UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

IBILCE

Matheus Pierry Banhato

Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas

São José do Rio Preto
2015

Matheus Pierry Banhato

Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto
2015

Banhato, Matheus Pierry.
Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas / Matheus Pierry Banhato. -- São José do Rio Preto, 2015
100 f. : il.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 3. Matemática – Metodologia. I. Buzzi, Claudio Aguinaldo. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.5(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Matheus Pierry Banhato

Máximos e mínimos com proposta de aplicação para funções quadráticas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Profissional em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Tiago de Carvalho
UNESP – Bauru

São José do Rio Preto
28 de agosto de 2015

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, saúde, paz, família, amigos e a oportunidade de conviver com pessoas fundamentais na minha vida e existência.

À minha familia, em especial aos meus pais pelo suporte, confiança e carinho em todos os momentos, pois foram fundamentais na formação do meu caráter e princípios que sigo.

Aos amigos que tive a oportunidade de conviver durante todo o PROFMAT, entre eles, Evandro, Franciéli, Natania e Viviane, pois juntos passamos momentos que muito nos alegraram e nossa união foi fundamental para nosso sucesso e aprovação em todas disciplinas.

Aos amigos que me deram forças nos momentos difíceis e que juntos compartilhamos momentos de muita alegria.

Ao Prof^{o} Dr^{o} Claudio Aguinaldo Buzzi pelo aceite à proposta deste trabalho, pela disponibilidade para nossas reuniões, apoio, sugestões, correções, explicações, motivação, imensa paciência e pelo profissionalismo.

À equipe de professores do PROFMAT, pólo São José do Rio Preto, pela compreensão, profissionalismo, justiça e ajuda ao longo do curso.

Ao Grupo de Supervisão Educacional da Região de São José do Rio Preto (Centro Paula Souza) pela imensa compreensão e pelo suporte para que eu pudesse cursar todas as disciplinas.

Em derradeiro, agradeço ao Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz e ao Prof. Dr. Tiago de Carvalho por aceitarem ao convite para participar da Comissão Examinadora de defesa do presente trabalho e pelas sugestões que enriqueceram a versão final.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar os máximos e mínimos de funções de uma e de duas variáveis reais, bem como apresentar uma proposta para estudo dos pontos extremos de funções quadráticas no Ensino Médio. Para tanto, estudamos a existência de valores máximos e mínimos de funções contínuas, culminando na demonstração do Teorema de Weierstrass. Posteriormente, fazemos um estudo detalhado para funções deriváveis, evidenciando resultados conhecidos, como os Testes de Derivadas e, exemplificando tais resultados através de exemplos de aplicação direta e problemas clássicos voltados para otimização. Por fim, propomos material para o estudo dos máximos e mínimos de funções quadráticas, visando o trabalho com vértice de parábolas e fixação do conteúdo através de diversas situações problemas que tendem a chamar atenção dos alunos pelo fato de não serem totalmente abstratas.

PALAVRAS-CHAVE: Máximos e mínimos, funções contínuas, funções deriváveis, funções quadráticas.

Abstract

This work aims to study the maximum and the minimum for functions of one and two real variables, as well as submit a proposal to study the extreme points of quadratic functions in high school. Therefore, we study the existence of maximum and minimum values of continuous functions, culminating with the proof of Weierstrass Theorem. Later on, we perform a detailed study for derivable functions, showing results known as the Derived Test and exemplifying such Examples of results through direct application and classical problems in optimization. Finally, we propose materials for studying the maximum and minimum of quadratic functions, aimed parabolas working with vertex and determining their content via various problem situations that tend to draw students' attention by not being totally abstract.

KEYWORDS: Maximum and minimum, continuous functions, derivable functions, quadratic functions.

Sumário

Introdução

Os conceitos de valor máximo e de valor mínimo de funções são fundamentais em diversas áreas: na indústria busca-se sempre otimizar valores e aproveitar materiais, possibilitando diminuir tempo e custo de produção, obtendo maiores lucros com menos esforço; em balística calcula-se a altura máxima e a distância que deverá atingir um projétil; nas Ciências Atuariais determina-se o preço mínimo que deve ter uma apólice de seguros, etc. Sendo assim, estudaremos esses conceitos de modo que tenhamos base para aplicar em diversos segmentos, modelando problemas através do conhecimento de geometria, trigonometria, raciocínio lógico, álgebra e também de conceitos da física. Todos esses problemas, após modelados, se resumem a problemas numéricos, facilitando suas resoluções.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 enunciaremos alguns conceitos e resultados pertinentes para nosso estudo; no Capítulo 2 o foco será a demonstração do Teorema de Weierstrass, resultado que garante a existência de valores máximos e mínimos de funções contínuas de uma e também de duas variáveis reais definidas em domínio compacto; já no Capítulo 3, apresentaremos o estudo de máximos e mínimos em funções deriváveis, sendo elas de uma ou de duas variáveis reais, cujo desenvolvimento do conteúdo será detalhado por diversos resultados importantes, suas respectivas demonstrações e problemas de aplicação direta ou de otimização para exemplificar; o Capítulo 4 tem como objetivo elaborar uma proposta de aplicação do conceito de máximos e mínimos de funções quadráticas para a 1ª série do Ensino Médio e, para tanto, apresentaremos o conteúdo teórico necessário e proporemos diversos problemas e suas respectivas resoluções para que o professor trabalhe em sala de aula com seus alunos.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares para o Estudo de Máximos e Mínimos

O estudo de máximos e mínimos de funções reais abrange diversos resultados importantes do Cálculo Diferencial, da Análise Real e também da Otimização. Diante disto, neste capítulo apresentaremos os resultados que citaremos ao longo do trabalho e indicaremos a referência bibliográfica onde o leitor encontrará as respectivas demonstrações de forma detalhada.

Para iniciarmos, apresentamos uma definição de suma importância para o nosso estudo, principalmente no desenvolvimento do Capítulo 2.

Definição 1.1. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Diz-se que f é **contínua no ponto** $a \in A$ quando, $\forall\, \varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in A$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Resumindo, f contínua no ponto a significa:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ x \in A,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

A seguir, apresentamos três resultados utilizados para a demonstração do Teorema 3.1.

Na página 82 da referência [5] encontram-se as definições de **Limites Laterais** que seguem.

Definição 1.2. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $p \in \mathbb{R}$ e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D_f$, onde D_f é o domínio de f. Definimos:*

(i) $\lim_{x \to p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ *tal que* $p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à direita de f em p.

(ii) $\lim_{x \to p^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ *tal que* $p - \delta < x < p \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

O número L, quando existe, denomina-se limite lateral à esquerda de f em p.

Na página 137 da referência [5] encontra-se a definição de **Função Derivável** conforme segue.

Definição 1.3. *Sejam $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D_f$. O limite*

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right)$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia-se f linha de p). Assim,

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right).$$

*Se f admite derivada em p, então diz-se que f é **derivável** ou **diferenciável** em p.*

Já na página 79 da referência [5] há um exemplo com sua respectiva solução e o apresentaremos aqui como **Teorema da Conservação do Sinal do Limite**, como segue.

Teorema 1.1. *Se $\lim_{x \to p} f(x) = L$, onde $L > 0$, então existe $\delta > 0$, tal que, $\forall\, x \in D_f$,*

$$p - \delta < x < p + \delta, x \neq p \Rightarrow f(x) > 0.$$

A seguir segue o **Teorema da Unicidade do Limite** que é fundamental para a conclusão do Lema 2.3 e sua demonstração pode ser encontrada na página 24 da referência [9].

Teorema 1.2. *Uma sequência de números reais não pode convergir para dois limites distintos.*

Continuando, apresentaremos um teorema trazido na página 152 da referência [5] que relaciona funções contínuas e funções deriváveis, permitindo que os Capítulos 2 e 3 estejam interligados.

Teorema 1.3. *Sejam $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in K$ um número real. Se f for derivável em p, então f é contínua em p.*

Vale ressaltar que a recíproca deste teorema não é válida. Assim, derivabilidade implica continuidade, mas continuidade não implica derivabilidade.

Prosseguindo, para a demonstração da Proposição 3.2 apresentaremos o **Teorema do Valor Médio**, cuja demonstração pode ser apreciada na página 225 da referência [5].

Teorema 1.4. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \;\; ou \; f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como consequência do Teorema do Valor Médio e utilização da definição de Função Derivável, temos o teorema a seguir, cuja demonstração é encontrada na página 226 da referência [5] e também ajuda na demonstração da Proposição 3.1.

Teorema 1.5. *Seja f derivável no intervalo I.*

(i) Se $f'(x) > 0$, $\forall\, x$ interior a I, então f será estritamente crescente em I.

(ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall\, x$ interior a I, então f será estritamente decrescente em I.

Para a demonstração da Proposição 3.4 faz-se necessário apresentar o teorema abaixo, também conhecido como **Fórmula de Taylor Infinitesimal** e encontrado na página 103 da referência [9].

Teorema 1.6. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. A função $r : J \to \mathbb{R}$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R}; \, a + h \in I\}$ pela igualdade*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + r(h),$$

cumpre $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$. *Reciprocamente, se* $p(h)$ *é um polinômio de grau* $\leq n$ *tal que* $r(h) = f(a+h) - p(h)$ *cumpre* $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$, *então* $p(h)$ *é o Polinômio de Taylor de ordem* n *de* f *no ponto* a, *isto é,*

$$p(h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot h^i.$$

Um resultado bastante importante é a Regra da Cadeia. A versão vetorial da Regra da Cadeia para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ é encontrada na página 212 da referência [6] e ajudará nas demonstrações dos Teoremas 3.3 e 3.5.

Teorema 1.7. *Sejam* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *uma função definida num aberto* U *do* $\mathbb{R}^2$ *e* $\gamma(t)$ *uma curva definida num intervalo* I, *tal que* $\gamma(t) \in D_f$, $\forall\, t \in I$. *Se* f *e* γ *forem diferenciáveis, então a composta* $F(t) = f(\gamma(t))$ *será também diferenciável e vale a Regra da Cadeia*

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

onde $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ *é o produto escalar dos vetores* $\nabla f(\gamma(t))$ *e* $\gamma'(t)$.

Finalizando o capítulo, apresentaremos a **Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange de Ordem 2**, utilizada para a demonstração do Teorema 3.5 e encontrada na página 300 da referência [6].

Teorema 1.8. *Seja* $f(x,y)$ *de classe* C^2 *no aberto* $A \subset \mathbb{R}^2$ *e sejam* $(x_0, y_0) \in A$ *e* $(h,k) \neq (0,0)$ *tais que o segmento de extremidades* (x_0,y_0) *e* (x_0+h, y_0+k) *esteja contido em* A. *Nestas condições,*

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + E(h,k),$$

onde

$$E(h,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x},\overline{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x},\overline{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x},\overline{y})k^2\right],$$

para algum $(\overline{x},\overline{y})$ *interno ao segmento de extremidades* (x_0,y_0) *e* (x_0+h, y_0+k).

Capítulo 2

Máximos e Mínimos de Funções Contínuas

Muitos problemas em matemática e nas suas aplicações consistem em encontrar pontos de um conjunto A nos quais a função real $f : A \to \mathbb{R}$ assume seu valor máximo ou seu valor mínimo. Antes de se empenhar em resolver problemas desse tipo, é de suma importância saber se realmente esses pontos existem. Há algumas possibilidades a considerar, pois a função pode ser ilimitada superiormente e, consequentemente, não possuir valor máximo ou pode ser ilimitada inferiormente, o que implica em não possuir valor mínimo. Entretanto, será que o fato de considerarmos uma função limitada (superior ou inferiormente) nos garante a existência de valor máximo ou mínimo? A resposta é não, pois mesmo limitada, a função pode não assumir valor máximo e nem mínimo em A, ou também, nenhum dos dois.

No desenvolvimento do capítulo apresentaremos conceitos que nos permitirão assegurar a existência de valores máximos e mínimos de funções contínuas de uma ou duas variáveis reais quando possuem domínio compacto. Este resultado é conhecido como Teorema de Weierstrass e sua demonstração será feita mais adiante tanto para uma variável real, quanto para duas.

2.1 Existência de Valores Máximos e Mínimos de Funções Contínuas de Uma Variável Real

O objetivo principal desta seção é apresentar resultados importantes que nos levarão à construção da demonstração do Teorema de Weierstrass para funções contínuas de uma variável real. Para tanto, inicialmente trabalharemos com algumas definições e teoremas, tal demonstração será feita ao fim.

Definição 2.1. *Uma* ***sequência*** *de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural n um número real x_n, chamado n-ésimo termo da sequência. As notações para uma sequência são $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n).*

Uma sequência (x_n) diz-se **limitada superiormente** (respectivamente **inferiormente**) quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$), $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a sequência (x_n) é **limitada** quando ela é limitada superior e inferiormente. Isto equivale a dizer que

$$\exists\, k > 0\colon\ |x_n| \leq k,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma **subsequência** de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. As notações para uma subsequência são $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$, $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. A notação $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mostra como uma subsequência pode ser considerada como uma sequência, isto é, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}$.

Definição 2.2. *Dada uma sequência (x_n),*

(i) diz-se que (x_n) ***converge*** *ao ponto $a \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se $x_n \to a$;*

(ii) diz-se que o número real a é ***limite*** *de (x_n) se, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ satisfazem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então $a = \lim x_n$.*

Definição 2.3. *Diz-se que um ponto a é **aderente** ao conjunto $A \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $(x_n) \in A$. Evidentemente, todo ponto $a \in A$ é aderente a A, bastando tomar todos os $x_n = a$.*

Chama-se **fecho** de um conjunto A ao conjunto $\overline{A}$ formado por todos os pontos aderentes a A. Tem-se $A \subset \overline{A}$. Se $A \subset B$ então $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Definição 2.4. *Um conjunto F diz-se **fechado** quando todo ponto aderente a F pertence a F, isto é, $F = \overline{F}$.*

Definição 2.5. *Dado um conjunto $L \subset \mathbb{R}$, diz-se que:*

(i) *L é **limitado superiormente** quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b, \forall\, x \in L$. Neste caso, diz-se que b é uma **cota superior** de L;*

(ii) *L é **limitado inferiormente** quando existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x, \forall\, x \in L$. Neste caso, diz-se que a é uma **cota inferior** de L;*

(iii) *L é um **conjunto limitado** quando é limitado superior e inferiormente. Isto significa que L está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $l > 0$ tal que $x \in L \Rightarrow |x| \leq l$.*

Caso o conjunto não seja limitado (ou também limitado superior ou inferiormente), diz-se que é um conjunto **ilimitado** (ou também ilimitado superior ou inferiormente).

Definição 2.6. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ chama-se **compacto** quando é limitado e fechado.*

Consequentemente, todo conjunto finito é compacto. Um intervalo do tipo $[a, b]$ é um conjunto compacto. Por outro lado, $]a, b[$ é limitado, mas não é fechado, e, portanto, também não é compacto.

Agora, munidos da definição 1.1, provaremos o resultado que segue.

Lema 2.1. *Sejam $f : K \to \mathbb{R}$ um função contínua e (x_n) uma sequência em K. Se $x_n \to a$, então $f(x_n) \to f(a)$, $\forall\, a \in K$.*

Demonstração: Por hipótese, a função é contínua e $x_n \to a$, ou seja, a sequência (x_n) converge para a. Assim,

(i) pela Definição 1.1, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$; $x \in K$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$;

(ii) pelo item (i) da Definição 2.2, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, usando a hipótese (i),

$$\exists \delta > 0;\ x \in K \text{ e } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Para o δ encontrado, usamos a hipótese (ii) com δ no papel do ε e obteremos

$$n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta. \tag{2.2}$$

Logo, aplicando primeiro (2.2) e depois (2.1), temos

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow x_n \in K \text{ e } |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Portanto, se $x_n \to a$, tem-se $f(x_n) \to f(a)$, $\forall a \in K$.

∎

Antes de enunciarmos outro resultado importante, definamos supremo e ínfimo de números reais.

Definição 2.7. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e não vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se* ***supremo*** *do conjunto K e escreve-se $b = sup\, K$, quando é a menor das cotas superiores de K. Analogamente, se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado inferiormente e não vazio, um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se* ***ínfimo*** *do conjunto K e escreve-se $a = inf\, K$ quando é a maior das cotas inferiores de K.*

Podemos aprofundar um pouco mais nestas definições. De fato, $b = sup\, K$ quando cumpre as duas condições:

(S1) $\forall x \in K$, tem-se $x \leq b$;

(S2) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$, $\forall x \in K$, então $b \leq c$.

A condição S2 admite a seguinte reformulação: (S2') Se $c < b$, então $\exists\, x \in K$ com $c < x$. Assim, S2' evidencia que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de K. Às vezes se exprime S2' da seguinte forma: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x \in K$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Analogamente, $a = inf\, K$ quando cumpre as duas condições:

(I1) $\forall\, x \in K$, tem-se $a \leq x$;

(I2) Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq x$, $\forall\, x \in K$, então $c \leq a$.

A condição I2 pode ser reformulada da seguinte forma: (I2') Se $a < c$, então $\exists\, x \in K$ com $x < c$. Assim, I2' diz que nenhum número real maior do que a pode ser cota inferior de K. Equivalentemente: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x \in K$ tal que $x < a + \varepsilon$.

A seguir enunciaremos uma propriedade do supremo de um subconjunto dos números reais, a qual é conhecida como **Axioma do Supremo**.

Axioma 2.1. *Todo conjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.*

Para prosseguirmos, apresentaremos a definição de sequência monótona, fundamental para demonstrarmos os resultados que veremos em breve.

Definição 2.8. *Diz-se que uma sequência (x_n) é **monótona** quando $x_n \leq x_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$ ou então, $x_{n+1} \leq x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Complementando, no primeiro caso, diz-se que (x_n) é **monótona não decrescente** e, no segundo, que (x_n) é **monótona não crescente**. Se, mais precisamente, tivermos $x_n < x_{n+1}$ (respectivamente, $x_n > x_{n+1}$), $\forall\, n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é **crescente** (respectivamente, **decrescente**).

Toda sequência monótona não crescente (respectivamente, não decrescente) é limitada superiormente (respectivamente, inferiormente) pelo seu primeiro termo. A fim de que ela seja limitada é suficiente que possua uma subsequência limitada. Desta forma, seja $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}'}$ uma subsequência limitada da sequência monótona (digamos não decrescente)

(x_n). Temos $x_{n'} \leq c, \forall\, n' \in \mathbb{N}'$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, n' \in \mathbb{N}'$ tal que $n < n'$. Então, $x_n \leq x_{n'} \leq c$.

O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para que uma sequência convirja. Através da tentativa de demonstrá-lo ao preparar suas aulas, que o matemático alemão R. Dedekind percebeu a necessidade de uma conceituação precisa de número real, na metade do século XIX.

Teorema 2.1. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: Tomemos uma sequência (x_n) monótona não decrescente e limitada. Sejam $K = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ e $a = sup\, K$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de K. Logo, pela condição S2' do complemento da definição de supremo e ínfimo de um conjunto, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim,

$$n_0 < n \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

e, pelo item (i) da Definição 2.2, (x_n) converge ao ponto a. Logo, $\lim x_n = a$.

Analogamente, se tomarmos uma sequência (x_n) monótona não crescente e limitada, então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores x_n.

∎

Através do teorema anterior, demonstra-se o corolário seguinte, também conhecido como **Teorema de Bolzano-Weierstrass**.

Corolário 2.1. *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.1, basta mostrar que toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Antes de mais nada, diz-se que um termo x_n da sequência dada é **destacado** quando $x_n \geq x_p, \forall\, p > n$.

Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Temos duas possibilidades para D: ser um conjunto infinito ou um conjunto finito. Se D for um conjunto infinito, ou seja, $D = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$, então a subsequência

$(x_n)_{n \in D}$ será monótona não-crescente. Entretanto, se D for finito, tomemos $n_1 \in \mathbb{N}$ como um índice maior de todos os $n \in D$, então x_{n_1} não é destacado, visto que $\nexists\, n \in D$ tal que $n > n_1 \Rightarrow x_{n_1} \geq x_n$. Logo, $\exists\, n_2 > n_1$ com $x_{n_2} > x_{n_1}$. Além disso, x_{n_2} não é destacado, evidenciando que $\exists\, n_3 > n_2$ com $x_{n_3} > x_{n_2} > x_{n_1}$. Procedendo da mesma forma, obtemos uma subsequência crescente $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$.

Portanto, sempre conseguimos uma subsequência monótona.

∎

A seguir apresentaremos dois lemas e suas respectivas demonstrações serão desenvolvidas com base nos resultados vistos até aqui. Estes lemas, após demonstrados, formarão um único resultado, o qual será apresentado como teorema.

Lema 2.2. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $K \subset \mathbb{R}$. Se K é um conjunto compacto e f é contínua, então $f(K)$ é um conjunto limitado.*

Demonstração: Suponhamos que $f(K)$ seja um conjunto ilimitado. Assim,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, y_n \in f(K);\ |y_n| > n. \tag{2.3}$$

Como $y_n \in f(K)$, então

$$\forall\, n,\ \exists\, x_n \in K;\ f(x_n) = y_n.$$

Assim, (x_n) é uma sequência em K, com K compacto. Daí, (x_n) é limitada.

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{n_j}) convergente a algum ponto a, ou seja, $x_{n_j} \to a$. Como K também é fechado, temos que $a \in K$.

Disto segue que $f(x_{n_j}) \to f(a) \Rightarrow y_{n_j} \to f(a)$, o que contradiz (2.3), pelo fato de y_{n_j} não convergir para nenhum ponto.

Portanto, se K é compacto e f é contínua, então $f(K)$ é limitado.

∎

Lema 2.3. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $K \subset \mathbb{R}$. Se K é um conjunto compacto e f é contínua, então $f(K)$ é um conjunto fechado.*

Demonstração: Seja $a \in \overline{f(K)}$. Assim,

$$\exists\, y_n \in f(K);\ y_n \to a. \tag{2.4}$$

Assim, $\forall\, n$, $\exists\, x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como $x_n \in K$, temos que (x_n) é limitada.

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{n_j}) tal que $x_{n_j} \to b$. Pelo fato de K ser fechado e $x_{n_j} \to b$, tem-se que $b \in K$.

Sabemos que f é contínua, assim $f(x_{n_j}) \to f(b)$. Logo, $y_{n_j} \to f(b)$ e, por (2.4), $y_{n_j} \to a$.

Da Unicidade do Limite, resulta que $f(b) = a$ e, consequentemente, $a \in f(K)$.

Portanto, $\overline{f(K)} = f(K)$, ou seja, $f(K)$ é fechado.

∎

A seguir, enunciaremos mais um teorema, o qual comentaremos brevemente sua demonstração visto que é uma aplicação direta dos resultados trazidos nos lemas anteriores.

