UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Gelso da Silveira Medeiros Júnior

O ensino de funções na Educação Básica, dialogando com o professor: uma proposta de abordagem.

Rio de Janeiro
2015

Gelso da Silveira Medeiros Júnior

O ensino de funções na Educação Básica, dialogando com o professor: uma proposta de abordagem.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientadores:

Gladson Octaviano Antunes – DME/UNIRIO
Doutor em Matemática – IM/UFRJ

Ronaldo da Silva Busse – DME/UNIRIO
Doutor em Matemática – IM/UFRJ

Rio de Janeiro
2015

Gelso da Silveira Medeiros Júnior

O ensino de funções na Educação Básica, dialogando com o professor: uma proposta de abordagem.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em /06 /2015

BANCA EXAMINADORA

____
Gladson Octaviano Antunes -DME /UNIRIO
Doutor em Matemática – IM/ UFRJ

____
Ronaldo da Silva Busse- DME/UNIRIO
Doutor em Matemática – IM/UFRJ

____
Michel Cambrainha de Paula - DME/UNIRIO
Doutor em Matemática - IMPA

____
Rosana de Oliveira - EDU/UERJ
Doutora em Educação - UERJ

Rio de Janeiro
2015

A minha querida esposa Eliane e minha
amada filha Júlia, pela paciência
e compreensão durante esses anos.

"As leis da natureza nada mais são do que pensamentos matemáticos de Deus"

Johannes Kepler

AGRADECIMENTOS

A Deus que me deu força, sabedoria e paciência durante esta caminhada.

À minha esposa, Eliane, que de forma singular e carinhosa, sempre me compreendeu e deu todo apoio nos momentos mais difíceis.

À minha filha Júlia que ilumina minha vida.

Aos meus pais pelos seus ensinamentos e por acreditarem em mim.

Aos meus orientadores Professores Ronaldo Busse e Gladson Antunes pela atenção, disponibilidade e interesse confiados a mim e a Professora Mônica. Obrigado por todo aprendizado que tivemos com vocês durante este período.

A todos os professores do PROFMAT – UNIRIO pela dedicação e ricas contribuições em nosso aprendizado.

A todos os meus colegas pelos momentos de aprendizagem que tivemos.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal, discutir e apresentar sugestões sobre o conceito função, à professores da Educação Básica.
Inicialmente, trouxemos uma reflexão sobre o aprendizado de funções desde os cursos de licenciatura até as práticas em sala de aula.
Em seguida, apresentamos uma pesquisa feita junto a professores que trabalham com o conceito e fizemos uma breve análise da bibliografia apresentada.
Na apresentação do conceito, cada conteúdo foi abordado a partir de uma motivação inicial, que foi explorado durante o capítulo nas definições e sugestões de atividades propostas.

Palavras-chave: conceito função, educação básica, reflexão das práticas docentes.

ABSTRACT

This work aims to discuss and present suggestions for the concept function to the teachers of Basic Education level.

Initially, we brought reflection on learning functions from the degree courses to the practices in the classroom.

Then, we present a survey with teachers who work with the concept and a brief analysis of the presented bibliography.

In the presentation of the concept, we approached each content from an initial motivation, which we explored during the chapter on definitions and suggestions for proposed activities.

Keywords: function concept, basic education level, reflection of teaching practices.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Referências

Apêndice

Anexo

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal, desenvolver um material sobre o conceito função, tendo como público alvo professores da Educação Básica. O material apresenta definições, exemplos e propostas de atividades acompanhadas de suas resoluções detalhadas.

A motivação para o desenvolvimento deste trabalho está baseada, por um lado pela ausência de material dedicado especialmente ao professor, bem como pela importância deste conceito para a Matemática e outras ciências.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática.
> (BRASIL, 2006, p.121)

O trabalho, realizado em parceria com a professora Mônica, será apresentado em cinco capítulos mais apêndice, onde disponibilizaremos as resoluções detalhadas das atividades propostas. Nesta introdução visitaremos brevemente cada capítulo com o objetivo de proporcionar ao leitor uma rápida ideia da leitura que se inicia.

No capítulo 2, dividido em duas seções, desenvolveremos um panorama sobre a relação Professor X Função e também uma breve análise bibliográfica.

Na primeira seção apresentaremos um cenário da educação matemática no Brasil a partir dos resultados de exames internacionais, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos – PISA, além de uma reflexão sobre as práticas adotadas nos cursos de licenciatura. Ainda neste momento, apresentaremos uma revisão histórica das principais mudanças sofridas pelo conceito de função ao longo dos últimos séculos. Recorremos aos estudos de Even (1998), Rossini (2006), Thees (2009), Zuffi (1999, 2003) e Pacca (2002) para entender melhor a visão do professor sobre esse conceito, bem como suas próprias dificuldades na apropriação deste objeto matemático.

Apresentaremos o resultado de uma pesquisa realizada junto a 20 professores da Educação Básica que trabalham diretamente com o conceito para conhecer algumas das dificuldades enfrentadas em sala de aula, por estes professores no seu dia a dia.

Na segunda seção do capítulo 2, desenvolveremos a análise de um caderno pedagógico e cinco livros. O caderno pedagógico é adotado no 9º ano das escolas municipais da cidade do Rio de Janeiro, dois livros, "Matemática" e "Matemática e Realidade", são adotados por escolas particulares, também no 9º ano do Ensino Fundamental. As outras três obras, "Matemática ciência e aplicações", "Matemática Contexto & Aplicações" e "Matemática – Uma nova abordagem" são adotadas por escolas na 1º e 2º séries do Ensino Médio.

Ao desenvolver esta análise, tínhamos como objetivo principal, verificar não só como o conceito função vem sendo apresentado, como também, o destaque dado ao conteúdo em cada uma destas obras, além de observar a abordagem adotada em exemplos e exercícios propostos ao longo da obra.

O terceiro capítulo será dividido em quatro seções. Ao longo do capítulo, apresentaremos conteúdos relacionados ao conceito função. Cada conteúdo apresentado será desenvolvido a partir de uma motivação seguido de suas definições, exemplos e propostas de atividades. Na primeira seção apresentaremos Relação e Função: Domínio, Contradomínio, Imagem, Zeros e Gráfico. Na segunda seção abordaremos Injetividade, Sobrejetividade, Bijeção e Função Inversa. Na terceira seção apresentaremos as Operações com Funções, na quarta e última seção, Função Crescente, Decrescente, Par, Ímpar e Periódica.

Para o quarto capítulo, escolheremos duas funções abordadas na Educação Básica: Funções Polinomiais e Funções Trigonométricas. Neste capítulo, apresentaremos as principais características de cada uma destas funções, destacaremos suas principais definições e também ofereceremos propostas de atividades. O trabalho da professora Mônica complementa esta etapa abordando as Funções Exponenciais, Funções Logarítmicas e Funções Modulares.

No quinto capítulo apresentaremos nossas considerações finais, ressaltaremos algumas conclusões e possíveis contribuições.

O trabalho é encerrado com o Apêndice, onde disponibilizaremos as resoluções detalhadas de todas as atividades propostas ao longo dos dois capítulos teóricos.

Capítulo 2

2.1 A Relação Professor X Função

Neste capítulo iremos abordar a relação do Professor de Matemática da Educação Básica com o conceito Função, aplicado no último ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Antes, porém, apresentaremos um breve panorama sobre a situação da educação matemática no Brasil, bem como as principais mudanças sofridas por este conceito ao longo dos últimos séculos da história.

O Programa Internacional de Avaliação de Alunos - PISA, é uma avaliação internacional que busca medir o conhecimento e a habilidade em leitura, Matemática e Ciências de estudantes de 15 anos de idade, tanto de países membro da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico - OCDE, como de países parceiros como Brasil, Argentina, Qatar, Peru e China, num total de 65 países participantes.

A avaliação já foi aplicada nos anos de 2000, 2003, 2006, 2009 e 2012. Na última avaliação, apresentamos pequena melhora em Matemática, mas insuficiente para mudar nossa posição no ranking, que é a 58ª posição. Segundo o relatório da OCDE, a inclusão na avaliação de alunos da rede pública, pode ter influenciado negativamente o desempenho dos nossos estudantes, visto que o país ainda sofre com a defasagem idade-série, diferença de dois ou mais anos entre a idade do aluno e a idade prevista para a série. A última avaliação constatou que um grande percentual de alunos brasileiros não é capaz de interpretar percentuais, frações ou gráficos.

Apesar dos péssimos resultados no PISA, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs destacam a importância da Matemática na formação de cidadãos críticos diante das questões sociais, com agilidade de raciocínio e estruturação do pensamento, capazes de serem inseridos no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. Ainda conforme os PCNs (BRASIL, 1998):

> Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e

> imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos.
> (BRASIL,1998, p.36)

Mas, hoje no Brasil, o professor da Matemática da Educação Básica está preparado para desempenhar este papel mediador? O processo de formação deste profissional é de fato eficiente? Qual a real situação dos cursos de licenciatura em Matemática?

A falta de boas condições de trabalho e de políticas educacionais efetivas faz com que a procura pelos cursos de licenciatura em Matemática seja cada vez menor, além disso, algumas avaliações institucionais demonstram que mesmo no Ensino Superior, existem dificuldades na aquisição do conhecimento matemático. As falhas nos cursos de licenciatura são grandes e uma reflexão sobre as práticas adotadas, se faz necessária, uma vez que a matemática tem se apresentado como uma disciplina difícil de ensinar e de aprender.

Alguns conteúdos da Educação Básica que deveriam ser formalmente definidos e refinados não são abordados e revistos na graduação pelo simples fato de já terem sido estudados e aprendidos nas aulas do ensino básico ou ainda, por serem considerados muito fáceis para o nível superior. Sendo assim, muitos professores transformam procedimentos e algoritmos em receitas de bolo, lecionando mais com as experiências herdadas da educação básica do que com o conhecimento adquirido durante a graduação.

Pesquisas realizadas com estudantes no estágio final do curso licenciatura mostram importantes lacunas com relação ao tema central deste estudo, o conceito funções, objeto de grande importância para a Matemática e para outros campos do conhecimento.

Zuffi (1999,2003) e Thees (2009) sugerem que as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Análise Real e mesmo Álgebra Linear, estudadas na graduação, não têm desempenhado seu papel de maneira eficiente na formação destes profissionais. Zuffi (2004, p.2) completa:

> Pareceu-nos, então, que a preparação de nossos professores para o Ensino Médio, nos cursos de Licenciatura, não tem alcançado sobre eles um a reflexão suficiente sobre os aspectos semânticos e socioculturais envolvidos na elaboração da linguagem matemática. E temos, então, dois fatos articulados: por um lado, uma linguagem utilizada por esses professores, para os alunos, que reforça o empobrecimento dos seus próprios conceitos e, por outro lado, a sua

> formação falha, no que diz respeito ao aprofundamento dos aspectos conceituais.
> (ZUFFI, 2004, p.2)

Ao longo da história, a Matemática recebeu inúmeras contribuições e assim, o conceito função também sofreu várias transformações. Sempre foi de grande interesse para matemáticos e outros estudiosos analisar a variação entre grandezas e assim, com o objetivo de explicar fenômenos da Astronomia, as primeiras motivações para a origem deste conceito surgem com os gregos. No entanto, é a partir do desenvolvimento da Álgebra, que o estudo das variações é impulsionado.

Durante o século XVII, coincidentemente, Fermat (1601 – 1665) e Descartes (1596 – 1650),de modo independente, anunciam, respectivamente, *Introduction des lieux plans et solides* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos) e *Discurso do Método*, onde ambos, lidam de modo semelhante com problemas de lugares geométricos a partir de métodos algébricos. O interesse sobre tipos variados de curvas e o uso da Álgebra em problemas geométricos envolvendo o tratamento de equações indeterminadas era comum aos dois trabalhos. Os métodos analíticos de Fermat e Descartes serviram de motivação para o estudo das propriedades aritméticas das séries infinitas, do cálculo da tangente de uma curva, bem como sua retificação e influenciaram fortemente os estudos de Newton (1642 – 1727) e Leibniz (1646 – 1716). A novidade introduzida por estes dois matemáticos está relacionada ao grau de generalidade e unidade que os métodos infinitesimais obtiveram com seus trabalhos e é neste momento que surgem esboços do conceito de funções.

A definição formal de função surge no século XVIII a partir da discussão sobre a legitimidade dos métodos infinitesimais que tratados como objeto central do cálculo acabam por mudar o pensamento matemático da época. Durante o século XVIII, Jean Bernoulli (1667 - 1748), Leonhard Euler (1707 - 1783) e J.L.Lagrange (1736 - 1813) apresentam definições nas quais a função é expressa por uma equação ou expressão analítica, enfatizando o caráter algébrico deste conceito.

Em *Introductio in analysin infinitorum*(Introdução à análise infinita), Euler define: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes.” (ROQUE, 2014, p.374) e apresenta o conceito como noção central da matemática.

No século XIX o conceito recupera seu caráter geométrico com G.L.Dirichlet (1805-1859) que apresenta em 1837 a seguinte versão:

> Suponhamos que ***a*** e ***b*** sejam dois valores diferentes definidos e ***x*** seja uma variável que pode assumir, gradualmente, todos os valores localizados entre ***a*** e ***b***. Agora, se para cada x corresponde um único, finito y de tal forma que, se ***x*** atravessa continuamente o intervalo de ***a*** a ***b***, ***y =f(x)*** varia da mesma forma gradualmente, então ***y*** é chamado um função contínua de ***x*** para este intervalo. Não é, em absoluto, necessário que ***y*** dependa de ***x*** no intervalo todo de acordo com a mesma lei; de fato, não é em absoluto necessário pensar somente em relações que possam ser expressas por operações matemáticas. Geometricamente representadas, isto é, ***x*** e ***y*** imaginados como abscissa e ordenada, uma função contínua aparece como uma curva conexa, para a qual somente um ponto corresponde a cada abscissa entre ***a*** e ***b***.
> (BISPO, 2008, p.7)

É, porém no século XX, que um grupo de matemáticos franceses de pseudônimo "Bourbaki" populariza a visão modernista da matemática. Bourbaki, baseado nas noções de conjunto e estrutura associadas aos estudos do mais importante matemático alemão da Universidade de Göttingen na virada do século XIX, David Hilbert (1862 – 1943), aplica ao conceito de função um saber axiomático.

Com os*Éléments des mathématiques: les structures fondamentales de l´analyse* (Elementos de matemática: as estruturas fundamentais da análise) Bourbaki pretendia reformular toda a matemática, nesta obra, o grupo defende a aplicação de uma unidade matemática, vista como uma hierarquia de estruturas organizadas pelo método axiomático.Em *Le calcul fonctionnel,* Jaques Hadamard (1865 – 1963) descreve a grande mudança do pensamento matemático do século XX: "O ser matemático, em uma palavra, deixou de ser o número: passou a ser a lei de variação, a função. A Matemática não apenas foi enriquecida por novos métodos; foi transformada em seu objeto."(ROQUE, 2012, p. 344).

No Brasil, com o movimento da matemática moderna, os educadores, contaminados pelas ideias de Bourbaki, defendiam a crença de que esta disciplina deveria ser ensinada como um saber unificado e imutável. É de origem bourbakista a definição formal de função que aplicamos até hoje na escola:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável x de E e um elemento variável y de F é dita uma relação funcional se, para todo x pertencente a E, existe um único y pertencente a F que possui a relação dada com x. Damos o nome de função à operação que associa, desse modo, a todo elemento x pertencente a E, o elemento y pertencente a F que possui a relação dada com x; y será dito o valor da função no elemento x.
> (ROQUE, 2012, p.474)

Mas, qual a ideia que queremos construir em nossos alunos sobre o conceito função? A ideia estática que associa este conceito a um conjunto de pares ordenados, ou a ideia dinâmica presente nas situações físicas?Como este conceito vem sendo verdadeiramente construído em sala de aula?

Como já vimos anteriormente, diversos autores mostram através de suas pesquisas algumas lacunas na formação dos professores de Matemática com respeito ao conceito de funções. Even (1998) observa o fato de que os professores investigados não abordavam, em suas aulas de funções, a relação existente entre o diagrama de flechas, a tabela, a expressão algébrica e o gráfico, assim como não conheciam as limitações de cada uma dessas representações.

Rossini (2006) destaca a predominância da característica estática e algébrica utilizada pelos professores participantes do seu estudo ao definirem e interpretarem este conceito. Em depoimento, alguns professores confessaram não desenvolver em sala de aula a noção de variação da função pelo fato de não se sentirem seguros em tratar do assunto.

Em *Um estudo de caso do conhecimento do professor de matemática da educação básica sobre o comportamento variacional das funções afim e quadrática*, Thees (2009) verificou a dificuldade dos professores na resolução de problemas que envolvam as propriedades relacionadas ao comportamento variacional das funções.

Zuffi e Pacca (2002) atestam que a linguagem utilizada pelos professores de Matemática está bem próxima daquela utilizada por eles próprios ainda como alunos da Educação Básica. Como sugestão, as autoras sugerem uma melhor formação inicial e continuada eum maior intercambio entre as áreas de Física, Química e Matemática, visto que as diferentes nomenclaturas aplicadas nestas disciplinas não propiciam uma troca entre os conteúdos apresentados.

Visitando os estudos de Zuffi (1999, 2003), Thees (2009), Even (1998) e Rossini (2006),verificamos que existem lacunas na formação do professor de Matemática da educação básica. Entendemos que, em relação ao conteúdo funções, os reflexos podem ser observados na sala de aula quando, por exemplo, estes professores destacam a característica estática e algébrica do conceito, pelo simples fato de não se sentirem seguros em desenvolver a noção variacional da função; ou ainda, pela linguagem "informal" utilizada por estes profissionais na definição de conteúdos referentes ao conceito.

Neste contexto, consideramos pertinente verificar junto aos professores que trabalham diretamente com o conceito quais as principais dificuldades enfrentadas no seu dia a dia; bem como, no seu ponto de vista, quais as dificuldades enfrentadas pelos alunos na apropriação deste conceito. Na busca de respostas para essas questões, aplicamos um questionário, disponível no final do trabalho em Anexo, com perguntas e sugestões de atividades, através das quais, tentamos entender melhor a relação do professor com o conceito função. Os questionários foram aplicados junto a professores que atuam na rede pública e particular da cidade do Rio de Janeiro, durante os meses de abril e maio do ano de 2015.

Em um primeiro momento, buscamos pela primeira imagem de função na visão do professor.

Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?

Dos vinte participantes, dez responderam que os gráficos são sua primeira imagem, sete, mencionaram a dependência e a relação entre grandezas, um participante relacionou a imagem de função a uma calculadora, dois não responderam.

O conceito função está presente em situações do cotidiano e integra muitos ramos da Matemática. Para Tinoco (2011, p.4), a construção desse conceito e o de variável podem se dar simultaneamente e desde cedo, no Ensino Fundamental. É necessário para isso um longo trabalho com atividades adequadas ao nível dos alunos.

> A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso, muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor

desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita.
(Brasil, 1988, p.118)

A grande maioria dos professores relata que seus alunos, chegam aos últimos anos da Educação Básica, apresentando deficiências em relação à formação algébrica e grande dificuldade em trabalhar as diferenças existentes entre incógnita e variável, equação e função. Os depoimentos de quatro professores participantes da pesquisa corroboram este pensamento.

No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?

- ✓ Sim esse engano é comum. Há professores que fazem confusão e dizem que é a mesma coisa variável e incógnita. Penso que a dificuldade existente entre função e equação pode passar pela questão da notação ser parecida.

- ✓ Quando a diferença entre variável e incógnita é bem trabalhada no Ensino Fundamental II, a diferença entre equação e função não é problema.

- ✓ Certamente. No contexto escolar, os alunos apresentam muitas dificuldades no uso da linguagem matemática e no desenvolvimento do pensamento algébrico.Geralmente utilizam mecanicamente o processo de solução de uma equação e confundem a mesma com as funções.

- ✓

Sim. Pois no 1º momento, o aluno costuma achar que a função deve ter uma "resposta fixa" como na equação.

Todos os professores participantes da pesquisa responderam que fazem uso de tabelas na construção de gráficos, porém, discordam quanto à dificuldade dos alunos em compreender a passagem do discreto ao contínuo. Do total de participantes, oito participantes concordam com esta dificuldade, doze, não concordam e acreditam que a ideia fique clara para os alunos. A seguir, destacamos algumas respostas que reforçam os cuidados tomados e a estratégia adotada pelo professor ao apresentar o gráfico de uma função.

Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?

- ✓ Costumo identificar. Sim. É lógico que essa observação deve ser ressaltada pelo professor e mostrada no gráfico, no momento de "ligar" um ponto ao outro.

- ✓ Sim. Os alunos quando solicitados a identificar os pares ordenados no plano cartesiano, tendem a ligá-los. Os alunos tem dificuldade em discernir quando devem apenas representar pares ordenados e quando devem fazer a representação gráfica de uma função.

- ✓ Depende da situação que for apresentada, mas costumo identificar as funções através de conjuntos e utilizar os pares ordenados na construção gráfica. Vejo muitas dificuldades em perceber essa passagem do discreto para o contínuo e consequente compreensão do gráfico.

- ✓ Acredito que eles percebam que é impossível traçarmos um gráfico de uma reta com todos os seus pontos, compreendendo a ideia da continuidade. Algumas funções deixam mais claro essa ideia, como a função afim e a exponencial, acredito que a mais difícil seja a função quadrática.

- ✓ Sim. Em princípio a tabela é um método rápido e eficaz, se precedido de um questionamento sobre o Domínio e a Imagem da função trabalhada, pois desta forma o aluno poderá refletir o tipo de Conjunto Numérico trabalhado e passa a raciocinar sobre a diferença entre variável discreta e variável contínua. Um software ajuda bastante nesse processo, fazendo com que as dúvidas venham a ser minimizadas.

- ✓ Acredito que eles percebam que é impossível traçarmos um gráfico de uma reta com todos os seus pontos, compreendendo a ideia da continuidade. Algumas funções deixam mais claro essa ideia, como a função afim e a exponencial, acredito que a mais difícil seja a função quadrática.

Sabemos que a educação no Brasil enfrenta sérios problemas. Na atual estrutura, faltam políticas educacionais efetivas, bem como boas condições de trabalho e profissionais capacitados. A grande maioria dos participantes entende a importância do uso de softwares na abordagem do conteúdo funções, mas afirma não utilizá-lo por falta de laboratório de informática nas escolas onde leciona.

Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?

- ✓ Não temos laboratório de informática. Uso muito construções em papel milimetrado, mas acho importante após a construção uma comparação com algum software como o geogebra, por exemplo.

- ✓ Infelizmente não utilizei devido à falta de espaço físico da escola. É de fato um instrumento importante e facilitador.

- ✓ Só aprendi a usar um software (Maple?) no início da minha graduação. Mas nunca o utilizei em sala de aula, apesar de achar que facilitaria a compreensão deste conteúdo. Não o utilizei por falta de recursos e tempo.

O grupo também apresentou divergências quanto à utilização de experiências herdadas da Educação Básica na aplicação do conceito. Apenas quatro participantes destacam a importância das experiências herdadas da formação básica, doze professores relatam que utilizam também experiências da graduação e da prática docente. Quatro professores afirmam retirar elementos de suas pesquisas e cursos de pós-graduação ao aplicar o conceito.

A primeira atividade apresentada sugere trabalhar a ideia *função X relação* em uma situação que não envolva números. Um participante não opinou, nove participantes não foram favoráveis à aplicação da atividade por preferirem utilizar outras situações ao estabelecer a ideia em questão ou pela possível dificuldade dos alunos na compreensão dos índices. Dez professores aprovaram a atividade. Segue a atividade proposta e alguns depoimentos.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: $p_{1,}\ p_2$ e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.

As impressões digitais serão representadas por:

$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10}$ e $d_{3.10}$

(o primeiro índice representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) : $A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$

$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital***, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função.

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

- ✓ A atividade é muito interessante, porém a utilização de letras e índices, e não de números pode ser um complicador para os alunos, especialmente os do Ensino Fundamental. Geralmente, utilizo como motivação, situações do cotidiano que, inicialmente são discutidas em sala de aula, num segundo passo, são representadas em tabelas e posteriormente é desenvolvido o conceito de função, sua lei de formação etc.

- ✓ Gostei da atividade apresentada, pois refere-se a uma atividade que aborda uma situação cotidiana de forma diferenciada e o fato de não conter números despertará o interesse dos alunos.

- ✓

Sua opinião sobre a atividade. Bem interessante. Acho muito im
tante não ficar só em exemplos numéricos. Situa
do cotidiano ajuda bastante o aluno, além de
despertar o interesse de alguns deles

A segunda atividade apresentada utiliza o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau. Quase todos os professores foram favoráveis em adotá-la em suas aulas, mas se mostraram preocupados com a falta de laboratório de informática na escola. Um único participante respondeu que não usaria a atividade embora a tenha considerado uma boa sugestão alternativa. A seguir apresentamos a atividade proposta e destacamos alguns depoimentos.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

a) Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?
b) Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?
c) Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?
d) Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?
e) Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?
f) Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?

✓ Achei muito interessante. O aluno terá uma planilha comparativa, ademais dois gráficos que o possibilitará verificar qual é a proposta mais vantajosa. O Excel permite organizar e manipular dados e tabelas e se tornou uma ferramenta muito utilizada.

- ✓ A atividade é muito interessante, e pode levar os alunos através das propostas feitas pelo professor, a construir o conceito de função.No meu caso, especificamente, utilizar tal atividade, teria como complicador, a necessidade de um laboratório de informática, aonde a atividade fosse realizada. (As duas escolas em que trabalham não possuem laboratório de informática em condições de uso e/ou o quantitativo de máquinas é insuficiente para a quantidade de alunos por turma.

- ✓ Ótima, pois o computador agilizará a parte "braçal", entretanto não prejudica a possibilidade de o aluno comparar tabela e gráfico e fazer as analises necessárias à compreensão dos conceitos desejados.

- ✓ Gosto desse tipo de atividade, acho excelente. Porém ao fazer algo parecido na escola mencionada acima tive dois problemas, um foi a pequena quantidade de computadores disponíveis e outro que os alunos não sabem utilizar o Excel.

A partir da aplicação dos questionários, foi possível um levantamento dos livros mais adotados nas escolas, com o objetivo de verificar como os autores mais citados abordam e apresentam os conteúdos relacionados às funções no ensino fundamental e médio. A análise das principais obras é apresentada na próxima seção.

2.2 Análise Bibliográfica

Na seção anterior, apresentamos resultados de pesquisas desenvolvidas por diversos autores a respeito da visão do professor da Educação Básica sobre o conceito de função, bem como o resultado do questionário desenvolvido neste estudo aplicado a professores da rede pública e particular da cidade do Rio de Janeiro. Com as informações colhidas no questionário, ratificamos situações já abordadas anteriormente além de obter algumas respostas para nossos próprios anseios.

Foi a partir deste questionário, que levantamos os nomes das obras e autores mais adotados pelas escolas e assim, com o objetivo principal de verificar como o conceito de função é abordado em cada uma destas obras, bem como o destaque dado a este conteúdo, vamos nesta seção apresentar uma breve análise de cinco livros e um Caderno Pedagógico que foram selecionados neste levantamento bibliográfico.

O Caderno Pedagógico é adotado pela rede municipal e aplicado no 9º ano do Ensino Fundamental, dois dos livros analisados, "Matemática" e "Matemática e Realidade", adotados em escolas particulares, são também aplicados no 9º ano do Ensino Fundamental. Os últimos três livros, "Matemática ciência e aplicações", "Matemática Contexto & Aplicações" e "Matemática - Uma nova abordagem", são adotados em escolas particulares e aplicados no Ensino Médio. Os livros didáticos selecionados são de diferentes autores, editoras e edições que variam do ano de 2008 ao ano de 2014.

Após a análise de cada obra, apresentaremos, de forma resumida, as principais características observadas. No quadro abaixo, apresentamos os títulos das obras analisadas, seus respectivos autores, editora e ano de edição.

Título da obra	Autores	Editora	Ano de Edição
Caderno Pedagógico	Anderson Silva e Sílvia Maria Couto	Ediouro	2014
Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna	2011
Matemática e Realidade	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado	Atual	2013
Matemática ciência e aplicações	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida	Atual	2014
Matemática Contexto & Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática	2008
Matemática - Uma nova abordagem	Giovanni, Giovanni Jr.,Bonjorno e Paulo Câmara	FTD	2013

Tabela com títulos das obras analisadas

Caderno Pedagógico

(Anderson Silva e Sílvia Maria Couto)

O conceito de função, abordado no 9º ano do EF II, na rede municipal de ensino, é apresentado em dois cadernos que são aplicados em períodos diferentes, porém, consecutivos.

O primeiro caderno é aplicado no 3º bimestre, possui 44 páginas, sendo 20 páginas destinadas ao conceito em questão e nas quais são abordados os seguintes conteúdos: Relação e Função, Domínio, Contradomínio e Imagem, Plano Cartesiano, Função Polinomial do 1º grau e seu Gráfico.

Neste caderno, a apresentação de função vem da definição na página 2: "Função é uma correspondência entre duas grandezas, de modo que, para cada valor da primeira grandeza, fica definido apenas um valor para a segunda grandeza.".

Em seguida a motivação aplicada é a dependência existente entre a distância percorrida por Beatriz em uma corrida e o tempo gasto no percurso. Em uma tabela é apresentado o tempo necessário para os percursos de 1, 2 e 3 quilômetros, induzindo em seguida à identificação da lei de correspondência para *n* quilômetros.

Podemos observar nas páginas seguintes, que a motivação inicial apresenta a característica variacional das funções, porém o caráter algébrico do conceito recebe destaque, com a definição apresentada ainda na página 2: "Toda função é representada por uma expressão matemática que transforma a 1ª grandeza na 2ª grandeza. Tal expressão é conhecida como Lei de Formação.".

Assim como na motivação inicial, alguns exemplos e exercícios seguintes destacam a variação entre duas grandezas e usando tabelas induzem a identificação das leis de correspondência.

Neste Caderno Pedagógico o Diagrama de Setas é apresentado na página 8, de forma rápida, através do exemplo numérico "$y \rangle x+1$" e logo após a definição de Relação: "Uma relação entre dois conjuntos ***A*** e ***B*** é uma associação entre os elementos de ***A*** e os elementos de ***B***, através de uma lei matemática.". O destaque abaixo é apresentado em seguida:

FIQUE LIGADO!!!

Uma relação entre dois conjuntos A e B é uma função de A em B, quando:

a) todos os elementos $x \in A$ têm seu correspondente $y \in B$.

b) cada $\boldsymbol{x} \in A$ possui apenas um correspondente $\boldsymbol{y} \in B$.

Destaque do Caderno Pedagógico para Relação X Função

Neste caderno, as representações gráficas apresentadas na página 10, ficam restritas as funções polinomiais do 1º grau e define: "O gráfico de uma função é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano que satisfazem à condição $y = f(x)$, ou seja, os pontos da forma $(x, f(x))$.".

Os gráficos são traçados sempre a partir dos seguintes passos: construção de uma tabela para identificação de alguns pontos, marcação dos pontos identificados no plano cartesiano e determinação da reta a partir da ligação dos pontos marcados. O crescimento ou decrescimento da função é analisado exclusivamente a partir da expressão algébrica, na página 13, sem que alguma referência a situações práticas sejam apresentadas: "Sobre a função $f(x) = ax + b$, temos: Se $a \rangle 0$, então f é crescente. Se $a \langle 0$, então f é decrescente. Se $a = 0$, então f é constante.".

Ainda destacando a característica algébrica do conceito, o zero da função é definido como o valor de x que zera f, isto é, $f(x) = 0$, o fato de que no zero da função a reta intercepta o eixo x, é mencionado neste Caderno.

O segundo caderno possui 45 páginas e é aplicado no 4º bimestre. Do total de páginas, 22 são dedicadas ao estudo de funções e contemplam os conteúdos: Função Polinomial do 2º grau, Zeros, Gráfico, Vértice e Valor Máximo e Mínimo.

No início do estudo da Função polinomial do 2º grau, não encontramos nenhuma motivação com aplicações práticas e o conteúdo é assim apresentado:

> "Como você sabe, uma função é definida por três elementos fundamentais: domínio, contradomínio e lei de correspondência. No caso da função quadrática, temos uma função que, a cada polinômio

> $ax^2 + bx + c$, associa elementos do domínio a elementos do contradomínio.”
> (Caderno Pedagógico, 2014, p.9).

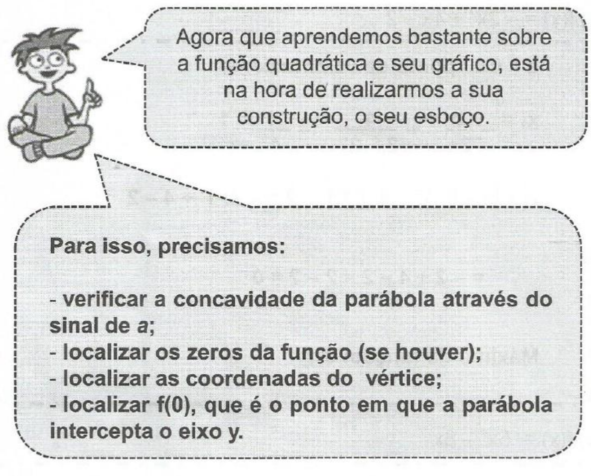
O Diagrama de Setas aparece uma única vez neste Caderno Pedagógico, aplicando aos conjuntos ***A*** e ***B*** a lei de associação “$y = x^2 + 2x - 3$”. Nas páginas seguintes, encontramos vários exercícios que exploram exclusivamente o cálculo numérico. Após apresentar a definição de zero da função polinomial do 2º grau como o valor assumido pela variável x na qual teremos $f(x) = 0$, uma nova sequência de exercícios para determinação de zeros de f é iniciada.

O gráfico da função polinomial do 2º grau é apresentado como “outra forma de representação” desta função e completa afirmando que ele possui uma regularidade que permite descrever a sua forma para qualquer lei de associação. Igualmente como nas funções polinomiais do 1º grau, os gráficos são construídos a partir da marcação no plano cartesiano de alguns pontos determinados, sempre com a construção prévia de tabelas.

Os autores observam a simetria existente no gráfico destas funções e a comparam com a simetria existente na natureza, através das fotos de uma borboleta e da cabeça de um tigre. A partir daí, as discussões em torno da concavidade da parábola, voltada para cima ou para baixo, e o números de interseções desta com o eixo $0X$, são apresentadas com base no coeficiente de x^2 e no valor de Δ.

A definição de vértice da parábola é dada na página 21, por: “O ponto do vértice é o ponto em que a parábola faz a curva.”.

As características de crescimento e decrescimento, bem como os valores de máximo e mínimo, são apresentados a partir dos valores assumidos por $f(x)$ em alguns pontos marcados diretamente em um gráfico. Antes dos exercícios finais, que solicitam apenas a construção de gráficos, uma “receita de bolo” determina os passos a serem seguidos:



Instruções para esboçar gráfico da função polinomial do 2º grau, Caderno Pedagógico.

Abaixo, apresentamos o resumo das principais características observadas na obra:

Motivação	Definição formal	Característica principal da abordagem	Representações mais utilizadas	Intercâmbio com outras ciências
A motivação inicial destaca a característica variacional da função fazendo uso de tabelas.	A função é definida como uma quantidade variável representada por uma expressão matemática.	Embora inicie destacando a característica variacional da função, nos exemplos e exercícios a abordagem é de caráter exclusivamente algébrico.	Tabelas, expressões algébricas e gráficos	Não apresenta intercâmbio entre as ciências.

Principais características do Caderno Pedagógico

Matemática

(Edwaldo Bianchini)

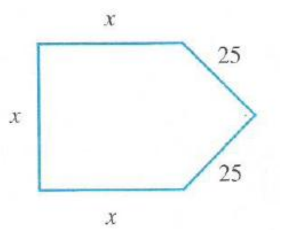
O livro possui um total de 272 páginas, sendo 36 páginas destinadas ao estudo das funções polinomiais do 1º e 2º graus. Para apresentar o conceito de função, o autor utiliza três situações como motivação:

> "**Situação 1**: A empresa de TV a cabo Cab cobra de seus assinantes uma mensalidade de R$95,00 e mais R$5,00 por programa extra comprado. Desse modo, o valor a ser pago (preço) no final de cada mês depende do número de programas comprados pelo assinante.".
> (Matemática, 2011, p.180)
>
> "**Situação 2**: Como Paulo é vendedor de assinaturas de revistas, seu salário sofre uma variação conforme o número de assinaturas vendidas em um mês. Paulo recebe um valor fixo de R$700,00, mais comissão de R$20,00 para cada assinatura vendida no mês."
> (Matemática, 2011, p.181)
>
> "**Situação 3**: José é sitiante e pratica agricultura de subsistência. Suas galinhas têm comido as verduras da horta, então ele resolveu construir um galinheiro retangular com os 16 metros de tela que comprou e, para isso, resolveu aproveitar um muro já existente como um dos lados."
> (Matemática, 2011, p.182)

As três situações destacam as características variacional e de dependência entre grandezas presentes no conceito de funções, fazendo uso de tabelas o autor induz a determinação das leis de correspondência. Após completar a apresentação das três situações, na página 181 ele define: "Dizemos que a grandeza y é função da grandeza x se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de x, exista um único valor de y.".

Alguns exercícios propostos na sequência são aplicações de situações do cotidiano como a cobrança de um estacionamento e o custo de produção de uma fábrica; outros exercícios exploram operações algébricas e o cálculo numérico. O único exercício não numérico questiona se as relações *filho X mãe* e *mãe X filho* são ou não, consideradas funções. A construção do gráfico da função é apresentada de forma gradativa, ou seja, o autor aplica a lei “ $y = x + 1$” a diferentes conjuntos numéricos. Inicia aplicando a lei ao conjunto dos inteiros, em uma tabela determina seis pares ordenados e marca-os no plano cartesiano; num segundo momento, aplica a mesma lei ao conjunto dos racionais, em nova tabela, determina mais quatro pares ordenados, que são marcados no mesmo plano. No terceiro e último momento aplica a lei ao conjunto dos reais, após lembrar a existência dos números irracionais, ainda não contemplados e é assim que completa a reta. Aproveita o momento para apresentar o zero da função como o valor de *x* para o qual $y = 0$ e como o ponto de interseção do gráfico com o eixo dos *x*. O autor aplica o teste da reta vertical, para discutir se alguns exemplos de gráficos representam ou não funções.

Usando a geometria, inicia o estudo das funções polinomiais do 1º grau:



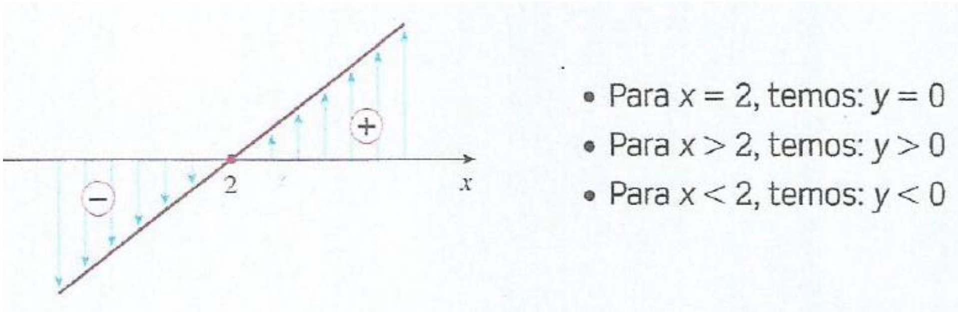
Motivação para estudo das funções polinomiais do 1º grau do livro “Matemática”

> “No pentágono ao lado, as medidas são dadas em centímetro. O perímetro desse polígono depende dos valores que forem atribuídos a *x*. Indicando o perímetro por *y*, temos: $y = 3x + 50$.A função definida pela lei $y = 3x + 50$ é um exemplo de função polinomial do 1º grau.”.
> (Matemática, 2011, p.191)

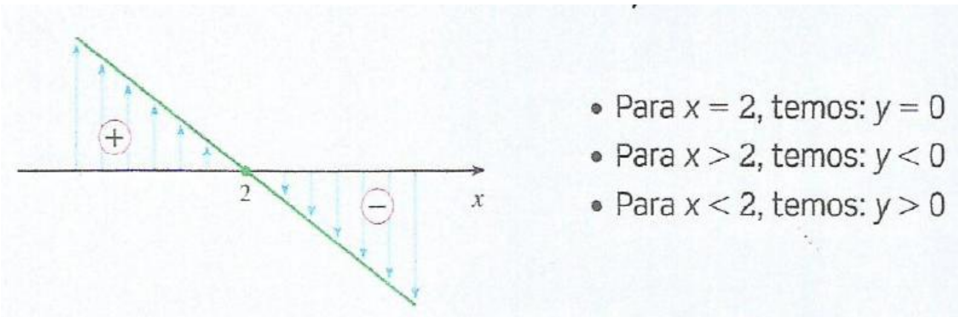
Os gráficos são construídos a partir de alguns pares ordenados pré-determinados em tabelas e sem nenhuma referência a situações de crescimento ou decrescimento, o autor relaciona a inclinação da reta ao valor do coeficiente *a* de *x* e completa:

> “Estudar o sinal de uma função é determinar os valores de *x* para que:
> a função se anule $(y = 0)$;
> a função seja positiva $(y > 0)$;
> a função seja negativa $(y < 0)$.”
> (Matemática, 2011, p.195)

Para apresentar o estudo do sinal de uma função polinomial do 1º grau, o autor completa com os esboços abaixo:



Estudo do sinal para $y = 2x - 4$ do livro “Matemática”

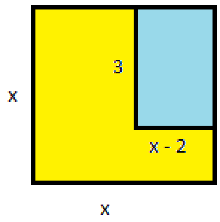


Estudo do sinal para $y = -2x + 4$ do livro “Matemática”

Em alguns exercícios apresentados ao longo desta seção, o autor aplica a função polinomial do 1º grau em situações do cotidiano como o cálculo da capacidade de um reservatório e da temperatura de ebulição da água, porém, a grande maioria dos exercícios enfatiza uma abordagem exclusivamente algébrica.

O autor inicia o estudo das funções polinomiais do 2º grau usando como motivação outro problema de geometria:

> “Considere a figura ao lado. Vamos calcular a área da parte amarela em função de *x*. Podemos calcular a área do quadrado, que é: x^2. A área do retângulo pintado de azul é: $3(x-2)$. Então a área representada pela parte pintada de amarelo é: $x^2 - 3(x-2)$, ou seja, $x^2 - 3x + 6$. Indicando essa área por *y*, temos: $y = x^2 - 3x + 6$. A função definida pela lei $y = x^2 - 3x + 6$ é um exemplo de função polinomial do 2º grau (ou função quadrática).”
> (Matemática, 2011, p.199)



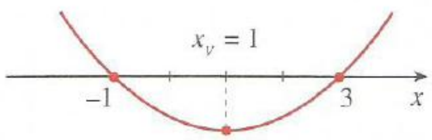
Motivação para o estudo de função polinomial do 2º grau do livro “Matemática”

A seguir, na página 199, define: “Uma função polinomial do 2º grau é toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com *a*, *b*, e *c* números reais e $a \neq 0$, e é definida para todo *x* real.”.

Ao iniciar o estudo do gráfico informa que a curva determinada por estas funções recebe o nome de parábola e como receita de bolo para traçar o gráfico, indica a construção de uma tabela com um número suficiente de pontos que permita a percepção da curva, após a marcação destes pontos no plano cartesiano.

Continua o estudo, indicando a partir de alguns gráficos os zeros de f e o eixo de simetria. Acrescenta que se $a \rangle 0$, a parábola apresenta concavidade voltada para cima e se $a \langle 0$, a concavidade é voltada para baixo, discute o número de interseções da parábola com o eixo dos *x* a partir do valor de Δ.

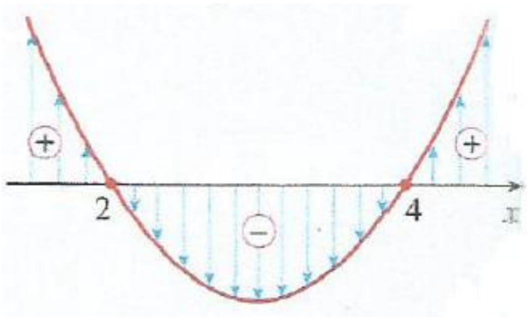
O autor utiliza de um esboço de gráfico para mostrar que os zeros de f são simétricos em relação ao vértice, e por isso, a abscissa deste ponto é a semissoma dos zeros de f.



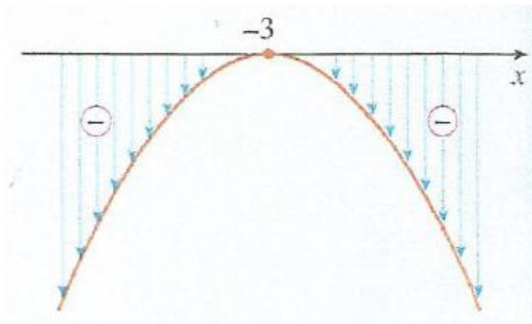
Esboço de gráfico de função polinomial do 2º grau do livro “Matemática”

Para encontrar a ordenada do vértice, o autor sugere substituir a abscissa encontrada na lei de correspondência da função. E completa nomeando o vértice como ponto de mínimo se $a \rangle 0$ ou ponto de máximo de $a \langle 0$.

Para discutir o estudo do sinal da função polinomial do 2º grau, utiliza o mesmo tipo de esboço gráfico já utilizado nas funções polinomiais de 1º grau.



Esboço de gráfico de $y = x^2 - 6x + 8$ para estudo de sinal



Esboço de gráfico de $y = -x^2 - 6x - 9$ para estudo de sinal

Dentre os exercícios propostos, apenas três apresentam enfoques diferenciados: a trajetória de um projétil de canhão, o cálculo da área máxima de um terreno e do custo mínimo de um produto, todos os outros exercícios exploram apenas cálculos algébricos e numéricos.

Motivação	Definição formal	Característica principal da abordagem	Representações mais utilizadas	Intercâmbio com outras ciências
A motivação inicial destaca a característica dinâmica e variacional das funções e faz uso de tabelas para identificar as leis de correspondência.	A função é definida como uma correspondência entre grandezas, tal que, para cada *x*, existe um único *y*. E assim *y* é função de *x*.	O autor prioriza uma abordagem de caráter algébrico.	Tabelas, expressões algébricas e gráficos	Poucos exercícios exploram a aplicação do conceito em outras áreas.

Principais características do livro “Matemática”

Matemática e realidade

(Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado)

O livro, dividido em sete unidades, possui um total de 320 páginas; deste total, 54 páginas são destinadas a noção de função e ao estudo das funções polinomiais do 1º e 2º graus. Os autores apresentam o conceito na página 259, a partir da motivação: “Osias é gerente financeiro de um grande banco. Para exercitar-se, costuma correr diariamente, mantendo um ritmo de 6 km por hora. Quantos metros ele corre a cada minuto?”.

Em seguida, constroem uma tabela *tempo(min) X distância(m)* e estabelecem a correspondência existente entre o tempo de corrida (x) e a distância (y) percorrida por Osias, e assim, determinam a lei“ $y = 100x$ ”. Na página 260, segue a definição: “Quando há correspondência entre duas grandezas *x* e *y*, de modo que para cada valor de *x* fica determinado um único valor de *y*, dizemos que *y* é função de *x*.”.

Os primeiros exercícios propostos exploram a identificação e construção das leis de correspondência em situações como: a área de um quadrado em função do lado, a nota da prova em função do número de acertos, a distancia percorrida em função do tempo gasto no percurso e o número de diagonais de um polígono em função do número de lados.

Ao apresentar o gráfico de uma função, os autores relacionam uma tabela com a sua representação gráfica e para tal, usam na página 265, nova motivação: "Os pais de Lucas Júnior registraram a idade e as medidas da altura do filho, obtidas no início de cada ano letivo, desde que ele ingressou no ensino fundamental.".

A partir da tabela *idade (anos) X altura (cm)* de Lucas Júnior, os autores representam os pares ordenados *("idade", "altura")* no plano cartesiano e formam, assim, o gráfico desta função.

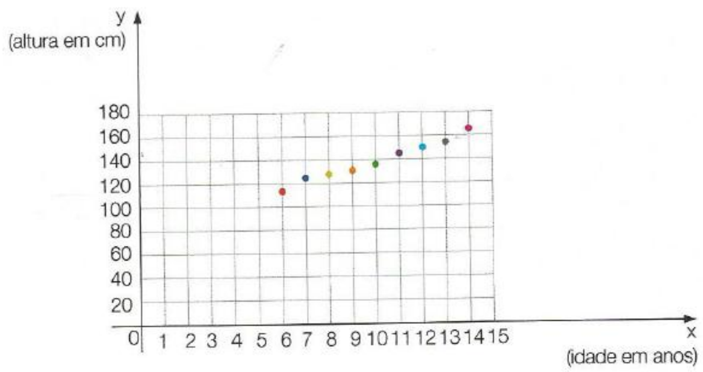


Gráfico da altura de Lucas Júnior em função da sua idade do livro "Matemática e realidade"

Os autores apresentam um exemplo de gráfico contínuo, usando a lei " $y = \sqrt{x}$ ", onde *y* representa o lado de um quadrado de área *x* e *x* é qualquer número real não negativo.

Iniciam o estudo das funções polinomiais do1ºgrau com a motivação abaixo:

> "A conta mensal de uma linha telefônica do tipo econômica (que só faz ligações para telefone fixo local) é composta de duas partes: uma taxa fixa de R$30,00, chamada assinatura, e mais uma parte variável, que é de R$0,25 por minuto de ligação.
> Como saber quanto deverá ser pago no final do mês se o valor depende do tempo de uso do telefone?
> Para *x* minutos de ligação, paga-se $(0{,}25\,.\,x)$ reais mais a taxa fixa de R$30,00.
> O valor *y*, a pagar em reais,é dado por: $y = 0{,}25x + 30$ ".
> (Matemática e realidade, 2013, p.272)

Após a construção da lei de correspondência os autores apresentam uma tabela com sete valores possíveis de conta, ao lado da tabela, o gráfico com os respectivos pares ordenados. Observam, ainda, que os pontos do gráfico são alinhados.

Tempo de ligações efetuadas (min)	Valor da conta (em reais)
x	y = 0,25x + 30
0	30,00
10	32,50
20	35,00
30	37,50
40	40,00
50	42,50
60	45,00

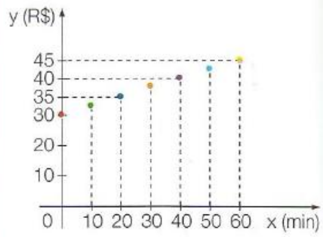


Gráfico e Tabela de $y = 0{,}25x + 30$ do livro “Matemática e realidade”

Outra tabela é construída com novos valores, os novos pontos são acrescentados ao gráfico anterior, e mais uma vez, os autores observam o alinhamento dos pontos.

x	6	12	14	28	36	44	58
y	31,50	33,00	33,50	37,00	39,00	41,00	44,50

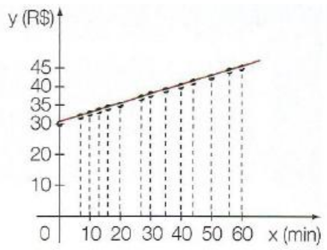


Gráfico e Tabela de $y = 0{,}25x + 30$ do livro “Matemática e realidade”

Concluem na página 272: “Como x pode ser qualquer número positivo ou nulo, o gráfico é uma linha contínua: é parte de uma reta.”. Em seguida, na página 273, definem função polinomial do 1º grau como: “Uma função definida para todo x real por uma fórmula do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais conhecidos e $a \neq 0$, é denominada função do 1º grau. O gráfico de uma função do 1º grau é uma reta.”.

Retornando ao problema da conta de telefone dada pela lei "$y = 0{,}25x + 30$", apresentam o significado dos coeficientes b e a:

> "Na função $y = ax + b$, b é o valor de y correspondente a $x = 0$. É a ordenada do ponto em que o gráfico corta o eixo y."
> "O coeficiente a é a taxa de variação da função $y = ax + b$. Ele representa a quantidade de unidades que são adicionadas a y quando adicionamos 1 unidade a x, qualquer que seja x."
> (Matemática e realidade, 2013, p.275 e p.277).

Após a definição acima, acrescentam duas novas motivações:

> "O eletricista cobra uma taxa de R$20,00 pela visita ao cliente a mais R$30,00 por hora trabalhada. Como calcular o preço final a ser pago já que este depende do tempo de duração do serviço? Se o serviço do eletricista durar x horas vai custar $(30x)$ reais mais os R$20,00 da taxa de visita. Assim, o preço y em reais a ser pago ao eletricista é dado por: $y = 30x + 20$"
> (Matemática, 2013, p.277)

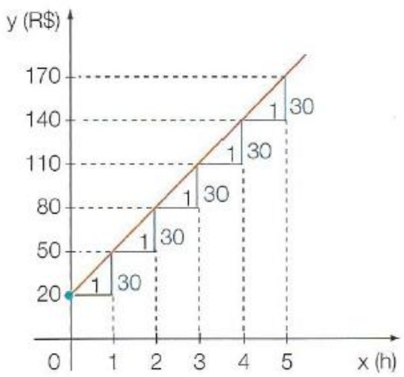


Gráfico de $y = 30x + 20$ do livro "Matemática e realidade"

> "Vamos considerar a situação do exercício 29, em que um caminhão pipa com 6.000*l* de água pode ser esvaziado por uma válvula pela qual saem 100*l* de água por minuto. Assim, x minutos depois que abrimos a válvula, restam no tanque do caminhão y litros de água, sendo $y = 6000 - 100x$".
> (Matemática e realidade, 2013, p.278)

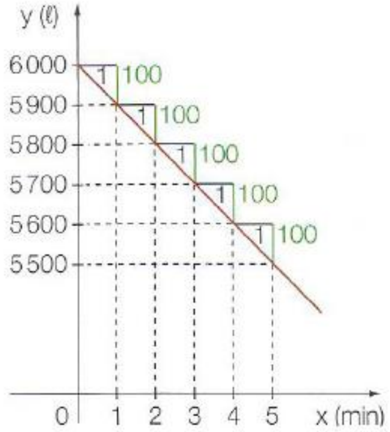


Tabela e gráfico de $y = 6000 - 100x$ do livro “Matemática e realidade”

Concluem a discussão de crescimento e decrescimento de uma função com as definições:

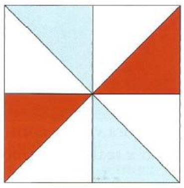
> “Dizemos que uma função é crescente quando, aumentando os valores de *x*, em correspondência aumentam os *y*. Neste caso quanto maior for *x*, maior será *y*. Dizemos que uma função é decrescente quando, aumentando *x*, *y* diminui. Nesse caso, quanto maior for *x*, menor será *y*.”
> (Matemática e realidade, 2013, p.278)

Os autores encerram o estudo das funções polinomiais do 1º grau, discutindo a proporcionalidade existente nas funções lineares. Para tal, utilizam três novas motivações: o valor pago por *x* cocos comprados em uma barraca em Fortaleza, o tempo gasto por um ciclista após *x* voltas no quarteirão (o ciclista percorre três quarteirões a cada minuto) e a altura da água em uma jarra após despejar em seu interior *x* copos de igual capacidade.

Assim como a apresentação de cada conceito, os autores propõem, durante todo o capítulo, exercícios aplicados a situações do cotidiano, como por exemplo, o custo de produção de uma fábrica, o salário de um vendedor, o custo da visita de um eletricista, a gorjeta de um garçom, os valores pagos no aluguel de um automóvel e em uma venda com desconto, entre outros.

No capítulo seguinte, os autores apresentam a função polinomial do 2º grau explorando três situações:

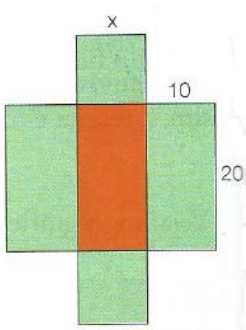
“O logotipo de uma empresa foi criado a partir de um quadrado dividido em oito partes iguais, conforme indica a figura. A área de cada parte é função do lado do quadrado; portanto, a área pintada de vermelho é função do lado do quadrado. Qual é a fórmula desta função? Como é o gráfico dessa função?”
(Matemática e realidade, 2013, p.289)



Motivação de função polinomial do 2º grau aplicada no livro “Matemática e realidade”

“Formandos do ensino fundamental reuniram-se e planejaram uma viagem para comemorar a formatura. A agência de turismos Teen-tour oferece o seguinte pacote promocional: o preço por aluno diminui à medida que mais alunos forem aderindo. Se x alunos aderirem, o preço p para cada um será $p = 180 - 0{,}6x$ reais. Observe que p é função decrescente de x, conforme prometido. Quanto a Teen-tour vai receber para promover a viagem?”.
(Matemática e realidade, 2013, p.291)

“Em um parque de diversões há uma barraca de jogo de dardos com um alvo diferente. O jogador ganha pontos se atingir a área verde e perde se atingir a vermelha. O alvo é construído escolhendo-se a medida x, de modo que a diferença entre as áreas verde e vermelha seja a menor possível. Indicando essa diferença por y, quanto é y em função de x?”.
(Matemática, 2013, p.292)



Motivação de função polinomial do 2º grau aplicada no livro “Matemática e realidade”

Nas três motivações, os autores identificam as leis de correspondência, usam tabelas para construir os gráficos, discutem a concavidade da parábola e observam a existência do eixo de simetria.

