arccossec) *a função inversa da função cossecante onde* $\text{arccossec} \quad y = x$ *definida para* $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ *e equivale a dizer que* $\text{cossec} \quad x = y$ *para* $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$*.*

Definição 17. *Definiremos a função inversa da função cotangente,* $\text{arccotan} \quad y = x$ *definida para* $y \in \mathbb{R}$ *e equivale a dizer que* $\text{cotan} \quad x = y$ *para* $x \in (0, \pi)$*.*

As equações trigonométricas podem ser divididas em três grupos. O primeiro

Gráfico 7: Função arco-seno

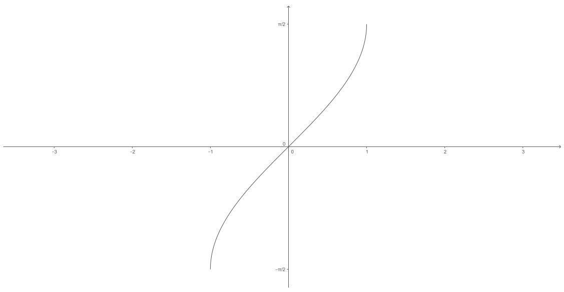


Gráfico 8: Função arco-cosseno

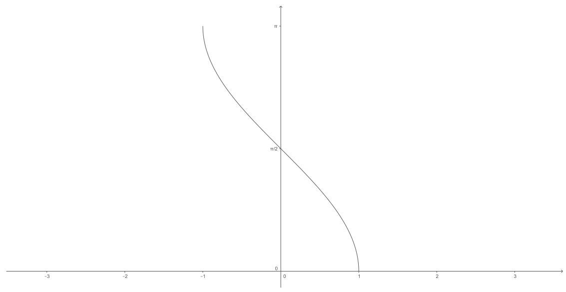


Gráfico 9: Função arco-tangente

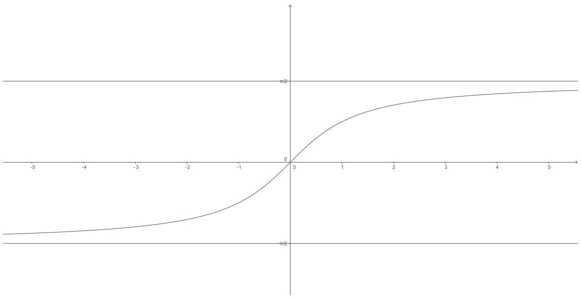


Gráfico 10: Função arco-secante

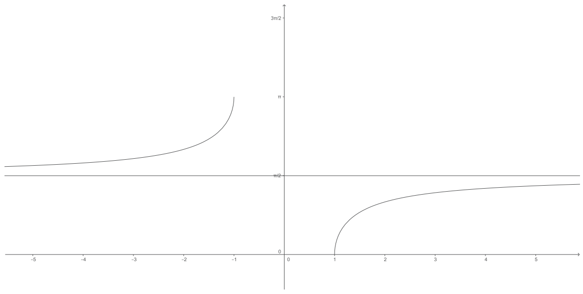


Gráfico 11: Função arco-cossecante

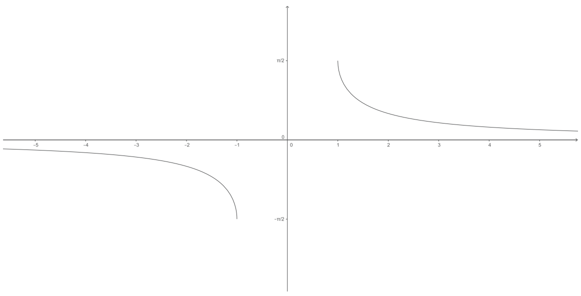
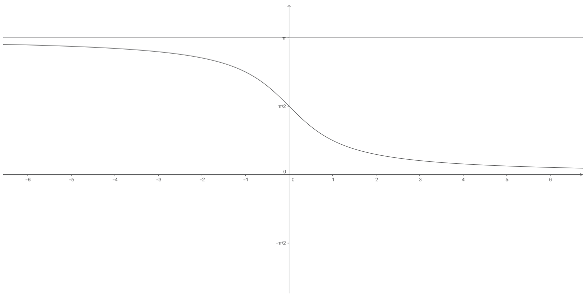


Gráfico 12: Função arco-cotangente



grupo são as equações fundamentais que envolvem equações do tipo: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$, $\cos x = \cos a$, $\tan x = \tan a$ e suas derivadas $\sec x = \sec a$, $\text{cossec} \quad x = \text{cossec} \quad a$ e $\text{cotg} \quad x = \text{cotg} \quad a$. Estas equações aparecem frequentemente em geometria, também são utlizadas no estudo dos números complexos e servem principlamente para definir as funções inversas. O segundo grupo são de equações do tipo $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$ e o terceiro grupo são de equações envolvendo as funções inversas.

3.5.1 Equações Fundamentais.

Este primeiro grupo será dividido em casos. O 1º caso será $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$. Neste caso para que o seno dos dois arcos sejam iguais ou eles tem que coincidir ou basta que as extremidades deles sejam simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Assim $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$, se e somente se, $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.

Vemos que a função (arcsen) está bem definida, pois $\forall y \in [-1, 1]$ sempre existirá $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo $\text{arcsen} \quad y = x$. Complementando temos que dados x_1 e x_2 pertencentes ao intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com $x_1 \neq x_2$ seus valores no domínio da função arco seno serão diferentes. Isto se deve ao fato de que a função seno no intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é injetiva.

Exemplo 35. *Calculemos os valores de x tais que* $\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$. *Para que tal exemplo aconteça, ou* $4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ *resultando que* $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, *ou* $4x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ *resultando que* $x = \frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}$. *Portanto, para que tenhamos* $\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$, *ou* $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ *ou* $x = \frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}$.

O 2º caso será $\cos x = \cos a$. Para que o cosseno dos dois arcos sejam iguais basta que eles coincidam, ou então eles tem que ser simétricos em relação ao eixo das abscisas. Assim $\cos x = \cos a$, se e somente se, $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$.

Vemos que a função (arccos) está bem definida, pois $\forall y \in [-1, 1]$ sempre existirá $x \in [0, \pi]$ cujo $\arccos y = x$. Temos também que dados x_1 e x_2 pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$ com $x_1 \neq x_2$ seus valores no domínio da função arco cosseno serão diferentes. Isto se deve ao fato de que a função cosseno no intervalo anterior é injetiva.

O 3º caso será $\tan x = \tan a$, com $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Para que a tangente dos dois arcos sejam iguais basta que eles coincidam, ou então eles tem que ser simétricos em relação a origem dos eixos. Assim $\tan x = \tan a$, se e somente se, $x = a + 2k\pi$ ou $x = a + k\pi$.

Vemos que a função (arctan) está bem definida, pois $\forall y \in \mathbb{R}$ sempre existirá $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cujo $\arctan \quad y = x$. Temos também que dados x_1 e x_2 pertencentes ao intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ com $x_1 \neq x_2$ seus valores no domínio da função arco cosseno serão diferentes. Isto se deve ao fato de que a função tangente no intervalo da imagem é injetiva.

O 4º caso será $\sec x = \sec a$. Como sabemos por definição que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ para $\cos x \neq 0$ logo, $\sec x = \sec a$ é equivalente a $\cos x = \cos a$ assim basta que $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, mas com a observação que $a \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ rad e $a \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ rad.