Teorema 2.2. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $K \subset \mathbb{R}$. Se f é contínua e K é compacto, então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração: Pelos Lemas 2.2 e 2.3 temos que $f(K)$ é limitado e fechado. Assim, pela Definição 2.6, $f(K)$ é compacto.

∎

Para finalizarmos esta seção apresentaremos o **Teorema de Weierstrass**, resultado que garante a existência de valores máximos e mínimos de funções contínuas de uma variável real, cuja demonstração é feita utilizando basicamente os lemas anteriores.

Teorema 2.3. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $K \subset \mathbb{R}$. Se f é contínua e K é compacto, então $\exists\, x_1,\, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall\, x \in K$.*

Demonstração: Por hipótese, f é contínua e K é compacto. Assim, pelo Lema 2.2, $f(K)$ é limitado. Disto, temos que:

$$\exists\, a = inf\, f(K) \leq f(x) \leq sup\, f(K) = b, \forall\, x \in K.$$

Pelo Lema 2.3, $f(K)$ também é fechado, ou seja, $a \in f(K)$ e $b \in f(K)$.

Portanto,

$$\exists\, x_1, x_2 \in K;\, a = f(x_1) \text{ e } b = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall\, x \in K.$$

∎

2.2 Existência de Valores Máximos e Mínimos de Funções Contínuas de Duas Variáveis Reais

Ao longo deste trabalho lidaremos não apenas com funções de uma variável real, mas também com funções de duas variáveis reais e seus respectivos valores extremos. Para tanto, precisamos garantir a existência desses valores. Com base na seção anterior, não há necessidade de enunciar e demonstrar todos os resultados, visto que podemos assumir a veracidade dos mesmos para duas variáveis atentando-se para alguns resultados que traremos a seguir. Nas referências [6] e [10] tem-se as ideias de tais resultados.

Definição 2.9. *Uma **sequência** em $\mathbb{R}^2$ é uma função $\boldsymbol{X} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ que associa a cada número natural n um ponto $X_n \in \mathbb{R}^2$, onde $X_n = (x_n, y_n)$. As notações para uma sequência são $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplesmente (X_n).*

Logo, cada sequência em $\mathbb{R}^2$ pode ser vista como um par de sequências em $\mathbb{R}$, que são as sequências coordenadas.

Por exemplo, temos a função $X_n \in \mathbb{R}^2$ dada por $X_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$.

Definição 2.10. *Diz-se que uma sequência $X_n \in \mathbb{R}^2$ converge ao ponto $a \in \mathbb{R}^2$ se*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\text{: } n > n_0 \Rightarrow \| X_n - a \| < \varepsilon,$$

onde $||.||$ é a norma euclidiana, isto é, $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

O teorema que apresentaremos a seguir é fundamental para a compreensão dos resultados que se estendem da seção anterior.

Teorema 2.4. *Seja $(X_n) \in \mathbb{R}^2$ dada por $X_n = (x_n, y_n)$. Diz-se que (X_n) converge ao ponto $a = (a_1, a_2)$ se, e somente se, $x_n \to a_1$ e $y_n \to a_2$.*

Demonstração: Para explicitar toda a demonstração deste resultado dividiremos o desenvolvimento em duas partes, visto que trata-se de uma correspondência bicondicional.

($\Rightarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \|X_n - a\| < \varepsilon$. Logo, para $n > n_0$ temos

$$|x_n - a_1| = \sqrt{(x_n - a_1)^2} \leq \sqrt{(x_n - a_1)^2 + (y_n - a_2)^2} = \|X_n - a\| < \varepsilon.$$

Logo, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a_1| < \varepsilon \Rightarrow x_n \to a_1$.

Procedendo da mesma forma, temos

$$|y_n - a_2| = \sqrt{(y_n - a_2)^2} \leq \sqrt{(y_n - a_2)^2 + (x_n - a_1)^2} = \|X_n - a\| < \varepsilon.$$

Logo, $n > n_0 \Rightarrow |y_n - a_2| < \varepsilon \Rightarrow y_n \to a_2$.

($\Leftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Tomemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Assim, $n > n_1$ e $n > n_2 \Rightarrow |x_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ e $|y_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Daí, $\|Xn - a\| = \sqrt{(x_n - a_1)^2 + (y_n - a_2)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.

■

Através destas definições e deste teorema, de maneira natural e, simplesmente trocando módulo por norma, temos as definições de conjunto limitado, conjunto fechado, conjunto compacto e de função contínua. Desta forma, todos os resultados que provamos para uma variável real também se estendem para duas variáveis reais. Enunciaremos a seguir um resultado importante para a conclusão do Teorema de Weierstrass para duas variáveis reais. Não há necessidade de apresentar a demonstração, visto que já o demonstramos para uma variável.

Teorema 2.5. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$. Se f é contínua e K é compacto, então $f(K)$ é compacto.*

Com base neste teorema apresentaremos e demonstraremos o Teorema de Weierstrass, resultado que garante a existência de valores máximos e mínimos de funções contínuas de duas variáveis real.

Teorema 2.6. *Seja $f : K \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $K \subset \mathbb{R}^2$. Se f é contínua e K é compacto, então $\exists\,(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \in K$ tal que $f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2)$, $\forall\,(x, y) \in K$.*

Demonstração: Por hipótese, f é contínua e K é compacto. Assim, pelo Teorema anterior, $f(K)$ é limitado e fechado em $\mathbb{R}$.

Como $f(K)$ é limitado, temos que:

$$\exists\, a = inf\, f(K) \leq f(x,y) \leq sup\, f(K) = b, \forall\, (x,y) \in K.$$

Sabemos também que $f(K)$ é fechado, ou seja, $a \in f(K)$ e $b \in f(K)$.

Portanto,

$$\exists\, (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in K;\ a = f(x_1,y_1) \text{ e } b = f(x_2,y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1,y_1) \leq f(x,y) \leq f(x_2,y_2), \forall\, (x,y) \in K.$$

∎

Capítulo 3

Máximos e Mínimos de Funções Deriváveis

Neste capítulo focaremos o estudo de máximos e mínimos em funções de uma e também de duas variáveis reais, trazendo teoria, exemplos e problemas que envolvem tal conceito. A princípio, focaremos nas funções de uma variável real e posteriormente estenderemos o conceito para funções de duas variáveis reais, possibilitando a resolução de um número maior de exercícios, bem como problemas de otimização e situações desafiadoras.

3.1 Máximos e Mínimos de Funções de uma Variável Real

Apresentaremos nesta seção definições, resultados importantes, exemplos e problemas que nos darão uma base sólida sobre o estudo de máximos e mínimos em funções de uma variável real, assim como métodos que evidenciam a existência ou não desses pontos e a explicitação dos mesmos, caso existam. Tais resultados foram baseados nas referências [2], [5], [8] e [17].

Definição 3.1. *Sejam f uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Diz-se que $f(p)$ é o valor máximo* *de f em A ou que p é um ponto de máximo de f em A se $f(x) \leq f(p), \forall\, x \in A$. Caso $f(x) \geq f(p), \forall\, x \in A$ diz-se que $f(p)$ é valor mínimo de f em A ou que p é um ponto de mínimo de f em A.*

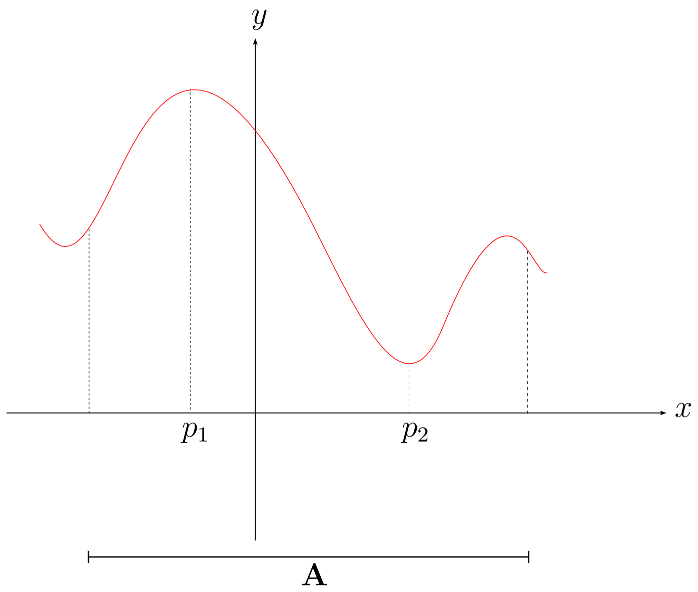

Figura 3.1: $f(p_1)$ é valor máximo de f em A e $f(p_2)$ é valor mínimo de f em A

Definição 3.2. *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Diz-se que $f(p)$ é o valor máximo global de f ou que p é o ponto de máximo global de f se, $\forall\, x \in D_f$, $f(x) \leq f(p)$. Caso $f(x) \geq f(p)$, $\forall\, x \in D_f$, diz-se que $f(p)$ é o valor mínimo global de f ou que p é o ponto de mínimo global de f.*

Os valores de máximo e mínimo global de uma função são chamados *valores extremos da função.*

Exemplo 3.1. *A função $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-1)^2$ possui máximo global em $x = -1$ e mínimo global em $x = 1$. A figura 3.2 mostra o gráfico de f.*

Nem sempre uma função possui máximos e mínimos globais. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-1)^2$ possui mínimo global em $x = 1$ e não possui máximo global (Figura 3.3).

O mesmo ocorre com a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, pois f possui mínimo global em $x = 0$ e não possui máximo global (Figura 3.4). Já a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada

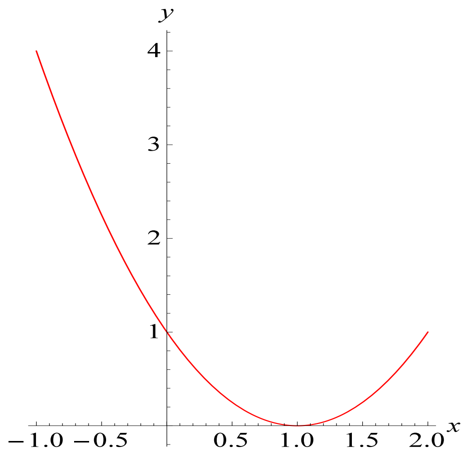

Figura 3.2: $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = (x-1)^2$

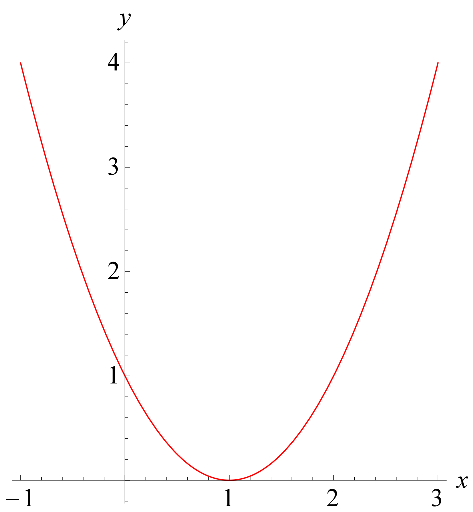

Figura 3.3: $f(x) = (x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}$

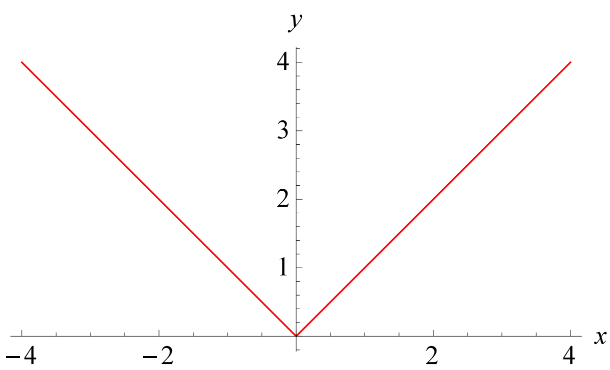

Figura 3.4: $f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$

por $f(x) = -x^2 + 1$ possui máximo global em $x = 0$ e não possui mínimo global (Figura 3.5). Um caso em que f não possui nem máximo e nem mínimo global é o da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ (Figura 3.6).

Definição 3.3. *Sejam f uma função e $p \in D_f$. Diz-se que p é um ponto de máximo local de f se $\exists\, r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p), \forall x \in]p-r, p+r[\, \cap D_f$. De modo análogo, Diz-se que p é um ponto de mínimo local de f se $\exists\, r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p), \forall x \in]p-r, p+r[\, \cap D_f$.*

A Figura 3.7 mostra esses pontos.

As definições de mínimo local e máximo local também poderiam ser dadas da seguinte

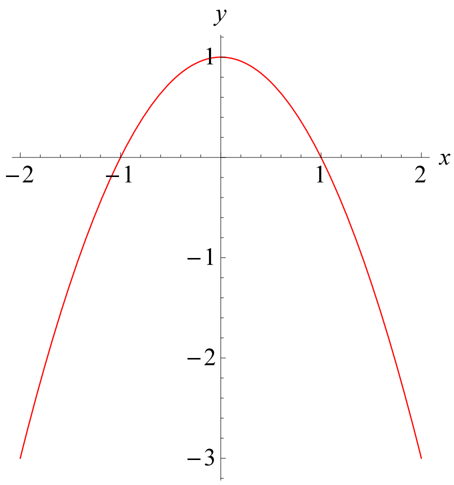

Figura 3.5: $f(x) = -x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

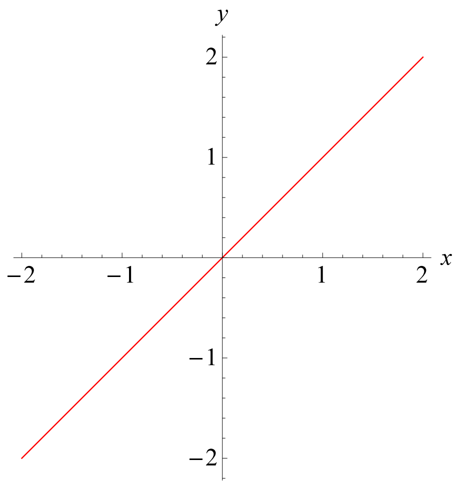

Figura 3.6: $f(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}$

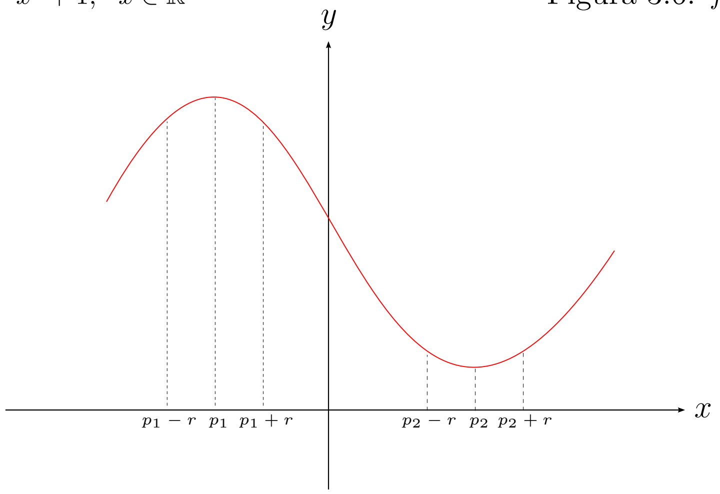

Figura 3.7: p_1 é ponto de máximo local de f e p_2 é ponto e mínimo local de f

forma: p é ponto de mínimo local se $\exists\, r > 0$ tal que p é ponto de mínimo de f em $A =]p - r, p + r[$. De modo análogo, p é ponto de máximo local se $\exists\, r > 0$ tal que p é ponto de máximo de f em $A =]p - r, p + r[$.

Os pontos de máximo local e mínimo local são chamados **extremos locais da função**.

Vale lembrar que todo ponto de máximo (ou de mínimo) global é também ponto de máximo (ou de mínimo) local, mas a recíproca não é verdadeira. Exemplificamos isto na Figura 3.8, onde p_1, p_3 e p_5 são pontos de mínimo local de f, $f(p_5)$ é valor mínimo global de f, p_2, p_4 e p_6 são pontos de máximo local de f e $f(p_2)$ é valor máximo global de f.

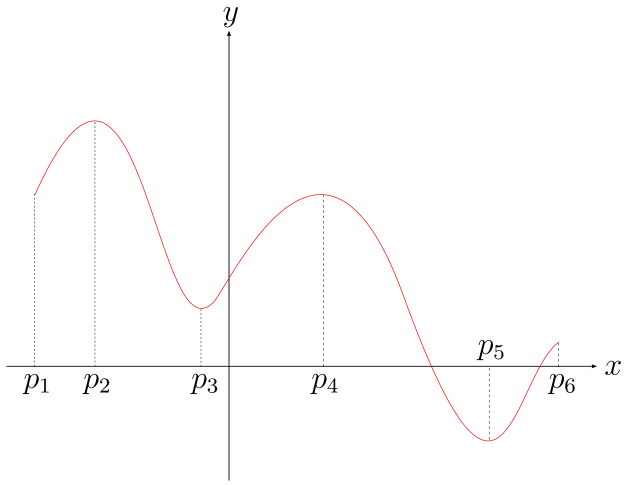

Figura 3.8: Máximos e Mínimos Locais e Globais

Exemplo 3.2. *A função $f(x) = x^2$ tem mínimo local e global em $x = 0$ (Figura 3.9). Já a função $f(x) = x^3$ não possui nem ponto de máximo nem ponto de mínimo globais e também não possui valores extremos locais (Figura 3.10).*

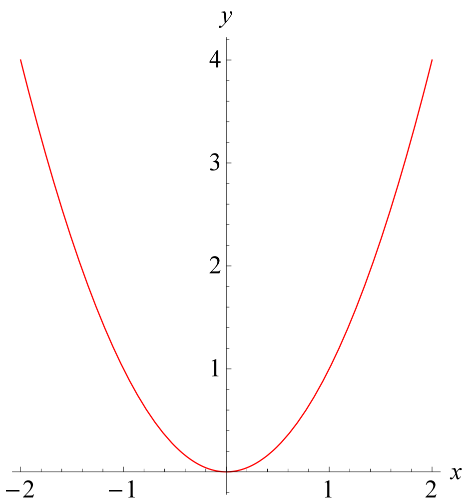

Figura 3.9: $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

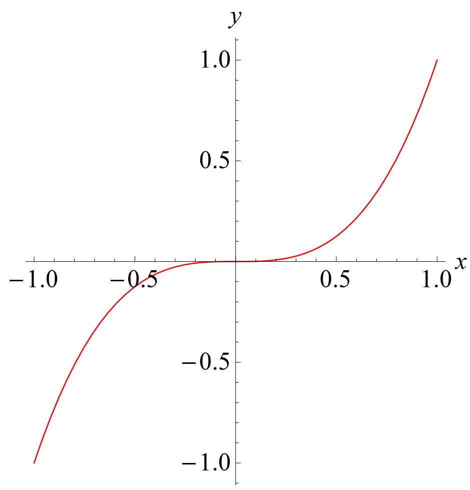

Figura 3.10: $f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$

Mostramos até aqui exemplos que nos dizem se há ou não extremos locais ou globais. A partir de agora precisamos determinar quando uma função possui valores extremos e identificá-los (quando existirem).

Para se determinar os pontos de máximo e de mínimo de uma função, podemos estudar o crescimento e o decrescimento da mesma.

Proposição 3.1. *Sejam $a < c < b$,*

(i) se f é crescente em $]a, c]$ e decrescente em $[c, b[$, então c é um ponto de máximo local de f.

(ii) se f é decrescente em $]a, c]$ e crescente em $[c, b[$, então c é um ponto de mínimo local de f.

Demonstração: Demonstremos o item (i). Para o item (ii) o desenvolvimento é análogo.

Inicialmente, provemos que $f(x) \leq f(c)$, $\forall\, x \in]a, c]$.

De fato,

- se $x = c$, então $f(x) = f(c)$;
- se $x < c$, onde $x \in]a, c]$, então

$$x < c \Rightarrow f(x) < f(c), \text{ pela definição de função crescente.}$$

Temos então que

$$f(x) \leq f(c),\ \forall\, x \in]a, c]$$

.

Provemos agora que $f(x) \leq f(c)$, $\forall\, x \in [c, b[$.

De fato,

- se $x = c$, então $f(x) = f(c)$;
- se $x > c$, onde $x \in [c, b[$, então

$$f(x) < f(c), \text{ pela definição de função decrescente.}$$

Assim, temos que

$$f(x) \leq f(c),\ \forall\, x \in [c, b[.$$

Logo,

$$f(x) \leq f(c),\ \forall\, x \in\ ]a, c] \text{ e } f(x) \leq f(c),\ \forall\, x \in [c, b[.$$

Portanto, se o ponto c leva a função ao seu maior valor em $]a, c]$, onde f cresce, e em $[c, b[$, onde f decresce, então c é ponto de máximo local de f.

∎

Exemplo 3.3. *Estude f com relação a máximos e mínimos, onde*

$$f(x) = \begin{cases} x, & se\ x \in [-1, 2]\,; \\ -x + 4, & se\ x \in [2, 4]\,; \\ x - 4, & se\ x \in [4, 7]. \end{cases}$$

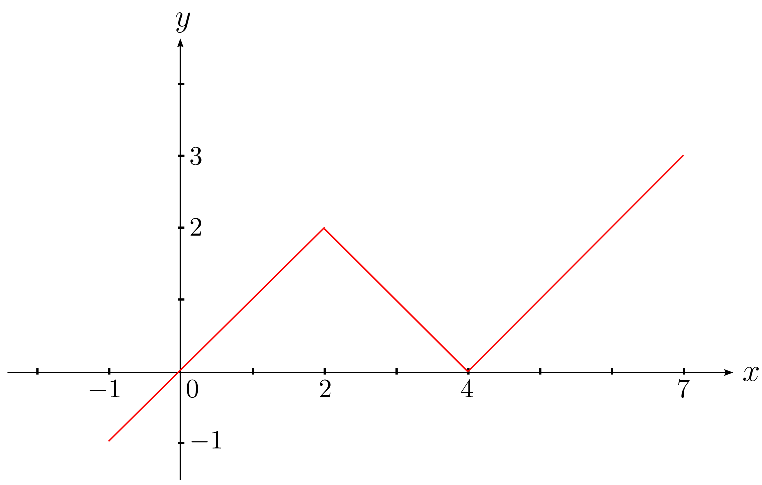

Figura 3.11: Gráfico de f

Resolução: Pelo esboço do gráfico da função na figura 3.11 e pelo crescimento de funções lineares, vemos que, no intervalo $[-1, 7]$, temos:

- f tem mínimo global em $x = -1$, pois $f(-1) \leq f(x)$, $\forall\, x \in [-1, 7]$;
- f tem máximo local em $x = 2$, pois f cresce em $[-1, 2]$ e decresce em $[2, 4]$;
- f tem mínimo local em $x = 4$,pois f decresce em $[2, 4]$ e cresce em $[4, 7]$;
- f tem máximo global em $x = 7$, pois $f(x) \leq f(7)$, $\forall\, x \in [-1, 7]$.