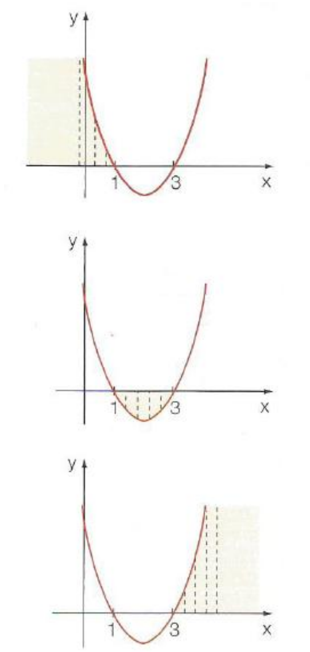
Na página 294, apresentam a definição: “O ponto em que o eixo de simetria corta a parábola é denominado vértice da parábola.” e retomando as duas motivações iniciais, os autores discutem ponto de valor mínimo (menor área) e valor máximo (maior receita), além deduzir a fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$.

$$a(x_V + 1)^2 + b(x_V + 1) + c = a(x_V - 1)^2 + b(x_V - 1) + c$$
$$\cancel{ax_V^2} + 2ax_V + \cancel{a} + \cancel{bx_V} + b + \cancel{c} = \cancel{ax_V^2} - 2ax_V + \cancel{a} + \cancel{bx_V} - b + \cancel{c}$$
$$4ax_V = -2b$$
$$2ax_V = -b$$
$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2a}}$$

Dedução da fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$ no livro “Matemática e realidade”

Para construir a parábola, os autores sugerem fazer uso de uma tabela com o vértice, e alguns pontos simétricos (ao eixo de simetria). Construída a parábola, os autores discutem os pontos de interseção com os eixos coordenados: $(0, c)$, interseção com o eixo dos *y* e os zeros de f, valores de *x* para os quais $f(x) = 0$, ou seja, interseção com o eixo dos *x*. No estudo dos sinais da função, os autores também fazem uso de esboços, porém, apresentam a discussão de forma um pouco mais cuidadosa:

> “Antes de chegar a $x = 1$, todos os pontos da parábola estão acima do eixo *x*, tendo ordenada *y* positiva. [...] Depois de $x = 1$ e antes de $x = 3$, os pontos da parábola estão abaixo do eixo *x*, tendo ordenada *y* negativa. [...] Depois de $x = 3$, todos os pontos da parábola estão acima do eixo *x*, tendo ordenada *y* positiva.”.
> (Matemática e realidade, 2013, p.299)



Esboços de gráfico de $y = x^2 - 4x + 3$ para estudo de sinal

Os autores encerram o estudo da função polinomial do 2º grau discutindo a resolução de inequações do 2º grau diretamente no gráfico.

Neste capítulo, os exercícios propostos dão mais destaque ao estudo dos gráficos, cálculos algébrico e numérico. Alguns poucos exercícios apresentados, aplicam a função polinomial do 2º grau para o cálculo de áreas, temperatura e lucro.

Motivação	Definição formal	Característica principal da abordagem	Representações mais utilizadas	Intercâmbio com outras ciências
A motivação inicial destaca a característica dinâmica e variacional das funções, identifica a lei de correspondência, usa tabelas e gráficos.	A função é definida como uma correspondência entre grandezas, tal que, para cada *x*, existe um único *y*. E assim *y* é função de *x*.	A abordagem destaca a característica dinâmica e variacional.	Tabelas, expressões algébricas e gráficos.	Muitos exercícios exploram aplicações do conceito em outras áreas.

Principais características do livro “Matemática e realidade”

Matemática ciência e aplicações

(Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn,

Roberto Périgo e Nilze de Almeida)

Nesta obra, os autores apresentam o conteúdo ministrado no Ensino Médio em três volumes. No volume 1 encontramos as noções gerais sobre função e o estudo das funções afim, quadrática, modular, exponencial e logarítmica. As funções trigonométricas e suas inversas são apresentadas no Volume 2.

O Volume 1 é dividido em treze capítulos, possui um total de 448 páginas, destas, 238 páginas são destinadas ao estudo de funções.

Na página 46 deste volume, os autores apresentam a noção intuitiva de função esclarecendo ao leitor que no estudo científico de qualquer fenômeno é comum identificar grandezas mensuráveis ligadas ao fenômeno estudado, bem como buscar por relações existentes entre essas grandezas. Em seguida, a partir de quatro motivações, estabelecem relações entre grandezas diversas. Ainda na página 46 encontramos a primeira motivação: “Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600m. Um ciclista treina para uma prova de resistência, desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu técnico anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo ciclista”.

Na página 47, mais duas motivações são apresentadas: “Uma barraca de praia, em Fortaleza, vende água de coco ao preço de R$2,20. Para não ter que fazer contas a toda hora, o proprietário da barraca montou a seguinte tabela:” e “Para fretar um ônibus de excursão com 40 lugares paga-se ao todo R$360,00. Essa despesa deverá ser igualmente repartida entre os participantes.”.

Para concluir, na página 48, a última motivação é apresentada: “Um Instituto de Meteorologia, quando quer estudar a variação da temperatura em certa cidade, mede a temperatura a intervalos regulares, por exemplo, a cada 2 horas, e monta uma tabela que relaciona as hora e temperatura”. Em todas as motivações, os autores exploram a construção de tabelas e a identificação das leis de correspondência.

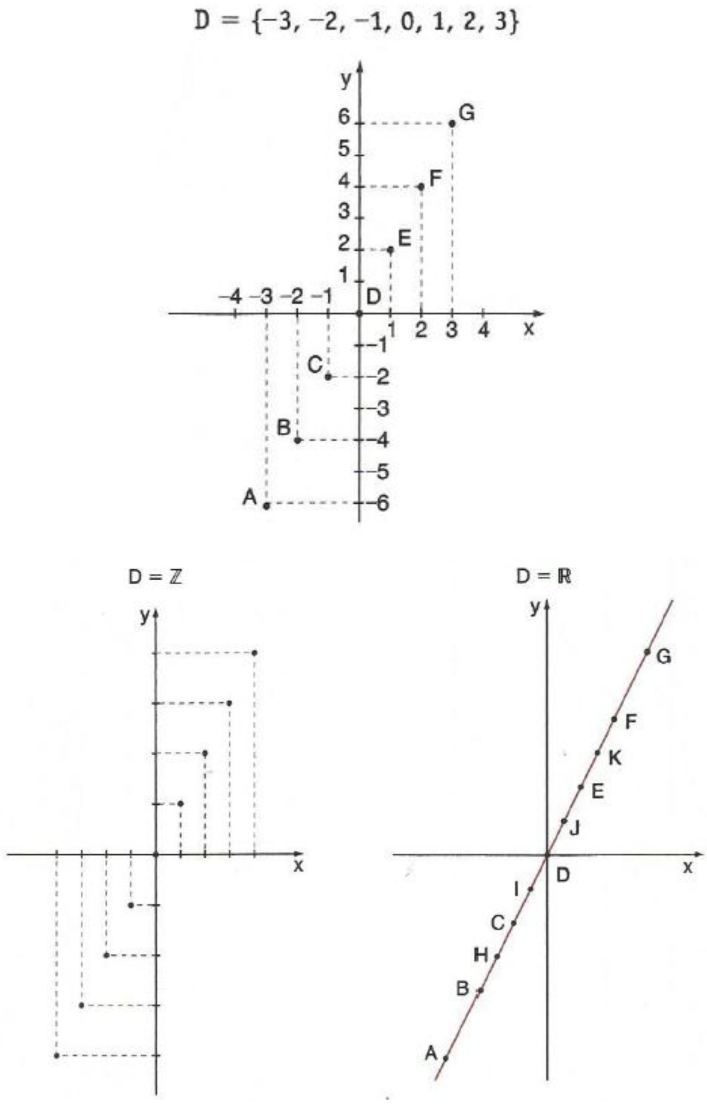
Os primeiros exercícios propostos apresentam situações do cotidiano como, por exemplo, a variação do preço pago em função da quantidade de carne adquirida, a variação da distância percorrida por um avião em função do tempo de voo, a variação do custo de um serviço de informática em função das horas trabalhadas.

Na página 50, segue a definição formal de função: “Dados dois conjuntos não vazios ***A*** e ***B***, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de *função de **A** em **B***.”. Neste momento, os autores exploram o uso do diagrama de flechas em funções definidas por fórmulas e definem domínio, contradomínio e imagem.

Temas como crescimento da população, taxa de desemprego e mortalidade infantil, são abordados neste capítulo na seção “Leitura Informal de Gráficos”. A partir da análise de gráficos extraídos de jornais e da internet, os autores abordam informalmente, crescimento, decrescimento, valores máximo e mínimo das funções.

Gráfico *taxa de desemprego x tempo* da seção “Leitura Informal de Gráficos” do livro “Matemática ciência e aplicações”

A construção de gráficos é apresentada pelos autores, em um primeiro momento, num domínio finito. Usando tabelas, alguns pares ordenados são determinados, e em seguida, marcados no plano cartesiano. Em um domínio infinito, também usam tabelas para obter alguns pontos, entretanto, antes de traçar a curva determinada pela lei de correspondência, enfatizam que o gráfico será constituído por infinitos pontos.



Gráficos de $y = 2x$ em domínios diferentes do livro “Matemática ciência e aplicações”

Antes da definição formal de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, zeros e sinal da função, apresentadas nas páginas 66 e 67, os autores exploram o comportamento de alguns gráficos e observam estes conceitos, através de uma “conversa” com o leitor.

Na página 72, os autores definem Taxa Média de Variação da função:

> “Seja f uma função definida por $y = f(x)$; sejam x_1 e x_2,dois valores do domínio de *f*, $(x_1 \neq x_2)$, cujas imagens são, respectivamente, $f(x_1)$ e $f(x_2)$. O quociente $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de *taxa média de variação da função f*,para x variando de x_1 até x_2.”.

(Matemática ciência e aplicações, 2014, p.72)

Em um gráfico de crescimento populacional, seguem explorando este conceito ao analisarem a evolução da população mundial no decorrer do tempo, bem como sua projeção para o fim deste século. Adotando a nomenclatura utilizada na Física, relacionam taxa média de variação com a velocidade escalar média e aceleração escalar média.

O capítulo 4 aborda função afim. Para introduzir o conceito, os autores apresentam três motivações envolvendo questões do cotidiano: *distância percorrida x preço da corrida de taxi*, *total de vendas x salário do corretor* e *quantidade de comida x valor pago*.

Observam a proporcionalidade presente na função linear a partir de um experimento desenvolvido por um técnico pesando azeite de oliva em um laboratório. Apresentam os resultados obtidos na pesagem em uma tabela na página 95 acompanhada do respectivo gráfico.

Experiência nº	Volume (em mililitros)	Massa (em gramas)
1	100	80
2	200	160
3	300	240
4	400	320
5	500	400
6	1 000	800
7	2 000	1 600

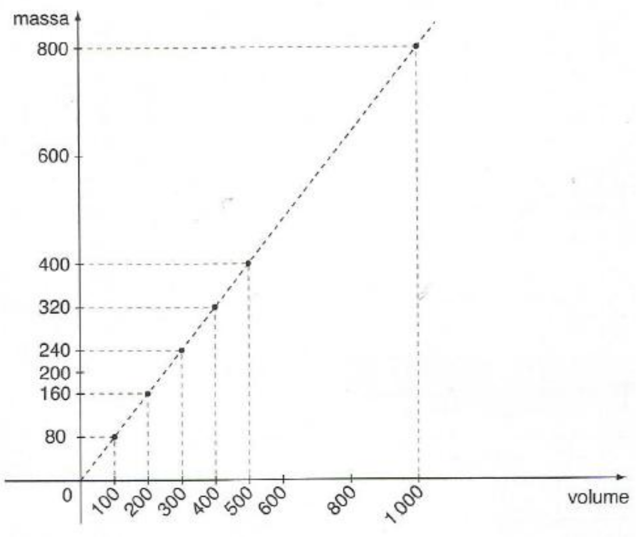


Tabela e Gráfico *volume x massa* do livro “Matemática ciência e aplicações”

Na página seguinte, em uma “conversa” com o leitor, os autores exploram o conceito de grandezas diretamente proporcionais, regra de três simples e estabelecem uma relação com a Física e a Química quando definem e calculam a densidade do azeite usado na experiência.

Na página 98 os autores apresentam a definição de zero ou raiz da função: “Chama-se raiz ou zero da função polinomial do 1º grau, dada por $f(x) = ax + b, \quad a \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$. Temos: $f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$”.

Nas páginas seguintes, a partir da análise de alguns gráficos, os autores observam que a taxa média de variação da função afim é constante e apresentam,em destaque, esta propriedade seguida da sua demonstração:

Propriedade:

Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função afim dada por $f(x) = ax + b$.

A taxa média de variação de *f*, quando *x* varia de x_1 a x_2, com $x_1 \neq x_2$, é igual ao coeficiente *a*.

Demonstração:

Se $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b; \qquad f(x_2) = ax_2 + b$$

A taxa média de variação de *f*, para *x* variando de x_1 até x_2 é:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Propriedade e Demonstração taxa média de variação da função afim do livro “Matemática ciência e aplicações”

Na sequência, apresentam as definições formais de coeficiente angular e linear, crescimento e decrescimento da função afim. Terminam o capítulo relacionando a resolução de inequações ao estudo do sinal de uma função afim, bem como abordam a resolução de inequações-produto e inequações-quociente.

O capítulo seguinte é dedicado ao estudo da função quadrática. Aplicando dois problemas relacionados a uma paixão nacional, o futebol, os autores iniciam a abordagem:

Problema1: Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Vamos verificar quantos jogos serão realizados.

Contamos o número de jogos que cada clube fará "em casa", ou seja, no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10\,.\,9 = 90$.

Se o campeonato fosse disputado por 20 clubes, poderíamos calcular quantos jogos seriam realizados usando o mesmo raciocínio: $20\,.\,19 = 380$ jogos.

Enfim para cada número (x) de clubes, é possível calcular o número (y) de jogos do campeonato. O valor de y é função de x.

A regra que permite calcular y a partir de x é a seguinte:

$y = x\,.\,(x-1)$, ou seja, $y = x^2 - x$.

(Matemática ciência e aplicações, 2014, p.127)

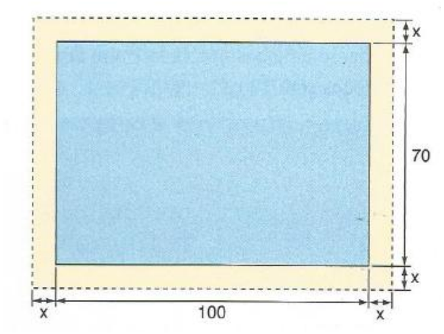
Problema 2: Um time de futebol montou um campo de 100*m* de comprimento por 70*m* de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3*m* de largura. Qual a área do terreno limitado pela cerca? [...] Enfim, a cada largura x escolhida para a pista há uma área $A(x)$ da região cercada. A área da região cercada é função de x. Procuremos a lei que expressa $A(x)$ em função de x:

$A(x) = (100 + 2x)\,.\,(70 + 2x)$

$A(x) = 7000 + 200x + 140x + 4x^2$

$A(x) = 4x^2 + 340x + 7000$

(Matemática ciência e aplicações, 2014, p.128)



Motivação de função polinomial do 2º grau aplicada no livro "Matemática ciência e aplicações"

Logo após os **Problemas 1** e **2**, a definição formal de função quadrática é apresentada, assim como a construção do gráfico a partir de alguns pares ordenados previamente determinados em tabelas. Analisando os exemplos gráficos, os autores verificam a concavidade da parábola, para cima ou para baixo, o eixo de simetria e o vértice.

Os autores definem os zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$ e complementam deduzindo a fórmula que permite obter as raízes:

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\,(\,x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\,) = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \\
& \Rightarrow (\,x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \\
& \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

(Matemática ciência e aplicações, 2014, p.131)

Observando os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ e $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ relacionam quantidade de raízes de uma função quadrática ao valor do seu discriminante. Através do cálculo algébrico, deduzem as fórmulas da soma e produto das raízes, $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$, respectivamente, bem como as coordenadas do vértice, $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, a partir da forma canônica da função quadrática.

Neste momento, os autores retomam a construção da parábola e observam que a mesma pode ser construída sem o auxílio da tabela de pares (x, y). Destacam que esta construção pode ser orientada pelas seguintes características: o valor do coeficiente *a*, os zeros, as coordenadas do vértice, o eixo de simetria e o ponto $(0, c)$, interseção da parábola com o eixo $0y$.

No estudo do sinal, apresentado em três situações $\Delta \rangle\ 0, \Delta\ \langle\ 0$ e $\Delta = 0$, os autores fazem uso de esboços de gráficos e procuram pelos valores de *x* para os quais *y* é negativo ou positivo. Os autores encerram o capítulo relacionando o estudo do sinal da função polinomial do 2º grau com resolução de inequações, inequações-produto e inequações-quociente.

A motivação utilizada pelos autores para introduzir na página 162, função definida por mais de uma sentença, foi o calculo do imposto de renda pago mensalmente pelo trabalhador brasileiro. A partir da tabela fornecida pela Receita Federal o leitor observa que o imposto mensal (y) é uma função do salário (x) definida por cinco sentenças.

Antes da introdução de função modular, os autores apresentam a definição de módulo, a interpretação geométrica do conceito e suas principais propriedades.

Na página 169 segue a definição de função modular:

> "Chama-se função modular a função f de $\Re$ em $\Re$ que associa cada número real x ao seu módulo, isto é, f é definida pela lei $f(x) = |\,x\,|$. Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser assim definida: $f(x) = \begin{cases} x, & se \ \ x \geq 0 \\ -x, & se \ \ x \langle \ 0 \end{cases}$ ".
>
> (Matemática ciência e aplicações, 2014, p. 169)

Logo após a definição, os autores usam o diagrama de flechas para exemplificar.

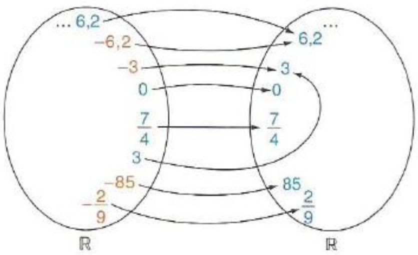


Diagrama de flechas para $y = |\,x\,|$ do livro "Matemática ciência e aplicações"

Nas páginas seguintes, gráficos de funções definidas por leis do tipo $y = |\,x\,| + k$ e $y = |\,x + k\,|$ são apresentados. Os autores observam que os referidos gráficos são obtidos a partir da translação vertical ou horizontal do gráfico de $y = |\,x\,|$ e encerram o capítulo com a resolução de equações e inequações modulares.

Na página 187 o leitor inicia o estudo da função exponencial com a motivação abaixo:

> Os dados do último censo demográfico (2010) indicaram que, naquele ano, a população brasileira era de 190 755 799 habitantes e estava

> crescendo à taxa aproximada de 1,2% ao ano. A taxa de crescimento populacional leva em consideração a natalidade, mortalidade, imigrações etc. (Fonte:www.ibge.gov.br – séries estatísticas. Acesso em: 30 jul. 2014)
> Suponha que tal crescimento seja mantido para a década seguinte, isto é, de 2011 a 2020. Nessas condições, qual seria a população brasileira ao final de *x* anos (*x*=1,2,..., 10), contados a partir de 2010?
> (Matemática ciência e aplicações, 2014, p. 187)

Explorando o conceito, os autores apresentam o cálculo da população brasileira para 2011, 2012 e 2013, ou seja, $x=1$, $x=2$ e $x=3$, respectivamente. Deste modo, induzem o leitor a identificar a função $y=1{,}012^{x}\,.191$ que associa a população (y), em milhões de habitantes, ao número de anos (x) transcorridos após 2010.

Antes de seguir com o estudo das funções exponenciais, os autores apresentam uma revisão de potência e suas propriedades.

A definição formal de função exponencial é apresentada na página 197 seguida da construção de alguns gráficos com o auxílio da tabela de pares (x, y).

Em um recorte, na página 199, os autores apresentam o número *e*: definição, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, valor aproximado, $e \cong 2{,}7183$, e sua descoberta, atribuída a John Napier. Complementam com uma rápida explicação do cálculo de e^{x} em calculadoras científicas e financeiras.

Nas páginas seguintes, os leitores verificam as propriedades da função exponencial e a construção de gráficos com translação. Com a resolução de equações e inequações exponenciais os autores encerram o capítulo.

A função logarítmica é apresentada no capítulo 8. Na página 225, os autores abordam a desvalorização de um caminhão e a necessidade de um novo conceito para a resolução do problema proposto:

> "Suponhamos que um caminhão custe hoje R$100 000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso. Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$20 000,00? [...]
> O valor em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:
> $100\,000$; $(0{,}9)\,.100\,000$; $(0{,}9)^{2}\,.100\,000$; $(0{,}9)^{3}\,.100\,000$; ...; $(0{,}9)^{x}\,.100\,000$
> em que *x* indica o número de anos de uso. [...]

> Para responder a pergunta feita, devemos resolver a equação $(0,9)^x . 100\,000 = 20\,000$, ou seja, $(0,9)^x = 0,2$, que é uma equação exponencial. [...] Para enfrentar esse e outros tipos de problemas, vamos estudar agora os logaritmos.”.
> (Matemática ciência e aplicações, 2014, p.225)

Neste momento, os autores definem logaritmo, apresentam suas propriedades operatórias e mudança de base.

Na página 238, ao retomar o estudo da função exponencial, uma nova situação é apresentada:

> “Cássio depositou certa quantia em uma caderneta de poupança especial, que rende 1% ao mês. Por quantos meses ele deverá deixar o dinheiro na conta para que seu valor dobre? [...] Como queremos que a importância dobre, ele deve ficar igual a *2c* no final de *n* meses. Então: $(1{,}01)^n . c = 2c \Rightarrow (1{,}01)^n = 2$.
> Aplicando logaritmos (em base 1,01) à igualdade anterior obtemos uma nova igualdade: $\log_{1,01}(1{,}01)^n = \log_{1,01} 2$
> $n = \log_{1,01} 2$ (aproximadamente 70 meses). [...]
> E se quiséssemos que o capital inicial fosse multiplicado por *x*? Qual seria o número n de meses?
> Teríamos: $c . (1{,}01)^n = c . x \Rightarrow (1{,}01)^n = x \Rightarrow n = \log_{1,01} x$
> A função *f* definida por $f(x) = \log_{1,01} x$ é um exemplo de função logarítmica.”.
> (Matemática ciência e aplicações, 2014, p. 238)

Ainda na página 238, segue a definição de função logarítmica: “Dado um número real *a* (com $0 \langle a \neq 1$), chama-se *função logarítmica de base a*, a função *f* de $\Re_+^*$ em $\Re$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.”. Um exemplo de $f(x) = \log_2 x$ é aplicado ao diagrama de flechas.

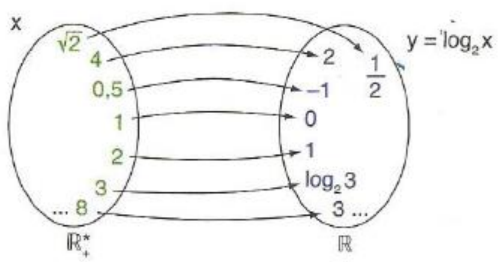


Diagrama de flechas para $f(x) = \log_2 x$

O estudo da função logarítmica segue com a construção de gráficos a partir de tabelas de pares (x, y) e a análise de suas propriedades. O capítulo termina com a resolução de equações e inequações logarítmicas.

A obra ainda apresenta no capítulo 9 um complemento sobre funções. Neste complemento, os autores utilizam diagramas de flechas, gráficos e tabelas para apresentar um estudo sobre funções sobrejetoras, injetoras, bijetoras, inversas e compostas.

O Volume 2 é dividido em 21 capítulos, possui um total de 560 páginas, sendo 42 páginas destinadas ao estudo das funções trigonométricas e suas inversas.

Na página 74, capítulo 4 deste volume, a motivação para o estudo das funções trigonométricas parte de um levantamento da Marinha do Brasil para o estudo das marés alta e baixa no porto de Vitória (ES). Em uma tabela são apresentados os dados coletados durante três dias consecutivos do mês de fevereiro de 2012 e após analise dos dados, o leitor observa a periodicidade do movimento. Os autores encerram a motivação, informando que a maior aplicação das funções trigonométricas consiste na modelagem de fenômenos periódicos.

Nas páginas seguintes, os autores apresentam uma breve revisão do ciclo trigonométrico e estabelecem uma associação entre cada número real e um ponto da circunferência. Na página 80, segue a definição de função periódica: “Uma função $f: A \to B$ é periódica se existir um número real positivo *p* tal que $f(x) = f(x+p)$, $\forall x \in A$. O menor valor positivo de *p* é chamado de período de *f*.”.

Os autores apresentam as funções seno, cosseno e tangente, nesta ordem, individualmente, porém de maneira uniforme. A partir do ciclo trigonométrico apresentam a definição,discutem o sinal da função em relação ao quadrante de *x*, os períodos de crescimento ou decrescimento, o período da função, domínio, contradomínio e imagem, além da paridade da função e a construção do gráfico.

No capítulo 7, as funções trigonométricas inversas, arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente, são igualmente tratadas diretamente no ciclo trigonométrico. Logo no início do capítulo os autores esclarecem que por serem periódicas as funções trigonométricas estudadas não são injetoras e por isso não são inversíveis. Concluem esclarecendo que restrições ao domínio de f serão estabelecidas de modo que assim as dificuldades sejam superadas.

Ao longo de todos os capítulos destinados ao estudo de funções, seja no volume 1 ou volume 2, os autores apresentam um grande número de exercícios aplicados a situações do cotidiano, bem como destacam o comportamento variacional do conceito. Em cada capítulo, os autores apresentam a seção Aplicações. Nesta seção, incluem artigos que possibilitam empregar o conhecimento matemático em outras áreas do saber, estabelecendo um intercambio entre a matemática e a física, a química e a economia.

Motivação	Definição formal	Característica principal da abordagem	Representações mais utilizadas	Intercâmbio com outras ciências
A motivação inicial destaca a característica dinâmica e variacional das funções e identifica a lei de correspondência.	Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B.	A abordagem destaca a característica dinâmica e variacional.	Tabelas, expressões algébricas, gráficos e diagrama de flechas.	Muitos exercícios estabelecem o intercambio entre a matemática e outras ciências.

Principais características do livro “Matemática ciência e aplicações”

Matemática Contexto & Aplicações

(Luiz Roberto Dante)

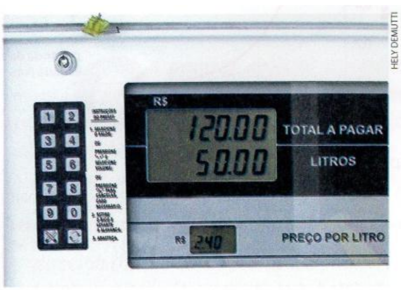
Nesta coleção, o autor apresenta o conteúdo do Ensino Médio em três volumes. No volume 1 encontramos as noções gerais sobre função , a função afim, função quadrática, função modular, função exponencial e função logarítmica. Já no volume têm-se as funções trigonométricas e suas respectivas inversas.

No Volume 1 temos doze capítulos, com um total de 472 páginas, destas, 175 páginas fazem parte dos capítulos referentes ao estudo de funções.

Nas páginas 54 e 55, o autor apresenta um texto introdutório onde aborda a necessidade humana, em diversas áreas como engenharia e física, de descobrir leis que regem modelos presentes nestas ciências. Ainda na página 54, temos o seguinte exemplo: “No Brasil, a maior ponte pênsil foi construída entre 1922 e 1926, no estado de Santa Catarina. A curva formada pelos cabos que formam essas pontes foi descrita algebricamente por meio de uma equação”. Assim, o autor apresenta esta necessidade para justificar o estudo das funções, conforme podemos ver na página 55: “As funções, descrições algébricas da dependência entre grandezas, podem, também, ser representadas graficamente, facilitando a linguagem e favorecendo a sua compreensão.”.

A seguir, têm-se quatro motivações que relacionam duas grandezas. Na página 56, temos as duas primeiras:

Motivação 1: “Número de litros de gasolina e preço a pagar. Considere a tabela abaixo, que relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles.



Número de litros	Preço a pagar (R$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
⋮	⋮
40	96,00

.

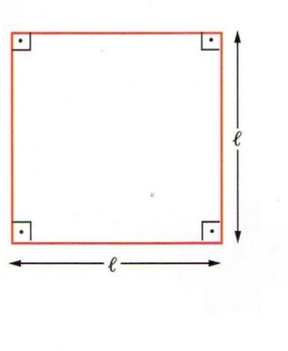
Preço a pagar = R$ 2,40 *vezes* o número de litros comprados.

Observe que o preço a pagar é dado em função do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar depende do número de litros comprados.Preço a pagar = R$ 2,40 vezes o número de litros comprados.”.

(Matemática Contexto & Aplicações, 2008, p.56)

Motivação 2: “Lado do quadrado e perímetro. Veja agora a tabela que relaciona a medida do lado de um quadrado (l) e o seu perímetro (P):

.

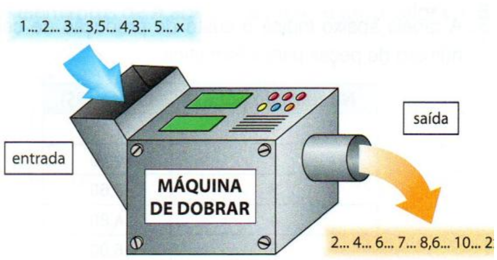


Medida do lado (ℓ)	Perímetro (P)
1	4
2	8
2,5	10
3	12
4,1	16,4
⋮	⋮
ℓ	4ℓ

Observe que o perímetro do quadrado é dado em função da medida do seu lado, isto é, o perímetro depende da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde um único valor para o perímetro. Perímetro = 4 vezes o lado ou $P = 4l \rightarrow$ lei da função ou fórmula matemática da função ou regra da função. Nesta função, o perímetro, como depende da medida do lado, é a variável dependente, e a medida do lado, como não depende de nada, é chamada de variável independente.”.
(Matemática Contexto & Aplicações, 2008, p.56)

Na página 57, temos as outras duas motivações:

Motivação 3: “A máquina de dobrar. Observe ao lado o desenho imaginário de uma máquina de dobrar números.



Veja que os números que saem são dados em função dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem dependem dos números que entram. Assim, a variável dependente é o número de saída e a variável independente é o número de entrada. Nesse caso, temos:Número de saída (n) é igual a duas vezes o número de entrada (x)ou$n = 2x$ → regra da função ou lei da função ou, ainda, fórmula matemática da função."
(Matemática Contexto & Aplicações, 2008, p.57)

Motivação 4: "Numa rodovia, um carro mantém uma velocidade constante de 90 km/h. veja a tabela que relaciona o tempo t (em horas) e a distância d (em quilômetros):

Tempo (h)	0,5	1	1,5	2	3	4	t
Distância (km)	45	90	135	180	270	360	90t

Observe que a distância percorrida é dada em função do tempo, isto é, a distância percorrida depende do intervalo de tempo. A cada intervalo de tempo considerado corresponde um único valor para a distância percorrida. Dizemos, então, que a distância percorrida é função do tempo e escrevemos: $distância = 90 \cdot tempo, d = 90t$".
(Matemática Contexto & Aplicações, 2008, p.57)

Nas quatro motivações, o autor faz um paralelo entre o problema na forma textual e um tabela ou gráfico que ilustre e sintetiza o que foi abordado.

Os exercícios iniciais apresentam situações do cotidiano, por exemplo, a variação do custo de produção de peças para informática e, também faz um paralelo com a geometria, onde aborda a relação entre diagonal e lado, comprimento da circunferência e raio, dentre outros. Na página 59, traz inicialmente a noção de funções via conjuntos e, a seguir a definição de conjuntos: "Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.". Na sequência, o autor usa as relações por diagramas, que já foram apresentadas para exemplificar a definição e, em seguida define domínio, contradomínio e a imagem. Nas páginas que se seguem, o autor trabalha as funções por fórmulas matemáticas. Na página 66, na seção "gráfico de uma função" o autor, a partir de gráficos extraídos de revistas e da internet, faz uma abordagem do crescimento, decrescimento, valores máximos e mínimos das funções.

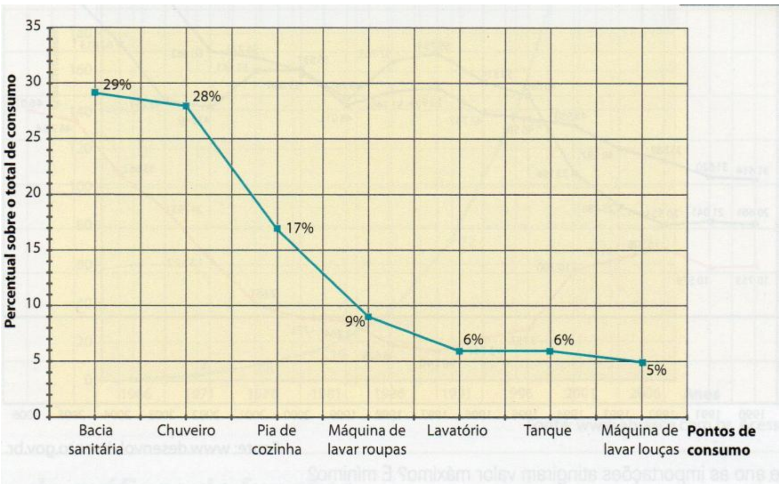
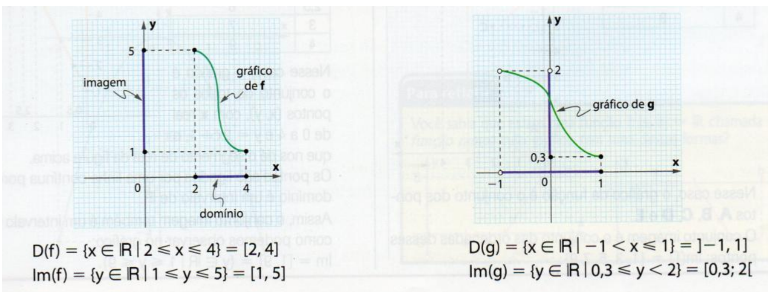


Gráfico do consumo de água por pontos de consumo, em porcentagem, de uma residência, adotado pelo livro "Matemática Contexto &Aplicações"

Na sequência, a próxima seção aborda a construção de gráficos. O autor apresenta um exercício resolvido onde o gráfico é construído com um número finito de pontos, o problema pede o conjunto imagem. Em seguida, os problemas já trabalham com domínios dados por intervalos ou como todos os reais. O autor trabalha ao mesmo tempo a construção de gráficos e a determinação de domínios e imagens através do gráfico.

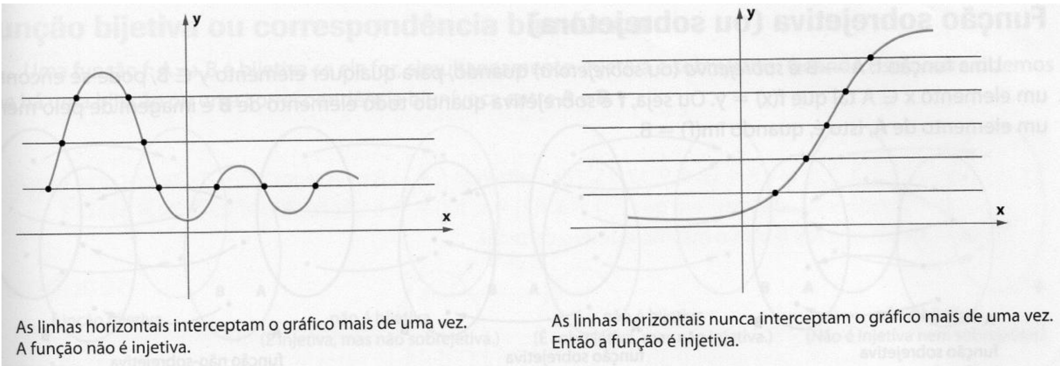


Determinação de domínio e imagem do livro "Matemática contexto & aplicações"

A seguir, o autor aborda a paridade das funções, conceituando e exemplificando a função par e a função ímpar. A partir da página 74, o autor define formalmente as funções crescentes e decrescentes, e traz vários exemplos resolvidos sobre este tema.

Nas páginas 78 a 81, o autor define as funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas:

"Uma função $f: A \to B$ é injetiva quando elementos diferentes de A são transformados por *f* em elementos diferentes de *B*." em seguida, o autor observa que se pode analisar se uma função é injetiva através de seu gráfico:



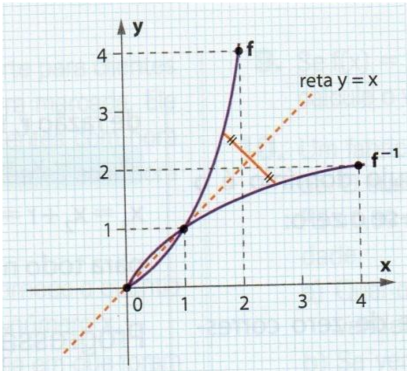
Estudo da injetividade adotado pelo livro "Matemática Contexto &Aplicações"

"Uma função $f: A \to B$ é sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$" e "Uma função $f: A \to B$ é bijetiva se ela for, simultanamente, injetiva e sobrejetiva "

Os exemplos e exercícios que se seguem, trabalham exclusivamente com a identificação de funções que sejam injetivas, sobrejetivas ou bijetivas.

O autor termina este capítulo inicial, abordando as funções compostas e inversas. Para abordar as funções compostas, nas páginas 83 e 84, é apresentado um problema inicial: "Um terreno foi dividido em 20 lotes, todos de forma quadrada e de mesma área. Nessas condições, vamos mostrar que a área do terreno é uma função da medida do lado de cada lote representando uma composição de funções". Em seguida, a definição: "Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, denominamos função composta de g e f a função g $\circ f: A \to C$, que é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in A$".

Já para conceituar as funções inversas, nas páginas 85 e 86, o autor apresenta a seguinte introdução: "Quando associamos o lado e o perímetro de um quadrado, podemos pensar em duas funções bijetivas: uma, que a cada valor do lado associa o perímetro; outra, que a cada valor do perímetro associa o lado.". Assim, apresenta as funções: $P = 4l$ e $l = \frac{P}{4}$, onde l é o lado e P é o perímetro mostrando assim, que as funções são inversas. Em seguida, apresenta a seguinte definição: "Dada uma função $f: A \to B$, bijetiva, denomina-se função inversa de f a função $g: B \to A$ tal que , se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$. O autor, na página 88, observa ainda, a simetria que existe entre as funções f e f^{-1}:



Estudo de função inversa adotada pelo livro "Matemática Contexto &Aplicações"

No capítulo 4, o autor aborda as funções afins. Para introduzir o assunto, são apresentadas três motivações: salário mensal em função do total de vendas do mês de um vendedor; saldo bancário em função do número de notas retiradas; e por fim, a quantidade de água no tanque em função do número de minutos em que a torneira fica aberta.A seguir, são definidas as funções afim, linear, constante e identidade. A taxa de variação é definida e apresentada da seguinte forma:

> "O parâmetro a de uma função afim $f(x) = ax + b$ é chamado de taxa de variação (ou taxa de crescimento). Para obtê-lo, bastam dois pontos quaisquer, porém distintos, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, da função considerada. Assim, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, de onde obtemos que $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$ e, portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}."$$

(Matemática Contexto & Aplicações, 2008, p.102)

Na página 102, o autor apresenta as denominações dos coeficientes angulares e lineares e, a seguir, mostra como construir gráficos de funções afins. Na página 104, autor traça um paralelo entre a função afim e geometria analítica, abordando que o coeficiente angular e a taxa de variação representam a mesma coisa, que este é responsável pela inclinação da reta.

Na página 110, o autor apresenta o estudo de sinal de uma função, através de uma motivação no qual se analisa a despesa e o lucro na venda de maçãs por um comerciante. Só após este problema, é que o autor define zero de uma função afim e, em seguida faz o estudo do sinal pela análise do gráfico.

Na sequência, o autor aborda as inequações- produto e inequações-quociente.

E termina o capítulo explorando a proporcionalidade na função linear. Conforme podemos observar abaixo:

t (em horas)	**d** (em km)
$\frac{1}{3}$	30
$\frac{1}{2}$	45
1	90
2	180
3	270
4	360
t	d = 90t

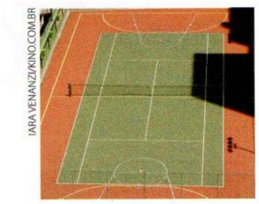
Motivação para estudo da proporcionalidade da função linear adotada pelo livro "Matemática Contexto & Aplicações"

"[...] quando isso ocorre entre duas grandezas, dizemos que elas são proporcionais (ou diretamente proporcionais). Logo, tempo e distância percorrida são grandezas proporcionais, quando se tem velocidade constante.".

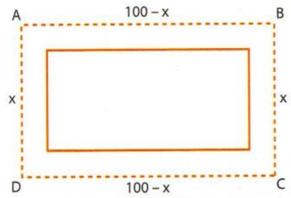
No capítulo 5, o autor dedica ao estudo das funções quadráticas. Na introdução apresenta o seguinte problema, na página 132:

Problema: Os diretores de um centro esportivo desejam cercar com tela de alambrado m volta de uma quadra de basquete retangular.

Tendo recebido 200 metros de tela, os diretores desejam saber quais devem ser as dimensões do terreno a cercar com tela para que a área seja a maior possível.



Realidade



Modelo matemático

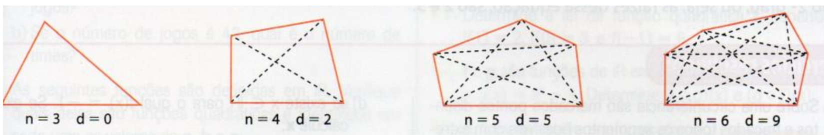
Podemos ilustrar o problema com o retângulo ABCD, com dimensões x por 100 – x, pois o perímetro é de 200 m. Observe que a área do terreno a cercar é dada em função da medida x, ou seja:
f(x) = (100 - x)x = 100x – x^2 ou f(x) = - x^2 + 100x lei da função
Esse é um caso particular de função quadrática [...]
(Matemática Contexto &Aplicações, 2008, p.132)

Seguindo o problema, o autor define formalmente as funções quadráticas: “Uma função $f: \Re \to \Re$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \Re$.”

Na seção seguinte, o autor apresenta situações nas quais aparecem as funções quadráticas:

O primeiro exemplo é na aplicação na geometria:

“O número de diagonais (d) em um polígono convexo de n lados é dado por uma função quadrática. Observe:



Um polígono de n lados tem n vértices. De cada vértice partem $(n - 3)$ diagonais e, para não considerarmos duas vezes a mesma diagonal, dividimos $n(n-3)$ por 2. Assim temos d em função de n dado por: $d(n) = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2-3n}{2}$."
(Matemática Contexto &Aplicações, 2008, p.136)

O segundo é uma aplicação nos fenômenos físicos:

> “Nas quedas livres dos corpos, o espaço (s) percorrido é dado em função do tempo (t) por uma função quadrática s(t) = 4,9 t^2,em que a constante 4,9 é a metade da aceleração da gravidade, que é 9,8 m/s^2.” (Matemática Contexto &Aplicações, 2008, p.136)

O último é uma aplicação no esporte:

> “Num campeonato de futebol, cada clube vai jogar duas vezes com outro, em turno e returno. Assim, o número p de partidas do campeonato é dado em função do número n de clubes participantes, conforme vemos na tabela seguinte:

Número de clubes	Número de partidas
2	2(2 − 1) = 2
3	3(3 − 1) = 6
4	4(4 − 1) = 12
5	5(5 − 1) = 20
...	...
n	n(n − 1)

> Pela tabela, vemos que o número p de partidas é dado por
>
> $(n) = n(n-1) = n^2 - n."$
>
> (Matemática Contexto & Aplicações, 2008, p.137)

O autor apresenta a forma canônica da função quadrática da seguinte maneira:

> “Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos escrever:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$
>
> As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento do quadrado:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2} = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}.$$

Completando o quadrado temos:

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

Ou seja,

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

Ou ainda:

$$f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}".$$

(Matemática Contexto &Aplicações, 2008, p.139)

A partir da equação na forma fatorada, o autor aborda os valores máximos e mínimos, o zero da função quadrática e os gráficos através das famílias das funções do tipo: $f(x)=x^2$, $f(x)=ax^2$, $f(x)=ax^2+k$, $f(x)=a(x-m)^2$, $f(x)=a(x-m)^2+k$, $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$.

Na página 152, o autor apresenta formalmente e através da observação de gráficos, os conceitos de vértice da parábola, valor máximo ou mínimo e imagem da função quadrática. Nos exercícios resolvidos, o autor aborda vários problemas cuja resolução aborda as funções quadráticas.

No estudo do sinal, o autor apresenta as três possíveis situações: $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$, e faz uso de esboços de gráficos e analisam os valores pelos quais temos os valores de x para os quais y é negativo ou positivo. Por fim, o autor termina o capítulo relacionando o estudo do sinal da função polinomial do 2ºgrau com resolução de inequações, inequações-produto e inequações-quociente.

No capítulo 6, o autor aborda as funções modulares, definindo da seguinte forma:"Denomina-se função modular a função *f*, de $\mathfrak{R}$ em $\mathfrak{R}$, tal que$f(x)=|x|$, ou seja: $f(x)=\begin{cases} x, para\ x\geq 0 \\ -x, para\ x<0 \end{cases}$".

Para construir o gráfico, o autor faz por partes, para cada intervalo do domínio e, depois coloca as duas condições em um só gráfico. A seguir, o autor apresenta os gráficos de funções definidas por leis do tipo$f(x)=|x|+k$ e $y=|x+k|$. O autor observa que os respectivos gráficos são obtidos a partir da translação vertical ou horizontal do gráfico de $y = | x |$ e termina o capítulo com a resolução de equações e inequações modulares.

No capítulo 7, na página 196 o autor inicia o estudo das funções exponenciais com a seguinte motivação:

> "Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, calcule quantas bactérias existirão depois de: 1 hora; 2 horas e 3 horas.
> a) Observe que:
> Depois de 1 hora, teremos 2000 bactérias ($2 \cdot 1000$);
> Depois de 2 horas, teremos 4000 bactérias ($2^2 \cdot 1000$);
> Então, depois de 3 horas, teremos 8000 bactérias ($2^3 \cdot 1000$).[...]
> b) depois de 10 horas, teremos $2^{10} \cdot 1000$ ou 1024000 bactérias
> c) depois de x horas, teremos $2^x \cdot 1000$ bactérias.
> De modo geral, o modelo matemático usado para resolver situações como essa é dado pela função de tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$, que estudaremos neste capítulo [...].".
> (Matemática Contexto &Aplicações, 2008, p.196)

Após uma revisão de potências e de radiciação, o autor na página 207, o autor define formalmente as funções exponenciais e, em seguida apresenta a construção de alguns gráficos e também trabalha com a identificação da lei de formação.

Nas páginas que seguem, são apresentadas as propriedades da função exponencial e a resolução de equações e inequações exponenciais. Na página 215, o autor destaca uma seção para abordar o número e. O autor define da seguinte maneira: "quando n aumenta indefinidamente, a sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende muito lentamente para o número irracional $e = 2{,}7182818284....$

No capítulo seguinte, a partir da página 226 serão abordadas as funções logarítmicas. A motivação inicial pode ser vista a seguir:

> "Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa continuar a mesma? [...]

Tempo	População
Início	P_0
1 ano	$P_1 = P_0 \cdot 1{,}012$
2 anos	$P_2 = (P_0 \cdot 1{,}012)1{,}012 = P_0(1{,}012)^2$
3 anos	$P_3 = P_0(1{,}012)^3$
⋮	⋮
x anos	$P_x = P_0(1{,}012)^x$

Supondo que a população dobrará após x anos, temos: $P_x = 2P_0$
Daí: $P_0(1{,}012)^x = 2P_0$ e $(1{,}012)^x = 2$.
Não é possível resolver essa equação usando os conhecimentos adquiridos até aqui.
Com o objetivo de transformar uma equação exponencial como essa, numa igualdade entre potências de mesma base, vamos desenvolver a noção de logaritmo.”.
(Matemática Contexto &Aplicações, 2008, p.226)

Já na página 227, o autor apresenta a definição formal dos logaritmos: “Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a, ou seja: $log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, com\ a\ e\ b\ positivos\ e\ a \neq 1$”. Em seguida, o autor apresenta alguns exemplos na qual usa a definição e, apresenta as condições de existência dos logaritmos.

Na página 230, o autor apresenta as consequências da definição de logaritmos e as propriedades operatórias dos logaritmos. Nas páginas seguintes, é apresentada na seção 2, a função logarítmica, definida da seguinte forma: “a inversa da função exponencial de base a é a função $log_a: \mathfrak{R}_+^* \rightarrow \mathfrak{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com a real positivo e a ≠ 1.”

Em seguida, são apresentados os gráficos das funções logarítmicas e as equações e inequações logarítmicas.

O volume 2 da obra é dividido em 13 capítulos, possui um total de 432 páginas, sendo 28 páginas destinadas ao estudo das funções trigonométricas e suas inversas.

Nas páginas 70 e 71, no capítulo 4 deste volume, o autor apresenta um texto introdutório às funções trigonométricas, conforme podemos ver no trecho que se segue: “Os fenômenos periódicos, aqueles que se repetem em intervalos regulares, são encontrados em várias áreas, como música, acústica, eletricidade, mecânica. [...]”.

Na página 72, o autor já define a função seno, apresentando uma tabela com valores de x e y e, em seguida é construído o gráfico da função seno. A seguir, é feito o mesmo estudo com as demais funções. Após esta primeira abordagem é feito um estudo das funções trigonométricas, onde se afirma que estão são tais que envolvem as funções arco vista anteriormente. Em seguida, são abordados os domínios, funções transladadas e dilatadas. Na página 92, o autor aborda as funções trigonométricas inversas. O autor se resume a mostrar que as funções trigonométricas só possuem inversas se for restringido o domínio e, apresenta o gráfico da função $y = arctg\ x$. Terminando assim, o estudo de funções.

No decorrer dos capítulos destinados as estudo de funções, o autor aborda os temas com uma variedade de exercícios aplicados a situações cotidianas ou em outras áreas de conhecimento além da Matemática. Ao final de cada capítulo, o autor apresenta o tópico “assuntos optativos”, onde é feito um paralelo entre o assunto abordado no capítulo e outras áreas de conhecimento como, Física, Química, Biologia, dentre outros.

Motivação	Definição formal	Característica principal da abordagem	Representações mais utilizadas	Intercâmbio com outras ciências
A motivação inicial destaca a caracterização das funções e identifica a lei de correspondência.	Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.	A abordagem destaca a característica comportamental e sua variação.	Tabelas, expressões algébricas, gráficos e diagrama de flechas.	Muitos exercícios estabelecem a ligação entre a matemática e outras ciências.

Principais características do livro “Matemática Contexto & Aplicações”

Matemática - Uma nova abordagem

(Giovanni, Giovanni Jr, Bonjorno, Paulo Câmara)

Nesta obra, os autores apresentam o conteúdo do Ensino Médio em três volumes. Existe a opção do volume 1 com trigonometria e o volume 2 com progressões ou, o contrário. Analisaremos uma coleção com a primeira opção. Assim, no volume 1 são abordadas as noções de funções, as funções afim, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmica e as trigonométricas.

O volume 1 dividido em dez capítulos, possui um total de 400 páginas, destas, 210 páginas são destinadas ao estudo de funções.

No capítulo 3, na página 78, os autores apresentam a ideia de função explanando que a relação de dependência é encontrada em diferentes situações, que são abordados com os seguintes exemplos:

> "Em uma conta de luz, o valor a ser pago depende do consumo medido.
> Num termômetro clínico, a temperatura varia de acordo com a altura da coluna de mercúrio.
> Em uma cultura de bactérias, a população se altera ao longo do tempo.".
> (Matemática – Uma nova abordagem, 2013, p.78)

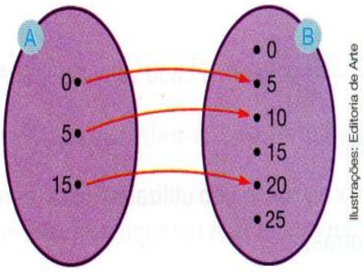
Na página 80, os autores destacam a lei de formação. Apresenta como exemplo, a fórmula $A = l^2$ que permite determinar a área A de um quadrado em função da medida l de seu lado. Em seguida, destaca-se que as relações com as seguintes características: "todos os valores da variável independente estão associados a valores da variável dependente"; "cada valor atribuído à variável independente está associado a um único valor da variável dependente", são chamadas de funções.

Na página 81, os autores apresentam exemplos de funções que representam situações do cotidiano como, por exemplo, o salário de uma vendedora de uma loja em função do valor total de vendas efetuadas no mês. Os exercícios que se seguem, continuam com esta mesma linha de apresentar problemas do cotidiano como, por exemplo, a variação de mercadorias vendidas em função do número de anúncios feitos.

Na página 83, segue uma seção "conceituando função". Os autores apresentam vários exemplos associando dois conjuntos A e B, uma fórmula e o diagrama que ilustra o exemplo. A seguir, um dos exemplos:

◆ Dados os conjuntos A = {0, 5, 15} e B = {0, 5, 10, 15, 20, 25}, seja a relação de *A* em *B* expressa pela fórmula $y = x + 5$, com $x \in A$ e $y \in B$.

x	y
0	5
5	10
15	20



Observamos que:

◆ todos os elementos de *A* estão associados a elementos de *B*;

◆ a dado elemento de *A* está associado um único elemento de *B*.
Nesse caso, a relação de *A* em *B* expressa pela fórmula $y = x + 5$ é uma **função de *A* em *B*.**

Exemplo adotado pelo livro "Matemática – Uma nova abordagem"

Após alguns exemplos, os autores definem formalmente funções: "Sejam *A* e *B* dois conjuntos não vazios e *f* uma regra (lei de formação ou correspondência) que associa os elementos de *A* com os elementos de *B*. Dizemos que *f* é uma função de *A* em *B* quando cada elemento *x* do conjunto *A* está associado por essa regra a um único elemento *y* do conjunto *B*.". A partir da definição, os autores definem domínio, contradomínio e imagem através do uso de diagramas de flechas e da fórmula que define a função.

Na página 87, os autores abordam o estudo de domínio. A seguir, tem-se a seção denominada "gráfico de uma função", O exemplo inicial é um domínio finito e, só após é abordado conjuntos infinitos, conforme podemos ver abaixo:

1. Construir o gráfico da função f: $A \to \mathbb{R}$, dada por $y = x + 1$, em que $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

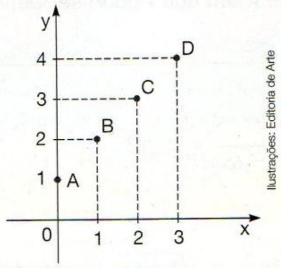
Resolução

Vamos começar construindo uma tabela com os valores de *x* do domínio e determinar os valores de $y = f(x)$.

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	3	(2, 3)
3	4	(3, 4)

Observe que $D(f) = A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Como o conjunto *A* é finito, o gráfico de *f* é formado por apenas 4 pontos.



Os pontos *A*, *B*, *C*, *D* constituem o gráfico da função dada.

Exemplo de gráficos do livro "Matemática - Uma nova abordagem"

Nos exercícios que seguem, os autores trabalham com questões que ilustram situações do cotidiano:

26. Um restaurante utiliza formas diferentes para cobrar por suas refeições: preço fixo ou preço por quilograma, dependendo da quantidade consumida pelo cliente. O quadro mostra os preços praticados.

Quantidade	Preço
Até 400 g	R$ 12,00 por refeição
Acima de 400 g	R$ 12,00 por 400 g, acrescidos de R$ 0,02 por grama que exceder 400 g

a) Qual é a fórmula que exprime a relação entre o preço da refeição e a quantidade de quilogramas consumidos?

b) Construa o gráfico que representa essa relação.

Exercício do livro "Matemática - Uma nova abordagem"

Na página 92, é abordado crescimento e decrescimento das funções e, a seguir são apresentados exercícios que analisam gráficos extraídos da internet, jornais e revistas.

Na seção seguinte, nas páginas 96 a 98, são definidas as funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras. E, a seguir as funções compostas com a seguinte motivação:

> "Uma fábrica que produz sapatos calcula seu lucro por meio da função $L = 0{,}4 \cdot C$, em que L é o lucro e C o preço de venda desse sapato para o comércio. Por sua vez, o preço C de venda é dado por $C = 20 + 2P$, em que P é o valor gasto com a matéria-prima para a fabricação desse sapato. Vemos, então, que o lucro L é dado em função do preço C, e este em função do gasto P. Seria possível determinar o lucro L a partir do gasto P com a matéria-prima?
>
> Para isso, podemos fazer uma composição entre as duas funções:
>
> $$L = 0{,}4 \cdot C \ (I) \ e \ C = 20 + 2P \ (II)$$
>
> Substituindo (II) em (I), obtemos:
>
> $L = 0{,}4(20 + 2P) \Rightarrow L = 8 + 0{,}8P$ (que relaciona diretamente L e P).
>
> Nessa situação, observamos que a variável L (lucro) é a função da variável C (preço de venda), que depende por sua vez, de uma terceira variável, P (custo da matéria-prima).
>
> Essas cadeias de dependências podem ser matematicamente modeladas pela composição de funções.".
>
> (Matemática – Uma nova abordagem, 2013, p.96)

A seguir, os autores apresentam a definição formal de funções compostas: "Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, chamamos de função composta de g e f a função $g \circ f: A \to C$, tal que $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$, para $x \in A$". Os autores terminam o capítulo apresentando as funções inversas, com a seguinte definição: "Seja a função bijetora $f: A \to B$. Denomina-se função inversa de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$, para todo $x \in B$ e $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$, para todo $x \in A$.

Os autores terminam o capítulo com a seção de título: "estabelecendo conexões", onde abordam a restrição do domínio para determinar as funções inversas.

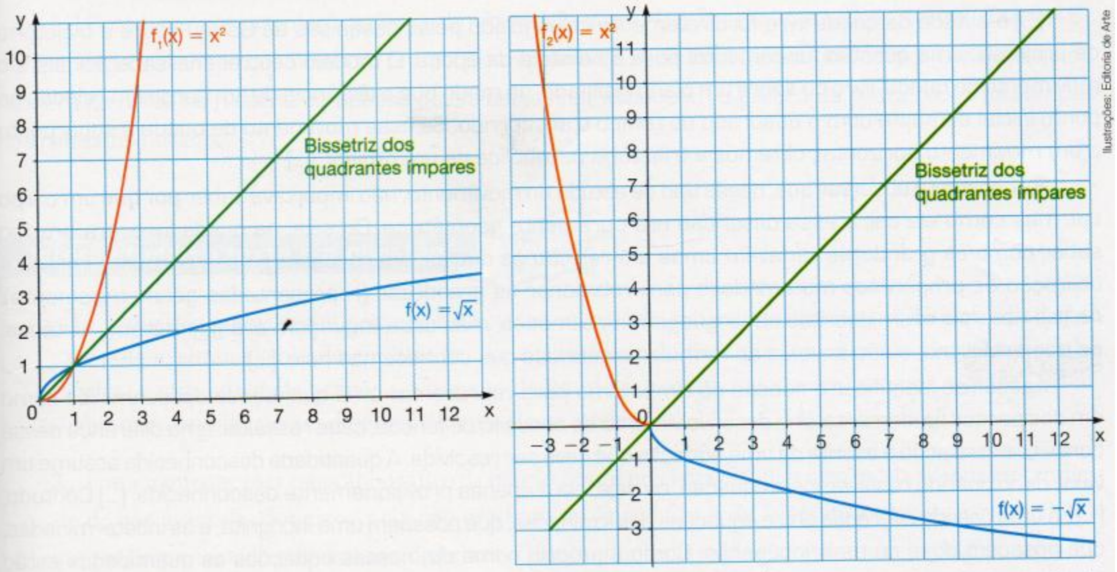
Podemos obter, porém, relações bijetoras restringindo convenientemente o domínio de f(x). Por exemplo:

- $f_1(x) = x^2$, com $D = \mathbb{R}_+$
- $f_2(x) = x^2$, com $D = \mathbb{R}_-$.