O 5º caso será $\text{cossec} \quad x = \text{cossec} \quad a$. Isto é semelhante a $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ com a ressalva que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Assim é válida a igualdade do seno, ou seja, $\text{cossec} \quad x = \text{cossec} \quad a$ quando $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ e $a \neq k\pi$ rad.

O 6º caso será $\text{cotan} \quad x = \text{cotan} \quad a$, com $a \neq k\pi$ rad. Para que ocorra a igualdade basta que eles coincidam, ou então os arcos x e a tem que ser simétricos em relação a origem dos eixos. Assim $\text{cotan} \quad x = \text{cotan} \quad a$, se e somente se, $x = a + 2k\pi$ ou $x = a + k\pi$.

Exemplo 36. *Determine o conjunto dos números reais x tais que*

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Longrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

portanto o conjunto dos valores de x que satisfazem a equação será

$$\left\{x \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.5.2 Equação envolvendo seno e cosseno.

A equação da forma $a \operatorname{sen} x + b\cos x = c$ pode ser resolvida de três modos.

1º modo: Dividamos a equação por $t = \sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{t}\operatorname{sen} x + \frac{b}{t}\cos x = \frac{c}{t}$$

Desenvolvendo $\left(\frac{a}{t}\right)^2 + \left(\frac{b}{t}\right)^2$ temos:

$$\left(\frac{a}{t}\right)^2 + \left(\frac{b}{t}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{t^2} = 1$$

Podemos perceber também que $\frac{a}{t}$ e $\frac{b}{t}$ são, cada qual, maiores ou iguais a -1 e menores ou iguais a 1, como é mostrado abaixo. Suponhamos por absurdo que isto não acontecesse, assim, fazendo para o valor a temos:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1 \Longrightarrow a > \sqrt{a^2+b^2} \Longrightarrow a^2 > a^2+b^2 \Longrightarrow b^2 < 0 \quad \text{(absurdo)!}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} < -1 \Longrightarrow \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1 \Longrightarrow -a > \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\Longrightarrow a^2 > a^2+b^2 \Longrightarrow b^2 < 0 \quad \text{(absurdo)!}$$

Para o valor b, as contas são idênticas.

A partir das nossas observações, podemos então garantir que $\exists\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{t}$ e $\cos\theta = \frac{b}{t}$. Portanto, a equação

$$\frac{a}{t}\operatorname{sen} x + \frac{b}{t}\cos x = \frac{c}{t}$$

torna-se

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} x + \cos\theta\cos x = \frac{c}{t} \Longrightarrow \boxed{\cos(\theta - x) = \tfrac{c}{t}}$$

2º modo: Façamos aqui, uma transformação. Escreveremos $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em função da $\tan\frac{x}{2}$. Comecemos pelo seno. Para isso utilizaremos as fórmulas de adição e subtração de arcos e a relação fundamental.

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

Agora vejamos o cosseno.

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \Longrightarrow \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Fazendo $\tan\frac{x}{2} = m$ então escreveremos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2m}{1+m^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

Assim a equação ficará

$$a \times \frac{2m}{1+m^2} + b \times \frac{1-m^2}{1+m^2} = c$$

Desenvolvendo teremos

$$2ma + b - m^2 b = c + m^2 c \Longrightarrow (b+c)m^2 - (2a)m + (c-b) = 0$$

Logo

$$\Delta = 4a^2 - 4(b+c)(c-b) = 4a^2 + 4b^2 - 4c^2 = 4(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$m = \frac{2a \pm 2\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{2(b+c)} \Longrightarrow m = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(b+c)}$$

Neste caso o único problema é que as soluções do tipo $x = \pi + 2k\pi$ não apareceram nas respostas, pois não existe a $\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ e estas terão que serem verificadas de outra forma.

3º modo: Colocar a equação em função do $\operatorname{sen} x$:

$$a\operatorname{sen} x + b\cos x = c \Longrightarrow b\cos x = c - a\operatorname{sen} x \Longrightarrow b^2\cos^2 x = (c - a\operatorname{sen} x)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b^2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = c^2 + a^2\operatorname{sen}^2 x - 2ac\operatorname{sen} x \Longrightarrow (a^2+b^2)\operatorname{sen}^2 x - 2ac\operatorname{sen} x + (c^2 - b^2) = 0$$

Fazendo $\operatorname{sen}^2 x = n$ temos

$$a\operatorname{sen} x + b\cos x = c \Longrightarrow (a^2+b^2)n^2 - 2acn + (c^2 - b^2) = 0$$

Desenvolvendo a equação do segundo grau temos

$$\Delta = 4a^2c^2 - 4(a^2+b^2)(c^2-b^2) = 4a^2b^2 - 4b^2c^2 + 4b^4$$

$$n = \frac{2ac \pm 2|b|\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{2(a^2+b^2)} \Longrightarrow n = \frac{ac \pm |b|\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(a^2+b^2)}$$

Mais uma vez, neste caso temos que visualizar se todos os resultado encontrados são realmente soluções da equação, pois ao elevarmos ao quadrado ambos os membros podemos achar raízes estranhas, que não serão soluções da equação.

Exemplo 37. *Determine que valores de m para os quais a equação $6(m-1)\operatorname{sen}^2 x - (m-1)\operatorname{sen} x - m = 0$ possui solução.*

Para que a equação tenha solução é preciso que o discriminante seja maior ou igual a zero, ou seja

$$(m-1)^2 - 4\cdot 6(m-1)\cdot(-m) \geq 0 \Longrightarrow m^2 - 2m + 1 + 24m^2 - 24m \geq 0$$

$$\Longrightarrow 25m^2 - 26m + 1 \geq 0$$

$$m = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{50} \Longrightarrow m = \frac{26 \pm 24}{50} \Longrightarrow m = 1 \quad \text{ou} \quad m = \frac{1}{25}$$

assim

$$25m^2 - 26m + 1 \geq 0 \Longrightarrow 25\cdot(m-1)\cdot\left(m - \frac{1}{25}\right) \geq 0$$

$$\Longrightarrow (m-1)(25m-1) \geq 0$$

assim

$$m - 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad 25m - 1 \geq 0$$

$$\text{ou}$$

$$m - 1 \leq 0 \quad \text{e} \quad 25m - 1 \leq 0$$

No primeiro caso

$$m - 1 \geq 0 \quad \text{e} \quad 25m - 1 \geq 0 \Longrightarrow m \geq 1 \quad \text{e} \quad m \geq \frac{1}{25} \Longrightarrow m \geq 1.$$

No segundo caso

$$m - 1 \leq 0 \quad \text{e} \quad 25m - 1 \leq 0 \Longrightarrow m \leq 1 \quad \text{e} \quad m \leq \frac{1}{25} \Longrightarrow m \leq \frac{1}{25}.$$

Portanto a solução será

$$\left\{ m \in \mathbb{R} \setminus m \leq \frac{1}{25} \quad \text{ou} \quad m \geq 1 \right\}$$

Exemplo 38. *Em um triângulo retângulo de hipotenusa 1 a soma dos catetos é $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Calcular a razão entre o menor cateto e o maior cateto.*

Sejam a e b os catetos desse triângulo retângulo, e seja α o ângulo oposto ao lado a. Pelos dados da questão temos que: $a + b = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\operatorname{sen}\alpha = a$ e $\cos\alpha = b$. Assim

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

dividindo ambos os membros por $t = \sqrt{2}$ temos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ então