Portanto, estes são os extremos locais e globais de f.

Exemplo 3.4. *Determine o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado seja máxima.*

Resolução: Tomemos x como o número real procurado. Seja

$$D(x) = x - x^2.$$

Como temos uma função do segundo grau, podemos resolver o problema analisando o seu gráfico, que é uma parábola, conforme figura 3.12.

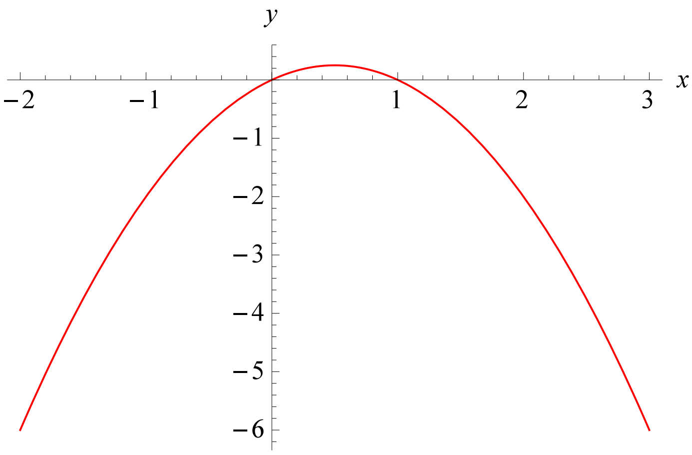

Figura 3.12: $D(x) = x - x^2$

As raízes da função são $x = 0$ e $x = 1$. O valor máximo da função será no vértice da parábola, como está apresentado no gráfico. Assim, o ponto em x que leva ao vértice da parábola é dado pelo ponto médio do intervalo cujos extremos são as raízes da função, ou seja, a abscissa x do vértice é o ponto médio do intervalo $[0, 1]$. Vemos facilmente que o ponto médio de $[0, 1]$ é $\frac{1}{2}$

Logo, o ponto $x = \frac{1}{2}$ é o máximo global de D.

Conclusão: o número procurado é $\frac{1}{2}$.

3.1.1 Estudo de Máximos e Mínimos Locais de Funções Definidas em Intervalos Abertos

Para início desta seção, faz-se necessário definirmos de forma simples o conceito de ponto interior a um domínio de uma certa função.

Definição 3.4. *Seja f uma função e p um ponto. Diz-se que p é ponto interior a D_f se, e somente se, existe um intervalo aberto I, com $I \subset D_f$ e $p \in I$.*

Com este conceito bem definido, apresentaremos, a seguir, uma condição necessária, mas não suficiente para que p seja um extremo local de uma função.

Teorema 3.1. *Seja f uma função derivável em p, onde p é um ponto interior a D_f. Uma condição necessária para que p seja um ponto de máximo ou de mínimo local é que a derivada da função no ponto p seja igual a zero. Resumindo, se f tem máximo ou mínimo local em p, então $f'(p) = 0$.*

Demonstração: Provaremos o caso em que p é ponto de máximo local de f. Para provar o caso em que p é ponto de mínimo local, o raciocínio é análogo. Suponhamos que f tenha um máximo local em p. Assim, $\exists\, r > 0$ tal que,

$$f(x) \leq f(p) \text{ em }]p-r, p+r[\cap D_f.$$

Por hipótese, p é interior a D_f, então podemos escolher r de modo que $]p-r, p+r[\subset D_f$. Assim, reescrevemos:

$$f(x) \leq f(p), \forall\, x \in]p-r, p+r[.$$

Sendo f derivável em p, temos a existência dos seguintes limites laterais:

$$\lim_{x \to p^+} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) \text{ e } \lim_{x \to p^-} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right),$$

onde,

$$f'(p) = \lim_{x \to p^+} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) = \lim_{x \to p^-} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right).$$

Temos então os seguintes casos:

(i) Para $p < x < p + r$, $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \leq 0$ e, pela conservação do sinal,

$$f'(p^+) = \lim_{x \to p^+} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) \leq 0;$$

(ii) Para $p - r < x < p$, $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \geq 0$ e, pela conservação do sinal,

$$f'(p^+) = \lim_{x \to p^-} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) \geq 0.$$

Assim, $f'(p^+) \leq 0 \leq f'(p^-)$.

Como a função é derivável em p, temos que

$$f'(p^+) = f'(p^-) = f'(p) \Rightarrow f'(p) = 0.$$

Portanto, $\lim_{x \to p} \left(\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p} \right) = f'(p) = 0$.

∎

É importante ressaltar que a recíproca deste teorema não é verdadeira, ou seja, *se $f'(p) = 0$ para algum p interior a D_f, o ponto p pode não ser nem de máximo e nem de mínimo local.* Tomemos como exemplo a função $f(x) = x^3$, cuja função derivada é dada por $f'(x) = 3x^2$. Assim, $f'(0) = 0$, mas f não possui máximo nem mínimo local em $x = 0$. Como vimos anteriormente, esta função não possui extremo local.

Diz-se que um ponto $p \in D_f$ é **ponto crítico** ou **ponto estacionário** de uma função f se $f'(p) = 0$. Pelo Teorema 3.1, uma condição necessária para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local de f é que p seja ponto crítico de f, isto quando p é ponto interior a D_f e f seja derivável em p.

Podemos então reescrever o teorema da seguinte forma: *Se p é ponto de máximo ou de mínimo local de f, então p é ponto crítico de f.*

Um ponto p do domínio de uma função f também é dito crítico se f não é derivável em p.

Caso f seja derivável em p e o ponto p seja ponto crítico de f, mas não seja ponto de máximo nem de mínimo local, diz-se que p é um **ponto de sela** de f.

Para se encontrar os máximos e mínimos locais de f, devemos nos focar nos pontos onde f não é derivável e nos pontos em que é derivável com derivada nula.

Antes de apresentar uma condição suficiente para que um ponto p seja ponto de máximo ou mínimo local de uma função, mostraremos um método muito utilizado para encontrar-se extremos locais, o chamado **Teste da Derivada Primeira**. Antes de mais nada a seguinte proposição fornece uma correspondência entre crescimento e decrescimento de f e sinais em f'.

Proposição 3.2. *Seja* $f:]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável tal que* $f'(x) > 0, \forall\, x \in I$, *onde* $I =]a,b[$. *Então* f *é crescente em* I.

Demonstração: Suponhamos que f não é crescente em $]a,b[$.

Logo, $\exists\, z, y \in]a,b[$, com $z < y$, tal que $f(z) \geq f(y)$.

Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\, c \in]z,y[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Como f não é crescente, temos que $f(y) - f(z) \leq 0$ e $y - z > 0$. Logo,

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leq 0,$$

o que é um absurdo, por hipótese, $f'(x) > 0, \forall\, x \in]a,b[$.

Analogamente, prova-se que f é decrescente em I quando $f'(x) < 0, \forall\, x \in I$.

∎

Apresentemos agora o **Teste da Derivada Primeira**.

Proposição 3.3. *Sejam a função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* $]a,b[$ *e* p *um ponto crítico isolado de* f, *isto é,* $\exists\, r > 0$ *tal que em* $]p-r, p+r[$ p *é o único ponto crítico de* f.

(i) Se f' *passa de positiva para negativa em* p, *então* f *tem máximo local em* p;

(ii) Se f' *passa de negativa para positiva em* p, *então* f *tem mínimo local em* p;

(iii)Se f' *não muda de sinal em* p, *então* f *não tem máximo nem mínimo local em* p.

Demonstração: Demonstremos o item (i). Se f' passa de positiva para negativa em p, então $\exists\, x_0$ e $x_1 \in]a,b[$, $x_0 < p < x_1$, tal que $f'(x) > 0$ se $x \in]x_0, p[$ e $f'(x) < 0$ se $x \in]c, x_1[$. Pela Proposição 3.1, como f é crescente em $[x_0, p]$ e decrescente em $[p, x_1]$, segue que $f(p)$ é valor máximo de f no intervalo $[x_0, x_1]$, onde $p \in [x_0, x_1]$.

De modo análogo provamos o item (ii). Se f' passa de negativa para positiva em p, então $\exists\,[x_0, x_1], x_0 < p < x_1$, tais que f é decrescente em $[x_0, p]$ e crescente em $[p, x_1]$. Logo, $f(p)$ é valor mínimo de f no intervalo $[x_0, x_1]$, provando o item (ii).

Provemos o item (iii). Tomemos $I \subset [a, b]$ um intervalo que contém p e tal que p seja o único ponto crítico no intervalo. Pela hipótese, f' não muda de sinal em p, então há um intervalo $[x_0, x_1]$ que contém p, tal que f é crescente (ou decrescente) em $[x_0, p]$ também crescente (ou decrescente) em $[p, x_1]$. Aproximando x_0 e x_1 de p, podemos supor que $[x_0, x_1] \subset I$. Logo, $f(p)$ não pode ser valor máximo nem mínimo em I.

$\blacksquare$

Para exemplificar numericamente, tomemos a função $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$. Temos que f é contínua e derivável em todo o domínio. Assim,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x.$$

Encontremos as raízes de f'.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\tfrac{4}{3}.$$

Analisemos os sinais de f' e f.

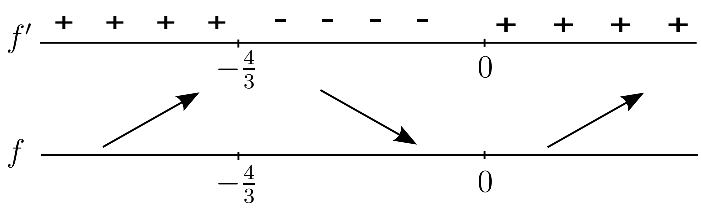

Figura 3.13: Diagrama de Sinais de f' e de f

Assim, f é crescente em $]-\infty, -\frac{4}{3}[\ \cup\ ]0, +\infty[$ e decrescente em $]-\frac{4}{3}, 0[$.

Logo, f' passa de positiva para negativa em $-\frac{4}{3}$, então f tem máximo local em $x = -\frac{4}{3}$ e também, f' passa de negativa para positiva em 0, então f tem mínimo local em $x = 0$.

Portanto, f tem máximo local em $x = -\frac{4}{3}$ e mínimo local em $x = 0$.

Exemplo 3.5. *Uma bola colocada no chão é chutada para o alto percorrendo uma trajetória descrita por $f(x) = -x^2 + 6x$, onde $f(x)$ é a altura da bola no instante x, dada em metros. Encontre a altura máxima atingida pela bola.*

<u>Resolução:</u> O objetivo do problema é descobrir a maior altura atingida pela bola. Como a altura é dada pela função $f(x) = -x^2 + 6x$, precisamos encontrar o maior valor que f pode assumir. Para isso, encontraremos o valor de x onde f é máximo. Assim,

$$f(x) = -x^2 + 6x \Rightarrow f'(x) = -2x + 6.$$

Encontremos o ponto onde a derivada é zero, ou seja, o ponto crítico da função.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 6 \Rightarrow x = 3.$$

Analisemos os sinais de f' e de f.

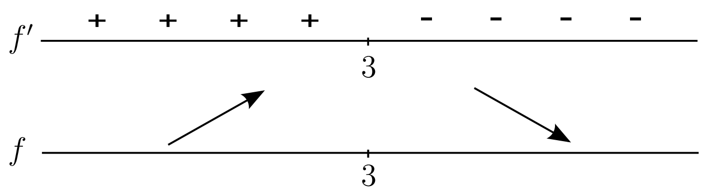

Figura 3.14: Diagrama de Sinais de f' e de f

Como f' passa de positiva para negativa em $x = 3$, temos que $f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = 9$ é o maior valor da função.

Portanto, a bola assume altura máxima de 9 metros.

Exemplo 3.6. *O dono de uma loja de brinquedos vendia cada boneca por R$ 20,00, com esse preço conseguia vender, em média, 30 bonecas por dia. Fazendo algumas promoções ele percebeu que, para cada real que tirava do preço de uma boneca, a venda diária aumentava em 5 bonecas. Determine qual deveria ser o preço de cada boneca para que o lucro diário seja o maior possível e qual é esse lucro.*

<u>Resolução:</u> Inicialmente precisamos modelar o problema para depois analisarmos como encontrar os valores pedidos. O problema nos diz que para cada R$1,00 que o comerciante diminui no preço da boneca, aumenta-se em 5 o número total de bonecas vendidas.

Assim, teremos o lucro diário (L) dado pelo valor que será pago por cada boneca multiplicado pela quantidade de bonecas vendidas.

Tomemos x como o número de reais diminuídos do preço de cada boneca e $L(x)$ a função que nos dá o lucro diário com as vendas.

Temos então:

$$L(x) = (20 - x) \cdot (30 + 5x),$$

onde $20-x$ é o preço pago por 1 boneca e $30+5x$ é a quantidade de bonecas vendidas.

Assim, voltando na função, temos:

$$L(x) = (20 - x) \cdot (30 + 5x),$$

ou seja,

$$L(x) = 600 - 30x + 100x - 5x^2.$$

Logo,

$$L(x) = 600 + 70x - 5x^2.$$

Simplificando,

$$L(x) = 5 \cdot (120 + 14x - x^2).$$

Agora, munidos da função, podemos aplicar os resultados que vimos até aqui para encontrar valores extremos.

Derivando L em relação a x, temos:

$$L'(x) = 5 \cdot (14 - 2x).$$

Encontrando a raiz da função derivada, chegamos que

$$L'(x) = 0 \Rightarrow 14 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7.$$

Analisemos os sinais de L' e de L.

Vemos que a função tem $x = 7$ como ponto crítico e a derivada passa de positiva para negativa em neste ponto.

Logo, a função assume o maior valor quando $x = 7$, ou seja, o valor máximo é $L(7) = (20 - 7) \cdot (30 + 5 \cdot 7) = 13 \cdot 65 = 845$ e o preço da unidade é $20 - 7 = 13$. Podemos verificar esses valores ao analisar a Figura 3.16.

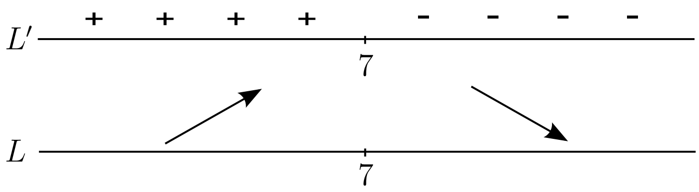

Figura 3.15: Diagrama de Sinais de L' e de L

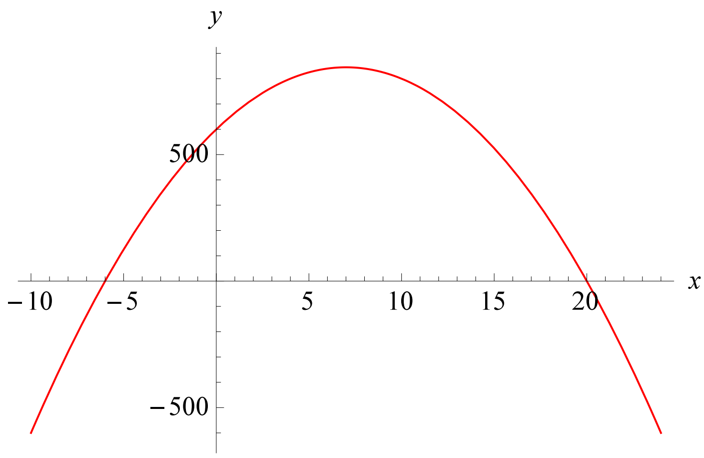

Figura 3.16: Gráfico de $L(x)$

Portanto, o preço de cada boneca é R\$ 13,00 e o lucro diário máximo do dono da loja é R\$ 845,00.

Estabeleceremos agora uma condição suficiente para que um ponto p seja ponto de máximo ou de mínimo local. Este resultado é chamado de **Teste da Derivada Segunda**.

Teorema 3.2. *Sejam f uma função que admite derivada de 2^a ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$, tal que $f'(p) = 0$.*

(i) Se $f''(p) > 0$, então f possui um mínimo local em p;

(ii) Se $f''(p) < 0$, então f possui um máximo local em p.

Demonstração: As demonstrações dos dois itens são praticamente iguais, por isso provemos apenas o item (i). Como f'' é contínua em I e $f''(p) > 0$, usando o Teorema da conservação do sinal, $\exists\, r > 0$ de modo que $]p - r, p + r[\ \subset I$, tal que

$$f''(x) > 0 \text{ em }]p - r, p + r[.$$

Assim, f' é crescente neste intervalo e, como $f'(p) = 0$, temos:

$$f'(x) < 0 \text{ em }]p - r, p[\text{ e } f'(x) > 0 \text{ em }]p, p + r[.$$

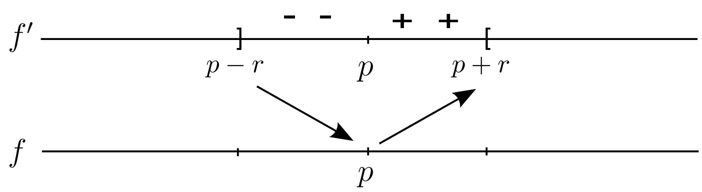

Figura 3.17: Diagrama de Sinais de f' e de f

Logo, f é decrescente em $]p - r, p]$ e crescente em $[p, p + r[$.

Portanto, pelo Teste da Derivada Primeira, p é ponto de mínimo local de f.

∎

A recíproca deste resultado é apresentada a seguir como um Corolário e sua demonstração é feita de forma simples.

Corolário 3.1. *Seja f uma função que admite derivada de 2^a ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$ um ponto.*

(i) Se p é ponto de mínimo local, então $f'(p) = 0$ e $f''(p) \geq 0$;

(ii) Se p é ponto de máximo local, então $f'(p) = 0$ e $f''(p) \leq 0$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é feita aplicando o Teste da Derivada Primeira e também do Teorema anterior.

(i) Se p é ponto de mínimo local, então, Pelo Teste da Derivada Primeira, $f'(p) = 0$. Suponhamos que $f''(p) < 0$. Assim, pelo Teorema anterior, p é ponto de máximo local, o que contradiz a hipótese de que p é mínimo local. Logo, $f''(p) \geq 0$;

(ii) Se p é ponto de máximo local, então, Pelo Teste da Derivada primeira, $f'(p) = 0$. Suponhamos que $f''(p) > 0$. Assim, pelo Teorema anterior, p é ponto de mínimo local, o que contradiz a hipótese de que p é máximo local. Logo, $f''(p) \leq 0$.

Portanto, o Corolário está demonstrado.

∎

Os exemplos 3.5 e 3.6 também podem ser resolvidos pelo Teste da Derivada Segunda.

No Exemplo 3.5, calculamos a segunda derivada que é $f''(x) = -2$ e aplicamos no ponto crítico $x = 3$, ou seja, $f''(3) = -2 < 0$, que nos diz que o ponto $x = 3$ é um máximo local da função que revela a altura da bola.

Já no Exemplo 3.6, calculamos a segunda derivada que é $L''(x) = -2$ e aplicamos no ponto crítico $x = 7$, ou seja, $f''(7) = 2 < 0$, implicando que o ponto $x = 7$ é um máximo local da função que resulta no lucro diário.

Exemplo 3.7. *Um papelão quadrado tem área 144. Devemos transformá-lo em uma caixa sem tampa que permita maior volume possível. Determinar a medida x do lado de cada quadrado que se deve retirar dos 4 cantos do papelão.*

Resolução: Inicialmente, modelemos o problema para se encontrar uma função. Como a área do papelão é 144, o lado desse quadrado é 12. Assim, o fundo da caixa será um quadrado de lado $(12 - 2x)$, onde $2x$ representa os lados dos dois quadrados que serão retirados dos cantos.

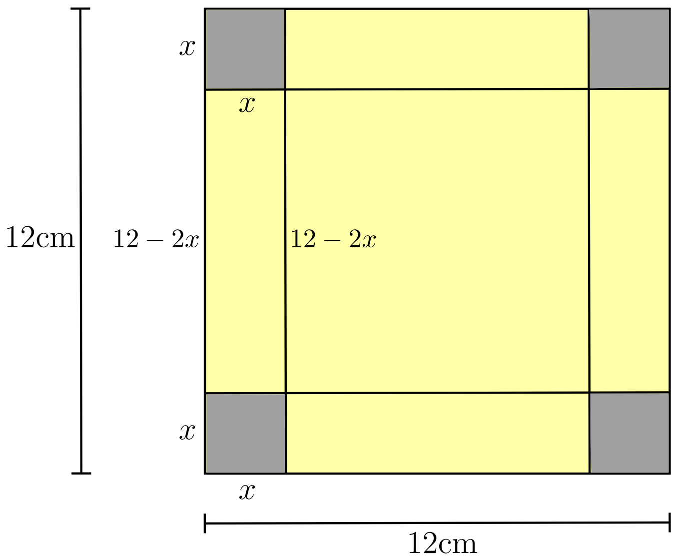

Figura 3.18: Papelão de área 144 com marcações

A altura da caixa também será x, o que nos diz que o volume da caixa será dado pela função $V(x)$ onde

$$V(x) = x \cdot (12 - 2x)^2,$$
$$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x.$$

Agora, podemos utilizar o que aprendemos até aqui. Derivando a função volume em relação a x temos:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144,$$

que podemos simplificar por

$$V'(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot 12.$$

Encontremos os pontos críticos da função, ou seja, os pontos onde $V'(x) = 0$.

$$V'(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 8x + 12) \cdot 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 6.$$

Logo, $x = 2$ e $x = 6$ são os pontos críticos da função.

Para sabermos em qual desses pontos o volume é máximo, utilizaremos o Teste da Derivada Segunda.

Derivando novamente a função, temos:

$$V''(x) = (2x - 8) \cdot 12.$$

Assim,

- $V''(2) = (2 \cdot 2 - 8) \cdot 12 = -48 < 0 \Rightarrow x = 2$ é ponto de máximo local da função volume;

- $V''(6) = (2 \cdot 6 - 8) \cdot 12 = 48 > 0 \Rightarrow x = 6$ é ponto de mínimo local da função volume.

Como precisamos do x que leve $V(x)$ ao seu maior valor, temos que a medida do lado do quadrado de papelão menor a ser retirado dos cantos (e também a altura) será 2.

Na Figura 3.19 podemos verificar os pontos extremos de V.

Portanto, a caixa terá como base um quadrado de lado 8 e altura 2, gerando um volume $V = 2 \cdot 8^2 = 128$, que também pode ser calculado pela função volume avaliada em $x = 2$, ou seja, $V(2) = 4 \cdot 2^3 - 48 \cdot 2^2 + 144 \cdot 2 = 32 - 192 + 288 = 128$.