Se aplicarmos o procedimento prático em $f(x) = x^2$, obtemos $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$. Assim temos:

- $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ é a inversa de $f_1(x) = x^2$, com $D = \mathbb{R}_+$
- $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ é a inversa de $f_2(x) = x^2$, com $D = \mathbb{R}_-$

Observe os gráficos a seguir:



Note que, em ambos os casos, a simetria entre o gráfico da função e o de sua inversa, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, é mantida.

Gráficos para estudo de restrições de domínio para funções inversas do livro "Matemática – Uma nova abordagem"

No capítulo 4, é apresentada a função afim. Para introduzir o assunto é apresentado o seguinte problema:

> "[...] o preço p a ser cobrado por uma "corrida " de táxi pode ser composto de uma parte fixa, chamada bandeirada, e uma parte variável, que depende da distância x percorrida (imagine que o táxi não cobrou a hora parada).
> Se, nessa cidade, o valor da bandeirada é de R$ 4,10 e cada quilômetro rodado custa R$ 2,50 na bandeira 1, podemos representar o preço a ser cobrado em função da distância percorrida pela lei: $p = 4{,}10 + 2{,}50x$
> A lei dessa função é equivalente a : $f(x) = 4{,}10 + 2{,}50x$ ou
> $y = 4{,}10 + 2{,}50x$ em que $f(x)$ ou y é o preço a ser cobrado (em R$) e x é a distância percorrida (em km).".
> (Matemática – Uma nova abordagem, 2013, p.113)

Em seguida, os autores definem formalmente a função afim: “Uma função $f\colon \Re \to \Re$, que a todo número $x \in \Re$ associa o número $ax + b$, com a e b reais, com $a \neq 0$, é chamada função afim.

$$x \longmapsto ax + b$$

$f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$.”.

Os exercícios apresentam problemas que envolvam situações do cotidiano, conforme podemos ver o exemplo:

2. Uma pessoa caminhando sempre no mesmo ritmo dá um passo de 80 cm a cada 1 segundo.

Karime Xavier/Folhapress

A caminhada é uma atividade física democrática, pois pode ser realizada por pessoas de todas as idades, desde que avaliadas por um médico. Além de trazer benefícios para o corpo, propicia a socialização e ajuda no bem-estar das pessoas.

a) Escreva a fórmula que indica a distância percorrida d, em centímetro, em função do tempo t, em segundos. As grandezas distância (d) e tempo (t) são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

b) Que distância, a pessoa percorrerá em 10 segundos? E em 40 segundos?

c) Quantos segundos ela levará para percorrer 100 metros?

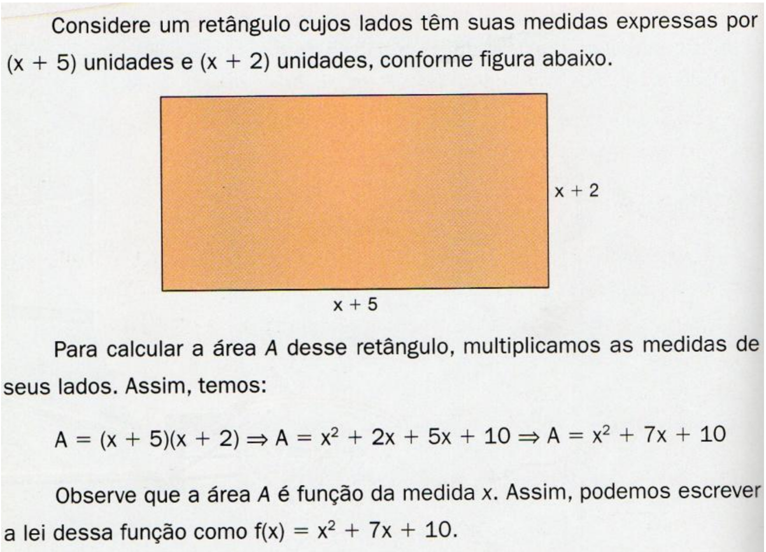
Exemplo de função afim adotado pelo livro “Matemática – Uma nova abordagem”

Nas páginas 115 e 116, os autores apresentam a seção “gráfico de função afim”. Inicialmente, é apresentado um conjunto com domínio finito e, em seguida com o domínio os números reais.

Após a construção dos gráficos, são definidos os coeficientes angulares e lineares e, a partir dos conceitos, os autores exploram o comportamento de alguns gráficos e observam os conceitos apresentados no capítulo.

Os autores terminam o capítulo apresentando os conceitos de crescimento e decrescimento, raiz da função, o estudo do sinal da função afim e as inequações de 1° grau.

O capítulo 5 aborda as funções quadráticas. Como motivação, é apresentado o problema abaixo:



Considere um retângulo cujos lados têm suas medidas expressas por $(x + 5)$ unidades e $(x + 2)$ unidades, conforme figura abaixo.

Para calcular a área A desse retângulo, multiplicamos as medidas de seus lados. Assim, temos:

$$A = (x + 5)(x + 2) \Rightarrow A = x^2 + 2x + 5x + 10 \Rightarrow A = x^2 + 7x + 10$$

Observe que a área A é função da medida x. Assim, podemos escrever a lei dessa função como $f(x) = x^2 + 7x + 10$.

Motivação para função quadrática adotada pelo livro

"Matemática – Uma nova abordagem"

Em seguida, é apresentada a seguinte definição:"Uma função $f: \Re \rightarrow \Re$, que a todo número $x \in \Re$ associa o número $ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$ é chamada de função quadrática. $x \longmapsto ax^2 + bx + c$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ou $y = ax^2 + bx + c$"

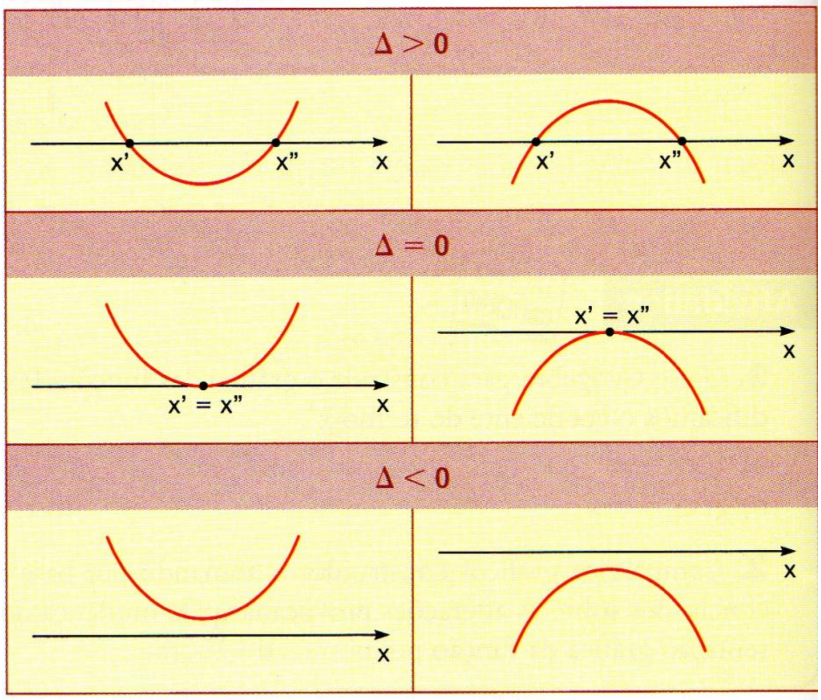
Nas páginas que se seguem, os autores apresentam uma série de exercícios cujas resoluções recaem em funções quadráticas.

Na página 143, são apresentadas as funções quadráticas com seus respectivos gráficos. Nestes, são destacados as características de formação dos gráficos: eixo de simetria, concavidade, vértice e a intersecção do gráfico com o eixo y.

Na página 145, com o título tecnologia, os autores apresentam o software Geogebra e, através de um passo a passo, descreve uma atividade na qual o aluno pode analisar os comportamentos dos coeficientes nos gráficos das funções quadráticas.

Na página 146, é definido zero de uma função quadrática: “[...] os zeros de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$.”

Em seguida, é destacado que existem três possibilidades para o sinal deΔna equação $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, que são: $\Delta > 0, \Delta < 0\ e\ \Delta = 0$. Representando ainda graficamente:



Resumo da discussão do discriminante adotado pelo livro
“Matemática – Uma nova abordagem”

Na página 148, o destaque é para o vértice da parábola: “as coordenadas do vértice de uma parábola que representa a função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ são dadas por:$x_{V=} -\frac{b}{2a}\ e\ y_v = -\frac{\Delta}{4a}$".

Em seguida, é apresentado graficamente o vértice e sua importância no estudo das funções quadráticas:

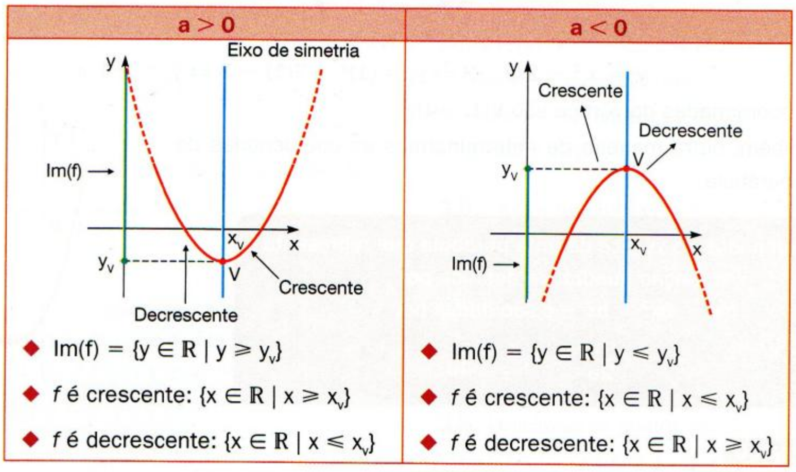


Gráfico apresentado para estudo do vértice do livro "Matemática - Uma abordagem"

Na seção seguinte, os autores apresentam valores máximos e mínimos de uma função quadrática e seguem com problemas que abordam todos os conceitos vistos.

Na seção 6, o estudo do sinal é apresentado em três situações $\Delta > 0, \Delta < 0$ e $\Delta = 0$. Os autores fazem uso de esboços de gráficos e procuram pelos valores de x para os quais y é negativo ou positivo. Por fim, encerram o capítulo relacionando o estudo do sinal da função polinomial do 2º grau com resolução de inequações, inequações-produto e inequações-quociente.

No capítulo 5, é abordado a função modular. No início do capítulo, o autor define o valor absoluto ou módulo de um número real:"$|x| = \begin{cases} x, se \ \ x \geq 0 \\ -x, se \ x < 0 \end{cases}$".

Na seção seguinte, página 172, a definição de função modular é apresentada: "Denominamos função modular à função$f(x) = |x|$definida para todo x real por:$f(x) = \begin{cases} x, se \ x \geq 0 \\ -x \ , se \ x < 0 \end{cases}$ ".

Os autores seguem apresentam a construção do gráfico da função modular e encerram o capítulo abordando equações e inequações modulares.

No capítulo 7, a função exponencial é apresentada. Inicialmente, é feita uma revisão de exponenciais e equações exponenciais. A seguir, é apresentado o seguinte exemplo:

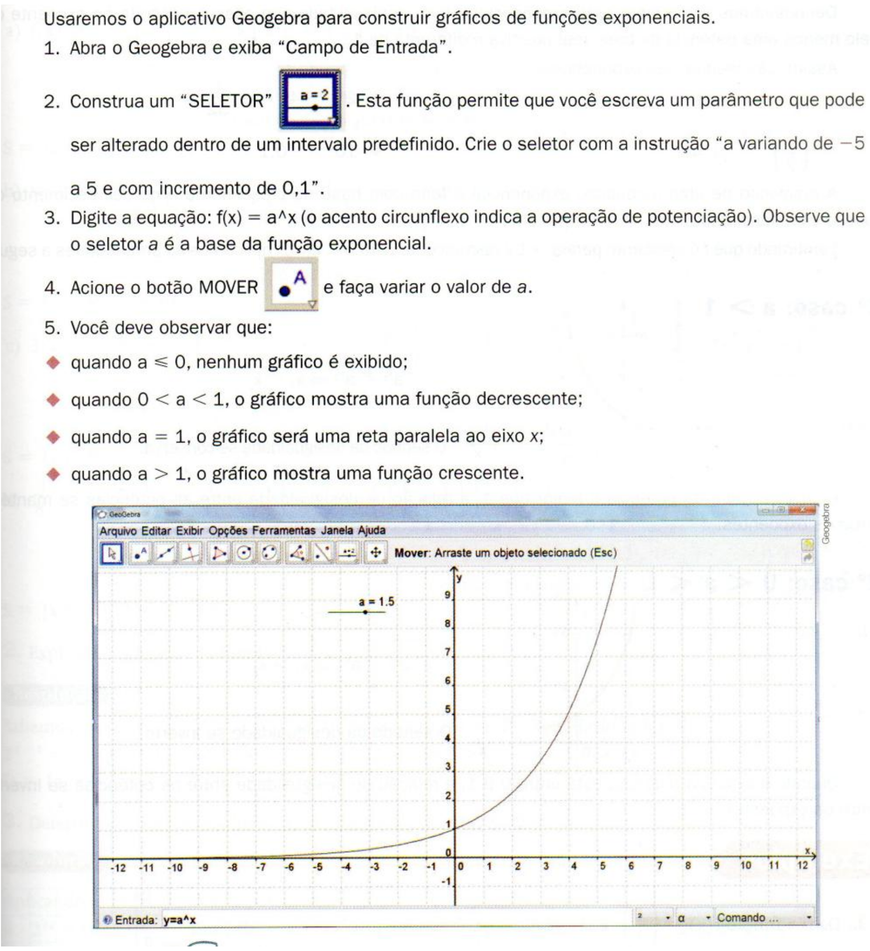
> "Uma cultura, inicialmente com 100 bactérias, reproduz-se em condições ideais. Suponha que, por divisão celular, cada bactéria dessa cultura dê origem a duas outras bactérias idênticas por hora.
>
> Qual a população dessa cultura após 3 horas do instante inicial?

> Depois de quantas horas a população dessa cultura será de 51200 bactérias?".
> (Matemática uma nova abordagem, 2013, p. 193)

Já na página 197, é definida a função exponencial:

> "A função $f: \Re \rightarrow \Re_{+}^{*}$dada por $f(x) = a^x$(com $a > 0$ e $a \neq 1$) é denominada função exponencial de base a.
>
> Por que a base deve ser positiva e diferente de 1? Observe.
>
> Se a < 0, então $f(x) = a^x$não estaria definida para todo *x* real
> Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função constante.".
> (Matemática uma nova abordagem, 2013, p. 197)

Os autores seguem apresentando exercícios que abordam situações do cotidiano. Em "tecnologia", constroem o gráfico da função com o auxílio do software Geogebra:



Usaremos o aplicativo Geogebra para construir gráficos de funções exponenciais.

1. Abra o Geogebra e exiba "Campo de Entrada".
2. Construa um "SELETOR" . Esta função permite que você escreva um parâmetro que pode ser alterado dentro de um intervalo predefinido. Crie o seletor com a instrução "a variando de −5 a 5 e com incremento de 0,1".
3. Digite a equação: f(x) = a^x (o acento circunflexo indica a operação de potenciação). Observe que o seletor *a* é a base da função exponencial.
4. Acione o botão MOVER e faça variar o valor de *a*.
5. Você deve observar que:

- quando a ⩽ 0, nenhum gráfico é exibido;
- quando 0 < a < 1, o gráfico mostra uma função decrescente;
- quando a = 1, o gráfico será uma reta paralela ao eixo *x*;
- quando a > 1, o gráfico mostra uma função crescente.

Construção de gráfico com o software Geogebra do livro "Matemática – Uma nova abordagem"

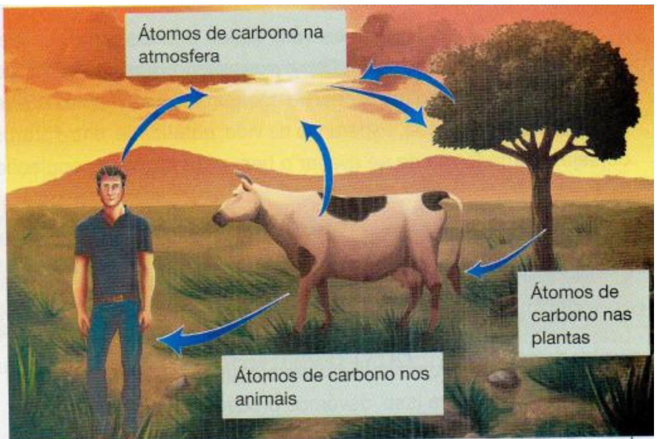
Os autores encerram o capítulo com a resolução de equações e inequações exponenciais. No capítulo seguinte, é apresentada a função logarítmica, antes, porém, logaritmo é definido da seguinte forma: “O logaritmo de um número de um número positivo b, na base a, positiva e diferente de 1, é o expoente x ao qual se deve elevar a para se obter b. $log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, com $b > 0, a > 0\ e\ a \neq 1$”.

Em seguida, é apresentado o número e:“[...]Há ainda, os logaritmos neperianos (o nome foi dado em homenagem a John Napier). A base desses logaritmos é o número irracional *e = 2,71828*....Esses logaritmos também são conhecidos por logaritmos naturais.$log_e b = \ln b$.”

Destaca-se ainda, nas páginas 215 e 216, a seção: “estabelecendo conexões” onde, os autores abordam o uso dos logaritmos para estimar a idade de um fóssil:

Estimando a idade pelo método do carbono radioativo

O carbono 14 (^{14}C) forma-se no ar atmosférico quando nêutrons dos raios cósmicos colidem com núcleos de nitrogênio. O carbono 14 combinado com o oxigênio constitui o gás carbônico radioativo (CO_2), que é absorvido pelos vegetais por meio da fotossíntese, e pelos animais por meio da ingestão direta ou indireta de vegetais.



Ciclo do carbono.

Dessa forma, a quantidade de carbono 14 existente nos tecidos vegetais e animais vivos é praticamente constante.

Assim, quando um ser morre, a quantidade de carbono 14 nele contida começa a diminuir à medida que esse ser não mais o absorve e entra em processo de decomposição. O período de meia-vida do carbono 14 (tempo necessário para que a metade da massa de um corpo formado por essa partícula se desintegre) é aproximadamente 5 370 anos.

Os cientistas conseguem determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo de madeira (com idade inferior a 40 000 anos), por exemplo, com base na relação entre a concentração de ^{14}C restante e a concentração existente numa espécie semelhante atual.

Para o cálculo de períodos maiores, o melhor é usar o urânio 238, que desintegra muito mais lentamente, transformando-se em chumbo 206. As rochas mais antigas são as que contêm maiores proporções de chumbo.

De modo geral, supondo um corpo de massa M_0 formado por uma partícula radioativa cuja taxa de desintegração é α, sua massa *M*, após um tempo *t* (em anos) de desintegração, é dada por:

$M = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$ (em que $\alpha = \frac{\ell n 2}{t_0}$ e t_0 é a meia-vida da partícula).

Fóssil de um peixe pré-histórico. Os fósseis são restos de animais ou plantas que ficam preservados por milhões de anos.

“Estabelecendo conexões” do livro “Matemática – Uma nova abordagem”

Após apresentar as propriedades dos logaritmos e as equações logarítmicas, é definida a função logarítmica. Inicialmente é apresentada a seguinte introdução:

> “[...] uma situação em que o logaritmo está presente: a escala Richter, usada para medir a magnitude de um terremoto, é uma escala logarítmica.
> Existem outras situações em que são usados logaritmos, por exemplo: a escala da pH(potencial hidrogeniônico). O pH indica a acidez de um meio aquoso e é calculado em função da concentração de íons de hidrogênio H^+ que esse meio apresenta.
> Podemos calcular o pH de um meio aquoso pela fórmula a seguir:
> $$pH = -log[H^+]$$
> A igualdade acima é a representação de uma função logarítmica.”. (Matemática uma nova abordagem, 2013, p. 226)

A seguir, a definição: “Toda função do tipo: $f: \Re_+^* \rightarrow \Re$ tal que $f(x) = log_a x$, com $a \neq 1$, sendo a um número real positivo é denominada função logarítmica.”

As funções são exploradas amplamente nos exercícios, sendo abordadas diversas situações do cotidiano. O capítulo termina com o estudo das inequações logarítmicas.

O capítulo 9 é dedicado ao estudo das funções trigonométricas. Inicialmente, os autores abordam o estudo da circunferência trigonométrica, o seno e cosseno de um arco. Já na página 252, é apresentada a função seno. A partir, do gráfico de $y = sen\, x$, são explorados o domínio, a imagem, e a periodicidade. O mesmo tratamento é dado a função cosseno. Em seguida, seguem exercícios, que exploram estes conceitos das funções seno e cosseno. A partir da página 258, é definida a tangente de um arco para, em seguida apresentar a função tangente. A abordagem desta função, é a mesma das anteriores: apresenta-se o gráfico da função e, em seguida analisa-se o domínio, a imagem e a periodicidade desta função. As equações e inequações trigonométricas são apresentadas na ordem. As demais funções trigonométricas e as funções inversas não são abordadas nesta obra.

No decorrer de todos os capítulos destinados as estudo de funções, os autores apresentam um grande número de exercícios que aplicam situações do cotidiano, além de destacar características comportamentais do conceito abordado. Em cada capítulo, os autores apresentam a seção estabelecendo conexões, onde destaca a aplicação daquele conceito em diversas áreas do conhecimento como astronomia, física, química dentre outras.

Ao longo de todos os capítulos destinados ao estudo de funções, seja no volume 1 ou volume 2, os autores apresentam um grande número de exercícios aplicados a situações do cotidiano, bem como destacam o comportamento variacional do conceito. Em cada capítulo, os autores apresentam a seção Aplicações. Nesta seção, incluem artigos que possibilitam empregar o conhecimento matemático em outras áreas do saber, estabelecendo um intercâmbio entre a matemática e a física, a química e a economia.

Motivação	Definição formal	Característica principal da abordagem	Representações mais utilizadas	Intercâmbio com outras ciências
A motivação inicial destaca a necessidade de se conhecer as funções e identifica a lei de correspondência.	Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma regra (lei de formação ou correspondência) que associa os elementos de A com os elementos de B. Dizemos que f é uma função de A em B quando cada elemento x do conjunto A está associado por essa regra a um único elemento y do conjunto B.	A abordagem destaca a característica e aplicações principais das funções.	Tabelas, expressões algébricas, gráficos e diagrama de flechas.	Muitos exercícios estabelecem o intercâmbio entre a matemática e outras ciências.

Principais características do livro “Matemática uma nova abordagem”

Capítulo 3

3.1 Relações e Funções

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.

Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9, -3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$satisfazem à relação dada.

No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Dados dois conjuntos, digamos X e Y, uma *função* é uma correspondência que associa a cada elemento de X um e só um elemento de Y. O conjunto X é o *domínio* da função. O conjunto Y é dito *contradomínio* da função. A notação $f(x)$ é utilizada para indicar o elemento do *contradomínio* que está associado a x pela função f e chama-se o *valor da função f em x* ou a *imagem de x por f*.

Explorando o conceito

Retornando à questão inicial, observe que a função determinada se trata de $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é dado por $[0, +\infty)$. Sendo assim, a definição correta para a raiz quadrada de um número a é o número **positivo** que elevado ao quadrado é igual a a e, portanto, $\sqrt{9} = 3$.

A questão levantada na motivação é especialmente relevante se considerarmos que, apesar de imaginarem que "a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a", a grande maioria dos alunos reconhece a expressão $f(x) = \sqrt{x}$ como sendo uma função, sem perceber que essas duas concepções são contraditórias. Caso a "definição" de raiz quadrada estivesse correta, teríamos:

$$f(9) = \sqrt{9} = 3 \quad \text{e} \quad f(9) = \sqrt{9} = -3,$$

o que seria um absurdo, dada a unicidade da imagem.

Da discussão acima, vimos que para $f : \Re_+ \to \Re$ tal que $y = \sqrt{x}$, o par $(9, 3)$ pertence à função. Mas, o que esperar dos outros pares ordenados que também atendem a lei de correspondência? Que comportamento apresentam?

Cada ponto do gráfico de uma função f é indicado por coordenadas na forma de par ordenado (x, y) com $y = f(x)$. O eixo horizontal $(0X)$ é denominado eixo das abscissas e o eixo vertical $(0Y)$, eixo das ordenadas. O gráfico de uma função $f : \Re \to \Re$ é um subconjunto do $\Re^2$ formado pelos pares ordenados (x, y) com $x \in \Re$ e $y = f(x)$, ou seja, $G(x) = \left\{(x, y) \in \Re^2 \,/\, y = f(x)\right\}$.

A partir da análise do gráfico de uma função podemos obter informações importantes sobre o comportamento da mesma. Diagnosticar períodos de crescimento e decrescimento, eventuais simetrias e periodicidades.

Para identificar o gráfico de uma função precisamos observar duas condições:

- ✓ Para todo $x \in X$ existe um $(x, y) \in f$
- ✓ Se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$ então $y = y'$

Considerando os infinitos pares ordenados $(x, \sqrt{x})$ com $x \in \Re_+$ temos para gráfico da função a curva abaixo:

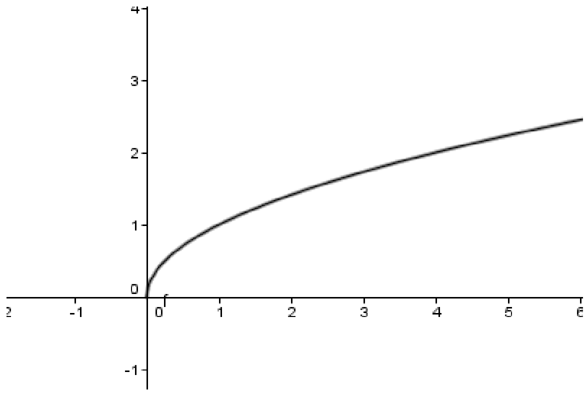


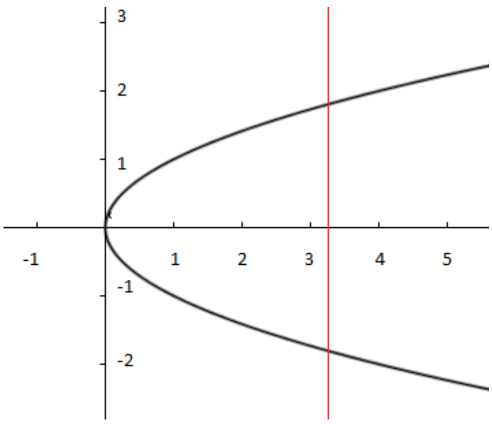
Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$

Observando o gráfico, verificamos que o par ordenado $(0, 0)$ pertence a função. Isto significa que para $\sqrt{x} = 0$ temos $x = 0$. Este valor de x é denominado o zero da função.

Zero da função f é todo número x cuja imagem é nula, isto, é, $f(x) = 0$.

Podemos interpretar o zero da função como sendo a abscissa do ponto de interseção do gráfico com o eixo horizontal $(0X)$.

Neste momento, gostaríamos de retomar a situação lançada no início deste capítulo, para analisar graficamente a **relação** da forma (x^2, x), aplicada a todos os números reais. Considerando todos os pares ordenados que atendem a lei estabelecida temos para gráfico desta relação a curva abaixo:



Teste da reta vertical

Como já esperávamos a curva **não** atende as condições necessárias ao gráfico de uma função: para todo x do domínio, existe um $(x\,,\,y) \in f$ e se $(x\,,\,y)\,e\,(x\,,\,y')$ pertencem a função, então $y = y'$. Podemos observar que a reta auxiliar em vermelho, paralela ao eixo $(\,0Y\,)$, "corta" a curva em dois pontos, significando que existe algum elemento do domínio que está relacionado a mais de um elemento do contradomínio. Este procedimento, traçar retas auxiliares verticais para verificar se estas intersectam a curva em mais de um ponto, é chamado de teste da reta vertical.

Teste da reta vertical: se toda a reta vertical no plano xy "corta" uma curva dada, no máximo em um ponto, então a curva é o gráfico de uma função.

Atividades propostas

Atividade 1: Trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Sugerimos que o professor defina para os alunos, dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: $p_{1,}\, p_2$ e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A. As impressões digitais serão representadas por: $d_{1.1,}\, d_{2.1,}\, d_{3.1}\,, d_{1.2,}\, d_{2.2,}\, d_{3.2}\,, d_{1.3,}\, d_{2.3,}\, d_{3.3}\,, d_{1.4,}\, d_{2.4,}\, d_{3.4}\,, \ldots, d_{1.10,}\, d_{2.10}$ e $d_{3.10}$ (o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) :

$$A = \{\, p_{1,}\, p_{2,}\, p_3 \,\}$$

$$B = \{\, d_{1.1,}\, d_{2.1,}\, d_{3.1}\,, d_{1.2,}\, d_{2.2,}\, d_{3.2}\,, d_{1.3,}\, d_{2.3,}\, d_{3.3}\,, d_{1.4,}\, d_{2.4,}\, d_{3.4}\,, \ldots, d_{1.10,}\, d_{2.10,}\, d_{3.10} \,\}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: *pessoa Xdigital,* exibindo todos os pares ordenados da forma *(pessoa , digital)* e perguntar aos alunos se isso define função.

Passo 3: Definir a Relação: *digital Xpessoa* exibindo todos os pares ordenados da forma *(digital , pessoa)* e perguntar aos alunos se isso define função

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Atividade 2: Trabalhar a ideia de função numérica.

Sugerimos que o professor indique dois conjuntos de pares ordenados, por exemplo:

$$A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)\}$$

$$B = \{(1, 1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3), (16, 4), (16, -4)\}$$

Passo 1: Perguntar aos alunos se é possível definir uma função a partir de cada um dos conjuntos.

Passo 2: Para os casos possíveis, deve exibir uma função.

Passo 3: Repetir os passos anteriores invertendo a ordem dos pares ordenados.

Atividade 3: Nesta atividade utilizamos o conceito de função para relacionar grandezas concretas além de trabalhar a passagem do discreto para o contínuo, usando várias representações: diagrama de setas, tabela e gráfico cartesiano.

Sugerimos que o professor utilize uma função bem conhecida dos alunos, por exemplo: a função área do círculo $A(r)=\pi r^2$. Estabelecer a relação *raio X área do círculo*. No primeiro conjunto R, todos os possíveis raios. No segundo conjunto A,todas as possíveis áreas.

Passo1: Perguntar aos alunos quais e quantos elementos pertencem ao conjunto R dos possíveis raios.

Passo2: Perguntar aos alunos quais e quantos elementos pertencem ao conjunto A, das possíveis áreas.

Passo3: Perguntar aos alunos se esta expressão algébrica define uma função. Determinar os conjuntos domínio e imagem.

Passo 4: Perguntar aos alunos se é possível representar o conjunto $R \ X \ A$.

Passo5: Construir as diferentes representações. Professor, sugerimos destacar que para o estudo da função *raio X área do círculo* aplicada a um domínio de poucos elementos podemos utilizar o diagrama de flechas e a tabela, a partir de alguns valores previamente estabelecidos. Para o estudo da função aplicada a um domínio contínuo, representamos os infinitos valores que a área de um círculo pode assumir a partir do seu raio, construindo o gráfico cartesiano.

Atividade 4: Esta atividade tem como principal objetivo fazer com que o aluno entenda a amplitude do conceito de função, exercite o cálculo da função em determinados pontos do seu domínio e perceba que muitas situações do nosso dia a dia podem ser melhor interpretadas com essa abordagem.

O modelo matemático apresentado na atividade foi extraído do artigo "Modelos matemáticos para estimativa da temperatura em diferentes localidades do Estado da

Bahia"de " Benedito Carlos Lemos de Carvalho " publicado na Revista Bahia Agrícola v. 4, n.3 de dezembro de 2001.

Os principais fatores climáticos são: altitude, longitude, continentalidade, maritimidade, relevo, vegetação e urbanização. Os fatores climáticos podem interagir, influenciando na temperatura, umidade e pluviosidade. A necessidade de informações sobre a temperatura é de grande importância para setores como a agricultura, controle de pragas e doenças, comércio entre outros.

Estudos mostram que existe um modelo matemático que inclui latitude, altitude e longitude permitindo que se obtenha uma estimativa da temperatura para áreas desprovidas de dados meteorológicos.

A função $f(x, y, z) = a + bx + cy + dz$, onde $f(x, y, z)$ é a temperatura calculada, x é a altitude da localidade em metros, y é a latitude da localidade em graus e décimos e z é a longitude da localidade em graus e décimos, pode estimar a temperatura com razoável precisão. Os coeficientes a, b, c e d variam conforme a localidade e mês do ano.

No Estado da Bahia, por exemplo, f_1 é usada no mês de janeiro, enquanto f_2 é usada no mês de julho:

$$f_1(x, y, z) = 25{,}109970 - 0{,}005990x - 0{,}005087y + 0{,}002450z$$

$$f_2(x, y, z) = 18{,}524908 - 0{,}007208x - 0{,}00662y + 0{,}004226z$$

Passo 1: Consulte no seu atlas geográfico cidades localizadas no Estado da Bahia com suas respectivas altitude, latitude e longitude.

Passo 2: Verifique as unidades usadas e efetue as devidas conversões, se necessário.

Passo 3: Substitua os valores em f_1 e f_2.

Passo 4: Discuta as variações obtidas.

3.2 Injetividade, sobrejetividade, bijeção e inversa

3.2.1 Injetividade

Motivação

Ao resolvermos uma equação, muitas vezes "cortamos" elementos que aparecem repetidamente dos dois lados da igualdade como no exemplo a seguir:

$$2^x = 8 \Longrightarrow 2^x = 2^3 \Longrightarrow x = 3$$

No entanto, é necessário tomar cuidado com esse "procedimento". Observe este caso:

$$x^2 = 9 \Longrightarrow x^2 = 3^2 \Longrightarrow x = 3$$

Claramente essa solução é insuficiente, visto que $x = -3$ também satisfaz a igualdade. A pergunta que fica, então, é: "onde está o erro da solução acima?". A resposta está no seguinte conceito:

Uma função f de A em B será classificada como *injetiva*, quando dois elementos distintos possuírem imagens distintas.
Uma forma equivalente de definir é: quaisquer que sejam x_1 e x_2 elementos de A, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

Explorando o conceito

Ao analisarmos os exemplos acima, temos que o primeiro:

$$2^x = 8 \Longrightarrow 2^x = 2^3 \Longrightarrow x = 3,$$

pode ser descrito pela função: $f(x) = 2^x$, a qual será melhor definida e explorada no capítulo 4. Mas temos que seu gráfico é do tipo:

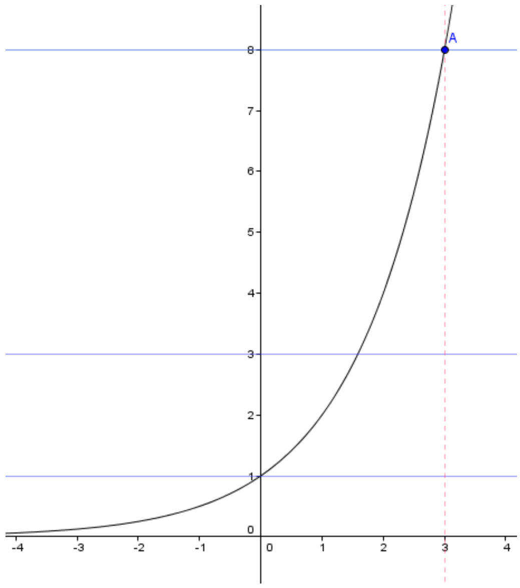


Gráfico de $f(x) = 2^x$

Esta função é do tipo injetiva, pois para elementos distintos do domínio, têm-se imagens distintas. Observemos que as retas horizontais em azul corta o eixo OY uma única vez, o que significa que é imagem de um único valor do domínio. Este procedimento é justificado pelo teorema de identificação das funções injetoras.

Uma função real de variável real é *injetiva* se, e somente se, qualquer reta horizontal intersectar seu gráfico em, no máximo, um ponto.

Voltando ao problema inicial, temos que a igualdade $2^x = 2^3$ é equivalente a $f(x) = f(3)$ e, dessa forma, como esta é uma função injetiva, implica em $x = 3$ o que, por sua vez, é equivalente ao "corte" das bases.

Por outro lado, no segundo exemplo ao aplicar a mesma técnica do corte, chegamos a um resultado incompleto, e assim sendo, impossibilita-nos de aplicarmos tal regra. Qual seria o porquê disso ocorrer?

Vejamos qual gráfico representa a função $f(x) = x^2$:

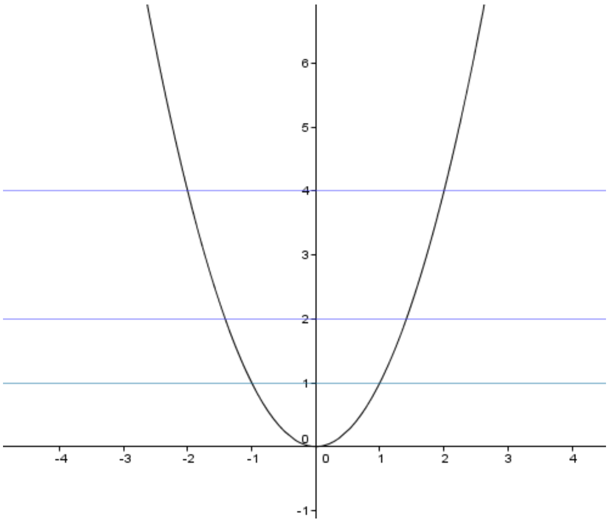


Gráfico de $f(x) = x^2$

Ao aplicarmos o teorema da injetividade, verificamos que as retas horizontais em azul intersectam o gráfico até duas vezes, logo não se trata de uma função injetiva. Além disso, cada elemento, não nulo, pertencente à imagem, é sempre imagem de um número e seu simétrico. Por exemplo:

$$f(3) = 3^2 = 9 \; e \; f(-3) = (-3)^2 = 9$$

Logo, ao efetuarmos a simplificação citada anteriormente, estamos simplesmente ignorando este fato, isto é, que o simétrico possui a mesma imagem.

A conclusão que chegamos é de que apenas as funções injetivas permitem o método da simplificação pelo "corte".

Atividades propostas

Atividade 1: Trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Voltemos a pensar no problema do capítulo anterior, no qual foi definido dois conjuntos A e B. Onde A é formado por três pessoas representadas por p_1, p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A. As impressões digitais representadas por: $d_{1,1}$, $d_{2,1}$, $d_{3,1}$, $d_{1,2}$, $d_{2,2}$, $d_{3,2}$,$d_{1,3}$, $d_{2,3}$, $d_{3,3}$, $d_{1,4}$,$d_{2,4}$, $d_{3,4}$, . . . , $d_{1,10}$, $d_{2,10}$, $d_{3,10}$. (onde o primeiro índice representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital). Constatamos que a relação$digitalXpessoa$é uma função.

Passo 1: Perguntar se a função $digital\ X\ pessoa$ pode ser considerada uma função injetiva. Justificando a resposta.

Passo2: Construir a partir da função $digital\ X\ pessoa$, uma função injetiva.

Atividade 2: Trabalhar a ideia de função numérica.

Sejam os conjuntos P = {números ímpares positivos e menores que 10},N = {números ímpares negativos e maiores que -10} e Q={quadrados perfeitos}

Passo 1: Enumerar os conjuntos P e Q e formar todos os possíveis pares ordenados, a partir da função $f: P \to Q$, com $f(x) = x^2$.

Passo 2: Verificar se a função $f(x)$ é do tipo injetiva. Justifique.

Passo 3: Enumerar os conjuntos N e Q e formar todos os possíveis pares ordenados, a partir da função $g: N \to Q$, com $g(x) = x^2$.

Passo 4: Verificar se a função $g(x)$ é do tipo injetiva. Justifique.

Passo 5: Agora se considerarmos como domínio os conjuntos P e N, com a função $h(x) = x^2$, teríamos uma função injetiva? Justifique.

Atividade 3: Sugestão de atividades que analise problemas concretos.

Sugerimos que se trabalhe, por exemplo, com a função volume do cilindro, $f(cil) = volume\ do\ cilindro$ e com a área de triângulos.

Passo 1:Pedir ao aluno para exibir como se calcula a

$f(cil) = volume\ do\ cilindro$.

Passo 2: Apresentar alguns cilindros e calcular os seus volumes de forma que sejam distintos.

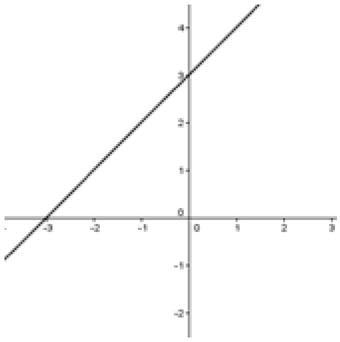
Passo 3: Procurar cilindros distintos que possuam mesmo volume. A partir destes exemplos, analisar se a função é injetiva.

Passo 4: Desenhar triângulos distintos, mas que possuam a mesma área. E em seguida, analisar se a função $A(triângulo) = base \cdot altura$ representa uma função injetiva.

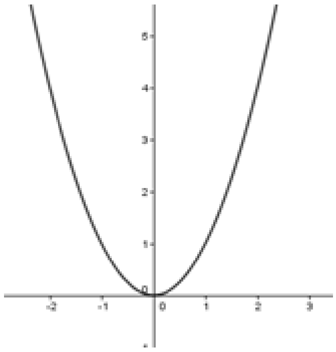
Atividade 4: Análise de gráficos.

Propor aos alunos que analisem quais dos gráficos a seguir representam funções injetivas. No caso em que não for injetiva, dividir o gráfico de forma que se tenham dois ou mais gráficos de funções injetivas, exibindo os domínios das funções obtidas.

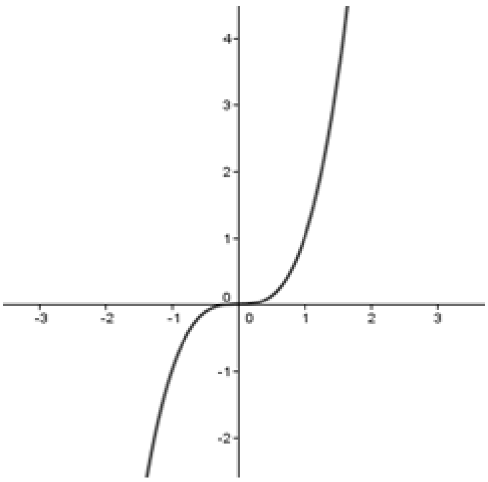
a)



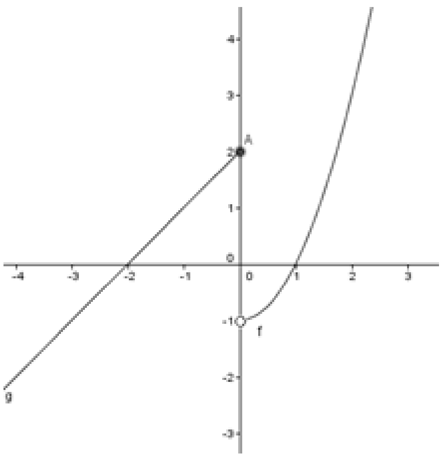
b)



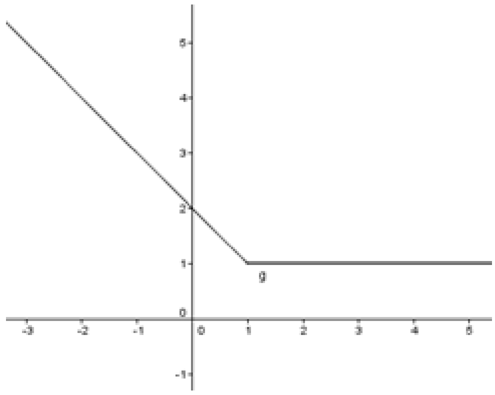
c)



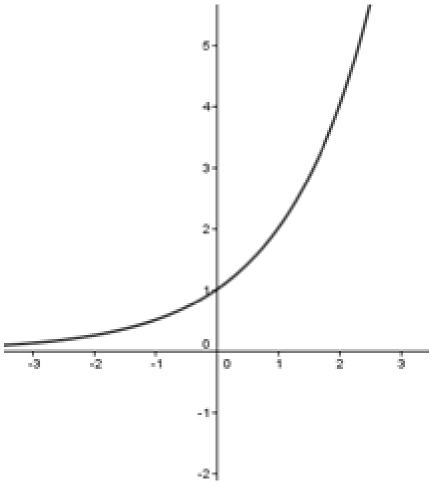
d)



e)



f)



3.2.2 Sobrejetividade

Motivação

No século XVII, Galileu Galilei afirmou que "há tantos quadrados quantos são os números". No entanto, esta constatação causou estranheza. Afinal há séculos era indiscutível que: o todo é sempre maior que uma de suas partes. E obviamente existem mais números do que seus quadrados.

Em outras palavras, se o conjunto dos números quadrados perfeitos, $Q = \{n^2; n \in$ *N*, está contido nos naturais N, já que todo quadrado perfeito também é um número natural, como teríamos uma igualdade entre o número de elementos destes conjuntos, se os quadrados é parte dos naturais? Tal afirmação ficou conhecida como paradoxo de Galileu. Como poderíamos justificar este fato? A resposta pode ser dada pelo seguinte conceito:

> Uma função f de A em B é *sobrejetiva* se para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

Explorando o conceito

Voltando ao problema proposto por Galileu, podemos representá-lo pela função:

$f: Q \to N$, com $f(x) = \sqrt{x}$, com $= \{conjunto\ dos\ números\ quadrados\ perfeitos\}$ e $N = \{conjunto\ dos\ números\ \ naturais\}$.

Ora, como todos os quadrados perfeitos são números naturais, podemos concluir que o número de elementos do conjunto Q é menor ou igual ao número de elementos do conjunto N.Por outro lado, ao estabelecermos a relação entre os conjuntos, temos:

$$0 \to 0$$
$$1 \to 1$$
$$4 \to 2$$
$$9 \to 3$$
$$\vdots$$

$$\sqrt{n^2} \to n$$

Observemos que, é possível afirmar que todos os elementos do contradomínio, ou seja, do conjunto dos naturais, está associado a um elemento do domínio, conjunto dos quadrados perfeitos. Dessa forma, o número de elementos dos naturais é menor ou igual ao número de elementos do conjunto dos quadrados perfeitos e, dessa forma, concluímos que os dois conjuntos possuem o mesmo "tamanho".

Do mesmo modo, é possível criar funções que fazem corresponder cada elemento dos conjuntos naturais ao dos racionais ou dos inteiros, levando à conclusão de que esses são conjuntos infinitos com mesmo número de elementos.

De forma geral, uma maneira de determinar que possuem o mesmo número de elementos dois conjuntos X e Y tais que $X \subset Y$ é determinar uma função sobrejetiva $f: X \to Y$. Assim garantimos que todo elemento de Y está associado **a pelo menos** um elemento de X e, portanto, Y possui **no máximo** o mesmo número de elementos de X.

Por outro lado, não é possível estabelecer o mesmo tipo de relação entre os reais e os números naturais, logo temos conjuntos infinitos com mais elementos em $\Re$ do que em N.

Para concluir, temos que as funções sobrejetivas são tais que todos os elementos do contradomínio estão associados a elementos do domínio, ou seja, o contradomínio é igual ao conjunto imagem. Logo, para se analisar graficamente de temos ou não uma função sobrejetiva basta aplicar o teorema da identificação das funções sobrejetivas:

Uma função real de variável real é *sobrejetiva* se, e somente se, qualquer reta horizontal passando pelos pontos do contradomínio intersectar seu gráfico em, no mínimo, um ponto.

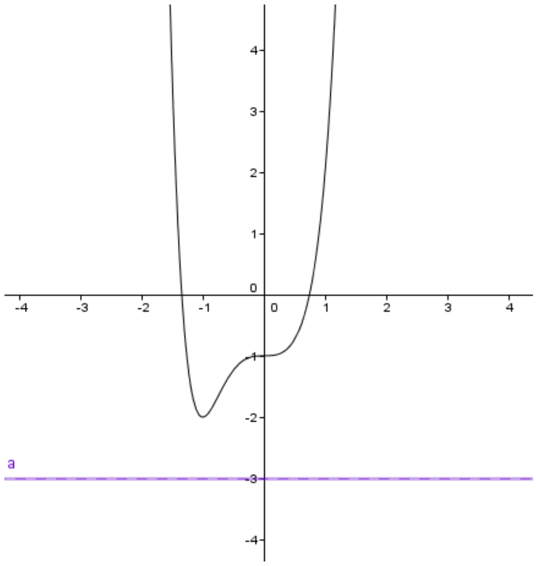


Gráfico I

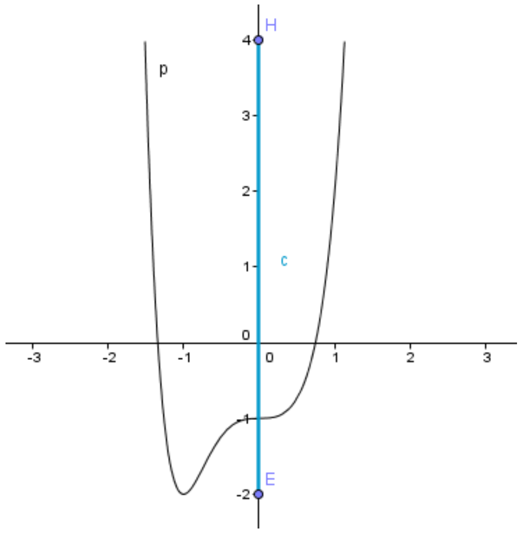


Gráfico II

No Gráfico I, temos $f: \Re \to \Re$, f não é sobrejetiva. Observe que a reta a passa por y = -3 que pertence ao contradomínio, mas não intersecta o gráfico. Por outro lado, no Gráfico II temos $f: [-1{,}5; 1] \to [-2{,}4]$. Neste caso, qualquer reta horizontal que passe pelo intervalo [-2,4] certamente interceptará o gráfico em algum ponto, logo temos o gráfico de uma função sobrejetiva.

Atividades propostas

Atividade 1: Trabalhando o conceito de sobrejetividade a partir de conjuntos discretos.

Consideremos os conjuntos $M = \{M_a, M_b, M_c\}$, onde M representa uma mãe e $F = \{F_{a,1}, F_{a,2}, F_{a,3}, F_{b,1}, F_{b,2}, F_{c,1}\}$, onde a letra representa a mãe e o número a ordem de nascimento.

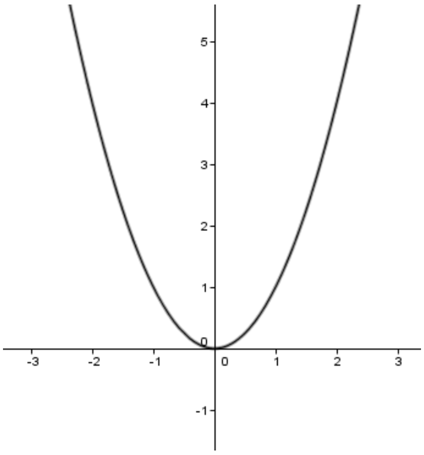
Passo 1: representar todos os pares ordenados $(filho)X(mãe)$:

Passo 2: analisar se a função é do tipo sobrejetiva.

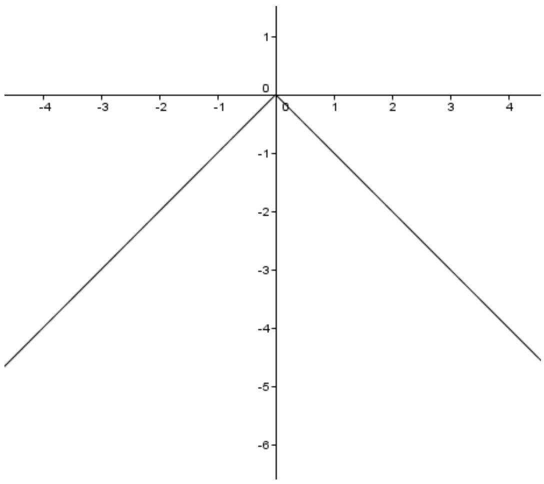
Atividade 2: Trabalhar a sobrejetividade analisando gráficos.

Sugerimos que o professor trabalhe com a análise dos gráficos a fim de reconhecer se a função é sobrejetiva, caso contrário, pedir ao aluno que restrinja o contradomínio, a fim de que a função seja sobrejetiva.

a)

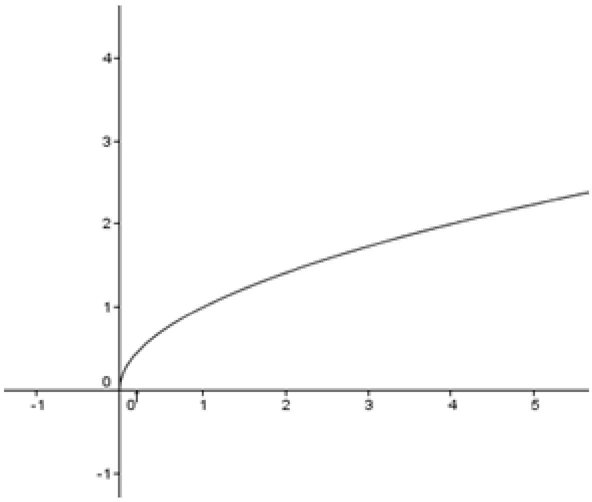


b)



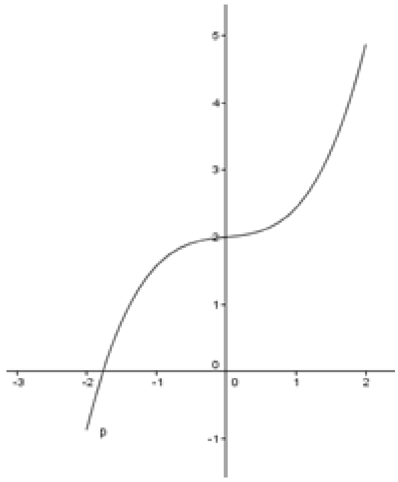
$f : \Re \to \Re$

c)



$f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$

d)



$f:[-2,2] \to [-1,5]$

3.2.3 Bijeção

Motivação

Muitas das vezes, se faz necessário identificar os elementos de um conjunto seguindo uma determinada ordem, ou seja, enumerá-los através de uma sequência lógica. Observe que se representamos os números ímpares positivos da forma:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ ...,\text{etc.}$$

estamos criando uma função que associa cada número natural não-nulo a um número ímpar positivo,$\{1,3,5,\ldots,2n-1\}$, com isso, podemos precisar a ordem, isto é contar os elementos deste conjunto. Isto é possível quando temos uma função bijetiva entre os naturais e o conjunto no qual há o interesse em enumerar.

Uma função é *bijetiva* se, e somente se, *f* é *sobrejetiva* e *injetiva*.

Uma sequência é uma função cujo domínio é o conjunto dos N^*. A cada número natural diferente de zero corresponde um único número real $\boldsymbol{x_n}$. Se esta sequência é obtida de forma que cada termo é a soma do anterior a uma constante (ou da mesma forma podemos dizer que a razão é a diferença entre um termo e o seu antecessor), esta sequência é chamada de *progressão aritmética (PA)*.

Desta forma, podemos dizer que os elementos de um conjunto C, infinito,estão em PA dada por uma equação do 1° grau, $f(x) = ax + b$, se e somente se, existir uma bijeção entre o conjunto N^* e o conjunto C. Por outro lado, caso o conjunto C, seja finito, teremos uma bijeção entre o conjunto {1, 2, 3, . . . , n}e o conjunto C.

Demonstração:

(⇒)seja uma PA de primeiro termo, $f(1) = b$ e razão a:

$$f(1) = b,$$
$$f(2) = b + a,$$
$$f(3) = b + 2a,$$
$$\vdots$$
$$f(n + 1) = b + na.$$

Que é uma função do 1° grau.

(⇐) Consideremos o conjunto $C = \{f(1), f(2), f(3), \dots f(k), f(k + 1)\}$

Seja $f(k + 1) - f(k)$:

$$f(k + 1) - f(k) =$$
$$b + ka - (b + (k - 1)a) =$$
$$b + ka - b - ka + a =$$
$$a.$$

Ou seja, a diferença entre um termo e o seu antecessor é igual a razão.No exemplo inicial, onde tínhamos a bijeção entre $f: N^* \to (números\ ímpares\ positivos)$.

Atividades propostas

Atividade 1: Trabalhar as correspondências biunívocas entre conjuntos, utilizando a relação desta com a PA.

Observe o seguinte problema: Um fabricante vende um produto por R$ 2,30 a unidade. O custo total do produto consiste numa taxa fixa de R$ 80,00 mais o custo de produção de R$ 1,80 por unidade.

Passo 1: Definir uma função que associe o número de unidades produzidas e o lucro obtido pelo fabricante.

Passo 2: Calcular o lucro para uma produção de 1000 unidades.

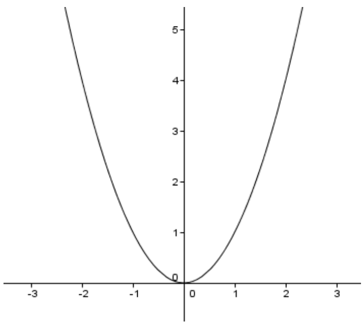
Passo 3: Encontrar o número mínimo de unidades produzidas, a fim de que o fabricante não tenha prejuízo.