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

assim

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$$

ou

$$\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

como α é um ângulo agudo do triângulo retângulo então $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad ou $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ rad. Como sabemos, em um triângulo retângulo o menor cateto é sempre oposto ao menor ângulo logo utilizaremos $a = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ e $b = \cos\frac{\pi}{12}$. Assim

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \tan\frac{\pi}{12} = \frac{(5\sqrt{3}-7)\left(\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)}{13}$$

Exemplo 39. *Resolva as equações:*

1. $\cos 3x = \cos x$

2. $\tan 7x = \tan 3x$

Solução:

1.

$$\cos 3x = \cos x \Longrightarrow 3x = x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = -x + 2k\pi \Longrightarrow x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{k\pi}{2}$$

2.

$$\tan 7x = \tan 3x \Longrightarrow 7x = 3x + k\pi \Longrightarrow 4x = k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

Exemplo 40. *(ITA/Adaptado) Qual a solução da equação trigonométrica abaixo?*

$$\sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x = \sqrt{3}$$

Utilizemos o processo das equações trigonométricas. Para isso dividamos toda a equação por $t = 2$.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen} x + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

assim

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$$

4 NÚMEROS COMPLEXOS

Iniciaremos o estudo dos números complexos lembrando das propriedades fundamentais dos números reais. Nosso objetivo, neste caso, é mostrar a importância do surgimento desse conjunto de números para posteriormente definí-los. Sejam dados a, b, e c reais quaisquer então:

1. Adição e Multiplicação são comutativas, ou seja, $a + b = b + a$ e $ab = ba$.
2. Adição e Multiplicação são associativas, ou seja, $(a + b) + c = a + (b + c)$ e $(ab)c = a(bc)$.
3. Multiplicação é distributiva em relação a adição, ou seja, $a(b + c) = ab + ac$
4. Existem únicos números 0 e 1 que satisfazem as seguintes condições:
   (a) $a + 0 = a$
   (b) $1a = a$
5. Qualquer que seja o número real a existe um único real $(-a)$, e se $a \neq 0$, existe um único real $\frac{1}{a}$. Ambos satisfazem $a + (-a) = 0$ e $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$.

Estas propriedades são importantes para deduzirmos as operações aritméticas dos números reais. De todas as regras a que destacaremos será a de que se $x \in \mathbb{R}$ então $x^2 \geq 0$, qualquer que seja o valor x.

Numa demonstração rápida temos que se $x = 0$, fica óbvio que $x^2 = 0$. Se $x > 0$, também claramente tem-se que $x^2 > 0$, pois é a multiplicação de números positivos. Agora se $x < 0$, façamos $x = -k$ onde $k > 0$. Assim $x^2 = x \cdot x = (-k) \cdot (-k)$. Da propriedade 2 temos que $x^2 = (-1)(-1)k^2$. Mostraremos que $x^2 = k^2 > 0$.

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)(-1) + 1(-1) \longrightarrow \text{pela propriedade 4}$$

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)[(-1) + 1] \longrightarrow \text{pela propriedade 3}$$

$$(-1)(-1) + (-1) = (-1)0 = 0 \longrightarrow \text{pelas propriedades 3, 4 e 5 juntas}$$

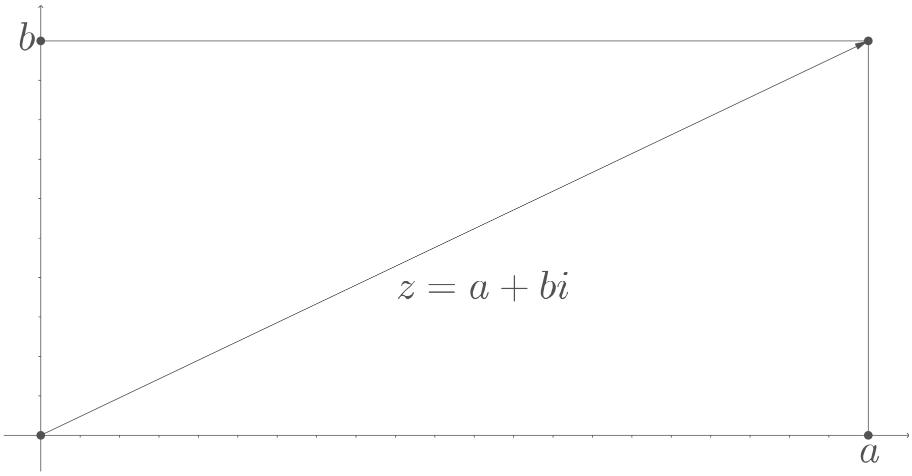
Finalmente por (5) temos que $(-1)(-1) = 1$ concluindo que $x^2 = k^2 > 0$. Ficamos assim num impasse, pois não existe real que seja raíz quadrada de número negativo. Portanto os números complexos são elaborados para cobrir essa impossibilidade dos reais. Façamos assim a definição formal dos números complexos.

Definição 18. *Definimos $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos dotado das operações de adição e multiplicação dos números reais e com as suas mesmas propriedades, mas além disso $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e*

1. *$\exists i \in \mathbb{C}$ tal que $i^2 = -1$*
2. *Todo $z \in \mathbb{C}$ é escrito de maneira única da seguinte forma: $z = a + bi$, com a e b reais. O valor a será chamado de $Re(z)$ (parte real do complexo z) e o valor b será chamado de $Im(z)$ (parte imáginária do complexo z).*

Como consequência da definição podemos fazer uma relação entre o conjunto dos números complexos e o plano cartesiano, onde $z = a + bi$ torna-se o vetor (a, b) com a origem na origem O do sistema de coordenadas e extremidade no ponto (a, b).

Figura 16 – Forma geométrica do número complexo



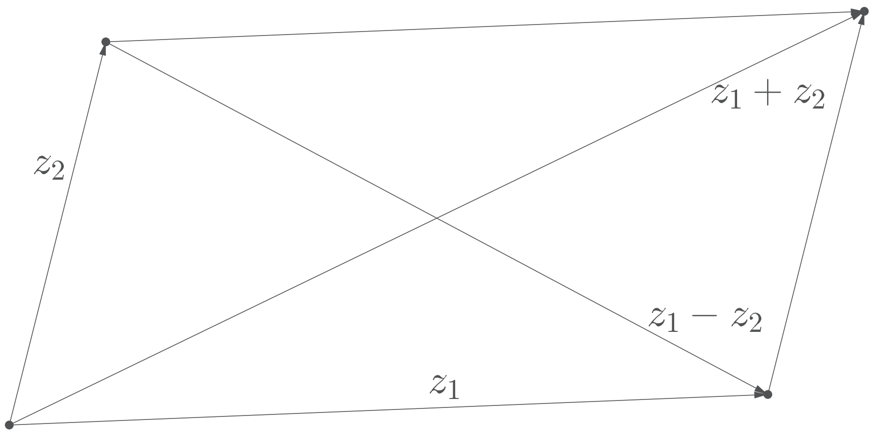
Relembrando as propriedades de (1) a (5) podemos perceber que dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ as operações de soma e produto ficam da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Geometricamente falando, a soma de dois números complexos equivale a soma de dois vetores no plano, cujo vetor soma é a diagonal do paralelogramo gerado pelos vetores z_1 e z_2.

Figura 17 – Soma e subtração de números complexos



Em compensação, a interpretação geométrica da multiplicação só pode ser visualizada com a representação trigonométrica dos números complexos.