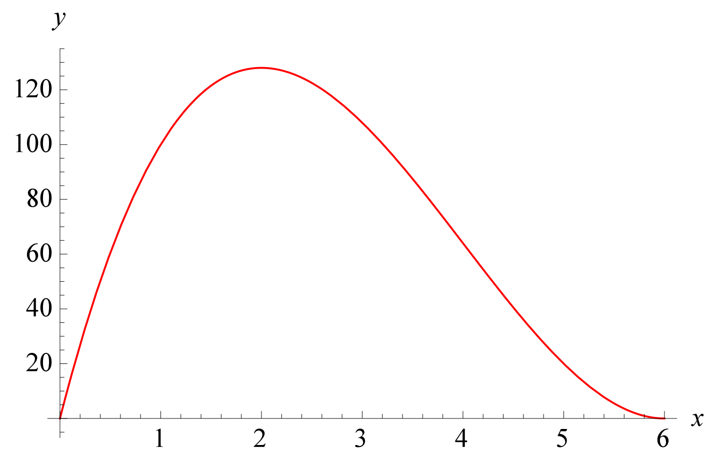

Figura 3.19: $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

Exemplo 3.8. *Um desarmador de bombas estava descansando à beira de um rio (ponto A) quando recebeu um chamado da cidade situada à beira da outra margem do mesmo rio. Neste chamado alertavam sobre uma bomba que estava na margem próxima à cidade (ponto B) e que o relógio contava regressivamente 22 minutos para a explosão. Imediatamente ele pôs-se a caminho de canoa para atravessar o rio que tem 1 km de largura e ao chegar na outra margem continuou o caminho correndo. Sabendo que ele consegue remar a canoa a 6 km/h, correr a 9 km/h, desarmar a bomba em 30 segundos e que, pela margem a distância entre A e B é 2 km, é possível que ele chegue a tempo e consiga desarmar a bomba?*

Resolução: A Figura 3.20 esboça a situação que o desarmador tem que enfrentar.

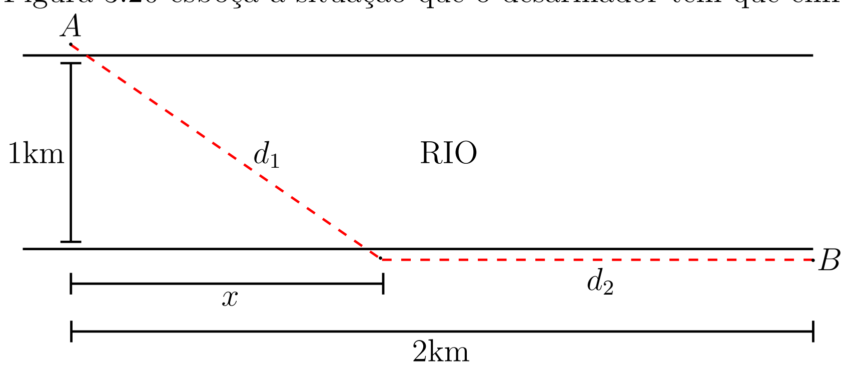

Figura 3.20: Trajeto de A até B

Precisamos encontrar o tempo mínimo que é possível fazer esse trajeto. Sejam x, d_1 e

d_2 as distâncias percorridas de canoa em relação à margem, de canoa pelo rio e corrida, respectivamente. Sejam também x a distância, pela margem, percorrida pela canoa, onde $0 \leq x \leq 2$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo que possui lados 1, x e d_1 e pela distância de A a B pela margem, temos:

$$d_1{}^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{x^2+1} \text{ e,}$$

$$d_2 = 2 - x.$$

Como $velocidade = \frac{dist\hat{a}ncia}{tempo} \Rightarrow tempo = \frac{dist\hat{a}ncia}{velocidade}$, e seja t_1 e t_2 os tempos para percorrer as distâncias d_1 e d_2, respectivamente, temos:

$$t_1 = \frac{d_1}{6} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{6} \text{ e } t_2 = \frac{d_2}{9} = \frac{2-x}{9}.$$

Logo, a função que representa o tempo total em relação a x é dada por

$$T(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2+1}}{6} + \frac{2-x}{9}.$$

Para sabermos qual é o tempo mínimo até chegar à bomba, primeiro encontremos o(s) ponto(s) crítico(s) da função.

Derivando e igualando a zero, temos:

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{6 \cdot 2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{9} \Rightarrow 3x = 2\sqrt{x^2+1}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e, sabendo que $0 \leq x \leq 2$,

$$9x^2 = 4x^2 + 4 \Rightarrow 5x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{5}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Logo, o ponto crítico é $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Derivando a função novamente, temos:

$$T''(x) = \frac{6\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{6}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{36(x^2+1)} = \frac{\frac{12(x^2+1)-12x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{36(x^2+1)} = \frac{\frac{12x^2+12-12x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{36(x^2+1)} =$$

$$= \frac{\frac{6}{\sqrt{x^2+1}}}{36(x^2+1)} = \frac{6}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{36(x^2+1)} = \frac{6}{36\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1}{6\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

Substituindo $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ em $T''(x)$, temos:

$$T''\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{1}{6\sqrt{\left[\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+1\right]^3}} = \frac{1}{6\sqrt{\left(\frac{20}{25}+1\right)^3}} = \frac{1}{6\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^3}} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{\left(\frac{729}{125}\right)^3}} = \frac{1}{6\cdot\frac{27}{5\sqrt{5}}} = \frac{1}{\frac{162}{5\sqrt{5}}} = \frac{5\sqrt{5}}{162} > 0.$$

Assim, pelo Teste da Derivada Segunda $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ é ponto de mínimo da função.

O tempo mínimo será dado por:

$$T\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+1}}{6} + \frac{2-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{9} = \frac{\sqrt{\frac{20}{25}+1}}{6} + \frac{10-2\sqrt{5}}{45} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{4}{5}+1}}{6} + \frac{10-2\sqrt{5}}{45} = \frac{\sqrt{\frac{9}{5}}}{6} + \frac{10-2\sqrt{5}}{45} = \frac{3}{6\sqrt{5}} + \frac{2}{9} - \frac{2\sqrt{5}}{45} =$$

$$= \frac{45+20\sqrt{5}-20}{90\sqrt{5}} = \frac{25+20\sqrt{5}}{90\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{18} + \frac{2}{9} \approx 0,3464$$

Logo, o tempo mínimo será aproximadamente 0,3464 horas, que equivale a aproximadamente 20 minutos e 48 segundos.

Portanto, considerando que o desarmador pode chegar em 20 minutos e 48 segundos até a bomba e desarmá-la em 30 segundos, totalizando 21 minutos e 18 segundos, é possível que ele consiga realizar seu trabalho antes de haver a explosão.

Às vezes, ocorre que várias derivadas sucessivas de uma função se anulam no ponto crítico. Assim, o critério utilizado para o Teste da Derivada Segunda necessita de uma ampliação. Apresentamos a seguir o chamado **Teste da n-Ésima Derivada**.

Proposição 3.4. *Seja f uma função que possui todas as n primeiras derivadas contínuas em um intervalo aberto I, onde $p \in I$, tal que p é ponto crítico da função em I, ou seja, $f'(p) = 0$ e que*

$$f''(p) = f'''(p) = f^{(iv)}(p) = \ldots = f^{(n-1)}(p) = 0, \text{ mas } f^{(n)} \neq 0.$$

Assim,

(i) se n é par e $f^{(n)}(p) < 0$, então $x = p$ é ponto de máximo local da função;

(ii) se n é par e $f^{(n)}(p) > 0$, então $x = p$ é ponto de mínimo local da função;

(iii) se n é ímpar e $f^{(n)}(p) \neq 0$, então $x = p$ não é ponto de mínimo e nem de máximo para a função. Este ponto $x = p$ recebe o nome de ***ponto de sela*** *da função.*

Demonstração: Para a prova deste resultado, utilizaremos a Fórmula de Taylor Infinitesimal.

De fato, a anulação das derivadas de ordem 1 até $n-1$ faz com que a fórmula de Taylor seja dada por:

$$f(p+h) = f(p) + \left[\frac{f^{(n)}(p)}{n!} + \varphi(h)\right] \cdot h^n,$$

onde

$$\varphi(h) = \frac{r(h)}{h^n}$$

e

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

Assim, quando h é suficientemente pequeno, o sinal da expressão dentro do colchete será o mesmo sinal de $f^{(n)}(p)$ e, quando n é par, o fator h^n é sempre positivo para $h \neq 0$.

Logo, se n é par $\forall$ h suficientemente pequeno e diferente de zero, então:

- $f(p+h) < f(p) \Rightarrow f(p+h) - f(p) < 0$, quando $f^{(n)}(p) < 0$, o que define um máximo local em $x = p$;

- $f(p+h) > f(p) \Rightarrow f(p+h) - f(p) > 0$, quando $f^{(n)}(p) > 0$, o que define um mínimo local $x = p$.

Contudo, provamos os itens (i) e (ii).

Para provar o item (iii), suponhamos que n seja ímpar. Assim, o fator h^n terá o sinal de h. Daí, qualquer que seja o sinal de $f^{(n)}(p)$ em um intervalo suficientemente pequeno em torno de p, a diferença $f(p+h) - f(p)$ não tem sinal constante.

Portanto, quando n é ímpar não há máximo e nem mínimo local.

∎

Podemos exemplificar a utilização da Proposição 3.4 na busca por máximos e mínimos através de funções simples, como $f(x) = x^4$, $g(x) = x^5$ e $h(x) = -x^6$.

As derivadas destas três funções são dadas por:

$$f'(x) = 4x^3, \quad g'(x) = 5x^4 \quad \text{e} \quad h'(x) = -6x^5.$$

Assim, vemos facilmente que $x = 0$ é ponto crítico de f, g e de h, pois

$$f'(0) = g'(0) = h'(0) = 0.$$

Sabendo disso, analisemos as derivadas sucessivas de cada função aplicadas ao seu ponto crítico.

- sendo $f''(x) = 12x^2$ e $f'''(x) = 24x$, então $f''(0) = f'''(0) = 0$. Como $f^{(iv)}(x) = f^{(iv)}(0) = 24$, pela Proposição 3.4, temos que $x = 0$ é ponto de mínimo local de f;

- sendo $g''(x) = 20x^3$, $g'''(x) = 60x^2$ e $g^{(iv)}(x) = 120x$, então $g''(0) = g'''(0) = g^{(iv)}(0) = 0$. Como $g^{(v)}(x) = g^{(v)}(0) = 120$, pela Proposição 3.4, temos que $x = 0$ é um ponto de sela de g;

- sendo $h''(x) = -30x^4$, $h'''(x) = -120x^3$, $h^{(iv)}(x) = -360x^2$ e $h^{(v)}(x) = -720x$, então $h''(0) = h'''(0) = h^{(iv)}(0) = h^{(v)}(0) = 0$. Como $h^{(vi)}(x) = h^{(vi)}(0) = -720$, pela Proposição 3.4, temos que $x = 0$ é ponto de máximo local de h.

Portanto, $x = 0$ é ponto de mínimo local de f, ponto de inflexão de g e ponto de máximo local de h.

3.1.2 Estudo de Máximos e Mínimos Globais de Funções Definidas em Intervalos Fechados

Nesta seção utilizaremos o Teorema de Weierstrass (visto no capítulo anterior) para garantir que uma função assume em um intervalo fechado tanto valor máximo quanto valor mínimo, ou seja, seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, o Teorema de Weierstrass garante-nos que f assume em $[a, b]$ valor máximo e valor mínimo.

A seguir descreveremos um processo para determinar valores máximos e mínimos de f em $[a, b]$.

Suponhamos que f seja derivável em $]a, b[$ e seja $f(p)$ o valor máximo de f em $[a, b]$, assim, p ou é extremidade de $[a, b]$ ou $p \in\ ]a, b[$. Se $p \in\ ]a, b[$, pelo Teorema 3.1, temos que $f'(p) = 0$, ou seja, p é ponto crítico de f em $]a, b[$. Disto, segue que, para se obter o valor máximo de f em $[a, b]$ é suficiente comparar os valores que f assume nas extremidades de $[a, b]$, ou seja, $f(a)$ e $f(b)$, com os assumidos nos pontos críticos que pertencem a $]a, b[$. O máximo global de f em $[a, b]$ será então o maior desses valores. Consequentemente, o mínimo global de f em $[a, b]$ será o menor dos valores.

Façamos alguns exemplos para que esse processo seja entendido.

Exemplo 3.9. *Seja* $f(x) = x^2 - 4x + 3$ *definida em* $[0, 5]$*. Determine os máximos e mínimos globais da função.*

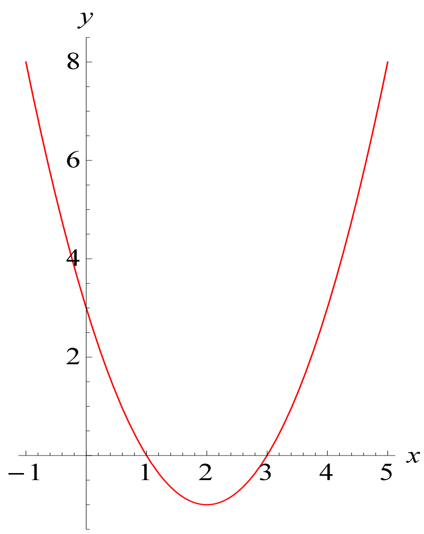

Figura 3.21: $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$

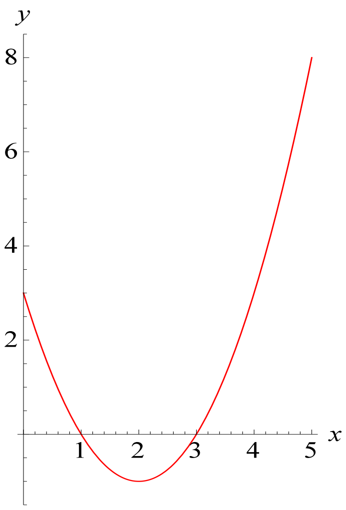

Figura 3.22: $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in [0, 5]$

Resolução: A função é derivável em $]0, 5[$. Com isso, primeiramente encontremos os pontos críticos da função, cuja derivada é

$$f'(x) = 2x - 4.$$

Temos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Assim, o único ponto crítico da função é $x = 2$.

Verifiquemos agora o valor que a função assume tanto no ponto crítico quanto nos extremos do intervalo $[0, 5]$.

- $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$;
- $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$;
- $f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 8$.

Logo, quando $x = 2$, f tem o menor valor do intervalo e, quando $x = 5$, tem o maior.

Portanto, temos mínimo global em $x = 2$ e máximo global em $x = 5$.

Exemplo 3.10. *Para a função* $f(x) = x^3 - 3x + 1$*, definida em* $[-2, 2]$*, determine os máximos e mínimos globais.*

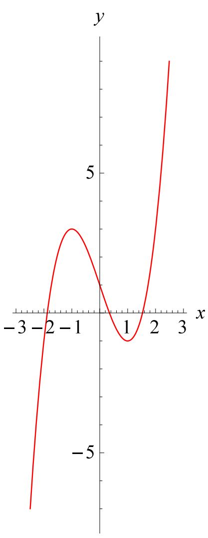

Figura 3.23: $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

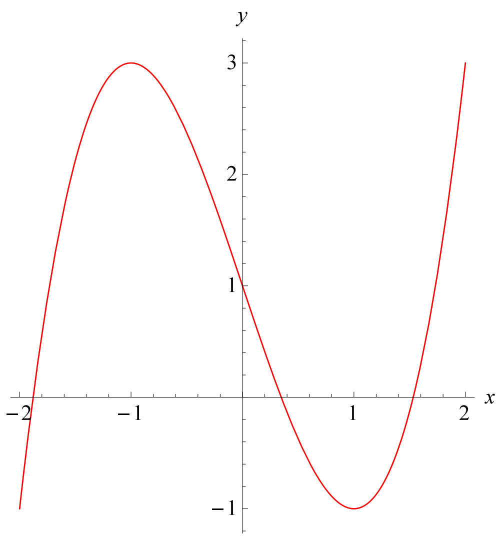

Figura 3.24: $f(x) = x^3 - 3x + 1, x \in [-2, 2]$

Resolução: A função é derivável em $]-2, 2[$. Encontremos os pontos críticos da função, cuja derivada é

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Temos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Assim, os pontos críticos da função são $x = -1$ e $x = 1$.

Verifiquemos agora o valor da função nos extremos do intervalo $[-2, 2]$ e também nos pontos críticos.

- $f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 1 = -1$;
- $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3$;
- $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$;
- $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3$.

Logo, $f(-2) = f(1) = -1$ é o menor e $f(-1) = f(2) = 3$ é o maior valor que a função assume no intervalo $[-2, 2]$.

Portanto, temos mínimo global em $x = -2$ e também em $x = 1$ e máximo global em $x = 1$ e em $x = 2$.

Exemplo 3.11. *Dada a função definida por* $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ *em* $[0, \pi]$, *encontre, os extremos globais neste intervalo.*

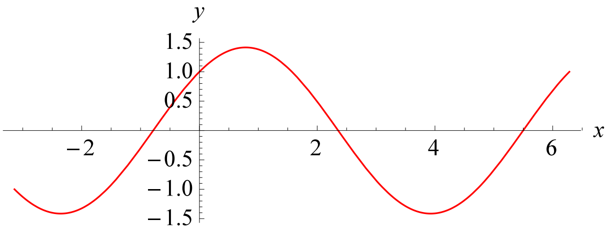

Figura 3.25: $f(x) = \sin(x) + \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$

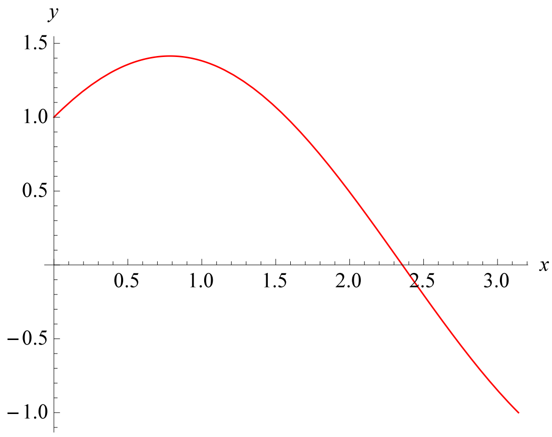

Figura 3.26: $f(x) = \sin(x) + \cos(x), x \in [0, \pi]$

Resolução: A função admite derivada em $[0, \pi]$, e

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

Temos,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) - \sin(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = \sin(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

Assim, o único ponto crítico da função em $[0, \pi]$ é $x = \frac{\pi}{4}$.

Analisemos os valores da função nos extremos do intervalo dado e também no ponto crítico.

- $f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 1$;
- $f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$;
- $f(\pi) = \sin(\pi) + \cos(\pi) = -1$.

Portanto, a função tem máximo global em $x = \frac{\pi}{4}$ e mínimo global em $x = \pi$.

3.2 Máximos e Mínimos de Funções de 2 Variáveis Reais

Nesta seção estudaremos o conceito de máximos e mínimos em funções que possuem 2 variáveis reais. Desenvolveremos o conceito de forma similar a seção anterior, acrescentando tópicos específicos, desenvolvendo problemas de aplicação direta e também de otimização, baseados em situações diversas. Apresentaremos também, métodos para encontrar estes pontos, caso existam. Tais resultados baseiam-se nas referências [6] e [18].

Ao longo do desenvolvimento da seção utilizaremos a seguinte notação: $B(P, \varepsilon)$, onde $B(P, \varepsilon)$ é a bola aberta que tem centro em P e raio ε, ou seja,

$$B(P, \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2} < \varepsilon, \text{ onde } P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Lembramos que, nas definições, teoremas e outros resultados, ao citarmos X e P, estamos nos referindo a pontos $X = (x, y)$ e $P = (p_1, p_2)$ do $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.5. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e A um conjunto aberto no domínio de f. Diz-se que um ponto $P \in A$ é ponto de máximo de f em A se, $\forall X \in A, \quad f(X) \leq$*

$f(P)$. Neste caso, o número $f(P)$ é denominado valor máximo de f em A. Diz-se também, que P é ponto de mínimo de f em A se, $\forall X \in A, \quad f(P) \leq f(X)$ e denotamos que o número $f(P)$ é o valor mínimo de f em A.

Definição 3.6. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que um ponto $P \in D_f$ é um ponto de máximo global ou absoluto de f se, $\forall X \in D_f, \quad f(X) \leq f(P)$. O número $f(P)$ é denominado valor máximo de f. Diz-se também que P é ponto de mínimo global ou absoluto de f se, $\forall X \in D_f, \quad f(P) \leq f(X)$. O número $f(P)$ é denominado valor mínimo de f.*

Para continuarmos o desenvolvimento desta seção, faz-se necessário introduzir o conceito de curvas de nível. Seja $z = f(x, y)$ uma função. O conjunto de todos os pontos (x, y) de D_f, tais que $f(x, y) = c$ denomina-se **curva de nível** de f correspondente ao nível $z = c$. Assim, f é constante sobre cada curva de nível. Desta forma, o gráfico de f é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$ e uma curva de nível é um subconjunto do domínio de f, ou seja, do $\mathbb{R}^2$.

Podemos exemplificar os conceitos vistos até aqui com duas funções simples.

Primeiramente, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Como a raiz quadrada de um numero é sempre positiva, temos que $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos também que $f(0, 0) = 0$.

Assim, $f(x, y) \leq f(0, 0), \quad \forall (x, y) \in D_f$.

Logo, (0,0) é ponto de máximo global de f e $f(0, 0) = 0$ é o valor máximo global de f (Figura 3.27).

Agora, tomemos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$. Temos que $x^2 + y^2 \geq 0, \; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global de f e 0 é o valor mínimo de f, visto que $0 = f(0, 0) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (Figura 3.29).