Atividade 2: Trabalhar com a análise de gráficos.

Sugerimos que o professor apresente alguns gráficos, com o objetivo de que o aluno consiga identificar quais deles representam funções bijetivas.

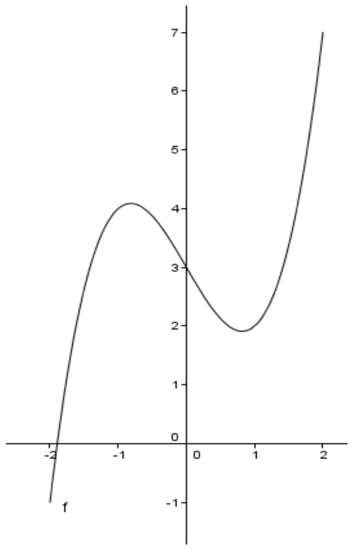
Considere os gráficos a seguir:

a)



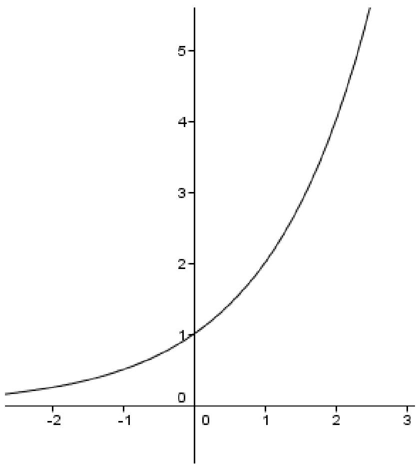
$f : \Re \to \Re$

b)



$f: [-2,2] \rightarrow [-1,7]$

c)



$f: \Re \rightarrow \Re$

Passo 1: identificar quais dos gráficos apresentados representam funções bijetivas.

Passo 2: Nos casos em que as funções não são bijetivas, restringir o gráfico ou o contradomínio a fim de que se torne uma função bijetiva.

3.2.4 Inversa

Motivação

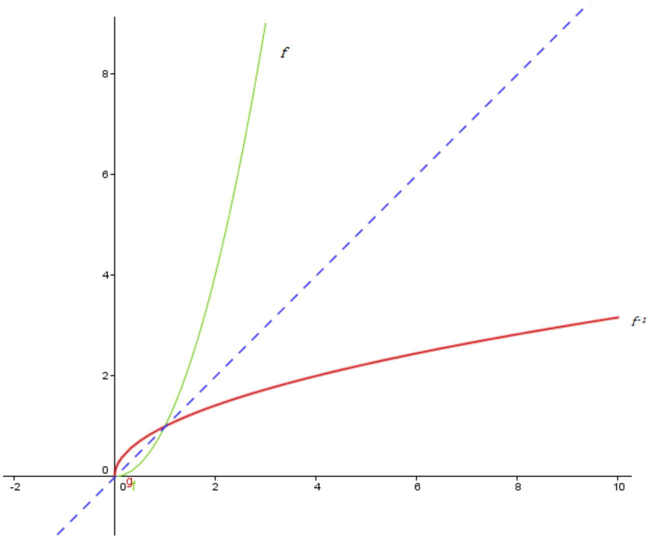
Podemos observar que diversos problemas podem ser transformados em funções com a finalidade de facilitar a sua análise. Por exemplo, quando associamos o lado (l) ao perímetro (p) de um quadrado, temos a função $p = 4l$. E se tivéssemos a necessidade de inverter a função? Ou seja, se for conhecido o perímetro e precisarmos encontrar o lado que corresponde a este perímetro? Isto será possível se conhecermos a sua função inversa.

Dada uma função $f: A \to B,$ bijetiva, denomina-se *função inversa* de f a função $f^{-1}: B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$.

Explorando o conceito

Voltando a função que associa o lado ao perímetro, se tivermos o perímetro e quisermos encontrar o lado, basta tomarmos a função $p = \frac{l}{4}$.Na função inversa, f^{-1}, há uma inversão entre o domínio e a imagem da função f. Ou seja, $D_f = CD_{f^{-1}}$ e $D_{f^{-1}} = CD_f$. Além disso, como na função inversa o contradomínio de f será o domínio de f^{-1}, não se pode admitir nem elementos que não estejam associados ao domínio, tão pouco que estejam associados a mais de um elemento, por isso, a necessidade de que a função seja bijetiva.

Uma característica importante da função inversa f^{-1} é a simetria que esta possui com o gráfico da função f em relação à reta $y = x$ $(função\ identidade)$. Observe a seguir os gráficos de uma função e a sua inversa:



Atividades propostas

Atividade 1: Esta atividade tem como objetivo fazer com que o aluno consiga encontrar a função inversa a partir de uma função dada.

Sugerimos que o professor apresente algumas funções com a finalidade de que o aluno analise a possibilidade da existência da função inversa e, nos casos em que é possível, encontrá-la.

Dadas as funções:

a) $f(x) = 4x + 3$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^2$ com $f: \Re_+ \to \Re_+$

d) $f(x) = x^3$

e)$f(x) = \sqrt{x}$ com $f: \Re \to \Re$

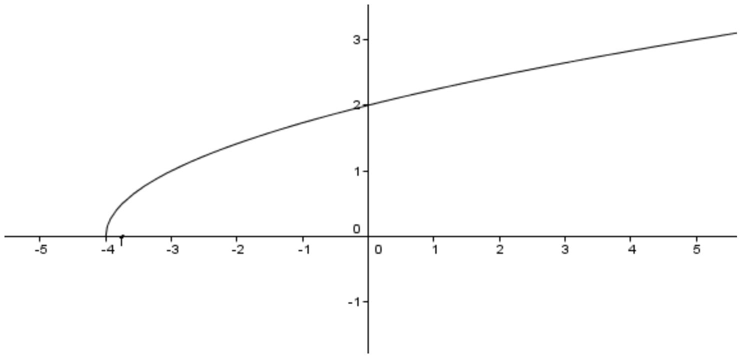
Passo 1: Analisar quais possuem inversas.

Passo 2 : Para as que possuírem inversas, encontrar a equação que a representa.

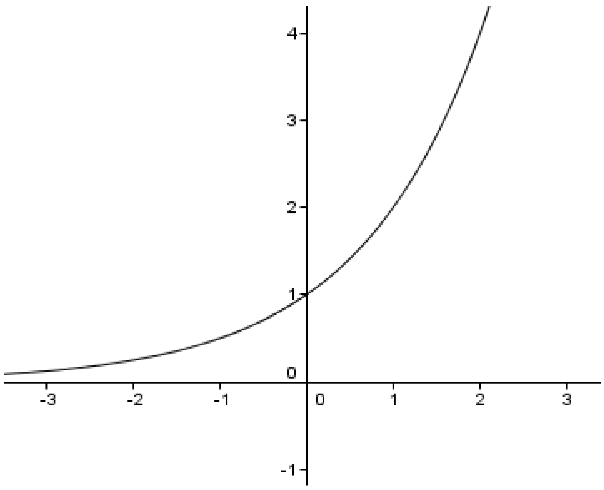
Atividade 2: Analisar a existência da função inversa a partir da análise de gráficos.

Sejam os gráficos abaixo:

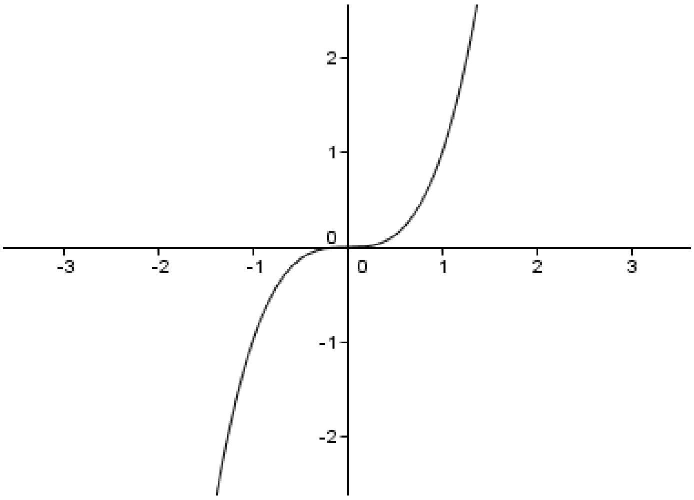
a) $f(x) = \sqrt{x+4}$, com $f: [-4, \infty[\rightarrow \Re_+$



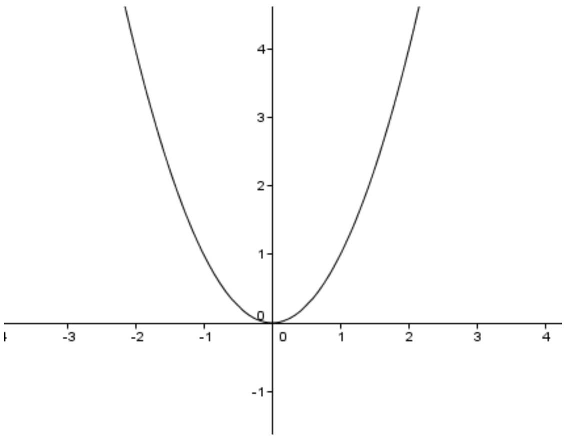
b) $f(x) = 2^x$, com $f: \Re \rightarrow \Re_+$



c) $f(x) = x^3$, com $f: \Re \to \Re$



d) $f(x) = x^2$, com $f: \Re \to \Re$



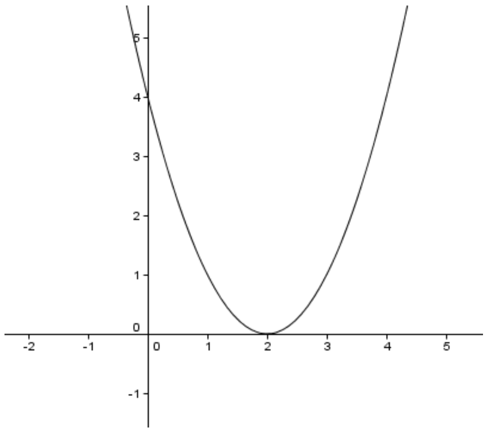
Passo 1: Analisar quais admitem inversas.

Passo 2: Construir os gráficos das funções inversas.

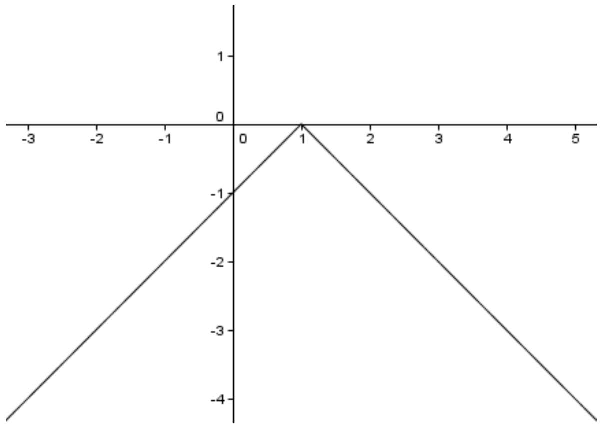
Atividade 3: Esta atividade tem como objetivo aplicar os conceitos de funções bijetivas e inversas.

A seguir, temos funções com seus respectivos gráficos.

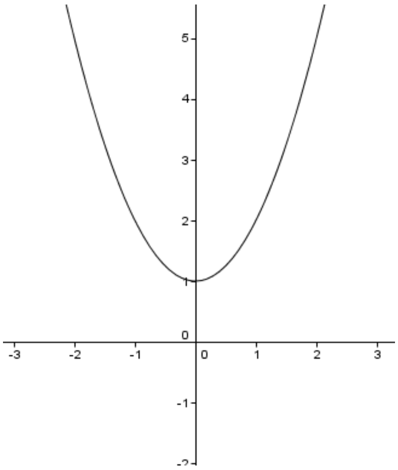
a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$



b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, se\ x \geq 1 \\ x - 1, se\ x \leq 1 \end{cases}$



c) $f(x) = x^2 + 1$



Passo 1: Restringir o domínio e o contradomínio a fim de que as funções sejam bijetivas.

Passo 2: Exibir sua função inversa.

3.3 Operações com funções

3.3.1 Soma e diferença

Motivação

É muito comum na resolução de problemas envolvendo funções, nos depararmos com a necessidade de analisarmos duas ou mais funções. Nas funções, por exemplo, que se calcula o lucro de uma empresa que produz x unidades, precisamos subtrair duas outras: a função venda $v(x)$, e a função custo, $c(x)$.

Temos então que a função lucro é a função diferença:

$$l(x) = v(x) - c(x).$$

Dadas duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, podemos definir as funções:

- ✓ Função soma de $f(x)$ com $g(x)$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- ✓ Função diferença de $f(x)$ com $g(x)$: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

Considerando $D_f = A$ e $D_g = B$, temos que $D_{(f+g)} = A \cap B$ e $D_{(f-g)} = A \cap B$.

Explorando o conceito

Na situação apresentada acima, tem-se como vantagem ao substituir as funções custo e venda por lucro o fato de se associar diretamente as unidades produzidas ao lucro.

Vale destacar que, o domínio da resultante é a intersecção dos domínios das funções originais.Isto é, para que faça sentido calcular a imagem do elemento pelas duas funções, é necessário que ele esteja no domínio de ambas as funções, ou seja, na intersecção dos domínios.

Atividades propostas

Atividade 1: Propomos ao professor trabalhar a resolução de problemas que utilizem funções diferença.

Numa determinada indústria o custo para se produzir uma peça corresponde a um custo fixo mensal de R$ 10 000,00 acrescido de um custo variável de R$ 30,00 por unidade produzida e 15% de impostos sobre o custo variável. Sabendo que o preço de venda dessa peça pela indústria aos revendedores é de R$ 100,00.

Passo 1: Representar uma função para o custo da produção de x peças.

Passo 2: Representar uma função para a receita referente a venda de *x* peças.

Passo 3: Representar uma função para o lucro na venda de *x* peças.

Passo 4: Encontrar o número mínimo de peças que devem ser produzidas para que não haja prejuízo.

Atividade 2: Propomos ao professor trabalhar a resolução de problemas que utilizem funções soma.

Deseja-se escavar um buraco retangular com o objetivo de construir uma cisterna, de tal forma que tenha 300 m^3 de volume e 1 metro de largura. Sabe-se que cada metro de área cavada custa R$ 10,00 e cada metro de profundidade custa R$ 30,00.

Passo 1: Escrever uma função que represente o custo desta escavação.

Passo 2: Determinar as dimensões do buraco a fim de que o seu custo seja mínimo.

Atividade 3: Propor aos alunos que observe os comportamentos dos domínios nas funções soma e diferença.

Considere as funções a seguir:

$f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Passo 1: Encontrar o domínio de cada uma das funções.

Passo 2: Efetuar $f(x) + g(x) + h(x)$.

Passo 3: Determinar o domínio de $(f + g + h)(x)$.

Passo 4: Qual é a relação entre os domínios obtidos nos passos 1 e 3?

3.3.2 Produto e quociente

Motivação

Se uma empresa precisa construir e cercar uma área retangular com 500 metros de tela, por exemplo, temos que um dos lados pode ser indicado por uma variável x, logo uma função $f(x)$ representa este lado. Da mesma forma, podemos representar o outro lado por uma função: $g(x)$. Notemos que é possível calcular a área através de uma função obtida multiplicando as funções $f(x)$ e $g(x)$, isto é, $A(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Dadas duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, podemos definir as funções:

- ✓ Função produto de $f(x)$ com $g(x)$: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- ✓ Função quociente de $f(x)$ com $g(x)$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *(com g(x)≠0).*

Considerando $D_f = A$ e $D_g = B$, temos que: $D_{(f \cdot g)} = A \cap B$ e

$$D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = A \cap B \cap \{x \in \Re; g(x) \neq 0\}.$$

Explorando o conceito

No problema anterior, temos a função $f(x) = x$ e $g(x) = 250 - x$. A função $g(x)$, ficou assim definida por termos uma restrição no perímetro. Assim, podemos representar a função área por uma função produto: $A(x) = x \cdot (250 - x)$. Nas funções produto e quociente, o domínio da função resultante será dado pela intersecção dos domínios das funções que a compõe, sendo que na função quociente, a do denominador não poderá ser nula.

Isto é, para que faça sentido calcular a imagem do elemento pelas duas funções, é necessário que ele esteja no domínio de ambas as funções, ou seja, na intersecção dos domínios.

Atividades propostas

Atividade 1: Propomos ao professor trabalhar a resolução de problemas que utilizem funções produto e quociente.

Uma empresa tem um custo de R$ 40,00 para produzir determinado produto. Foi feita uma pesquisa de mercado e, concluiu-se que, se o produto for vendido por *x* reais, o fabricante venderá por mês: $100 – x$ $(0 \leq x \leq 100)$ unidades.

Passo 1: Calcular a função que representa o custo.

Passo 2: Calcular a função que representa a receita.

Passo 3: Calcular a função que representa a lucro.

Passo 4: Calcular o preço de venda para que o lucro seja máximo.

Passo 5: Calcular a função que representa a lucro médio.(o lucro médio é calculado dividindo-se o lucro total pelo número de unidades produzidas).

Atividade 2: Propomos ao professor trabalhar a resolução de problemas que utilizem funções produto.

Um posto de combustível comercializa 20000 litros de etanol por dia a R$ 2,60 o litro. O gerente percebeu que, a cada centavo que concedia de desconto no litro, eram vendidos 200 litros a mais por dia.

Passo 1: Escrever uma expressão que relaciona o volume e o desconto.

Passo 2: Encontrar o valor do desconto para que se tenha o valor máximo arrecadado por dia.

Atividade 3: Propomos ao professor trabalhar a resolução de problemas que utilizem funções produto e quociente.

Considere as funções a seguir:

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ e $h(x) = x + 1$.

Passo 1: Encontrar o domínio de cada uma das funções.

Passo 2: Efetuar $\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}$.

Passo 3: Determinar o domínio de $\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)(x)$.

Passo 4: Qual é a relação entre os domínios obtidos nos passos 1 e 3?

.

Atividade 4: Esta atividade tem como objetivo fazer com que o aluno perceba a relação entre as operações com funções e a translação e reflexão de um gráfico, o qual possibilita construir gráficos de forma mais prática.

Passo 1: Construir o gráfico da função $f(x) = x^3$.

Passo 2: Escrever a função $g(x) = x^3 + 1$ como soma de duas outras funções. Em seguida, construir o gráfico de $g(x)$.

Passo 3: Discutir o comportamento dos gráficos de $f(x)$ e de $g(x)$.

Passo 4: Escrever a função $h(x) = 2x^3$ como produto de duas outras funções. Em seguida, construir os gráficos de $h(x)$ e de $f(x)$.

Passo 5: Discutir o comportamento dos gráficos de $f(x)$ e de $h(x)$.

Passo 6: Construir o gráfico da função $i(x) = (x + 3)^3$.

Passo 7: Discutir o comportamento do gráfico da função $j(x) = 2(x + 3)^3 + 1$. Construir um esboço do gráfico.

3.3.3 Função Composta

Motivação

"O trânsito brasileiro pode ser comparado a uma guerra, pela quantidade de mortos e feridos que produz. E pior, a maioria dos acidentes é provocada por 'fogo amigo': é o motorista que atira contra o próprio patrimônio — no caso, ele mesmo, amigos e familiares — ingerindo bebidas alcoólicas ou usando drogas antes de dirigir."

Revista Época – 2003 – edição 258

Mesmo após 12 anos, infelizmente esta notícia continua atual. E, estudos concluíram que o modelo matemático para a concentração de álcool quando o indivíduo do sexo masculino ingere uma lata de cerveja a cada hora, para as primeiras 5 horas é:

$$CM(t) = 0{,}022 + 0{,}007.(t - 1), para\ 1 \leq t \leq 5.$$

Onde $CM(t)$ - Concentração de álcool no sangue em função do tempo decorrido, para um indivíduo do sexo masculino.

E estatísticas apontam que o número de acidentes, em percentual, é de 1000 vezes para o nível de concentração de álcool no sangue, isto é:

$$A(CM) = 1000CM.$$

Uma pergunta natural seria: será que podemos relacionar diretamente o tempo t com o número de acidentes? A resposta é que sim, se fizermos uma composição das funções.

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, denominamos função composta de $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{f}$ a função $g \circ f: A \to C$, que é definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, x ∈ A.

Explorando o conceito

Nas funções acima, temos:

$$CM(t) = 0{,}022 + 0{,}007.(t - 1), \text{com } f: t \to (CM) \text{ e}$$
$$A(CM) = 1000CM, \text{com} f: (CM) \to A.$$

Para encontrar a função composta, devemos substituir a variável, CM na segunda função pela primeira função:

$$A(CM(t)) = 1000(0{,}022 + 0{,}007 \cdot (t - 1))$$
$$A(CM(t)) = 22 + 7 \cdot (t - 1).$$

Desta forma, podemos encontrar, em porcentagem, o número de aumento de acidentes a partir do número de horas na qual um indivíduo tenha gasto consumindo latas de cerveja por hora, com $1 \leq t \leq 5$. Uma aplicação importante das funções compostas está na forma como podemos definir as funções inversas.

Consideremos uma função $f: A \to B$. Dizemos que uma função$g: B \to A$ é a inversa à esquerda de $f$quando$g(f(x)) = I_A$, ondeI_Aé a identidade em relação ao conjunto A, ou seja, $g(f(x_1)) = x_1$, para todox_1∈ A. Analogamente, inversa à direita de fé a função g tal que $f(g(x)) = I_B$, onde I_B é a identidade em relação ao conjunto B.

Finalmente, uma função $g: B \to A$ é a inversa de f quando g é a inversa à esquerda e à direita de f. Em outras palavras, g é a inversa de f se e somente se, $g(f(x)) = I_A$ e $f(g(x)) = I_B$.

Atividades propostas

Atividade 1: Trabalhar a construção e resolução de problemas através das funções compostas.

Uma empresa produz parafusos a um custo $C(p) = 30000 + 0{,}50p$, onde C é o custo e p o número de parafusos fabricados. Para o preço de venda, a empresa decide que deve haver um lucro de 50% sobre os custos.

Passo 1: Encontrar uma função que relaciona preço de venda e custo.

Passo 2: Encontrar a função composta, que relaciona venda e parafusos.

Passo3: Calcular a quantidade de parafusos comercializados para um preço de venda de 50250.

Atividade 2: Analisar as funções compostas a fim de que perceba a não comutatividade das funções.

Considere as funções: $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Passo1: Calcular $f(g(x))$.

Passo 2: Calcular $g(f(x))$.

Passo 3: Comparar os passos 1 e 2. As funções são iguais? O que se pode concluir?

Atividade 3: Construir compostas de várias funções.

Um pintor, muito competente e organizado, depois de diversas observações, percebeu que o custo, *C*, para pintar cada m^2 de parede era dado por $C(x) = 30x$, onde x é a área pintada. Percebeu também que o seu lucro era de 50% dos custos da pintura, isto é: $L(C) = 0{,}5C$ e que economizava 20 % do que lucrava todo mês, ou seja: $E(L) = 0{,}2L$, onde *L* é o lucro e *E* a economia mensal.

Passo 1: Escrever uma função que relacione diretamente economia a área pintada.

Passo 2: Encontrar quanto o pintor conseguiu economizar em um mês que ele conseguiu pintar 1000 m^2.

Passo 3:Descobrir quantos m^2 ele precisa pintar para economizar R$ 350,00, em um determinado mês.

Atividade 4: Trabalhar com a decomposição de funções.

Considere as funções $h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ e $i(x) = \sqrt{9x^2 + 2}$.

Passo 1: Encontrar funções f e g tais que: $h(x) = f(g(x))$.

Passo 2: Encontrar funções p e q tais que: $h(x) = p(q(x))$, com$p \neq f$ e $q \neq g$.

Passo 3: Encontrar funções j, l e m tais que: $i(x) = j(l(m(x)))$.

Atividade 5: Trabalhar com a propriedades das funções compostas com suas inversas.

No capítulo 3.2, vimos as funções bijetivas, entre elas a função: $f(x) = \sqrt{x+4}$, com $[-4, +\infty[\rightarrow \Re$.

Passo 1: Encontrar a função inversa de $f(x)$.

Passo 2: Encontrar $f(f^{-1}(x))$ e $f^{-1}(f(x))$.

Passo 3: O que podemos concluir em relação as compostas encontradas no passo anterior?

3.4 Função par e ímpar; crescente, decrescente e periódica

3.4.1 Função par e ímpar

Motivação

Um número é par, quando este é divisível por 2, caso contrário o número é ímpar. Observando os resultados da potenciação em séries do tipo: $(-3)^0 = (3)^0$, $(-3)^1 = -(3)^1$, $(-3)^2 = (3)^2$, $(-3)^3 = -(3)^3$, $(-3)^4 = (3)^4$, afirmamos que a alternância nos resultados está diretamente ligada à condição dos expoentes pares e ímpares na sequência de potências. Mas, voltando ao conceito de funções, como podemos abordar sua paridade? Partindo da análise gráfica das funções obtemos importantes informações sobre as mesmas. Alguns gráficos apresentam comportamentos que refletem características especiais de certas funções. Vamos observar:

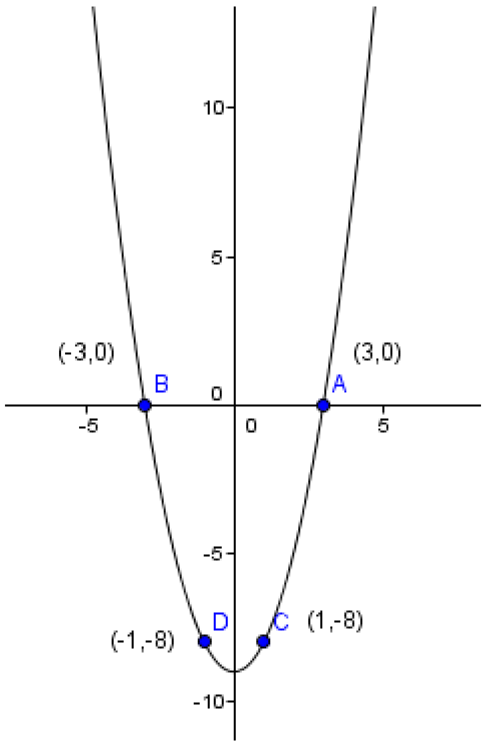


Gráfico de $f(x) = x^2 - 9$

A partir dos pontos $A = (3{,}0)$, $B = (-3{,}0)$, $C = (1{,}8)$ e $D = (-1{,}8)$ pertencentes à curva, podemos observar que $f(3) = f(-3)$, assim como $f(1) = f(-1)$.

O que esperar do gráfico de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$?

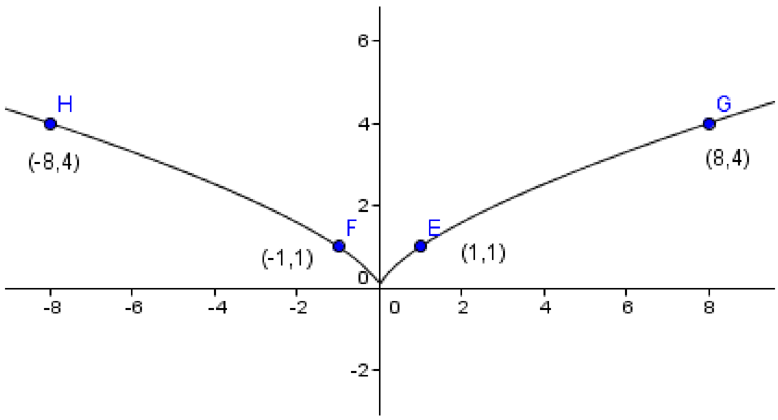


Gráfico de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

Mais uma vez, observando os pontos em destaque na curva, $E=(1{,}1)$, $F=(-1{,}1)$, $G=(8{,}4)$ e $H=(-8{,}4)$ concluímos que $f(1)=f(-1)$ e $f(8)=f(-8)$.

Em uma função trigonométrica também podemos observar $f(x)=f(-x)$? Vejamos o que ocorre em $f(x)=\cos x$:

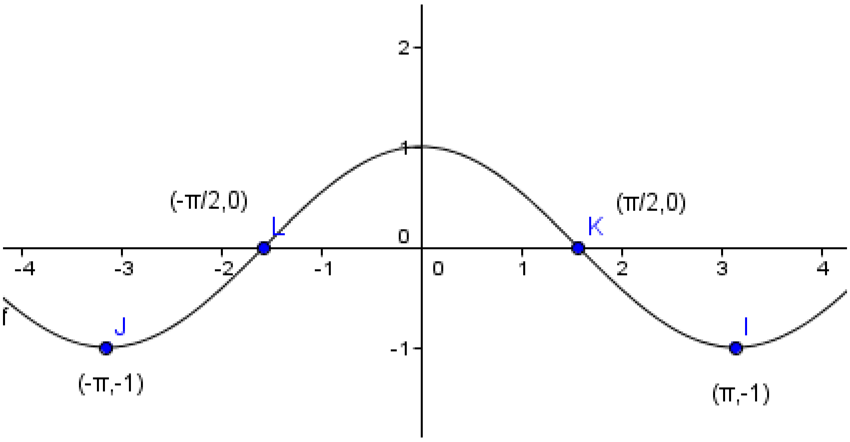


Gráfico de $f(x)=\cos x$

Observando $I=(\pi,-1)$, $J=(-\pi,-1)$, $K=(\frac{\pi}{2},0)$ e $L=(-\frac{\pi}{2},0)$, verificamos que o fato $f(x)=f(-x)$ também se repete nesta função trigonométrica, temos $f(\pi)=f(-\pi)$ e $f(\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})$.

Nos três gráficos apresentados, temos $f(x)=f(-x)$, para todo $x\in D$, sendo D o Domínio de f .

Em três novas situações, vejamos o que ocorre:

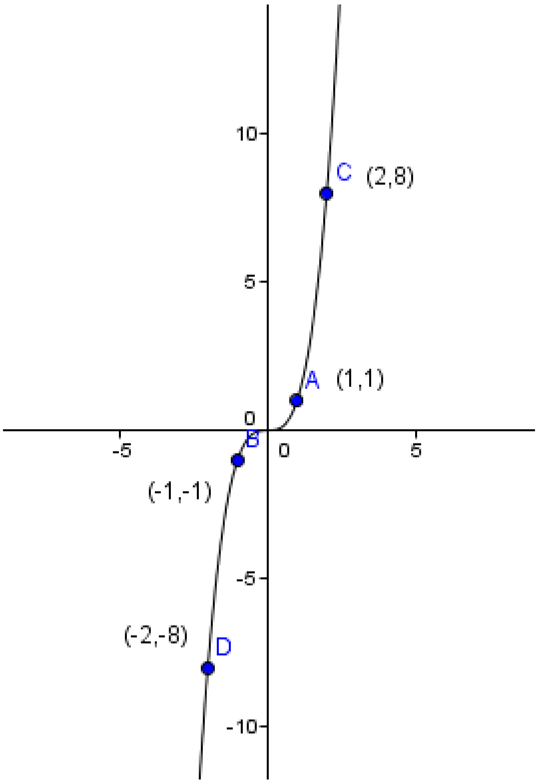


Gráfico de $f(x) = x^3$

Observando os pontos A, B, C e D pertencentes à curva vemos que $f(-1) = -f(1)$ e $f(-2) = -f(2)$.

Em outra situação, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ temos:

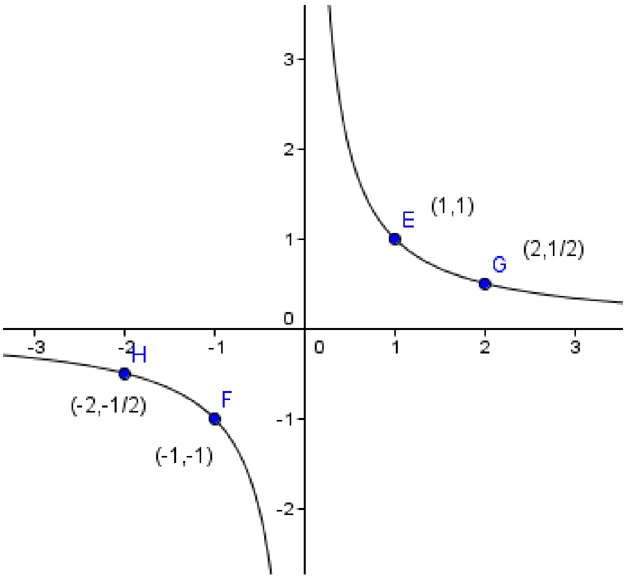


Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

E assim, observando os quatro pontos marcados, podemos concluir que $f(-1) = -f(1)$ e $f(-2) = -f(2)$, ou seja, $f(-x) = -f(x)$

Na função trigonométrica $f(x) = sen\, x$, o fato acima também pode ser observado, veja:

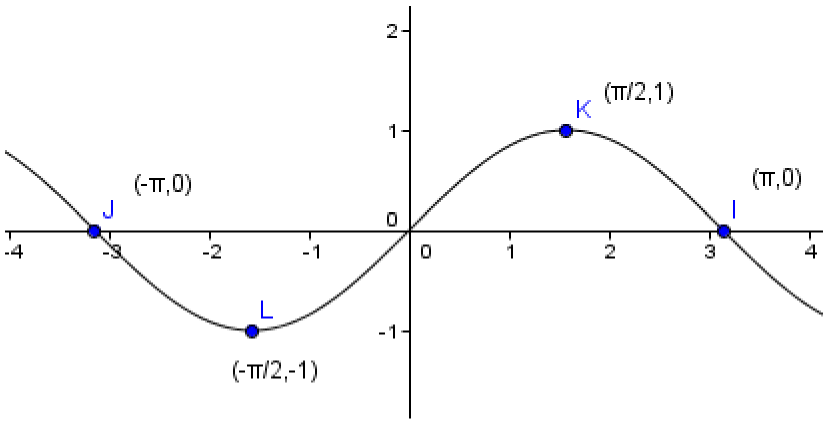


Gráfico de $f(x) = sen\, x$

Nos três últimos gráficos observados, temos $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D$, sendo D o Domínio de f.

Dada uma função $y = f(x)$ definida em um conjunto D, diremos que ela é:

- ✓ Par se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$.
- ✓ Ímpar se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Explorando o conceito

Se na função Par temos $f(-x) = f(x)$, e na função Ímpar, $f(-x) = -f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f, você já deve imaginar de qual característica no comportamento gráfico estamos falando, não é? A simetria.

Para identificar as propriedades de simetria presentes nos gráficos estudados acima, vamos a uma análise mais cuidadosa:

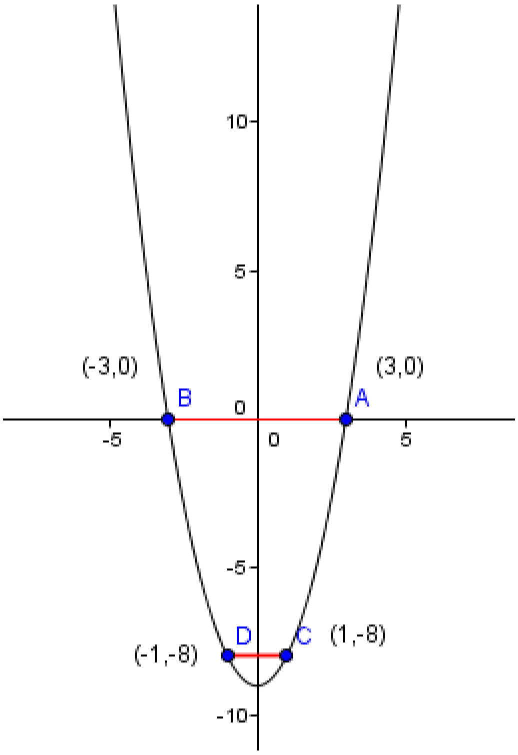


Gráfico de $f(x) = x^2 - 9$

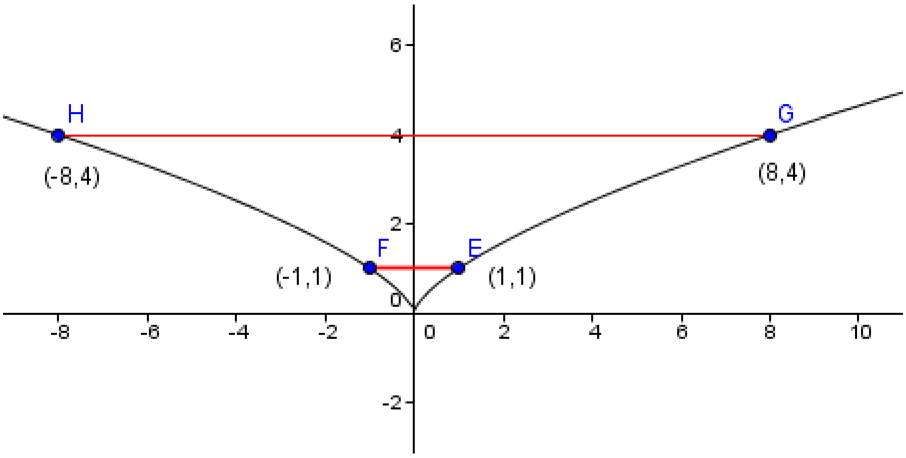


Gráfico de $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

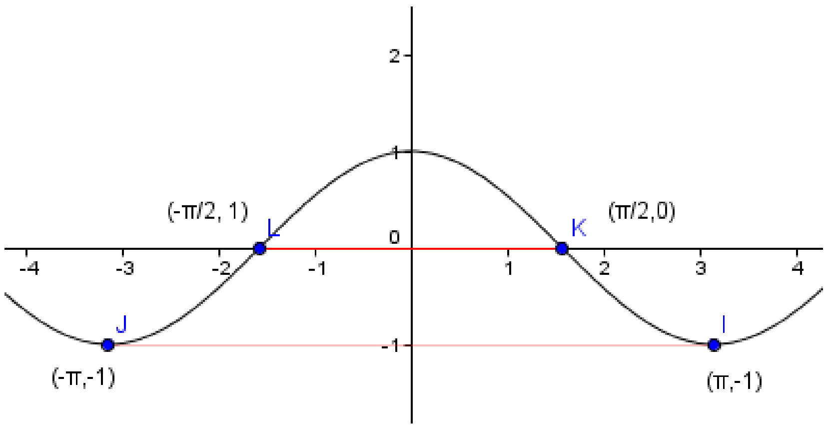


Gráfico de $f(x) = \cos x$

Nos três gráficos acima, observamos que as extremidades dos segmentos $\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{HG}$, $\overline{FE}$, $\overline{LK}$ e $\overline{JI}$ são simétricas em relação ao eixo vertical. O eixo vertical funciona como um "espelho", tudo o que está no lado direito é refletido no lado esquerdo. Os gráficos são simétricos em relação ao eixo $(0Y)$, uma vez que $f(-x) = f(x)$, um ponto (x, y) pertence ao gráfico de f se e somente se $(-x, y)$ também pertence ao gráfico.

Vejamos o que podemos observar em uma análise mais detalhada das últimas três situações:

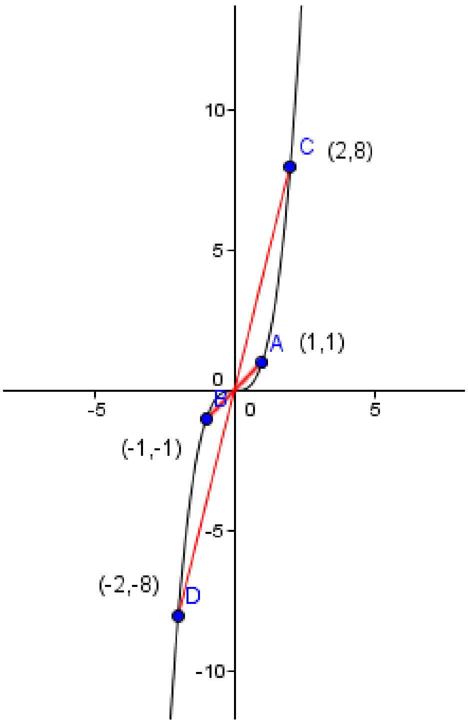


Gráfico de $f(x) = x^3$

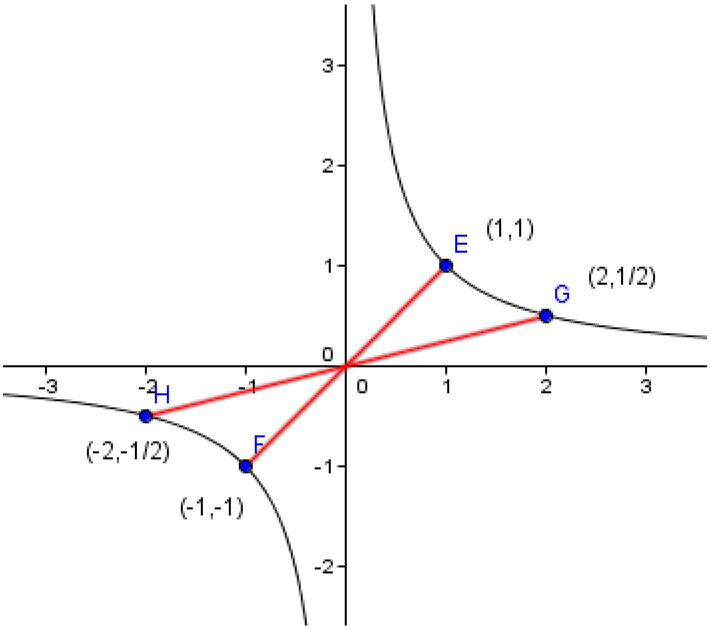


Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

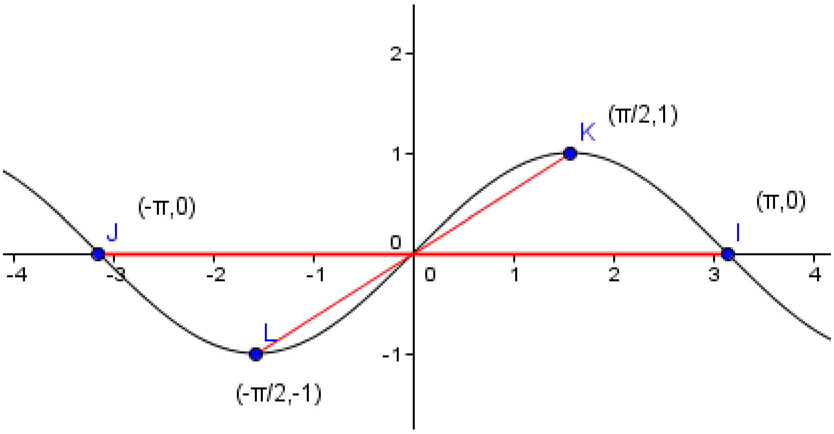


Gráfico de $f(x) = sen\ x$

Nestes três últimos gráficos, observamos que as extremidades dos segmentos $\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{HG}$, $\overline{FE}$, $\overline{LK}$ e $\overline{JI}$ são simétricas em relação à origem. Uma vez que $f(-x) = -f(x)$, um ponto $(x\,,\,y)$ pertence ao gráfico de f se e somente se $(-x\,,\,-y)$ também pertence ao gráfico de f.

- ✓ O gráfico de uma função Par é simétrico em relação ao eixo $(0Y)$.
- ✓ O gráfico de uma função Ímpar é simétrico em relação à origem.

É importante acrescentar que quando adicionamos um termo constante à função par, a função resultante ainda é par e a simetria em relação ao eixo vertical é mantida. Por outro lado, quando adicionamos um termo constante à função ímpar, a função resultante **não** é ímpar e a simetria em relação à origem não é mantida.

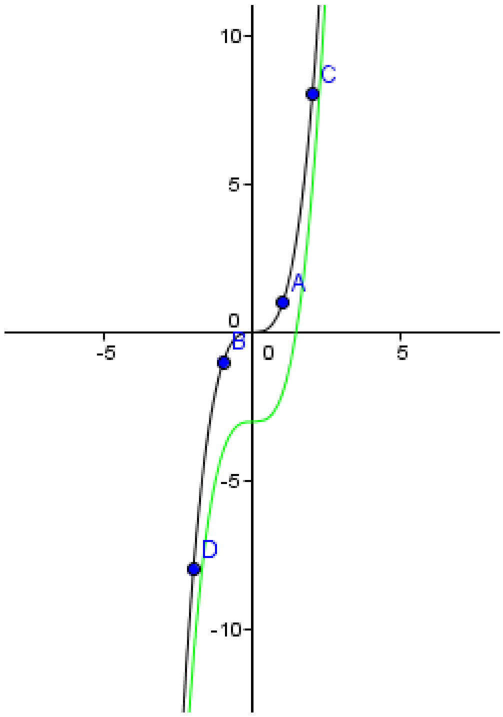


Gráfico de $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^3 - 3$

3.4.2 Função crescente, decrescente e periódica

Motivação

"Ter uma **sorveteria** é como estar na fábula da formiga e da cigarra. Tem que trabalhar o verão inteiro pra poder sobreviver no inverno", esta frase é de Raquel Bravo, diretora-executiva da rede mineira de sorveterias **Salada**. A sazonalidade é um problema para este mercado que apresenta grande parte do faturamento anual concentrado num período curto do ano, setembro a fevereiro. Que características o gráfico *mês x faturamento mensal* de uma empresa com esta sazonalidade pode apresentar? Fácil imaginar, certo?

- ✓ f é *crescente* em um intervalo I se, para todos os pontos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- ✓ f é *decrescente* em um intervalo I se, para todos os pontos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

- ✓ f é *periódica* se existe um número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$ para qualquer valor de x. O menor valor possível de p é denominado o *período* de f.

Explorando o conceito

Na questão do gráfico *mês x faturamento mensal* de uma sorveteria, imaginamos uma curva decrescente a partir do mês de fevereiro, representando a queda de faturamento deste período do ano. A curva recupera crescimento após o término do inverno e início da primavera no mês de setembro. Este comportamento pode ser verificado ano a ano.

O problema da sazonalidade no faturamento de uma empresa vem motivar o estudo do crescimento, decrescimento e periodicidade de funções. Na prática, se o gráfico de uma função f sobe da esquerda para a direita, dizemos que a função é crescente. Por outro lado, se o gráfico de uma função f desce da esquerda para a direita, dizemos que a função é decrescente.

No período de um ano, o gráfico *mês x faturamento mensal* da sorveteria apresenta um elemento de curva que se repete, isto é, se quisermos desenhar toda a curva basta construir um carimbo deste período, onde está desenhado o tal elemento curva e ir carimbando repetidas vezes.

Atividades propostas

Atividade 1: Trabalhar a ideia de crescimento e decrescimento de funções em uma situação que não envolva números.

Um reservatório possui capacidade para armazenar determinada quantidade de água. Quando o reservatório está vazio, uma torneira com vazão de alguns litros por minuto é acionada, até que o reservatório atinja a capacidade máxima. Por outro lado, quando o mesmo está cheio, uma válvula por onde sai determinada quantidade de litros por minuto é aberta.

Passo 1: Sem usar números, estabeleça a função *tempo(min) X capacidade (litros)* na situação do reservatório vazio.

Passo 2: Sem usar números, estabeleça a função *tempo(min) X capacidade (litros)* na situação do reservatório cheio.

Passo 3: Compare as duas funções descritas nos passos anteriores identificando crescimento ou decrescimento.

Atividade 2: Definir função ímpar e identificar suas características a partir da construção geométrica com régua e esquadro do gráfico cartesiano.

Em papel quadriculado e utilizando esquadro e régua, construir os eixos cartesianos e as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes. Em uma segunda construção dos eixos cartesianos, as bissetrizes do 2º e 4º quadrantes.

Passo1: Construir os eixos cartesianos e a bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

Passo 2: Explorar o comportamento da função a partir da identificação de pontos aleatórios e definam a lei de correspondência da função que determina a bissetriz traçada.

Passo 3: Provocar situações de deslocamento da bissetriz acrescentando um termo constante a função.

Passo 4: Repetir todos os passos acima para a bissetriz do 2º e 4º quadrantes.

Atividade 3: Explorar crescimento, decrescimento e identificar paridade de uma função a partir de um gráfico construído no papel quadriculado (ou no Geogebra) .

Em papel quadriculado e utilizando esquadro e régua, construa os eixos cartesianos. (No Geogebra optar pela função Álgebra.)

Passo 1:Identifique a relação existente entre as medidas dos lados de um quadrado e sua área. Neste caso, que valores os lados do quadrado podem assumir? Qualquer número real positivo, certo? Podemos ainda observar que, para cada tamanho do lado do quadrado, temos um único valor de área. O que concluímos? Esta relação é uma função.

Passo 2: Trace em vermelho o gráfico de f aplicada ao conjunto dos números reais positivos. A função é crescente ou decrescente?

Passo 3: Trace em verde o gráfico de f aplicada ao conjunto dos números reais negativos. A função é crescente ou decrescente?

Passo 4: Aplique f ao conjunto dos números reais , observe e identifique os períodos de crescimento e decrescimento.

Passo 5: Marque os pontos $(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9)$ e $(-3, 9)$.

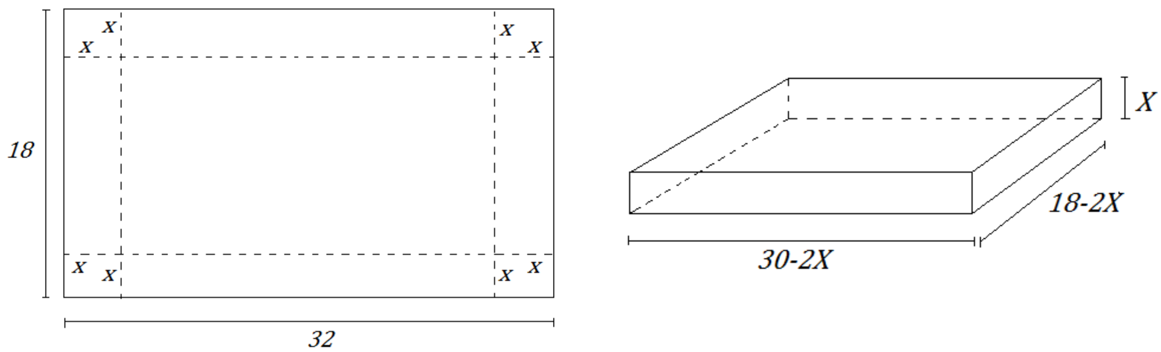
Passo 6: Dobre o gráfico no eixo $(0X)$. (No Geogebra imprima o gráfico antes de dobrar.) O que pode ser observado?

Capítulo 4

4.1 Polinomiais

Motivação

Atualmente vivenciamos um mercado com uma alta concorrência, onde não há espaço para empresas que deixam de lado os custos envolvidos nas diversas etapas de produção, afetando seus lucros e, por conseguinte perdendo a corrida pela manutenção e conquista de novos consumidores. Desta forma, qualquer redução de custo é comemorada no final do mês. Assim, uma preocupação que o setor de produção deve ter é com a embalagem. Não se pode admitir desperdício de materiais quando se trata de produção em larga escala. Consideremos que uma empresa compra papelão em formato retangular com 18 cm por 30 cm e corta fora quadrados do mesmo tamanho nos quatro cantos, formando assim uma caixa, conforme as figuras abaixo:



Como se poderia analisar os volumes possíveis para esta caixa?

De acordo com os dados, temos que o volume é dado por:

$$V(x) = (30 - 2x) \cdot (18 - 2x) \cdot x$$
$$V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$$

Com $0 \leq x \leq 9$, pois não podemos cortar quadrados com lados maiores que 9.

Vejamos abaixo o gráfico que representa este volume no intervalo entre 0 e 9:

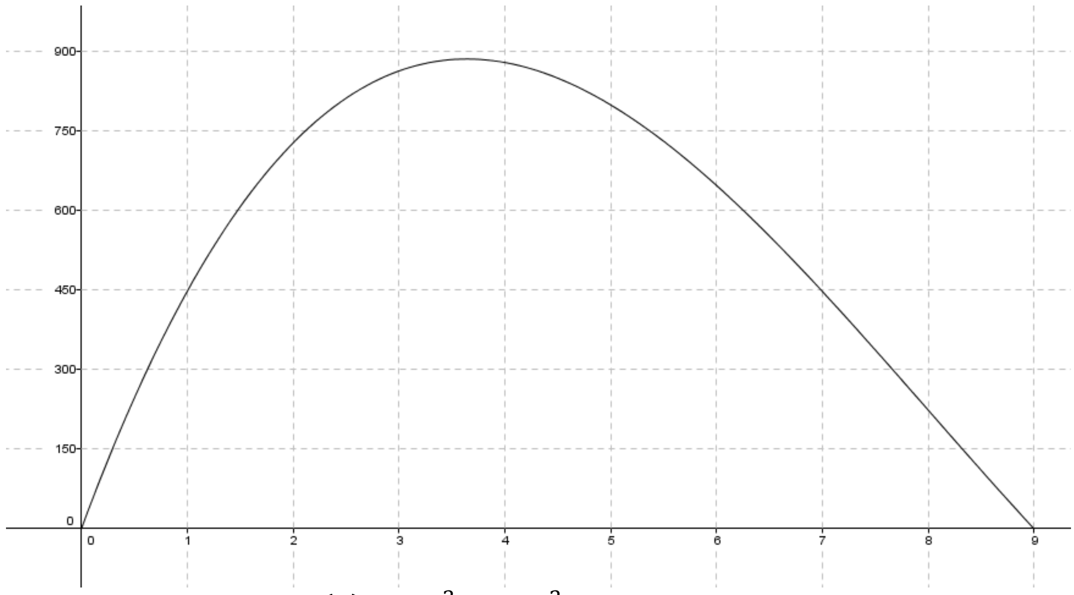


Gráfico de $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$, no intervalo $0 \leq x \leq 9$

Observemos que o volume máximo é de aproximadamente 900 cm^3.

Explorando o conceito

Podemos perceber acima que a representação dos possíveis valores do volume da caixa é dada pela função:

$$V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 540x$$

Esta função é chamada de função polinomial.

A função $P: \Re \rightarrow \Re$, definida pela sentença matemática:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

em que $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_1, a_0$ são chamados de coeficientes e são números reais com n $\in N$.

As funções polinomiais são caracterizadas pelo seu grau. O grau de um polinômio é dado pelo maior expoente de coeficiente não nulo.

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_n \neq 0$ então o grau de $P(x)$ é n.

Desta forma, o grau do problema inicial do volume de uma caixa é de grau 3.

Destacaremos no decorrer deste capítulo, o estudo das funções polinomiais quando $n = 1$ e $n = 2$, isto é, as funções polinomiais de 1° e 2° graus.

A função polinomial de 1° grau, ou simplesmente função de 1° grau, pode ser representada da seguinte forma:

$$f(x) = ax + b, \text{ com } a \neq 0.$$

E como seria o comportamento do gráfico da função afim? Para responder a esta pergunta, vamos ver abaixo alguns pontos da função $f(x) = 2x - 1$ no plano:

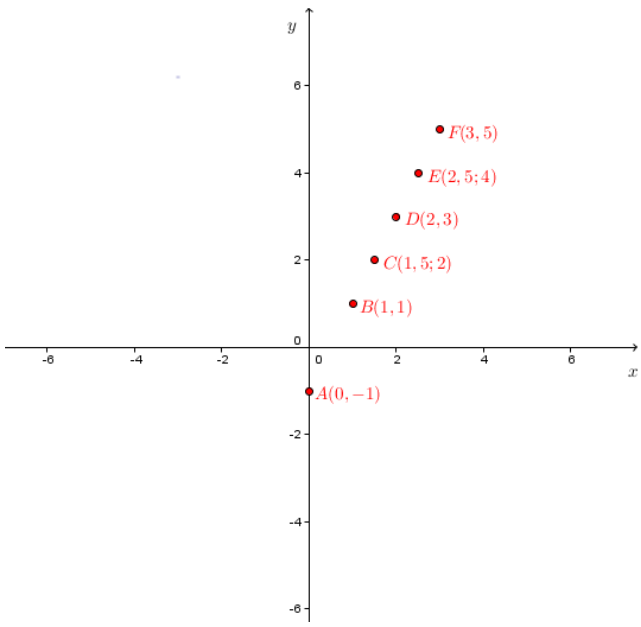
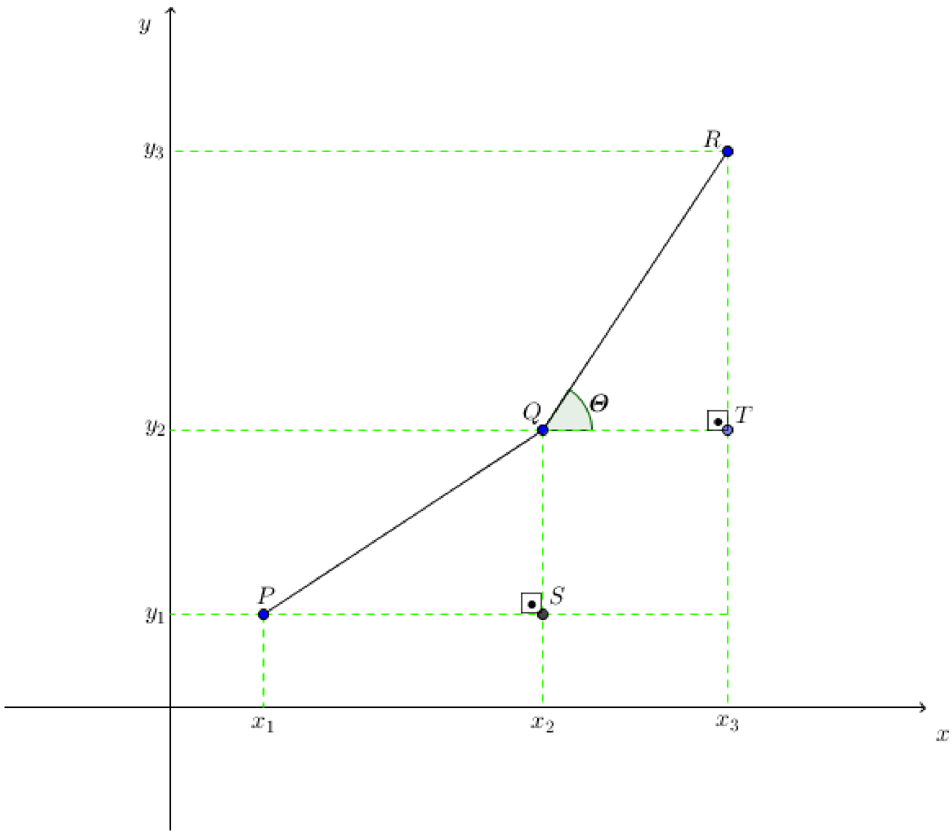


Gráfico de $f(x) = 2x - 1$

Note que os pontos da função $f(x) = 2x - 1$ sugerem que o gráfico é uma reta. Será que poderíamos afirmar que estão alinhados, isto é, que o gráfico é uma reta? A resposta é que sim. Vejamos:

Consideremos a função de 1° grau, isto é $f(x) = ax + b$.