Exemplo 41. *Escreva na forma $a+bi$:*

1. $25i^6 + 19i^7 - 8i^{10}$

2. $(2-3i)^5$

3. $(1+2i)^7$

Solução:

1. $25i^6 - 19i^7 - 8i^{10} = 25i^2 - 19i^3 - 8i^2 = -25 + 19i + 8 = \boxed{\text{-17+19i}}$
2. $(2-3i)^5 = 2^5 + 5\cdot 2^4\cdot(-3i) + 10\cdot 2^3\cdot(-3i)^2 + 10\cdot 2^2\cdot(-3i)^3 + 5\cdot 2\cdot(-3i)^4 + (-3i)^5 = 32 - 240i + 720i^2 - 1080i^3 + 810i^4 - 243i^5 = 32 - 240i - 720 + 1080i + 810 - 243i = \boxed{\text{122+597i}}$
3. $(1+2i)^7 = 1^7 + 7\cdot 1^6\cdot(2i) + 21\cdot 1^5(2i)^2 + 35\cdot 1^4\cdot(2i)^3 + 35\cdot 1^3\cdot(2i)^4 + 21\cdot 1^2\cdot(2i)^5 + 7\cdot 1\cdot(2i)^6 + (2i)^7 = 1 + 14i + 84i^2 + 280i^3 + 560i^4 + 672i^5 + 448i^6 + 128i^7 = 1 + 14i - 84 - 280i + 560 + 672ii - 448 - 128i = \boxed{\text{29+278i}}$

Exemplo 42. *Determine a real para que $\frac{2+ai}{1-i}$ seja imaginário puro.*

Para que um número $z = a+bi$ seja imaginário puro é preciso que tenhamos $a = 0$ logo:

$$\frac{2+ai}{1-i} = \frac{2+ai}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+ai+ai^2}{1-i^2} = \frac{2-a}{2} + i\cdot\frac{2+a}{2}$$

assim

$$\frac{2-a}{2} = 0 \Longrightarrow a = 2$$

4.1 Módulos e conjugados de números complexos.

Definição 19. *Seja $z = a+bi$ um número complexo. Definiremos o conjugado $\overline{z} = a-bi$, que geometricamente é simétrico ao número z em relação ao eixo OX.*

Definição 20. *Seja $z = a+bi$ um número complexo. Definiremos o módulo do número z o valor real não negativo $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Geometricamente $|z|$ mede o comprimento do vetor que representa o número complexo z.*

As definições anteriores servem para encontrarmos o inverso multiplicativo de z. Em outras palavras, queremos encontrar o valor de $\frac{1}{z}$ tal que $z\frac{1}{z} = 1$. Trataremos isto no seguinte lema.

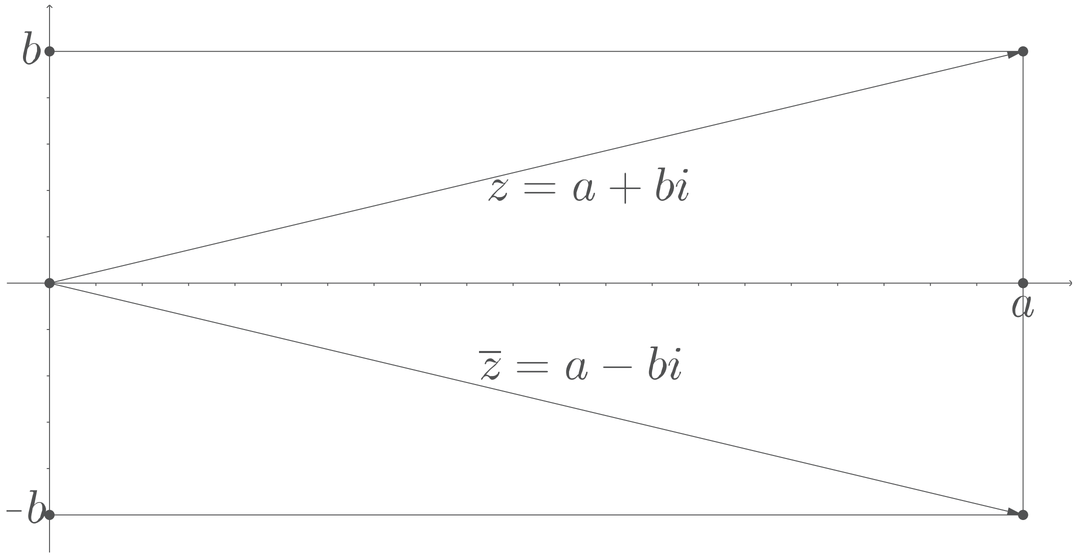
Lema 4. *Seja $z = a+bi$ um complexo qualquer. O seu inverso mutiplicativo $\frac{1}{z}$ será*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Demonstração. Utilizando os dados temos

$$z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{(a+bi)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{a^2+abi-abi-b^2i^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Figura 18 – Conjugado do número complexo



Concluimos assim que $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ como queríamos demonstrar. □

Proposição 4. *Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ números complexos. Então são válidos as seguintes igualdades:*

1. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Demonstração. Para o caso 1 temos que $z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$ logo $\overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (bc + ad)i$. Por outro lado temos

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = ac - (bc + ad)i + bdi^2 = (ac - bd) - (bc + ad)i = \overline{z_1 z_2}$$

Para o caso 2 temos que $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ logo $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i$. Assim

$$\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Como queríamos demonstrar. □

Corolário 2. *Sejam z_1 e z_2 complexos. Então:*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

Demonstração. Para demonstrarmos este corolário encontremos, primeiramente, a relação entre módulo e conjugado. Se $z = a + bi$ então

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Assim temos que $\forall z \in \mathbb{C} \Longrightarrow |z|^2 = z\overline{z}$. Utilizando este resultado e as propriedades anteriores temos que

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

Portanto $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. □

Exemplo 43. *Prove que:*

1. $\overline{z + \overline{z}}$ *é real puro.*
2. *A parte real de* $z - \overline{z}$ *é zero.*

Solução:

1. Seja $z = a + bi$ então $\overline{z} = a - bi$, logo

$$\overline{z + \overline{z}} = \overline{a + bi + a - bi} = \overline{2a} = 2a \Longrightarrow \text{real puro}$$

2. $z - \overline{z} = a + bi - a + bi = bi = 0 + bi$

Exemplo 44. *Prove que* $\forall z \in \mathbb{C} \Longrightarrow Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *e* $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
Prove que:

1. $Re(z) \leq |z|$.
2. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *desigualdade triangular.*
3. $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Solução:

1. Seja $z = a + bi$ com a e b reais e diferentes de 0. Suponhamos por absurdo que $Re(z) > |z|$, assim

$$a > \sqrt{a^2 + b^2} \Longrightarrow a^2 > a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 < 0$$

que é absurdo, logo $Re(z) \leq |z|$.