Definição 3.7. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função, $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e $\varepsilon > 0$, onde ε é um valor pequeno.*

(i) Um ponto P é um ponto de máximo local de f se $\exists \; B(P, \varepsilon)$, tal que

$$f(P) \geq f(X), \quad \forall X \in B(P, \varepsilon) \subset A;$$

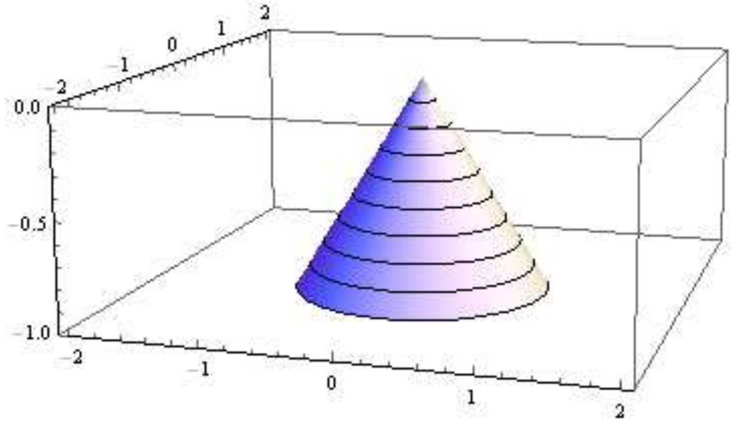

Figura 3.27: $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

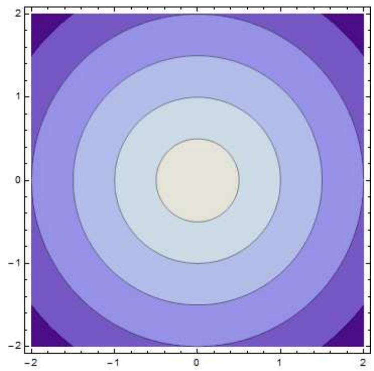

Figura 3.28: Curvas de nível de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

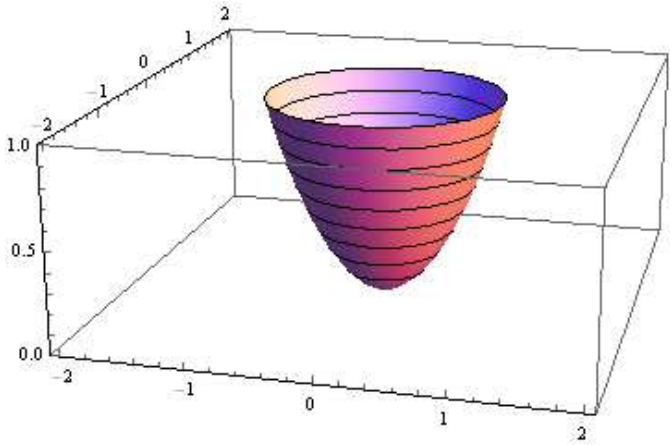

Figura 3.29: $f(x, y) = x^2 + y^2$

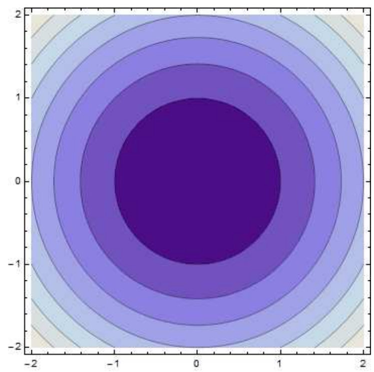

Figura 3.30: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$

(ii)Um ponto P é um ponto de mínimo local de f se $\exists \ B(P, \varepsilon)$, tal que

$$f(P) \leq f(X), \quad \forall X \in B(P, \varepsilon) \subset A.$$

*Em ambos os casos, P é dito **extremo local** ou **extremo relativo** de f e o número $f(P)$ é o **valor extremo local** de f.*

Os pontos de máximo e de mínimo de uma função f denominam-se **extremantes** de f.

Exemplo 3.12. *Seja $f(x, y) = -x^2$ uma função. Verificar se $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ y \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto infinito de pontos de máximos locais e globais de f, ou seja, os pontos do eixo y serão os máximos locais e também globais de f.*

Resolução: De fato, $-x^2 \leq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,y) = 0$.

Assim, $f(x,y) \leq f(0,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Logo, f atinge seu valor máximo em qualquer ponto da reta $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}\}$ e $f(0,y) = 0$.

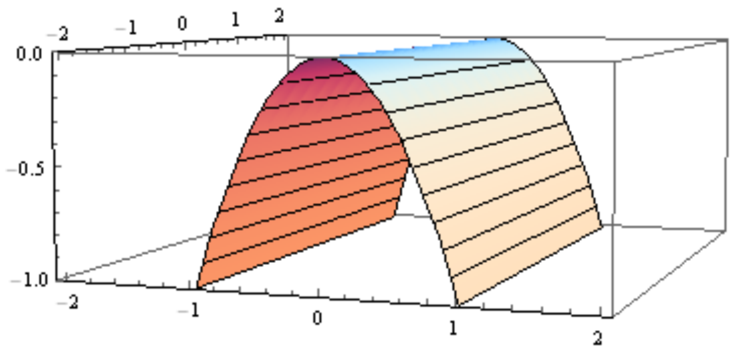

Figura 3.31: $f(x,y) = -x^2$

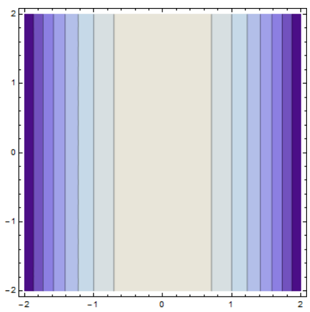

Figura 3.32: Curvas de nível de $f(x,y) = -x^2$

Portanto, os pontos do eixo y são os máximos locais e também globais de f.

Para exemplificar um caso em que temos mínimos locais e globais, tomemos a função $f(x,y) = x^2$.

Assim, $x^2 \geq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,y) = 0$.

Logo, f tem seu valor mínimo em qualquer ponto do eixo y.

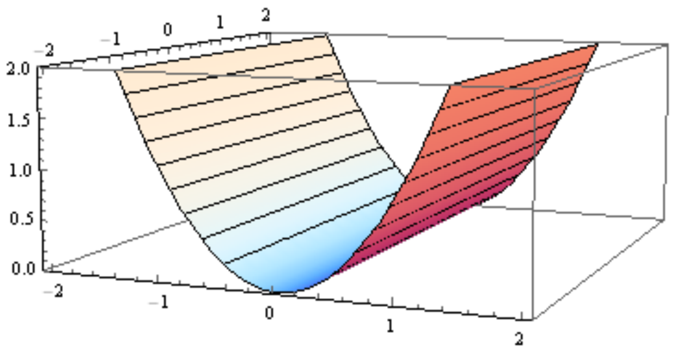

Figura 3.33: $f(x,y) = x^2$

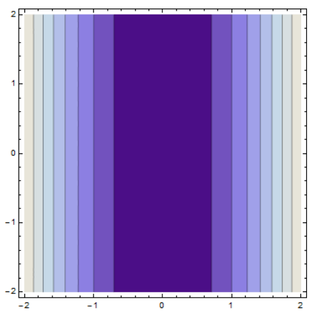

Figura 3.34: Curvas de nível de $f(x,y) = x^2$

Portanto, os pontos do eixo y são os mínimos locais e também globais de f.

Para continuarmos nosso estudo, faz-se necessário uma definição similar à Definição 3.4 de ponto interior ao domínio para o caso de funções com domínio contido em $\mathbb{R}^2$

Definição 3.8. *Seja f uma função e P um ponto. Diz-se que P é ponto interior a D_f se, e somente se, existe uma bola aberta $B(P, \varepsilon)$ inteiramente contida em D_f.*

Agora, apresentaremos uma condição necessária para que um ponto interior ao domínio de uma função seja um extremante local desta função. Antes de mais nada, definiremos vetor gradiente de uma função.

Definição 3.9. *Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais em (x_0, y_0). O vetor*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

*denomina-se **gradiente** de f em (x_0, y_0).*

O teorema a seguir fornece-nos um critério para selecionar, entre os pontos interiores ao D_f, candidatos à extremantes locais de f.

Teorema 3.3. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que admite a existência de suas derivadas parciais. Se um ponto $P \in A$, interior ao D_f é extremante local de f, então suas derivadas parciais em P são nulas, ou seja, $\nabla f(P) = \vec{0}$.*

Demonstração: Provaremos aqui o caso em que P é um ponto de máximo local de f e a prova do caso em que P é um ponto de mínimo local será análoga.

Seja P um ponto de máximo local de f. Assim, $\exists \; B(P, \varepsilon), \; \varepsilon > 0$, tal que $f(X) \leq f(P), \; \forall X \in B(P, \varepsilon)$.

Tomemos a função real $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f(P + t\vec{v})$, onde $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Assim, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, a função h possui um ponto de máximo em $t = 0$ e temos pelo Teorema 3.1 que:

$$h'(0) = \frac{dh}{dt}(t)|_{t=0} = 0.$$

Derivando $f(P + t\vec{v})$ em relação a t, temos, pela Regra da Cadeia:

$$h'(0) = < \nabla f(P), \vec{v} > .$$

Como $t = 0$ é o ponto de máximo e $h(t) = f(P + t\vec{v})$, temos:

$$0 = \frac{dh}{dt}(t)|_0 = \nabla f(P) \cdot \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, $\nabla f(P) = \vec{0}$.

A prova para o caso em que P é ponto de mínimo local é análoga.

Portanto, nas condições do enunciado do teorema, se P é um ponto interior ao D_f e, também é um extremante local, então $\nabla f(P) = \vec{0}$.

∎

Diz-se que um ponto P é chamado **ponto crítico** de f ou **ponto singular** de f, quando dada $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com f diferenciável, tem-se $\nabla f(P) = \vec{0}$.

Para encontrarmos pontos críticos no $\mathbb{R}$, basta resolvermos o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$\nabla f(x, y) = \vec{0},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$$

Podemos assim, reescrever o teorema anterior da seguinte forma: *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que admite a existência de suas derivadas parciais. Se um ponto $P \in A$, interior ao D_f é extremante local de f, então P é um ponto singular de f.*

Disto, podemos dizer que os pontos singulares de f são, entre os pontos do conjunto A (ou também, entre os pontos interiores ao D_f), os únicos candidatos a extremantes locais de f.

É importante ressaltar que a recíproca do teorema anterior não é válida. Podemos tomar, por exemplo, a função $f(x, y) = x^2 - y^2$. Esta função possui $(0, 0)$ como ponto singular, visto que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \Rightarrow \nabla f(0, 0) = (0, 0) = \vec{0},$$

mas $(0, 0)$ não é nem ponto de máximo local e nem de mínimo local, pois $f(0, 0) = 0$ e existem pontos arbitrários próximos de $(0, 0)$ em que f assume valores positivos e pontos nos quais f assume valores negativos. Exemplificamos esta situação ao tomarmos os pontos $(0, \frac{1}{n})$ e $(\frac{1}{n}, 0)$, pois teremos $f(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^2} < 0$ e $f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^2} > 0$, mostrando que não há extremante local no ponto $(0, 0)$.

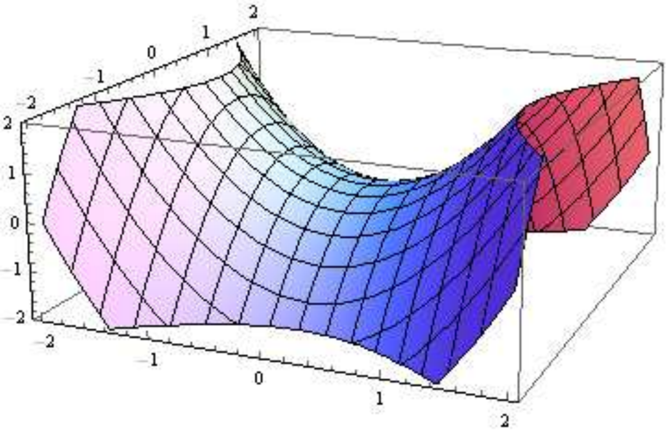

Figura 3.35: $f(x, y) = x^2 - y^2$

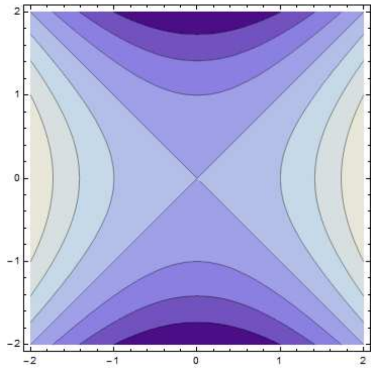

Figura 3.36: Curvas de nível de $f(x, y) = x^2 - y^2$

Quando um ponto singular não é máximo local nem mínimo local, denotamos este ponto por **ponto de sela**.

No caso da função $f(x, y) = x^2 - y^2$, o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela da função.

Na função $f(x, y) = x^2 + y^2$, D_f é um conjunto aberto, pois $D_f = \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y, \end{cases}$$

ou seja, $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ e $\nabla f(x, y) = \vec{0} \Rightarrow x = y = 0$, ou seja, $(0, 0)$ é o único candidato a extremante local de f. Vemos facilmente que $f(x, y) \geq f(0, 0) = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0, 0)$ é um ponto de mínimo global de f (Figura 3.29).

Já na função $f(x, y) = x^2y + 3x$, com domínio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R};\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$, vemos que o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo de f em A, visto que $f(x, y) \geq f(0, 0)$, $\forall (x, y) \in A$. Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 3xy + 3$, temos, pelo Teorema 3.3 que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 3 \neq 0$. Isto não contradiz o Teorema 3.3, pois ele só é aplicado a pontos interiores de D_f e $(0, 0)$ não é ponto interior ao A.

Apresentamos até aqui uma condição necessária para que um ponto interior ao domínio de uma função seja um extremante local desta função. No teorema a seguir, acrescentamos a esta condição já apresentada, mais uma condição (também necessária) e, assim, avançamos mais um passo no nosso estudo de máximos e mínimos em funções de 2 variáveis reais.

Teorema 3.4. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 no aberto A e $P = (p_1, p_2)$ um ponto interior a A, então*

(i) se P é ponto de máximo local de f, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \leq 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \leq 0$;

(ii) se P é ponto de mínimo local de f, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \geq 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \geq 0$.

Demonstração: Demonstremos o item (i). Seja P um ponto de máximo local, seguindo a ideia da demonstração do Teorema 3.3, tomemos uma função real $h(t) = f(P + t\vec{e_1})$, onde $\vec{e_1} = (1, 0)$. A função h admite ponto de máximo local em $t = 0$. Pelo Corolário 3.1, se 0 é máximo local de h, então

$$h'(0) = 0 \text{ e } h''(0) \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) \leq 0.$$

Analogamente, usando a função $g(t) = f(P + t\vec{e_2})$, onde $\vec{e_2} = (0, 1)$, concluímos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) \leq 0.$$

Para demonstrar o item (ii), basta tomar P como ponto de mínimo local e proceder de maneira análoga ao item (i).

∎

Com base nos últimos teoremas, se um ponto $P = (p_1, p_2)$ está no interior do D_f e é um extremante local, ou seja, um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local, então ele necessariamente é um ponto singular. Portanto, para encontrarmos pontos de máximo ou de mínimo locais, devemos procurar primeiro os pontos singulares da função. Façamos alguns exemplos.

Exemplo 3.13. *Determine os candidatos a extremantes locais da função* $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy + 5$.

Resolução: Primeiramente encontremos os pontos singulares da função. De fato, calculando as derivadas parciais e igualando a zero, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + x = 0. \end{cases}$$

Para resolver o sistema, tomemos $x = 2y$ da segunda equação e substituímos na primeira. Assim, temos

$$3(2y)^2 + y = 0 \Rightarrow 12y^2 + y = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = -\frac{1}{12}.$$

Logo, temos que $(0,0)$ e $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ são os pontos singulares da função.

Agora, calculando as derivadas de segunda ordem, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2.$$

Disto, temos que

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2 \leq 0 \Rightarrow (0,0)$ é candidato a ponto de máximo local de f;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = -1 \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = -2 \leq 0 \Rightarrow (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ é candidato a ponto de máximo local de f.

Portanto, os pontos $(0,0)$ e $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ são os candidatos a pontos de máximos locais de f. Na Figura 3.37 verificamos a superfície formada pela função.

Apresentaremos agora uma definição e um lema de suma importância para enunciarmos e demonstrarmos o próximo teorema do nosso estudo.

Definição 3.10. *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *definida no conjunto aberto* A. *A função dada por*

$$H(x,y) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

denominasse ***hessiano*** *de* f.

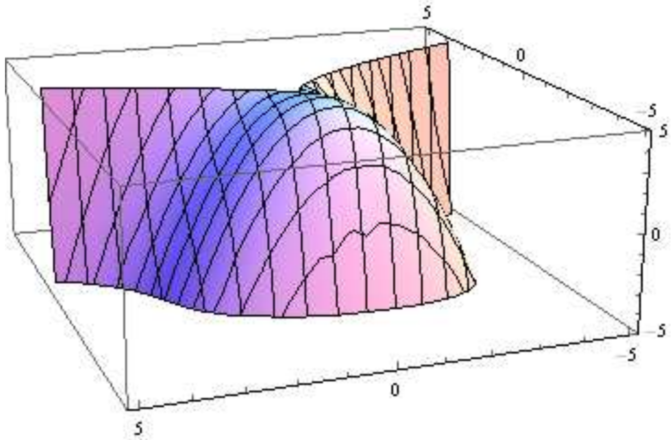

Figura 3.37: $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy + 5$

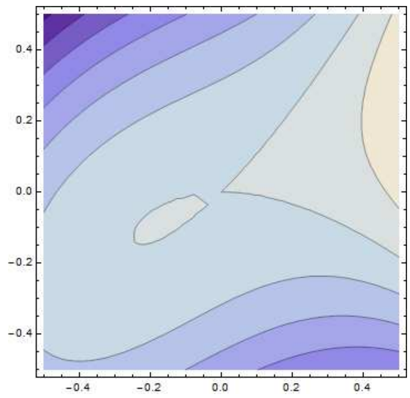

Figura 3.38: Curvas de nível de $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy + 5$

Observamos que $H(x,y) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right] \cdot \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right] - \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right]^2$

Lema 3.1. *Consideremos a forma quadrática $Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$.*

(i) Se $a > 0$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$, então $Q(h,k) > 0, \forall (h,k) \neq (0,0) \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) Se $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$, então $\exists (h_1,k_1)$ e (h_2,k_2) tais que $Q(h_1,k_1) < 0$ e $Q(h_2,k_2) > 0$.

Demonstração: Para a prova deste resultado, desenvolvemos $Q(h,k)$. Assim, supondo $a \neq 0$, temos:

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 = a\left[h^2 + 2\frac{b}{a}hk + \frac{c}{a}k^2\right] =$$

$$= a\left[h^2 + \frac{2b}{a}hk + \frac{b^2}{a^2}k^2 - \frac{b^2}{a^2}k^2 + \frac{c}{a}k^2\right] =$$

$$= a\left[\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}k^2\right] =,$$

ou seja,

$$Q(h,k) = a\left(h + \frac{b}{a}k\right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}k^2 \tag{3.1}$$

A demonstração do item (i) é imediata pela Equação (3.1).

Demonstremos o item (ii). De fato, se $a = 0$, teremos necessariamente $b \neq 0$. Neste caso, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Q(\alpha, 1)$ e $Q(\alpha, -1)$ terão sinais contrários. Se $a \neq 0$, $Q(1,0)$ e $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$ terão sinais contrários visto que $Q(1,0) = a$ e $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}$. Portanto, para $a = 0$ e também para $a \neq 0$, existem (h_1, k_1) e (h_1, k_1) tais que $Q(h_1, k_1) < 0$ e $Q(h_2, k_2) > 0$.

$\blacksquare$

Até aqui mostramos condições necessárias para um ponto ser extremante local de uma função. O teorema a seguir apresenta uma condição suficiente para que um ponto singular seja extremo local de uma função.

Teorema 3.5. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definido no conjunto aberto A e $P = (p_1, p_2) \in A$. Suponhamos que P seja um ponto singular de f. Então,*

(i) se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$ e $H(P) > 0$, então P é um ponto de mínimo local de f;

(ii) se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$ e $H(P) > 0$, então P é um ponto de máximo local de f;

(iii) se $H(P) < 0$, então P não é extremo local. Neste caso, ele é chamado de ponto de sela de f;

(iv) Se $H(P) = 0$, então nada se pode concluir.

Demonstração: Provemos o item (i). Por hipótese, temos que f é de classe C^2, ou seja, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X)$ e a função hessiana são contínuas, $\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Pela hipótese do item (i), tem-se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$ e $H(P) > 0$.

Da continuidade das funções, temos que existe uma $B(P, \varepsilon)$, tal que, $\forall X \in B(P, \varepsilon)$, vale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) > 0 \text{ e } H(X) > 0.$$

Pela Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange de ordem 1 e pela Equação (3.1), temos que, $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, se $(p_1 + h, p_2 + k) \in B(P, \varepsilon)$, então existe $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{y}) \in B(P, \varepsilon)$, tal que

$$f(p_1+h,p_2+k)=f(p_1,p_2)+\frac{\partial f}{\partial x}(p_1,p_2)h+\frac{\partial f}{\partial y}(p_1,p_2)k+\frac{1}{2!}Q(h,k),$$

onde

$$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x},\overline{y})>0,\ b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{x},\overline{y}) \text{ e } c=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x},\overline{y}).$$

Da hipótese, temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)=0$, pois P é ponto singular de f e também $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$.

Pelo item (i) do Lema 3.1, $Q(h,k)>0$. Logo,

$$f(p_1+h,p_2+k)=f(p_1,p_2)+\frac{1}{2!}Q(h,k)>f(p_1,p_2).$$

Portanto, $f(X)>f(P),\quad \forall X\in B(P,\varepsilon)$ é um ponto de mínimo local.

A prova do item (ii) é análoga a do item (i).

Provemos agora o item (iii). Seja $g_{\vec{v}}(t)=f(p_1+ht,p_2+kt)$, onde $\vec{v}=(h,k)$.

Pela Regra da Cadeia,

$$g''_{\vec{v}}(0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_1,p_2)h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_1,p_2)hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_1,p_2)k^2.$$

Pelo item (ii) do Lema 3.1, como

$$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_1,p_2),\ b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_1,p_2) \text{ e } c=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_1,p_2),$$

então existem $\vec{v_1}=(h_1,k_1)$ e $\vec{v_2}=(h_2,k_2)$, tais que $g''_{\vec{v_1}}(0)<0$ e $g''_{\vec{v_2}}(0)>0$.

Assim, $t=0$ é ponto de máximo local de $g_{\vec{v_1}}(t)$ e ponto de mínimo local de $g_{\vec{v_2}}(t)$. Logo, (p_1,p_2) não é extremante local de f, mas sim um ponto de sela.

Agora, provemos o item (iv). Sejam $f_1(x,y)=x^4+y^4$, $f_2(x,y)=-x^4-y^4$ e $f_3(x,y)=x^4-y^4$.

Vemos facilmente que $(0,0)$ é ponto singular das três funções, pois $\nabla f_j(0,0)=0$, onde $j=1,2,3$.

Temos:

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}(0,0)=0 \text{ e } \frac{\partial^2 f_j}{\partial y^2}(0,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f_j}{\partial x\partial y}(0,0)=0, \text{ onde} j=1,2,3.$$

Consequentemente, $H_j(0,0)=0$.

Analisando as funções dadas, temos:

- $f_1(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0)$ é ponto de mínimo global para f_1;
- $f_2(x,y) = -x^4 - y^4 \leq 0 = f(0,0) \Rightarrow (0,0)$ é ponto de máximo global para f_2;
- $f_3(x,y) = x^4 - y^4 \Rightarrow f_3(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^4} < 0$ e $f_3(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^4} > 0$. Logo, $(0,0)$ é ponto de sela de f_3.