Primeiro podemos desconsiderar a hipótese de uma reta vertical, pois, não representa uma função, como vimos no capítulo 3. E também de uma reta horizontal, uma vez que, neste caso, teríamos uma função constante. Desta forma, é conveniente supormos que a função afim seja sempre uma reta não horizontal. Podemos por absurdo, supor o contrário, isto é, que podemos encontrar três pontos não alinhados, conforme a figura abaixo:



Suponhamos que os pontos $P(x_1, ax_1 + b), Q(x_2, ax_2 + b)\ e\ R(x_3, ax_3 + b)$ pertençam ao gráfico da função f e que, sem perda de generalidade, $x_1 < x_2 < x_3$. Uma vez que

$$\left|\frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1}\right| = \left|\frac{(ax_3 + b) - (ax_2 + b)}{x_3 - x_2}\right| = |a|,$$

tem- se $\frac{QS}{PS} = \frac{RT}{QT}$. Portanto, os retângulos PQS e QRT são semelhantes, concluímos assim, que os ângulos $\angle QPS$ e $\angle RQT$ são congruentes. Logo, os pontos P, Q e R estão alinhados, e o gráfico de qualquer função de 1° grau é uma reta.

Observemos uma característica importante das funções de 1° grau no gráfico abaixo:

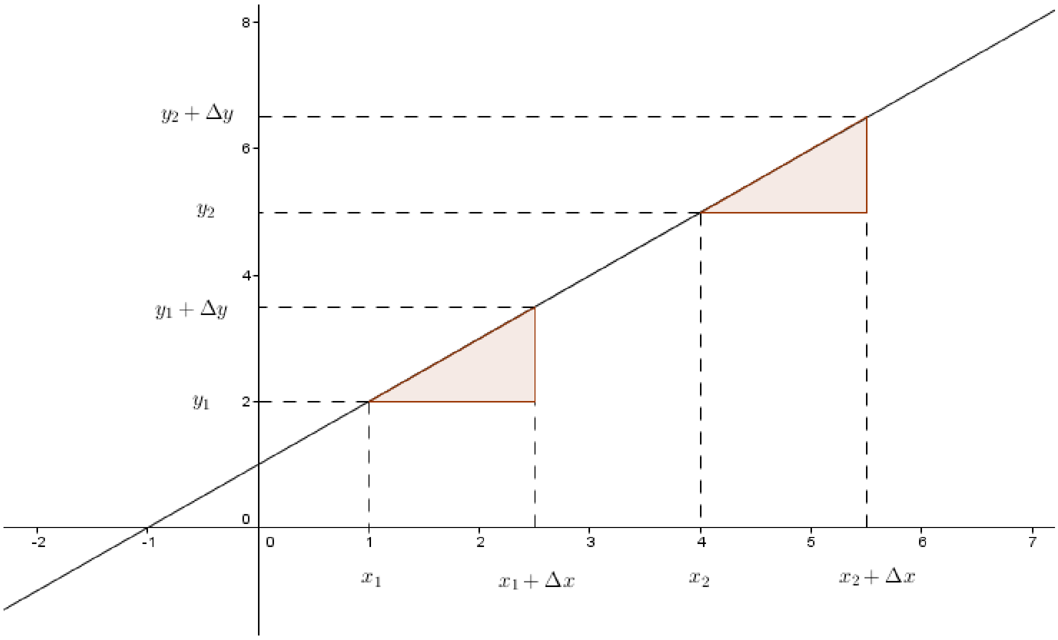


Gráfico de $f(x) = 2x - 1$

Podemos perceber que para cada variação Δx no domínio, há uma variação correspondente Δy (mas não necessariamente igual a Δx) no contradomínio, ou seja, temos variações tais que $\Delta y = k\Delta x$. Assim, estas variações são sempre proporcionais. Geometricamente, este fato se dá pela congruência entre os triângulos destacados no gráfico acima. (pelo caso conhecido como ALA – ambos são retângulos, tem um cateto medindo $|\Delta x|$ e possuem o outro ângulo adjacente a tal cateto de mesma medida).

Quanto ao coeficiente a, podemos determiná-lo a partir do conhecimento dos valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos e arbitrários x_1 e x_2.

Observemos:

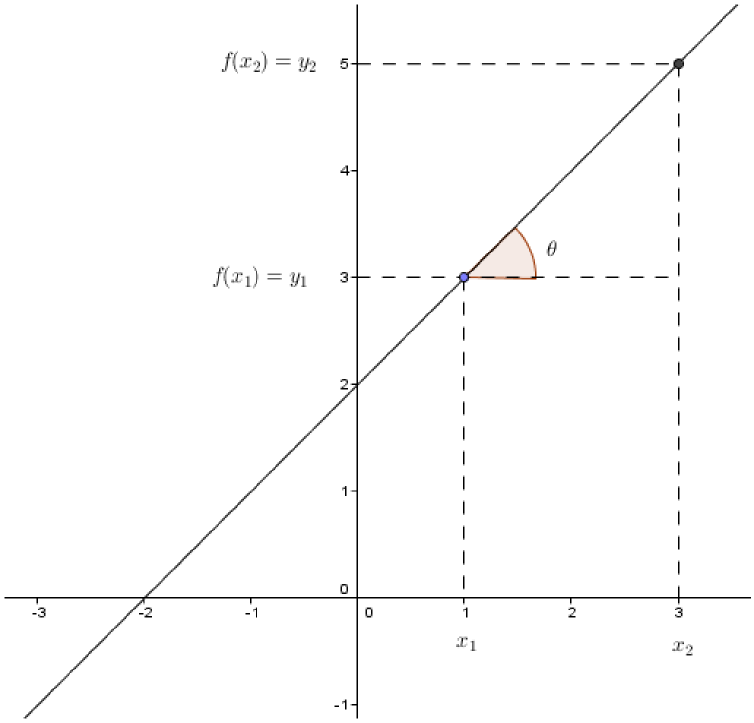


Gráfico de $f(x) = x + 2$

Consideremos as imagens de x_1 e x_2:

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e } f(x_2) = ax_2 + b,$$

Se subtrairmos a segunda da primeira obtemos:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

Portanto, o valor do coeficiente a vale:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = tg\,\theta$$

Observe que ilustramos a expressão acima para o caso em que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. No entanto, essa mesma identidade é válida também para o caso em que $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, conforme veremos a seguir:

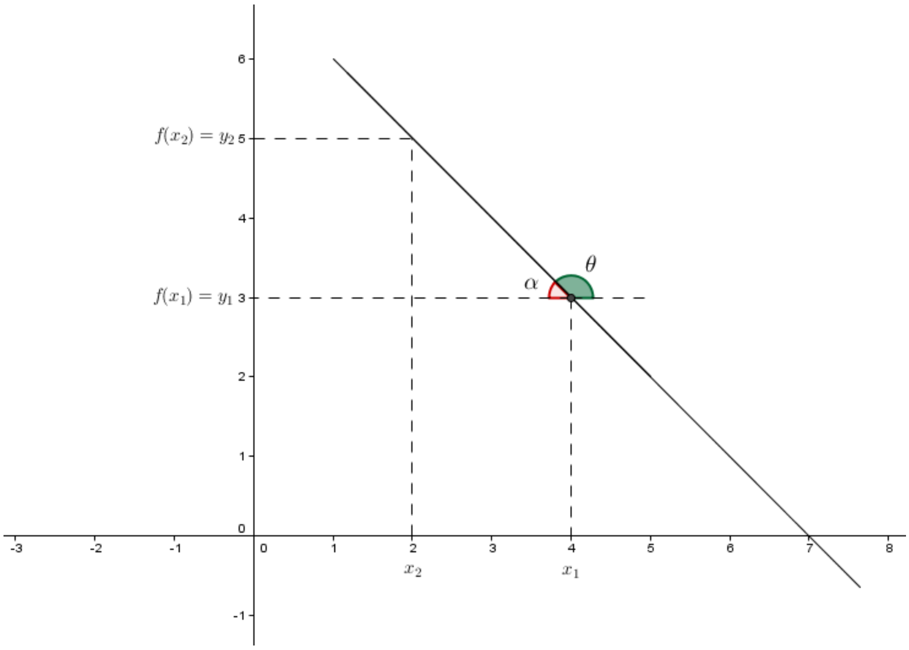


Gráfico de $f(x) = -x + 7$

Consideremos as imagens de x_1 e x_2: $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$,

Se subtrairmos a segunda da primeira obtemos: $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$,

Assim,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como, ao analisarmos o gráfico, vemos que: $tg\ \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_2}$

Podemos concluir que: $a = -\ tg\ \alpha$. Por outro lado, podemos ver que $\alpha = \pi - \theta$,

Assim, segue que: $tg\ \alpha = tg(\pi - \theta) = -tg\ \theta$.

Logo: $tg\ \theta = \ -tg\ \alpha$

Finalmente:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = tg\ \theta.$$

Nas funções de 1° grau $f(x)\ =\ ax\ + b$, o coeficiente a é chamado de:

- ✓ Taxa de variação, pois $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$;
- ✓ Coeficiente angular, pois $a = tg\boldsymbol{\theta}$.

Ainda observando o fato do gráfico de uma função de 1° grau ser uma reta e de, conforme vimos acima, o coeficiente a ser o coeficiente angular da reta, pois $a = tg\boldsymbol{\theta}$, temosassim, duas situações possíveis:

1. Se o coeficiente a for positivo: $a > 0$. Observe o exemplo:

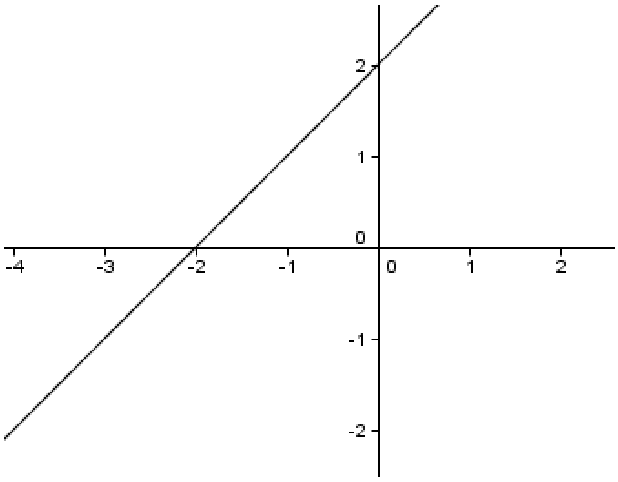


Gráfico de $f(x) = x + 2$

Neste caso, temos $a = 1$. E o comportamento da função é crescente.

2. Se o coeficiente a for positivo: $a < 0$. Observe o exemplo:

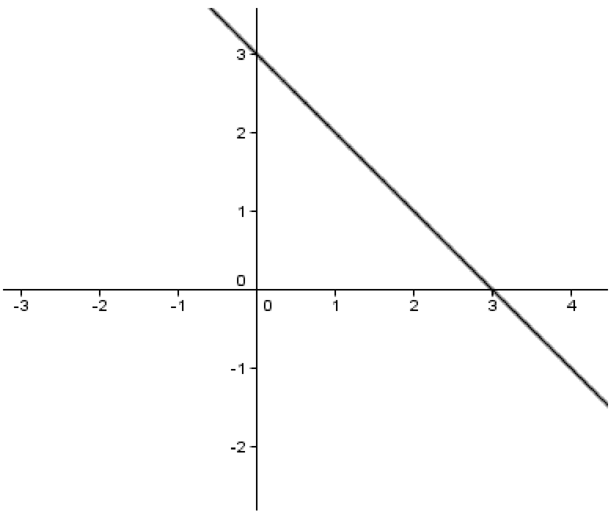


Gráfico de $f(x) = -x + 3$

Neste caso, temos $a = -1$. E o comportamento da função é decrescente.

Nas funções de 1° grau $f(x) = ax + b$, temos:

- ✓ a> 0 ⟺ a função é crescente;
- ✓ a< 0 ⟺ a função é decrescente.

Função Linear: Na função de 1° grau, $f(x) = ax + b$, se o coeficiente b for igual a zero, denominamos por função linear.

A função $f(x) = ax$ é chamada de função linear.

E como se comporta uma função linear? Observemos que a função linear é uma função de 1° grau logo, seu gráfico é uma reta. Temos, neste caso, um caso particular onde a reta sempre passa pela origem. Vimos anteriormente, que nas funções de 1° grau, as variações no contradomínio são sempre proporcionais as do domínio. No caso particular das funções lineares, como a reta passa pela origem, as variações Δx e Δy são, respectivamente, as próprias variáveis x e y, conforme podemos ver no gráfico abaixo.

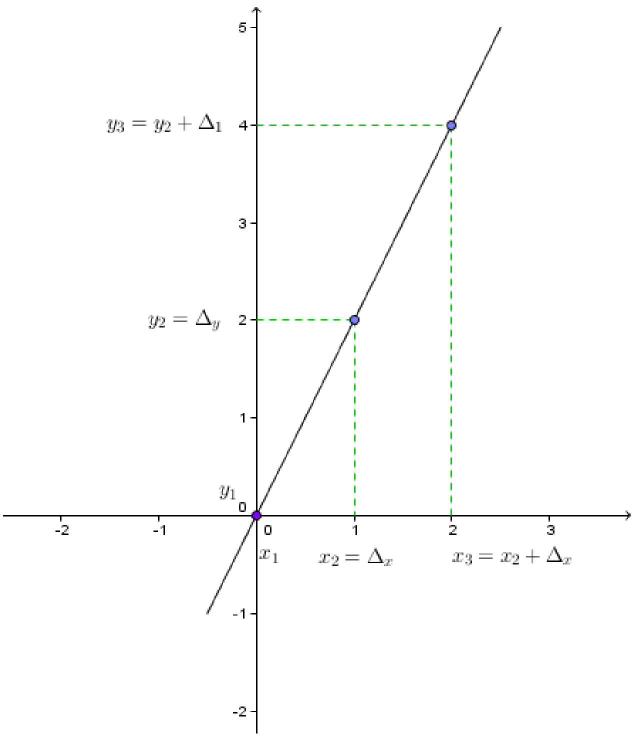


Gráfico de $f(x) = 2x$

Observemos o comportamento da razão:

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \cdots = 2.$$

Sendo assim, a função linear tem as variáveis $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$ diretamente proporcionais e, o coeficiente $\boldsymbol{a}$ é a constante de proporcionalidade.

Vamos agora observar a outra função polinomial que destacamos neste capítulo: as funções polinomiais do 2° grau.

A função polinomial de 2° grau, ou simplesmente função de 2° grau, pode ser representada da seguinte forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \neq 0.$$

E, como se comporta o gráfico de uma função de 2° grau? O gráfico correspondente a uma função de 2° grau é uma parábola. Não objetivamos neste texto provar esse resultado, assim, vamos restringir apenas a estudar seu comportamento.

Para iniciarmos um estudo mais detalhado das funções do 2° grau vamos transformá-la na forma canônica, a qual permite uma melhor análise:

Consideremos a equação de 2° grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Coloquemos o coeficiente a em evidência:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Fatorando a expressão obtida:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Se representarmos $b^2 - 4ac$ por Δ, teremos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

forma canônica da função de 2° grau.

Podemos perceber ainda que o gráfico da função do 2° grau sendo uma parábola tem sempre um valor extremo, no qual a curva muda de sentido. Podemos determinar este ponto ao observarmos a função na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Temos dois casos possíveis:

1. Se $a > 0$, temos que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para qualquer que seja o valor de x real. Assim, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$ $\forall\ x \in \Re$ e, portanto, $y = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função. Neste caso, tendo a parábola um valor mínimo, esta necessariamente terá a **concavidade voltada para cima**.

Observe, finalmente, que tal valor mínimo é atingido quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, isto é, $x = -\frac{b}{2a}$.

Logo, o ponto onde a parábola muda de sentido, dito vértice, é o ponto com as seguintes coordenadas:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

2. Se $a < 0$, temos que $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ para qualquer que seja o valor de x real. Assim, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$ $\forall\ x \in \Re$ e, portanto, $y = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função. Neste caso, tendo a parábola um valor máximo, esta necessariamente terá a **concavidade voltada para baixo**.

Observe, finalmente, que tal valor máximo é atingido quando$x + \frac{b}{2a} = 0$, isto é, $x = -\frac{b}{2a}$. Logo, o ponto onde a parábola muda de sentido, dito vértice, é o ponto com as seguintes coordenadas:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

O ponto de coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right),$$

é chamado de vértice da função do 2° grau.

Para:

- ✓ $a > 0$: é chamado de ponto de mínimo e a parábola tem concavidade voltada para cima;
- ✓ $a < 0$: é chamado de ponto de máximo e a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Podemos observar os pontos de máximo e mínimo e o vértice nos exemplos a seguir:

No primeiro exemplo, temos o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 8$:

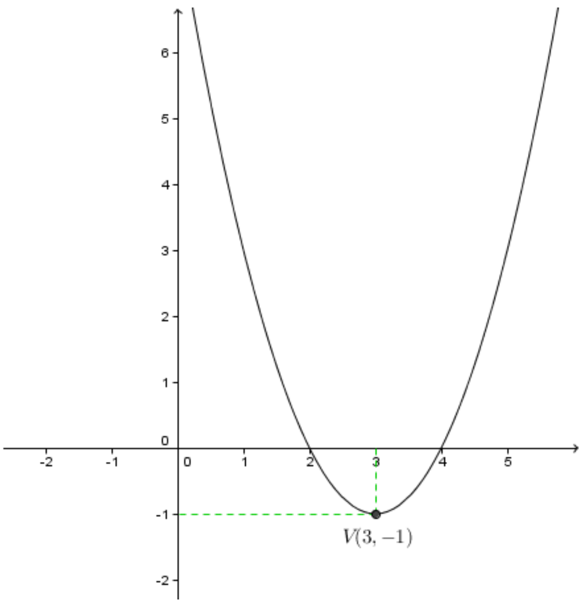


Gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Neste caso, temos o coeficiente $a = 1 > 0$ que implica em uma parábola voltada para cima e vértice $V(3, -1)$, que é o ponto de mínimo.

Já neste segundo exemplo, temos o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 3$

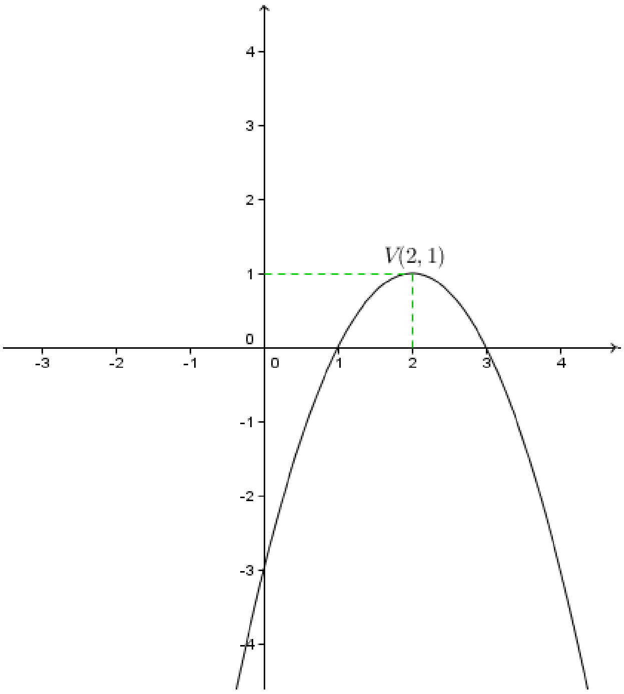


Gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Neste caso, temos o coeficiente $a = -1 < 0$ que implica em uma parábola com concavidade voltada para baixo e vértice $V(2,1)$, que é o ponto de máximo.

Sabendo que o gráfico é uma parábola, vamos obter agora as coordenadas dos pontos de interseção como o eixo x, quando existirem.

Na interseção com o eixo x, a função é igual a zero, assim:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Fazendo $f(x) = 0$:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Assim, observamos que temos duas possíveis raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \;\; e \;\; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

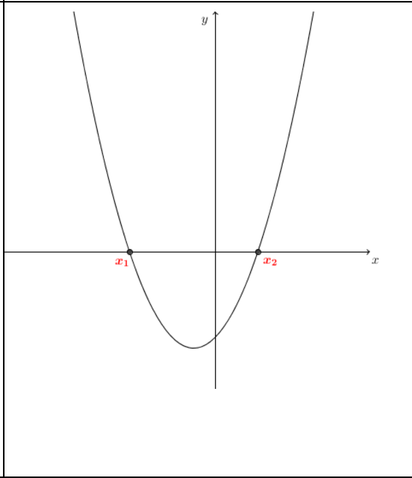
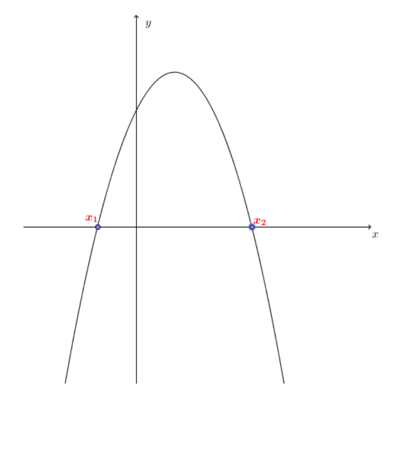
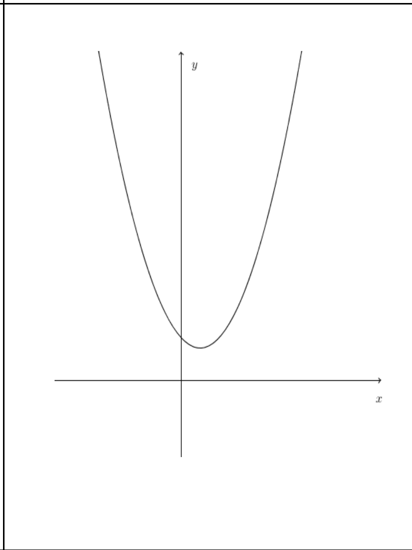
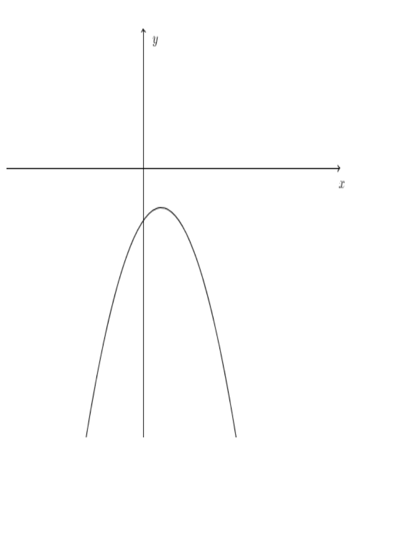
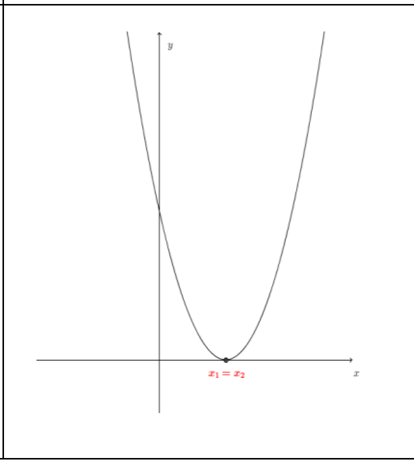
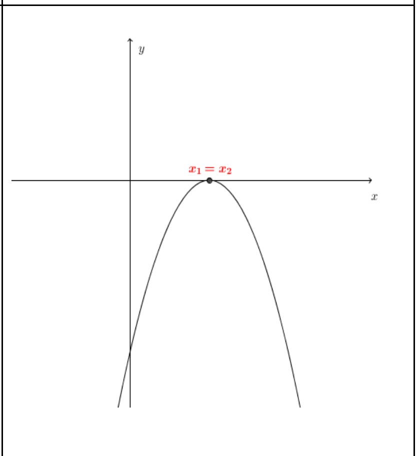
Observando os valores obtidos acima e considerando que só existe raiz quadrada para números não negativos, têm-se três possibilidades para o número de raízes de equações de 2° grau. A saber:

1. Se $\Delta = 0$: temos uma raiz de multiplicidade 2;

2. Se $\Delta > 0$: temos duas raízes distintas;

3. Se $\Delta < 0$: não temos raízes reais.

Assim, ao combinarmos as possibilidades do número de raízes com a concavidade, temos seis hipóteses:

		Concavidade	
		$a > 0$	$a < 0$
N° DE RAÍZES	$\Delta > 0$		
	$\Delta < 0$		
	$\Delta = 0$		

Por fim, relembrando as funções do 1° grau, vimos que neste caso, as taxas de variação são proporcionais. E as funções de 2° grau? Também poderiam ser proporcionais?
A resposta é que não. Vejamos o gráfico abaixo:

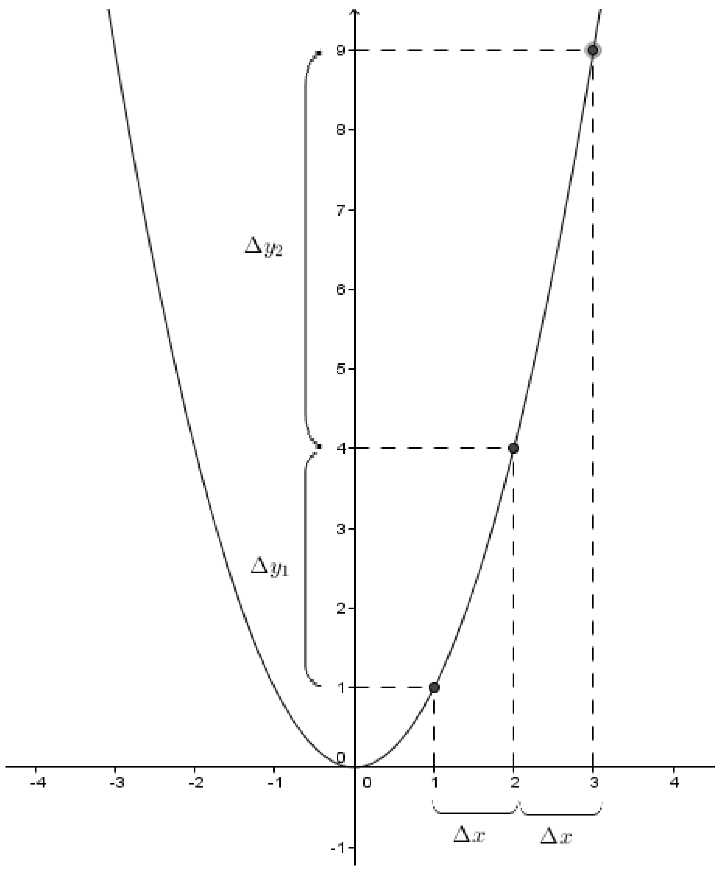


Gráfico de $y = x^2$

Notemos que, se partimos de $x = 1$, um acréscimo de $\Delta x = 1$ ocasiona um acréscimo de $\Delta y_1 = 3$. Por outro lado, se partimos de $x = 2$, um acréscimo de $\Delta x = 1$ ocasiona um acréscimo de $\Delta y_1 = 5$. Desta forma, podemos concluir que a função do 2° grau não é proporcional.

Atividades propostas

Atividade 1: Nesta atividade, trabalhamos a ideia de proporcionalidade para resolver problemas de funções do 1º grau, apresentando um problema que representa o consumo de água em um estado:

Num estado, a companhia de água emprega a seguinte fórmula para calcular o consumo de água: para consumo de até 10 m^3, paga-se R$ 37,00. Se o consumo foi acima de 10 m^3, paga-se o valor anterior acrescido de R$ 5,40 por m^3 que exceda 10 m^3.

Passo 1: Escrever uma sentença matemática que represente o problema.

Passo 2: Calcular o valor a ser pago por um cliente que consuma 28 m^3.

Atividade 2: Propomos esta atividade com a finalidade de explorar o significado do zero e da variação do sinal de uma função de 1º grau.

Uma determinada empresa tem seu lucro definido pela função:

$L(t) = 1000t - 6000$, onde t é o tempo em meses e L o lucro.

Passo 1: Encontrar o período no qual esta empresa teve prejuízo.

Passo 2: Encontrar o período no qual esta empresa teve lucro.

Atividade 3: Propomos uma atividade de inequações que possibilita, em um problema, encontrar o valor ideal.

Uma pessoa em uma dieta deve ingerir, no máximo, 20 unidades de calorias e 10 de gordura e, no mínimo, 2 unidades de vitamina. Queremos encontrar a melhor programação de compra dos alimentos X e Y, de tal forma que a pessoa possa cumprir sua dieta com o menor custo possível de acordo com a tabela abaixo:

Componente / Alimento	Caloria	Gordura	Vitamina	Preço por unidade
X	4	1	1	R$3,00
Y	1	2	-	R$ 2,00

Passo 1: Representando a quantidade comprada do alimento X por x e por y a quantidade do alimento Y, por uma inequação que represente o consumo máximo de 20 calorias;

Passo 2: Repetir o processo anterior para o consumo máximo de 10 gramas de gordura;

Passo 3: Represente a restrição do consumo de vitaminas por uma inequação;

Passo 4: Representar graficamente a região que atenda as três restrições do problema;

Passo 5: Encontrar a compra ideal de cada alimento;

Passo 6: Encontrar, para a compra ideal, o gasto mínimo.

Atividade 4: Sugerimos uma atividade que possibilita o aluno encontrar as raízes de uma função do 2º grau sem a utilização de fórmulas com o método conhecido por completar quadrados.

Considere a função $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

Passo 1: Colocar entre parênteses os termos com a variável "x";

Passo 2: Completar o quadrado dentro do parênteses e subtrair este termo fora a fim de não alterar a função;

Passo 4: Escrever o trinômio na forma fatorada;

Passo5: Igualar a função a zero e encontrar a raiz da equação obtida.

Atividade 5: Propomos um problema na qual se destaca a importância de se conhecer o vértice de uma função do 2° grau.

Um empresário deseja aumentar os lucros com as vendas de camisas, principal produto de sua loja. Ele percebeu que a quantidade camisas vendidas, mensalmente, diminui com o preço da seguinte forma: a um preço unitário de R$ 100,00 ninguém comprava uma camisa sequer; a cada real aumentado no preço de uma única camisa, 2 clientes deixavam de comprar a mercadoria. Sabe-se ainda que o custo para produzir cada camisa é de R$ 30,00.

Passo 1: Escrever uma função que represente a quantidade Q de camisas vendidas ao preço P;

Passo 2: Escrever uma função que represente o lucro obtido em cada camisa, ao preço P;

Passo 3 : Escrever uma função que represente o lucro total mensal deste empresário;

Passo 4: Encontrar o preço P e o lucro total máximo que este empresário pode conseguir em sua loja.

Passo 5: Encontrar os intervalos que ele terá prejuízo. E os intervalos que ele terá lucro.

Atividade 6: Sugerimos usar o vértice para encontrar a função inversa de uma função dada do 2° grau.

Considere a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$ com $f: \Re \to [-1, \infty[$

Passo 1: Determinar se esta função admite inversa;

Passo 2: Encontrar o vértice desta parábola;

Passo 3: Restringir o domínio onde o valor inicial seja o valor de x obtido no vértice;

Passo 4 : Determinar se a função, com o domínio obtido no passo anterior, admite inversa;

Passo 5: Encontrar a função inversa com o domínio obtido no passo 4.

Atividade 7: Nesta atividade, propomos um problema de inequações de 2° grau.

Em uma determinada empresa, foi observado que o custo de produção de um produto é $C(x) = 0{,}1x^2 + 2x + 50$, onde x representa a quantidade produzida mensalmente. Sabe-se ainda que cada unidade é vendida por R$ 6,50.

Passo 1: Encontrar a função que representa o lucro dessa empresa;

Passo 2: Representar, na forma de inequação, a expressão que representa o lucro dessa empresa;

Passo 3: Encontrar os valores que deve variar x para que haja lucro;

Passo 4: Encontrar o valor de x para que se tenha lucro máximo. Em seguida, encontrar o lucro máximo possível.

4.2 Funções Trigonométricas

Motivação

"O mar não está para peixe!". Quem não já ouviu este dito popular que soa como uma verdade absoluta quando dita por um experiente pescador? Na verdade o que esta frase quer dizer é que: a maré não está para peixe!

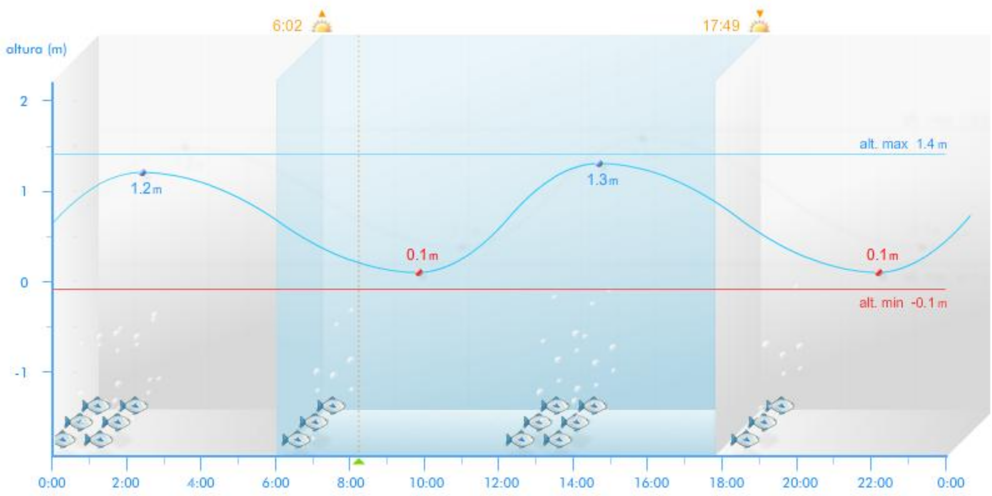
Os pescadores aprendem desde cedo que o melhor período para a prática da pescaria é na maré alta, pois os peixes ficam mais vulneráveis devido a correnteza. As marés, por sua vez, nada mais são do que as influências da Lua e do Sol sobre a água do globo terrestre. Mas, será que também poderíamos reconhecer quando a maré estará alta? Seria possível modelar este evento?

Explorando o conceito

A influência do Sol e da Lua se dá pela interação gravitacional da água dos oceanos, que podem ser considerados como um corpo elástico e fluido. Por observância deste evento com sua periodicidade, pode-se ajustar o movimento das marés a uma função trigonométrica. Podemos modelá-la por uma função do tipo:

$f(t) = a + bcos(c + \pi \cdot t)$, onde a, b e c são constantes e t é o tempo transcorrido. Neste texto objetivamos estudar as funções trigonométricas elementares.

No quadro abaixo podemos observar a altura das marés durante um dia na cidade do Rio de Janeiro, retirado de um site que é referência para os pescadores.



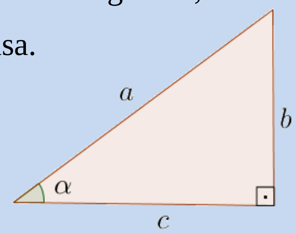
Fonte: http://www.tabuademares.com/br/rio-de-janeiro/rio-de-janeiro, *acesso: 04/04/2015*

Uma pergunta natural seria qual o porquê da função acima ser chamada de trigonométrica? Para responder a esta pergunta, vamos relembrar algumas definições da trigonometria:

Propriedades fundamentais

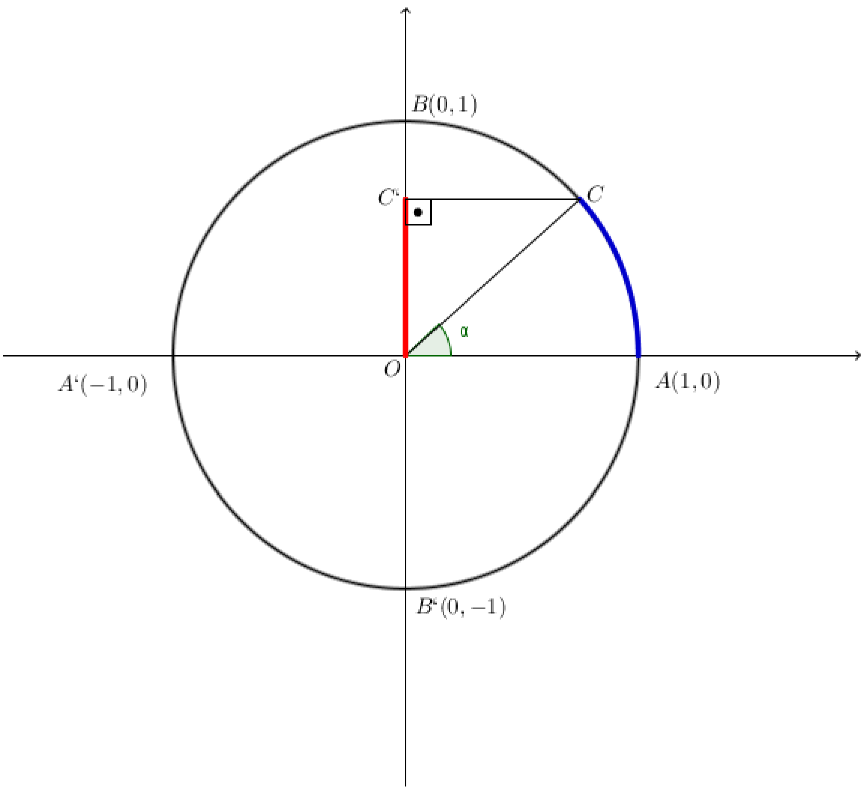
Dado um triângulo retângulo, chamamos de seno de um ângulo α, a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida da hipotenusa.

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a}$$



O seno também pode ser representado no ciclo trigonométrico, que é um círculo de raio 1 centrado na origem do plano cartesiano. Vejamos:

Consideremos, no ciclo trigonométrico, o arco $\widehat{AC}$ cuja medida, em radianos, é α, e o segmento $\overleftrightarrow{OC`}$, que é a projeção ortogonal do raio $\overleftrightarrow{OC}$ sobre o eixo vertical.



Ciclo trigonométrico

Definimos seno do arco $\widehat{AC}$ como a medida algébrica de $\overleftrightarrow{OC`}$ e indicamos:

$$sen\alpha = \overline{OC`}.$$

E como seria uma função seno?

Para definirmos a função seno, consideremos que todo número real x pode ser considerado como a medida, em radianos, de um determinado arco $\widehat{AC}$. Assim, para cada arco $\widehat{AC}$ existe um único número real y que é o seu seno, ficando, portanto, definida a função $seno\ f: x \to y$ e indicamos esta função por $f(x) = sen\ x$.

Utilizando o software ***Geogebra*** para construir o gráfico desta função, temos o seguinte resultado:

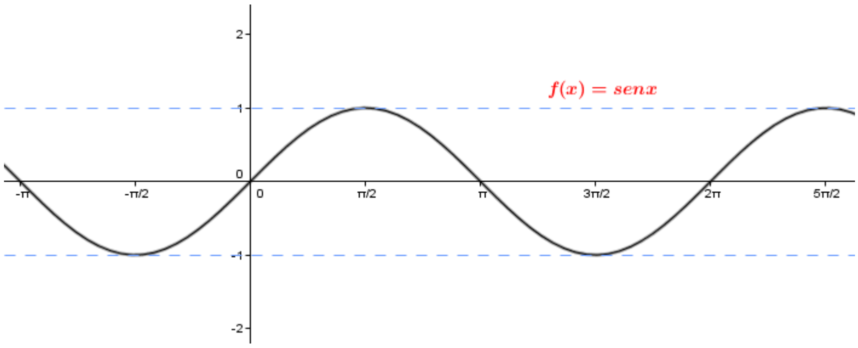


Gráfico de $f(x) = sen\ x$

Observemos que a função acima, $f(x) = sen\ x$, tem como domínio o conjunto dos números reais e como imagem o intervalo [-1,1].

Além disso, ela é periódica, com período $P = 2\pi$.

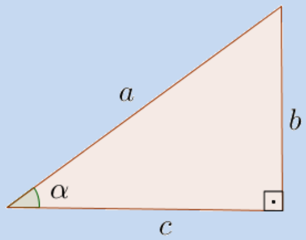
Na função $f(x) = sen\ x$, temos:

$$D_f = \Re\ , Im_f = [-1,1] \quad \text{e} \quad P = 2\pi.$$

Outra relação trigonométrica é o cosseno:

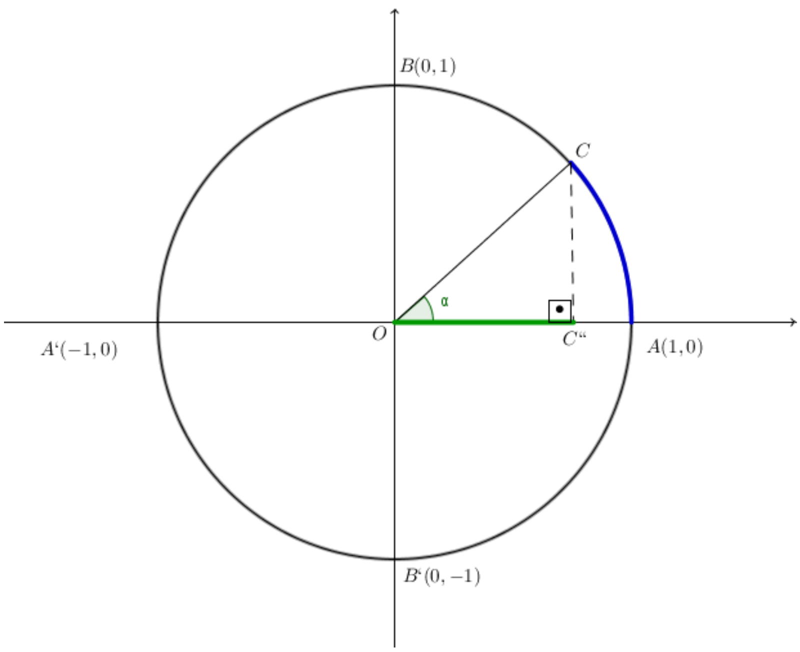
Dado um triângulo retângulo, chamamos de cosseno de um ângulo α, a razão entre a medida do cateto adjacente a α e a medida da hipotenusa.

$$cos\ \alpha = \frac{c}{a}$$



O cosseno também pode ser representado no ciclo trigonométrico, que é um círculo de raio 1 centrado na origem do plano cartesiano. Vejamos:

Consideremos, no ciclo trigonométrico, o arco $\widehat{AC}$ cuja medida, em radianos, é α, e o segmento $\overleftrightarrow{OC``}$, que é a projeção ortogonal do raio $\overleftrightarrow{OC}$ sobre o eixo horizontal.



Ciclo trigonométrico

Definimos cosseno do arco $\widehat{AC}$ como a medida algébrica de $\overleftrightarrow{OC``}$ e indicamos:

$$cos\alpha = \overline{OC``}.$$

E como seria uma função cosseno?

Já sabemos que todo número real x pode ser considerado como a medida, em radianos, de um determinado arco $\widehat{AC}$. Para cada arco $\widehat{AC}$ existe um único número real y que é o seu cosseno, ficando, portanto, definida a função $cosseno\ f: x \to y$ e indicamos esta função por $f(x) = cos\ x$.

Utilizando o software ***Geogebra*** para construir o gráfico desta função, temos o seguinte resultado:

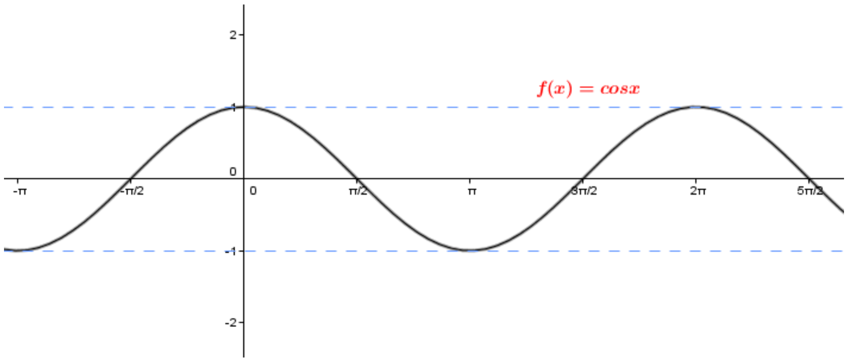


Gráfico de $f(x) \ = \ cos\ x$

Observemos que a função acima, $f(x) = cos\ x$, tem como domínio o conjunto dos reais e como imagem o intervalo [-1,1].

Além disso, ela é periódica, com período $P = 2\pi$.

Na função $f(x) = cos\ x$, temos:

$$D_f = \Re, \quad Im_f = [-1,1] \quad \text{e} \quad P = 2\pi$$

Além das funções trigonométricas seno e cosseno, existem outras que são obtidas a partir destas. Uma é a função tangente:

A função tangente é representada por $f(x) = tg\ x$, onde

$$\operatorname{tg} x = \frac{sen\ x}{\cos x},$$

com $\cos x \ \neq 0$.

Observemos que a função tangente não está definida para $\cos x = 0$. Graficamente, qual seria a conseqüência deste fato?

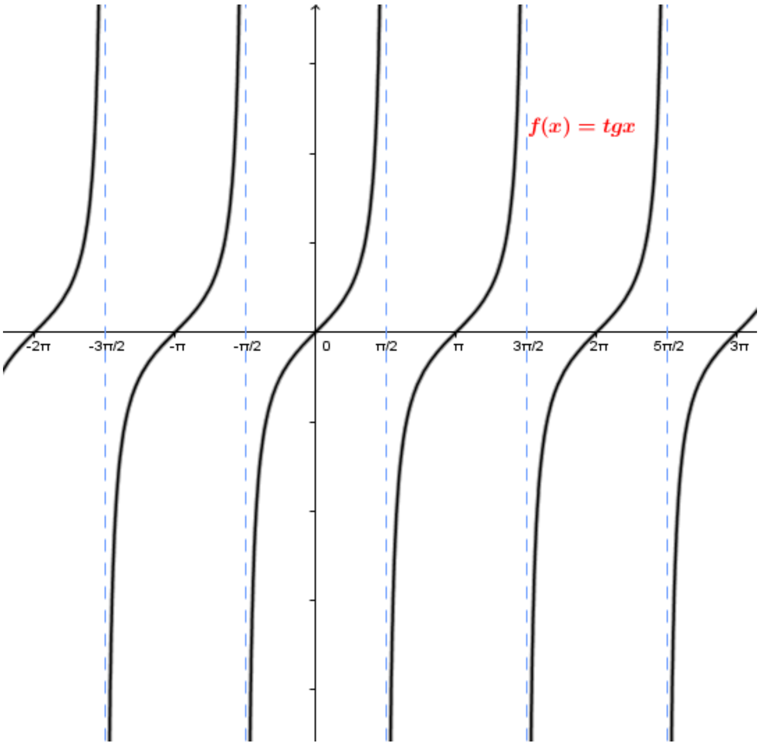


Gráfico de $f(x) \ = \ tg\ x$

Vemos que a função só é definida para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k\ \in Z$.

Assim, ao observarmos o gráfico, vemos que:

Na função $f(x) = tg\ x$, temos:

$$D_f = \left\{x; x \in \Re\ e\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\},\ \ com\ k\ \in Z, \quad Im_f = \Re \quad \text{e} \quad P = \pi$$

Já a função cotangente, é definida da seguinte forma:

A função cotangente é representada por $f(x) = cotg\ x$,onde

$$\operatorname{cotg} x = \frac{cos\ x}{\operatorname{sen} x},$$

com $\operatorname{sen} x\ \neq 0$.

A função cotangente não está definida para sen $x = 0$. Observemos o gráfico a seguir:

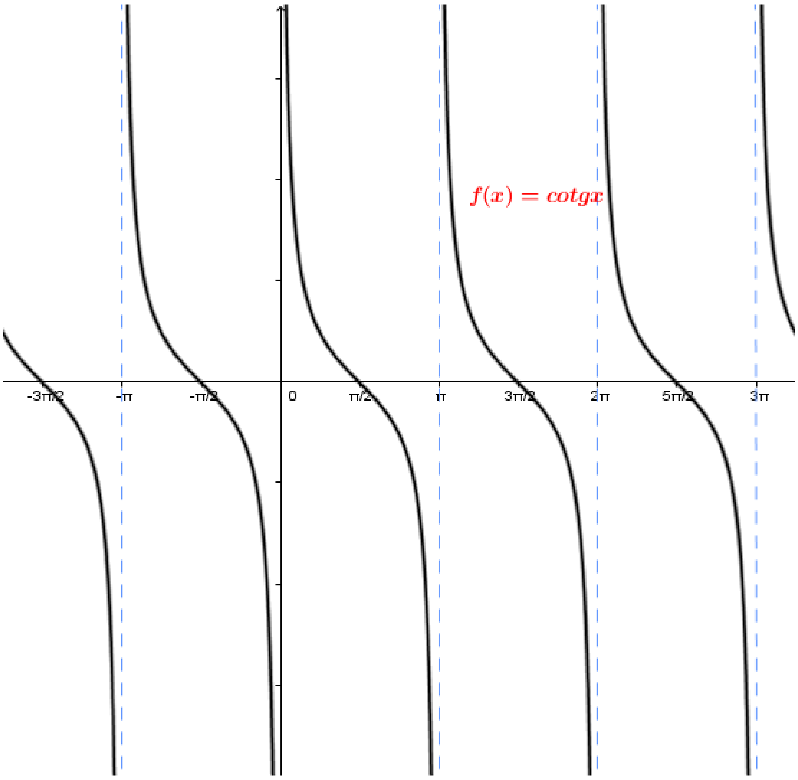


Gráfico de $f(x) = cotg\ x$

Vemos que a função só é definida para $x \neq k\pi$, com $k \in Z$.

Assim, podemos concluir que:

Na função $f(x) = cotg\ x$, temos:

$$D_f = \{x; x \in \Re\ e\ x \neq k\pi\}, com\ k \in Z, \quad Im_f = \Re \quad \text{e} \quad P = \pi$$

A função secante é definida por:

A função secante é representada por $f(x) = sec\ x$, onde

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

com$\cos x \neq 0$.

E como se comporta seu gráfico? Vejamos:

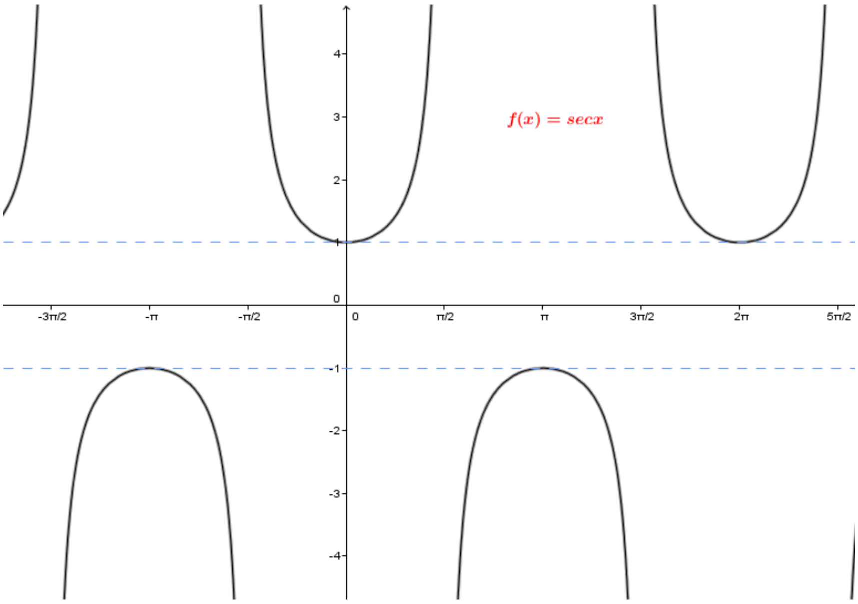


Gráfico de $f(x) \ = \ sec\ x$

Vemos que a função só é definida para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \ \in Z$.

Assim, podemos concluir que:

Na função $f(x) = sec\ x$, temos:

$$D_f = \left\{x; x \in \Re\ e\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, com\ k \ \in Z, \quad Im_f = \Re -]-1{,}1[\text{e} \quad P = 2\pi.$$

Por fim, a função cossecante é definida por:

A função cossecante é representada por $f(x) = cossec\ x$, onde

$$\text{cossec}\, x = \frac{1}{\text{sen}\, x},$$

$$\text{comsen}\, x \ \neq 0.$$

O comportamento do gráfico pode-se visto na figura a seguir:

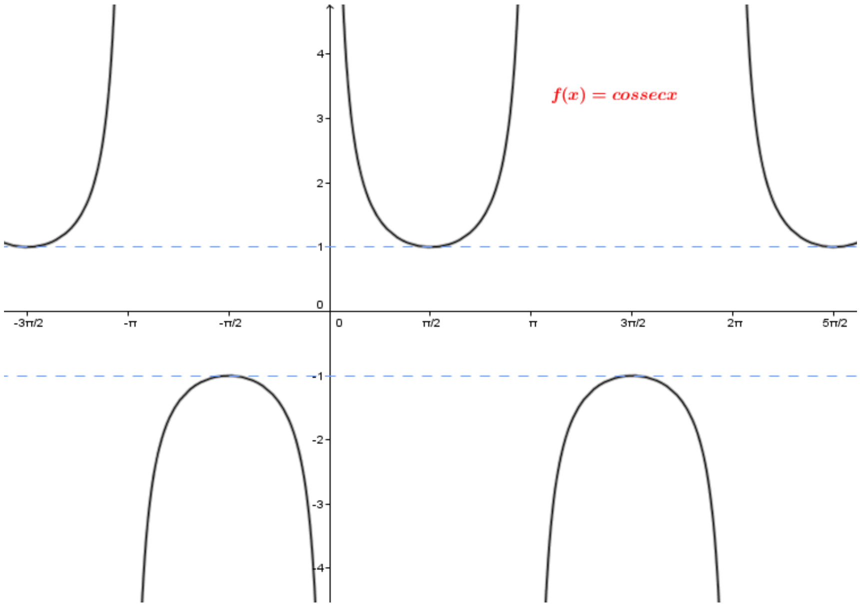


Gráfico de $f(x) \ = \ \ cossec\ x$

Vemos que a função só é definida para $x \neq k\pi$, com $k \ \in Z$.

Assim, podemos concluir que:

Na função $f(x) = cossec\ x$, temos:

$$D_f \ = \{x; x \in \Re\ e\ x \neq k\pi\}, com\ k \ \in Z, \quad Im_f \ = \Re -] - 1{,}1[\text{e} \ \ P = 2\pi.$$

No capítulo anterior, definimos as funções inversas. E as funções trigonométricas admitem inversas?

A resposta é que nenhuma das seis funções trigonométricas admite inversa, pois seus gráficos se repetem periodicamente e, portanto, não passam no teste da reta horizontal (conforme vimos no capítulo 3).

Sendo assim, para superar este problema, restringimos os domínios das funções trigonométricas para obter funções injetoras e depois definir as "funções trigonométricas inversas" como as inversas dessas funções restritas.

Vamos a seguir analisar seus comportamentos:

1) Função arco seno:

A função $arco\ seno$, denotada por $arc\ sen$, é definida como sendo a inversa da função $seno$ restrita ao intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

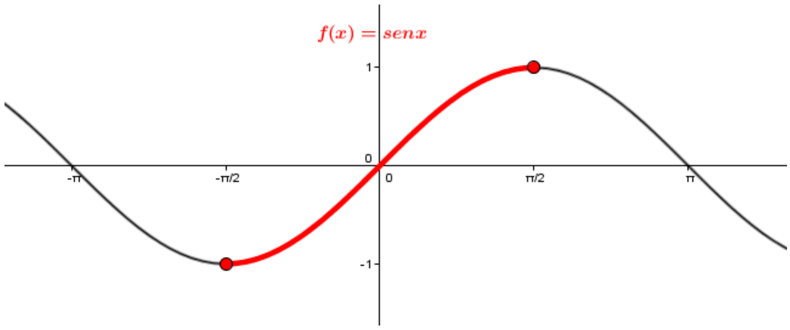


Gráfico de $f(x) = senx$

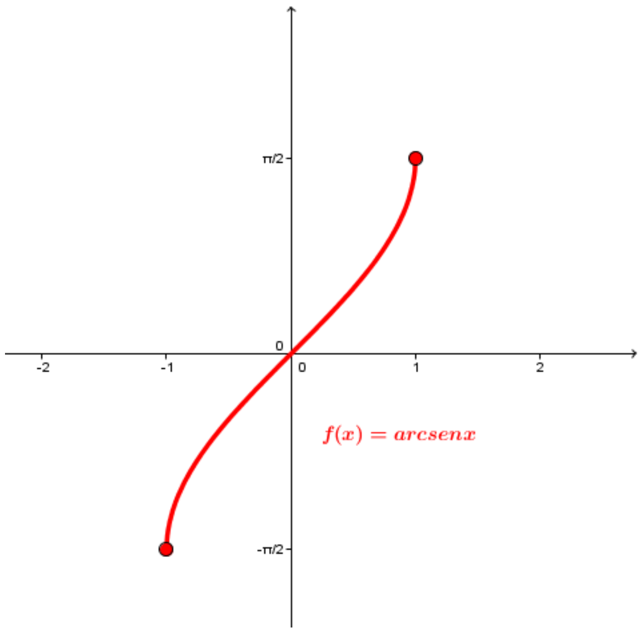


Gráfico de $f(x) = arc\ senx$

Observando o gráfico acima, podemos observar que:

Na função $f(x) = arc\ sen\ x$, temos:$D_f\ = [-1{,}1]$ e $Im_f\ = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2) Função arco cosseno:

A função *arco cosseno*, denotada por *arc cos*, é definida como sendo a inversa da função *cosseno* restrita ao intervalo $0 \leq x \leq \pi$.