2. Sabe-se que

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$$

utilizando o resultado anterior temos

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$\Longrightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

3. Da desigualdade triangular temos

$$|z_1| = |z_1 + z_2 + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2| \Longrightarrow |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

por outro lado

$$|z_2| = |z_2 + z_1 + (-z_1)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_1| = |z_1 + z_2| + |z_1| \Longrightarrow |z_1 + z_2| \geq |z_2| - |z_1|$$

portanto

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Exemplo 45. *Prove que se $|z| = |w| = 1$ e $1 + zw \neq 0$ então $\frac{z+w}{1+zw}$ é real.*

Multiplicando numerador e denominador por $1 - \overline{zw}$ e utilizando as hipóteses temos

$$\frac{z+w}{1+zw} = \frac{z+w}{1+zw} \times \frac{1-\overline{zw}}{1-\overline{zw}} = \frac{z+w-|z|^2\overline{w}-\overline{z}|w|^2}{1-\overline{zw}+zw-|zw|^2} = \frac{z-\overline{z}+w-\overline{w}}{zw-\overline{zw}}$$

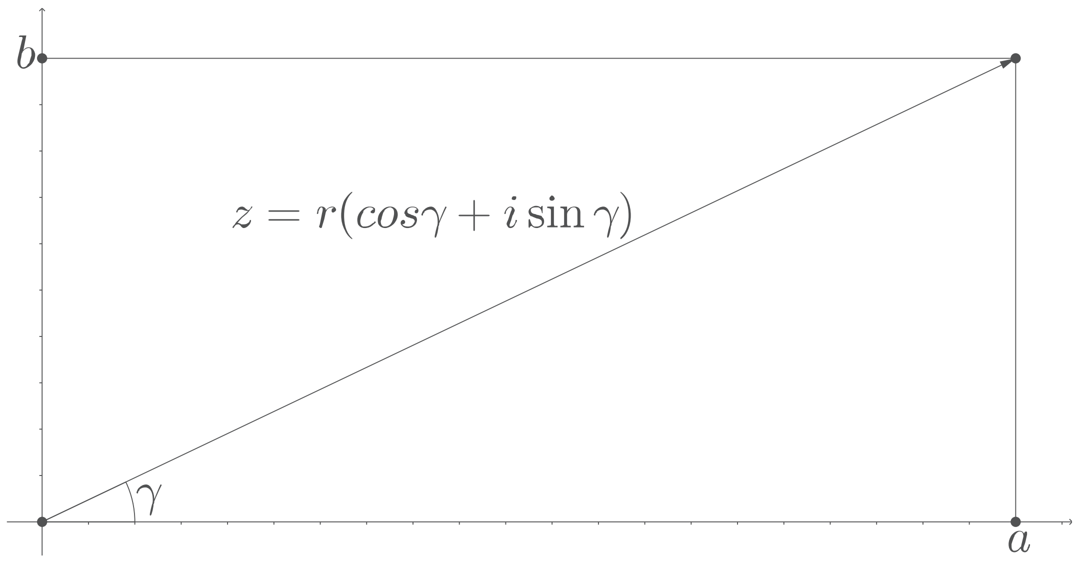
do item 2 do exemplo 41 vemos que um número complexo subtraido do seu conjugado é um imaginário puro, logo façamos $z - \overline{z} = k_1 i$, $w - \overline{w} = k_2 i$, $zw - \overline{zw} = k_3 i$ com $k_j \in \mathbb{R}$. Portanto

$$\frac{z-\overline{z}+w-\overline{w}}{zw-\overline{zw}} = \frac{k_1 i + k_2 i}{k_3 i} = \frac{k_1 + k_2}{k_3} \in \mathbb{R}$$

4.2 Forma trigonométrica dos números complexos.

Como sabemos, existe uma correpondência entre o conjunto dos números complexos e o plano. Assim podemos fazer uma representação geométrica do vetor $\overrightarrow{Oz}$ passando da forma algébrica para a forma trigonométrica explicado abaixo.

Figura 19 – Forma trigonométrica do número complexo



Primeiramente façamos $r = |z|$ e suponhamos $|z| \neq 0$. Designamos por γ o ângulo positivo formado entre a reta $\overline{OX}$ e o vetor $\overrightarrow{Oz}$ o qual chamaremos de argumento do número z. Desse modo teremos

$$\cos\gamma = \frac{a}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{b}{r}$$

Fazendo as mudanças na forma algébrica:

$$z = a + bi \Longrightarrow z = r\cos\gamma + r\operatorname{sen}\gamma i \Longrightarrow z = r(\cos\gamma + i\operatorname{sen}\gamma)$$

Portanto $z = r(\cos\gamma + i\operatorname{sen}\gamma)$ será denominada a forma trigonométrica do número complexo z.

Da trigonometria sabe-se que dado qualquer ângulo os valores do seu seno e do seu cosseno serão iguais cada vez que somarmos ou subtrairmos 2π rad. Podemos assim generalizar a forma anterior

$$\boxed{\text{z=r}(\cos(\gamma + 2k\pi) + i\operatorname{sen}(\gamma + 2k\pi))} \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Com a forma trigonométrica elaborada podemos agora interpretar, geometricamente, o produto de números complexos. Para princípio vamos lembrarmos seguintes dados:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

Agora seja dado um complexo $w_1 = \cos\gamma_1 + i\operatorname{sen}\gamma_1$ de módulo 1. Ao multiplicarmos w_1 por i ficaremos com

$$iw_1 = i(\cos\gamma_1 + i\operatorname{sen}\gamma_1) = -sen\gamma_1 + i\cos\gamma_1 = \cos\left(\gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\gamma_1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Vemos assim que quando multiplicamos um número complexo por i rotacionamos este número em $\frac{\pi}{2}$ rad no sentido positivo.

Tomemos então $w_1 = \cos\gamma_1 + i\operatorname{sen}\gamma_1$ e $w_2 = \cos\gamma_2 + i\operatorname{sen}\gamma_2$ dois vetores unitários. Vemos que

$$w_1w_2 = (\cos\gamma_1 + i\operatorname{sen}\gamma_1)(\cos\gamma_2 + i\operatorname{sen}\gamma_2)$$

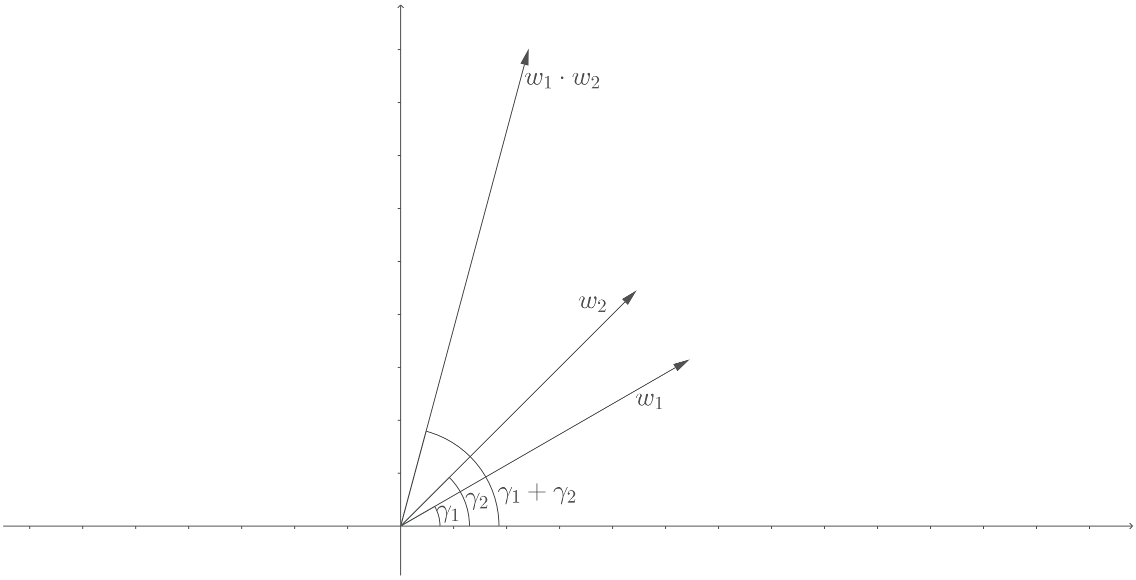
$$w_1w_2 = (\cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \operatorname{sen}\gamma_1\operatorname{sen}\gamma_2) + i\,(\cos\gamma_1\operatorname{sen}\gamma_2 + \operatorname{sen}\gamma_1\cos\gamma_2)$$

$$w_1w_2 = \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + i\operatorname{sen}(\gamma_1 + \gamma_2)$$

Portanto, geometricamente, multiplicar dois números complexos, significa rotacionar, no sentido positivo, um desses números com o ângulo do outro.