Portanto, quando $H(P) = 0$, nada se conclui.

∎

Exemplo 3.14. *Seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$ uma função. Achar os pontos de máximo e mínimo locais desta função.*

Resolução: Primeiramente, precisamos encontrar os pontos singulares de f, ou seja, encontrar os pontos onde $\nabla f(x,y) = 0$. Como $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3)$, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Temos então 4 possíveis soluções para este sistema, sendo elas os pontos $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$. Assim, estes pontos são singulares de f.

Encontremos agora a função hessiana e a derivada segunda em relação a x. Temos:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x.$$

Logo, aplicando os pontos singulares na função hessiana e também na derivada parcial de segunda ordem em relação a x, temos, pelo Teorema 3.5:

- $H(1,1) = 36 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow (1,1)$ é ponto de mínimo local de f;
- $H(1,-1) = -36 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ é ponto de sela de f;
- $H(-1,1) = -36 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ é ponto de sela de f;
- $H(-1,-1) = 36 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0 \Rightarrow (1,1)$ é ponto de máximo local de f.

Notamos que $(1,1)$ não é ponto de mínimo global, visto que $f(-3,0) = -14 < 0 = f(1,1)$ e também $(-1,-1)$ não é ponto de máximo global, pois $f(3,0) = 22 > 8 = f(-1,-1)$

Agora, façamos um exemplo de modelagem para minimizar os custos de materiais em uma produção.

Exemplo 3.15. *Há necessidade de construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo retângulo e com* $1m^3$ *de volume, conforme Figura 3.39. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material.*

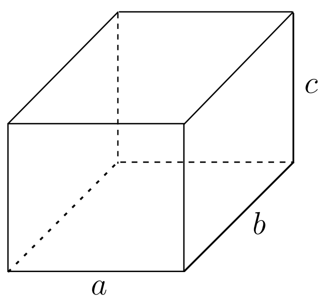

Figura 3.39: Caixa

Resolução: Sejam a, b e c as dimensões da caixa. O enunciado nos diz que o volume é dado por $V = abc = 1$, revelando que $c = \frac{1}{ab}$. A área lateral da caixa é dada por $A_l = 2ac + 2bc$ e a área do fundo da caixa é $A_f = ab$. Logo, a função que devemos minimizar para resolver o problema é

$$f(a,b) = 3(2ac + 2bc) + ab.$$

Substituindo $c = \frac{1}{ab}$ em f, temos

$$f(a,b) = \frac{6}{b} + \frac{6}{a} + ab.$$

Calculando as derivadas parciais e igualando a zero para encontrar o(s) ponto(s) crítico(s), temos

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 6\left(-\frac{1}{a^2}\right) + b = 0 \Rightarrow a^2 b = 6$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 6\left(-\frac{1}{b^2}\right) + a = 0 \Rightarrow ab^2 = 6.$$

Logo, subtraindo uma equação da outra, $a^2b - ab^2 = 0 \Rightarrow a = b$. Disto, temos $a^3 = 6 \Rightarrow a = b = \sqrt[3]{6}$. Portanto, o ponto $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ é ponto singular de f.

Encontremos agora a função hessiana e a derivada de segunda ordem em relação a a.

$$H(a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{12}{a^3} & 1 \\ 1 & \frac{12}{b^3} \end{vmatrix} = \frac{144}{a^3b^3} - 1 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b) = \frac{12}{a^3}.$$

Aplicando o ponto singular $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ em $H(a,b)$ e em $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a,b)$, temos:

$$H(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}) = 2 > 0$$

Logo, pelo item (i) do Teorema 3.5, o ponto $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ é um ponto de mínimo local.

Portanto, para minimizar os custos, as dimensões da caixa devem ser: $a = \sqrt[3]{6}$, $b = a = \sqrt[3]{6}$ e $c = \frac{1}{ab} = \frac{\sqrt[3]{6}}{6}$.

No Exemplo 3.13, com os resultados que havíamos apresentado até então, encontramos que os pontos $(0,0)$ e $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ eram candidatos a máximos locais. Agora, munidos do Teorema 3.5, vamos verificar se esses pontos são realmente máximos locais.

De fato,

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -12x - 1 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x,y) = 6x.$$

Assim, temos:

- $H(0,0) = -1$. Pelo item (iii) do Teorema 3.5, $(0,0)$ é ponto de sela de f;
- $H\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = -1$. Pelo item (ii) do Teorema 3.5, $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ é ponto de máximo local de f.

Portanto, conforme citado anteriormente, o Teorema 3.4 não é suficiente para sabermos se um ponto é ou não extremante local de uma função, diferentemente do Teorema 3.5 que nos garante que o ponto analisado é extremante local da função.

No Exemplo 3.8 vimos uma situação em que, ao modelarmos o problema e aplicarmos a teoria de máximos e mínimos, ajudávamos a salvar uma cidade de uma explosão, pois foi possível prever a possibilidade de o desarmador chegar à bomba com tempo hábil de evitar a explosão. Àquela altura, tínhamos ferramentas necessárias para trabalharmos apenas com uma variável. Agora, munidos da teoria de máximos e mínimos para 2 variáveis, adaptaremos o problema e acrescentaremos um obstáculo (ou tipo de caminho) que o desarmador precisa vencer para chegar até a bomba, como segue no exemplo a seguir que encerra esta seção.

Exemplo 3.16. *Um desarmador de bombas estava em sua casa (ponto A) quando recebeu um chamado de uma cidade situada do outro lado de um rio, cuja distância entre sua casa e a margem do rio é de 3km e o rio possui 1 km de largura. No chamado diziam que havia uma bomba próxima à margem do rio (ponto B) e que no relógio constava 1 hora, 5 minutos e 10 segundos para a explosão. Imediatamente ele pôs-se a caminho correndo por uma estrada onde haviam vários trechos com lama até chegar ao rio. Ao chegar ao rio, pegou uma canoa e atravessou-o remando. Atravessado o rio, continuou o trajeto correndo pela margem, desta vez com o caminho limpo, sem lama. Sabendo que ele consegue desarmar a bomba em 30 segundos, correr o primeiro trecho (com lama) a 8 km/h, remar a canoa a 6 km/h, correr na outra margem a 9 km/h e que, pela margem, a distância entre os pontos A e B é de 7 km, é possível que ele chegue a tempo de desarmar a bomba?*

Resolução: A Figura 3.40 esboça a situação que o desarmador tem que enfrentar.

Precisamos encontrar o tempo mínimo que é possível fazer esse trajeto. Sejam d_1, d_2 e d_3 as distâncias percorridas correndo em solo com lama, remando a canoa e correndo em solo seco, respectivamente. Sejam também x e y as distâncias, pela margem, percorridas correndo em solo com lama e remando a canoa, respectivamente, onde $0 \leq x \leq 7$ e $0 \leq y \leq 7 - x$.

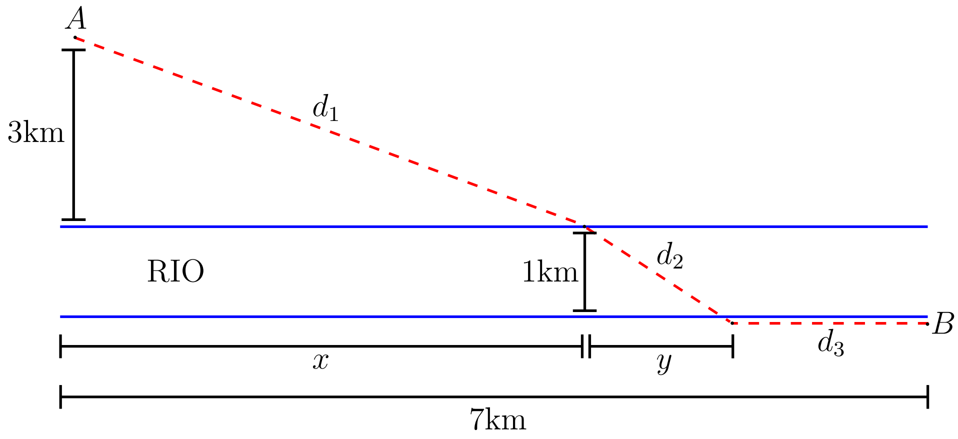

Figura 3.40: Trajeto de A até B

Assim, pela distância de A a B pela margem e pelo Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos de lados 3, d_1 e x e, 1, d_2 e y, as distâncias d_1, d_2 e d_3 são dadas por:

$$d_1{}^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow d_1 = \sqrt{x^2+9},$$

$$d_2{}^2 = 1^2 + y^2 \Rightarrow d_2 = \sqrt{y^2+1} \text{ e},$$

$$d_3 = 7 - x - y.$$

Como $velocidade = \frac{dist\hat{a}ncia}{tempo} \Rightarrow tempo = \frac{dist\hat{a}ncia}{velocidade}$, e seja t_1, t_2 e t_3 os tempos para percorrer as distâncias d_1, d_2 e d_3, respectivamente, temos:

$$t_1 = \frac{d_1}{8} = \frac{\sqrt{x^2+9}}{8},\ t_2 = \frac{d_2}{6} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{6} \text{ e } t_3 = \frac{d_3}{9} = \frac{7-x-y}{9}.$$

Logo, a função que representa o tempo total em relação a x e y é dada por

$$T(x,y) = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{\sqrt{x^2+9}}{8} + \frac{\sqrt{y^2+1}}{6} + \frac{7-x-y}{9}.$$

Para sabermos qual é o tempo mínimo para o trajeto, primeiro encontremos o(s) ponto(s) singular(es) da função. Derivando parcialmente a função em relação a x e em relação a y, temos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2x}{2\cdot 8\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{9} = \frac{x}{8\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{9}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{2y}{2\cdot 6\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{9} = \frac{y}{6\sqrt{y^2+1}} - \frac{1}{9}.$$

Encontremos as raízes das derivadas parciais.

- $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{8\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{9} = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{8\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow 9x = 8\sqrt{x^2+9}.$

  Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

  $81x^2 = 64x^2 + 576 \Rightarrow 17x^2 = 576 \Rightarrow x^2 = \dfrac{576}{17} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{576}{17}} \Rightarrow$

  $\Rightarrow x = \dfrac{24}{\sqrt{17}} \Rightarrow x = \dfrac{24\sqrt{17}}{17} \approx 5{,}8208 \in [0,7];$

- $\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{y}{6\sqrt{y^2+1}} - \dfrac{1}{9} = 0 \Rightarrow \dfrac{y}{6\sqrt{y^2+1}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow 3y = 2\sqrt{y^2+1}.$

  Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

  $9y^2 = 4y^2 + 4 \Rightarrow 5y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = \dfrac{4}{5} \Rightarrow y = \sqrt{\dfrac{4}{5}} \Rightarrow y = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

  $\Rightarrow y = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}8944 \in [0, 7-x].$

Logo, o ponto singular da função é $\left(\dfrac{24\sqrt{17}}{17}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Encontrando as derivadas parciais de segunda ordem da função, temos:

- $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{8\sqrt{x^2+9} - x \cdot \frac{8}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x}{64(x^2+9)} = \dfrac{\frac{16(x^2+9)-16x^2}{2\sqrt{x^2+9}}}{64(x^2+9)} = \dfrac{\frac{72}{\sqrt{x^2+9}}}{64(x^2+9)} =$

  $= \dfrac{72}{\sqrt{x^2+9}} \cdot \dfrac{1}{64(x^2+9)} = \dfrac{9}{8\sqrt{(x^2+9)^3}};$

- $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \dfrac{6\sqrt{y^2+1} - y \cdot \frac{6}{2\sqrt{y^2+1}} \cdot 2y}{36(y^2+1)} = \dfrac{\frac{12(y^2+1)-12y^2}{2\sqrt{y^2+1}}}{36(y^2+1)} = \dfrac{\frac{6}{\sqrt{y^2+1}}}{36(y^2+1)} =$

  $\dfrac{6}{\sqrt{y^2+1}} \cdot \dfrac{1}{36(y^2+1)} = \dfrac{1}{6\sqrt{(y^2+1)^3}};$

- $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0.$

Agora, calculemos a função hessiana e apliquemos o ponto singular.

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,y)\right] \cdot \left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x,y)\right] - \left[\dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(x,y)\right]^2 =$$

$$= \dfrac{9}{8\sqrt{(x^2+9)^3}} \cdot \dfrac{1}{6\sqrt{(y^2+1)^3}} = \dfrac{3}{16\sqrt{(x^2+9)^3} \cdot \sqrt{(y^2+1)^2}}.$$

Assim,

$$H\left(\frac{24\sqrt{17}}{17},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{3}{16\sqrt{\left[\left(\frac{24\sqrt{17}}{17}\right)^2+9\right]^3}\cdot\sqrt{\left[\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+1\right]^3}}=$$

$$=\frac{3}{16\sqrt{\left(\frac{576}{17}+9\right)^3}\cdot\sqrt{\left(\frac{4}{5}+1\right)^3}}=\frac{3}{16\sqrt{\left(\frac{729}{17}\right)^3}\cdot\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^3}}=$$

$$=\frac{3}{16\sqrt{\left(\frac{387420489}{4913}\right)^3}\cdot\sqrt{\left(\frac{729}{512}\right)^3}}=\frac{3}{16\cdot\frac{19683}{17\sqrt{17}}\cdot\frac{27}{5\sqrt{5}}}=\frac{3}{\frac{8503056}{85\sqrt{85}}}=\frac{85\sqrt{85}}{2834352}>0.$$

Calculando a derivada segunda em relação a x no ponto singular, temos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\left(\frac{24\sqrt{17}}{17},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{9}{8\sqrt{\left[\left(\frac{24\sqrt{17}}{17}\right)+9\right]^3}}=\frac{9}{8\sqrt{\left(\frac{576}{17}+9\right)^3}}=$$

$$=\frac{9}{8\sqrt{\left(\frac{729}{17}\right)^3}}=\frac{9}{8\sqrt{\frac{387420489}{4913}}}=\frac{9}{8\cdot\frac{19683}{17\sqrt{17}}}=\frac{9}{\frac{157464}{17\sqrt{17}}}=\frac{17\sqrt{17}}{17496}>0.$$

Logo, como $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\left(\dfrac{24\sqrt{17}}{17},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)>0$ e $H\left(\dfrac{24\sqrt{17}}{17},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)>0$, temos, pelo item (i) do Teorema 3.5 que o ponto $\left(\dfrac{24\sqrt{17}}{17},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ é um ponto de mínimo da função. Assim, apliquemos este ponto em $T(x,y)$ e encontraremos o tempo mínimo para o desarmador chegar até a bomba.

$$T\left(\frac{24\sqrt{17}}{17},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{\sqrt{\left(\frac{24\sqrt{17}}{17}\right)^2+9}}{8}+\frac{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2+1}}{6}+\frac{7-\frac{24\sqrt{17}}{17}-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{9}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{729}{17}}}{8}+\frac{\sqrt{\frac{9}{5}}}{6}+\frac{1}{9}\left(7-\frac{24\sqrt{17}}{17}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{27\sqrt{17}}{136}+\frac{\sqrt{5}}{10}+\frac{7}{9}-\frac{8\sqrt{17}}{51}-\frac{2\sqrt{5}}{45}=$$

$$\approx 1,0738 \text{ horas } \approx 1 \text{ hora e } 4,428 \text{ minutos } \approx 1 \text{ hora, } 4 \text{ minutos e } 26 \text{ segundos.}$$

Portanto, se o tempo mínimo para chegar ao local da bomba é de 1 hora, 4 minutos e 26 segundos e o desarmador leva cerca de 30 segundos para realizar seu trabalho, resultando em 1 hora, 4 minutos e 56 segundos para a bomba estar desarmada, é possível que o desarmador chegue a tempo de evitar a explosão.

Capítulo 4

Máximos e Mínimos de Funções Quadráticas

Ao longo deste capítulo estudaremos máximos e mínimos de funções quadráticas, apresentando o conceito de forma simples, visto que a ideia principal é formular uma proposta para aplicação no Ensino Médio. Para tanto, enunciaremos e, caso necessário, demonstraremos alguns conceitos que servem de pré-requisitos e que têm influência direta nos principais resultados do capítulo. O texto será escrito em uma linguagem que se aproxima da utilizada nos livros didáticos aos quais os alunos têm acesso e faremos as provas/justificativas convenientes, mesmo que estas geralmente não estão presentes nos livros didáticos. Ao fim, deixaremos uma proposta de aplicação da teoria de máximos e mínimos viável à 1ª série do Ensino Médio e a resolução de diversos exercícios/problemas, sendo eles de aplicação direta e também de otimização/modelagem, presentes tanto em livros didáticos como nos Bancos de Questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) [1, 12, 13], incentivando que os alunos fixem o conteúdo através de situações em que estão munidos de uma função, precisando apenas aplicar os resultados e, também, que trabalhem a capacidade de modelagem, onde não conhecem previamente uma função para aplicarem os resultados que aprenderam, mas sim, buscam trabalhar o problema a fim de transformá-lo em algo que saibam resolver. Quando necessário e a título de complementação, faremos algumas observações visando explicitar que o Cálculo

Diferencial poderia ser utilizado para demonstração direta de alguns resultados.

Vale ressaltar que esta proposta não será aplicada, de imediato, em uma sala de aula para apresentação de resultados neste trabalho. Para dimensionarmos a viabilidade da aplicação desta proposta em uma sala de aula, traremos alguns comentários de professores de escolas públicas e também particulares que terão acesso a este material e darão seus pareceres através da experiência que acumularam ao longo dos anos. Estes comentários nos ajudarão na conclusão deste trabalho, prevendo possíveis resultados da aplicação.

4.1 Um pouco da Teoria sobre Funções Quadráticas

Nesta seção focaremos nosso estudo nos pré-requisitos teóricos trazidos por livros didáticos do Ensino Médio e alguns outros que servem de complemento [3, 7, 14, 15], os quais são base para o desenvolvimento do que será proposto na seção subsequente. Desta forma, apresentaremos a seguir definições, resultados importantes e exemplos pertinentes ao contexto.

Definição 4.1. *Chama-se função quadrática ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.*

São exemplos de funções quadráticas:

- $f(x) = x^2 + x + 1$, onde $a = b = c = 1$;
- $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, onde $a = 2$, $b = 3$ e $c = -5$;
- $f(x) = x^2 - 5x$, onde $a = 1$, $b = -5$ e $c = 0$;
- $f(x) = -3x^2 + 4$, onde $a = -3$, $b = 0$ e $c = 4$;
- $f(x) = 5x^2$, onde $a = 5$ e $b = c = 0$.

Definição 4.2. *Sobre funções quadráticas, definimos:*

(i) O gráfico de uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a \neq 0$ *é uma curva chamada* ***parábola*** *(Figura 4.1);*

(ii) Toda parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a uma reta chamada de ***eixo de simetria*** *e representada por* ***e*** *(Figura 4.2);*

(iii) O ponto comum à parábola e ao eixo de simetria é um ponto chamado de ***vértice da parábola****, o qual estudaremos na seção seguinte (Figura 4.2).*

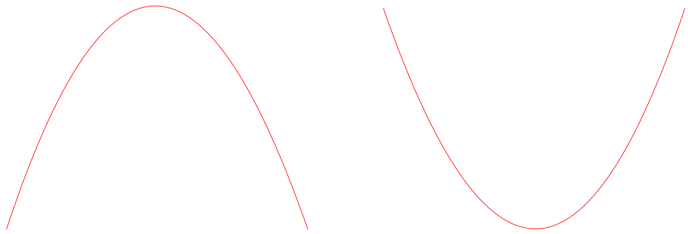

Figura 4.1: Parábolas

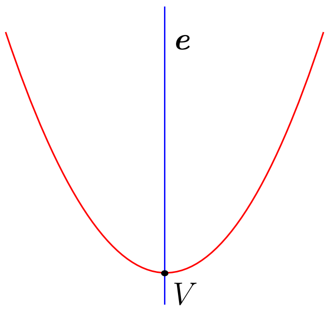

Figura 4.2: Parábola com Eixo de Simetria e Vértice em Destaque

É importante ressaltar que a parábola é construída atribuindo infinitos valores reais para x, mas geralmente escolhemos alguns pontos para termos ideia de como traçá-la, visto da inviabilidade de encontrarmos infinitos pontos.

Ainda referindo-se à parábola, temos que:

- se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima, ou seja, sentido positivo do eixo Oy (Figura 4.3);

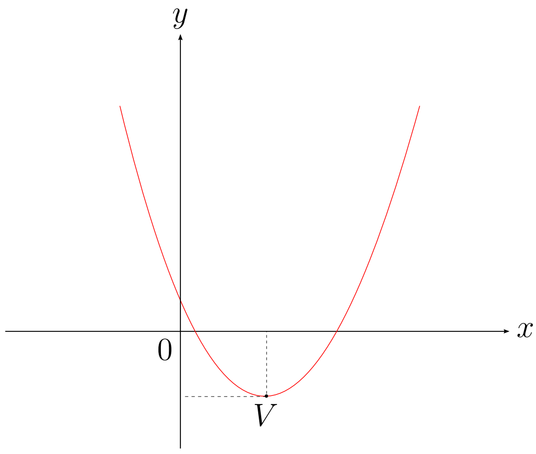

Figura 4.3: Parábola quando $a > 0$

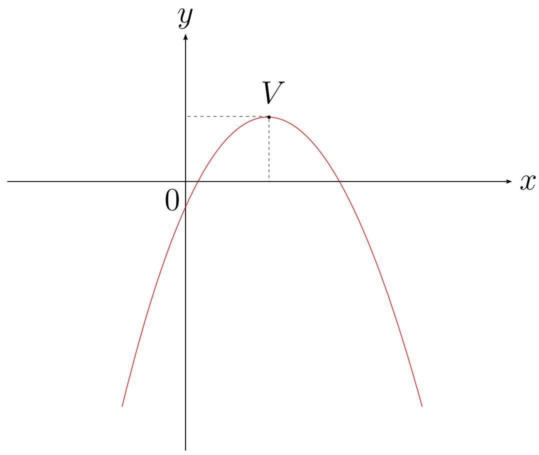

Figura 4.4: Parábola quando $a < 0$

- se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo, ou seja, sentido negativo do eixo Oy (Figura 4.4).

Definição 4.3. *A equação do segundo grau com coeficientes reais a, b e c é uma expressão da forma:*

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{4.1}$$

onde $a \neq 0$ e x é uma variável real a ser determinada. Quando b e/ou c são iguais a zero, dizemos que a equação é incompleta.

Definição 4.4. *Seja $f(x) = ax^2+bx+c$ uma função quadrática, onde $a \neq 0$. Chamam-se zeros ou raízes de f os números reais x tais que $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$.*

A hipótese de que $a \neq 0$ é de suma importância, visto que se $a = 0$ teríamos uma equação afim (ou do 1º grau) da forma $bx + c = 0$.