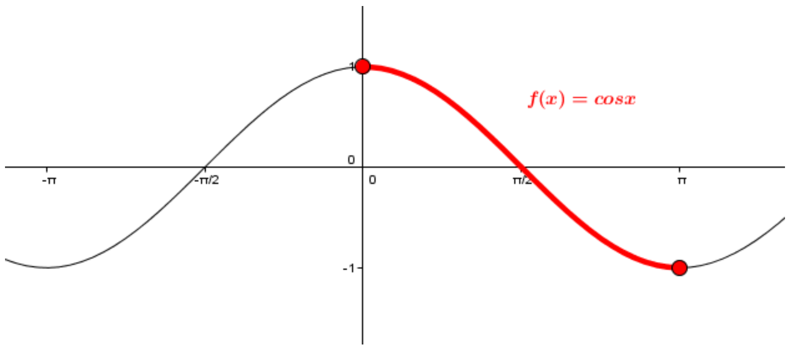


Gráfico de $f(x) = cosx$

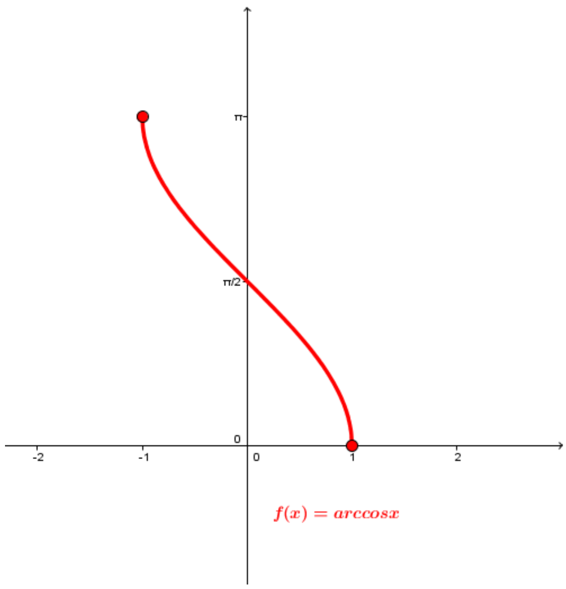


Gráfico de $f(x) = arc\ cosx$

Observando o gráfico acima, podemos observar que:

Na função $f(x) = arc\ cos\ x$, temos:$D_f = [-1,1]$ e $Im_f = [0, \pi]$.

3) Função arco tangente:

A função $arco\ tangente$, denotada por $arc\ tg$, é definida como sendo a inversa da função $tangente$ restrita ao intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

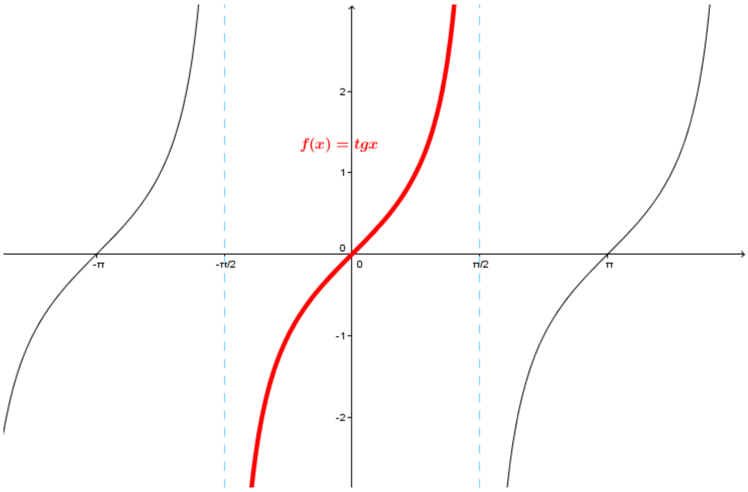


Gráfico de $f(x) = tgx$

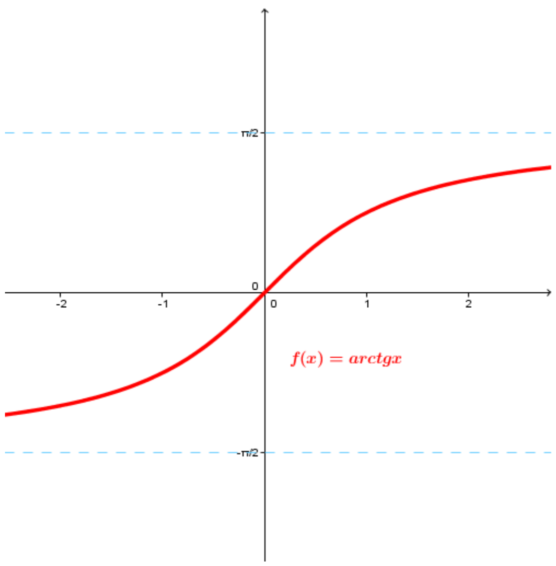


Gráfico de $f(x) = arc\ tgx$

Observando o gráfico acima, podemos observar que:

Na função $f(x) = arc\ tg\ x$, temos: $D_f = \Re$ e $Im_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) Função arco secante:

A função $arco\ secante$, denotada por $arc\ sec$, é definida como sendo a inversa da função $secante$ restrita ao intervalo $0 \leq x \leq \pi$ com $x \neq \frac{\pi}{2}$.

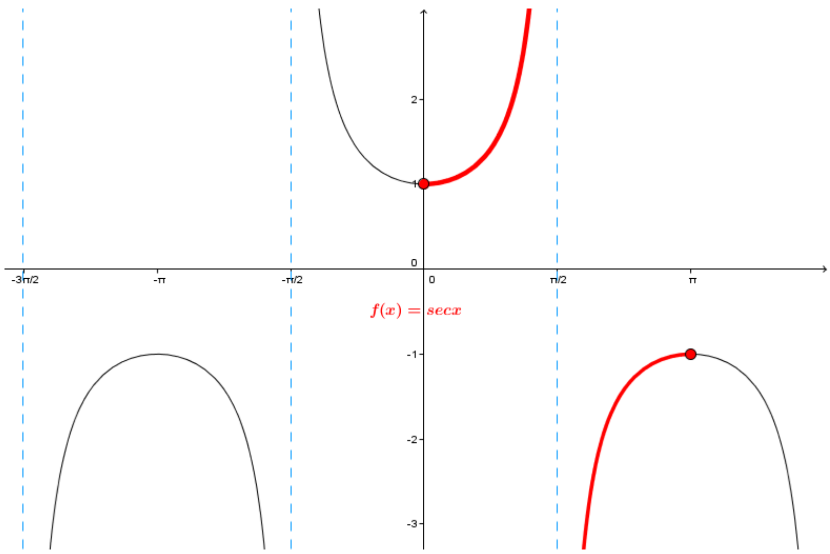


Gráfico de $f(x) = secx$

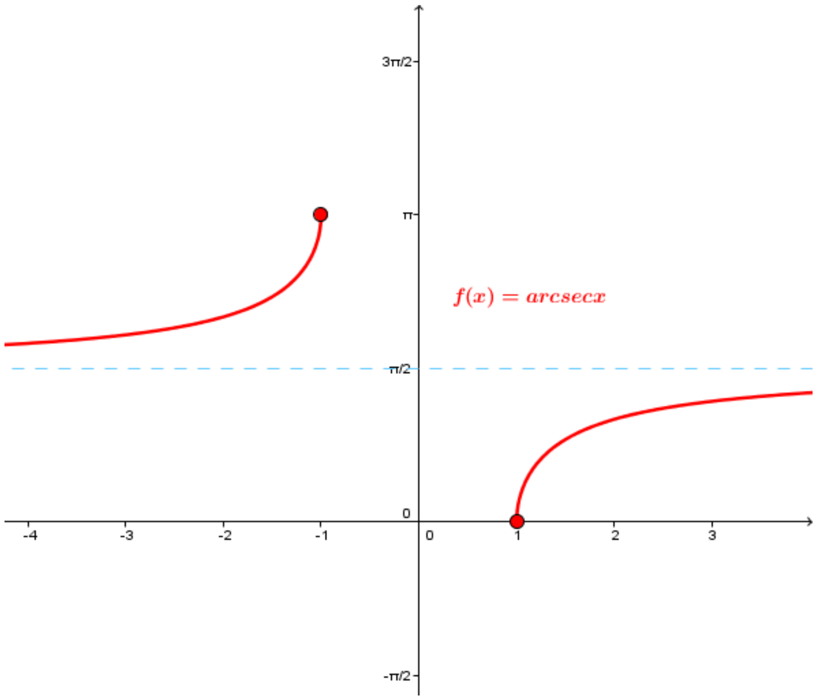


Gráfico de $f(x) = arc\ secx$

Observando o gráfico acima, podemos observar que:

Na função $f(x) = arc\ sec\ x$, temos:

$$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\text{e} Im_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Atividades propostas

Atividade 1: Propomos na atividade a seguir trabalhar os elementos que caracterizam as funções trigonométricas.

Consideremos as funções $f(x) = \text{sen}\, x$,$g(x) = 2senx$, $h(x) = 2 + senx$ e $i(x) = sen2x$.

Passo 1: Considerando os valores de x: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\ e\ 2\pi$, construa uma tabela com os valores de cada uma das funções.

Passo 2: Construir o gráfico de $f(x) = \text{sen}\, x$.

Passo 3: Construir o gráfico de $g(x) = 2\,\text{sen}\, x$.

Passo 4: Encontrar as imagens e os períodos das funções f e g.

Passo 5: Comparando os dois gráficos, o que você observou? O que se pode concluir da função ao multiplicá-la por uma constante?

Passo 6: Construir o gráfico de $\text{h(x)} = 2 + \text{sen x}$.

Passo 7: Encontrar as imagens e os períodos das funções f e h.

Passo 8: Comparando os gráficos das funções f e h, o que você observou? O que se pode concluir da função ao somar uma constante à função trigonométrica?

Passo 9: Construir o gráfico de $\text{i(x)} = \text{sen2 x}$.

Passo 10: Encontrar as imagens e os períodos das funções f e i.

Passo 11: Comparando os gráficos das funções f e i, o que você observou? O que se pode concluir da função ao somar uma constante à função trigonométrica?

Atividade 2: Propomos nesta atividade a resolução de um problema que modela os movimentos das marés, que foi apresentado no início do capítulo, com a finalidade de se abordar algumas das características das funções trigonométricas.

Em uma determinada cidade litorânea brasileira, foi observada que a maré alta ocorreu à meia noite. As marés oscilam regularmente entre alta e baixa, ou seja, a altura da maré aumenta até atingir um valor máximo (maré alta) e vai diminuindo até atingir um valor mínimo (maré baixa), para depois aumentar de novo até a maré alta, e assim por diante. A altura y, em metros, da maré pode ser representada por uma função do tipo: $y = 3 + 2{,}1cos\left(\pi \frac{t}{4}\right)$, sendo t o tempo decorrido e medido em horas, após a meia noite.

Passo 1: Encontre a altura da maré alta neste porto, isto é a amplitude da função.

Passo 2: Descubra em quanto tempo teremos de novo maré alta. Isto é o período da função.

Atividade 3: Neste problema, apresentamos as funções trigonométricas como um modelo matemático para a análise de hormônios no organismo.

A atuação de muitos hormônios em nosso organismo pode ser considerada periódica. A **noradrenalina** é uma substância envolvida nas sinapses dos nervos do sistema simpático, isto é, é um neurotransmissor. Os níveis de noradrenalina observados na urina das pessoas normais podem ser representados aproximadamente por:

$$N(t) = 16{,}3 - 4sen\left(2\pi t - \frac{4\pi}{3}\right),$$

sendo$t$ o tempo em anos e $N(t)$ o nível sangüíneo dessa substância em unidades adequadas. Com esses dados, responda:

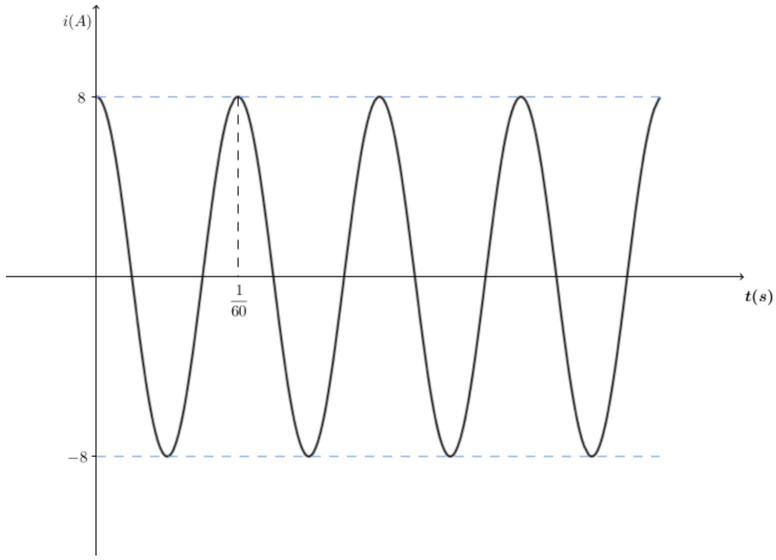
Passo 1: Encontrar o nível máximo desse hormônio secretado pela urina.

Passo 2: Encontrar o período dessa função?.

Passo 3: Encontrar a variação do nível (conjunto imagem) desse hormônio na urina.

Atividade 4: Neste atividade, sugerimos trabalhar o gráfico de uma função trigonométrica que representa a corrente elétrica.

Em nosso cotidiano usamos, a todo instante, a energia elétrica. Essa forma deenergia resulta do movimento ordenado de elétrons, que é chamado de corrente elétrica. Essa corrente é alternada, isto é, quando usamos algum aparelho eletrodoméstico, a intensidade da corrente pode ser representada pelo gráfico abaixo, em que $t = 0$ é o instante inicial de medida da corrente:



Passo 1: Qual é o valor máximo da corrente elétrica?

Passo 2: Qual é o período da onda?

Passo 3: Qual é a freqüência, em hertz (número de ondas por segundo), da corrente elétrica?

Passo 4: Qual é a equação, utilizando a função cosseno, que representa essa onda?

Atividade 5: Propomos nesta atividade trabalhar as funções inversas das funções cotangente e cossecante, com a finalidade de aplicar a restrição do domínio de uma função.

No final do capítulo, vimos as funções trigonométricas inversas. No entanto, faltaram as funções $f(x) = arc\ cotg\ x$ e $f(x) = arc\ cossec\ x$. Propomos que se analisem seus comportamentos com o auxílio do Geogebra.

Passo 1: Construir o gráfico de $f(x) = cotg\ x$, no intervalo: $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

Passo 2: Restringir seu domínio a fim de que a função seja injetiva, isto é admita inversa.

Passo 3: Construir o gráfico da função $f(x) = arc\ cotg\ x$.

Passo 4: Determinar o conjunto domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = arc\ cotg\ x$.

Passo 5: Repetir os passos 1 a 4 para a função $f(x) = arc\ cossec\ x$.

Capítulo 5

Análises e Conclusões

Apresento, nesta seção, minhas considerações finais, inquietações que tive ao longo do trabalho e uma reflexão sobre o ensino e aprendizado das funções na Educação Básica. Há anos discute-se o fraco desempenho de nossos estudantes em exames internacionais, colocando-nos sempre nas últimas posições do ranking. Este fato tem levado a educação a viver uma crise. Em meio a esta crise, se tem apresentado a cada dia uma nova solução, que sempre gira em torno das melhorias das condições de trabalho e de efetivas políticas educacionais. Entretanto, percebemos que muitas das deficiências de aprendizado da Matemática, em particular no estudo das funções, têm como uma das principais causas geradoras falhas encontradas na formação dos nossos professores, que acabam por reproduzi-las na sua prática em sala de aula. Através dos estudos de Even (1998), Rossini (2006), Thees (2009), Zuffi (1999, 2003) e Pacca (2002), constatamos que há a necessidade de revisão nas práticas adotadas nos cursos de licenciatura.

No ensino de Matemática, precisamos de professores que tenham a preocupação de desmitificá-la, tornando-a atraente e instigante. Mas só é possível se alcançar tal objetivo se, esta estiver conectada com a realidade do aluno e sendo construído de forma coerente e repleta de sentido e conexões e que o possibilite a reconhecer e resolver problemas.

A Matemática foi e é construída a cada dia pela necessidade humana de compreender o mundo em que vive. No decorrer dos séculos, percebem-se contribuições desde conceitos mais elementares até os que conhecemos nos dias de hoje. No estudo das funções, a partir do século XVII, começaram a surgir as primeiras ideias, principalmente com a necessidade de observar os fenômenos e as leis da natureza, com Galileu Galilei e Issac Newton, os quais utilizaram algumas noções de lei e dependência, os quais estão ligados ao conceito de função. Em seguida, Euler fundamentou o conceito ao introduzir o símbolo $f(x)$. Mas foi no século XIX, com Dirichlet (1837), que se teve formalmente a conceituação das funções: “Uma função y(x) é dada se temos qualquer regra que associe um valor definido y a cada x em um certo conjunto de pontos” – (apud Rüthing, 1984).

Por fim, é do século XX e de origem bourbakista a definição de função que aplicamos até hoje nas escolas brasileiras. Nesta linha, o conceito de função é associado à ideia estática de um conjunto de pares ordenados.

Percebemos, no decorrer deste trabalho, que o conceito de funções apresenta ainda, por parte do professor, certa superficialidade. Uma vez que é possível notar a existência de desconexão no seu ensino o qual, quase sempre é feito, sem clareza e solidez nas diferentes abordagens existentes, como por exemplo, na transição entre conjuntos discretos e contínuos. Sem contar a falta de intercâmbio entre a Matemática e as outras ciências abordadas no Ensino Médio.

Pudemos verificar que, através dos questionários aplicados a professores de Matemática, uma percepção de que problemas existem e que há uma busca por algumas soluções. Destacam-se a carência, em grande parte dos alunos, de assuntos elementares que norteiam o aprendizado de funções, bem como, a falta de condições no que tange as estruturas físicas das escolas a fim de implementarem um ambiente para o uso de recursos tecnológicos. Recursos estes, que são sempre apontados como uma das saídas para que haja mudança deste cenário atual.

Ainda a partir dos questionários, foi possível observar quais os livros e autores que mais são adotados nas diversas escolas e, então realizarmos uma análise bibliográfica no qual objetivamos verificar como os diferentes autores abordam o estudo das funções. Pudemos observar nesta análise, que atualmente há uma tendência na apresentação do conceito função partindo de um exemplo de caráter motivacional e contextualizado a situações cotidianas ou em outros ramos do conhecimento como, por exemplo, Física e Química. Entretanto, esta motivação inicial é rapidamente abandonada no decorrer dos capítulos, empobrecendo o intercâmbio entre a Matemática e as outras ciências bem como a conexão dos conceitos.

Nos capítulos seguintes, abordamos a parte teórica com o principal objetivo de fazer como que estes conteúdos tivessem o máximo de sentido. Para isso, a cada novo conceito, havia a preocupação de conectá-los a alguma situação o cotidiano ou mesmo indagações e perguntas mal respondidas na prática de sala de aula. Por exemplo, exploramos um erro muito comum que é solução da equação, por exemplo, do tipo: $x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 3^2 \Rightarrow x = 3$. Abordamos indagações históricas com celébres personagens como Galileu Galilei para apresentar as funções sobrejetivas. Sempre objetivando dar um significado e um sentido real do aprendizado do referido assunto. Além de procurarmos torná-los atraentes e provocativos para nossos alunos.

No estudo das funções polinomiais, apresentamos um problema de otimização para explorar o conceito. Sempre tivemos a preocupação de construir o conceito. Assim, por exemplo, ao trabalharmos as funções polinomiais do 2° grau, procuramos encontrar seus diversos elementos, como máximos, mínimos e vértices, ao invés de apenas apresentar fórmulas e conceitos prontos. Já nas funções logarítmicas, abordamos o comportamento das marés para iniciarmos o seu estudo e, em seguida explorar suas diversas formas. E, concluir e uma atividade que era modelada e baseada nesta motivação inicial.

No decorrer deste estudo, enfocamos sempre a real possibilidade de criarmos aulas de Matemática repletas de sentido, ao relacionarmos o conceito abordado com situações do cotidiano, ou até mesmo dentro da própria Matemática ao complementar outros assuntos que já eram conhecidos. Sentido este que tem o poder de provocar a curiosidade e o desejo de realmente aprender, num contexto que o aluno tem um papel ativo. Desejamos sinceramente que este presente trabalho sirva de fonte, mas que também motive e inspire outros colegas para que possam desenvolver um trabalho diferente, inquietante e agradável em sala de aula.

Referências Bibliográficas

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo: um novo horizonte**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v.1.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática - Brasília, MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias** - Brasília, MEC/ 2006.

BIANCHINI, E. **Matemática.** Nono ano. 7ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BOYCE, W. E.; DI PRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

CARVALHO, B. C. L. Modelos Matemáticos para a estimativa da temperatura em diferentes locais do Estado da Bahia. **Revista Bahia Agrícola**, Salvador, v.4, n.3, p. 52-57, dez. 2001.

COSTA, Cláudia Bispo de Jesus. **O conhecimento do Professor de Matemática sobre o conceito de Função**. 2008. 104 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM, Rio de Janeiro, 2008.

DANTE, L.R. **Matemática Contexto & Aplicações.** Ensino médio. 4 ed. Rio de Janeiro: Ática, 2008.

GIOVANNI; RUY J.; e outros. **Matemática – Uma nova abordagem.** Ensino médio. 3 ed. São Paulo: Editora FTD, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Ensino médio. 9 ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. Nono ano. 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO,R.; ALMEIDA, N. **Matemática ciência e aplicações**. Ensino médio. 8 ed. São Paulo: Atual, 2014.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.; WAGNER E.; MORGADO, A.C. **Matemática do Ensino Médio – volume 1** (Coleção do Professor de Matemática). 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

MANOEL, Luís Ricardo da Silva. **Torre de Hanói.** Disponível em: <http://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/labmat/torre_de_hanoi.pdf>Acesso em: 7 março. 2015.

MELLO, J. L. Pastore . Dietas e a matemática. Folha de São Paulo, 19 dez. 2000

NETTO, S. D. P; ORSI FILHO, S. **QUANTA -Matemática em Fascículos para o Ensino Médio** . São Paulo: Saraiva, 2000. v.4.

OLIVEIRA, M. R.; PINHEIRO, M. R. R. **Coleção Elementos da Matemática**. 3 ed. Fortaleza: Vestseller, 2010.

PISA: desempenho do Brasil piora em leitura e 'empaca' em ciências. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/noticias/2013/12/03/pisa-desempenho-do-brasil-piora-em-leitura-e-empaca-em-ciencias.htm>. Acesso em: 17 fev. 2015.

REZENDE, W. M.O conhecimento do professor de matemática sobre funções reais. In: XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, junho 2011, Recife.

ROQUE, T. **História da matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, R. F. Revista pegn.globo.com. **Rede de sorveterias dribla o problema da sazonalidade e deve crescer 50% em 2010.** Disponível em:<http://revistapegn.globo.com/Revista/ Common/0,,EMI140339-17169,00- REDE + DE + SORVETERIAS + DRIBLA +O + PROBLEMA+DA+SAZONALIDADE+E +DEVE+CRESCER+EM.html>. Acesso em: 21março 2015.

SILVA, A.; COUTO, S.M. **Caderno Pedagógico:** Matemática. Nono ano. Rio de Janeiro: Ediouro, 2014.

THOMAS, G.; FINNEY, R.L.;WEIR, M.D.; GIORDANO, F.R. **Cálculo.** 10 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002. v.1.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de função**. 3 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 2001.

ZUFFI, Edna Maura; PACCA, Jesuína Lopes de Almeida. O conceito de função e sua linguagem para os professores de matemática e de ciências. **Ciência & Educação**, Bauru,v.8, n.1, p.1-12, 2002.

ZUFFI, E.M. **Uma sequencia didática sobre "Funções" para a formação de Professores do Ensino Médio**. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife.

Apêndice

Soluções detalhadas das atividades propostas

3.1 Relações e Funções

Atividade 1:

Passo 1:

$$A \; X \; B = \{ (p_1 , d_{1.1}), (p_1 , d_{1.2}), \; \dots, (p_2 , d_{1.1}), (p_2 , d_{1.2}), (p_2 , d_{1.3}), \dots, \; (p_3 , d_{3.10}) \}$$

Para o conjunto $A \; X \; B$ combinamos cada uma das três pessoas com as 30 impressões digitais e obtemos 90 pares ordenados.

Passo2:

$$R_1 = \{ (p_1 , d_{1.1}), (p_1 , d_{1.2}), \; \dots, (p_2 , d_{2.1}), (p_2 , d_{2.2}), (p_2 , d_{2.3}), \dots, \; (p_3 , d_{3.10}) \}$$

Para a Relação *pessoa X digital*, combinamos cada uma das três pessoas com suas próprias impressões digitais e obtemos 30 pares ordenados. Cada pessoa aparece como primeiro elemento do par ordenado 10 vezes, o que equivaleria a cada pessoa possuir 10 imagens. Dessa forma, R_1 não define uma função.

Passo 3:

$$R_2 = \{ (d_{1.1} , p_1), (d_{1.2} , p_1), \; \dots, (d_{2.1} , p_2), (d_{2.2} , p_2), (d_{2.3} , p_2), \dots, \; (d_{3.10} , p_3) \}$$

Para a Relação *digital X pessoa*, combinamos cada uma das 30 impressões digitais com seus próprios "donos", $p_{1,}$ p_2 ou p_3 e obtemos 30 pares ordenados. Neste caso, o primeiro elemento de cada par ordenado aparece apenas uma vez. Sendo assim, cada impressão digital possui uma única imagem e, portanto, R_2 define uma função.

Passo 4:

Analisando as três situações, observamos que a única situação em que o primeiro elemento do par ordenado não se repete é em R_2. Cada elemento do conjunto B se relaciona a um único elemento do conjunto A, esta relação é uma função.

Atividade 2:

Passo 1:

Conjunto A: O primeiro elemento de cada par ordenado não se repete. Todos os elementos do primeiro conjunto estão relacionados uma única vez com algum elemento do segundo conjunto. É possível definir uma função a partir do conjunto A.

Conjunto B: Existe primeiro elemento de par ordenado que se repita. Existe algum elemento do primeiro conjunto relacionado mais de uma vez com elementos do segundo conjunto. Não é possível definir uma função a partir do conjunto B.

Passo 2:

Para o conjunto A podemos estabelecer a função: *número X seu consecutivo* ouem notação matemática $f: X \to Y$ tal que $y = x + 1$, com $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *e* $Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Passo 3:

Invertendo a ordem dos pares ordenados, temos:

$A' = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (6,5), (7,6), (8,7)\}$

$B' = \{(1,1), (2,4), (-2,4), (3,9), (-3,9), (4,16), (-4,16)\}$

Conjunto A': O primeiro elemento de cada par ordenado não se repete. Todos os elementos do primeiro conjunto estão relacionados uma única vez com algum elemento do segundo conjunto. É possível definir uma função a partir do conjunto A'.

Conjunto B': O primeiro elemento de cada par ordenado não se repete. Todos os elementos do primeiro conjunto estão relacionados uma única vez com algum elemento do segundo conjunto. É possível definir uma função a partir do conjunto B'.

Para o conjunto A' podemos estabelecer a função: *número X seu antecessor* ou em notação matemática $f: X \to Y$ tal que $y = x - 1$, com $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Para o conjunto B' podemos estabelecer a função: *número X quadrado do número* ou em notação matemática $f: X \to Y$ tal que $y = x^2$, com $X = \{1, 2, -3, 3, -4, 4\}$ e $Y = \{1, 4, 9, 16\}$.

Atividade 3:

Passo1:

Todos os números reais maiores que zero podem ser raios de uma circunferência. Todos os raios possíveis formam o conjunto $\Re^*_+$.

Passo2:

Todos os números reais maiores que zero podem ser área de uma circunferência. Todas as áreas possíveis formam o conjunto $\Re^*_+$.

Passo3:

Para números diferentes teremos quadrados diferentes, estes quadrados multiplicados por π resultarão em áreas diferentes. Teremos assim, cada elemento do primeiro conjunto (conjuntos dos raios)relacionados a um único elemento do segundo conjunto (conjunto das áreas). Esta expressão algébrica define uma função.

Passo 4:

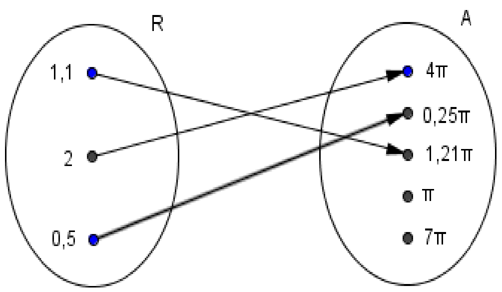
Como R e A são conjuntos infinitos, o conjunto $R \; X \; A$ também o será.

Passo 5:

Construindo as diferentes representações temos, por exemplo:

(Professor, os valores abaixo são apenas escolhas aleatórias. Sugerimos indicar aos alunos que nossas opções são infinitas).

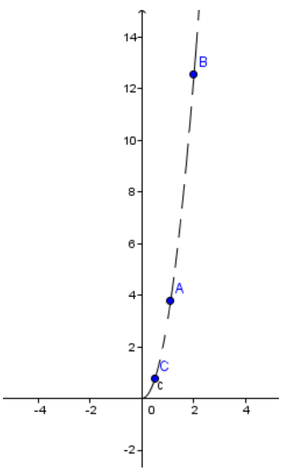
a) Diagrama de Flechas



b) Tabela

Raio	Área
1,1	$1{,}21\pi$
2	4π
0,5	$0{,}25\pi$
r	$r^2\pi$

c) Gráfico Cartesiano



Atividade 4:

Passo1:

Sugerimos trabalhar com cidades de altitudes bem diferentes.

Salvador:altitude: $8m$, latitude: $12^o\ 58'$, longitude: $38^o\ 30'$

Feira de Santana: altitude: $234m$, latitude: $12^o\ 16'$, longitude: $38^o\ 58'$

Piatã: altitude: $1.268m$, latitude: $13^o\ 09'$, longitude: $41^o\ 46'$

Passo 2:

As unidades usadas estão em conformidade com as pedidas na função.

Passo 3:

Salvador:

$$f_1(8, 12^o58^{'}, 38^o30^{'}) = 25{,}109970 - 0{,}005990(8) - 0{,}005087(12^o58^{'}) + 0{,}002450(38^o30^{'})$$
$$f_1(8, 12^o58^{'}, 38^o30^{'}) = 25{,}09^o C$$

$$f_2(8, 12^o58^{'}, 38^o30^{'}) = 18{,}524908 - 0{,}007208(8) - 0{,}00662(12^o58^{'}) + 0{,}004226(38^o30^{'})$$
$$f_2(8, 12^o58^{'}, 38^o30^{'}) = 18{,}54^o C$$

Feira de Santana:

$$f_1(234, 12^o16^{'}, 38^o58^{'}) = 25{,}109970 - 0{,}005990(234) - 0{,}005087(12^o16^{'}) + 0{,}002450(38^o58^{'})$$
$$f_1(234, 12^o16^{'}, 38^o58^{'}) = 23{,}74^o C$$

$$f_2(234, 12^o16^{'}, 38^o58^{'}) = 18{,}524908 - 0{,}007208(234) - 0{,}00662(12^o16^{'}) + 0{,}004226(38^o58^{'})$$
$$f_2(234, 12^o16^{'}, 38^o58^{'}) = 16{,}92^o C$$

Piatã:

$$f_1(1268, 13^o09^{'}, 41^o46^{'}) = 25{,}109970 - 0{,}005990(1268) - 0{,}005087(13^o09^{'}) + 0{,}002450(41^o46^{'})$$
$$f_1(1268, 13^o09^{'}, 41^o46^{'}) = 17{,}55^o C$$

$$f_2(1268, 13^o09^{'}, 41^o46^{'}) = 18{,}524908 - 0{,}007208(1268) - 0{,}00662(13^o09^{'}) + 0{,}004226(41^o46^{'})$$
$$f_2(1268, 13^o09^{'}, 41^o46^{'}) = 9{,}47^o C$$

Passo 4:

Podemos comprovar que a altitude provoca grandes alterações na temperatura e que a cidade de Piatã apresenta maior variação de temperatura entre verão e inverno. Se possível, seria interessante a comparação de dados observados com dados calculados a partir das funções.

3.2 Injetividade, sobrejetividade, bijeção e inversa

3.2.1 Injetividade

Atividade 1:

Passo 1:

A função $digitalXpessoa$ não é uma função injetiva, uma vez que cada imagem, a pessoa,tem mais de um correspondente, digital. Por exemplo, $d_{1,1}$ e $d_{1,10}$ ou seja: $1 \rightarrow 1$ e $10 \rightarrow 1$.

Passo 2:

Existem várias possibilidades. Uma delas seria a função $(digital\ polegar\ direito)\ X\ pessoa$. Assim, teríamos a função injetiva $d_{1,1}$, $d_{2,1}$ e $d_{3,1}$(onde o primeiro índice corresponde a pessoa e o segundo o polegar direito).

Atividade 2:

Passo 1:

P = {1, 3, 5, 7, 9} e Q = {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,...}

Temos as seguintes possibilidades: $(1,1), (3,9), (5,25), (7,49), (9,81)$.

Passo 2:

Sim. A função é do tipo injetiva, já que cada número do conjunto Q é o quadrado de apenas um único número do conjunto P.

Passo 3:

N = {- 1, - 3, - 5, - 7, - 9} e Q = {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100,...}

Temos as seguintes possibilidades:

$(-1,1), (-3,9), (-5,25), (-7,49), (-9,81)$.

Passo 4:

Sim. A função é do tipo injetiva, já que cada número do conjunto Q é o quadrado de apenas um único número do conjunto N.

Passo 5:

Não, pois existem elementos de Q associados a dois elementos do domínio. Por exemplo: $(-1,1)\ e\ (1,1)$.

Atividade 3:

Passo 1:

A função volume do cilindro se calcula pela fórmula $volume\ do\ cilindro = \pi r^2 h$, onde r representa o raio da base e h a altura do cilindro.

Passo 2:

a) $r = 1\,m\ \ e\ h = 4\,m$ temos $f(cil) = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 4\pi\ m^3$

b) $r = 2\,m\ \ e\ h = 3\,m$ temos $f(cil) = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi\ m^3$

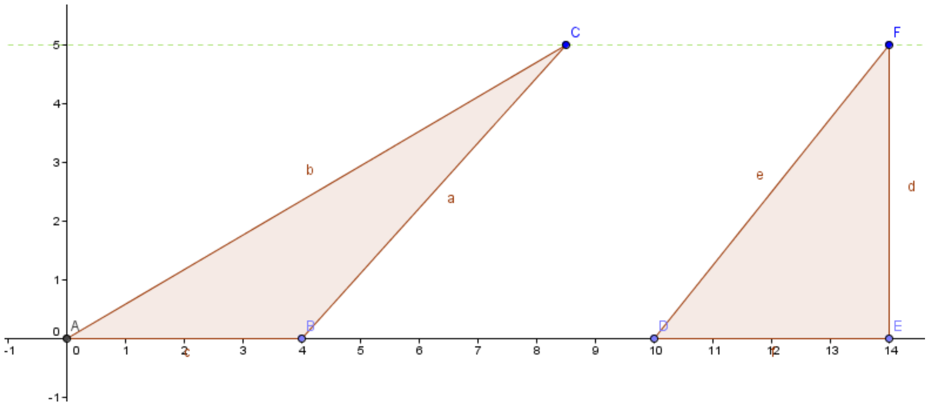
Passo 3:

a) $r = 1\,m\ \ e\ h = 4\,m$ temos $f(cil) = \pi \cdot 1^2 \cdot 4 = 4\pi\ m^3$

b) $r = 2\,m\ \ e\ h = 1\,m$ temos $f(cil) = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 4\pi\ m^3$

Como existem cilindros distintos com o mesmo volume, a conclusão é que a função não é injetiva.

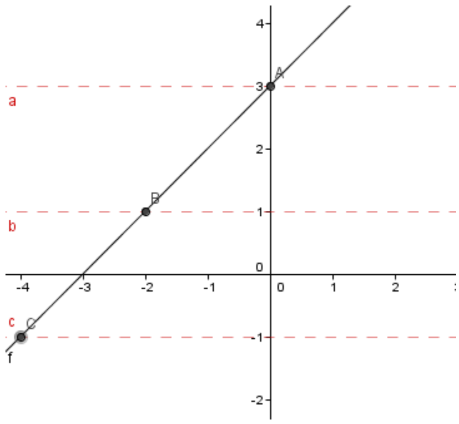
Passo 4 : Exemplo de possíveis soluções:



Observe que se tem mesma base, b = 4 e mesma altura, h = 5. Conclusão: temos dois triângulos distintos com a mesma área, logo a função não é injetiva.

Atividade 4:

a) A função é injetiva. Observe que as retas *a*, *b*, *c* ou qualquer outra reta só intercepta o gráfico uma única vez.



b) A função não é injetiva. Observe que as retas *a*, *b*, *c* intercepta o gráfico I duas vezes. Se dividirmos o gráfico um com domínio positivo (gráfico II) e outro com domínio negativo (gráfico III), teremos dois gráficos de funções injetivas.

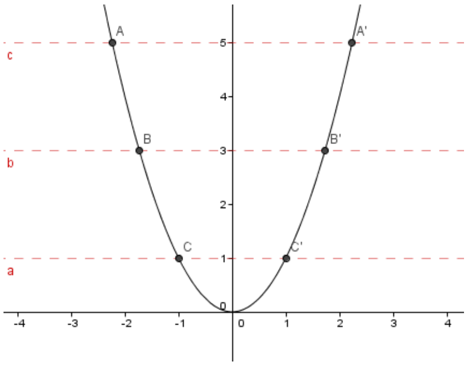


Gráfico I

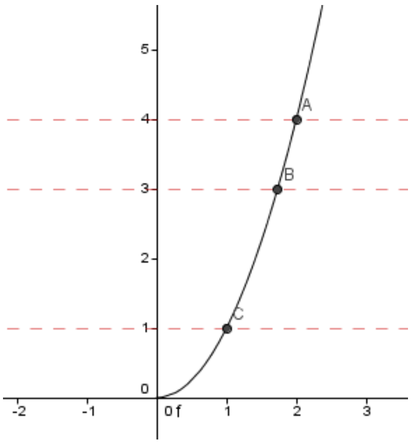


Gráfico II - $D_f = [0, +\infty[$

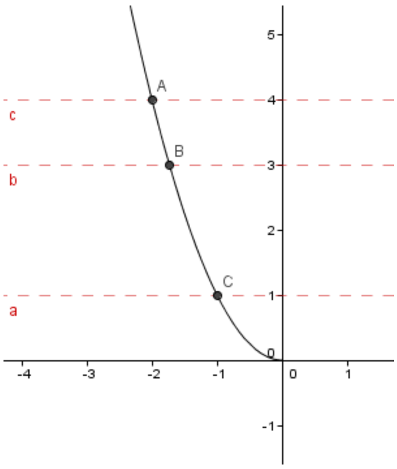
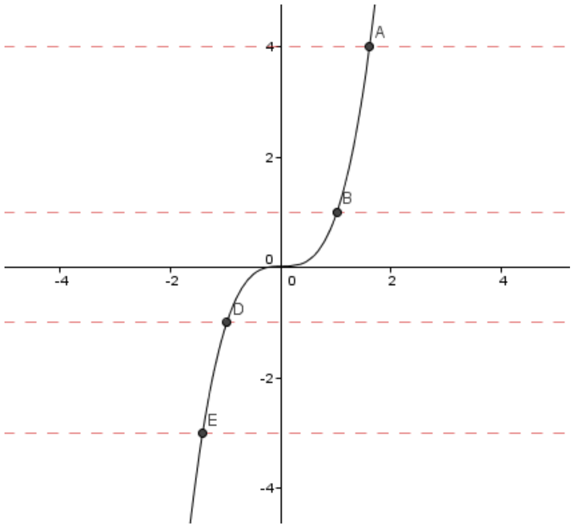


Gráfico III - $D_f =]-\infty, 0]$

c) A função é injetiva.



d) Não é injetiva. Observe que a reta horizontal intercepta o gráfico da função duas vezes, nos pontos C e D. (Gráfico IV). Se separarmos conforme os gráficos abaixo, teremos duas funções injetivas (Gráficos V e VI).

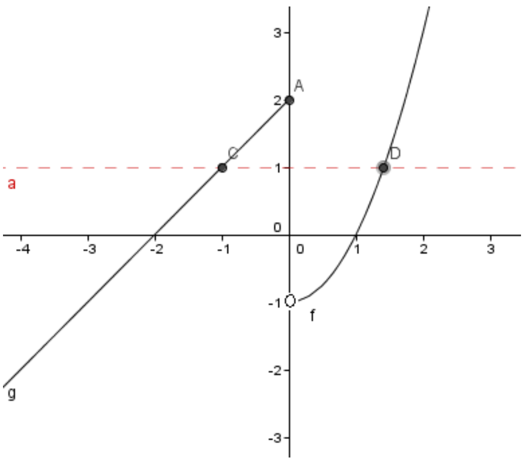


Gráfico IV

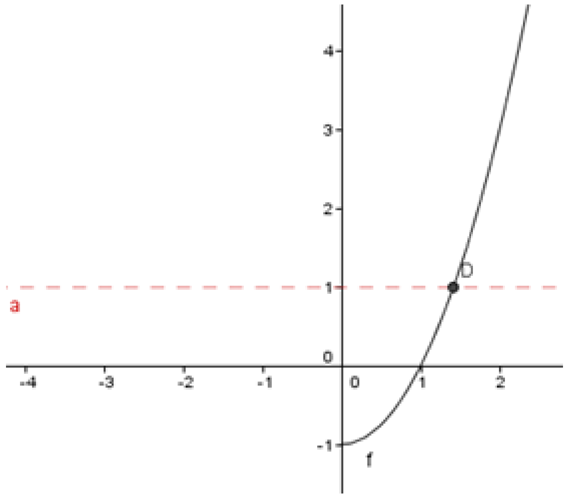


Gráfico V- $D_{f} = [0, +\infty[$

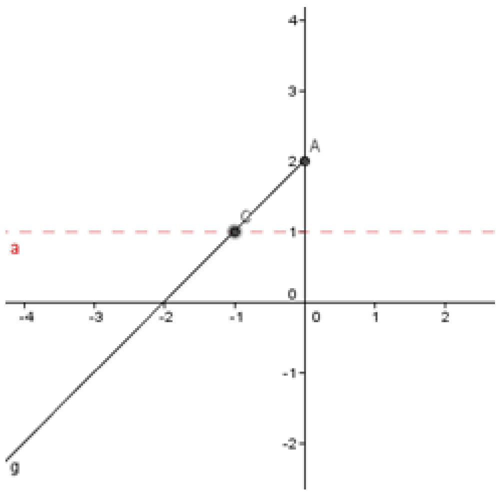
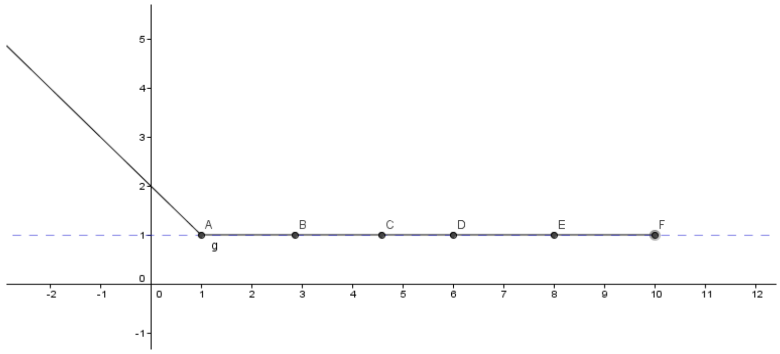
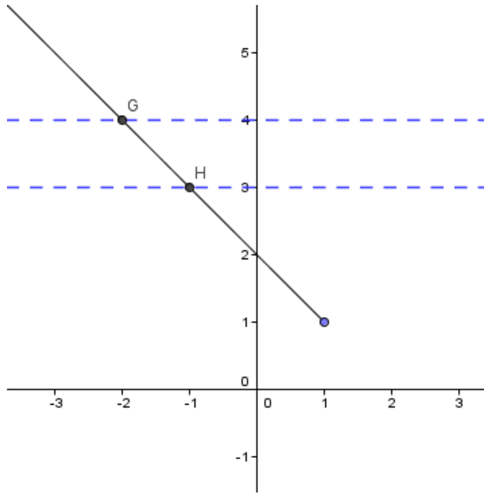


Gráfico VI- $D_f =]-\infty, 0]$

e) Não é injetiva. Observe que a reta horizontal intercepta o gráfico infinitas vezes. Por exemplo, nos pontos A, B, C, D, E e F

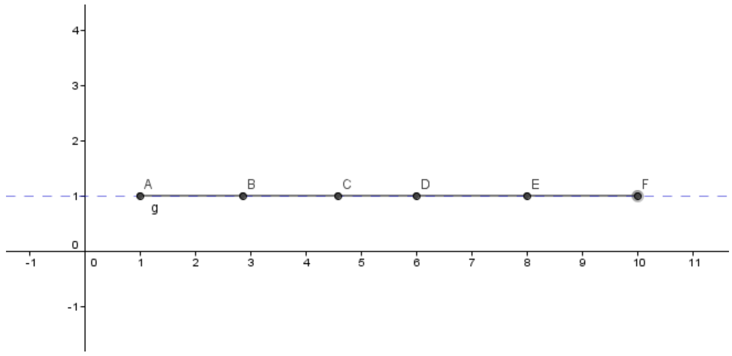


Neste caso, apenas em uma parte do gráfico seria possível ter uma função injetiva:Este gráfico representa uma função injetiva.

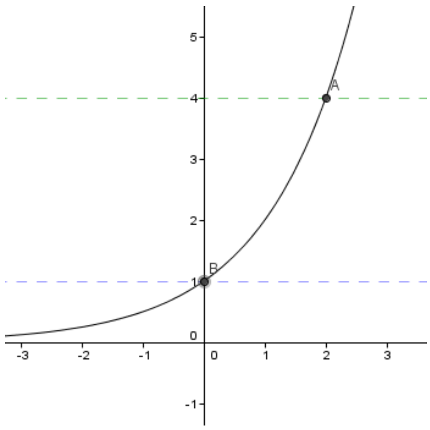


$$D_f =]-\infty, 1]$$

Este gráfico não representa uma função injetiva, a reta pontilhada intercepta o gráfico infinitas vezes.



f) A função é injetiva.



3.2.2 Sobrejetividade

Atividade 1:

Passo1:$(F_{a,1}, M_a), (F_{a,2}, M_a), (F_{a,3}, M_a), (F_{b,1}, M_b), (F_{b,2}, M_b), (F_{c,1}, M_c)$.

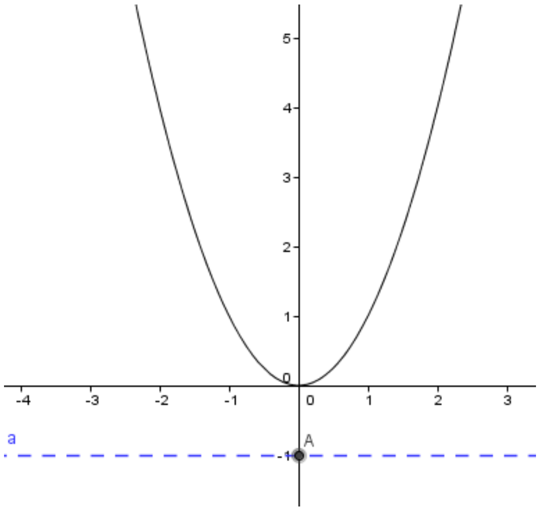
Passo 2:

Como todas as mulheres são mães, segue que a função é do tipo sobrejetiva.

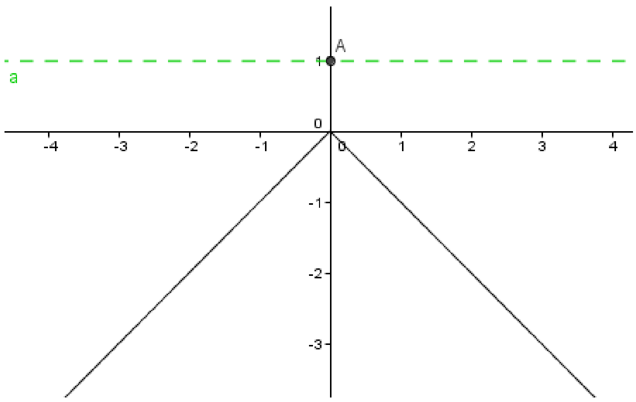
Atividade 2:

Passo 1:

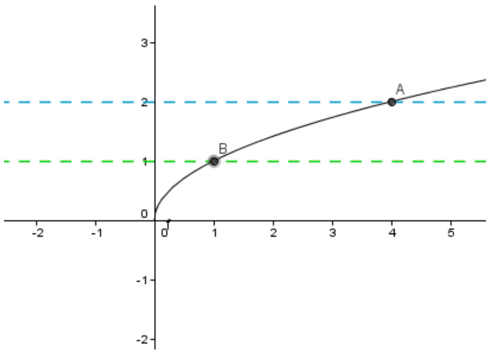
a) A função dada não e sobrejetiva. Observe que a reta a passa por y = - 1, que pertence ao contradomínio, não intercepta o gráfico. Para que tenhamos uma função sobrejetiva, o contradomínio deve ser: $CD_f = [0, +\infty[$



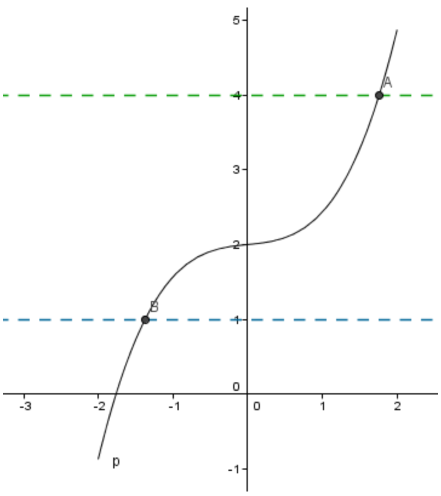
b) A função dada não é sobrejetiva. Observe que a reta a passa por y = 1, que pertence ao contradomínio, não intercepta o gráfico. Para que tenhamos uma função sobrejetiva, o contradomínio deve ser: $CD_f =]-\infty, 0]$.



c) A função é sobrejetiva, qualquer reta horizontal que intersecta um elemento do contradomínio, também intersectará o gráfico. Conforme se observa no gráfico abaixo.



d) A função é sobrejetiva, qualquer reta horizontal que intersecta um elemento do contradomínio, também intersectará o gráfico. Conforme se observa no gráfico abaixo.



3.2.3 Bijeção

Atividade 1:

Passo 1:

O lucro é dada pela relação $lucro = venda - custo$. Assim, temos a seguinte função:

$L(x) = 2{,}30x - (80 + 1{,}80x)$

$L(x) = 0{,}50x - 80.$

Onde x representa o número de unidades.

Passo 2:

$L(1000) = 0{,}50 \cdot 1000 - 80$

$L(1000) = 500 - 80$

$L(1000) = 430.$

Passo 3:Para que não haja prejuízo, temos que $L(x) > 0$:

$0{,}5x - 80 > 0$

$0{,}5x > 80$

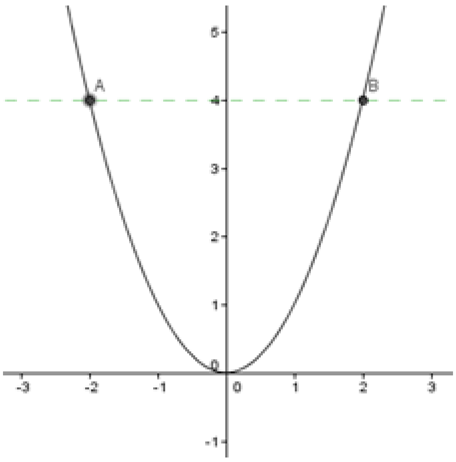
$x > 400.$

Assim, a partir de uma produção de 401 unidades, tem-se lucro.

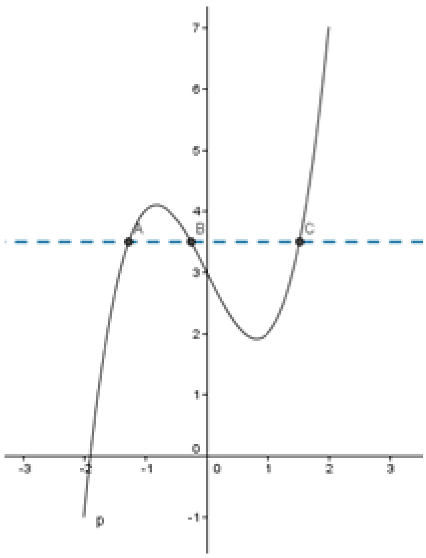
Atividade 2:

Passo1:

a) A função não é bijetiva. Não é injetiva, por exemplo, 4 é imagem tanto de x = 2 como de x = - 2. Também não é sobrejetiva, por exemplo, y = -1 pertence ao contradomínio mas não é imagem de nenhum elemento do domínio.



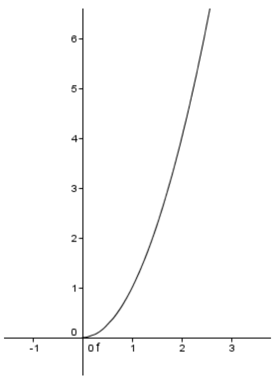
b) A função não é bijetiva. Observe que a reta intercepta o gráfico nos pontos A, B, C, logo não é uma função injetiva.



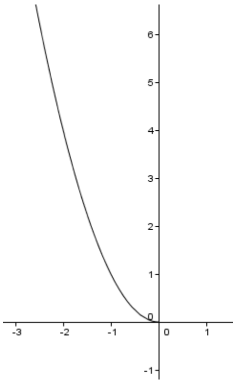
c) A função é injetiva, mas não é sobrejetiva, já que y = 0 não é imagem para nenhum valor do domínio.

Passo2:

a) Nos casos as funções são injetivas e sobrejetivas. Logo são bijetiva



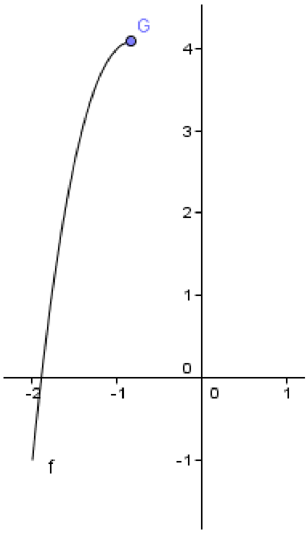
(I)$f: \Re_+ \rightarrow \Re_+$



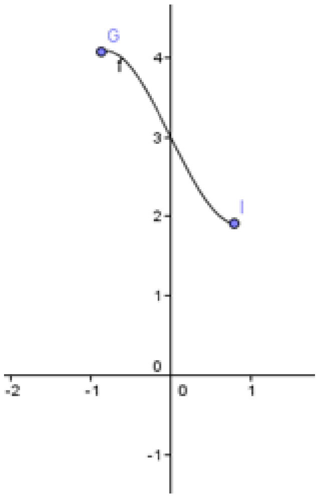
(II)$f: \Re_- \rightarrow \Re_+$

b) Consideremos os pontos $G(x_G, y_G)$ e $I(x_I, y_I)$. As funções a seguir são bijetivas:

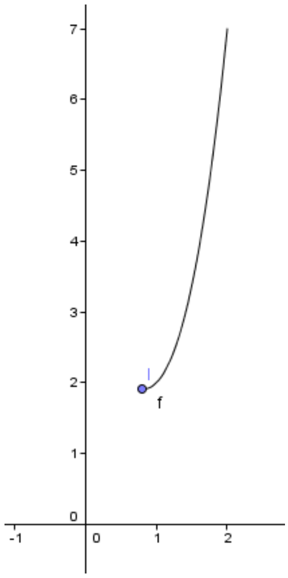
(I) $f: [-2, x_G] \rightarrow [-1, y_G]$



(II) $f: [x_G, x_I] \rightarrow [y_I, y_G]$



(III) $f:[x_I, 2] \to [y_I, 7]$



c) Se a função for definida: $f: \Re \to \Re^*$, teremos uma função bijetiva.

3.2.4 Inversa

Atividade 1:

Passo 1:

a) A função é do 1° grau e, como visto na unidade anterior, é bijetiva. Logo, admite inversa.

b) A função $y = x^2$não é bijetiva. Não admite inversa.

c) A função é bijetiva, pois temos a função definida para $f: \Re_+ \to \Re_+$.

d) A função é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva. Logo, admite inversa.

e) A função é não é sobrejetiva, logo não admite inversa.

Passo 2:

Resolver a equação para x como função de y

a) $y = 4x + 3$

$y - 3 = 4x$

$x = \frac{y-3}{4}$, trocar x por y e assim, $y = \frac{x-3}{4}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{4}$

c) $y = x^2$

$\sqrt{y} = x$

$x = \sqrt{y}$,trocar$x$ por y e assim, $y = \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \ \ x \geq 0$

d) $y = x^3$

$\sqrt[3]{y} = x$

$x = \sqrt[3]{y}$,trocar x por y e assim, $y = \sqrt[3]{x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$,

Atividade 2:

Passo 1:

a) O gráfico é de uma função bijetiva. Logo admite inversa.

b) O gráfico é de uma função bijetiva. Logo admite inversa.

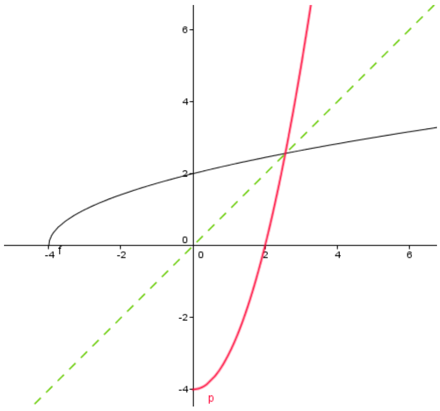
c) O gráfico é de uma função bijetiva. Logo admite inversa.

d) O gráfico não representa uma função bijetiva. Logo não admite inversa.