Por outro lado se os números z_1 e z_2 não forem unitários então façamos $z_1 =$

Figura 20 – Forma geométrica do produto de números complexos



$r_1 w_1$ e $z_2 = r_2 w_2$. Assim

$$z_1 z_2 = r_1 w_1 r_2 w_2 = r_1 r_2 w_1 w_2$$

ou seja, o produto será, geometricamente parecido com o dos vetores unitários com a diferença que estarão sendo multiplicados pelo número real $r_1 r_2$.

Mostremos agora que as fórmulas de adição da trigonometria também são válidas nos números complexos.

Teorema 3. *Sejam dados dois reais quaisquer x e y. São válidas as seguintes relações:*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

Demonstração. Para $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$ façamos

$$w_1 = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad w_2 = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

como o produto de dois complexos significa rotacionar, no sentido positivo, um desses números com o ângulo do outro então

$$w_1 w_2 = \cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y) = (\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

$$\cos(x+y) + i \operatorname{sen}(x+y) = (\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) + i(\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x).$$

Pela igualdade de números complexos conclui-se que

$$\boxed{\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}$$

Para $x > 2\pi$ e $y > 2\pi$ existirão inteiros k_1 e k_2, reais x_0 e y_0 tais que $x = x_0 + 2k_1\pi$ e $y = y_0 + 2k_1\pi$. Assim $\cos x = \cos x_0$, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$, $cosy = \cos y_0$ e $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y_0$. Utilizando os resultados anteriores temos

$$\cos(x+y) = \cos(x_0 + y_0 + 2(k_1 + k_2)\pi) = \cos(x_0 + y_0) = \cos x_0 \cos y_0 - \operatorname{sen} x_0 \operatorname{sen} y_0$$

$$\Longrightarrow \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x_0 + y_0 + 2(k_1 + k_2)\pi) = \operatorname{sen}(x_0 + y_0) = \operatorname{sen} x_0 \cos y_0 + \operatorname{sen} y_0 \cos x_0$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

□

Uma consequência muito importante da notação trigonométrica é a sua utilização para calcular potências e raízes de números complexos pela fórmula de Moivre.

Proposição 5. *Seja $z = r(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ um complexo escrito na forma trigonométrica. A potência n-ésima z^n de z com n inteiro será*

$$\boxed{z^n = r^n[\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)]}$$

em outras palavras

$$\boxed{(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)}$$

Demonstração. Faremos a prova por indução em n. Primeiro faremos para $n = 0$, num segundo passo faremos para $n > 0$ e num terceiro passo para $n < 0$.

Para $n = 0$ temos $z^0 = 1$ por convenção. Por outro lado

$$r^0(\cos 0x + i \operatorname{sen} 0x) = \cos 0 = 1$$

neste caso a relação fica válida para $n = 0$.

Seja $n > 0$. Provemos que vale para $n = 1$.

$$z^1 = [r(\cos x + i \operatorname{sen} x)]^1 = r^1(\cos x + i \operatorname{sen} x)^1 = r^1(\cos 1x + i \operatorname{sen} 1x).$$

Suponhamos que a relação seja válida para $n = k$ e provemos que também será válida para $n = k + 1$.

$$z^{k+1} = zz^k = r(\cos x + i \operatorname{sen} x)r^k(\cos(kx) + i \operatorname{sen}(kx))$$

$$z^{k+1} = r^{k+1}[\cos x \cos(kx) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(kx) + i(\operatorname{sen} x \cos(kx) + \operatorname{sen}(kx)\cos x)]$$

$$\Longrightarrow z^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k+1)x + i \operatorname{sen}(k+1)x]$$

Seja $n < 0$. Façamos $n = -m$, com $m > 0$. Logo $z^n = z^{-m} = (z^{-1})^m$. Calculando o valor de z^{-1} temos:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{r(\cos x - i \operatorname{sen} x)}{r^2} = \frac{\cos x - i \operatorname{sen} x}{r}$$

sabendo que $\cos x = \cos(-x)$ e que $-\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x)$ teremos que

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x)).$$

Concluindo o cálculo anterior temos que

$$z^{-m} = r^{-m}(\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x))^m = r^{-m}(\cos(-mx) + i \operatorname{sen}(-mx))$$

como $n = -m$ concluimos que $z^n = r^n[\cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)]$. O que torna válida a relação para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Generalizando a equação anterior podemos escrever

$$\boxed{\mathrm{z}^n = r^n[\cos n(x + 2k\pi) + i \operatorname{sen} n(x + 2k\pi)]}$$

Corolário 4. *Seja $z = r(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ um complexo escrito na forma trigonométrica. A raíz n-ésima $\sqrt[n]{z}$ de z com $n \geq 2$ e inteiro será*

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\tfrac{x}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{x}{n}\right)\right]}$$

Demonstração. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)\right]$. Basta mostrar que $z_0^n = z$, assim ficará demonstrado o corolário.

$$z_0^n = \sqrt[n]{r}^n\left[\cos\left(\frac{x}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n = r\left[\cos\left(\frac{x}{n} \cdot n\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n} \cdot n\right)\right]$$

$$\Longrightarrow {z_0}^n = r(\cos x + i \operatorname{sen} x) = z.$$

□

Podemos generalizar a equação anterior:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{x + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{x + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

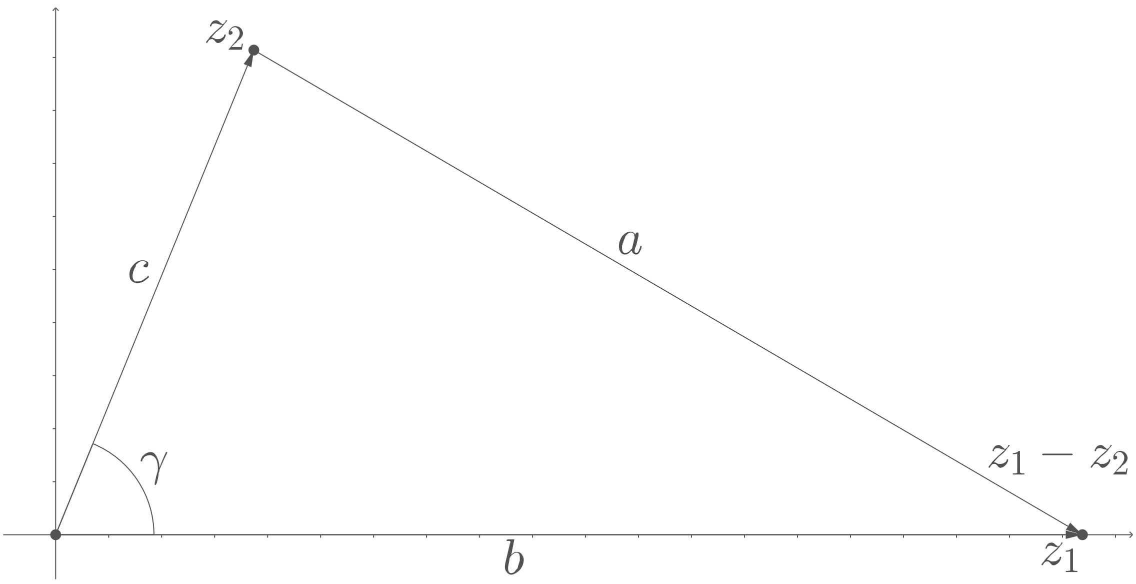
Para encerrar nossos estudos sobre números complexos vamos obter a lei do cosseno utilizando-os na forma trigonométrica.