Pela definição anterior, as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da Equação (4.1). Para encontrar tais raízes, podemos resolver a equação pelo Método de Completamento de Quadrados, pois ele consiste em escrever a equação numa forma equivalente que nos permita concluir quais são as soluções diretamente.

Utilizando o método, procedemos do seguinte modo: isolando o termo que não contém a variável x do lado direito da igualdade que temos na Equação (4.1),

$$ax^2 + bx = -c$$

e dividindo ambos os lados por a, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Agora, acrescentemos um número em ambos os lados da equação, de modo que tenhamos do lado esquerdo da igualdade um quadrado perfeito. Observemos que é necessário adicionar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ aos dois lados da igualdade. Assim,

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Geralmente chamamos a expressão $b^2 - 4ac$ de **discriminante** da Equação (4.1) e denotamos pela letra maiúscula Δ do alfabeto grego. Assim, escrevemos a igualdade anterior da seguinte forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}. \tag{4.2}$$

Analisando a Equação (4.2), só existirá algum número real que satisfaça a igualdade, se $\Delta \geq 0$, visto que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$.

Tomando $\Delta \geq 0$, podemos agora extrair a raiz quadrada. De fato,

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ e } x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}.$$

Subtraindo $\frac{b}{2a}$ em ambos os lados das duas igualdades acima, temos:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logo, substituindo $\Delta = b^2 - 4ac$ obtemos as seguintes soluções para a Equação (4.1):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A expressão $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ é equivalente a x_1 e x_2 e é chamada **Fórmula de Bháskara** e uma das formas de demonstrá-la é pelo Método de Completamento de Quadrados, conforme detalhamos.

Historicamente, acredita-se que a Fórmula de Bháskara não tenha sido desenvolvida pelo matemático indiano do século XII chamado Bháskara, visto que os babilônios já tinham conhecimento deste método cerca de dois mil anos antes de Cristo. Uma hipótese é de que a famosa fórmula leve o nome do matemático hindu por ter sido ele quem a publicara em um livro seu.

Analisando a Fórmula de Bháskara, podemos concluir que

- se $\Delta > 0$ existem duas soluções reais;
- se $\Delta = 0$ só existe uma solução real, dada por $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;
- se $\Delta < 0$ não existe solução real.

Ressaltamos que o número de raízes está diretamente ligado ao número de interseções da parábola com o eixo Ox, ou seja, quando há duas raízes reais, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$; quando há uma única raiz real, a parábola é tangente ao eixo Ox no ponto $(x_1, 0)$; quando não há raiz real, a parábola não intercepta o eixo Ox em nenhum ponto.

A seguir, mostremos um exemplo para entendermos como se aplica o Método de Completamento de Quadrados e também a Fórmula de Bháskara.

Exemplo 4.1. *Resolva a equação $x^2 - 6x + 8 = 0$ completando quadrados e também aplicando a fórmula de Bháskara.*

Resolução: Na equação, tem-se $a = 1$, $b = -6$ e $c = 8$.

Façamos primeiro completando quadrados. De fato, isolando o termo que não contém variável, temos:

$$x^2 - 6x = -8.$$

Como $a = 1$, o passo da divisão por a não altera a equação anterior. Podemos então, somar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{-6}{2\cdot 1}\right)^2 = (-3)^2 = 9$ em ambos os lados da equação, de modo que do lado esquerdo fique um quadrado perfeito. Assim,

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9,$$

ou seja,

$$(x-3)^2 = 1.$$

Extraindo a raiz quadrada, temos:

$$x - 3 = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x - 3 = \pm 1.$$

Logo, $x - 3 = 1$ ou $x - 3 = -1$.

Portanto, as soluções da equação $x^2 - 6x + 8 = 0$ são $x_1 = 4$ e $x_2 = 2$.

Agora, façamos pela Fórmula de Bháskara, ou seja, usando

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Aplicando $a = 1$, $b = -6$ e $c = 8$ na fórmula, temos:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1.$$

Logo, $x_1 = 3 + 1 = 4$ e $x_2 = 3 - 1 = 2$, o que condiz com as soluções encontradas pelo Método de Completamento de Quadrados.

Vale ressaltar que a Fórmula de Bháskara é mais utilizada do que o Completamento de Quadrados, visto que sua aplicação é feita de forma direta e nos leva às reais soluções da equação.

Agora, vamos obter coordenadas do ponto $V = (x_v, y_v)$, que chamamos de **vértice da parábola**. Para tanto, utilizaremos a Definição 4.2 para ajudar na justificativa do resultado a seguir.

Proposição 4.1. *O vértice da parábola que representa o gráfico de uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem coordenadas $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, ou seja,*

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Demonstração: Para demonstrarmos este resultado, precisamos analisar o caso em que a parábola tem concavidade voltada para cima ($a > 0$) e o caso em que a parábola tem concavidade voltada para baixo ($a < 0$).

Se $a > 0$, tomemos $k \in \mathbb{R}$ tal que $k > -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow 4ak > -\Delta$, pois assim, no gráfico temos k acima da ordenada do vértice (Figura 4.5).

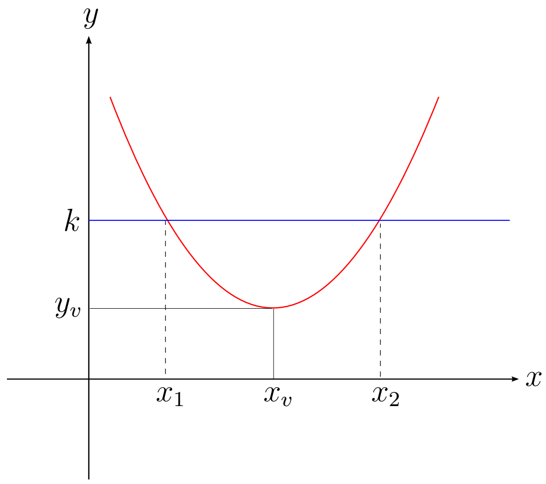

Figura 4.5: Gráfico caso $a > 0$

Resolvendo a equação

$$ax^2 + bx + c = k, \tag{4.3}$$

temos:

$$ax^2 + bx + c - k = 0.$$

Assim,

$$\tilde{\Delta} = b^2 - 4a(c-k) = b^2 - 4ac + 4ak = \Delta + 4ak > \Delta - \Delta = 0 \Rightarrow \tilde{\Delta} > 0.$$

Daí existem 2 soluções para a Equação (4.3), sendo elas:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}$$

e essas soluções são as abscissas dos pontos onde a reta $y = k$ intersepta a parábola $y = ax^2 + bx + c$. Devido a simetria da parábola, a abscissa do vértice é o ponto médio dessas 2 soluções. Encontremos x_v.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b+\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2a}}{2} = \frac{-\frac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Para encontrarmos y_v basta calcularmos $f(x_v)$, ou seja,

$$y_v = f(x_v) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a{x_v}^2 + bx_v + c = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Logo, provamos que $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ quando $a > 0$.

Se $a < 0$, basta tomarmos $k < -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow 4ak > -\Delta$ e a demonstração será análoga.

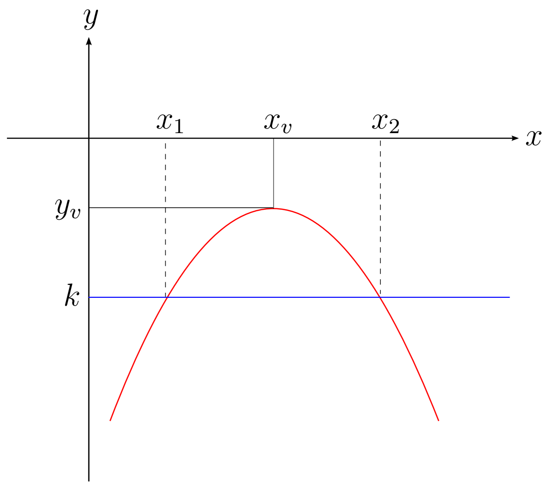

Figura 4.6: Gráfico caso $a < 0$

Portanto, o vértice da parábola que representa o gráfico de uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

■

Exemplificamos a utilização da proposição anterior através do exemplo a seguir.

Exemplo 4.2. *Dadas as funções $y = f(x) = x^2 - 6x + 4$ e $y = g(x) = -x^2 + 2x - 5$, obtenha as coordenadas do vértice $V = (x_v, y_v)$ das parábolas que representam cada uma destas funções.*

Resolução: Para a função $y = x^2 - 6x + 4$ temos $a = 1$, $b = -6$ e $c = 4$. Assim,

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = -(-3) = 3$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = -\frac{36 - 16}{4} = -\frac{20}{4} = -5.$$

Logo, $V = (3, -5)$.

Para a função $y = -x^2 + 2x - 5$, temos $a = -1$, $b = 2$ e $c = -5$. Assim,

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = -\frac{2}{-2} = -(-1) = 1$$

e

$$y_v = -\frac{(2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{4 - 20}{-4} = \frac{-16}{-4} = -4.$$

Logo, $V = (1, -4)$.

Agora, mostraremos um resultado que relaciona o eixo de simetria da parábola com a abscissa do seu vértice.

Proposição 4.2. *O eixo de simetria da parábola que representa uma função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ é a reta $x = x_v = -\frac{b}{2a}$.*

Demonstração: Tomemos $P_1 = (x, y)$ um ponto da parábola. Assim, $y = ax^2 + bx + c$.

Para vermos que $x = x_v = -\frac{b}{2a}$ é eixo de simetria, devemos mostrar que o ponto $P_2 = (\overline{x}, y)$, também pertence à parábola, onde $x_v = \frac{x+\overline{x}}{2} \Rightarrow \overline{x} = 2x_v - x$, indicando que x_v é ponto médio do segmento cujos extremos são x e $\overline{x}$ (Figura 4.7).

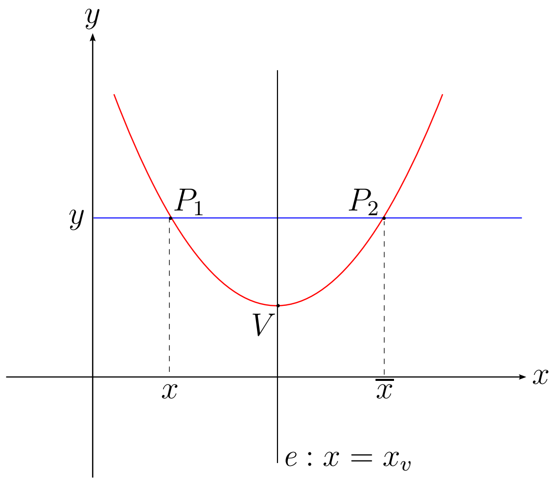

Figura 4.7: Gráfico da Parábola com Detalhes

De fato,

$$a\overline{x}^2 + b\overline{x} + c = a(2x_v - x)^2 + b(2x_v - x) + c = 4a{x_v}^2 - 4ax_vx + ax^2 + 2bx_v - bx + c.$$

Substituindo $x_v = -\frac{b}{2a}$, temos:

$$4a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - 4a\left(-\frac{b}{2a}\right)x + ax^2 + 2b\left(-\frac{b}{2a}\right) - bx + c =$$

$$= 4a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + 2bx + ax^2 - \frac{b^2}{a} - bx + c =$$

$$= \frac{b^2}{a} + bx + ax^2 - \frac{b^2}{a} + c =$$

$$= ax^2 + bx + c = y.$$

Logo, o ponto $P_2 = (\overline{x}, y)$ também pertence à parábola.

Portanto, o eixo de simetria da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é a reta $x = x_v = -\frac{b}{2a}$.

∎

Observação: 4.1. *Para traçarmos um parábola que representa o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + b + c$ é importante conhecermos o seu vértice e, assim, utilizando a simetria da parábola, escolhermos pares de pontos no eixo x que têm x_v como ponto médio, ou seja, pontos que equidistam de x_v, pois a função nestes pontos têm o mesmo valor (conforme demonstração do resultado anterior e também será tratado na próxima subseção). Para exemplificar, pode-se tomar os pares de pontos: $x_v - 1$ e $x_v + 1$, $x_v - 2$ e $x_v + 2$, $x_v - n$ e $x_v + n$, com $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, teremos ideia do quanto a parábola é "aberta" ou "fechada".*

Com base no que vimos até aqui sobre a teoria de funções quadráticas, podemos desenvolver uma proposta para aplicação do conceito de máximos e mínimos para o ensino médio, o que segue na próxima seção.

4.2 Proposta de Aplicação no Ensino Médio

Nesta seção assumiremos que os alunos já conheçam o conteúdo teórico apresentado na seção anterior. Assim, focaremos em elaborar uma proposta para aplicação do conceito de máximos e mínimos no Ensino Médio, trazendo o conteúdo teórico específico necessário para a sua total compreensão, fixando através de problemas de aplicação direta dos resultados aprendidos e de uma série de problemas que abrangem diversas situações reais, exigindo interpretação para modelar e, em seguida, aplicar as ferramentas de resolução viáveis. Não faremos aqui a previsão de quantas aulas serão necessárias para aplicação deste material, visto que a proposta é direcionada ao professor e cabe a ele abordar da maneira que julgar viável a cada turma que leciona. Lembramos que a proposta é direcionada à 1ª série do Ensino Médio, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo para a disciplina de Matemática [11]. De início, apresentaremos um breve resumo da Metodologia de Resolução de Problemas, a qual é direcionada ao professor a fim de que durante a aplicação, haja uma interação maior através do diálogo professor-aluno, incentivando que o aluno construa a resposta do problema por partes.

4.2.1 Breve resumo da Metodologia de Resolução de Problemas

Para aplicação deste material, é importante que o professor tenha conhecimento de alguns tópicos importantes sobre resolução de problemas, visto que durante as aulas é indispensável que haja diálogo entre professor e alunos, onde o professor propõe perguntas como situações problemas e o aluno tende a construir a solução do problema através das respostas dadas para cada situação que se depara.

Segundo Dante [4] a Metodologia de Resolução de Problemas tem os seguintes objetivos:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio no aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Envolver os alunos com aplicações da matemática;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática aos alunos;

- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras.

O papel do professor é ensinar o aluno a resolver problemas, visando a construção de conhecimento através dos objetivos citados.

Resolver um problema significa encontrar a(s) resposta(s) para o que se pede no problema. De acordo com o esquema de Polya [16], são quatro as etapas principais para a resolução de problemas:

a) Compreender o problema

  - O que o problema está perguntando?
  - Quais são os dados e as condições do problema?
  - É possível fazer uma figura ou um esquema?
  - Qual a incógnita?

b) Elaborar um plano

  - Qual o seu plano para resolver o problema?
  - Que estratégia você tentará desenvolver?
  - Tente organizar os dados em tabelas ou gráficos.
  - Tente resolver o problema por partes.

c) Executar o plano

  - Execute o plano, verificando passo a passo.
  - Efetue todos os cálculos indicados no plano.
  - Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

d) Fazer o retrospecto ou verificação.

  - Examine se a solução obtida está correta.
  - Existe outra maneira de resolver o problema?

- É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

É importante finalizar o problema com a resposta dada através de uma frase que evidencie claramente o resultado encontrado.

Essas etapas são desenvolvidas pelo professor em sala de aula por meio de perguntas que ache viável e interessantes para a construção da resposta do problema. Neste trabalho não detalharemos as etapas durante a resolução dos problemas e nem preveremos um suposto diálogo, visto que em cada turma tem-se uma realidade e resta ao professor elaborar suas perguntas e reformulá-las de acordo com as respostas que obter, para assim ter sucesso no diálogo e, consequentemente, êxito na resposta final.

Visto isto, apresentemos então a proposta.

4.2.2 Teoria e Problemas de Máximos e Mínimos de Funções Quadráticas

O objetivo desta subseção é apresentar o conceito de máximos e mínimos das funções quadráticas através do conteúdo trabalhado até aqui. Para tanto, enunciaremos uma definição e uma proposição, as quais são as bases destes conceitos e também exemplos e exercícios/problemas que permitam a melhor compreensão e aprendizado.

Definição 4.5. *Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, chama-se*

(i) ponto de máximo o número x tal que $f(x)$ assuma seu valor máximo;

(ii) ponto de mínimo o número x tal que $f(x)$ assuma seu valor mínimo.

A seguir, mostramos o uso desta definição em dois exemplos.

Exemplo 4.3. *Dada a função quadrática $y = f(x) = x^2$, encontre o ponto de mínimo e também o valor mínimo assumido pela função.*

Resolução: Podemos atribuir valores a x e determinar pontos no plano cartesiano, para assim, desenharmos a parábola que passa por eles.

x	$f(x) = x^2$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$
0	$f(0) = 0^2 = 0$
1	$f(1) = 1^2 = 1$
2	$f(2) = 2^2 = 4$

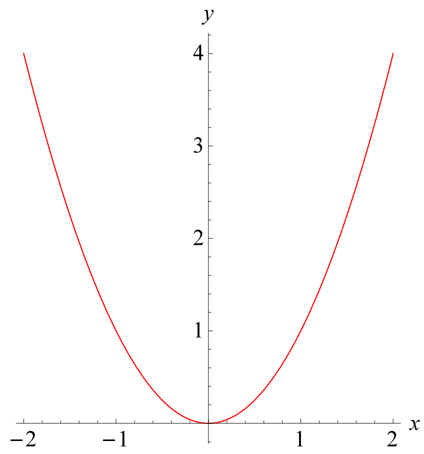

Figura 4.8: $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

Notamos, tanto pelos valores da tabela, quanto pelo gráfico, que o menor valor que a função assume é 0 e se dá quando $x = 0$, pois a f é sempre positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $x = 0$ é ponto de mínimo da função.

Exemplo 4.4. *Dada a função quadrática $y = f(x) = -x^2$, encontremos o ponto de máximo e também o valor máximo assumido pela função.*

Resolução: Podemos atribuir valores a x e determinar pontos no plano cartesiano, para assim, desenharmos a parábola que passa por eles.

x	$f(x) = -x^2$
-2	$f(-2) = -(-2)^2 = -4$
-1	$f(-1) = -(-1)^2 = -1$
0	$f(0) = -(0)^2 = 0$
1	$f(1) = -(1)^2 = -1$
2	$f(2) = -(2)^2 = -4$

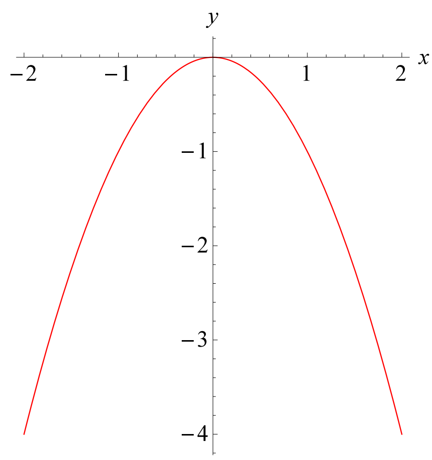

Figura 4.9: $f(x) = -x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

Notamos, tanto pelos valores da tabela quanto pelo gráfico, que o maior valor que a função assume é 0 e se dá quando $x = 0$, pois a f é sempre negativa para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $x = 0$ é ponto de máximo da função.

Proposição 4.3. *Seja o ponto $V = (x_v, y_v)$ vértice da parábola que representa graficamente a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.*

(i) Se $a > 0$, então a abscissa de V, $x_v = -\frac{b}{2a}$, é ponto de mínimo e a ordenada de V, $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, é o valor mínimo da função f.

(ii) Se $a < 0$, então a abscissa de V, $x_v = -\frac{b}{2a}$, é ponto de máximo e a ordenada de V, $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, é o valor máximo da função f.

Demonstração: Para demonstrarmos este resultado, retomemos a fórmula da função quadrática e a escrevamos de outra forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Analisando esta última forma, notamos que a, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes e apenas x é uma variável. Assim, dividimos em dois casos, conforme o enunciado da proposição:

(i) se $a > 0$, então o valor mínimo de y ocorre quando ocorrer o valor mínimo de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$. Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Com isto, o valor mínimo de y é
$$y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a};$$

(ii) se $a < 0$, raciocinando de modo semelhante ao item (i), concluímos que o valor máximo de y ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$. Assim, o valor máximo de y é
$$y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, para ambos os casos a proposição está provada.

∎

Confirmando o que vimos anteriormente, a função $f(x) = x^2$ terá ponto de mínimo em $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2a} = 0$ e e valor mínimo em $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{0}{4a} = 0$. Já a função $f(x) = -x^2$ terá ponto de máximo em $x_v = 0$ e valor máximo em $y_v = 0$.

Observação: 4.2. *Durante a resolução dos exercícios, o cálculo da ordenada do vértice, caso já seja conhecida a sua abscissa, pode ser feito utilizando a seguinte expressão:*

$$y_v = a{x_v}^2 + bx_v + c,$$

que equivale a $y_v = f(x_v)$. Dependendo da situação que temos a resolver, é mais simples calcular dessa forma ao invés de aplicar diretamente $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Apresentemos agora uma proposta de exemplos e problemas com suas respectivas resoluções. Em sala de aula o professor poderá trabalhá-los da forma que preferir (como exemplo para resolver junto aos alunos na lousa, como exercício ou até mesmo como desafios) e na quantidade que julgar necessário.

Exemplo 4.5. *Determine o valor máximo (ou mínimo) e o ponto de máximo (ou de mínimo) de cada uma das funções:*

a) $y = x^2 - 8x + 7$*;*

b) $y = -2x^2 + 2x - 3$*;*

c) $y = -x^2 + 2x + 8$*;*

d) $y = 3x^2 - 2x + 1$*.*

Resolução: Façamos item por item o desenvolvimento para encontrarmos o que é pedido.

a) Temos $a = 1$, $b = -8$ e $c = 7$. Como $a = 1 > 0$ e $V = (x_v, y_v)$, x_v nos dará o ponto de mínimo e y_v o valor mínimo da função. Calculando esses valores, temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \cdot 1} = -(-4) = 4$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}{4 \cdot 1} = -\frac{64 - 28}{4} = -\frac{36}{4} = -9$$

ou

$$y_v = a{x_v}^2 + bx_v + c = 1 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 7 = -9.$$

Logo, o ponto de mínimo da função é 4 e o valor mínimo é -9.

b) Temos $a = -2$, $b = 2$ e $c = -3$. Como $a = -2 < 0$ e $V = (x_v, y_v)$, x_v nos dará o ponto de máximo e y_v o valor máximo da função. Calculando esses valores, temos:

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot (-2)} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

e

$$y_v = -\frac{2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3)}{4 \cdot (-2)} = -\frac{-20}{-8} = -\frac{5}{2}.$$

Logo, o ponto de máximo da função é $\frac{1}{2}$ e o valor mínimo é $-\frac{5}{2}$.

c) Temos $a = -1$, $b = 2$ e $c = 8$. Como $a = -1 < 0$ e $V = (x_v, y_v)$, x_v nos dará o ponto de máximo e y_v o valor máximo da função. Calculando esses valores, temos:

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = -(-1) = 1$$

e

$$y_v = a{x_v}^2 + bx_v + c = (-1) \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 9.$$

Logo, o ponto de máximo da função é 1 e o valor máximo é 9.

d) Temos $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$. Como $a = 3 > 0$ e $V = (x_v, y_v)$, x_v nos dará o ponto de mínimo e y_v o valor mínimo da função. Calculando esses valores, temos:

$$x_v = -\frac{-2}{2 \cdot 3} = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

e

$$y_v = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = -\frac{-8}{12} = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Logo, o ponto de mínimo da função é $\frac{1}{2}$ e o valor mínimo é $\frac{2}{3}$.