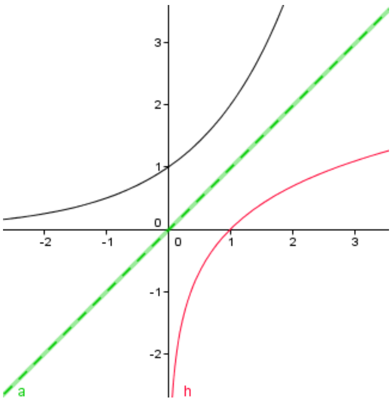
Passo 2:

O gráfico vermelho representa a função inversa. Observe que existe a simetria em relação à reta y = x (Função identidade).

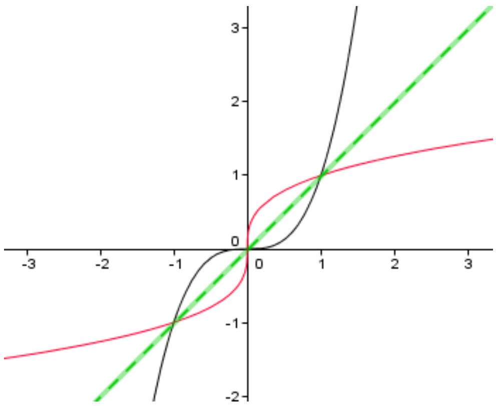
a)



b)



c)



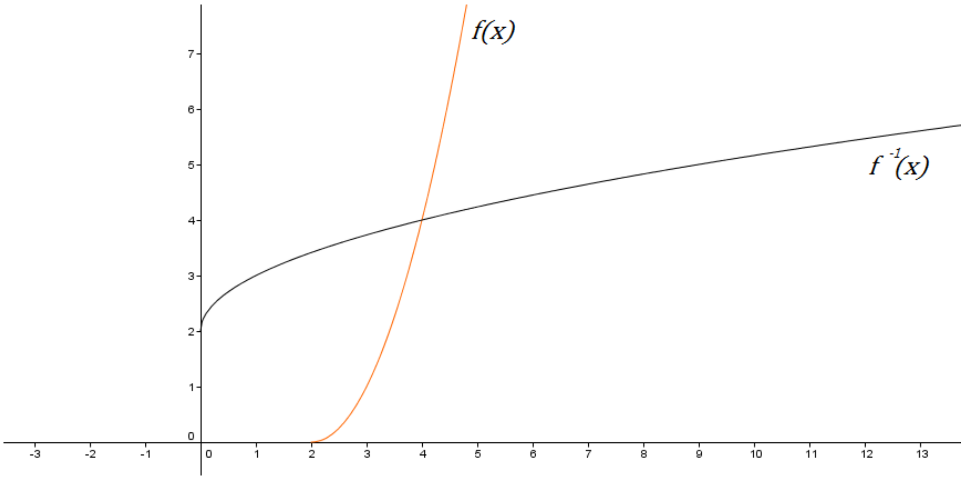
Atividade 3:

a) Temos duas possíveis soluções:

1ª) $D_f = [2, +\infty)$ e $CD_f = [0, +\infty)$

Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 4$, com o domínio acima ;

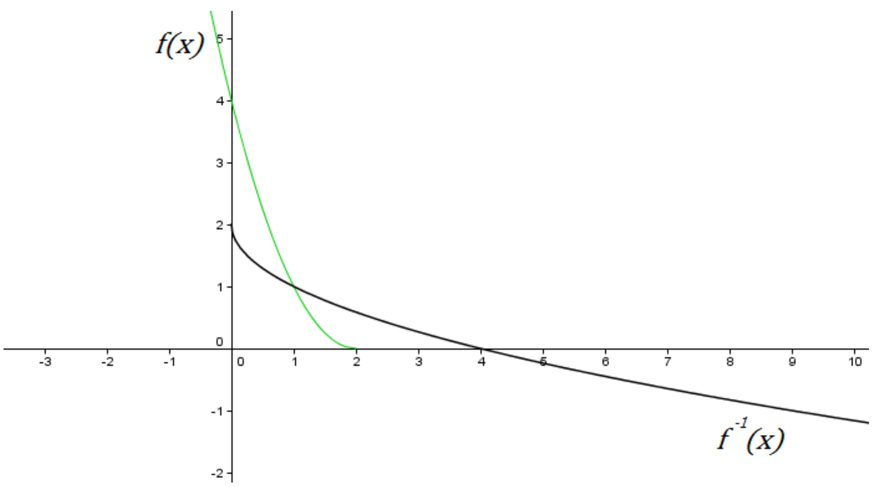
Gráfico de $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$, inversa de $f(x)$:



2ª) $D_f = (-\infty, 2]$ e $CD_f = [0, +\infty)$

Gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 4$, com o domínio acima ;

Gráfico de $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 2$, inversa de $f(x)$:

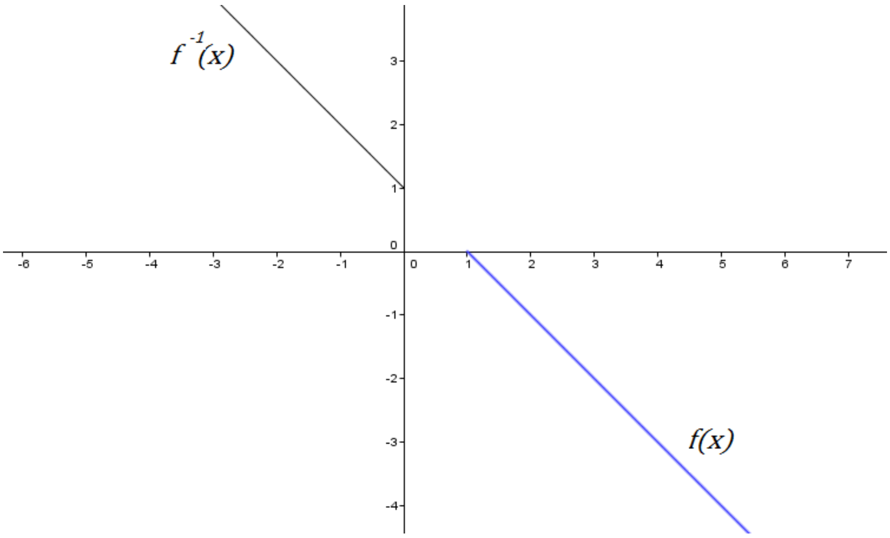


b) Temos duas possíveis soluções:

1ª)$D_f = [1, +\infty)$ e $CD_f = (-\infty, 0]$

Gráfico de $f(x) = 1 - x$, com o domínio acima;

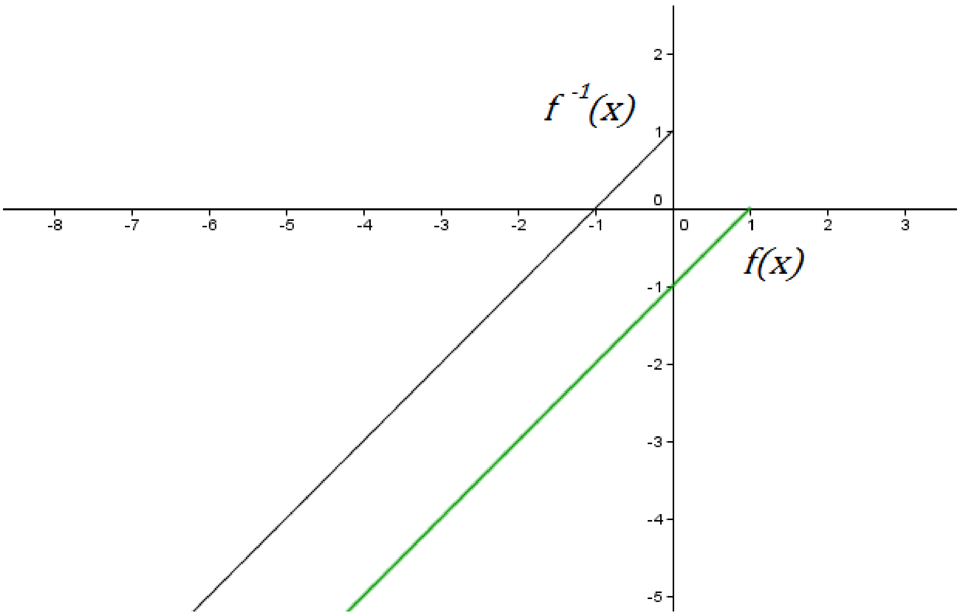
Gráfico de $f^{-1}(x) = 1 - x$, inversa de $f(x)$:



2ª)$D_f = (-\infty, 1]$ e $CD_f = (-\infty, 0]$

Gráfico de $f(x) = x - 1$, com o domínio acima;

Gráfico de $f^{-1}(x) = x + 1$, inversa de $f(x)$:

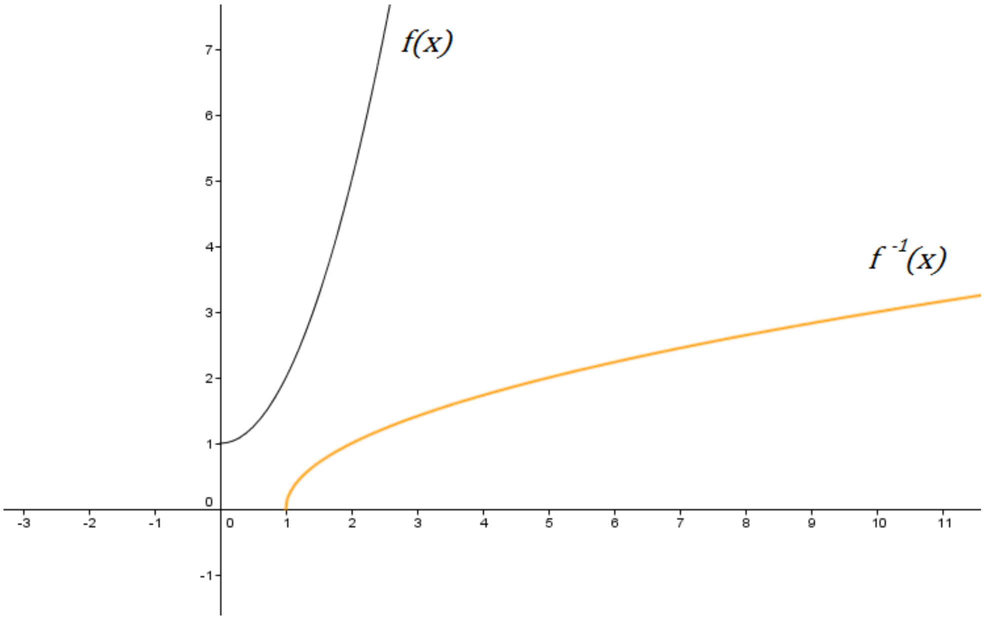


c) Temos duas possíveis soluções:

1ª) $D_f = [0, +\infty)$ e $CD_f = [1, +\infty)$

Gráfico de $f(x) = x^2 + 1$, com o domínio acima;

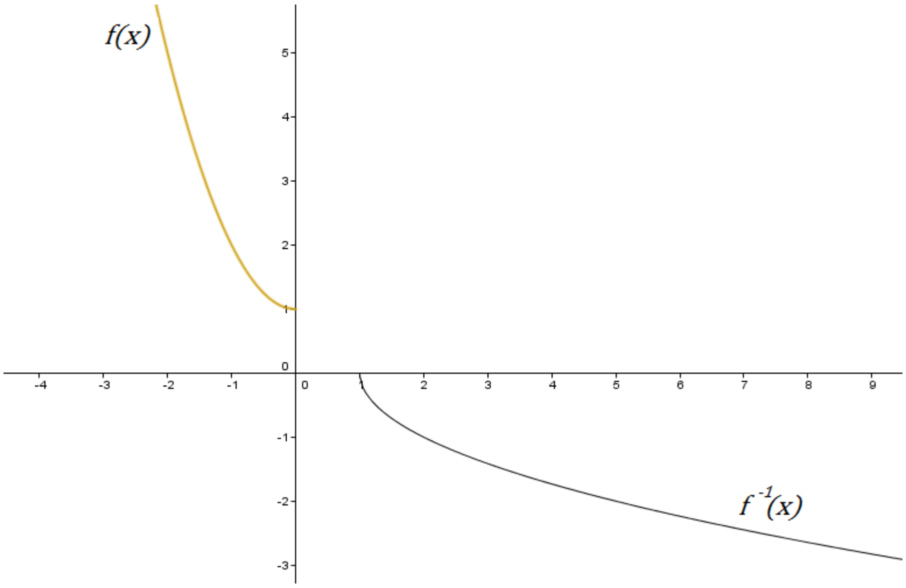
Gráfico de $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$, inversa de $f(x)$:



2ª) $D_f = (-\infty, 0]$ e $CD_f = [1, +\infty)$

Gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ com o domínio acima;

Gráfico de $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$, inversa de $f(x)$:



3.3 Operações com funções

3.3.1 Soma e Diferença

Atividade 1:

Passo 1:

A função custo é dada pela soma do custo fixo com o custo variável e ainda o imposto cobrado:

$C(x) = 10000 + 30x + 0{,}15 \cdot 30x$

$C(x) = 10000 + 34{,}5x.$

Passo 2:

A função receita é dada por:

$R(x) = 100x$

Passo 3:

A função lucro é obtida subtraindo a função receita da função custo:

$L(x) = 100x - (10000 + 34{,}5x)$

$L(x) = 65{,}5x - 10000$

Passo 4:

Para que não haja prejuízo, deve-se ter $L(x) > 0$.

$65{,}5x - 10000 > 0$

$65{,}5x > 10000$

$x > \dfrac{10000}{65{,}5}$

$x > 152{,}6$

$x = 153\ unidades.$

Atividade 2:

Passo 1:

$V = 1 \cdot l \cdot p$, onde $V = volume$, $l = largura$ e $p = profundidade$

$V = 1 \cdot l \cdot p = 300$

$p = \dfrac{300}{l}$

Assim, o custo da escavação é dado pela soma das funções $c(l) = custo\ da\ largura$ e $c(p) = custo\ da\ profundidade$:

$C(l) = 10l + 30 \cdot \dfrac{300}{l}$

$C(l) = 10l + \dfrac{9000}{l}$

Passo2:

Como $l > 0$, devemos ter $C > 0$:

$10l^2 + 9000 = lC$

$10l^2 - Cl + 9000 = 0$, com $\boldsymbol{\Delta} \geq 0$

$(-c)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 9000 \geq 0$

$C \geq 600$

Logo, o custo mínimo é de 600.

Atividade 3:

Passo 1:

$f(x) = \sqrt{x-1}, D_f = [1, +\infty)$

$g(x) = x^2,\ D_g = \Re$

$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}\ ,\ D_h = (2, +\infty)$

Passo 2:

$$f(x) + g(x) + h(x) = \sqrt{x-1} + x^2 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$(f+g+h)(x) = \frac{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-1} + x^2) + 1}{\sqrt{x-2}}$$

$$(f+g+h)(x) = \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + x^2\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2}}$$

$$(f+g+h)(x) = \frac{\sqrt{(x-2)(x-1)} + x^2\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2}}$$

Passo 3:

Temos três casos para analisar:

- $(x-2)(x-1) \geq 0 \rightarrow x \leq 1$ ou $x \geq 2$;
- $x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$;
- $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$.

Percebe-se que os valores que satisfazem simultaneamente as três situações são tais que: $x > 2$

Logo, temos que: $D_{(f+g+h)} = (2, +\infty)$

Passo 4:

O domínio do passo 3, $D_{(f+g+h)} = (2, +\infty)$, é a intersecção dos domínios do passo 1, isto é de $D_f = [1, +\infty)$, $D_g = \Re$ e de $D_h = (2, +\infty)$.

3.3.2 Produto e Quociente

Atividade 1:

Passo 1:

O custo da produção será dado pelo produto do valor unitário pela quantidade produzida:

$C(x) = 40 \cdot (100 - x)$

Passo 2:

A receita da produção será dada pelo produto do valor de venda pela quantidade vendida:

$R(x) = x \cdot (100 - x)$

Passo 3:

O lucro é dado pela diferença entre a receita da produção e o custo:

$L(x) = R(x) - C(x)$

$L(x) = x \cdot (100 - x) - 40 \cdot (100 - x)$

$L(x) = -x^2 + 140x - 4000$

Passo 4:

O preço de venda para lucro máximo é dado pela abscissa da coordenada do vértice da parábola cuja equação é:

$L(x) = -x^2 + 140x - 4000.$

$$x_{vértice} = \frac{-140}{2(-1)} = 70$$

Passo 5:

O lucro médio é dado pela função quociente:

$$L_{médio}(x) = \frac{L(x)}{x} = \frac{-x^2 + 140x - 4000}{x}$$

(neste caso não se admite x = 0).

Atividade 2:

Passo 1:

Considerando d o deconto, em centavos, e V o valor, em reais, arrecadado diariamente com a venda de etanol, temos:

$V(d) = (preço) \cdot (volume\ vendido)$

$V(d) = \left(2{,}60 - \frac{d}{100}\right) \cdot (20000 + 200d)$

$V(d) = -2d^2 + 320d + 52000$

Passo 2:

Para que o valor arrecadado seja máximo, devemos encontrar o valor d para o vértice da parábola representada pela equação $V(d)$:

$d_{vértice} = -\frac{320}{2 \cdot (-2)} = 80$

Logo, o desconto deve ser de R$0,80.

Atividade 3:

Passo 1**:**

$f(x) = x^2 - 1$,$D_f = \Re$

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2 - x}}, D_g = \{x \in \Re; x \neq 0\ e\ x \neq 1\}$

$h(x) = x + 1, D_h = \Re$

Passo 2:

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} = \frac{(x^2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{x^2 - x}\right)}{x + 1}$$

$$\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)(x) = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2-x}\right)}{x+1} = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x+1} = \frac{1}{x}$$

Passo 3:

Sendo

$$\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)(x) = \frac{1}{x}$$

Temos que:

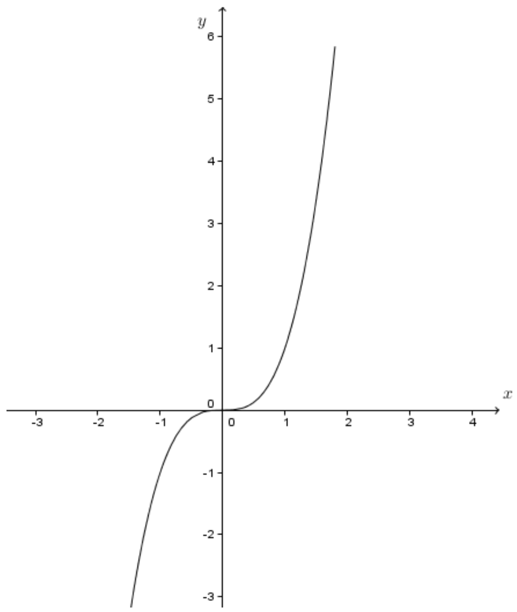
$$D_{\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)} = \Re - \{0\}$$

Passo 4:

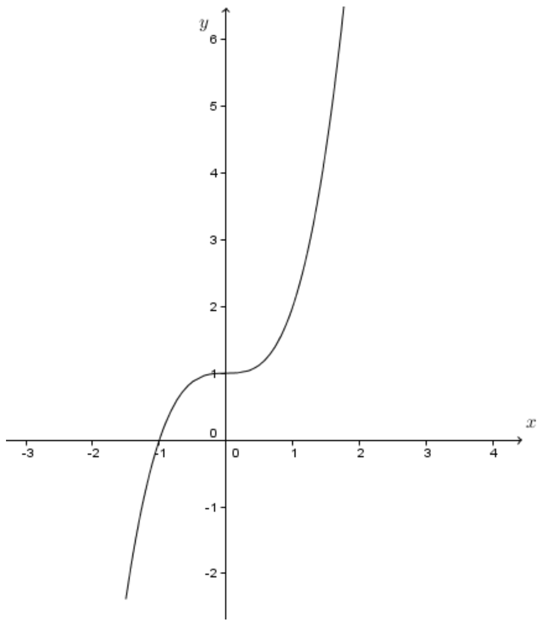
Temos que $D_{\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)} = D_f \cap D_g \cap D_h \cap (h(x) \neq 0)$, note que $h(x)$ é o denominador da função quociente.

Atividade 4:

Passo 1:

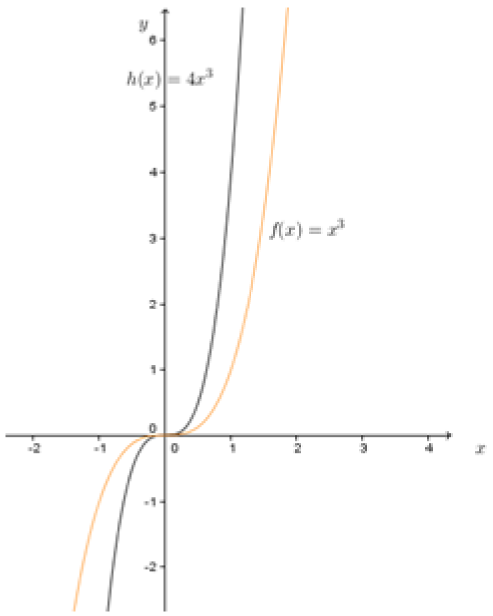


Passo 2: $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ onde $g_1(x) = x^3$ e $g_2(x) = 1$



Passo 3: A função $g(x)$ é a translação vertical de $f(x)$ em 1 unidade.

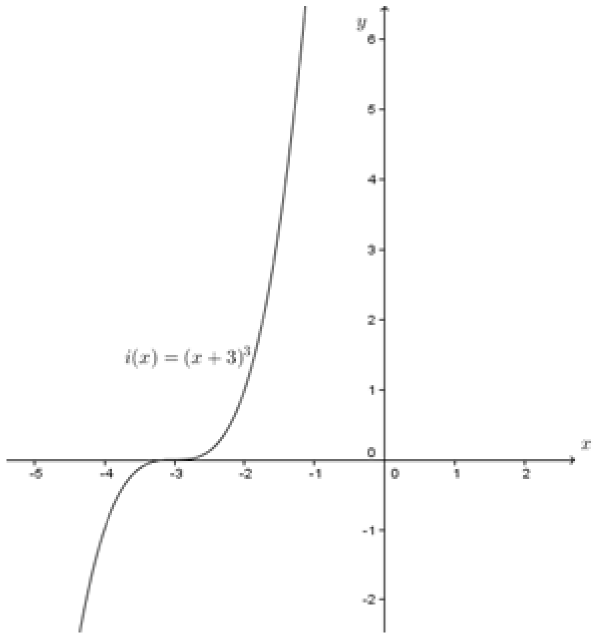
Passo 4: $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$onde $h_1(x) = 2$ e $h_2(x) = x^3$



Passo 5:

A função $h(x)$ é a função $f(x)$ multiplicada por 2. A conseqüência é que o gráfico de $h(x)$ é uma compressão do gráfico de $f(x)$.

Passo 6:

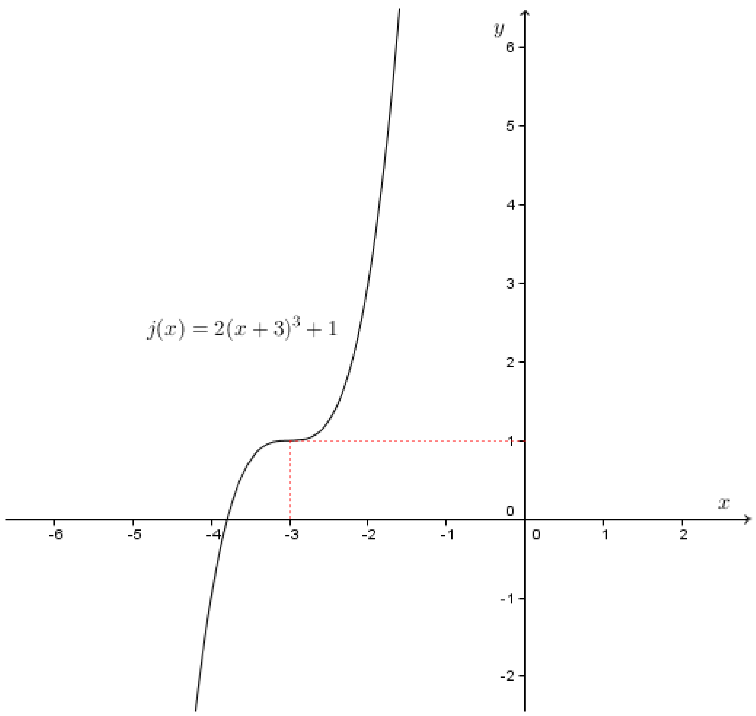


Passo 7:

1° Translação horizontal para a esquerda da função f(x);

2° Compressão do gráfico resultante (ao multiplicar por 2);

3° Translação vertical de uma unidade (ao somar 1).



3.3.3 Compostas

Atividade 1:

Passo 1:

Como o preço de venda é obtido através de um lucro de 50% sobre os custos, temos que:

$V(C) = 1{,}5C$

Passo2:

Basta substituir a variável C pela função $C(p)$:

$V(C) = 1{,}5C$

$V(C(p)) = 1{,}5 \cdot (30000 + 0{,}50p)$

$V(C(p)) = 1{,}5 \cdot (30000 + 0{,}50p)$

$V(C(p)) = 45000 + 0{,}75p$

Passo 3:

Na função obtida acima, substituir $V = 50000$:

$50250 = 45000 + 0{,}75p$

$5250 = 0{,}75p$

$7000 = p$

Logo, devem ser produzidos 7000 parafusos.

Atividade 2:

Sejam: $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.

Passo 1:

$f(g(x)) = 2g(x) + 1$; $f(g(x)) = 2(x^2 - 1) + 1$; $f(g(x)) = 2x^2 - 1$

Passo 2:

$g(x) = x^2 - 1$

$g(f(x)) = f(x)^2 - 1$

$g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 1$

$g(f(x)) = 4x^2 + 4x + 1 - 1$

$g(f(x)) = 4x^2 + 4x$

Passo 3:

As funções são diferentes. Podemos concluir que $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

Atividade 3:

Passo 1:

$\boldsymbol{C(x) = 30x}$, $\quad \boldsymbol{L(C) = 0,5C \quad e \quad E(L) = 0,2L}$

Assim,

$\boldsymbol{L(C) = 0,5 \cdot (30x)}$

$\boldsymbol{L(C) = 15x}$

e:

$\boldsymbol{E(L) = 0,2L}$

$\boldsymbol{E(L(C(x)) = 0,2(15x)}$

$\boldsymbol{E(L(C(x)) = 0,3x}$

Passo 2:

Como temos que $\boldsymbol{x = 1000}$, temos:

$\boldsymbol{E(L(C(1000)) = 0,3 \cdot 1000}$

$\boldsymbol{E(L(C(1000)) = 300}$.

Ele economizou R$ 300,00.

Passo 3:

Se $\boldsymbol{E} = \mathbf{350}$, temos:

$\mathbf{350} = \mathbf{0,3}\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x} = \mathbf{1166,66}$ ...

Logo, ele precisa pintar 1167 m^2 de paredes.

Atividade 4:

Passo 1:

Sendo$h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$,

Considerando:

$f(x) = \sqrt{x}$e$g(x) = x^2 + 2$, temos que $h(x) = f(g(x))$.

Passo 2:

Sendo$h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$,

Considerando:

$p(x) = \sqrt{x + 2}$e$q(x) = x^2$, temos que $h(x) = p(q(x))$.

Passo 3:

Sendo $i(x) = \sqrt{9x^2 + 2}$,

Considerando:

$j(x) = \sqrt{x}$, $l(x) = x^2 + 2$e $m(x) = 3x$, temos que i$(x) = j(l(m(x)))$

Atividade 5:

Passo 1:

Sendo: $f(x) = \sqrt{x+4}$, com $[-4, +\infty[\rightarrow \Re$.

Para encontrar a inversa:

$x = \sqrt{y+4}$

$x^2 = y + 4$

$y = x^2 - 4$

Logo: $f^{-1}(x) = x^2 - 4$, com $\Re_+ \rightarrow [-4, +\infty[$

Passo 2:

Sendo: $f(x) = \sqrt{x+4}$

$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{(f^{-1}) + 4}$

$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{(x^2 - 4) + 4}$

$f(f^{-1}(x)) = \sqrt{x^2}$

$f(f^{-1}(x)) = x$, pois $x \in \Re_+$

e agora:

$f^{-1}(x) = x^2 - 4$

$(f^{-1}(f(x)) = (f(x))^2 - 4$

$(f^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x+4})^2 - 4$

$(f^{-1}(f(x)) = x + 4 - 4$, pois $x \in [-4, +\infty[$

$(f^{-1}(f(x)) = x$

Passo 3:

As funções compostas com suas inversas é igual a identidade.

3.4 Função par e ímpar; crescente, decrescente e periódica

Atividade 1:

Usaremos $C(t)$ para designar a capacidade do reservatório em litros após decorrido um número t de minutos, v para a vazão da torneira ou da válvula e t para o tempo decorrido em minutos. C_T representa a capacidade total do reservatório (cheio).

Passo1:

$C(t) = v.t$

Passo 2:

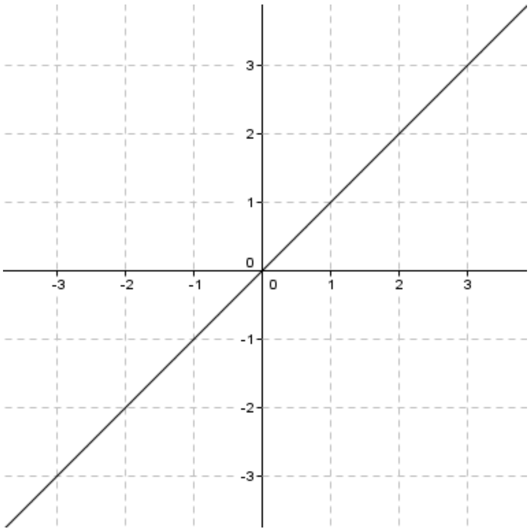
$C(t) = C_T - v.t$

Passo 3:

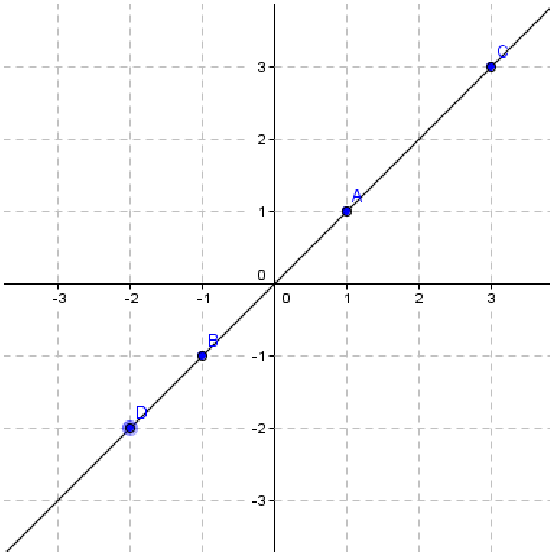
$C(t) = v \times t$, descreve a situação do reservatório recebendo água. A função é crescente. $C(t) = C_T - v \times t$, descreve a situação do reservatório perdendo água. A função é decrescente.

Atividade 2:

Passo 1:

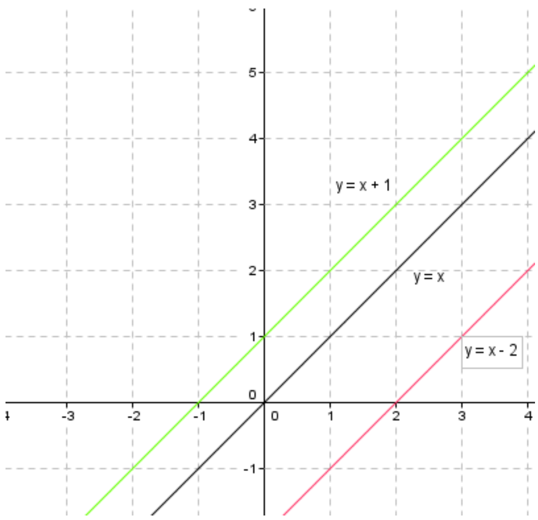


Passo 2:



Os pontos aleatoriamente identificados na bissetriz foram $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(3,3)$ e $(-2,-2)$. Como x e y são iguais nos pares ordenados a função determinada pela bissetriz é $f(x) = x$

Passo 3:

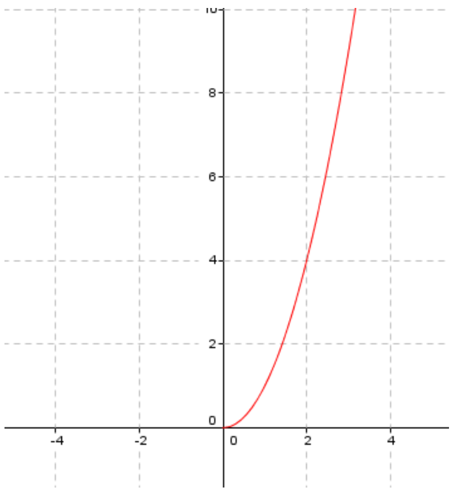


Passo 4: Repetir todos os passos para a função $f(x) = -x$

Atividade 3:

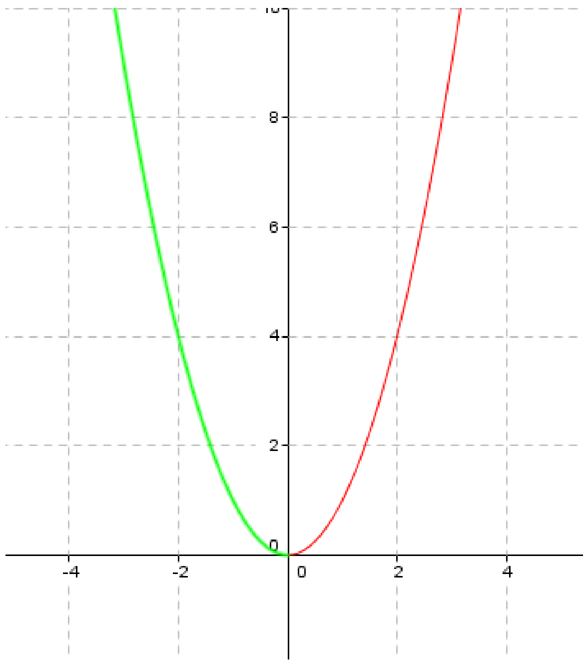
Passo 1: (x, x^2), x um número real positivo. $f(x) = x^2$, é uma função.

Passo 2:



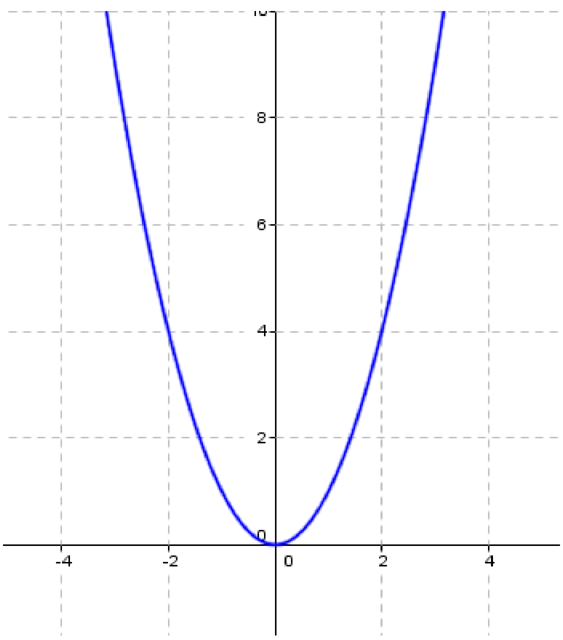
A função é crescente.

Passo 3:



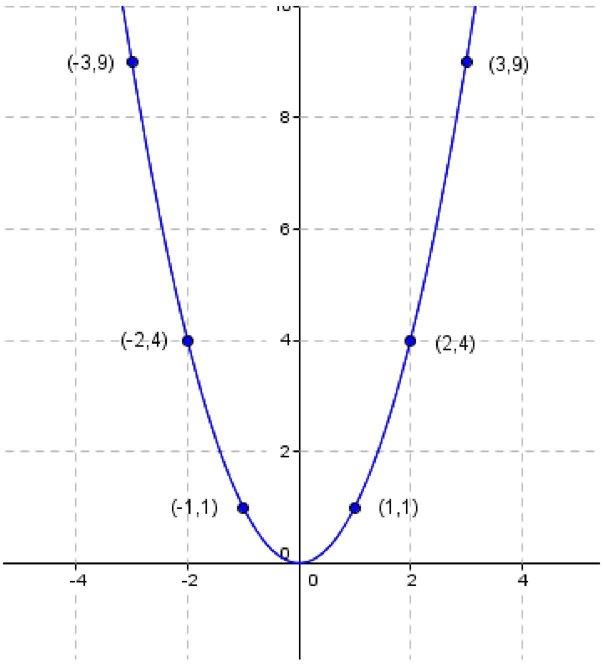
A função é decrescente.

Passo 4:



A função é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e crescente no intervalo $(0, \infty)$.

Passo 5:



Passo 6:

Os pontos $(1,1)$ e $(-1,1)$, $(2,4)$ e $(-2,4)$, $(3,9)$ e $(-3,9)$ assim como as curvas (lado direito e esquerdo) coincidem ao dobrarmos o papel. Concluímos que $f(x) = f(-x)$. O gráfico é simétrico em relação ao eixo $(0X)$. A função é par.

4.1 Funções Polinomiais

Atividade 1:

Passo 1:

$$\boldsymbol{V} = \begin{cases} \mathbf{37}, & \boldsymbol{se} \quad \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{10} \\ \mathbf{37} + \mathbf{5{,}4} \cdot (\boldsymbol{x} - \mathbf{10}), & \boldsymbol{se}\ \boldsymbol{x} > 10 \end{cases}$$

Passo 2:

$V(28) = 37 + 5{,}4 \cdot (28 - 10)$

$V(28) = 37 + 5{,}4 \cdot 18$

$V(28) = 37 + 97{,}20$

$V(28) = 134{,}20$

Atividade 2:

Passo 1:

$L(t) = 0$

$1000t - 6000 = 0$

$1000t = 6000$

$t = 6$

Se :$t < 6$, temos que $L < 0$, ou seja, prejuízo.

Se :$t > 6$, temos que $L > 0$, ou seja, lucro.

Atividade 3:

Passo 1:

A restrição de consumo máximo de 20 unidades de calorias pode ser expressa por:

$$4x + y < 20$$

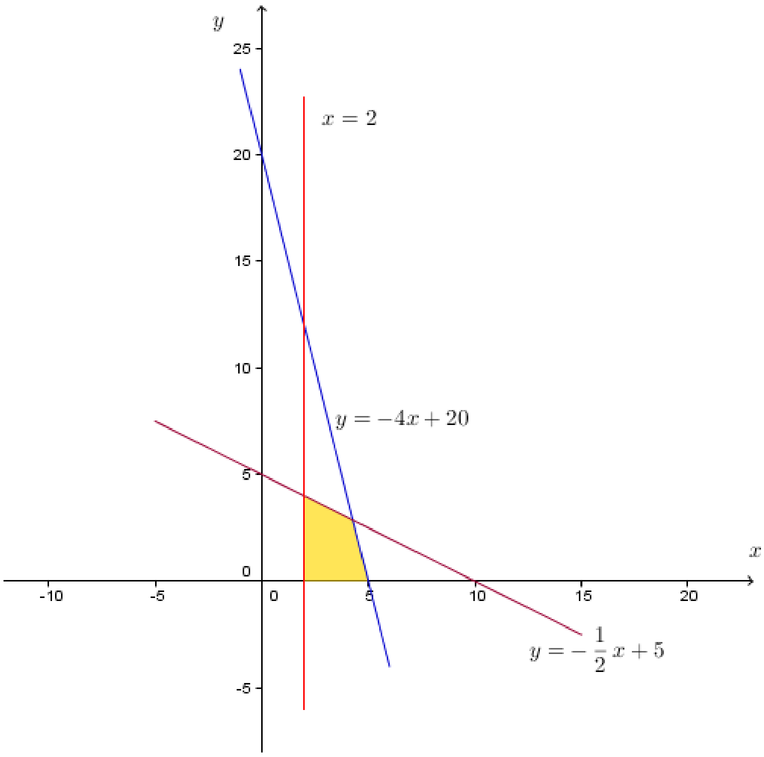
Passo 2:

A restrição de consumo máximo de 20 unidades de gordura pode ser expressa por: $x + 2y < 10$

Passo 3:

A restrição de limite mínimo de vitaminas pode ser expressa por: $x > 2$

Passo 4:



Passo 5: A compra ideal é dada por um dos vértices do polígono, isto é pela interseção das retas e das retas com o eixo x:

1°: $x = 2 \;\; e\, o\, eixo\, x$: (2,0);

2°: $x = 2\; e\; y = -\frac{1}{2}x + 5$: $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 5$ e $y = 4$

$Ponto$: (2,4);

$$3°: y = -4x + 20 \; e \; y = -\frac{1}{2}x + 5: -4x + 20 = -\frac{1}{2}x + 5$$

$x = \frac{30}{7} \; e \; y = \frac{20}{7}$

$Ponto: \left(\frac{30}{7}, \frac{20}{7}\right)$

$4°: \;\; y = -4x + 20 \; e \; o \; eixo \; x: 0 = -4x + 20ex = 5$

$Ponto: (5{,}0).$

Como o preço unitário de X é R\$ 3,00 e o de Y é R\$ 2,00 basta verificarmos qual dos pares acima minimiza o gasto total $3x + 2y$:

$$1° - ponto - (2{,}0): \quad 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$$

$$2° - \; ponto \; (2{,}4): \quad 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 16$$

$3° - \; ponto \; \left(\frac{30}{7}, \frac{20}{7}\right)$

$$4° - \; ponto \; (5{,}0): 4 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 20$$

Assim, a compra ideal é de 2 unidades de X e 0 de Y.

Passo 6:

Como a compra ideal é de 2 unidades de X e 0 de Y, temos o gasto dado por: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$. Assim, o gasto é de R$ 6,00.

Atividade 4:

Passo 1: $y = (x^2 + 6x) + 5$

Passo 2: $y = (x^2 + 6x + 9) + 5 - 9$

Passo 3: $y = (x + 3)^2 - 4$

Passo 4:

$(x + 3)^2 - 4 = 0$

$(x + 3)^2 = 4$

$x + 3 = \pm\sqrt[2]{4}$

$x + 3 = \pm 2$

$x_1 + 3 = 2$ e $x_2 + 3 = -2$

Assim, tem-se: $x_1 = -1$ e $x_2 = -5$.

Atividade 5:

Passo 1:

Pode-se observar que a função Q é uma função decrescente de P. Além disso, para variações iguais de P, têm-se variações iguais de Q. Conclui-se então que, a função que relaciona Q com P é uma função afim.

Assim, Q = aP+b. Como para cada aumento de 1 real em P, corresponde uma diminuição de 2 unidades em Q, tem-se que o coeficiente a desta função vale: $a = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{-2}{1} = -2$

Daí: $a = -2$ e $Q = -2P + b$

Como o ponto (100,0) pertence a esta reta:

$0 = -2 \cdot 100 + b$

$b = 200.$

Por fim, a função: $Q = -2P + 200$

Passo 2:

O lucro unitário (l) é dado por: $l = P - 30$

Passo 3: O lucro total mensal (L) é dado por: $L = Q \cdot l$

$L = (-2P + 200) \cdot (P - 30)$

$L = -2P^2 + 260P - 6000$

Passo 4: O preço e o lucro máximo são dados pelas coordenadas do vértice desta parábola.

Assim, $V = (P_v, L_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Onde P_V representa o preço máximo e, L_V o lucro máximo.

$$P_V = -\frac{260}{2(-2)}$$

$P_V = 65$. Assim, o preço máximo é de R$ 65,00.

Agora, o custo máximo, será de:

$$L_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$L_V = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$L_V = -\frac{((260)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6000))}{4(-2)}$$

$$L_V = -\frac{(67600 - 24000)}{-8}$$

$L_V = 2450$. Assim, o lucro máximo é de R$ 2450,00.

Passo 5:

Fazendo $L = 0{:}0 = -2P^2 + 260P - 6000$

Encontrando as raízes desta equação: $\Delta = (260)^2 - 4(-2)(-6000)$

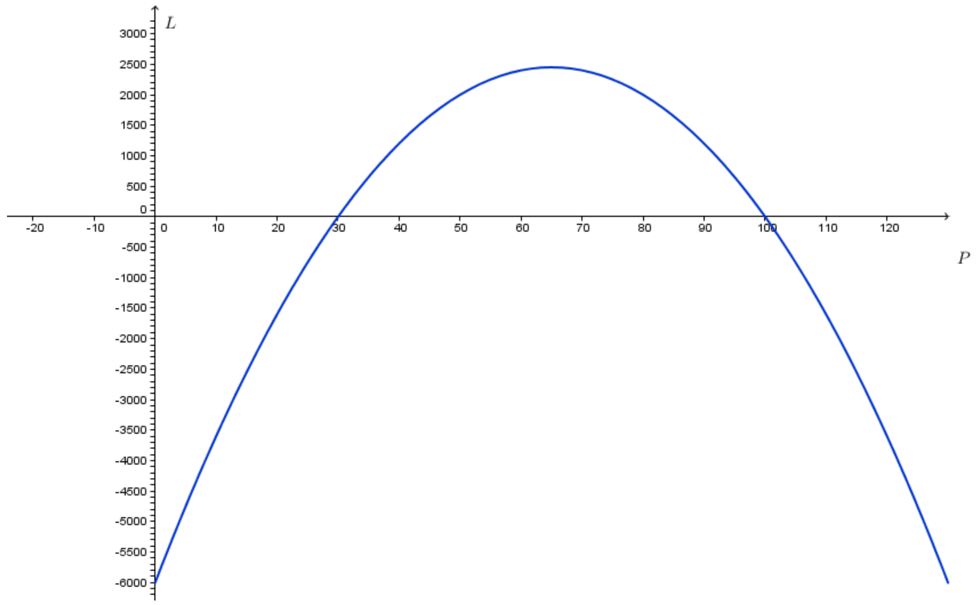
$\Delta = 67600 - 48000$

$\Delta = 19600$

$$P = \frac{-260 \pm 140}{2(-2)}$$

$P_1 = 100 \text{e} P_2 = 30$.

E o gráfico desta função:



Assim, tem-se:

Lucro se: $30 < P < 100$

Prejuízo se: $0 < P < 30$ ou $P > 100$.

Atividade 6:

Passo 1: Como a função não é injetiva, a função não admite inversa.

Passo 2:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3.$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = -\frac{((-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8)}{4 \cdot 1}$$

$$y_v = -\frac{(36 - 32)}{4} = -1.$$

$$V = (3, -1)$$

Passo 3: $D_f = [3, +\infty)$

Passo 4: A função f, com o domínio obtido é injetiva e sobrejetiva. Logo, admite inversa.

Passo 5:

$y = x^2 - 6x + 8$

$y - 8 = x^2 - 6x$

$y - 8 + 9 = x^2 - 6x + 9$

$y + 1 = (x - 3)^2$

$\pm\sqrt{y + 1} = x - 3$

$\sqrt{y + 1} = x - 3\ (\,pois\ x\ > 3)$

$\sqrt{y + 1} + 3 = x$, trocando as variáveis: $\sqrt{x + 1} + 3 = y$

Ou: $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} + 3$

Atividade 7:

Passo 1:

Sabe-se que: $L = V - C$

E que: $V(x) = 6{,}5x$.

Logo:

$L(x) = 6{,}5x - (0{,}1x^2 + 2x + 50)$

$L(x) = -0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50$

Passo 2:

Como se deve ter lucro: $-0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 > 0$

Passo 3:

Encontrando as raízes:

$$-0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 = 0$$

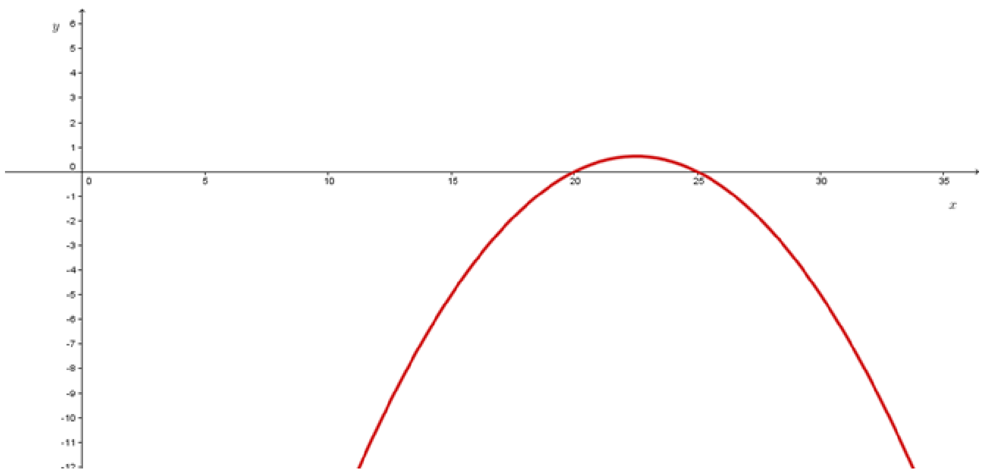
$$x = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{(4{,}5)^2 - 4 \cdot (-0{,}1) \cdot (-50)}}{2(-0{,}1)}$$

$$x = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{0{,}25}}{-0{,}2}$$

$$x = \frac{-4{,}5 \pm 0{,}5}{-0{,}2}$$

$$x_1 = \frac{-5}{-0{,}2} = 25 \ e \ x_2 = \frac{-4}{-0{,}2} = 20.$$

O gráfico desta função:



Desta forma, para que haja lucro: $20 < x < 25$.

Passo 4:

O valor das unidades, x, para que se tenha lucro máximo é dada por:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x_v = \frac{-(4,5)}{2(-0,1)}$$

$$x_v = 22,5$$

Como devemos ter um valor inteiro e positivo: $x = 22 \;\; ou \; x = 23$.

O maior lucro pode ser obtido calculando o custo de 22 unidades:

$$L(22) = -0,1(22)^2 + 4,5 \cdot 22 - 50$$

$$L(22) \cong 0,6.$$

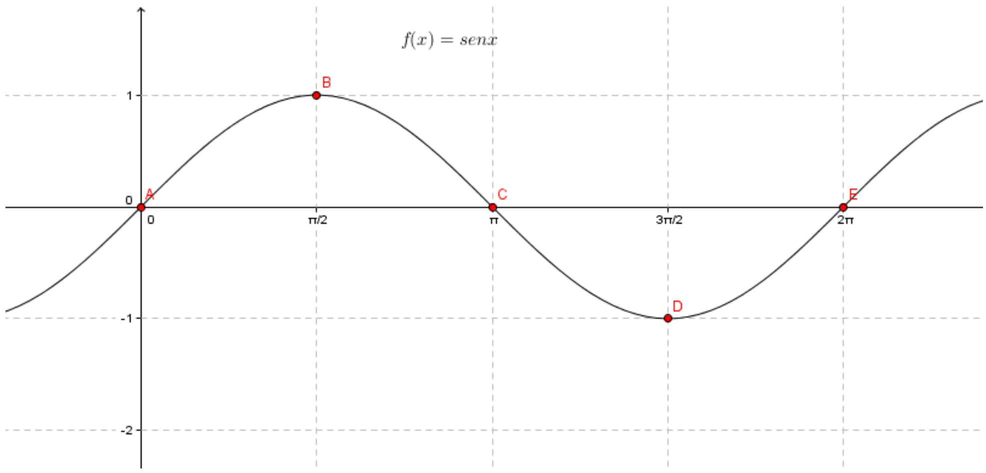
4.2 Funções Trigonométricas

Atividade 1:

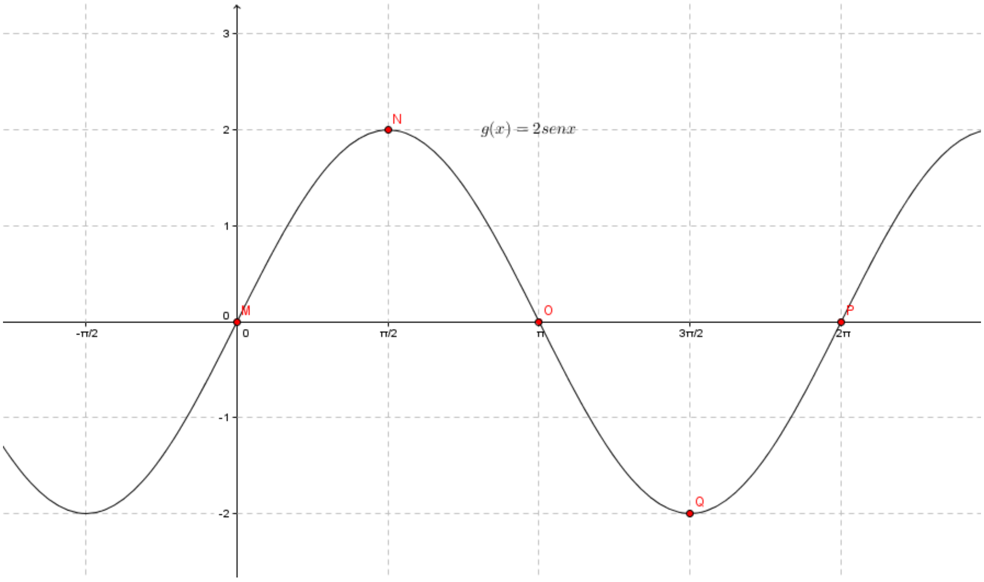
Passo 1:

Valores de x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$
0	**0**	**0**	**2**	**0**
$\frac{\pi}{2}$	**1**	**2**	**3**	**0**
π	**0**	**0**	**2**	**0**
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**-2**	**1**	**0**
2π	**0**	**0**	**2**	**0**

Passo 2:



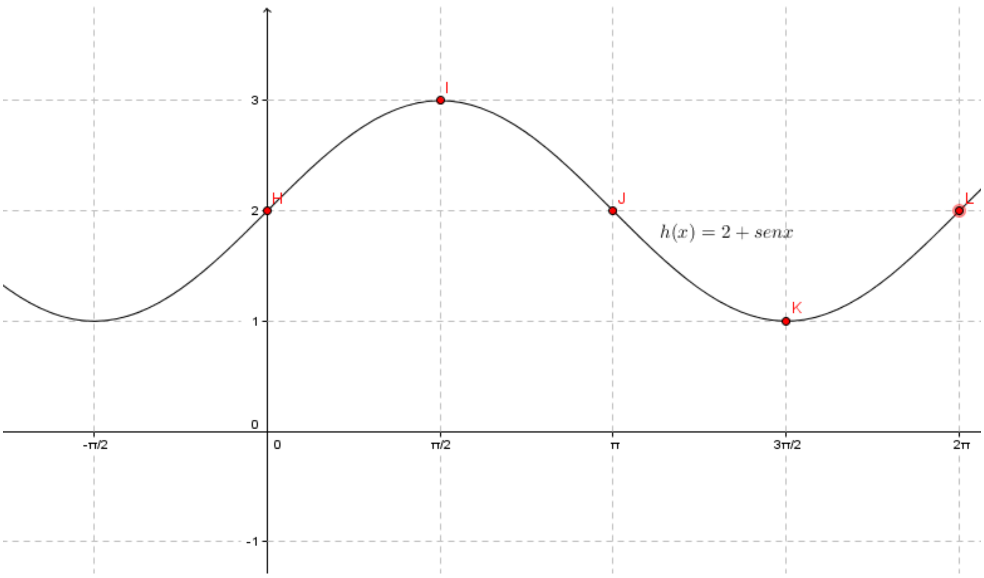
Passo 3:



Passo 4: Imagens: $I_f = [-1,1]$ e $I_g = [-2,2]$. Períodos: $P_f = 2\pi$ e$P_g = 2\pi$

Passo 5: As imagens se alteraram. Mas, o período da função g é igual ao da função f. A conclusão é que, ao multiplicar a função f por uma constante k, a imagem fica: $I = [-1 \cdot k, 1 \cdot k]$

Passo 6:



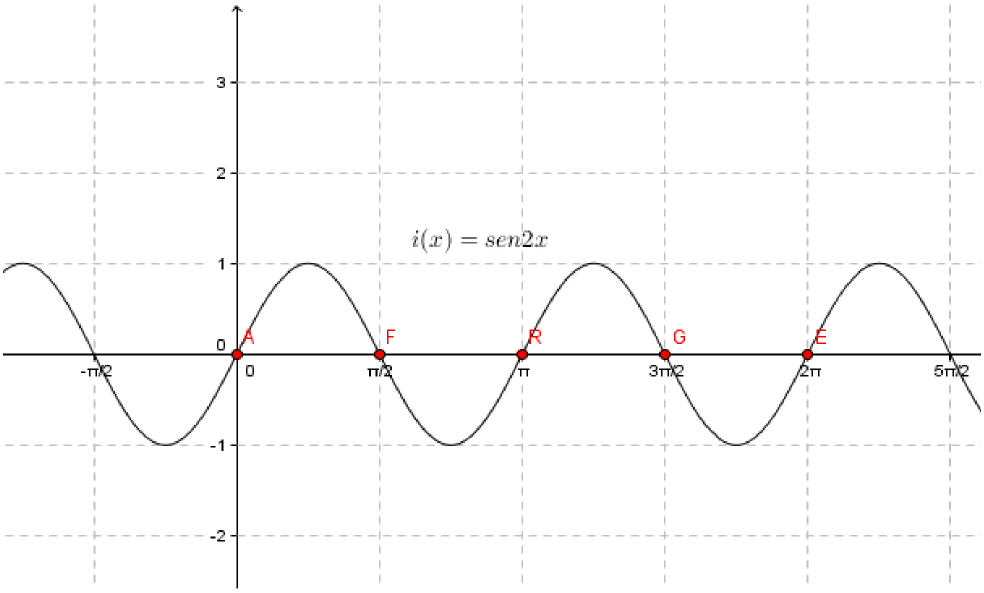
Passo 7:

Imagens: $I_f = [-1,1]$ e $I_h = [1,3]$. Períodos: $P_f = 2\pi$ e $P_g = 2\pi$

Passo 8:

As imagens se alteraram. Mas, o período da função h é igual ao da função f. A conclusão é que, ao somar uma constante k, a imagem aumenta em k unidades: $I = [-1+k, 1+k]$

Passo 9:



Passo 10:

Imagens: $I_f = [-1,1]$ e $I_h = [-1,1]$. Períodos: $P_f = 2\pi$ e $P_g = \pi$

Passo 11: As imagens não se alteraram. Mas, o período da função h é metade do período da função f. A conclusão é que, ao multiplicar a variável da função por uma constante k, o período é dividido por essa constante, isto é:

Sendo $F(x) = senkx$, o período será: $P = \frac{2\pi}{k}$

Atividade 2:

Passo 1:

A amplitude é dada pela constante que se multiplica a função trigonométrica. Neste caso, vale 2,1 metros.