Proposição 6. *Seja ABC um triângulo qualquer, com lados a, b, c. Então a seguinte relação é válida:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

sendo válida também para os lados b e c.

Demonstração. Sejam dados z_1 e z_2 complexos quaisquer. Sem perca de generalidade suponhamos que z_1 seja real, $z_1 = r_1$ e $z_2 = r_2(\cos\lambda + i\,\mathrm{sen}\,\lambda)$.



Fazendo a representação gráfica deles percebemos que $|z_1 - z_2|^2 = a^2$. Por outro lado

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})$$

Como $z_1\overline{z_2} = r_1r_2(\cos\lambda - i\,\mathrm{sen}\,\lambda)$ e $z_2\overline{z_1} = r_1r_2(\cos\lambda + i\,\mathrm{sen}\,\lambda)$ então $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2r_1r_2\cos\lambda$. Portanto

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2r_1r_2\cos\lambda \Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Como queríamos demonstrar. □

Exemplo 46. *Mostre que se $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, então $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$.*

Sabe-se da trigonometria que: $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\mathrm{sen}(-\theta) = -\,\mathrm{sen}\,\theta$, logo se $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ então

$$r(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)) = r(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \overline{z}$$

Exemplo 47. *Resolva a equação $\cos 3x + \mathrm{sen}\,3x = \cos x + \mathrm{sen}\,x$.*

Pela fórmula de Moivre temos:

$$\cos 3x + i\,\mathrm{sen}\,3x = (\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)^3 = (\cos^3 x - 3\cos x\,\mathrm{sen}^2 x) + i(3\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}^3 x)$$

pela igualdade de números complexos temos

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 3x = 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$$

assim

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$$

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x) + 3\operatorname{sen} x \cos x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = (\cos x + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x \cos x) + 3\operatorname{sen} x \cos x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \operatorname{sen} x - (\cos x + \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x \cos x) + 3\operatorname{sen} x \cos x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x \cos x(\cos x - 2\operatorname{sen} x)$$

portanto

$$\cos 3x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \operatorname{sen} x \Longrightarrow 2\operatorname{sen} x \cos x(\cos x - 2\operatorname{sen} x) = 0.$$

Se $\operatorname{sen} x = 0$ então

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$$

Se $\cos x = 0$ então

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\pi + 2k\pi$$

Se $\cos x - 2\operatorname{sen} x = 0$ então $2\operatorname{sen} x - \cos x = 0$. Dividiremos a equação por $t = \sqrt{5}$:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen} x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = 0 \Longrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos x = 0$$

seja α um ângulo tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ assim teremos

$$\cos\alpha \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\alpha \cos x = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}(x - \alpha) = 0$$

assim

$$x = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

onde α é tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Exemplo 48. *Resolva as equações:*

1. $z^4 = -16$

2. $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

Solução:

1. Seja $z_0 = -16 + 0i$. Temos que $r = |z_0| = 16$ então

$$\cos\gamma = -1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\gamma = 0 \Longrightarrow \gamma = (\pi + 2k\pi)rad$$

assim

$$z_0 = 4(\cos(\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi))$$

logo se $z^4 = -16$ então $z^4 = 4(\cos(\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi))$ portanto

$$z = \sqrt[4]{4(\cos(\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi))}$$

$$\Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)\right).$$

Para $k = 0$ temos

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Longrightarrow \boxed{\text{z=1+i}}.$$

Para $k = 1$ temos

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Longrightarrow \boxed{\text{z=-1+i}}.$$

Para $k = 2$ temos

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Longrightarrow \boxed{\text{z=-1-i}}.$$

Para $k = 3$ temos

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right) \Longrightarrow z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \Longrightarrow \boxed{\text{z=1-i}}.$$

a partir disto os valores de z serão repetidos, assim estes serão os únicos valores que satisfazem $z^4 = -16$.

2. Façamos $z^3 = x$ então

$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0 \Longrightarrow x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-7 \pm 9}{2}$$

$$\Longrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -8.$$

Para $z^3 = 1$ temos:

$$z_0 = 1 \Longrightarrow z_0 = 1 + 0i \Longrightarrow z_0 = (\cos(2\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi + 2k\pi))$$

assim

$$z^3 = 1 \Longrightarrow z^3 = (\cos(2\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(2\pi + 2k\pi))$$

$$\Longrightarrow z = \cos\left(\frac{2\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi + 2k\pi}{3}\right).$$

Se $k = 0$ então

$$z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Se $k = 1$ então

$$z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} \Longrightarrow z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Se $k = 2$ então

$$z = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\,2\pi \Longrightarrow z = 1.$$

a partir disto os valores de z serão repetidos, assim estes serão os únicos valores que satisfazem $z^3 = 1$.

Para $z^3 = -8$ façamos $z_0 = -8 + 0i$. Assim $r = |z_0| = 8$, então

$$\cos\gamma = -1 \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\gamma = 0 \Longrightarrow \gamma = (\pi + 2k\pi)rad$$

$$\Longrightarrow z_0 = 8(\cos(\pi + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi + 2k\pi))$$

logo se $z^3 = -8$ então $z^3 = 8(\cos(\pi + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi + 2k\pi))$ portanto

$$z = \sqrt[3]{8(\cos(\pi + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi + 2k\pi))}$$

$$\Longrightarrow z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)\right).$$

Para $k = 0$ temos

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Longrightarrow \boxed{\text{z=1+}\sqrt{3}i}.$$

Para $k = 1$ temos

$$z = 2(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) \Longrightarrow z = 2(-1 + 0i) \Longrightarrow \boxed{\text{z=-2}}.$$

Para $k = 2$ temos

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) \Longrightarrow z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Longrightarrow \boxed{\text{z=1-}\sqrt{3}i}.$$

a partir disto os valores de z serão repetidos, assim estes serão os únicos valores que satisfazem $z^3 = -8$.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Moreira. **Geometria Euclidiana Plana.** Sociedade Brasileira de Matemática. 1985.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria e Números Complexos.** SBM. 2005

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. IMPA/VITAE. 1991.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.** IMPA/VITAE. 1991.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cézar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio – volume 2.** SBM. 2006.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cézar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A matemática do Ensino Médio – volume 3.** SBM. 2006.

MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana.** SBM. 2012.

APÊNDICE A – POTÊNCIAS DO NÚMERO (i)

Fazendo $i^2 = -1$ temos que:

$$i^0 = \frac{i^2}{i^2} = \frac{-1}{-1} = 1 \boxed{\mathrm{i}^0 = 1}$$

$$i^1 = \frac{i^2}{i^1} \Longrightarrow \left(i^1\right)^2 = i^2 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{i}^1 = i}$$

$$i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i \Longrightarrow \boxed{\mathrm{i}^3 = -i}$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{i}^4 = 1}$$

$$i^5 = i^3 \cdot i^2 = (-i) \cdot (-1) = i \Longrightarrow \boxed{\mathrm{i}^5 = i}$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{i}^6 = -1}$$

$$i^7 = i^3 \cdot i^4 = (-i) \cdot 1 = -i \Longrightarrow \boxed{\mathrm{i}^7 = -i}$$

$$\vdots$$

Vemos assim que as potências do número i são repetidas a cada grupo de 4 elemantos. Mostraremos isto no lema abaixo.