Problema 4.1. *Um físico lançou uma pedra obliquamente para cima, constatando que a função que demonstra a trajetória do objeto era* $y = f(x) = -\frac{x^2}{5} + 8x$, *em que* y, *tem sua medida em metros, e é a altura atingida pela pedra para um deslocamento* x, *também em metros, e na horizontal.*

a) Qual foi a altura máxima atingida pela pedra?

b) Qual foi o deslocamento x *para que a pedra atingisse a altura máxima?*

Resolução: Pela função que descreve a trajetória da pedra, temos $a = -\frac{1}{5}$, $b = 8$ e $c = 0$. Seja $V = (x_v, y_v)$ o vértice da parábola que representa a função.

a) A altura máxima atingida pela pedra será dada pela ordenada do vértice da parábola, pois $a = -\frac{1}{5} < 0$. Logo,

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 0}{4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{64}{-\frac{4}{5}} = -\left(-\frac{320}{4}\right) = 80.$$

b) O deslocamento x para que a pedra atingisse altura máxima será dado pela abscissa do vértice da parábola. Logo,

$$x_v = -\frac{8}{2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = -\frac{8}{-\frac{2}{5}} = -\left(-\frac{40}{2}\right) = 20.$$

Portanto, com um deslocamento de 20 metros em x, atingiu-se a altura máxima de 80 metros em y.

Problema 4.2. *Segundo previsões de um jornal econômico, o PIB anual de um país* (y), *em bilhões de dólares, daqui a* x *anos poderá ser calculado pela lei* $y = \frac{4}{5}x^2 - 8x + 80$. *Pode-se prever um valor máximo ou mínimo para o PIB deste país? Determine quanto será este valor extremo (máximo ou mínimo) atingido e também quanto tempo precisará para isso ocorrer.*

Resolução: Analisando y como uma função que depende de x, ou seja, o valor y do PIB em x anos, temos que, por $a = \frac{4}{5} > 0$, a função admitirá um valor mínimo, o qual é dado pela ordenada do vértice da parábola que representa a função. Para sabermos daqui a quanto tempo isso ocorrerá, basta encontrarmos a abscissa do vértice da parábola. Seja $V = (x_v, y_v)$ o vértice da parábola.

Como $a = \frac{4}{5}$, $b = -8$ e $c = 80$, temos:

$$y_v = -\frac{(-8)^2 - 4 \cdot \frac{4}{5} \cdot 80}{4 \cdot \frac{4}{5}} = -\frac{64 - \frac{1280}{5}}{\frac{16}{5}} = -\frac{-\frac{960}{5}}{\frac{16}{5}} = -\left(-\frac{960}{16}\right) = -(-60) = 60$$

e

$$x_v = -\frac{-8}{2 \cdot \frac{4}{5}} = -\frac{-8}{\frac{8}{5}} = -(-5) = 5.$$

Portanto, daqui a 5 anos o PIB deste país terá seu menor valor, sendo ele 60 bilhões de dólares.

Problema 4.3. *Uma bola é lançada ao ar. Suponha que sua altura h, em metros, t segundos após o lançamento, seja dada por $h(t) = -t^2 + 4t + 6$. Determine:*

a) o instante em que a bola atinge a sua altura máxima;

b) a altura máxima atingida pela bola.

Resolução: Da função que evidencia a altura da bola, temos $a = -1$, $b = 4$ e $c = 6$. Seja $V = (t_v, h_v)$ o vértice da parábola que representa a função.

a) Como $a = -1 < 0$, o instante em que a bola atinge a sua altura máxima será dado pela abscissa do vértice da parábola, ou seja,

$$t_v = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = -(-2) = 2.$$

b) A altura máxima atingida pela bola será a ordenada do vértice da parábola, ou seja,

$$h_v = h(t_v) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 6 = 10.$$

Portanto, a bola atinge no instante 2 segundos a sua altura máxima de 10 metros.

Problema 4.4. *Durante o tempo em que um balão de gás está sendo aquecido, a temperatura interna (T) varia de acordo com a função $T(t) = -t^2 + 4t + 2$, sendo t o tempo em minutos. Decorridos quantos minutos a temperatura interna é máxima?*

Resolução: Da função que relaciona a temperatura ao longo do tempo, temos $a = -1$, $b = 4$ e $c = 2$. Seja $V = (t_v, T_v)$ o vértice da parábola que representa a função. Como

$a = -1 < 0$, a temperatura terá seu valor máximo no instante dado pela abscissa do vértice da parábola, ou seja,

$$t_v = -\frac{4}{2 \cdot (-1)} = -(-2) = 2.$$

Portanto, decorridos 2 minutos, a temperatura interna do balão a gás atinge seu valor máximo.

Problema 4.5. *O Instituto de Meteorologia de uma cidade no sul do país registrou a temperatura local nas 12 primeiras horas de um dia de inverno. Uma lei que pode representar a temperatura (T) em função das horas (h) é $T(h) = \frac{1}{4}h^2 - \frac{7}{2}h + k$, onde $0 \leq h \leq 12$ e k é uma constante real.*

a) Determine o valor de k, sabendo que às 3 horas da manhã a temperatura indicou $0°C$.

b) Qual foi a temperatura mínima registrada?

Resolução: Primeiramente resolveremos o item a) para utilizarmos o valor de k no item seguinte.

a) Temos a informação de que às 3 horas da manhã a temperatura indica $O°C$, ou seja, $T(3) = 0$. Assim, calculamos o valor de k da seguinte forma:

$$T(3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 3^2 - \frac{7}{2} \cdot 3 + k = 0 \Rightarrow \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + k = 0 \Rightarrow k = \frac{33}{4}.$$

Logo, temos que $k = \frac{33}{4}$.

b) Com base no item a), nossa função será dada por

$$T(h) = T(h) = \frac{1}{4}h^2 - \frac{7}{2}h + \frac{33}{4},$$

onde $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{7}{2}$ e $c = \frac{33}{4}$. Seja $V = (h_v, T_v)$ o vértice da parábola que representa a função. Como $a = \frac{1}{4} > 0$, a temperatura mínima será dada pela ordenada do vértice da parábola. Calculando T_v, temos:

$$T_v = -\frac{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{33}{4}}{4 \cdot \frac{1}{4}} = -\left(\frac{49}{4} - \frac{33}{4}\right) = -\frac{16}{4} = -4.$$

Logo, a temperatura mínima registrada foi $-4°C$.

Problema 4.6. *A soma de dois números naturais é 14. Qual é o maior produto possível que se pode obter com esses números?*

Resolução: Chamemos um dos números de x. Assim, o outro número será $14 - x$. Seja $P(x) = x(14 - x) = 14x - x^2$ a função que nos dá o produto de x e $14 - x$. Como $P(x) = -x^2 + 14x$ é uma função quadrática com $a = -1 < 0$, a função tem seu valor máximo na ordenada do vértice da parábola que a representa.

Sendo o vértice $V = (x_v, P_v)$, calculemos P_v.

$$P_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{14^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = -\frac{196}{-4} = -(-49) = 49.$$

Logo, o maior produto possível que se pode obter com os dois números será 49, sendo ambos igual a 7.

Problema 4.7. *Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$ 20,00 mais R\$ 2,00 por cada lugar vago. Qual é o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima? Qual será o valor dessa renda máxima?*

Resolução: Seja x o número de passageiros desta excursão. Cada passageiro pagará R\$ 20,00 mais R\$ 2,00 por assento vago, ou seja, teremos $40 - x$ lugares vagos. Assim, a função que nos dará a rentabilidade da empresa em relação ao número de passageiros presentes na excursão será:

$$R(x) = x[20 + 2(40 - x)] = x(20 + 80 - 2x) = -2x^2 + 100x.$$

Como a função rentabilidade é quadrática com $a = -2 < 0$ e seja $V = (x_v, R_v)$ o vértice da parábola que representa a função, a abscissa do vértice nos dará o número de passageiros para que a renda seja máxima e a ordenada nos dará o valor dessa renda. Calculando x_v e R_v, temos:

$$x_v = -\frac{100}{2 \cdot (-2)} = -\frac{100}{-4} = -(-25) = 25$$

e

$$y_v = R(x_v) = R(25) = -2 \cdot (25)^2 + 100 \cdot 25 = 1250.$$

Portanto, se forem 25 passageiros na excursão, a empresa terá sua maior rentabilidade, sendo ela de R$ 1250,00.

Problema 4.8. *Para castigar os alunos de sua turma por indisciplina, o professor Zerus decidiu descontar da nota mensal de cada aluno uma porcentagem igual à essa nota mensal, isto é, quem tirou 60, terá um desconto de 60% na nota, quem tirou 20, um desconto de 20% da nota, e assim por diante. A nota mensal máxima é 100.*

a) Quem ficará com a maior nota? Qual será essa nota?

b) E a menor?

c) Alunos que tiraram boas notas reclamaram que vão ficar com a mesma nota dos alunos que tiraram más notas. Eles estão certos?

Resolução: Seja x a representação da nota mensal. Segundo os critérios do Professor Zerus, quem teve x como nota mensal terá um desconto de $x\%$ sobre a nota mensal, ou seja, perderá $x\%$ de $x = \frac{x}{100} \cdot x = \frac{x^2}{100}$.

Assim, a nota inicial de x, depois do castigo será $x - \frac{x^2}{100}$. Consideremos a função da nota depois do castigo dada por

$$f(x) = x - \frac{x^2}{100}.$$

Como a nota mínima é 0 e a máxima é 100, trabalharemos apenas com valores de x entre 0 e 100, ou seja, $D_f = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 100\}$.

a) Como $a = -\frac{1}{100} < 0$ e seja $V = (x_v, y_v)$ o vértice da parábola que representa a função, a maior nota será dada a quem teve nota igual a x_v e o valor dessa nota depois do castigo será y_v. Calculando, temos:

$$x_v = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{100}\right)} = -\frac{1}{-\frac{2}{100}} = -\left(-\frac{100}{2}\right) = 50$$

e

$$y_v = f(x_v) = f(50) = 50 - \frac{50^2}{100} = 25.$$

Logo, quem obter nota mensal 50 terá a maior nota após o castigo, sendo esta nota 25.

b) Como o domínio da função é o intervalo $[0, 100]$ e o ponto médio $x = 50$ é o vértice da função, $x = 0$ e $x = 100$ são os valores em que $f(x) = 0$, ou seja, são as raízes da equação $x - \frac{x^2}{100} = 0$. Logo, terá menor nota final aqueles que tirarem 0 ou 100 como nota mensal.

c) Sabemos que a parábola é simétrica em relação ao eixo de simetria e, neste caso, o eixo de simetria é a reta $x = x_v = 50$. Assim, $f(50 - n) = f(50 + n)$, para $0 \leq n \leq 50$. Por exemplo,

- $f(50-25) = f(25) = 25-\frac{25^2}{100} = 18,75$ e $f(50+25) = f(75) = 75-\frac{75^2}{100} = 18,75$;
- $f(50 - 20) = f(30) = 30 - \frac{30^2}{100} = 21$ e $f(50 + 30) = f(80) = 80 - \frac{80^2}{100} = 21$;
- $f(50 - 49) = f(1) = 1 - \frac{1^2}{100} = 0,99$ e $f(50 + 49) = f(99) = 99 - \frac{99^2}{100} = 0,99$.

Portanto, os alunos estão certos em suas reclamações.

Caso algum aluno demonstre interesse em conhecer a prova algébrica da simetria da parábola, pode-se apresentar o desenvolvimento a seguir, pois é necessário apenas manipulação algébrica e substituição das coordenadas do vértice da parábola.

Seja $V = (x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ o vértice e $x = x_v = -\frac{b}{2a}$ o eixo de simetria da parábola que representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Esta parábola é simétrica em relação ao eixo de simetria, ou seja, $f(x_v - n) = f(x_v + n)$, onde $n \in \mathbb{R}$. De fato,

$$f(x_v - n) = a(x_v - n)^2 + b(x_v - n) + c = a{x_v}^2 - 2anx_v + an^2 + bx_v - bn + c =$$
$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - 2an\left(-\frac{b}{2a}\right) + an^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) - bn + c = \frac{b^2}{4a} + bn + an^2 - \frac{b^2}{2a} - bn + c =$$
$$= -\frac{b^2}{4a} + an^2 + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + an^2 = -\frac{\Delta}{4a} + an^2 = y_v + an^2.$$

e

$$f(x_v + n) = a(x_v + n)^2 + b(x_v + n) + c = a{x_v}^2 + 2anx_v + an^2 + bx_v + bn + c =$$
$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + 2an\left(-\frac{b}{2a}\right) + an^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + bn + c = \frac{b^2}{4a} - bn + an^2 - \frac{b^2}{2a} + bn + c =$$
$$= -\frac{b^2}{4a} + an^2 + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} + an^2 = -\frac{\Delta}{4a} + an^2 = y_v + an^2$$

Portanto, $f(x_v - n) = y_v + an^2 = f(x_v + n)$, para todo $n \in \mathbb{R}$.

Problema 4.9. *Augusto tem um arame com 10 metros de comprimento. Ele realiza um corte em um ponto do arame, obtendo assim, dois arames, um com comprimento x e outro $10 - x$. Augusto usa os dois pedaços de arame para fazer dois quadrados.*

a) Qual é o comprimento do lado de cada um dos quadrados? Qual é a área de cada um?

b) Qual é o valor de cada um dos dois pedaços de arame para que a soma das áreas dos quadrados obtidos seja mínima?

Resolução: Ao dividirmos o pedaço de arame de 10 metros em outros dois pedaços, tomemos que um desses pedaços tem cumprimento x metros e, consequentemente, o outro pedaço terá comprimento $10 - x$ metros.

a) Sabemos que um quadrado tem os quatro lados iguais e sua área é o quadrado do comprimento de seu lado. Assim,

- um quadrado terá lado $\frac{x}{4}$ e área $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$;
- e o outro quadrado terá lado $\frac{10-x}{4}$ e área $\left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{100-20x+x^2}{16}$.

b) Seja $S(x)$ a função que nos dá a soma das áreas dos dois quadrados em termos de x. Pelo item anterior,

$$S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{100 - 20x + 2x^2}{16} = \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{4}.$$

Assim, $S(x)$ é uma função quadrática com $a = \frac{1}{8} > 0$. Seja $V = (x_v, S_v)$ o vértice da parábola que representa a função. A área mínima será atingida no ponto dado pela abscissa do vértice, ou seja,

$$x_v = \frac{\left(-\frac{5}{4}\right)}{2 \cdot \frac{1}{8}} = -\frac{-\frac{5}{4}}{\frac{2}{8}} = -(-5) = 5.$$

Portanto, o arame deverá ser cortado exatamente ao meio para que a soma das áreas seja mínima, ou seja, os dois pedaços terão 5 metros de comprimento.

Observação: 4.3. *Ao longo das resoluções destes exemplos/problemas em sala de aula, é importante que o professor faça o gráfico de cada função e indique o vértice da parábola, para assim o aluno ter a certeza de que os valores das suas coordenadas evidenciam máximos ou mínimos.*

4.2.3 Viabilidade de Aplicação da Proposta em Sala de Aula

Conforme dito no início do capítulo, esta proposta não foi aplicada em sala de aula. Contudo, alguns professores de escolas públicas e particulares foram apresentados a este material e se posicionaram quanto à viabilidade de sua aplicação. A seguir, elencamos fielmente alguns desses comentários.

- "achei muito interessante a forma com que foram abordadas as definições e proposições, exemplificando-as";

- "eu também trabalharia assim, com exemplos mais práticos de início, onde os alunos possam "treinar"o reconhecimento dos coeficientes, e o cálculo das coordenadas do vértice (ponto de mínimo ou de máximo) de cada função para depois introduzir situações problema mais elaboradas";

- "Gostei dos exemplos abordados. Primeiro, exemplos básicos de aplicação de fórmula e depois exemplos mais complexos, mostrando que o conteúdo se aplica em diferentes situações do dia-a-dia, como por exemplo, maximização de lucro, além de outras áreas do conhecimento, como a Física. Em resumo, a proposta tem tudo para surtir efeitos positivos ao aprendizado do aluno";

- "as situações apresentadas são muito interessantes e pode-se visualizar grande aplicação da teoria de função quadrática na física e em problemas de engenharia, isso chama muito a atenção dos alunos, pois permite enxergar a matemática muito além do que apenas decorar fórmulas e também visualizar que a mesma está presente em muitas outras áreas, bem como em problemas cotidianos";

- "creio que a maior dificuldade na aplicação e desenvolvimento destes problemas enunciados seria o fato de a maioria deles trazer coeficientes fracionários. Os alunos da rede pública têm grande defasagem nos conceitos básicos de matemática, como frações e regras de sinais, o que dificultaria bastante o desenvolvimento do problema. A maioria dos alunos da 1ª série do ensino médio aos quais a aplicação do trabalho é destinado não tem domínio das operações com frações, ou seja, não sabem (ou

> não se lembram) como multiplicar, dividir, somar e subtrair frações. Ao meu ver essa seria a maior dificuldade em desenvolver os exercícios que contêm coeficientes não inteiros. Caso necessite, a saída seria o professor retomar as operações com frações antes ou durante a resolução, revendo conceitos que os alunos não dominam. Contudo, a aplicação desta proposta seria muito interessante, visto que os problemas abordados são muito ricos em detalhes, cálculos e situações intrigantes que tendem a buscar maior atenção dos alunos".

Diante destas manifestações positivas e sugestões, concluímos que a aplicação desta proposta é viável em sala de aula e cabe a cada professor as adequações que julgar necessário tanto ao conteúdo, quanto aos problemas propostos, permitindo uma melhor compreensão e aprendizado aos alunos.

Considerações Finais

Este trabalho dedicou-se a estudar máximos e mínimos de funções de uma e de duas variáveis reais, propondo material para o desenvolvimento do conceito de valores extremos de funções quadráticas no Ensino Médio. Desta forma, trabalhamos tal conceito dividindo nosso estudo de acordo com a conveniência e pertinência dos resultados envolvidos. Tal divisão possibilitou que inicialmente apresentássemos apenas resultados preliminares para utilização ao longo do trabalho. No capítulo 2 o trabalho voltou-se para garantir a existência de extremos locais em funções contínuas tanto de uma quanto de duas variáveis, onde provamos diversos resultados importantes e finalizamos com a demonstração do Teorema de Weierstrass. Com a garantia da existência dos valores extremos, seguimos adiante com o capítulo 3, onde visamos o estudo dos valores extremos em funções deriváveis, trazendo a teoria básica, discutindo-a e, sempre que possível, apresentando exemplos de aplicação direta, de situações cotidianas e também de otimização. Dessa forma podemos compreender os demais resultados e métodos do capítulo que nos permitem encontrar os pontos extremos das funções. Já no último capítulo, trabalhamos com funções quadráticas e, em especial, desenvolvemos uma proposta para aplicação na 1ª série do Ensino Médio, evidenciando deduções de fórmulas, demonstrações de forma simples e trabalhando com diversos problemas interessantes. Vale lembrar que para tal proposta focou-se em encontrar o vértice da parábola, visto que isso nos permite uma melhor visualização dos valores extremos caso seja feito o esboço do gráfico da função.

Por fim, acreditamos que o trabalho direto com Cálculo Diferencial, Análise Real e Otimização permite que professores aprofundem seus conhecimentos sobre o conceito de valores extremos a fim de que tenham suporte teórico e outras estratégias para preparar aulas mais interessantes e interativas, buscando diálogo com os alunos e possibilitando que situações problemas sejam solucionadas. Ressaltamos que o estudo através destas situações permite ao aluno o desenvolvimento da sua capacidade de raciocínio, gerando resultados positivos no crescimento intelectual discente.

Referências Bibliográficas

[1] ABREU, A; BELTRÁN, J; FARFÁN, J; HILÁRIO, M; FRANCO, T. *Banco de Questões 2014 - Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP*. Rio de Janeiro, 2014.

[2] BASSANEZI, R. C. *Funções de Uma Variável.* Santo André: Universidade Federal do ABC. Edição online: http://gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/listas/fuv/notasdeaulas/funcoes_de_uma_variavel_-_fuv_-rodney.pdf. Acesso em 09 de julho de 2015.

[3] DANTE, L. R. *Matemática: Contexto & Aplicações - vol. 1.* 2ª ed. São Paulo: Ática, 2014.

[4] DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas em Matemática.* São Paulo: Ática, 1989.

[5] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo - Vol. 1.* 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[6] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo - Vol. 2.* 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[7] IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D; PÉRIGO, R. *Matemática - Volume Único.* 4ª ed. São Paulo: Atual, 2007.

[8] IEZZI, G; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar: Limites, Derivadas e Noções de Integral - Vol. 8.* 6ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

[9] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de Uma Variável - Vol. 1.* 9ª ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2007.

[10] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de n Variável - Vol. 2.* 3ª ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2007.

[11] MACHADO, N. J; GRANJA, C. E. S. C; MELLO, J. L. P; MOISÉS, R. P; FONSECA, R. F; PIETROPAOLO, R, C; SPINELLI, W. *Currículo do Estado de São Paulo - Matemática e Suas Tecnologias.* 1ª ed. São Paulo, 2012.

[12] OBMEP. *Banco de Questões 2010 - Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.* Rio de Janeiro, 2010.

[13] OBMEP. *Banco de Questões 2012 - Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[14] PAIVA, M. *Matemática - Volume Único.* 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2005.

[15] PESCO, D. U; ARNAUT, R. G. T. *Matemática Básica - Volume Único - Módulo 1.* 5ª ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

[16] POLYA, G. A. *A Arte de Resolver Problemas.* São Paulo: Interciência, 1977.

[17] SBM. *Fundamentos de Cálculo.* Material Disponibilizado ao PROFMAT, 2012.

[18] VILCHES, M. A; CORRÊA, M. L. *Cálculo - Vol. 2.* Rio de Janeiro: Departamento de Análise Matemática - UERJ. Edição online: http://www.ime.uerj.br/~calculo/LivroII/calculo2.pdf. Acesso em 09 de julho de 2015.