Passo 2:

O período é dado pela relação: $P = \frac{2\pi}{d}$

Onde d é a constante que multiplica a variável na função. Assim: $P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}$

$P = 8\ horas.$

Atividade 3:

Passo 1:

A imagem de uma função trigonométrica é dada pela variação $[-1,1]$

Como, esta função foi multiplicada por -4, a variação da imagem será: $[-4,4]$

Ao somar a constante 16,3, a variação da imagem será:

$[-4 + 16,3; 4 + 16,3]$= $[12,3; 20,3]$. Assim, o nível máximo será de: $20,3$.

Passo 2:

O período é dado por: $P = \frac{2\pi}{k}$

Onde k é a constante que multiplica-se a variável. Neste caso,

$k = 2\pi$. Assim, $P = \frac{2\pi}{2\pi}$ logo $P = 1\ ano.$

Passo 3:

No passo 1, encontra-se a imagem: $[12,3; 20,3]$

Atividade 4:

Passo 1:

Pelo gráfico, temos que o valor máximo é de 8 A.

Passo 2:

A corrente completa o ciclo no tempo de $\frac{1}{60}$ $segundos$.

Assim, o período é de: $\frac{1}{60}$

Passo 3:

Se o ciclo é de $\frac{1}{60}$ segundos, em um segundo tem-se um total de 60 ondas.

Logo, a freqüência é de 60 hertz.

Passo 4:

Como o período é de $\frac{1}{60}$, tem-se que $P = \frac{2\pi}{a}$

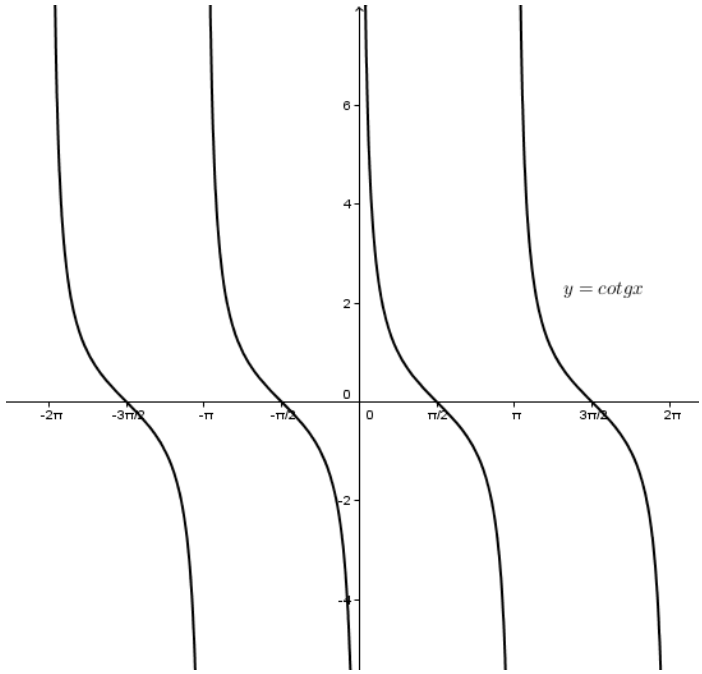
$$\frac{1}{60} = \frac{2\pi}{a}$$

$a = 120\pi$.

Assim, a constante que multiplica a variável é 120π. E como a amplitude é de 8 A. Segue que a equação é: $i(t) = 8\cos(120\pi t)$.

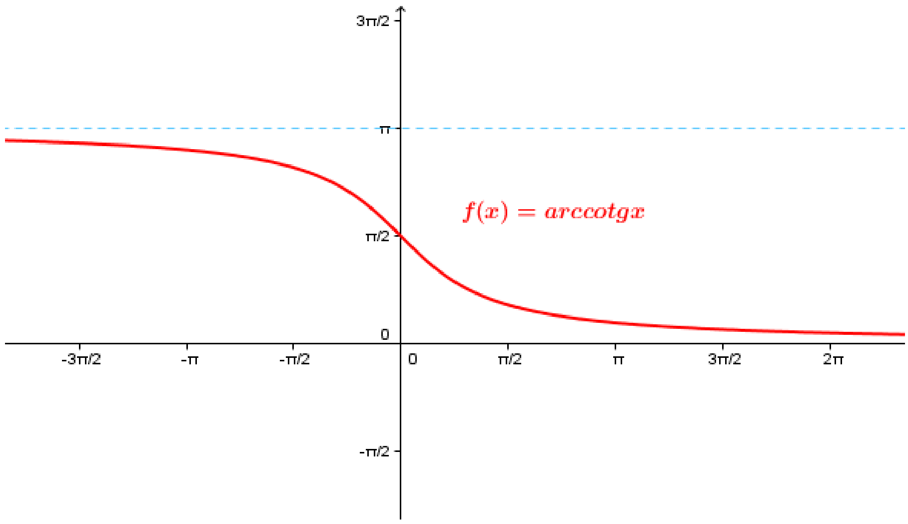
Atividade 5:

Passo 1:



Passo 2: Se tomarmos como domínio o intervalo $0 < x < \pi$. A função admite inversa.

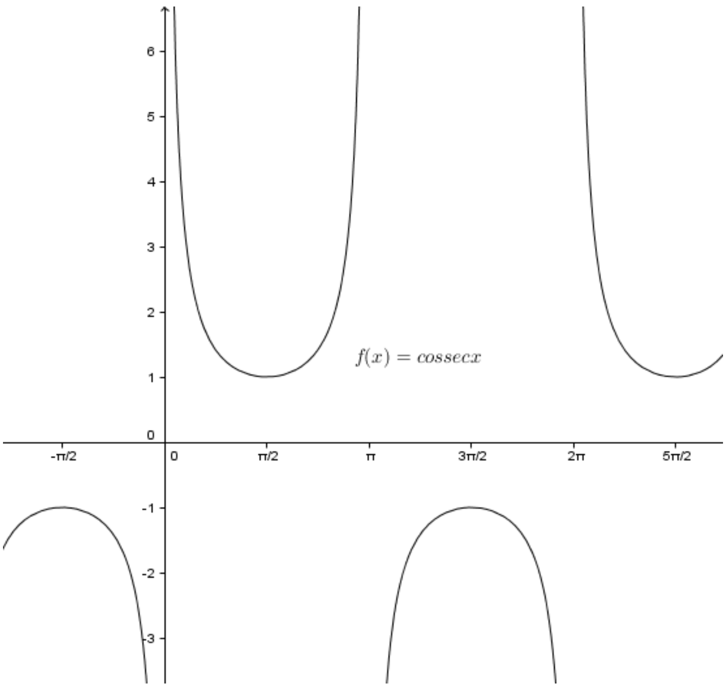
Passo 3:



Passo 4: $D = \Re, I = (0, \pi)$

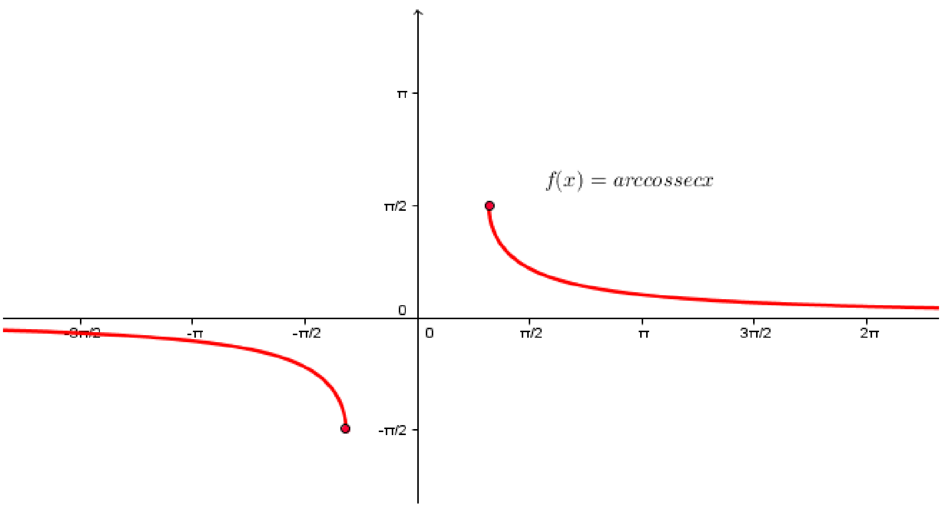
Passo 5:

(I)



(II)Se tomarmos como domínio o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, a função admite inversa.

(III)



(IV) $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ e $I = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

Anexo

Questionários

Questionário

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: ________________________________
____

b) Bibliografia adotada na escola: ____
____

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? _________________________________
____
____

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? ____
____
____

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
____
____
____

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
____
____
____

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo? ____
____
____
____

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?____
____

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante? ____________
____
____

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?
____
____
____
____
____

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_{1,}\ p_2$ *e* p_3 *. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*

As impressões digitais serão representadas por:

$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}\ , d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}\ , d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}\ , d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}\ , \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$

(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$

$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}\ , d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}\ , d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}\ , d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}\ , \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \ X \ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. ____
____
____
____
____
____
____

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta
Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

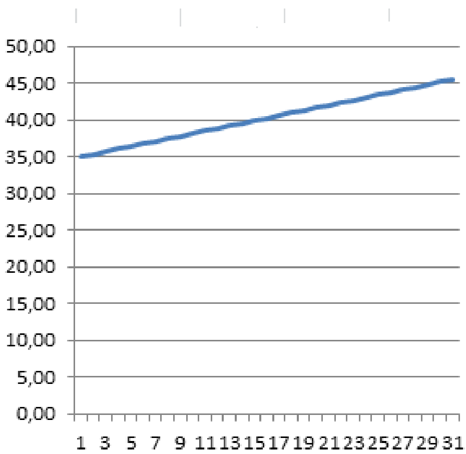
- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

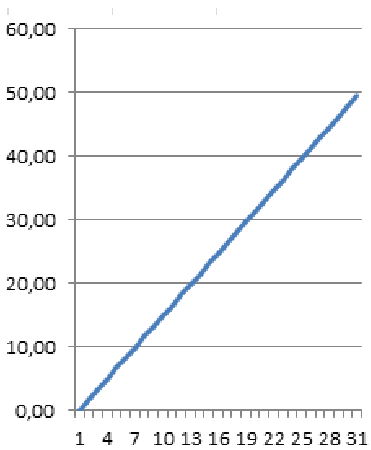
Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade. ____
____
____
____
____
____
____

Passo 1:

Minutos	Plano A	Plano B
0,00	35,00	0,00
1,00	35,35	1,65
2,00	35,70	3,30
3,00	36,05	4,95
4,00	36,40	6,60
5,00	36,75	8,25
6,00	37,10	9,90
7,00	37,45	11,55
8,00	37,80	13,20
9,00	38,15	14,85
10,00	38,50	16,50
11,00	38,85	18,15
12,00	39,20	19,80
13,00	39,55	21,45
14,00	39,90	23,10
15,00	40,25	24,75
16,00	40,60	26,40
17,00	40,95	28,05
18,00	41,30	29,70
19,00	41,65	31,35
20,00	42,00	33,00
21,00	42,35	34,65
22,00	42,70	36,30
23,00	43,05	37,95
24,00	43,40	39,60
25,00	43,75	41,25
26,00	44,10	42,90
27,00	44,45	44,55
28,00	44,80	46,20
29,00	45,15	47,85
30,00	45,50	49,50

Passo 2:





Questionário A

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Colégio Estadual Amaro Cavalcanti no primeiro ano do Ensino médio.________________

b) Bibliografia adotada na escola:
Matemática Manoel Paiva____

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Material de construções geométricas,desenho mais papel milimetrado._______________

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?
Gráficos – comportamento das equações____________________________________

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Sim.Nossos alunos tem muitas dificuldades pois não veem sendo trabalhados anteriormente com este tipo de conteúdo._____________________________________

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Com alguma dificuldade mas,é possível a compreensão.Primeiramente faço um trabalho de apresentação dos eixos cartesianos____

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Não temos laboratório de informática.Uso muito construções em papel milimetrado,mas acho importante após a construção uma comparação com algum software como o Geogebra, por exemplo.____

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Temos que usar problemas do dia a dia._______________________________________

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
Tenho um problema para ir fazendo a ponta de lápis e analisando construir a função.Acho-o muito interessante para iniciar a aula.___________________________________

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **Nossos alunos têm muitas dificuldades na compreensão. Então acho que tem que uma situação simples para começarmos uma aula como a questão do lápis que falei anteriormente**. ____
____
____

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos **t**rabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: $p_{1,}\ p_2$ e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*
$A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **As atividades que vamos construindo com os alunos deixam uma aprendizagem melhor.A aula deve ser sempre construída passo a passo.Excelente atividade.**____

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. ____

Acho excelente a atividade se for construída passo a passo com os alunos,as tabelas,os raciocínios e os gráficos.Como também a interpretação dos resultados.

Questionário B

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
CEMP –Ensino Médio (1ª série) / CIEP 320 –Ercília Antonia da Silva (1ª série)

b) Bibliografia adotada na escola:
IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. Matemática –Volume Único. 5ed. Atual editora, 2013.
DANTE, Luiz Roberto. Matemática – contextos & aplicações. Volume 1. Editora Ática, 2014.

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Sim. Uso do software GeoGebra e na rede estadual atividades autorreguladas (disponível em Conexão professor – site Seeduc)

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?
Situações de dependência e gráficos.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Muitas vezes eles se deparam com esses questionamentos e as dificuldades ocorrem em um primeiro momento. Acredito que essa dificuldade ocorra quando o tema é apresentado.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Depende da situação que for apresentada, mas costumo identificar as funções através de conjuntos e utilizar os pares ordenados na construção gráfica. Vejo muitas dificuldades em perceber essa passagem do discreto para o contínuo e consequente compreensão do gráfico.

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Geogebra e Régua e compasso. Acredito que o uso de softwares pode vir a facilitar a compreensão do tema e facilitar a dinâmica do docente em suas aulas.

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Acredito que haja uma correlação entre os dois períodos.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
Não.

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \rightarrow a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?
Acredito que trata-se de uma motivação interessante. Acho que seria conveniente a sua utilização dependendo dos alunos que serão o alvo desta introdução, onde o professor será o responsável por essa análise.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: $p_1,\ p_2$ e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1},\ d_{2.1},\ d_{3.1},\ d_{1.2},\ d_{2.2},\ d_{3.2},\ d_{1.3},\ d_{2.3},\ d_{3.3},\ d_{1.4},\ d_{2.4},\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10},\ d_{2.10}$ e $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) :
$A = \{ p_1,\ p_2,\ p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1},\ d_{2.1},\ d_{3.1},\ d_{1.2},\ d_{2.2},\ d_{3.2},\ d_{1.3},\ d_{2.3},\ d_{3.3},\ d_{1.4},\ d_{2.4},\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10},\ d_{2.10},\ d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **Gostei da atividade apresentada, pois refere-se a uma atividade que aborda uma situação cotidiana de forma diferenciada e o fato de não conter números despertará o interesse dos alunos.**

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade.**Novamente uma motivação diferenciada sobre o estudo de funções e o uso do Excel pode trazer resultados positivos para a compreensão do tema trabalhado. Gosto das atividades que permitem a solução por meio de outros recursos que não os tradicionais.**

Questionário C

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Fundação Osório 9º ano do Ensino Fundamental.

b) Bibliografia adotada na escola:
Vontade de Saber Matemática (Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro).

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Eventualmente preparo folhas de exercícios.

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?
O Plano Cartesiano

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Acredito que sim. Como a resolução das equações a eles apresentadas é mais simples do que a análise das funções em si, eles tendem a sempre quererem resolver as equações mesmo que isso seja dispensável um problema específico.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Costumo, ao apresentar a função, usar uma tabela para assinalar alguns pontos do gráfico e acredito que aluno entenda que "ligando os pontos" ele compreenda esta passagem do discreto ao contínuo.

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Não

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Utilizo experiências da minha educação básica também, até porque tive alguns professores naquele período que hoje são referências para mim.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
Não

i)A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, *afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). *Note que, nesse caso, os pares* $(9{,}3)$ *e* $(9, -3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a, *os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, *temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$, *ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?
Não para introduzir o conteúdo de funções, mas acredito ser importante o esclarecimento deste detalhe, que como muito bem colocado, até alguns professores se confundem a esse respeito.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B. *O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_1,\ p_2$ *e* p_3. *O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1},\ d_{2.1},\ d_{3.1},\ d_{1.2},\ d_{2.2},\ d_{3.2},\ d_{1.3},\ d_{2.3},\ d_{3.3},\ d_{1.4},\ d_{2.4},\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10},\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro índice representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$A = \{\ p_1,\ p_2,\ p_3\ \}$

$B = \{\ d_{1.1},\ d_{2.1},\ d_{3.1},\ d_{1.2},\ d_{2.2},\ d_{3.2},\ d_{1.3},\ d_{2.3},\ d_{3.3},\ d_{1.4},\ d_{2.4},\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10},\ d_{2.10},\ d_{3.10}\ \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \; X \; B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade: **Muito boa, acredito que seja positiva a observação sobre a possibilidade de relacionar elementos de dois conjuntos num contexto que não tenha números.____**

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade: **Ótima, pois o computador agilizará a parte "braçal", entretanto não prejudica a possibilidade de o aluno comparar tabela e gráfico e fazer as analises necessárias à compreensão dos conceitos desejados.______________________**

Questionário D

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Rede La Salle Abel e Instituto Gaylussac (1º ano e 3º ano)

b) Bibliografia adotada na escola:
Matemática – Ciência e Aplicações, IEZZI, Gelson. Editora Saraiva

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Sim. Listas de Exercícios e os recursos do LIDI (Livro Digital).

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? **Uma calculadora.**

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
De fato que é um erro muito frequente a interpretação da variável como sendo uma incógnita e consequentemente a dificuldade em discernir funções de equações, porém existem recursos e possibilitam um melhor esclarecimento.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Sim. Em princípio a tabela é um método rápido e eficaz, se precedido de um questionamento sobre o Domínio e a Imagem da função trabalhada, pois desta forma o aluno poderá refletir o tipo de Conjunto Numérico trabalhado e passa a raciocinar sobre a diferença entre variável discreta e variável contínua. Um software ajuda bastante nesse processo, fazendo com que as dúvidas venham a ser minimizadas.

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Sim. Utilizo frequentemente no IPAD o WebFluidMath, que é um dos meus preferidos. Simples, rápido, eficiente e agrada muito os alunos, mas no PC não troco a tradição do Geogebra.

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Acredito que o conhecimento sempre estará em constante desenvolvimento e nós estudantes estamos sempre a procura de mais conhecimentos, neste caso, posso afirmar que utilizo todos os conhecimentos adquiridos e solidificados na Graduação, mas sempre deixando um espaço aos novos conhecimentos adquiridos durante a Pós-graduação e sem dúvidas alguns adquiridos apenas com a prática e vivência em sala de aula. O contato com alunos de diferentes realidades sociais e diferentes tempos de aprendizagem, me faz repensar sobre uma metodologia ou recurso utilizado.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
Acho que um conteúdo com tamanha importância, como o de Funções, deveria ser iniciado com bastante calma na última série do Ensino Fundamental e apenas findar o ciclo básico na última série do Ensino Médio, mas certamente isso seria uma discussão que envolve uma transformação de toda grade curricular, o que nem sempre é possível.___

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?
Sim, certamente. Devido à noção do termo "mais ou menos" estar atrelado diretamente ao estudo das funções modulares, esta é uma entrada que sempre dá certo. Os alunos discutem o tema e a aula fica mais interativa.__________________________________

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_1,\ p_2$ *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1},\ d_{2.1},\ d_{3.1},d_{1.2},\ d_{2.2},\ d_{3.2},d_{1.3},\ d_{2.3},\ d_{3.3},d_{1.4},\ d_{2.4},\ d_{3.4},\ldots,\ d_{1.10},\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$$A = \{\ p_1,\ p_2,\ p_3\ \}$$

$$B = \{\ d_{1.1},\ d_{2.1},\ d_{3.1},d_{1.2},\ d_{2.2},\ d_{3.2},d_{1.3},\ d_{2.3},\ d_{3.3},d_{1.4},\ d_{2.4},\ d_{3.4},\ldots,\ d_{1.10},\ d_{2.10},\ d_{3.10}\ \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \; X \; B$.
Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **Apesar de ser uma atividade que exemplifica perfeitamente a noção de produto cartesiano e pares ordenados, não utilizaria em minhas aulas, pois requer um tempo de concentração e trabalho braçal para os alunos, que provavelmente não teriam paciência, levando-o à indisciplina e consequente perda do conteúdo. Acredito que existem técnicas mais eficazes para levar o conhecimento de uma forma mais prazerosa. Apesar de antiga, o jogo da batalha naval poderia servir como atividade. Adaptaríamos um tabuleiro menor e com menos embarcações, inclusive esta atividade poderia ser feita em um laboratório de informática, o que tornaria mais atraente para os alunos, ou até uma aula tradicional, com o uso do Geogebra.____________________**

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta
Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. **Excelente!!! Além de utilizar vários recursos tecnológicos, trabalha de forma lúdica, construindo o conhecimento pela experimentação e ainda sobre um ponto da matéria muito recorrente nos concursos de vestibulares, além de um conhecimento que pode ser facilmente aplicado em inúmeras situações cotidianas. Seria uma incrível experiência com os alunos._____________________________________**

Questionário E

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Colégio Bahiense: Terceiro Ano ensino médio

b) Bibliografia adotada na escola:
Apostila própria.

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Não.

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?
Gráficos.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Sim.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Somente no momento inicial. Acredito que sim.

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Não. Acredito que só possa ser utilizado em situações específicas.

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Educação básica e graduação. Pois, em ambos os casos tive a oportunidade de conviver com grandes educadores.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
Hoje há um grande despreparo do corpo docente, em todas as escalas, do ensino fundamental à pós graduação, devido a uma série de fatores. Sendo o aprendizado dos alunos dificultado e atrapalhado.

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \rightarrow a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?
Não.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* p_1, p_2 *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ *= digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$$

$$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade:
Não usaria em uma aula inicial. É um exemplo razoável, porém acredito que hajam exemplos com menos incógnitas e que possam ser mais bem absorvidos pelos alunos.___

____

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade:
Não usaria, porém acho uma boa sugestão e alternativa. É importante mostrar ao aluno a taxa de variação constante para esse tipo de função e a tabela pode auxiliar numa atividade complementar para a aprendizagem de tal conteúdo.___________________

____

Questionário F

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:

C E Prof Clóvis monteiro - 1º e 2º anos do ens fundamental e Neja II_______________

b) Bibliografia adotada na escola:

Novo Olhar Matemática - Joamir Souza___________________________________

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?

Sala de informática.____

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?

O gráfico de uma função____

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?

Sim.____

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?

Sim. Essa percepção é difícil para os alunos____________________________________

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?

Não.____

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?

Utilizo situações do cotidiano dos alunos para construir o conceito de funções, e estimular eles a entenderem o que é a variável que chamamos de x.________________________

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?

Não____

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9{,}3)$ *e* $(9, -3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?
Não consegui visualizar as equações____

Atividades propostas

---

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_{1,}\ p_2$ *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*

As impressões digitais serão representadas por:

$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}\ , d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}\ , d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}\ , d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}\ , \dots , d_{1.10,}\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$

(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ *= digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$$A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$$

$$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}\ , d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}\ , d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}\ , d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}\ , \dots , d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **A idéia é boa, mas acho que os alunos teriam dificuldade de entender o código de cada impressão e relacionar os conjuntos____________________**

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. **Gosto desse tipo de atividade, acho excelente. Porém ao fazer algo parecido na escola mencionada acima tive dois problemas, um foi a pequena quantidade de computadores disponíveis e outro que os alunos não sabem utilizar o excel.**

Questionário G

a)Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: **Atualmente não leciono o conteúdo de funções. Lecionei entre os anos de 2007 e 2009, nas escolas: Escola Estadual Rosa Luxemburgo, Colégio Estadual França e Colégio Estadual Charles Chaplin. Também tive oportunidade de trabalhar o conteúdo de forma introdutória no nono ano do ensino fundamental nos anos de 2011 e 2012 na Escola Municipal Felicidade de Moura Castro**____

b) Bibliografia adotada na escola:
Não me recordo exatamente____

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Não fiz uso de materiais complementares____________________________________

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? **Alguns exemplos bastante usados para esse conteúdo como o preço a pagar numa corrida de táxi, o deslocamento de um corpo após sofrer uma força etc**____

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Tem bastante dificuldade. Em geral ele tende a acreditar que uma função é uma equação. A percepção de que o símbolo utilizado numa lei de formação pode assumir vários valores é bastante custoso.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Bastante difícil, principalmente por que alguns exemplos dados não se aplicam a uma função contínua, onde o uso de números irracionais, por exemplo, não faz sentido. Isso costuma causar confusão no aluno. Acredito que o uso de softwares seja um grande aliado nessa abordagem____

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo? **Não utilizei, mas considero de essencial importância seu uso, principalmente pelo caráter visual e dinâmico**__________________________

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? **Os dois, principalmente os utilizados na graduação, pois o estudo de funções é praticamente abordado em toda a graduação**____

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante? ____________

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$*,* $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **Acho interessante seu uso, mas como algo mais analítico e não como motivação. Acho que há uma certa formalização nesse tipo de abordagem que não se encaixa em algo introdutório.**

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_{1,}\ p_2$ *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$$A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$$

$$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **Acho uma situação bem interessante, pois permite estabelecer a condição para que uma relação seja uma função, além de trabalhar a cardinalidade que existe entre os subconjuntos formados pelas relações ou funções.**____

____

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. **Acho uma situação extremamente interessante para se trabalhar, pois aborda uma situação real, presente no cotidiano, além de análise de gráficos e equações especiais formadas no problema.**____________________________

Questionário H

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
C,E, AMARO CAVALCANTI – 1º ANO ENSINO MÉDIO________________________

b) Bibliografia adotada na escola:**LIVROS DO PNLD ESSE ANO ADOTAMOS O LIVRO MATEMÁTICA PAIVA – MANOEL PAIVA – ED, MODERNA**_________________

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?**OUTROS LIVROS DIDÁTICOS, ALGUNS SITES DA INTERNET E ALGUMAS VEZES, MATERIAIS CONCRETOS TAIS COMO PLANIFICAÇÕES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS PARA MONTAGEM.**

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? **A IDÉIA DE CORRELAÇÕES ENRE GRANDEZAS, A FUNÇÃO AFIM É BASTANTE FÁCIL PARA MOSRAR ESSA IDÉIA. O PREÇO DA CORRIDA DE TAXI, A CONTA DE TELEFONE OU DE LUZ SÃO EXEMPLOS PRÁTICOS QUE FAZEM PARTE DO COTIDIANO DE NOSSOS ALUNOS.**_____________________

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
INFELIZMENTE NOSSOS ALUNOS NÃO ESTÃO MUITO PREOCUPADOS EM ENTENDER CONCEITOS, SUA PREOCUPAÇÃO MAIOR É APRENDER O PASSO A PASSO PARA RESOVER UM PROBLEMA,________________________________

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno? **ACREDITO QUE ELES PERCEBEM QUE É IMPOSSÍVEL TRAÇARMOS UM GRÁFICO DE UMA RETA COM TODOS OS SEUS PONTOS, COMPREENDENDO A IDÉIA DA CONTINUIDADE. ALGUMAS FUNÇÕES DEIXAM MAIS CLARO ESSA IDÉIA, COMO A FUNÇÃO AFIM E A EXPONENCIAL, ACREDITO QUE A MAIS DIFÍCIL SEJA A FUNÇÃO QUADRÁTICA.**________________________________

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo? **NÃO CONHEÇO, MAS ACREDITO QUE PODE SER UM INSTRUMENTO FACILITADOR PARA O ARENDIZADO DOS ALUNOS.**__________

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?**ACREDITO _QUE USO ELEMENTOS APRENDIDOS COM A PRÁTICA DE ENSINO.**_________

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante? _____________

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **DIFICILMENTE, DEVIDO AO BAIXO NÍVEL DE NOSSOS ALUNOS, ESSA ABORDAGEM DIFICULTARIA O ENTENDIMENTO.________________________**

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.
Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: p_1, p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ e $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) :

$$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$$

$$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **A IDÉIA É INTERESSANTE, MAS MINHA PREOCUPAÇÃO É INSERIR UM CONCEITO DE ÍNDICES QUE NÃO É TÃO SIMPLES QUANTO PARECE, SENTIMOS ESSA DIFICULDADE AO TRABALHARMOS COM SEQUÊNCIAS E MATRIZES NO 2º ANO.____________**

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade. **MUITO BOA. TEREMOS O PROBLEMA DE QUERERMOS USAR COMPUTADORES PARA UMA TURMA COM QUASE 50 ALUNOS.____**

Questionário I

a)Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Escola Municipal Cientista Mário Kröeff - 9º ano do Ensino Fundamental

b) Bibliografia adotada na escola:
A escola não possui uma bibliografia específica. Já foram adotados o livro do Imenes & Lellis, da Editora Moderna. Alguns professores não trabalham com livros

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? **Alguns sites na internet ou os cadernos pedagógicos da SME (Secretaria Municipal de Educação)**

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? **Vem a imagem do diagrama de Venn ou de uma tabela, que relaciona duas grandezas distintas. Grandezas estas que se fazem presentes no nosso cotidiano**

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação? **O aluno tem muita dificuldade de distinguir o conceito de função do de equação. Geralmente diz que é uma função quando a "letra" y aparece isolada em um dos membros da igualdade. Quanto à diferença entre incógnita e variável, é mais complicado ainda o aluno estabelecer esse desvínculo. Os alunos acham que são letras ou símbolos, dificilmente chamam de incógnita, no caso das equações ou de variável, no caso das funções.**

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno? **Costumo sim, inicialmente, para as funções afins. Depois tomo apenas dois valores do domínio, obtenho as respectivas imagens e digo que aqueles dois pontos são suficientes para determinar a reta que passa por eles. No caso das funções quadráticas, tabelo alguns valores do domínio, obtenho as respectivas imagens, determino as coordenadas do vértice e traço o gráfico. Quando os pontos são marcados no plano cartesiano, intuitivamente, os alunos acabam fazendo uma ligação dos mesmos, mas não acredito que compreendam a passagem do discreto para o contínuo. Uma outra coisa bastante difícil de fazer o aluno compreender é explicar a ele porque o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Ou então porque aquele gráfico não possui "bicos". Isso é muito complicado.**

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo? **Já utilizei o GeoGebra. Essa ferramenta é importantíssima, pois apresenta ao aluno como é o comportamento de uma determinada função, o que é uma raiz, quais são os intervalos em que a função cresce (ou decresce), onde ela é positiva ou negativa, a relação entre os coeficientes e o gráfico da função, além do aluno se interessar muito mais em manusear o teclado do computador do que utilizar régua, lápis e papel quadriculado para traçar os gráficos**

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? **Na verdade, é um misto dos dois. Se a formação básica é deficiente, a dificuldade de lecionar um conteúdo tão abstrato quanto este se fará sempre presente. E o que se aprende na Graduação e é interessante para ampliar o conhecimento do aluno, deve ser sempre difundido.**

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante? **Não**

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **Apesar de interessante, não usaria. Esse exemplo um pouco mais complexo seria trabalhado quando os alunos tivessem se familiarizado com o conceito de função. De início, penso que seria um pouco chocante para eles.**

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.
Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: p_1, p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ *= digital 1 da pessoa* p_3 *) :*

$A = \{ p_{1,} \ p_{2,} \ p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1,} \ d_{2.1,} \ d_{3.1} \ , d_{1.2,} \ d_{2.2,} \ d_{3.2} \ , d_{1.3,} \ d_{2.3,} \ d_{3.3} \ , d_{1.4,} \ d_{2.4,} \ d_{3.4} \ , \ldots , d_{1.10,} \ d_{2.10,} \ d_{3.10} \ \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \ X \ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **Muito boa atividade que faz com que o aluno entenda que toda função é uma relação, mas nem toda relação entre dois conjuntos é uma função. Os passos 2 e 3 são interessantes e fazem com que os alunos entendam o que é um par ORDENADO e o que seria uma relação inversa**______________________________

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade. **Excelente atividade! Todos os itens são muito bem elaborados e trazem uma situação de contextualização que todo professor deveria abordar e fazer com que o aluno e ele próprio também utilizasse a seu favor na vivência prática do dia a dia. Analisar os resultados em tabelas e gráficos, ajuda muito o aluno a entender as demais atividades propostas. A única coisa diferente que eu tentaria fazer é esboçar os gráficos dos dois planos de internet simultaneamente no plano cartesiano. Desse modo, a comparação se daria de forma mais evidente ainda. Contudo, a atividade, conforme eu disse, é excelente**____

Questionário J

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Escola Municipal Barão de Itacurussá

b) Bibliografia adotada na escola:
Matemática – Edwaldo Bianchini

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Sim,utilizei o Software Graphmatica uma única vez para analisar algumas funções afins.

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?
Gráficos.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Sim.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Sim, indico alguns pares. Percebo que pouquíssimos alunos percebem o conceito de contínuo.

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Sim. Utilizei oGraphmatica. Acredito que o software aumenta a possibilidade de o aluno compreender o conceito de variável e contínuo.

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Apenas experiências de minha graduação e pesquisa.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
Não

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **Acho a reflexão complexa para o universo de alunos que trabalho**.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: $p_1,$ p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1,}\, d_{2.1,}\, d_{3.1}, d_{1.2,}\, d_{2.2,}\, d_{3.2}, d_{1.3,}\, d_{2.3,}\, d_{3.3}, d_{1.4,}\, d_{2.4,}\, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\, d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*
$A = \{ p_{1,}\, p_{2,}\, p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1,}\, d_{2.1,}\, d_{3.1}, d_{1.2,}\, d_{2.2,}\, d_{3.2}, d_{1.3,}\, d_{2.3,}\, d_{3.3}, d_{1.4,}\, d_{2.4,}\, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\, d_{2.10,}\, d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \, X \, B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade.
Eu utilizaria esta atividade pois acredito que as propostas de relação apresentadas são bons exemplos para se explorar a ideia de relação e função. Perceber que nem toda relação é uma função.Seria um bom exemplo para se iniciar a construção do conceito de função.

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade
Muito interessante. Ela permite a análise de como as funções variam, como elas crescem, a comparação das duas funções, a partir de quantos minutos um plano é mais vantajoso que o outro e outros aspectos relevantes.

Questionário K

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
C.E Círculo Operário (1º Ensino Médio)

b) Bibliografia adotada na escola**: Fundamentos da Matemática Elementar V.1 e Matemática Ciências e Aplicações – Gelson Iezzi, Osvaldo Dulce**

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? **Sim. Uso software como winplot. Graghmatica e agora estou usando um aplicativo para celular Grapher.**

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Acredito que não, pois quando você propõem exercícios motivadores fazendo essa diferenciação eles acabam entendendo.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Sim. No inicio é complicado para eles entender o porquê de fazer uma reta ligando dois pontos. Ai tem que mostrar que essa reta é justamente a representação de uma infinidade de pontos muito próximo um dos outros. Outra coisa que pode confundir a cabeça deles é quando você define o seu domínio como sendo um conjunto inteiro levando em inteiro, ai eu pergunto posso fazer uma reta aqui?

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Sim. Winplot, graphmatica, Grapher. Fica mais claro para eles fazendo o uso dessas ferramentas.

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Na minha opinião dos dois.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **Sim pois minimizaria as perguntas a as dúvidas sobre tal situação. Só uma observação: no 6º ano temos esse problema. Como poderíamos abordar melhor isso no 6º ano?_______**

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_{1,}\ p_2$ *e* p_3 *. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ *= digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*
$A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.
Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. ____
____
____
____
____
____
____

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade. **Essa atividade é muito boa. Agora essa atividade deve ser feita pelo professor projetando ou cada aluno faz o seu? Pois, se isso for feito em uma escola onde não há infra para isso acho que não fica legal. Mas pra mim é uma atividade muito rica, pois por trás dela tem uma coisa que muito não sabem, que a tomada de decisão. Eu sempre uso um exemplo desse e eles ficam assustados com o resultado. Olhando para o rosto deles dá para perceber que foram enganados.**________________

Questionário L

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Colégio de São Bento - Rio de Janeiro; 1ª série o Ensino Médio___________________

b) Bibliografia adotada na escola:
Conecte Matemática: ciência e aplicações - Volume 1 - Editora Saraiva_____________

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Sim; Listas de exercícios e Internet____

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?
Relação de correspondência única entre duas grandezas________________________

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Quando a diferença entre variável e incógnita é bem trabalhada no Ensino Fundamental II, a diferença entre equação e função não é problema._________________________

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Sim e sim. O trabalho com o conjunto dos números reais facilita essa passagem._______

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Ainda não.____

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Os dois e a experiência em sala de aula com as dificuldades apresentadas pelos alunos._

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante? ____________
____
____

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?
Não foi possível ver a atividade. Só aparece [Equação].__________________________

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* p_1, p_2 *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ *= digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$$

$$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \, X \, B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade.
Interessante, prática e objetiva. Trabalha com o concreto.________________________

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade.
Interessante, prática e já trabalha o operacional, com a visão da comparação gráfica e análise da tabela.____

Questionário M

a)Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: **Colégio de São Bento-RJ**

b) Bibliografia adotada na escola: **Coleção *Matemática: Ciência e Aplicações*.**

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Sim. Uso o software Winplot para traçar gráficos

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções?
Relação entre grandezas interdependentes, padronização, generalização.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Sim esse engano é comum. Há professores que fazem confusão e dizem que é a mesma coisa variável e incógnita. Penso que a dificuldade existente entre função e equação pode passar pela questão da notação ser parecida.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Costumo identificar. Sim. É lógico que essa observação deve ser ressaltada pelo professor e mostrada no gráfico, no momento de "ligar" um ponto ao outro.

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Resposta dada no item c) Acho e suma importância o uso de softwares em sala de aula.

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Utilizo experiências adquiridas em minha formação básica e em nível de Pós-Graduação.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
As aulas introdutórias do estudo de funções devem vir acompanhadas de vários exemplos aplicativos antes de entrar propriamente na definição.

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?

Não. Achei confuso para iniciar o conteúdo.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* p_1, p_2 *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$$

$$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \ X \ B$.
Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade.

A ideia é interessante, porém a representação das digitais ficou confusa pelo fato de conter dois índices. Será que o significado dos índices ficará claro para o aluno? Além disso o primeiro passo o aluno deverá escrever 30 pares ordenados?

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade.
Achei muito interessante. O aluno terá uma planilha comparativa, ademais dois gráficos que o possibilitará verificar qual é a proposta mais vantajosa.O excel permite organizar e manipular dados e tabelas e se tornou uma ferramenta muito utilizada.

Questionário N

a)Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
Colégio Estadual Amaro Cavalcanti (1ª série do Ensino Médio)___________________

b) Bibliografia adotada na escola: ____

c) Faz uso de algum material complementar? Qual?
Sim. Listas de exercícios extras.____

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? ____
____

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Pouquíssimos alunos compreendem essa diferença.____________________________

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Sim, para construirmos gráficos, montamos a tabela, na qual gera uma dificuldade de compreensão por parte do aluno.____

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Infelizmente não utilizei, devido à falta de espaço físico da escola. É de fato um instrumento importante e facilitador.______________________________________

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação?
Um pouco de cada, acrescentando algumas pesquisas em outros livros.______________

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?
Devemos utilizar um pouco de cada item mencionado anteriormente, além de buscar inovações em exemplos e tecnologia, de acordo com o nosso espaço físico.___________

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \rightarrow a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **Infelizmente não, pois os alunos não conseguem ter essa visão.**___________________

____
____
____

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_{1,}\ p_2$ *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = *digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*

$$A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$$

$$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}, d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}, d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}, d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}, \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A\ X\ B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade.
R: Interessante, porém muito complexa. O nosso aluno não perceberá tal relação.___

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade. **A proposta da atividade é muito interessante e facilitadora. Ao montarmos a tabela, induzimos à curiosidade dos alunos em saber qual desses planos seriam mais vantajoso para cada um deles, e paralelamente à isso, abordaremos vários item do conteúdo.**

Questionário O

a)Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: **Colégio Estadual Amaro Cavalcanti 1º e 2º ano do Ensino Médio e Escola Municipal Rodrigo Otávio – 9º ano Ensino Fundamental.**

b) Bibliografia adotada na escola: **Matemática – Manuel Paiva e Praticando Matemática- Álvaro Andrini**

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? **Folhas de exercícios que elaboro e Cadernos Pedagógicos SME**

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? **A necessidade de, através de situações do cotidiano dos alunos, mostrar aos alunos a variação de uma função, definindo bem os conceitos de variável dependente e independente.**

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação? **Certamente. No contexto escolar, os alunos apresentam muitas dificuldades no uso da linguagem matemática e no desenvolvimento do pensamento algébrico. Geralmente utilizam mecanicamente o processo de solução de uma equação e confundem a mesma com as funções.**

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno? **Não. Os alunos quando solicitados a identificar os pares ordenados no plano cartesiano, tendem a liga-los. Os alunos tem dificuldade em discernir quando devem apenas representar pares ordenados e quando devem fazer a representação gráfica de uma função.**

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo**? Sim, já utilizei o Geogebra em uma atividade em sala de aula para trabalhar a interpretação gráfica de uma função. Trata-se de um instrumento que facilita muito o entendimento desse conteúdo.**

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? **Acredito que utilize a experiência tanto da formação básica quanto da graduação, além de elementos adquiridos em palestras, seminários e cursos de aperfeiçoamento e capacitação.**

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante? **Acredito que para que se obtenha um bom desempenho dos alunos quanto ao estudo de funções, faz-se necessário que a definição e o uso da simbologia matemática sejam bem trabalhados para que posteriormente se trabalhe as funções de forma mais específica.**

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$*, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número* a *é o número que elevado ao quadrado é igual a* a*.*
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x)*. Note que, nesse caso, os pares* $(9,3)$ *e* $(9,-3)$ *satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo* a*, os pares* (a^2, a) *e* $(a^2, -a)$ *satisfazem à relação dada.*
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$*, temos apenas o par* (a^2, a) *satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação* $a^2 \to a$*, ou ainda* $a \geq 0$, $f(a^2) = a$*.*

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções? **Apesar da discussão proposta ser extremamente interessante, os alunos apresentam alguns bloqueios quando precisam usar radicais e/ou calcular raízes, sendo assim, tal motivação poderia comprometer o entendimento do conceito de função por parte do aluno.______**

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A *e* B*. O conjunto* A *formado por três pessoas que serão representadas por:* $p_{1,}\ p_2$ *e* p_3*. O conjunto* B *formado pelas* 30 *impressões digitais das três pessoas do conjunto* A*.*
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}\ , d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}\ , d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}\ , d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}\ , \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10}$ *e* $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ *= digital* 1 *da pessoa* p_3 *) :*
$A = \{ p_{1,}\ p_{2,}\ p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1,}\ d_{2.1,}\ d_{3.1}\ , d_{1.2,}\ d_{2.2,}\ d_{3.2}\ , d_{1.3,}\ d_{2.3,}\ d_{3.3}\ , d_{1.4,}\ d_{2.4,}\ d_{3.4}\ , \ldots, d_{1.10,}\ d_{2.10,}\ d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \; X \; B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*
Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. **A atividade é muito interessante, porém a utilização de letras e índices, e não de números pode ser um complicador para os alunos, especialmente os do Ensino Fundamental.Geralmente, utilizo como motivação, situações do cotidiano que, inicialmente são discutidas em sala de aula, num segundo passo, são representadas em tabelas e posteriormente é desenvolvido o conceito de função, sua lei de formação etc.**

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.
Sua opinião sobre a atividade. **A atividade é muito interessante, e pode levar os alunos através das propostas feitas pelo professor, a construir o conceito de função.No meu caso, especificamente, utilizar tal atividade, teria como complicador, a necessidade de um laboratório de informática, aonde a atividade fosse realizada. (As duas escolas em que trabalham não possuem laboratório de informática em condições de uso e/ou o quantitativo de máquinas é insuficiente para a quantidade de alunos por turma._______**

Questionário P

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: CEI e CEVG (colégio estadual) / EM.

b) Bibliografia adotada na escola: Matemática (contexto e Aplicações) Dante / Novo olhar matemática - Joamir Souza

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? Jornais, revistas, sites, parcerias com outras disciplinas.

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? gráficos

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação? No início sim, mas apresentando vários exemplos, acho que se torna mais tranquilo.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno? Apesar da dificuldade da linguagem, a partir de alguns exemplos a compreensão é mais fácil.

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo? Mathlab interessante para ver crescimento, decrescimento e variação do estudo do sinal

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? A formação básica foi muito importante

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?

como um dos exemplos sim.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: $p_1,$ p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \dots, d_{1.10}, d_{2.10}$ e $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) :
$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \dots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \; X \; B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. Bem interessante. Acho muito importante não ficar só em exemplos numéricos. Situações do cotidiano ajuda bastante o aluno, além de despertar o interesse de alguns deles.

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1° grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R\$35,00 + tarifa de R\$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R\$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. Boa, pois o aluno de hoje se interessa bastante por tecnologia. E conseguindo juntar a tecnologia com o conteúdo na minha opinião ajuda no interesse da grande maioria dos alunos que a princípio não mostrava nenhuma ~~interesse~~ curiosidade

Questionário Q

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: Escola Municipal Francis Hime, 9º ANO.

b) Bibliografia adotada na escola: LUIZ ROBERTO DANTE

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? SIM. MATERIAL DE USO PRÓPRIO COM SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELABORADA POR MIM. USO PROGRAMAS COMO GAPHMAT

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA, SUA INTERPRETAÇÃO, SUA IMPORTÂNCIA PARA CONCLUIR COISAS E PARA TOMADAS DE DECISÕES.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
SIM. PARA O ALUNO FICA MAIS FÁCIL DIFERENCIAR QUANDO O ENSINO É FEITO DESSA FORMA.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
DEPENDE DO GRUPO. O USO DE PROGRAMAS QUE CONSTROEM GRÁFICOS, ENRIQUECEM A DISCUSSÃO SOBRE OUTROS PONTOS MAIS IMPORTANTES DO QUE MARCAR PONTOS EM UM PLANO.

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo? SIM. JÁ RELATEI SOBRE TAL IMPORTÂNCIA. SOFTWARES: GRAPH, WINPLOT, GEOGEBRA, GRAPES

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? DE NENHUM DOS DOIS. DA PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA FEITA NA PUC E DA NECESSIDADE DE CONSTRUIR UMA MATEMÁTICA QUE FAÇA SENTIDO PARA OS ALUNOS.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual à a.

Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.

No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?

NÃO. GOSTO DE INTRODUZIR A PARTIR DE SEQUÊNCIAS E GENERALIZAÇÕES DE FIGURAS OU NÚMEROS PARA A PARTIR DE UMA LEI, VERIFICARMOS QUE ESTABELECEMOS RELAÇÕES ENTRE DUAS GRANDEZAS.

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: p_1, p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.

As impressões digitais serão representadas por:

$d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{12}, d_{22}, d_{32}, d_{13}, d_{23}, d_{33}, d_{14}, d_{24}, d_{34}, \ldots, d_{1\,10}, d_{2\,10}$ e $d_{3\,10}$

(o primeiro índice representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital. ex: d_{31} – digital 1 da pessoa p_3):

$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$

$B = \{ d_{11}, d_{21}, d_{31}, d_{12}, d_{22}, d_{32}, d_{13}, d_{23}, d_{33}, d_{14}, d_{24}, d_{34}, \ldots, d_{1\,10}, d_{2\,10}, d_{3\,10} \}$

Passo 2: Definir a Relação **pessoa X digital**, *exibindo todos os pares ordenados [illegible]*
(pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.
Passo 3: Definir a Relação **digital X pessoa** *exibindo todos os pares ordenados da forma*
(digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função
Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir)

Sua opinião sobre a atividade. TEM SEU VALOR, MAS NÃO UTILIZARIA, FICA MUITO PRESO A PROPRIEDADES QUE TERÃO SUA RELEVÂNCIA EM OUTRO MOMENTO OPORTUNO, NÃO NA INTRODUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO.

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1º grau

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:
Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta
Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,05 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B
Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos
Passo 3: Solicitar a análise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. ESSA SIM É UMA ATIVIDADE PERTINENTE A INTRODUCAO DO CONCEITO DE FUNÇÕES. VARIOS PONTOS PODERÃO SER ABORDADOS, A RELAÇÃO DA FUNÇÃO COM A PROPORCIONALIDADE, A IMPORTÂNCIA DA ANALISE GRAFICA COMO FACILITADOR DE ALGUNS QUESTIONAMENTOS E TOMADAS DE DECISÕES.
ESSA É A LINHA QUE ACREDITO E QUE FAÇO COM

Questionário R

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: CIEP 121 - PROFº Joadélio Cadeço - 9º ano

b) Bibliografia adotada na escola: MATEMÁTICA TEORIA E CONTEXTO - 9º ano MARÍLIA CENTURIÓN E JOSÉ JAKUBOVIC

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? SIM, GOSTO MUITO DOS LIVROS ÁLVARO ANDRINI - PRATICANDO MATEMÁTICA.

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? O gráfico de uma reta.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação? Sim, eles tem bastante dificuldade com tudo que envolve letras

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno? Sim, utilizo alguns pares ordenados. Não, eles não compreendem essa passagem

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo? Sim, utilizo o WINPLOT. Ele facilita a visualização.

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? Utilizo experiências de ambas. Contudo, acredito que a formação básica tem mais influência.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante? NÃO.

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?

NA PRIMEIRA AULA SOBRE FUNÇÕES NÃO, MAS DEPOIS QUE ELES COMPREENDESEM QUE FUNÇÃO É UMA RELAÇÃO ENTRE OS ELEMENTOS DE DOIS CONJUNTOS, SIM.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: p_1, p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ e $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) :
$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$
$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \times B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. BOA, EU UTILIZARIA!

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1° grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. ÓTIMA, É MUITO BOM QUANDO CONSEGUIMOS PROBLEMAS DO COTIDIANO DOS ALUNOS, ISSO OS MOTIVA.

Questionário S

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções: Centro Educacional Metropolitano Cristão - 1º ano

b) Bibliografia adotada na escola: Coleção Pitágoras

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? Sim. Matemática Contexto e Aplicações - Volume único - Dante

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? Modelar funções através de problemas e gráficos.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação? Sim. Principalmente função e equação, pois acham que é tudo a mesma coisa!

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno? Sim, acredito ser importante a construção de pares ordenados para montar o gráfico. Nunca percebi grandes dificuldades nessa passagem.

f)) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? Com certeza utilizo elementos da formação básica.

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$ ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?

Acho que não usaria, não combina muito com o público que trabalho.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: p_1, p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ e $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) :

$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$

$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto $A \times B$.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. A ideia é boa, mas a notação utilizada pode confundir um pouco a cabeça deles.

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1° grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R\$35,00 + tarifa de R\$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R\$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais vantajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. Acho essa atividade perfeita! Trabalha a realidade dos alunos e aborda uma importante utilização da função afim. Além disso, o jovem pode utilizar a idéia na sua própria casa, com a família, e decidir as melhores opções.

Questionário T

a) Escola e séries que leciona o conteúdo de Funções:
9º ano / Escola da rede municipal.

b) Bibliografia adotada na escola:

c) Faz uso de algum material complementar? Qual? Sim.
Apostilas / Resumos próprios / Internet

d) Qual a primeira imagem que lhe vem à mente quando questionado sobre o conteúdo de funções? Gráficos.

e) No contexto escolar, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, acredita que o aluno tenha dificuldades em discernir a diferença entre variável e incógnita, função e equação?
Sim. Pois no 1º momento, o aluno costuma achar que a função deve ter uma "resposta fixa" como na equação.

e) Para construir o gráfico de uma função, costuma identificar alguns pares ordenados em tabela? Acredita que a passagem do discreto ao contínuo é compreendida pelo aluno?
Sim. Acho que dessa maneira o aluno consegue construir um gráfico mais exato e compreende o porquê do gráfico ser de uma forma ou de outra, dependendo da função.

f) Utiliza ou já utilizou algum software matemático na abordagem do conteúdo de funções? Em caso afirmativo, qual ou quais softwares? Você considera este um instrumento importante para o entendimento desde conteúdo?
Já aprendi a usar um software (Maple?) no início da minha graduação. Mas nunca o utilizei em sala de aula, apesar de achar que facilitaria a compreensão deste conteúdo. *

g) Ao aplicar este conteúdo em sala de aula, você acredita utilizar experiências adquiridas no período de sua formação básica ou apenas elementos retirados da sua graduação? Utilizo muito a experiência adquirida na minha formação básica, pois eu me baseio na forma como eu aprendi e como eu acho mais *

h) Gostaria de acrescentar mais alguma observação que considera importante?

*f) Não o utilizei por falta de recursos e tempo.
*g) fácil que o aluno entenda, para planejar

i) A seguir apresentamos uma proposta de motivação para a apresentação do tópico função e duas atividades relacionadas com esse conteúdo. Gostaríamos de saber sua opinião sobre cada uma delas, através de críticas e sugestões, assim como se você as usaria em suas aulas ao trabalhar o conteúdo em questão.

Motivação

Muitos alunos, e até alguns professores, se confundem quando questionados sobre o valor de $\sqrt{9}$, afirmando que pode ser 3 ou -3. Acreditamos que tal confusão venha da definição errada de que a raiz quadrada de um número a é o número que elevado ao quadrado é igual a a.
Se analisarmos bem essa "definição" percebemos que se trata de uma relação da forma (x^2, x). Note que, nesse caso, os pares $(9,3)$ e $(9,-3)$ satisfazem a essa relação. De modo geral, qualquer que seja o número real positivo a, os pares (a^2, a) e $(a^2, -a)$ satisfazem à relação dada.
No entanto, se considerarmos essa relação apenas entre números positivos, observamos que, para cada $a > 0$, temos apenas o par (a^2, a) satisfazendo essa condição. Nesse caso, a relação é dita uma função e é interessante utilizarmos a notação $a^2 \to a$, ou ainda $a \geq 0$, $f(a^2) = a$.

Professor, você usaria esta motivação em sala de aula ao introduzir o conteúdo de funções?

Acho válida, mas não usaria.
Costumo introduzir este conteúdo mostrando diferentes gráficos. E depois mostro a parte teórica para que eles, sozinhos, possam construir estes gráficos.

Atividades propostas

1. Nesta atividade, sugerimos trabalhar a ideia de função em uma situação que não envolva números.

Defina dois conjuntos, A e B. O conjunto A formado por três pessoas que serão representadas por: p_1, p_2 e p_3. O conjunto B formado pelas 30 impressões digitais das três pessoas do conjunto A.
As impressões digitais serão representadas por:
$d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}$ e $d_{3.10}$
(o primeiro incide representa a pessoa e o segundo índice o número da impressão digital – ex.: $d_{3.1}$ = digital 1 da pessoa p_3) :

$A = \{ p_1, p_2, p_3 \}$

$B = \{ d_{1.1}, d_{2.1}, d_{3.1}, d_{1.2}, d_{2.2}, d_{3.2}, d_{1.3}, d_{2.3}, d_{3.3}, d_{1.4}, d_{2.4}, d_{3.4}, \ldots, d_{1.10}, d_{2.10}, d_{3.10} \}$

Passo1: Solicitar que os alunos identifiquem o conjunto A X B.

Passo 2: Definir a Relação: ***pessoa X digital****, exibindo todos os pares ordenados da forma (pessoa , digital) e perguntar aos alunos se isso define função.*

Passo 3: Definir a Relação: ***digital X pessoa*** *exibindo todos os pares ordenados da forma (digital , pessoa) e perguntar aos alunos se isso define função*

Passo 4: Perguntar qual é a diferença entre as situações anteriores (eles devem observar que o primeiro elemento do par ordenado não deve se repetir).

Sua opinião sobre a atividade. Acho que os alunos iriam ficar um pouco confusos com esta atividade, pelo fato das digitais (letra d) só se diferenciarem pelo nº dos índices. Eu preferiria colocar nomes ao invés de usar letras, se eu tivesse que propor uma situação de função sem números.

2. Nesta atividade, utilizamos o Excel como ferramenta para o estudo de funções do 1° grau.

Uma companhia de telefonia móvel oferece dois tipos de contratos, conforme as propostas a seguir:

Plano A: assinatura mensal de R$35,00 + tarifa de R$0,35 por minuto + internet isenta

Plano B: assinatura mensal isenta + tarifa de R$1,65 por minuto + internet isenta

Passo 1: Construir no Excel as planilhas correspondentes aos planos A e B

Passo 2: Ainda no Excel, a partir das planilhas do item anterior, construir os gráficos

Passo 3: Solicitar a analise dos gráficos e planilhas a partir das questões abaixo:

- ✓ *Em ambos os planos, a quantia a pagar mensalmente é em função do tempo utilizado nas ligações?*
- ✓ *Em qual dos dois planos, o preço a pagar é proporcional ao tempo usado nas ligações?*
- ✓ *Para os primeiros minutos de uso do telefone, qual o plano mais interessante?*
- ✓ *Qual deverá ser o plano escolhido para quem realiza, por mês, menos de 25 minutos de ligações?*
- ✓ *Após quanto tempo de ligações, o plano A passa a ser mais atrativo?*
- ✓ *Qual das propostas é mais v...tajosa para seu uso?*

Professor, na próxima página você pode observar uma sugestão para solução dos Passos 1 e 2 desta atividade.

Sua opinião sobre a atividade. Adorei a atividade! Pois envolve uma situação do dia-a-dia do aluno, é de fácil entendimento e ao final da construção do gráfico e da tabela o aluno será capaz de responder a todas as perguntas feitas de forma rápida e poderá, também, levar essa "experiência" para a sua vida diária.