Lema 5. *Seja i^n com $n \in \mathbb{N}$ uma potência de i. As seguintes afirmações são válidas:*

- *Se $n \equiv 0(mod4)$ então $i^n = 1$.*
- *Se $n \equiv 1(mod4)$ então $i^n = i$.*
- *Se $n \equiv 2(mod4)$ então $i^n = -1$.*
- *Se $n \equiv 3(mod4)$ então $i^n = -i$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em n. Primeiramente, para casos bases $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ a prova está feita nas observações anteriores. Como hipótese geral, suponhamos que exista k natural tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que para $1 \leq n \leq k$

as relações anteriores são válidas. Provemos que para $n = k + 1$ as relações também serão verdadeiras. Suponhamos então que $k + 1 \equiv 0(mod 4)$ e mostremos que $i^{k+1} = 1$:

$$k + 1 \equiv 0(mod4) \Longrightarrow 4 \setminus (k + 1) \Longrightarrow k + 1 = 4p$$

sendo $p \leq k$. Utilizando a hipótese geral temos

$$i^{k+1} = i^{4p} = (i^p)^4 = 1^4 = 1.$$

Suponhamos que $k + 1 \equiv 1(mod4)$ e mostremos que $i^{k+1} = i$:

$$k + 1 \equiv 1(mod4) \Longrightarrow 4 \setminus k \Longrightarrow k = 4p \Longrightarrow k \equiv 0(mod4)$$

utilizando o resultado anterior temos que $i^k = 1$ logo:

$$i^{k+1} = i^k \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$$

Suponhamos que $k + 1 \equiv 2(mod4)$ e mostremos que $i^{k+1} = -1$:

$$k + 1 \equiv 2(mod4) \Longrightarrow 4 \setminus (k - 1) \Longrightarrow k - 1 = 4p \Longrightarrow k \equiv 1(mod4)$$

utilizando o resultado anterior temos que $i^k = i$ logo:

$$i^{k+1} = i^k \cdot i^1 = i \cdot i = i^2 = -1$$

Suponhamos que $k + 1 \equiv 3(mod4)$ e mostremos que $i^{k+1} = -i$:

$$k + 1 \equiv 3(mod4) \Longrightarrow 4 \setminus (k - 2) \Longrightarrow k - 2 = 4p \Longrightarrow k \equiv 2(mod4)$$

utilizando o resultado anterior temos que $i^k = -1$ logo:

$$i^{k+1} = i^k \cdot i^1 = (-1) \cdot i = -i$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

ANEXO A – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE $1°$ a $24°$.

Tabela 1 – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE 1° a 24°.

Ângulo (α)	sen α	cos α	tan α
1°	0,017452	0,999848	0,017455
2°	0,034899	0,999391	0,034921
3°	0,052336	0,99863	0,052408
4°	0,069756	0,997564	0,069927
5°	0,087156	0,996195	0,087489
6°	0,104528	0,994522	0,105104
7°	0,121869	0,992546	0,122785
8°	0,139173	0,990268	0,140541
9°	0,156434	0,987688	0,158384
10°	0,173648	0,984808	0,176327
11°	0,190809	0,981627	0,19438
12°	0,207912	0,978148	0,212557
13°	0,224951	0,97437	0,230868
14°	0,241922	0,970296	0,249328
15°	0,258819	0,965926	0,267949
16°	0,275637	0,961262	0,286745
17°	0,292372	0,956305	0,305731
18°	0,309017	0,951057	0,32492
19°	0,325568	0,945519	0,344328
20°	0,34202	0,939693	0,36397
21°	0,358368	0,93358	0,383864
22°	0,374607	0,927184	0,404026
23°	0,390731	0,920505	0,424475
24°	0,406737	0,913545	0,445229

ANEXO B – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE 25° a 48°.

Tabela 2 – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE 25° a 48°.

Ângulo (α)	$\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
25°	0,422618	0,906308	0,466308
26°	0,438371	0,898794	0,487733
27°	0,45399	0,891007	0,509525
28°	0,469472	0,882948	0,531709
29°	0,48481	0,87462	0,554309
30°	0,5	0,866025	0,57735
31°	0,515038	0,857167	0,600861
32°	0,529919	0,848048	0,624869
33°	0,544639	0,838671	0,649408
34°	0,559193	0,829038	0,674509
35°	0,573576	0,819152	0,700208
36°	0,587785	0,809017	0,726543
37°	0,601815	0,798636	0,753554
38°	0,615661	0,788011	0,781286
39°	0,62932	0,777146	0,809784
40°	0,642788	0,766044	0,8391
41°	0,656059	0,75471	0,869287
42°	0,669131	0,743145	0,900404
43°	0,681998	0,731354	0,932515
44°	0,694658	0,71934	0,965689
45°	0,707107	0,707107	1
46°	0,71934	0,694658	1,03553
47°	0,731354	0,681998	1,072369
48°	0,743145	0,669131	1,110613

ANEXO C – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE 49° a 72°.

Tabela 3 – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE 49° a 72°.

Ângulo (α)	$\text{sen}\,\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
49°	0,75471	0,656059	1,150368
50°	0,766044	0,642788	1,191754
51°	0,777146	0,62932	1,234897
52°	0,788011	0,615661	1,279942
53°	0,798636	0,601815	1,327045
54°	0,809017	0,587785	1,376382
55°	0,819152	0,573576	1,428148
56°	0,829038	0,559193	1,482561
57°	0,838671	0,544639	1,539865
58°	0,848048	0,529919	1,600335
59°	0,857167	0,515038	1,664279
60°	0,866025	0,5	1,732051
61°	0,87462	0,48481	1,804048
62°	0,882948	0,469472	1,880726
63°	0,891007	0,45399	1,962611
64°	0,898794	0,438371	2,050304
65°	0,906308	0,422618	2,144507
66°	0,913545	0,406737	2,246037
67°	0,920505	0,390731	2,355852
68°	0,927184	0,374607	2,475087
69°	0,93358	0,358368	2,605089
70°	0,939693	0,34202	2,747477
71°	0,945519	0,325568	2,904211
72°	0,951057	0,309017	3,077684

ANEXO D – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE 73° a 90°.

Tabela 4 – TABELA TRIGONOMÉTRICA DE 73° a 90°.

Ângulo (α)	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
73°	0,956305	0,292372	3,270853
74°	0,961262	0,275637	3,487414
75°	0,965926	0,258819	3,732051
76°	0,970296	0,241922	4,010781
77°	0,97437	0,224951	4,331476
78°	0,978148	0,207912	4,70463
79°	0,981627	0,190809	5,144554
80°	0,984808	0,173648	5,671282
81°	0,987688	0,156434	6,313752
82°	0,990268	0,139173	7,11537
83°	0,992546	0,121869	8,144346
84°	0,994522	0,104528	9,514364
85°	0,996195	0,087156	11,43005
86°	0,997564	0,069756	14,30067
87°	0,99863	0,052336	19,08114
88°	0,999391	0,034899	28,63625
89°	0,999848	0,017452	57,28996
90°	1	0	-